Feuille d'exercice n° 26 : **Espaces euclidiens – Correction**

Exercice 1

1) Oui.

2) Non : on remarque que $\chi(P,P) = \int_{-1}^{1} 2P'P = [P^2]_{-1}^{1} = P^2(1) - P^2(-1)$. Si $P = X$, $\chi(X,X) = 0$. Ainsi $P \neq 0$ mais $\chi(P) = 0$. Ou encore : $\chi(X-1, X-1) = -4 < 0$.

3) Oui.

Exercice 2 $\langle Q,P\rangle = (b_0+b_1)a_0 + (b_0+3b_1)a_1 + 3b_2a_2 = (a_0+a_1)b_0 + (a_0+3a_1)b_1 + 3a_2b_2$ après développement. Donc $\langle Q,P\rangle = \langle P,Q\rangle$.
Si $R = c_0 + c_1X + c_2X^2$ $\langle P, Q+\lambda R\rangle = (a_0+a_1)(b_0+\lambda c_0) + (a_0+3a_1)(b_1+\lambda c_1) + 3a_2(b_2+\lambda c_2) = \langle P,Q\rangle + \lambda \langle P,R\rangle$, donc nous avons la linéarité par rapport à la première variable. La symétrie assure la linéarité par rapport à la seconde variable.
$\langle P,P\rangle = (a_0+a_1)a_0 + (a_0+3a_1)a_1 + 3a_2a_2 = a_0^2 + 2a_0a_1 + 3a_1^2 + 3a_2^2 = (a_0+a_1)^2 + 2a_1^2 + 3a_2^2 \geqslant 0$.
De plus $\langle P,P\rangle = 0$ ssi $(a_0+a_1) = a_1 = a_2 = 0$ ssi $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ ssi $P = 0$.
Il s'agit donc bien d'un produit scalaire.

Exercice 3 Grâce à l'inégalité triangulaire sur E,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} v_i\right\|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|\right)^2.$$

Ensuite, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, avec

$$v = \begin{pmatrix} \|v_1\| \\ \vdots \\ \|v_n\| \end{pmatrix},\ u = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|\right)^2 = \langle v,u\rangle^2 \leqslant \|u\|^2 \|v\|^2 = n\left(\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2\right).$$

Exercice 4

1) Inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathscr{C}^0$ muni du ps. usuel.

2) Appliquer avec g constante.

Exercice 5

1) Facile, correspond à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^{n\times n}$.

2) Avec $A_{*,j}$ la colonne j de A, $A_{i,*}$ la ligne i de A et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, on a

$$N(A)^2 = \sum_{i=1}^{n} \|A_{i,*}\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|A_{*,j}\|^2.$$

Si $x \in \mathbb{R}^n$, on a alors par l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathbb{R}^n$:

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle A_{i,*}, x\rangle^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|A_{i,*}\|^2 \|x\|^2 = N(A)\|x\|^2$$

Alors,

$$N(AB) = \sum_{j=1}^{n} \|(AB)_{*,j}\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|A \times B_{*,j}\|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} N(A) \|B_{*,j}\|^2 = N(A)N(B).$$

3) Inégalité de Cauchy-Schwarz avec $B = I_n$.

Exercice 6

1) Prendre $x = e_i$.

2) Prendre x dans $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)^\perp$.

Exercice 7

1) Tout vecteur orthogonal à tout élément de G l'est à tout élement de F.

2) $F \cap G \subset F + G$ d'où $\subset$.
Réciproquement, soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$, soit $y = f + g \in F + G$, alors $x \perp f$ et $x \perp G$ donc $x \perp y$, donc $\supset$.

3) On est dans un espace euclidien, par bi-orthogonalité $(F^\perp + G^\perp) = F \cap G$ et on passe encore à l'orthogonal.

Exercice 8

Soit $f \in F^\perp$.
Posons $g : t \mapsto tf(t)$.
On a $g(0) = 0$ et $g \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$, donc $g \in F$. De plus on a $g \perp f$, donc $\int_0^1 tf(t)^2 \,\mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)f(t) \,\mathrm{d}t = 0$. Or $t \mapsto tf(t)^2$ est une application continue à valeurs positives sur $[0,1]$, comme elle est d'intégrale nulle sur $[0,1]$, elle est donc nulle sur $[0,1]$.
On a donc $f = 0$, donc $F^\perp \subset \varnothing$.
Donc $F^\perp = \varnothing$.

Exercice 9 L'ensemble des matrices diagonales est $\mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2})$. Directement, ou passant par les orthogonaux de $\mathrm{Vect}\, E_{1,1}$ et de $\mathrm{Vect}\, E_{2,2}$, l'orthogonal est $\mathrm{Vect}(E_{1,2}, E_{2,1})$

L'ensemble des matrices symétriques est $\mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1_2} + E_{2,1})$. L'orthogonal recherché est un sev de dimension 1 du précédent. $xE_{1,2} + yE_{2,1} \perp E_{1,2} + E_{2,1}$ ssi $x + y = 0$ donc l'orthogonal recherché est celui des matrices antisymétriques.

Exercice 10 $\det(e_1, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{dvpt 2ème ligne}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$ donc il s'agit bien d'une base.

