M9 : MOUVEMENT DANS UN CHAMP DE FORCE CENTRALE

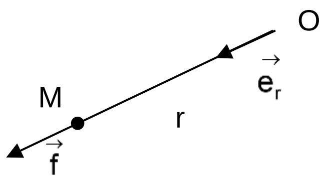
Ce chapitre étudie le mouvement d'un point dans un champ de forces particulier, notamment le champ Newtonien qui régit le mouvement des astres en particulier.

I. Forces centrales conservatives

I.1. Définition

Référentiel : $\mathfrak{R}$ Galiléen
Système : M(m)

Une force $\vec{F}$ s'appliquant au point M est dite « centrale » lorsque son support passe constamment par un point O fixe. De plus la norme de cette force ne dépend que de la distance r de M au point O.



Il est alors judicieux d'employer les coordonnées sphériques en faisant coïncider l'origine du repère avec le point O : $\vec{F}=f(r)\,\vec{e_r}$

I.2. Energie potentielle associée

Nous avons vu qu'une force était conservative et donc dérivée d'une énergie potentielle si son travail élémentaire pouvait se mettre sous la forme : $\delta W = \vec{F}.\vec{dl} = -dE_p$
Ainsi : $\delta W = f(r)\,\vec{e_r}.\overrightarrow{dOM}$
En effet $\vec{dl} = \overrightarrow{dOM} = d(r\vec{e_r})$ représente le déplacement élémentaire du point M.
Or $d(r\vec{e_r}) = dr.\,\vec{e_r} + r\,d(\vec{e_r})$
Etant donné que le vecteur $\vec{e_r}$ est unitaire nous avons donc : $\vec{e_r}^2 = 1$ soit $d(\vec{e_r}^2) = 0 = 2\vec{e_r}.\,d(\vec{e_r})$
D'où $\delta W = f(r)\,\vec{e_r}.(dr\,\vec{e_r} + r\,d(\vec{e_r})) = f(r)\,dr$

On peut donc en déduire donc l'expression de l'énergie potentielle : $dE_p = -f(r)dr$

I.3. Exemples

I.3.1. Interaction de gravitation

- La force

Lorsque deux points matériels sont en présence, ils interagissent selon la loi de Newton :
$\vec{f} = \overrightarrow{f_{O/M}} = -G\,\frac{M_0M}{r^2}\,\vec{e_r}$
Par le principe de l'action et de l'interaction : $\overrightarrow{f_{M/O}} = -\overrightarrow{f_{O/M}} = G\,\frac{M_0M}{r^2}\,\vec{e_r}$
On remarque que cette interaction est toujours attractive.

- L'énergie potentielle

Ainsi $dE_p = G\,\frac{M_0M}{r^2}dr = -GM_0m\,d(\frac{1}{r})$
D'où $E_p = -\,G\,\frac{M_0M}{r} + cst$
Par convention on choisit l'origine des potentiels en l'infinie d'où une constante nulle.

I.3.2. Interaction électrostatique

- La force

Lorsque deux charges sont mises en présence, elles interagissent selon la loi de Coulomb :
$\vec{f} = \overrightarrow{f_{q0/q}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_0q}{r^2}\,\vec{e_r}$
Cette interaction est répulsive si les deux charges sont de même signe, attractives si elles sont de signes contraires.

• L'énergie potentielle

Ainsi $dE_p = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r^2}dr = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}d(\frac{1}{r})$

D'où $E_p = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$ +cst

Par convention on choisit l'origine des potentiels en l'infinie d'où une constante nulle.

II. Lois générales de conservation

II.1. Le moment cinétique

II.1.1. Conservation

• **Le moment cinétique $\overrightarrow{L_0}$ se conserve dans le cas d'un mouvement à accélération centrale**.

• Démonstration : par le théorème du moment cinétique $\frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}} = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{f} = \vec{0}$ puisque la force est colinéaire à OM

II.1.2. Le mouvement est plan

On vient de voir que $\overrightarrow{L_0}$ est une constante du mouvement.

De par la définition de $\overrightarrow{L_0}$, on voit que le rayon vecteur est en permanence perpendiculaire à une direction fixe, le mouvement est donc plan.

