XXIII Calcul matriciel

29 novembre 2017

Dans tout ce chapitre et sauf mention expresse du contraire, n, m, p, q, r et t désignent des entiers naturels non nuls, et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Structure de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

1.1. Rappels

a. Définitions élémentaires

Définition 1.1.1.
On appelle *matrice de taille* $n \times p$ (ou à n lignes et p colonnes), à valeurs (ou coefficients) dans $\mathbb{K}$, toute famille de np éléments de $\mathbb{K}$, ces éléments étant notés $(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$, et présentés sous la forme d'un tableau de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

On note $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$, les $(a_{i,j})$ étant les *coefficients* de la matrice A, $a_{i,j}$ étant le coefficient de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne.

La matrice $(a_{i,j})_{1\leqslant j\leqslant n}$ est la i^{e} ligne de A, parfois notée $a_{i,*}$.

La matrice $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n}$ est la j^{e} colonne de A, parfois notée $a_{*,j}$.

Remarque 1.1.2.
Le premier indice indique toujours la ligne et le second indice indique toujours la colonne. En général (mais attention quand même), on les note respectivement i et j.

Exemple 1.1.3.
Donner la matrice $(i \times j)_{1\leqslant i\leqslant 3, 1\leqslant j\leqslant 5}$.

Définition 1.1.4.
- L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- On appelle *matrice carrée d'ordre* n toute matrice de taille $n \times n$. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n est noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- On appelle *matrice nulle d'ordre* n la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls. On la note simplement 0_n, ou 0 sans référence à sa taille s'il n'y a pas d'ambiguïté.
- On appelle *matrice identité d'ordre* n la matrice $(\delta_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On la note I_n, ou Id_n.
- On appelle *matrice diagonale* toute matrice carrée $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ telle que pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.
- On appelle *matrice triangulaire supérieure* (resp. *inférieure*) toute matrice carrée $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ telle que pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ tells que $i > j$ (resp. $i < j$), $a_{ij} = 0$.

Remarque 1.1.5.
1. On note généralement les matrices par des lettres majuscules, et la famille des coefficients par la lettre minuscule correspondante.
2. On identifie les matrices colonnes de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec les éléments de $\mathbb{K}^n$.
3. On se gardera d'identifier les matrices lignes avec les éléments de $\mathbb{K}^n$ car on préfère les identifier avec d'autres objets mathématiques (on verra cela plus tard).

b. Opérations sur les matrices

Définition 1.1.6.
Soient $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ et $B = (b_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ deux matrices **de même taille**, et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire.

Addition On appelle *somme* de A et B la matrice $(a_{ij} + b_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$, notée $A + B$.

Produit par un scalaire On note λA la matrice $(\lambda a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$.

⚠ Attention aux tailles des matrices : on ne peut additionner n'importe quoi avec n'importe quoi.

Exemple 1.1.7.
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Définition 1.1.8 (Produit matriciel)**.**
Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On appelle *produit de A par B noté AB* la matrice de $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ de coefficients $\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right)$.

Gare aux dimensions, on ne peut pas multiplier n'importe quelle matrices.

Exemple 1.1.9. — On tâchera d'organiser les produits comme suit :

$$\begin{array}{cc} \text{Dim. OK} & \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}^{B} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}}_{A} & \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 12 \end{pmatrix}}_{=AB} \end{array}$$

— Le produit impossible :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce produit comporte plein de pièges :
• Il n'est pas commutatif, par exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Et même pire, AB peut exister mais pas BA.
• Le produit de deux matrices non nulles peut valoir la matrice nulle. Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $AA = 0$, $AB = 0$ et $BA \neq 0$.
• On ne peut pas « simplifier » dans un produit. Ici : $A \times A = A \times B$ mais $A \neq B$.

Proposition 1.1.10.
Le produit matriciel est :

Associatif : si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, alors $(AB)C$ et $A(BC)$ sont dans $\mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et sont égales, notées ABC.

Bilinéaire : si A, B, C, D sont des matrices de taille convenable, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $(A + \lambda B)C = AC + \lambda BC$ et $A(C + \lambda D) = AC + \lambda AD$.

Les matrices nulles et identité jouent un rôle bien particulier. Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $q \in \mathbb{N}^*$, alors

Neutre à gauche : $I_n A = A$

Neutre à droite : $AI_p = A$

Mult. par 0 à gauche : $0_{q,n}A = 0_{q,p}$

Mult. par 0 à droite : $A0_{p,q} = 0_{n,q}$

Démonstration.
Bien qu'un peu technique, nous donnons ici la démonstration ; nous en verrons plus tard une autre.

1. $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$. Ainsi,
$$BC = \left(\sum_{k=1}^{q} b_{ik}c_{kj}\right)_{1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant r}$$
et
$$A(BC) = \left(\sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell} \times \left(\sum_{k=1}^{q} b_{\ell k}c_{kj}\right)\right)_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant r}.$$
Or, si $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant r$,
$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell} \times \left(\sum_{k=1}^{q} b_{\ell k}c_{kj}\right) &= \sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell} \times \sum_{k=1}^{q} b_{\ell k}c_{kj} \\ &= \sum_{\ell=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} a_{i\ell}b_{\ell k}c_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{q}\sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell}b_{\ell k}c_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{q}\left(\sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell}b_{\ell k}\right) \times c_{kj}, \end{aligned}$$
qui est le coefficient i, j de $(AB)C$. D'où l'égalité voulue.
2. *idem*
3. $I_n A = \left(\sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}a_{kj}\right) = (\delta_{ii}a_{ij}) = (a_{ij}) = A$.