Posons $v_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit $z_2 = e_2 - (e_2.v_1)v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \dfrac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. POsons alors $v_2 = \dfrac{z_2}{\|z_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Enfin, soit $z_3 = e_3 - (e_3.v_1)v_1 - (e_3.v_2)v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc posons $v_3 = \dfrac{z_3}{\|z_3\|} = z_3$.

Ainsi $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de (e_1, e_2, e_3).

Exercice 11 Par l'absurde, supposons qu'il existe un tel A. Alors posons $B = X \times A$. On a $(B|A) = B(0) = 0$.

Or $(B|A) = \int_0^1 tA(t)^2 \,\mathrm{d}t$ et $t \mapsto tA(t)^2$ est une fonction continue à valeurs positives sur $[0,1]$. Son intégrale sur $[0,1]$ étant nulle, cette fonction est donc nulle. On en déduit $A = 0$, donc $(1|A) = 0$ ce qui est absurde (on devrait avoir $(1|A) = 1$).

NB : Notons que le théorème de Riesz ne s'applique pas ici, puisqu'on n'est pas dans un espace euclidien mais seulement un préhilbertien ($\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie). Si l'énoncé était posé dans $\mathbb{R}_n[X]$ et non dans $\mathbb{R}[X]$, le théorème de Riesz assurerait l'existence d'un tel A. Notons qu'alors on aurait $\deg A = n$. En effet, si on avait $\deg A < n$, le même raisonnement conduirait à une absurdité.

Exercice 12 Si p est orthogonal alors pour tout x $p(x) \perp x - p(x)$ et alors si $x \in E$, par le théorème de Pythagore,

$$\|x\| = \|p(x) + x - p(x)\| = \sqrt{\|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2} \geqslant \|p(x)\|.$$

Réciproquement, soit $k \in \operatorname{Ker} p$ et $i \in \operatorname{Im} p$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $p(i + \lambda k) = i$ donc $\|i\|^2 \leqslant \|i\|^2 + \|k\|^2 + 2\lambda\langle i, k\rangle$, donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|k\|^2 + \lambda\langle i, k\rangle \geqslant 0$, ce qui n'est possible que si $i \perp k$.

Exercice 13 Soit un parallélogramme défini par deux vecteurs u et v. Alors ses deux diagonales sont portées par les vecteurs $u + v$ et $u - v$.

1) Ce parallélogramme est un rectangle ssi $u.v = 0$ ssi (identité de polarisation) $\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 0$ ssi ses deux diagonales ont même longueur.

2) Les deux diagonales sont orthogonales ssi $(u+v).(u-v) = 0$ ssi $\|u\|^2 + u.v - u.v - \|v\|^2 = 0$ ssi $\|u\| = \|v\|$ ssi ce parallélogramme est un losange.

Exercice 14 Faire un dessin donne tout de suite la solution !

1) Si $\|x\| = \|y\|$, alors $x + y \perp x - y$. De plus, $x = \dfrac{1}{2}(x+y) + \dfrac{1}{2}(x-y)$ et $y = \dfrac{1}{2}(x+y) - \dfrac{1}{2}(x-y)$, donc il suffit de prendre $H = (x-y)^\perp$ si $x \neq y$, ou tout hyperplan passant par x sinon.

2) Si $\langle x, y\rangle = \|y\|^2$, alors $x - y \perp y$. Alors $x = y + x - y$, donc il suffit de prendre $H = (x-y)^\perp$ si $x \neq y$, ou tout hyperplan passant par x sinon.

3) Dans chaque cas, si $x = y$, il n'y a pas unicité. Sinon

   a) Si H est un hyperplan avec s la symétrie orthogonale demandée, alors $s(x-y) = y - x$ donc $x - y \in H^\perp$ donc (dimension) $H = (x-y)^\perp$.

   b) Si H est un hyperplan avec p la projection orthogonale demandée, alors $p(x-y) = 0$ donc $x - y \in H^\perp$ donc (dimension) $H = (x-y)^\perp$.

   Donc il y a unicité !

Exercice 15 Raisonner dans $\operatorname{Vect}(1, \operatorname{Id}, \exp)$ pour ne pas s'embêter avec des histoires de dimension. Sinon, on peut quand même montrer qu'il existe une projection « euclidienne » sur $\operatorname{Vect}(1, \operatorname{Id})$.

Ensuite : dessin et calcul avec les produits scalaires.

Exercice 16

1) Utiliser $\cos a \cos b = \dfrac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$ + dimension.

2) Facile par récurrence, P_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.

Exercice 17 Notons F et G les matrices de f et de g dans cette bon. Soit u un vecteur de E, on note u sa matrice dans cette base.

$$\langle f(u), g(u)\rangle = (Fu)^\top Gu = u^\top F^\top Gu = u^\top FGU = u^\top GFu = -u^\top G^\top Fu = -\langle g(u), f(u)\rangle.$$

On conclut directement.