II.1.3. Loi des aires

• **Durant tout intervalle de temps égaux, le rayon vecteur balaye des surfaces égales.**

• Démonstration.

Comme le mouvement se fait autour d'un axe fixe de vecteur directeur $\overrightarrow{L_0}$, dans un plan perpendiculaire à cet axe, on choisit les coordonnées cylindriques en faisant coïncider l'axe des z avec le vecteur $\overrightarrow{L_0}$ **.**

$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e_r}$

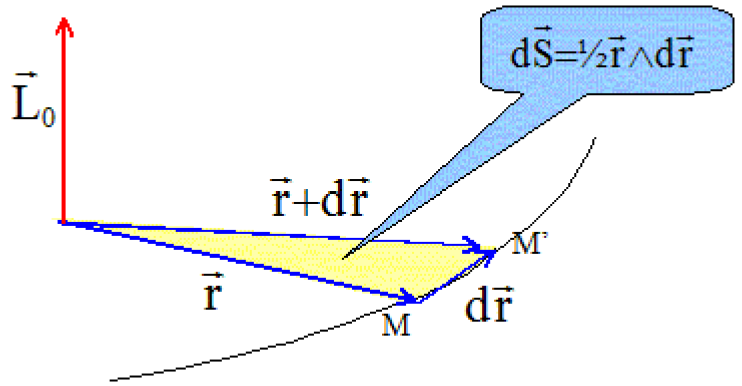
$\vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$

$\overrightarrow{L_0} = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$

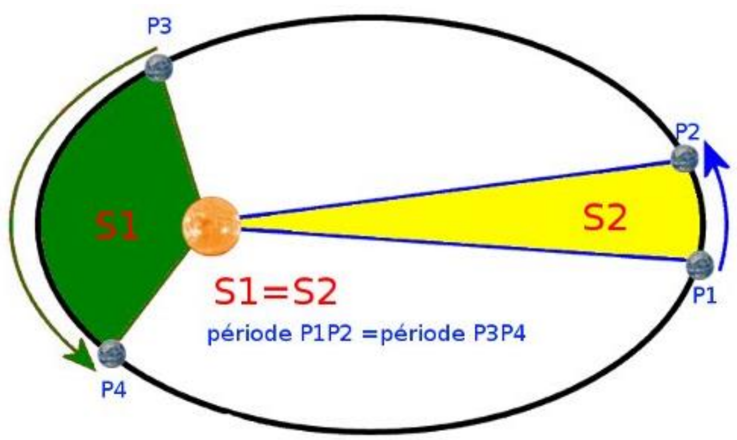
Soit $dS = \frac{1}{2}r^2 d\theta$ la surface balayée par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ durant dt.

($rd\theta$ assimilé à la perpendiculaire, r assimilé à une constante au premier ordre durant dt).

Ainsi $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{L_0}{2m}$ = cst



C : constante de la loi des aires $C = 2\frac{dS}{dt} = r^2\dot{\theta}$



II.2. L'énergie mécanique

Supposons que la force dérive d'une énergie potentielle.

On a alors $\vec{F}=f(r)\,\vec{e_r} = -\frac{dE_p}{dr}\vec{e_r}$, ainsi l'énergie potentielle ne dépend que de r.

L'énergie mécanique est une constante du mouvement, cette valeur constante peut être donnée par les conditions initiales :

$$E_m = E_C + E_p = E_0$$

• Notion d'énergie potentielle effective

Précisons les divers termes de cette énergie en coordonnées polaire :

$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r)$

Or $\vec{v}= \dot{r}\vec{e_r}+r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

Soit $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$

Or $C = r^2\dot{\theta}$

On a donc $\dot{\theta} = C/r^2$

D'où $v^2 = \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}$

Ainsi $E_m = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}) + E_p(r)$

$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r)$

On pose le **potentiel effectif** (ou **efficace**) $E_{eff}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r)$

D'où $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{eff}(r)$

Tout se passe comme si on étudiait une particule dont le mouvement ne dépendrait que de r et dont l'énergie potentielle serait $E_{eff}(r)$. La connaissance de cette énergie effective nous permet de préciser le domaine du mouvement radial du point M, pur une valeur d'énergie initiale E_0 donnée.