4. Direct.

□

Remarque 1.1.11.
Par associativité, il y a 5 manières de calculer $ABCD$ qui conduisent toutes au même résultat : $((AB)C)D = (A(BC))D = A((BC)D) = A(B(CD)) = (AB)(CD)$. Mais le temps de calcul est-il le même dans les 5 cas ? C'est le problème de la *multiplication matricielle enchaînée* (Matrix chain multiplication ou Matrix Chain Ordering Problem (MCOP) en anglais). Plus généralement, le problème est de savoir dans quel ordre effectuer les produits pour calculer le plus efficacement possible un produit de matrices $M_1.M_2.\cdots.M_n$. Ce problème peut se résoudre par programmation dynamique, ce qui est au programme en option informatique, mais même si ce n'est pas toujours la solution optimale, il vaut mieux commencer par les produits qui font apparaître des « petites » matrices.

Précisément, le produit d'une matrice $n \times p$ par une matrice $p \times q$ nécessite de l'ordre de $n \times p \times q$ opérations. Ainsi, si $A \in \mathscr{M}_{10,100}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{100,5}$ et $C \in \mathscr{M}_{5,50}$, le calcul de $(AB)C$ demande de l'ordre de $(10 \times 100 \times 5) + 10 \times 5 \times 50 = 7\,500$ opérations, alors que celui de $A(BC)$ en demande de l'ordre de $100 \times 5 \times 50 + 10 \times 100 \times 50 = 75\,000$.

c. Matrices carrées

Théorème 1.1.12.
$(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau, et le neutre de $\times$ est I_n.

Démonstration.
On a déjà vu que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ était un groupe abélien. Or on a de plus les propriétés suivantes :

1. $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un monoïde (le produit est une loi de composition interne associative et la matrice identité est neutre pour cette loi).
2. la multiplication est distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition.

□

Rappel :

1. cet anneau n'est pas commutatif ;
2. il n'est pas intègre, d'une part parce qu'il n'est pas commutatif et d'autre part aussi parce qu'on peut trouver des matrices non nulles dont le produit est nul.

Maintenant que l'on sait que $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau, on peut utiliser les résultats démontrés dans le chapitre sur les anneaux.

Définition 1.1.13 (Puissances d'une matrice carrée)**.**
On les définit par récurrence : si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors, $M^0 = \mathrm{I}_n$, $M^1 = M$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^{k+1} = M \times M^k$ (on a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M^k = \underbrace{M \times M \ldots \times M}_{k \text{ fois}}$. Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $M^n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 1.1.14.
On remarque que les puissances d'une même matrice commutent entre elles :

$$\begin{aligned} M^k \times M^j &= \underbrace{M \times M \ldots \times M}_{k \text{ fois}} \times \underbrace{M \times M \ldots \times M}_{j \text{ fois}} \\ &= \underbrace{M \times M \ldots \times M}_{(k+j) \text{ fois}} \\ &= \underbrace{M \times M \ldots \times M}_{j \text{ fois}} \times \underbrace{M \times M \ldots \times M}_{k \text{ fois}} \\ &= M^j \times M^k. \end{aligned}$$

Théorème 1.1.15 (Formule du binôme de Newton)**.**
Elle est valable pour les matrices *carrées qui* ***commutent***.

Il s'agit de ne jamais oublier de vérifier que deux matrices cummutent avant de pouvoir utiliser cette formule.

Exemple 1.1.16.
Calculer A^2 avec

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= B + C. \end{aligned}$$

Calculer A^3 avec

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= B + C. \end{aligned}$$

La définition d'inversibilité donnée en début d'année est exactement celle qu'on a donnée dans le chapitre sur les anneaux.

Définition 1.1.17.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est *inversible* s'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = \mathrm{I}_n$.
Dans ce cas B est unique, est appelée *l'inverse de* A et est notée A^{-1}.

Il est utile de connaître le résultat suivant.

Proposition 1.1.18 (Critère et formule d'inversibilité d'une matrice 2×2)**.**
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si son *déterminant* est non nul, *i.e.* $ad - bc \neq 0$. Alors, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Démonstration.
On a déjà fait la preuve par le calcul, par exemple en se fondant sur la relation

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)I_2 = 0.$$

On en verra une preuve plus générale dans le chapitre traitant les déterminants. □

Exemple 1.1.19.
À vous de construire votre exemple !

On a déjà vu que l'ensemble des inversibles, muni de la multiplication, constituait un groupe.

Définition 1.1.20.
Le groupe des inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est appelé *le groupe linéaire d'ordre* n et est noté $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$.

1.2. Structure d'espace vectoriel

Théorème 1.2.1.
$(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de base $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$, avec $E_{i,j} = (\delta_{ki} \times \delta_{\ell j})_{(k,\ell)}$. En particulier

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np.$$

La base $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est la *base canonique* de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Démonstration.
On a déjà vu qu'il s'agissait d'un $\mathbb{K}$-ev puisque :

1. $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien ($+$ est une loi de composition interne, associative, commutative, admettant un élément neutre — la matrice nulle — et pour laquelle tout élément admet un opposé — la matrice de coefficients opposés).
2. Pour toute $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $1 \cdot M = M$.
3. Le produit externe est distributif à droite par rapport à l'addition.
4. Le produit externe est distributif à gauche par rapport à l'addition.
5. On a la propriété d'associativité mixte.

Il reste à montrer que la famille des $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ en est une base.