Exercice 18

1) Un vecteur normal est de coordonnées $n = (1, -2, 3)$. Une base orthogonale du plan est $(u = (2, 1, 0); v = (-3; 6; 5))$. Ensuite :

$$s(x) = \frac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2}u + \frac{\langle x, v\rangle}{\|v\|^2}v - \frac{\langle x, n\rangle}{\|n\|^2}n.$$

2)

$$p(x) = \frac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2}u + \frac{\langle x, v\rangle}{\|v\|^2}v$$

3) On se place dans la bond $(a, b, c) = \left(\frac{1}{\sqrt{17}}(1, 0, -4), (0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{17}}(4, 0, 1)\right)$, dans laquelle la matrice de cette symétrie est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, et donc dans la base (i, j, k) la matrice de cette symétrie est

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{17}} & 0 & \frac{4}{\sqrt{17}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{\sqrt{17}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{17}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . {}^t\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{17}} & 0 & \frac{4}{\sqrt{17}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{\sqrt{17}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{17}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{15}{17} & 0 & -\frac{8}{17} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{8}{17} & 0 & \frac{15}{17} \end{pmatrix}.$$

4) On se place dans la bond $(a, b, c) = \left(\frac{1}{\sqrt{17}}(1, 0, -4), (0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{17}}(4, 0, 1)\right)$, dans laquelle la matrice de cette symétrie est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et donc dans la base (i, j, k) la matrice de cette symétrie est

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{17}} & 0 & \frac{4}{\sqrt{17}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{\sqrt{17}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{17}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . {}^t\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{17}} & 0 & \frac{4}{\sqrt{17}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{\sqrt{17}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{17}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{17} & 0 & -\frac{4}{17} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{17} & 0 & \frac{16}{17} \end{pmatrix}.$$

Exercice 19

1) $p(x) = \langle x, u\rangle u$ donc $p(e_j) = a_j u$ donc la matrice est $P = (a_i a_j) = (a_i) \times (a_i)^\top$.

2) Projection sur $D^\perp$: $P' = I_n - P$.
Symétrie / D : $S + I_n = 2P$ donc $S = 2P - I_n$.
Symétrie / $D^\perp$: $S' + I_n = 2P'$ donc $S' = 2P' - I_n = I_n - 2P$.

Exercice 20

1) Montrons la double inclusion (on pourrait n'en montrer qu'une et montrer l'égalité des dimensions grâce au théorème du rang).
• Soit $x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$. Alors $x = f(x)$. Soit $y \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$. Alors il existe $z \in E$ tel que $y = f(z) - z$. On a : $(x|y) = (x|f(z) - z) = (x|f(z)) - (x|z) = (f(x)|f(z)) - (x|z)$. Or f est orthogonal donc préserve le produit scalaire, et ainsi $(x|z) = (f(x)|f(z))$. D'où : $(x|y) = (x|z) - (x|z) = 0$, et $x \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})^\perp$.
• Soit $x \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})^\perp$. Puisque $f(x) - x \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$, on a $(x|f(x) - x) = 0$, soit $(x|f(x)) = (x|x) = (f(x)|f(x))$. On a alors $(f(x) - x|f(x) - x) = \|f(x)\|^2 + \|x\|^2 - 2(x|f(x)) = \|f(x)\|^2 + \|x\|^2 - 2\|x\|^2 = 0$, donc $f(x) - x = 0$, i.e. $x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.

2) $(f - \mathrm{Id})^2 = 0$ signifie que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, et d'après la question précédente on a $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})^\perp$. On a donc $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})^\perp = \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$. Or E est de dimension finie donc $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})^\perp = \{0\}$, d'où $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}) = \{0\}$, et ainsi $f - \mathrm{Id} = 0$.

Exercice 21

1) On remarque que les vecteurs colonnes de A forment une b.o.n, et $\det A = -1$, donc A est la matrice d'une symétrie orthogonale. De plus, $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta = \text{Arccos}\left(-\frac{7}{25}\right)$. Donc A est la symétrie orthogonale par rapport à la droite dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$.

2) Idem : B est la symétrie orthogonale par rapport à la droite dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$ avec $\theta = \text{Arccos}\left(\frac{3}{5}\right)$.

3) On remarque que les vecteurs colonnes de C forment une b.o.n, et $\det C = 1$, donc C est la matrice d'une rotation. De plus, $C = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta = \text{Arccos}\left(\frac{3}{5}\right)$. Donc C est la rotation d'angle $\text{Arccos}\left(\frac{3}{5}\right)$.

Exercice 22

1) On remarque que les deux vecteurs définis par les colonnes de A sont de norme 1 et orthogonaux entre eux, donc A est une matrice orthogonale. De plus, $\det A = 1$ donc A est une rotation. Son angle est θ tel que $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$. Ainsi A est la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

2) $B = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. Donc B est la symétrie orthogonale par rapport à la droite dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$.

Exercice 23 $r \circ s \circ s$ est une réflexion, $s \circ r \circ s$ une rotation, réfléchir, faire un joli dessin en jouant sur l'axe de s et l'angle de r.

Puis le coup qui tue : $r \circ s$ est une réflexion donc $r \circ s \circ r \circ s = \text{Id}$, donc $r \circ s \circ r = s$ et $s \circ r \circ s = r^{-1}$.