On doit donc avoir $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E_m - E_{eff}(r) \geq 0$

II.3. Cas du champ newtonien

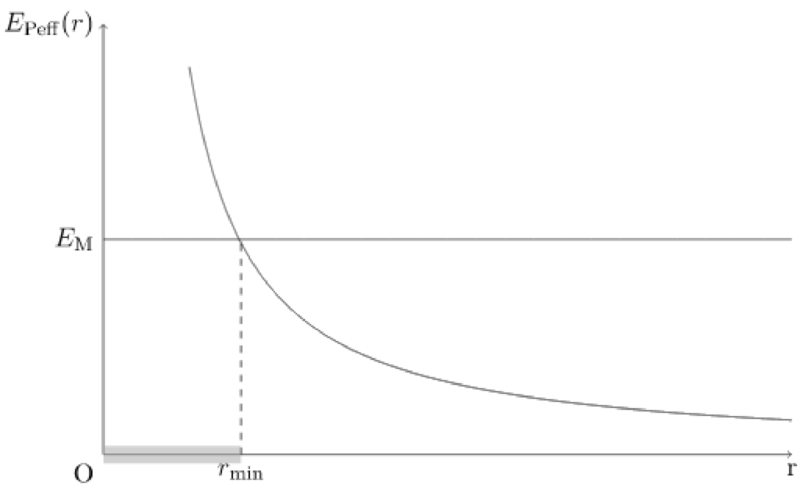
C'est le cas particulier d'une interaction de la forme $E_p = -k/r$

On a alors $E_{eff}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{k}{r}$

→ Interaction répulsive k<0

C'est le cas de l'interaction d'une particule chargée avec une particule de masse beaucoup plus grande et de même charge.

$E_p = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$ en choisissant l'origine des potentiels en l'infini.



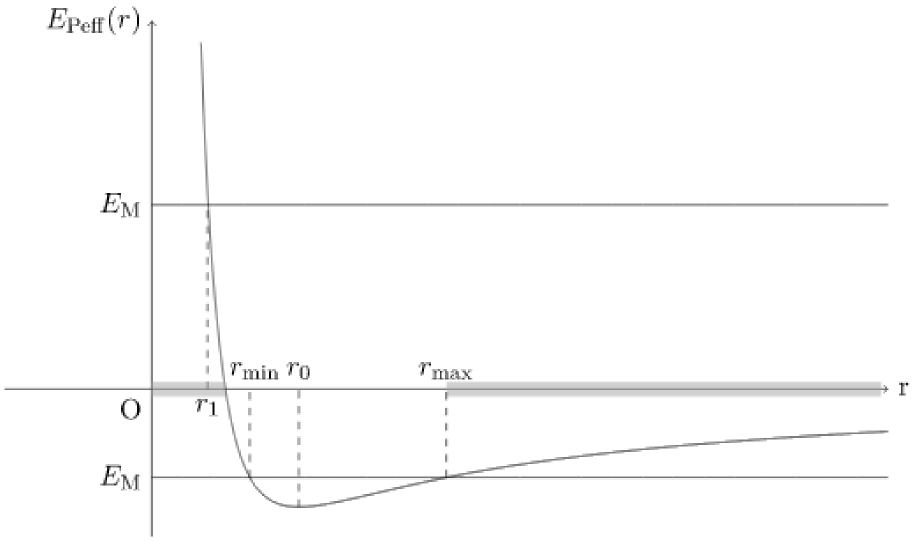
On a alors un état de diffusion quel que soit l'énergie mécanique de la particule, la particule peut s'approcher à la distance r_{min} du centre répulsif puis elle repart à l'infini.

→ Interaction attractive k>0

On s'intéresse au mouvement de M en interaction gravitationnelle avec une masse beaucoup plus grande M_0 placée au point O.