Pour cela, il suffit de remarquer que pour toute matrice M, de coefficients $(m_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$, on a

$$M = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} m_{ij}E_{ij}.$$

On en déduit donc :
— d'une part que toute matrice M s'écrit d'au moins une façon comme combinaison linéaire des E_{ij} pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ et que la famille (E_{ij}) est génératrice ;
— d'autre part que toute combinaison linéaire des (E_{ij}) est égale à une matrice dont les coefficients sont ceux de la combinaison linéaire, qu'en conséquence toute combinaison linéaire $\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \lambda_{ij}E_{ij}$ de valeur nulle est aussi égale à la matrice des $(\lambda_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ qui ne peut donc avoir que des coefficients tous nuls et que la famille des (E_{ij}) est donc libre.

□

1.3. Remarques sur le produit

a. Produit par un vecteur colonne

Remarque 1.3.1.
Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}.$$

Alors, en notant $C_1,\dots,C_p$ les colonnes de M, on a

$$MX = \sum_{k=1}^{p} x_k C_k.$$

En particulier :
— la matrice MX est une combinaison linéaire des C_k, pour $k \in [\![1,p]\!]$,
— pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, le produit ME_i où E_i est le i^{e} vecteur de la base canonique de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est exactement C_i. En effet

$$ME_i = M\begin{pmatrix} \delta_{1i} \\ \vdots \\ \delta_{pi} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{p} \delta_{ki}C_k = C_i.$$

b. Colonnes d'un produit

Proposition 1.3.2.
Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Soit $\alpha \in [\![1,q]\!]$. Notons C_α la α^{e} colonne de B. Alors la α^{e} colonne de AB est la matrice AC_α.

Démonstration.
Le produit AB est la matrice de coefficients

$$\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]},$$

qui possède q colonnes, comme B. La α^{e} colonne de cette matrice existe donc et a pour coefficients

$$\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{k\alpha}\right)_{i\in[\![1,n]\!]}.$$

Notons $c_1,\dots,c_p$ les coefficients de C_α. La matrice AC_α est la matrice colonne de coefficients

$$\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_k\right)_{i\in[\![1,n]\!]}.$$

Or C_α est la α^{e} colonne de B, donc pour tout $k \in [\![1,p]\!] c_k = b_{k\alpha}$.

AC_α a donc même coefficients que la α^{e} colonne de AB, elle lui est donc égale. □

c. Application canoniquement associée

Définition 1.3.3.
Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *application linéaire canoniquement associée à M* l'application

$$u : \begin{cases} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & MX \end{cases}$$

ou, en identifiant $\mathbb{K}^p$ avec $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$ avec $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$:

$$u : \begin{cases} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ (x_1,\dots,x_p) & \longmapsto & M\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Proposition 1.3.4.
Cette application est bien une application linéaire.

Démonstration.
Pour tout $(X, Y) \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned} u(\lambda X + Y) &= M(\lambda X + Y) \\ &= \lambda(MX) + MY \\ &= \lambda u(X) + u(Y). \end{aligned}$$

□

Définition 1.3.5.
On appelle noyau (resp. image) de M et on note $\operatorname{Ker} M$ (resp. $\operatorname{Im} M$) le noyau (resp. l'image) de l'application linéaire canoniquement associée à M.

d. Produit d'éléments des bases canoniques

Proposition 1.3.6.
Notons
- $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$;
- $\left(E'_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]}$ celle de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
- $\left(E''_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]}$ celle de $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.

Soit
- $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$;
- $(k, h) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, q]\!]$.

Alors

$$\begin{aligned} E_{ij} \times E'_{kh} &= \delta_{jk} E''_{ih} \\ &= \begin{cases} E''_{ih} & \text{si } j = k, \\ 0_{nq} & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Remarque 1.3.7.
Dessiner les matrices pour voir de quoi il retourne. La démonstration suivante n'est que la description du dessin.

Démonstration.
Soit $\alpha \in [\![1, q]\!]$. La α^{e} colonne de $E_{ij} \times E'_{kh}$ est $E_{ij}C_\alpha$ où C_α est la α^{e} colonne de E'_{kh}. Si $\alpha \neq h$, $C_\alpha = 0_{p1}$, donc toutes les colonnes de $E_{ij} \times E'_{kh}$ sont nulles sauf peut-être la h^{e}.

Cette h^{e} colonne de E_{kh} est égale à $E_{ij}C_h$. C_h étant le k^{e} vecteur de la base canonique de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $E_{ij}C_h$ est la k^{e} colonne de E_{ij}. Celle-ci est nulle si $j \neq k$. Sinon, il s'agit du i^{e} vecteur de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

On en déduit le résultat.

On peut également adopter une démonstration purement calculatoire. Notons $(m_{ab})_{(a,b)\in[\![1,n]\!]\times\in[\![1,q]\!]}$ les coefficients du produit $E_{ij}E'_{kh}$. Alors, soit $(a, b) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!]$. On a

$$\begin{aligned} m_{ab} &= \sum_{c=1}^{p} (\delta_{ai}\delta_{cj})(\delta_{ck}\delta_{bh}) \\ &= (\delta_{ai}\delta_{cc})(\delta_{jk}\delta_{bh}) \\ &= \delta_{jk}(\delta_{ai}\delta_{bh}) \end{aligned}$$

m_{ab} est donc le coefficient de la ligne a, colonne b de $\delta_{jk}E''_{ih}$. □

2. Matrices, familles de vecteurs et applications linéaires

2.1. Matrice d'une famille de vecteurs relativement à une base

Définition 2.1.1.
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie n. Soient $v_1, \ldots, v_p$ p vecteurs de E. On note a_{ij} la i^{e} coordonnées de v_j dans $\mathscr{B}$, *i.e.* $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$.
Alors, la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est appelée *matrice de la famille* $(v_1, \ldots, v_p)$ *dans la base* $\mathscr{B}$ *(ou relativement à la base* $\mathscr{B}$*)* , et elle est notée $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_p)$ (parfois $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_p)$).

