Devoir surveillé n° 6 - Remarques

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 36 points, ramené sur 5 points.
- Problèmes : chaque question sur 4 points, total sur 104 points (v1) et 96 points (v2), ramené sur 15 points.

Statistiques descriptives.

	Calculs	v1	v2	Note finale
Note maximale	30	53	77	19
Note minimale	11	3	11	3
Moyenne	$\approx 20,58$	$\approx 21,5$	≈ 37	$\approx 10,10$
Écart-type	$\approx 5,18$	$\approx 13,41$	$\approx 22,09$	$\approx 4,31$

Remarques générales pour la v1.

La version 1 a été particulièrement peu réussie, la fatigue de fin de période s'est faite sentir très fort.
Vous m'avez tous habitué à bien mieux, vous allez rebondir et ce sera mieux la prochaine fois.
En attendant, les remarques qui vont suivre ne vont pas être très agréables.

J'ai été sévère sur les erreurs soulignées 1000 fois depuis septembre : « $f(x)$ est continue », « $f(x)'$ », les quantificateurs mal ou pas utilisés, les $\Leftrightarrow$ mal utilisés, les récurrences mal rédigées, les suites u_n sans parenthèses, et j'en passe. Franchement, je ne sais plus quoi faire ... Si certains points de rédaction ne vous paraissent toujours pas clairs, posez des questions, je réexpliquerai une 1001 ème fois, mais je préfère encore ça que de rencontrer encore et toujours ces erreurs dans vos copies.

Il va aussi falloir apprendre à vous relire, car j'ai lu des horreurs vraiment horribles et franchement inadmissibles.
Je ne veux plus lire des choses comme ça :
- supposer que $f(x_0) = -1$, faire un calcul et arriver à montrer que f est constante égale à 1 ;
- se tromper dans la dérivée de $x \mapsto x^k$;
- montrer que f est définie en 0, et donc elle est continue ;
- montrer que pour tout n, $u_{2n+1} - u_{2n} \geqslant 0$ et en déduire que (u_n) est croissante ;
- affirmer que $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$ converge, juste parce que ça vous fait rêver ;
- affirmer $\frac{(-1)^n}{n} = \frac{1}{n}$ juste parce que ça vous arrange ;
- écrire, après 6 lignes de calcul, que $|f(0)| \leqslant |f(0|$ et en déduire que f est continue ;
- écrire que $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc si $u_n < 0$ alors $u_n + \frac{1}{n} < 0$;
- $f^2(x)f(0) = f(0) \Rightarrow f^2(x) = 1$;
- $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1,\ k \text{ pair}}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$;

- si f est impaire, elle est continue ;
- si $\deg B < \deg A$, on ne peut pas effectuer la division euclidienne de A par B ;
- $\deg P' = \deg P - 1$ (sans hypothèse sur P) ;
- $u_{n+1} = u_n + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ donc (u_n) est une suite arithmético-géométrique ;
- $\dfrac{f(x)-1}{1-f(x)} = 1$.

Dans ces cas-là je n'ai eu aucun scrupule à écrire « n'importe quoi » sur vos copies, parce que c'est la vérité. Je le répète : ces erreurs sont inadmissibles. Encore une fois, si vous ne savez pas traiter une question, personne ne vous oblige à répondre. Mieux vaut ne rien écrire que d'écrire une ânerie, dont le correcteur va se souvenir pendant tout la copie, et qui va certainement vous faire perdre des points. Dans le doute, on ne donne pas de points à un élève qui a été capable d'écrire n'importe quoi quelques pages avant ; mais on en donne à un élève qui a traité peu de questions, mais qui les a bien traitées. Je vous le dis depuis septembre, il serait temps que ça rentre.