La force exercée par O sur M s'écrit alors : $\vec{f} = \overrightarrow{f_{O/M}} = -G\frac{M_0 m}{r^2}\overrightarrow{e_r}$

Elle dérive d'une énergie potentielle $E_p = -G\frac{M_0 m}{r}$ en choisissant l'origine des potentiels en l'infini.



Si l'énergie mécanique de la particule est positive on observe un état de diffusion.
Si l'énergie mécanique de la particule est négative on observe un état lié, elle évolue entre les distances r_{min} et r_{max} du centre attractif.
Si l'énergie mécanique de la particule est égale à l'énergie potentielle effective minimale, elle reste à la distance r_0 du centre attracteur, le mouvement est circulaire.

III. Etude du mouvement circulaire

Le cas le plus simple à étudier d'un point de vu mathématique est celui de la trajectoire circulaire.
Par ailleurs la trajectoire des planètes autour du Soleil, des satellites autour de la Terre sont très proches de la trajectoire circulaire centrée pour les planètes sur le Soleil et sur la Terre pour les satellites.

III.1. La vitesse

- Référentiel : $\Re$ galiléen.
- Système : le mobile M de masse m
- Force : $\vec{f} = -G\frac{M_0 m}{r^2}\overrightarrow{e_r}$
- Trajectoire : circulaire
- Coordonnées : polaires

$\vec{r} = r_0\overrightarrow{e_r}$

$\vec{v} = r_0\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$

$\vec{a} = -\frac{v^2}{r_0}\overrightarrow{e_r} + r_0\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$

- Loi le principe fondamental de la dynamique $m\vec{a} = \vec{f}$
- Projections :

$\overrightarrow{e_r}$: $-m\frac{v^2}{r_0} = -G\frac{M_0 m}{r^2}$

$\overrightarrow{e_\theta}$: $mr_0\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \text{constante}$

Le mouvement est circulaire et uniforme

On a $v = v_0 = \sqrt{G\frac{M_0}{r_0}}$

III.2. L'énergie

L'énergie potentielle : $E_p = -m\frac{GM_0}{r_0}$

L'énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{GM_0}{r_0} = -\frac{1}{2}E_p$

L'énergie mécanique : $E_m = E_c + E_p = -\frac{1}{2}m\frac{GM_0}{r_0}$

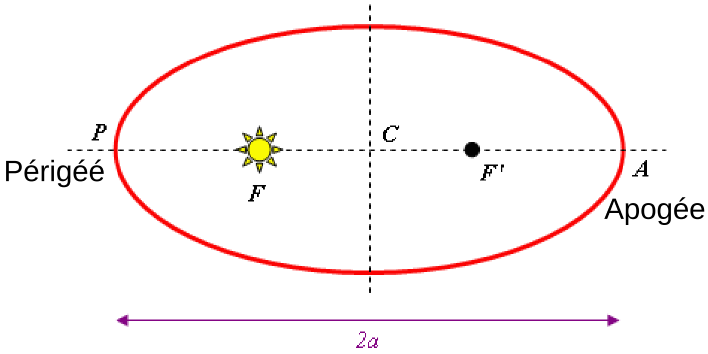
Résultat $E_m = -E_c = \frac{1}{2}E_p = -\frac{1}{2}m\frac{GM_0}{r_0}$

• Généralisation pour une trajectoire elliptique

Dans le cas d'une trajectoire elliptique l'énergie cinétique et l'énergie potentielle varient au cours du temps. Comme il s'agit toujours d'une particule dans un champ de force centrale conservative l'énergie mécanique reste constante.

On admet que le résultat qui vient d'être établi pour la trajectoire circulaire est valable pour une trajectoire elliptique à condition de remplacer r_0 par le demi grand-axe a de la trajectoire.

Ainsi $E_m = -\ m\frac{GM_0}{2a}$



III.3. La période

La période de révolution est le temps mis par M pour décrire l'orbite circulaire de rayon r_0 à la vitesse v_0.