Exemple 2.1.2.
1. Dans $\mathbb{R}^2$, notons $\mathscr{B}$ la base canonique et $\mathscr{B}'$ la base $((0, 1); (1, 1))$. Avec $\mathscr{F} = ((1, 2); (0, 3); (-1, 1))$, on a

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni de la base canonique $\mathscr{B}$, avec la famille $\mathscr{F} = (1 + X^2; 1 + X + X^2 +$

$X^3; X^3-2)$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Matrice d'une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ dans la base canonique.
4. La matrice d'une famille de vecteurs colonnes $C_1, \ldots, C_p$ éléments de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dans la base canonique est la matrice dont les colonnes sont $C_1, \ldots, C_p$.

Théorème 2.1.3.
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie n. Alors l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} (E, +, .) & \to & (\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), +, .) \\ x & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration.
Soient $x, y \in E$ tels que $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\varphi(x + \lambda y) = (x_i + \lambda y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} + \lambda (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} = \varphi(x) + \lambda \varphi(y)$. D'où la linéarité de φ.
De plus, soit $M = (m_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors $\varphi(x) = M$ si et seulement si pour tout i, $m_i = x_i$, d'où la bijectivité de φ. □

2.2. Matrice associée à une application linéaire relativement à deux bases

Définition 2.2.1.
Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie p et F un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. Soient $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ des bases de E et F respectivement. Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. On appelle *matrice de u relativement à $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$*, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ (parfois $\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$), la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u(e_1), \ldots, u(e_p)) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Autrement dit, cette matrice contient les coordonnées des images des vecteurs de la base de départ décomposés dans la base d'arrivée.

Remarque 2.2.2.
Si $\mathscr{B} = \mathscr{C}$, on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(u)$.

Remarque 2.2.3.
On pourra représenter f et sa matrice dans un schéma comme représenté dans la figure 1.

$$E, \mathscr{B} \xrightarrow[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)]{f} F, \mathscr{C}$$

FIGURE 1 – Représentation schématique de la matrice d'une application linéaire.

Exemple 2.2.4.
Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x - y, 3x + 2y)$, $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^2$ On a $u(e_1) = (1, 3) = e_1 + 3e_2$ et $u(e_2) = (-1, 2) = -e_1 + 2e_2$. Ainsi, la matrice associée à u relativement à $\mathscr{B}$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Avec $\mathscr{C}$ la base $(f_1, f_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$, on a $u(e_1) = f_1 - 2f_2$ et $u(e_2) = -f_1 - 3f_2$. Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.2.5.
1. Avec les mêmes u, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, calculer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u)$.
2. Réciproquement, trouver l'application linéaire associée à $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$.
3. Notons $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_4[X]$, $P \mapsto P' + 3XP$, $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ et $\mathscr{C} = (X^3, X, X^2, 1, X^4)$ Trouver la matrice de φ relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.
4. Réciproquement, avec les mêmes bases, notons φ l'unique application linéaire telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

retrouver l'expression de φ.

5. Donner la matrice de $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$ dans les bases canoniques.
6. Donner la matrice de $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(\pi) \end{array}$ dans les bases canoniques.

Théorème 2.2.6.
Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie p et F un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ des bases de E et F respectivement. Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$: c'est l'unique application linéaire associant, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, au i^{e} vecteur de la base $\mathscr{B}$ le vecteur dont le vecteur des coordonnées dans la base $\mathscr{C}$ est la i^{e} colonne de M.

Démonstration.
Notons $(m_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ les coefficients de M et C_1, $\dots$, C_p les colonnes de M. Pour $j \in [\![1, p]\!]$, on note v_j l'unique vecteur de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(v_j) = C_j$ (il s'agit du vecteur $m_{1j} f_1 + \dots m_{nj} f_n$).

Soit alors $u \in \mathscr{L}(E, F)$. On a $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ si et seulement si

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(v_1, \dots, v_p) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u(e_1), \dots, u(e_p)),$$

c'est-à-dire si et seulement si $\forall i \in [\![1, p]\!] v_i = u(e_i)$, or on sait qu'il existe une unique application linéaire u vérifiant cette dernière condition.

Il existe donc une unique application linéaire u vérifiant $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$. $\square$

Remarque 2.2.7.
Dans le cas où les espaces vectoriels de départ et d'arrivée sont le même, la matrice de l'identité est I_n *si on considère **la même base** au départ et à l'arrivée.*

dans des bases différentes, la matrice de l'identité n'est pas l'identité ! Exemple : calculer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ où $\mathscr{C} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{B} = (\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath})$.

Proposition 2.2.8.
Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La matrice de l'*application linéaire canoniquement associée à* M dans les bases canoniques de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est M.

Démonstration.
Notons u l'application canoniquement associée à M. D'après la remarque 1.3.1, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, l'image par u du k^{e} vecteur de la base canonique est la k^{e} colonne de M. Donc la matrice de u est la matrice des vecteurs colonnes de M dans la base canonique : c'est donc M. $\square$

Théorème 2.2.9.
On garde les mêmes notations. On considère l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} (\mathscr{L}(E, F), +, .) & \longrightarrow & (\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, .) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \end{array} \right. .$$

Alors, φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration.
On a déjà vu que cette application était bijective. Voir pourquoi elle est linéaire est laissé en exercice au lecteur.

