**Devoir surveillé n°8**
**Version 1**

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

# I. Un exercice vu en TD.

Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.
Montrer qu'il existe $a \in ]0,1[$ telle que $f(a) = a$.

# II. Une fonction définie par une intégrale.

Soit $G$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $G(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

**1)** Établir que $G$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et donner sa dérivée.

**2)** En déduire que $G$ est décroissante sur un intervalle $[M,+\infty[$, pour un certain $M \in \mathbb{R}$ que l'on ne déterminera pas.

**3)** Montrer que $G$ admet une limite $L$ quand $x$ tend vers $+\infty$ (on ne demande pas la valeur de $L$).

**4)** Le but de cette question est de déterminer $L$.

  **a)** Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $F$ croît sur $\mathbb{R}_+$.

  **b)** En écrivant $F(x)$ sous la forme $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, et en utilisant que pour tout $t \geqslant 1$, on a $t^2 \geqslant t$, montrer que $F$ est majorée.

  **c)** Exprimer $G(x)$ en fonction de $F$ et de $x$. En déduire la valeur de $L$.

## III. Les matrices magiques.

L'objectif de cet exercice est d'étudier certaines propriétés des matrices dites *magiques*.

Une matrice réelle $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ r & s & t \\ x & y & z \end{pmatrix}$ est dite magique si les sommes de ses coefficients selons ses trois lignes, ses trois colonnes et ses deux diagonales sont égales. Plus précisément, cette matrice $M$ est magique si toutes les sommes

$$\begin{aligned} \ell_1(M) &= a+b+c \\ \ell_2(M) &= r+s+t \\ \ell_3(M) &= x+y+z \\ c_1(M) &= a+r+x \\ c_2(M) &= b+s+y \\ c_3(M) &= c+t+z \\ d_1(M) &= a+s+z \\ d_2(M) &= x+s+c \end{aligned}$$

sont égales. On note alors $\Sigma(M)$ la valeur de ces sommes, que l'on appelle *somme* de la matrice $M$.

On note $\mathscr{M}$ l'ensemble des matrices réelles magiques de dimension 3. On notera aussi $\mathscr{M}_0$ l'ensemble des matrices réelles magiques de dimension 3 et de somme nulle.

On note usuellement $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées de dimension 3. On identifiera $\mathbb{R}^3$ à $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, l'espace des vecteurs colonnes de dimension 3.

On introduit aussi les trois matrices particulières suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**1)** Parmi les matrices $A$, $B$ et $J$, dire lesquelles sont magiques et donner la somme de chacune de ces dernières.

**2)** Montrer que $\ell_1$ est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

On montrerait de même que $\ell_2, \dots, d_2$ dont des formes linéaires sur $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

**3)** Montrer que $\mathscr{M}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

**4)** Montrer que $\Sigma$ est une forme linéaire sur $\mathscr{M}$.

**5)** Quel lien peut-on établir entre $\mathscr{M}_0$ et $\Sigma$ ? Que peut-on en déduire de simple sur $\mathscr{M}_0$ ?

**6)** Soit $M$ une matrice magique, montrer que $M^\top$ est aussi une matrice magique. Quelle est la somme de $M^\top$ ?

**7)** Soit $M \in \mathscr{M}$, déterminer un réel $\lambda$ tel que $M - \lambda J \in \mathscr{M}_0$. A-t-on unicité d'un tel $\lambda$ ?

**8)** Soit $M \in \mathscr{M}_0$. Montrer qu'il existe deux uniques matrices $S_1$ et $S_2$ telles que
— $S_1$ est symétrique ;
— $S_2$ est antisymétrique ;
— $M = S_1 + S_2$.
On explicitera notamment $S_1$ et $S_2$ en fonction de $M$.

**9)** Avec les matrices introduites précédemment, montrer que $S_1$ et $S_2$ sont magiques, et de somme nulle.

**10)** En écrivant les coefficients de $S_2$, montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $S_2 = \mu B$.

**11)** En procédant de même pour $S_1$, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $S_1 = \lambda A$.

**12)** En déduire une base de $\mathscr{M}_0$, puis montrer que $(A, B, J)$ est une base de $\mathscr{M}$.

On cherche maintenant à compter le nombre de matrices magiques à coefficients entiers naturels, de somme fixée.
Soit donc $M$ une matrice magique de dimension 3, que l'on écrit

$$M = aA + bB + cJ.$$

**13)** On suppose que les coefficients de $M$ sont entiers naturels.

- **a)** Montrer que $a$, $b$ et $c$ sont entiers relatifs et exprimer $\Sigma(M)$ en fonction de $c$.
- **b)** Montrer que l'on a les relations $|a+b| \leqslant c$ et $|a-b| \leqslant c$.

**14)** Montrer réciproquement que si $a, b, c$ sont entiers et vérifient $|a+b| \leqslant c$ et $|a-b| \leqslant c$, alors les coefficients de $M$ sont entiers naturels.

**15)** Si l'on fixe $c$, on en vient donc à compter le nombre de points à coordonnées entières dans le carré de sommets $(0, c)$, $(c, 0)$, $(0, -c)$ et $(-c, 0)$ (voir la figure 1, où l'on a représenté en grisé le carré pour $c = 2$). On note $p_c$ ce nombre. On pourra remarquer que $p_2 = 13$.

- **a)** Que valent $p_0$ et $p_1$ ?
- **b)** En utilisant la figure, justifier que si $n \geqslant 1$ : $p_{n+1} = p_n + 4(n+1)$.
- **c)** En déduire la valeur de $p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**16)** Combien y a-t-il de matrices magiques de dimension 3 et à coefficients entiers naturels, dont la somme vaut 12 ?

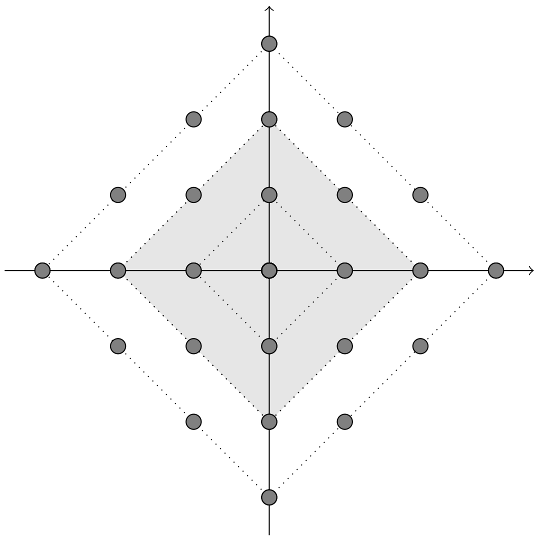

Figure 1 – Représentation des carrés

**— FIN —**