Soit $T = \frac{2\pi r_0}{v_0} = \frac{2\pi r_0}{\sqrt{G\frac{M_0}{r_0}}}$

Ainsi $T^2 = 4\pi^2 r_0^3 / GM_0$

On trouve ainsi la loi dite troisième loi de Kepler : $\frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{GM_0}$

• Généralisation pour une trajectoire elliptique

On admet que le résultat qui vient d'être établi pour la trajectoire circulaire est valable pour une trajectoire elliptique à condition de remplacer r_0 par le demi grand-axe a de la trajectoire. $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_0}$

III.4. Mouvements des planètes

Lois de Képler (expérimentales 1571,1630)

① Les orbites des planètes sont des ellipses dont le soleil est l'un des foyers.

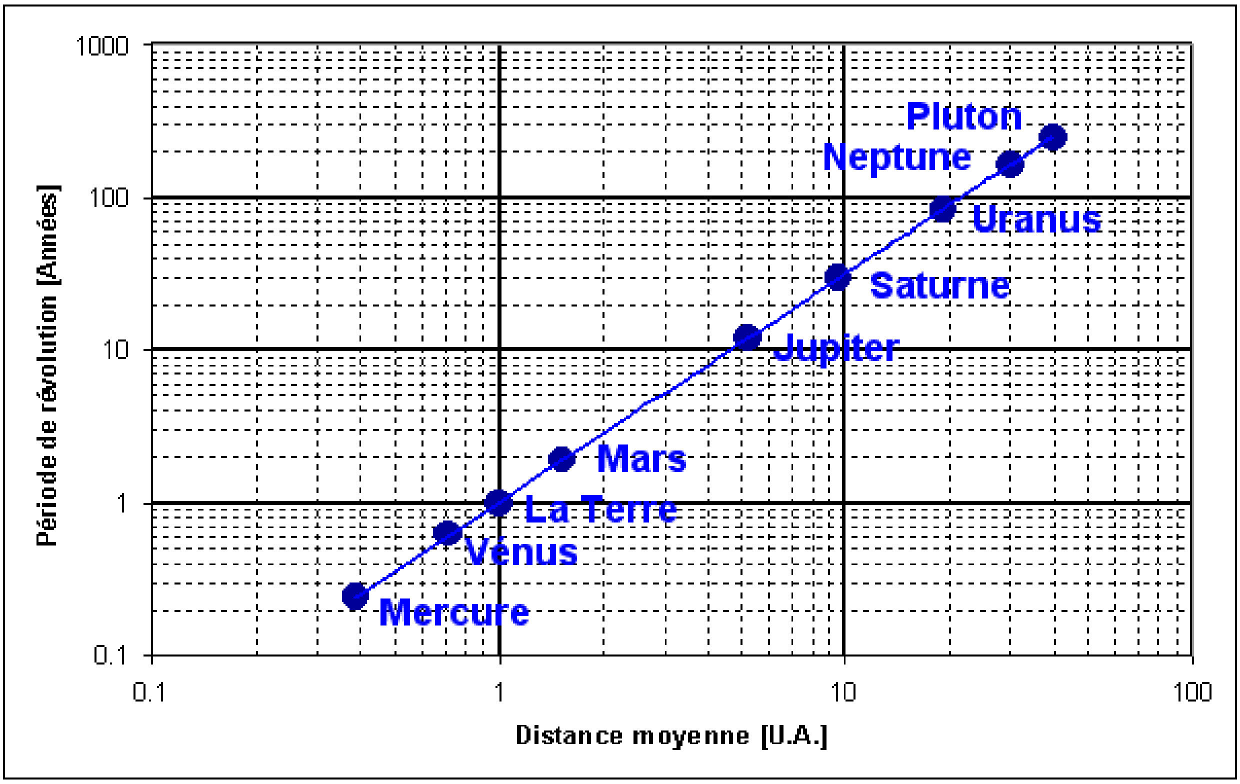
② Le rayon vecteur issu du soleil balaye des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.

③ Les rapports $\frac{a^3}{T^2}$ relatifs aux diverses planètes ont tous les mêmes valeurs.

Le mouvementKéplérien : le soleil masse M
la planète masse m << M (Jupiter la plus lourde M = 1047m)
Seule l'interaction gravitationnelle du soleil intervient.