Remarquons que, puisqu'on sait que les deux espaces vectoriels considérés sont de dimension finie et de même dimension, on aurait pu se dispenser de montrer précédemment qu'elle était injective ou se dispenser de montrer qu'elle était surjective. $\square$

Remarque 2.2.10.
1. Ceci justifie l'identification forme linéaire sur $\mathbb{K}^p$ / matrice ligne à p colonnes. Exemple.
2. Ce résultat permet au passage de dire que si $M \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $MX = 0$, alors $M = 0$. En effet, les applications $X \mapsto MX$ et $X \mapsto 0_n X$ sont alors égales, donc les matrices M et 0_n le sont.

Proposition 2.2.11.
Avec les mêmes notations qu'en 2.2.1, on a

$$\forall x \in E \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x).$$

Démonstration.
Soit $x \in E$. Posons $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ et $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$. Notons $(m_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ les coefficients de M, $(x_j)_{j\in[\![1,p]\!]}$ ceux de X, $(y_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ ceux de MX, $(e_j)_{j\in[\![1,p]\!]}$ les vecteurs de la base $\mathscr{B}$ et $(f_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ ceux de $\mathscr{C}$.

Alors, par définition du produit matriciel, on a

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad y_i = \sum_{j=1}^{p} m_{ij}x_j.$$

Alors on a $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$, donc $u(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j u(e_j)$.

Par ailleurs, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} f_i$.

On a donc

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} x_j m_{ij} f_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} x_j m_{ij} f_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i f_i. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u(x))$ a pour coefficients la famille $(y_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$. □

Exemple 2.2.12.
Reprendre les deux premiers exemple de la série d'exemples précédente avec le vecteur $(17, 42)$.

Remarque 2.2.13.
On pourra représenter schématiquement ce résultat comme dans la figure 2 : avec $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u(x)) = MX$.

$$\begin{array}{ccc} x & & u(x) \\ E,\mathscr{B} & \xrightarrow[M]{u} & F,\mathscr{C} \\ X & & MX \end{array}$$

FIGURE 2 – Matrice de l'image d'un vecteur par une application linéaire.

Théorème 2.2.14.
Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-ev de bases $\mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}$. Soient $f \in \mathscr{L}(F,G)$, $g \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(f \circ g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g)$.

Alors : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(g(x)) = BX$, et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(f \circ g)X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{D}}((f\circ g)(x)) = A(BX) = (AB)X$. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E,G)$ de matrice $N = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(f \circ g) - AB$. Alors pour tout x, $NX = 0$, donc $\varphi(x) = 0$, ainsi $\varphi = 0$. Mais par unicité de la matrice (théorème précédent), on a $N = 0$, d'où $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(f \circ g) = AB$.

Démonstration.
Notons n, p et q les dimensions respectives de E, F, et G et $(e_1, \dots, e_n)$ les vecteurs de la base $\mathscr{B}$. Posons $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(f)$, $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g)$ et $C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(f \circ g)$.

AB et C sont toutes deux des matrices $q \times n$. Montrons qu'elles ont mêmes colonnes, ce qui montrera le résultat voulu : elles sont égales.

Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Notons X_k la k^{e} colonne de AB. Alors, d'après la proposition 1.3.2, $X_k = AY_k$ où Y_k est la k^{e} colonne de B.

Or la Y_k est la matrice des coordonnées de $g(e_k)$ dans la base $\mathscr{C}$, donc AY_k est la matrice des coordonnées de $f(g(e_k))$ dans la base $\mathscr{D}$. Donc X_k est la matrice des coordonnées de $f(g(e_k))$ dans $\mathscr{D}$.

Or $f(g(e_k)) = (f\circ g)(e_k)$ et $f \circ g$ a pour matrice C dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{D}$. Donc X_k est la k^{e} colonne de C.

AB et C ont donc les mêmes colonnes, donc sont égales. □

Remarque 2.2.15.
Ce résultat peut être vu comme LA raison pour laquelle le produit matriciel est associatif. On peut en effet en tirer une démonstration non calculatoire de l'associativité du produit matriciel : étant donné trois matrices A, B, C telles que le produit $A(BC)$ soit bien défini, il suffit de choisir quatre espaces vectoriels, des bases de ces espaces vectoriels et trois applications f, g et h telles que les matrices A, B et C soient respectivement celles de f, g et h. Alors $A(BC)$ est la matrice de $f\circ(g\circ h)$ et $(AB)C$ est celle de $(f \circ g)\circ h$. Or la composition d'application est associative donc ces deux applications sont égales, donc $A(BC) = (AB)C$.

On laisse au lecteur le soin de vérifier que la propriété d'associativité du produit matriciel n'a pas été utilisée dans la démonstration ci-dessus ni dans les résultats ou définitions qu'elle utilise.

Remarque 2.2.16.
On pourra représenter schématiquement ce résultat comme dans la figure 3 : avec $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(f)$ et $N = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g)$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(f \circ g) = MN$. On réalise alors ce que l'on peut appeler un *dia-*

$$\begin{tikzcd} & F, \mathscr{C} \arrow[dr, "M", "f"'] & \\ E, \mathscr{B} \arrow[ur, "N", "g"'] \arrow[rr, "f \circ g", "MN"'] & & G, \mathscr{D} \end{tikzcd}$$

FIGURE 3 – Diagramme de composition d'applications linéaires et de leurs représentations matricielles.

gramme de composition commutatif : les applications obtenues en composant plusieurs flèches ayant même départ et même origine sont identiques.

Exemple 2.2.17.
Choisir deux applications $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, faire les calculs.