Vous aurez peut-être remarqué (après coup malheureusement) que :
- l'exercice I déjà vu en TD a été, comment dire ... déjà vu en TD ;
- la question II.1.a a été traitée au moins 3 fois en cours, TD et DM ;
- la question II.1.b a été traitée au moins 3 fois en cours, TD et DM ;
- la question II.2 a été traitée de manière assez proche dans l'exercice 4.2.2 du chapitre XIV ;
- la question II.2 a été traitée de manière très proche dans la question 5 du DM 13, que j'avais rendu en début de semaine ;
- la question II.2 a été traitée en cours suite à une question de Margot quand j'ai rendu le DM 13 ;
- la question II.5.d était essentiellement une question de cours ;
- la question III.1.a est exactement l'exercice 15 de la feuille de TD n° 12 ;
- la question III.2.a est une question de cours.

Je suis bien conscient que le rythme en prépa est très soutenu et qu'il est très difficile de tout assimiler, mais essayez quand même de revoir vos exos de TD de temps en temps, et de vous souvenir, même vaguement, des méthodes que vous avez déjà rencontrées. Il y a un aspect « bâchotage » en prépa : ceux qui auront fait beaucoup d'exercices pendant leurs deux ans de CPGE auront rencontré beaucoup de situations type et appris beaucoup de techniques réutilisables pour les concours. Ceux-là réussiront mieux, à condition évidemment de ne pas avoir tout oublié.
Si en fait vous n'avez pas compris ces exercices en cours, là encore je me répète : posez des questions !! Avec notre système de « classe inversée », nous avons beaucoup de temps en classe pour faire des séances de questions / réponses ou refaire des démonstrations de cours ou des exercices de TD. C'est d'ailleurs le but de l'opération. Mais presqu'à chaque que je vous demande si vous voulez que l'on revoie quelque chose, je fais chou blanc ... C'est bien dommage (pour vous). Profitez de ces moments, n'hésitez pas, n'ayez pas peur de demander à refaire un exercice, personne ne va se moquer de vous, au contraire, 10 autres élèves au moins seront bien contents que quelqu'un ait posé la question pour eux. Et vu le nombre d'exos supplémentaires que je donne, ceux qui trouveront inutile de refaire un exercice qu'ils ont déjà compris auront largement de quoi s'occuper pendant ce temps. On peut même se répartir par groupes, un petit groupe qui refait tel exo avec moi, un autre qui fait autre chose : les solutions ne manquent pas, profitez-en !!

I. Un exercice vu en TD (v1).

Plutôt bien traité, mais si $\deg B < \deg A$, alors on peut diviser A par B : $A = 0 \times B + A$.
Il est vraiment dommage de se planter dans la résolution d'un système 2×2 aussi simple ...

II. Une équation fonctionnelle (v1).

1 à 2 cf. remarques précédentes.

2 Beaucoup se sont contentés du résultat sur $\mathbb{Q}$, et ne sont pas passé à $\mathbb{R}$. Pourquoi, mystère ... D'autres ont dit que les homothéties étaient DES solutions, et en ont tiré que c'étaient LES solutions. Le raisonnement par analyse-synthèse reste toujours un point délicat.

3 Je suis stupéfait de voir le taux d'échec à cette question de niveau bac ... On prend λ une constante, et on résout $\lambda = \dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2}$, équation niveau terminale. Je ne comprends même pas que vous puissiez avoir l'idée de procéder autrement. Et pourtant, que d'idées loufoques j'ai pu croiser ... La palme revenant à ceux qui veulent dériver la relation, pour en déduire je ne sais pas trop quoi (et eux non plus) : on ne sait pas si f est dérivable, la relation est horrible à dériver, et il y a deux variables ...

4 Impressionné là aussi par le nombre de fois où j'ai pu lire $\dfrac{f(x)-1}{1-f(x)} = 1$.
Attention, $|f(2x_0)| = |f(x_0)|$ n'implique pas que $|f(x_0)| = |f(x_0/2)|$.

5.a Que d'idées tordues là encore ...

5.b Le but est de montrer que $f(x)$ tend vers $f(a)$ en a. L'affirmer gratuitement pour conclure est une arnaque.

5.c Un bête TVI. Je vous rappelle que quand vous l'utilisez, vous devez le nommer.

