Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 point, total sur 30 points, ramené sur 5 points ,+15%.
- Problème et exercice de TD, chaque question sur 4 points, total sur 92 points (version 1) ou 100 points (version 2), ramené sur 15 points, +35% (version 1) ou +75% (version 2).

Statistiques descriptives.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \min\left(\frac{1}{10}\lceil 10x \rceil ; 20\right)$.

	Calculs	Problème (V1)	Problème (V2)	Note finale
Transformation	c	p_1	p_2	$\varphi\left(1,15\frac{5c}{30}+1,35\frac{15p_1}{92}+1,75\frac{15p_2}{100}\right)$
Note maximale	24	$47,5$	60	$19,6$
Note minimale	$2,5$	10	13	$3,7$
Moyenne	$\approx 13,20$	$\approx 32,90$	$\approx 34,54$	$\approx 10,34$
Écart-type	$\approx 3,68$	$\approx 8,76$	$\approx 14,96$	$\approx 3,02$
Premier quartile	11	$28,75$	$24,75$	$8,95$
Médiane	13	34	$33,5$	$10,1$
Troisième quartile	$15,88$	$38,25$	$42,75$	$11,65$

Remarques générales.

• Les théorèmes doivent être utilisés en citant toutes leurs hypothèses. Par exemple, pour le TVI, vous devez vous assurer d'être en train d'étudier une fonction continue sur un intervalle.
• Introduisez toutes vos variables. Vous serez systématiquement sanctionnés, sinon.
• Quelques rappels sur les notations de suites : (a_n) est un (léger) abus de notation pour $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La variable n y est muette : $(a_\heartsuit)$ est tout à fait valide, quoique déconseillé. Cela dit, a_n est un nombre, n doit alors être introduit. C'est la même distinction pour les fonctions : $x \mapsto f(x)$ est une fonction, le x est muet, alors que $f(x)$ est un nombre.
• « d'après Bézout » : si Bézout vous a parlé, vous avez du souci à vous faire, et je ne pourrai pas vous aider ... Cependant, « d'après le théorème de Bézout » est correct.
• Écrire une hypothèse de récurrence du type P_n : « $\forall n \in \mathbb{N}$, [...] » est une ☠HORREUR☠ !
• Ne recopiez pas l'énoncé, cela vous fait perdre du temps et ne peut qu'énerver le correcteur.

Un exercice vu en TD : fonctions contractantes.

$|f(x) - f(y)| < |x - y|$ n'est valable que pour $x \neq y$, sinon vous écrivez $0 < 0$ ...

Suite de Fibonacci

2) Écrire $u_n > 0$ ne veut pas dire que $u_n \in \mathbb{N}^*$: vous devez aussi dire que n est entier. Il est dommage de rater une récurrence aussi simple ...

3) Beaucoup ont écrit une « récurrence », sans utiliser l'hypothèse de récurrence dans l'hérédité. Je l'ai (légérement sanctionné). De plus, cela ne vous met (absolument) pas en valeur. Lisez ce que vous écrivez ! Sur une question aussi simple que celle ci, c'est quand même dommage.

4) Vous ne pouvez pas écrire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \geqslant n$. De même, écrire $u_n \geqslant n$ sans introduire n est incorrect, donc sanctionné.

La plupart du temps, la récurrence double effectué était incorrecte (l'initialisation devait se faire à $n = 1$ et $n = 2$). Cette question pouvait se traiter par récurrence simple en remarquant que si $n \leqslant u_n < u_{n+1}$, comme $u_{n+1} \in \mathbb{N}$, alors $u_{n+1} \geqslant n + 1$.

5) Ne pas remarquer que (a_n) est géométrique n'est pas du plus bel effet ...

6) Au lieu de dupliquer les arguments pour n pair/impair, multipliez la relation par $(-1)^n$.