Définition 2.2.18.
Soient $(A_1, +, \times)$ et $(A_2, +, \times)$ deux anneaux, et $\varphi : A_1 \to A_2$. On dit que φ est un morphisme d'anneaux si c'est un morphisme de groupes pour la loi $+$ et $\varphi(1_{A_1}) = 1_{A_2}$ et $\forall x, y \in A_1 \quad \varphi(x \times y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$

Remarque 2.2.19.
Ne pas oublier la condition $\varphi(1_{A_1}) = 1_{A_2}$. L'application suivante, qui vérifie toutes les autres conditions, n'est en effet pas un morphisme d'anneau :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \\ 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 3 \end{array}$$

Corollaire 2.2.20.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dim n, et $\mathscr{B}$ une base de E. Alors, l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathscr{L}(E), +, \circ) & \to & (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times) \\ u & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'anneaux.

Démonstration.
Le théorème 2.2.9 assure que c'est un isomorphisme de groupes pour la loi $+$, le théorème 2.2.14 montre que l'image du produit est le produit des images et l'image du neutre de $\mathscr{L}(E)$ pour la composition (qui est l'application identité sur E) est le neutre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ pour le produit (qui est I_n). □

2.3. Inversibilité

Proposition 2.3.1.
La matrice d'une application linéaire est inversible si et seulement si cette application linéaire est un isomorphisme. Dans ce cas, l'inverse de la matrice considérée est la matrice de l'application réciproque de l'isomorphisme considéré.

Démonstration.
Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finies respectives p et n. Soit $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F. Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, E)$. Posons $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(v)$.

On a :

$$\begin{aligned} u \circ v = \mathrm{Id}_F &\iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{C}}(u \circ v) = \mathrm{I}_n \\ &\iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(v) = \mathrm{I}_n \\ &\iff AB = \mathrm{I}_n \end{aligned}$$

De même

$$v \circ u = \mathrm{Id}_E \iff BA = \mathrm{I}_p$$

En particulier, si u est un isomorphisme, d'isomorphisme réciproque v, alors $AB = \mathrm{I}_n$ et $BA = \mathrm{I}_p$. De plus, on a alors $\dim E = \dim F$, donc $n = p$. Donc A est une matrice carrée et B est son inverse.

Réciproquement, si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ possède une matrice inversible A, alors en notant v l'unique application linéaire telle que $A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(v)$, on a $u \circ v = \mathrm{Id}_F$ et $v \circ u = \mathrm{Id}_E$. □

Remarque 2.3.2.
Soit M une matrice carrée, u l'endomorphisme qui lui est canoniquement associé. On peut utiliser la proposition précédente pour montrer que M est inversible et déterminer, le cas échéant, son inverse.

— On commence par prendre X, Y deux vecteurs colonne ayant autant de lignes que M.
— On résout en X le système $MX = Y$.

— S'il y a toujours existence et unicité de la solution, on lit $X = M^{-1}Y$.

Cela correspond bien à ce qui était fait auparavant, la proposition précédente justifie bien que l'on puisse conclure à l'inversibilité de M directement, et obtenir son inverse.

Exemple 2.3.3.
Montrer que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

est inversible et déterminer son inverse.

Corollaire 2.3.4.
Soit A et B deux matrices carrées de taille n. Alors $AB = \mathrm{I}_n$ si et seulement si A et B sont inversibles et sont inverses l'une de l'autre.

Il est donc équivalent pour une matrice (carrée) d'être :

1. inversible ;
2. inversible à gauche ;
3. inversible à droite.

Démonstration.
Pour montrer cette équivalence, il suffit de montrer le sens direct, l'autre découlant directement de la définition d'inverse.

Supposons donc $AB = \mathrm{I}_n$.

Notons u et v les applications linéaires canoniquement associées respectivement à A et B relativement à la base canonique.

En reprenant la démonstration précédente, on peut remarquer que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$, donc v est un endomorphisme injectif et u un endomorphisme surjectif.

La dimension de $\mathbb{K}^n$ étant finie, on u et v sont donc des automorphismes et on a $v = u^{-1} \circ u \circ v = u^{-1} \circ \mathrm{Id}_F = u^{-1}$.

Donc d'après la proposition précédente A et B sont inversibles et sont inverses l'une de l'autre. □

Corollaire 2.3.5.
Dans un espace vectoriel E de dimension finie n, la matrice d'une famille de vecteurs est inversible si et seulement si cette famille de vecteurs est une base.

Démonstration.
Pour que la matrice soit inversible, il est nécessaire qu'elle soit carrée. Pour que la famille de vecteur soit une base, il est nécessaire qu'elle possède exactement n vecteurs. On peut donc se restreindre au cas d'une famille de n vecteurs $v_1, \dots, v_n$ et de la matrice M associée relativement à une base $\mathscr{B}$ de E. Notons $(e_1, \dots, e_n)$ les vecteurs de $\mathscr{B}$.

Notons u l'unique endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = M$.

M est inversible si et seulement si u est un automorphisme. E étant de dimension finie, cela est équivalent à u surjective, c'est-à-dire à $\mathrm{rg}\, u = n$. Or $\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \mathrm{rg}(v_1, \dots, v_n)$. Donc M est inversible si et seulement si $(v_1, \dots, v_n)$ est génératrice. Or $\dim E = n$ donc cela est équivalent à $(v_1, \dots, v_n)$ est une base. □

Remarque 2.3.6.
Ainsi, s'il y a une relation de dépendance entre les colonnes de M, M n'est pas inversible.

Exemple 2.3.7.
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Remarque 2.3.8.
Retour sur $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, qui est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$, *i.e.* si et seulement si les colonnes $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendantes.

2.4. Matrices de passage

Dans cette section E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n, et $\mathscr{B}, \mathscr{B}', \mathscr{B}''$ sont des bases de E.

