Devoir à la maison n° 18

À rendre le 7 avril

Première partie

Soit la fonction φ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de φ.

2) Montrer que φ est dérivable sur son ensemble de définition et déterminer sa dérivée.

3) Etudier le signe de $\varphi'(x)$.

4) Déterminer les limites de φ aux bornes de son ensemble de définition.

5) Montrer que φ peut être prolongée par continuité en 0 en une fonction que l'on notera également φ. Montrer que cette fonction ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.

6) Déterminer le tableau de variation de φ et tracer sa courbe représentative.

Deuxième partie

Soit f une fonction définie continue et **positive** sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Soit la fonction g définie par :

$$g(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{f(t)}{1 + x\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

7) Montrer que g est définie sur $]-1, +\infty[$.

8) On suppose dans cette question que : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ f(t) = \cos t$. Calculer $g(x)$.

9) On suppose dans cette question que : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ f(t) = \sin(2t)$. Calculer $g(x)$.

10) Soit a un réel supérieur strictement à -1. Montrer que l'on peut trouver un réel K tel que :

$$\forall\,(x,y) \in\,]a, +\infty[^2,\ |g(x) - g(y)| \leq K\,|x-y|\,.$$

En déduire que la fonction g est continue sur $]-1, +\infty[$.

11) Montrer, sans utiliser la dérivabilité, que g est décroissante sur $]-1, +\infty[$.

12) Montrer que la fonction f est majorée sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

13) Soit M un majorant de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $b \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. En écrivant $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} = \int_0^b + \int_b^{\frac{\pi}{2}}$, montrer que :

$$\forall\ x > 0,\ \ g(x) \leq Mb + \frac{M\pi}{2(1 + x\sin b)}.$$

14) En déduire la limite de la fonction g en $+\infty$.

15) Montrer que g admet une limite L finie ou infinie en -1. On illustrera chacun des deux cas avec un exemple.

— FIN —