Résultats

Planète	T en s	r en m	T^2 / r^3
MERCURE	$7,6 .10^6$	$5,79.10^{10}$	$2,98.10^{-19}$
VENUS	$1,94.10^7$	$1,08.10^{11}$	$2,99.10^{-19}$
TERRE	$3,16 .10^7$	$1,49.10^{11}$	$3,02.10^{-19}$
MARS	$5,94 .10^7$	$2,28.10^{11}$	$2,98.10^{-19}$
JUPITER	$3,74 .10^8$	$7,78.10^{11}$	$2,97.10^{-19}$
SATURNE	$9,30 .10^8$	$1,42.10^{12}$	$3,02.10^{-19}$
URANUS	$2,66 .10^9$	$2,87.10^{12}$	$2,99.10^{-19}$
NEPTUNE	$5,20 .10^9$	$4,50.10^{12}$	$2,97.10^{-19}$



IV. Les satellites de la Terre

IV.1. Hypothèses

- On se place dans le référentiel géocentrique en le supposant galiléen. C'est le référentiel barycentrique de la terre.
- Seule la force de gravitation de la terre intervient
  - → Altitude suffisante pour négliger les forces de frottements dues à l'atmosphère (100/200 km)
  - → Altitude pas trop élevée pour négliger l'influence de la lune ou du soleil.
- La terre est à symétrie sphérique

⇒ Forces mises en jeu : ∗ au sol : $\vec{f} = -G\frac{M_0 m}{R_T^2}\vec{e_r} = m\vec{g} \Rightarrow GM_0 = R_T^2 g$

∗ altitude h (r = R_T + h) $\vec{f} = -\,gm\frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}\vec{e_r}$

D'où la vitesse d'un satellite de la Terre en orbite circulaire peut s'écrite : $v_0 = R_T\sqrt{\frac{g}{R_T+h}}$ où h est l'altitude du satellite.

IV.2. Les vitesses cosmiques

• Première vitesse cosmique ou orbite circulaire basse
Il s'agit de la plus petite orbite circulaire théorique $r \approx R_T$

$\Rightarrow v_{01} = (g_0 R_T)^{1/2} = 7.92 \text{ km.s}^{-1}$ première vitesse cosmique

$\Rightarrow T_0 = 1\text{h } 24 \text{ mn}$

• Deuxième vitesse cosmique ou vitesse de libération

Il s'agit des vitesses qui sont suffisantes pour que le satellite échappe à l'influence de la terre $\Rightarrow E_m \geq 0$
On aura ainsi un état de diffusion.
Or $E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 - m \frac{GM_0}{r_0} \geq 0$.
Il y a conservation de l'énergie $\frac{1}{2} m v_0^2 - m \frac{GM_0}{r_0} = \frac{1}{2} m v_\infty^2 - m \frac{GM_0}{r_\infty}$
Or en l'infini $E_p = 0$
Si on cherche la vitesse minimale à fournir, on se place dans le cas où la vitesse en l'infini est nulle.

On obtient $v_{02} = (2 g_0 R_T)^{1/2} = \sqrt{2}\, v_{01} = 11.20 \text{ km.s}^{-1}$ la deuxième vitesse cosmique.

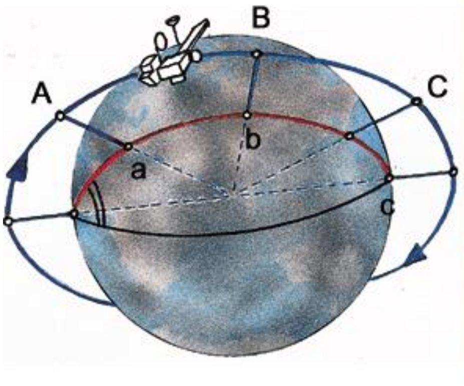
On remarque qu'entre la vitesse de satellisation en orbite basse et celle de libération, le facteur n'est que de $\sqrt{2}$, la marge de manœuvre est faible.