Une question se pose maintenant naturellement : peut-on relier les matrices d'un vecteur ou d'une application linéaire exprimées dans des bases différentes ?

Définition 2.4.1.
On appelle *matrice de passage de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{B}'$* la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$. On la note parfois $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$.

Exemple 2.4.2.
$E = \mathbb{R}^2$: $\mathscr{B} = ((0,1),(1,1)) = (f_1, f_2)$, $\mathscr{B}' = ((1,-1),(0,1)) = (g_1, g_2)$.

$g_1 = f_2 - 2f_1$ et $g_2 = f_1$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème 2.4.3.
On note $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ et $P' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}'')$.

1. $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$.
2. P est inversible est son inverse est $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})$ (matrice de passage de $\mathscr{B}'$ dans $\mathscr{B}$).
3. La matrice de passage de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{B}''$ est $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}'') = PP' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}'')$ (« transitivité »).

Remarque 2.4.4.
On pourra représenter schématiquement le point 1 comme dans la figure 4. Ce schéma sera le bloc

$$\begin{tikzcd} E,\mathscr{B} & E,\mathscr{B}' \arrow[l, "\mathrm{Id}_E"', "P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}"] \end{tikzcd}$$

FIGURE 4 – Application linéaire représentée par une matrice de passage.

fondamental de tous les schémas que nous écrirons lors de changements de base : retenez-le bien !

Remarque 2.4.5.
On pourra représenter schématiquement le point 2 comme dans la figure 5.

$$\begin{tikzcd} & E,\mathscr{B}' \arrow[dr, "P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}", "\mathrm{Id}_E"'] & \\ E,\mathscr{B} \arrow[ur, "P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}", "\mathrm{Id}_E"'] \arrow[rr, "\mathrm{Id}_E", "I_n"'] & & E,\mathscr{B} \end{tikzcd}$$

FIGURE 5 – Inverse d'une matrice de passage.

Remarque 2.4.6.
On pourra représenter schématiquement le point 3 comme dans la figure 6.

$$\begin{tikzcd} & E,\mathscr{B}' \arrow[dr, "P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}", "\mathrm{Id}_E"'] & \\ E,\mathscr{B}'' \arrow[ur, "P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''}", "\mathrm{Id}_E"'] \arrow[rr, "\mathrm{Id}_E", "P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''}"'] & & E,\mathscr{B} \end{tikzcd}$$

FIGURE 6 – Composition de changements de base.

Démonstration.
1. Notons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (f_1, \dots, f_n)$. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E(f_1), \dots, \mathrm{Id}_E(f_n)) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f_1, \dots, f_n) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \end{aligned}$$

2. $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$, or $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E).\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E \circ \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{I}_n$, donc P est inversible et $P^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{Id}_E)$ d'après le corollaire 2.3.4, et donc $P^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})$ d'après le premier point.
3. On utilise à nouveau (i) : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}').\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}'') = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E).\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}'}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E \circ \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}'')$.

□

Le théorème suivant motive l'utilisation des matrices de passage.

Théorème 2.4.7 (Changement de base)**.**
Les matrices de passages permettent de relier les matrices d'un même vecteur ou d'une même application relativement à des bases différentes :

Pour un vecteur Soit $x \in E$. On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$, et $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$. Alors $X = PX'$.

Pour une application linéaire Avec les mêmes notations et en notant de plus F un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux bases de F, $u \in \mathscr{L}(E, F)$, et enfin $Q = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{C}')$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u) = Q^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)P$.

La formule de changement de base pour un vecteur s'écrit $X = PX'$, et non $X' = PX$ (c'est une source d'erreur fréquente). Au moindre doute, n'hésitez pas à tracer le schéma correspondant.

Remarque 2.4.8.
Le premier point correspond au schéma de la figure 7.

$$\begin{array}{ccc} x & & x \\ E, \mathscr{B} & \xleftarrow[P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}]{\mathrm{Id}_E} & E, \mathscr{B}' \\ X & & X' \end{array}$$

FIGURE 7 – Illustration de la relation de changement de bases pour un vecteur.

Remarque 2.4.9.
Le second point correspond au schéma de la figure 8.

$$\begin{tikzcd} E, \mathscr{B} \arrow[r, "\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)", "f"'] & F, \mathscr{C} \arrow[d, "\mathrm{Id}_F"', "{\left[P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}\right]^{-1} = P_{\mathscr{C}'}^{\mathscr{C}}}"] \\ E, \mathscr{B}' \arrow[u, "P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}", "\mathrm{Id}_E"'] \arrow[r, "f", "\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)"'] & F, \mathscr{C}' \end{tikzcd}$$

FIGURE 8 – Illustration de la relation de changement de bases pour une application linéaire.

Démonstration. Pour un vecteur il suffit de traduire l'égalité $x = \mathrm{Id}_E(x)$ dans les bonnes bases : x dans la base $\mathscr{B} = \mathrm{Id}(x$ dans la base $\mathscr{B}')$, soit : $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)X' = PX'$.

Pour une application linéaire On traduit à nouveau $u(x) = u(x)$ dans les bonnes bases :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(\mathrm{Id}_F \circ u \circ \mathrm{Id}_E) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{C}'}(\mathrm{Id}_F)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) \\ &= Q^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)P \end{aligned}$$

□

Remarque 2.4.10.
Avec $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et $f \in \mathscr{L}(E)$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \left[P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right]^{-1} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$. On essaiera, pour chaque changement de base, de reproduire le schéma de la figure 9 pour se rappeler de cette formule.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{B} \arrow[r, "\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)", "f"'] & \mathscr{B} \arrow[d, "\mathrm{Id}"', "{\left[P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right]^{-1} = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}}"] \\ \mathscr{B}' \arrow[u, "P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}", "\mathrm{Id}"'] \arrow[r, "f", "\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)"'] & \mathscr{B}' \end{tikzcd}$$

FIGURE 9 – Illustration de la relation de changement de bases pour un endomorphisme.