7)c) Il est franchement maladroit de « montrer » que $x \to 0$ (*idem* pour y_n). En effet, si l'on savait montrer si simplement que x et y convergent, pourquoi s'embêter à montrer qu'elles sont adjacentes ?

7)d) Dire que « x et y sont deux sous-suites de v qui convergent vers un même réel ℓ, donc $v \to \ell$ » est incorrect. Ce ne sont pas des sous-suites quelconques de v.

Entiers de Gauss

1) Il est facile de passer beaucoup de temps (certains ont écrit 3 pages pour y répondre) sur ce type de question, qui rapporte peu de points au concours. Il faut bien identifier les points évidents et ceux où vous devrez insister, puis rédiger efficacement. Ainsi, les propriétés des lois de $\mathbb{C}$ ne sont pas à démontrer : $+$ et $\times$ sont associatives et commutatives sur $\mathbb{C}$, inutile d'en dire plus. Pour montrer que $(\mathbb{Z}[i], +)$ est un groupe, le plus rapide est de montrer que c'est un sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$. Si vous n'y pensez pas, le point le plus important est de montrer que $+$ est une l.c.i. sur $\mathbb{Z}[i]$. C'est d'ailleurs le point que vous omettez le plus souvent ! *Idem* pour $\times$.

2)a) Voir que $N(z) = z\bar{z}$ simplifiait beaucoup la question (ainsi que la suivante).
$(\mathbb{Z}, \times)$ n'est pas un groupe, vous ne pouvez donc dire que N est un morphisme puis parler de noyau.

2)b) $N(z)N(y) = 1$ ne permet de montrer $N(z) = 1$ qu'une fois avoir remarqué que $N(z), N(y) \in \mathbb{N}$.

3)a) Un nombre premier p peut s'écrire comme produit de deux entiers : $p = p \times 1$. Il convenait donc de montrer que, si z est réductible, $N(z)$ s'écrit comme produit de deux entier naturels non nuls et différents de 1.

3)b) J'ai lu beaucoup de tentatives d'arnaque du type « $1 + 3i$ est irréductible, or $N(1 + 3i) = 10$ n'est pas premier ». Il fallait bien entendu justifier que le nombre écrit est irréductible.

4)a) Si $|x - a| \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $|y - b| \leqslant \dfrac{1}{2}$, l'inégalité triangulaire donne juste $|(x + iy) - (a + ib)| \leqslant 1$, et non < 1. Il suffisait de passer au carré du module.

Bijections bicontinues.

1) Écrire « si $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 2x - \varphi^{-1}(x)$ donc $\varphi \circ \varphi(x) = 2\varphi(x) - x$ » n'est pas correct (ou insuffisamment justifié) : vous donnez l'impression de composer à gauche par φ ! Il convient en fait de composer *à droite* par φ.

2) Si une fonction est bijective et continue, vous devez dire qu'elle est définie sur un intervalle pour conclure à sa monotonie stricte.

3) Cette question était plus délicate qu'il n'y paraissait. Pour traiter facilement le cas $n < 0$, vous pouviez penser à appliquer ce qui précédait à φ^{-1} et remarquer que $\varphi^{-1} - \mathrm{Id} = -(\varphi - \mathrm{Id})$ par définition.

4) Vu que $h(a) > 0$, revenir à la propriété d'Archimède pour montrer que $nh(a) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ est quelque peu excessif.

7) C'est une question de synthèse !

Limites inférieures et supérieures d'une suite bornée.

1)b) Il est faux de dire que si $u_k \in U_n$, alors $k \geqslant n$. Par exemple, si u est constante, $\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \in U_n$.
De même, écrire $U_{n+1} = U_n \setminus \{u_n\}$ est faux. Cependant, $U_n = U_{n+1} \cup \{u_n\}$ est vrai.

1)c) Je vous rappelle qu'un majorant d'une suite est une *constante*. Dire que (m_n) est majorée par (M_n) n'apporte rien.