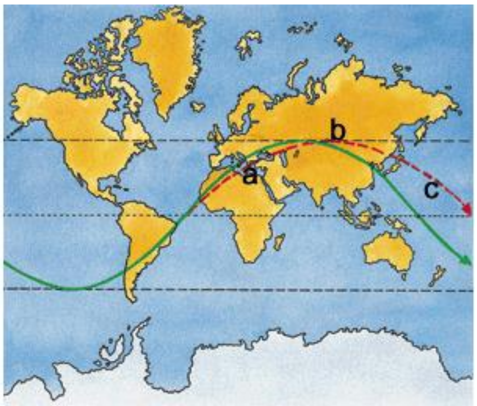
IV.3. Le satellite géostationnaire

• Définition
Un satellite géostationnaire est un satellite artificiel qui se trouve sur une orbite géostationnaire. Sur cette orbite le satellite se déplace de manière exactement synchrone avec la planète et reste constamment au-dessus du même point de la surface. Cette caractéristique est très utile pour les télécommunications et certaines applications dans le domaine de l'observation de la planète

• Plan de l'orbite géostationnaire
On étudie le mouvement du satellite dans le référentiel Géocentrique.
De par l'expression de la force gravitationnelle appliquée au satellite, le plan de sa trajectoire contient forcement le centre de la Terre.
(Simulation satellite)

La figure ci-contre représente un satellite dont le plan orbital est incliné par rapport au plan équatorial. Il est représenté l'orbite du satellite ainsi sa projection sur le Terre. On se rend compte que le satellite ne reste pas à la verticale du même point.

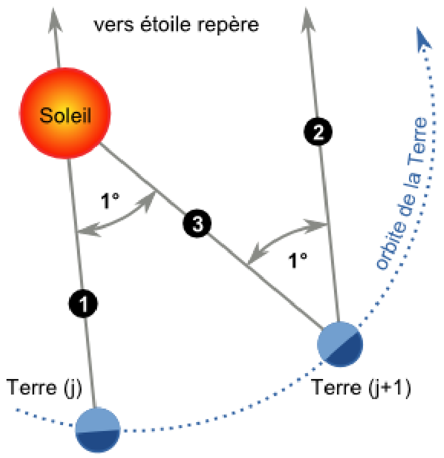




La seule possibilité pour que le satellite reste à la verticale d'un même point de la surface de la Terre et que son orbite se situe dans le plan équatorial.

• <u>Période d'un satellite géostationnaire</u>
Pour que le satellite reste à la verticale d'un même point de la surface de la Terre il doit avoir la même période de rotation que celui-ci soit T = 24h = 86400 s.

En fait si on veut être plus précis il faut prendre en compte le jour sidéral. La Terre tourne sur elle-même et tourne autour du soleil. T = 24h correspond au jour solaire, le temps qui sépare le passage du soleil à la verticale d'un point de la Terre. Ainsi le jour sidéral (temps mis pour que la fasse un tour sur elle-même) est un peu plus court $T_{sidéral}$ = 86164 s



• <u>Rayon de l'orbite géostationnaire</u>
Grace à la troisième loi de Kepler connaissant la période du satellite on peut calculer le rayon de son orbite autour de la Terre.

$$\frac{T_{sideral}^2}{r_{geo}^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \Rightarrow r_{geo} = \left(\frac{GM_T T_{sideral}^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 42\,164 \text{ km}$$

Soit une altitude de h = 35 786 km ≈ 36 10^3 km

M9 : MOUVEMENT DANS UN CHAMP DE FORCE CENTRALE

I. Forces centrales conservatives 1
I.1. Définition 1
I.2. Energie potentielle associée 1
I.3. Exemples 1
I.3.1. Interaction de gravitation 1
I.3.2. Interaction électrostatique 1
II. Lois générales de conservation 2
II.1. Le moment cinétique 2
II.1.1. Conservation 2
II.1.2. Le mouvement est plan 2
II.1.3. Loi des aires 2
II.2. L'énergie mécanique 3
II.3. Cas du champ newtonien 3
III. Etude du mouvement circulaire 4
III.1. La vitesse 4
III.2. L'énergie 5
III.3. La période 5
III.4. Mouvements des planètes 5
IV. Les satellites de la Terre 6
IV.1. Hypothèses 6
IV.2. Les vitesses cosmiques 7
IV.3. Le satellite géostationnaire 7