5.d Pour la continuité d'Argth, une majorité utilise que th est strictement monotone, donc Argth aussi (et ils l'expliquent très mal), et comme elle est bijective, elle est continue. C'est correct ... mais digne d'un gros shadok. La réciproque d'une bijection continue est continue, ça ne vous plaisait pas comme théorème ? ?

5.e Les formules de trigo hyperboliques sont hors-programme, il faut les démontrer.
Ne pas oublier la continuité de th en 0.

III. Suite, polynôme, suite ... (v1).

1.a. Exercice 15 de la feuille 12. J'ai lu tout et n'importe quoi, cf. remarques précédentes.

1.b Pourquoi pas par récurrence, mais alors une récurrence double.

2.a Question de cours sur les racines n-èmes, horrible.

3.a Encore le TVI.

4.a Une équation du second degré avec discriminant, que d'erreurs ...

I. Polynômes laissant stable quelques ensembles (v2).

1.a Une définition de $\overline{P}$ et une justification de $P = \overline{P}$ ssi $P \in \mathbb{R}[X]$ aurait été les bienvenues.
Ne confondez pas $\overline{P}(x)$ et $\overline{P(x)}$.

3.a Vu la simplicité de la question, on attendait une démonstration précise et complète, pas une phrase vite fait qui expédie le problème.
L'utilisation des congruences était la méthode la plus efficace.

4 La convention $\dbinom{n}{k} = 0$ si $k > n$ est courante mais pas officielle, vous devez impérativement la préciser quand vous l'utilisez. Surtout que dans cette question et la suivante, beaucoup de choses reposaient dessus.
Si $n < 0$, $n!$ n'existe pas, même si ça vous fait très envie.

5 Je ne comprends pas que vous puissiez traiter la question sans distinguer des cas, surtout vu l'indication ...

6 Si vous le faites par récurrence, énoncez précisément l'hypothèse, et dites sur quelle variable vous faites la récurrence : il y avait ici n et k. Il faut de toute façon quantifier l'autre variable.
Quand vous utilisez la formule de Pascal, il est indispensable de la citer.
On ne pouvait bien sûr utiliser la question 4 que dans le cas où $n \geqslant k$.

7.a Vous avez trop souvent oublié le cas $\deg P = 0$.

7.b Il s'agit d'une somme télescopique. Vous avez choisi la v2, donc il faut assumer votre statut de super star : une démo avec des petits points est indigne (c'est quand même aussi un peu le cas d'un élève de sup au mois de février).

II. Monotonie et discontinuité (v2).

1.a Cette question reposait à 100% sur le théorème de la limité monotone. Il était absolument inenvisageable de ne pas le nommer. Et il fallait également l'employer pour justifier que les limites en question existaient bien (même si l'énoncé les utilisaient).

1.c Il fallait penser à préciser que la réunion était dénombrable, c'est-à-dire que l'ensemble des indices de cette union était un ensemble dénombrable.

1.d Le plus simple était d'utiliser que si f était décroissante, $-f$ était croissante : c'est une « astuce » usée jusqu'à la corde et mentionnée souvent en cours. On appliquait alors le résulat précédent à $-f$, mais il fallait bien préciser que f et $-f$ avaient les mêmes points de discontinuité. L'énoncé suggérait de procéder ainsi plutôt que de reprendre les résultats précédents en les adaptant.

2.a Vrai / faux : si $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, est-ce que (u_n) converge ? si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, est-ce que $\sum v_n$ converge ?
Vous n'avez plus le droit de vous ramasser là-dessus.

2.c Il fallait montrer que $\mathbb{Q}$ était dénombrable. Ceux qui l'ont fait ce sont souvenu des devoirs antérieurs et ont utilisé Cantor-Bernstein : bravo. On pouvait aussi utiliser, au vu des résultats annoncés au début du problème, que $\mathbb{Q} = \bigcup_{a\in\mathbb{Z}} E_a$, avec $E_a = \left\{\frac{a}{b},\ b \in \mathbb{N}^*\right\}$. C'est donc une union dénombrable d'ensembles dénombrables.

Et pour finir, noyons-nous allégrement dans ce puits de sagesse insondable :