Exemple 2.4.11.
Mêmes choses que dans l'exemple 2.4.2. $F = \mathbb{R}^3$, $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ (base canonique), $\mathscr{C}' = (h_1, h_2, h_3)$ avec $h_1 = e_1$, $h_2 = (1, 1, 0) = e_1 + e_2$, $h_3 = (-1, 0, 1) = -e_1 + e_3$.
On considère

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x - y, x, 2x + y). \end{array} \right.$$

1. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$.
2. Déterminer P et Q^{-1}, en déduire $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u)$.
3. Vérifier en exprimant $u(g_i)$ en fonction des h_j.

Exemple 2.4.12.
On donne $\mathscr{C}$ = base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}' = ((1,0,-1),(1,0,2),(0,1,-1)) = (v_1,v_2,v_3)$, et $x = 2v_1+2v_2-v_3$. Exprimer x en fonction de e_1,e_2,e_3.

Remarque 2.4.13.
Ceci permet de voir que pour inverser une matrice, il suffit d'inverser la matrice de passage sous-jacente, et donc d'inverser un système linéaire.

Exemple 2.4.14.
Inverser $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$ en passant par des matrices de passage.

Remarque 2.4.15.
On appelle $P = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ « matrice de passage de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{B}'$ » car elle permet de transformer une équation exprimée dans $\mathscr{B}$ en équation exprimée dans $\mathscr{B}'$. En effet, avec φ une forme linéaire et $L = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},1}(\varphi)$, l'équation cartésienne de $\operatorname{Ker}\varphi$ (c'est un hyperplan) s'écrit, dans la base $\mathscr{B}$, $LX = 0$. Dans la base $\mathscr{B}'$, cela s'écrit alors $LPX' = 0$. La ligne donnant l'équation dans la base $\mathscr{B}'$ est donc LP.

3. Matrices remarquables

3.1. Transposée

Définition 3.1.1.
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})$. On appelle *transposée de A* la matrice $(a_{ji}) \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, notée ${}^tA$ ou $A^\top$.

Exemple 3.1.2.
${}^t\begin{pmatrix}4 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ et ${}^t\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$. On a aussi ${}^tI_n = I_n$.

Proposition 3.1.3.
Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. ${}^t(A+\lambda B) = {}^tA + \lambda\, {}^tB$, *i.e.* $A \mapsto {}^tA$ est linéaire.
2. Si $C \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, ${}^t(AC) = {}^tC\,{}^tA$.
3. ${}^t({}^tA)) = A$.
4. Si A est inversible, ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

Démonstration. 1. Élémentaire.
2. $A = (a_{ij})$, $C = (c_{ij})$, ${}^tA = (\alpha_{ij})$, ${}^tC = (\gamma_{ij})$, avec $\alpha_{ij} = a_{ji}$, $\gamma_{ij} = c_{ji}$, et on conclut par calcul direct.
3. Élémentaire.
4. On a $AA^{-1} = I_n$, donc en transposant ${}^t(A^{-1}) \times {}^tA = {}^tI_n = I_n$.

□

Remarque 3.1.4.
La transposition permet de transformer des résultats sur les colonnes en résultats sur les lignes, et inversement. Par exemple, une matrice est inversible si et seulement si ses lignes sont linéairement indépendantes.

Exemple 3.1.5.
$\begin{pmatrix}5 & -6 & 3\\ -3 & 4 & 8\\ 7 & -8 & 14\end{pmatrix}$ n'est pas inversible car $L_3 = 2L_1 + L_2$.

3.2. Matrices triangulaires

Définition 3.2.1.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est *triangulaire supérieure (resp. inférieure)* si $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$ tels que $i > j$ (resp. $i < j$), $a_{ij} = 0$.
On note $\tau_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $\tau_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) d'ordre n.

Théorème 3.2.2.
$(\tau_n^\pm(\mathbb{K}),+,\times)$ est un anneau et $(\tau_n^\pm(\mathbb{K}),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration.
• $\mathbb{K}$-ev : élémentaire.

• Anneau : soient $A, B \in \tau_n^+(\mathbb{K})$. On note $AB = (\gamma_{ij})$. On suppose $i > j$, alors $\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik}b_{kj}$, et tous les termes sont nuls.
• Dimension : les E_{ij} avec $i \leqslant j$ est une famille libre (déjà vu) et génératrice. Elle comporte $\frac{n(n+1)}{2}$ vecteurs. □

Remarque 3.2.3.
Avec cette démonstration on voit que $\gamma_{ii} = a_{ii}b_{ii}$.

Théorème 3.2.4.
Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si elle n'a aucun zéro sur sa diagonale.

Démonstration.
Soit A triangulaire sup. d'ordre n. On note $(v_1, \dots, v_n)$ la famille de vecteurs telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_n)$, avec $\mathscr{B}$ base canonique de $\mathbb{K}^n$.
• Si pas de zéro sur la diag. : on montre que $(v_1, \dots, v_n)$ est libre, avec $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$, on pose le système, on résout : même pas besoin de faire de pivot de Gauss. Donc c'est une base, donc c'est inversible.
• S'il y a un zéro à la k^{e} position, alors $(v_1, \dots, v_k)$ ont tous des zéros après leur $(k-1)^{\text{e}}$ coordonnées, donc sont dans $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1})$, ils sont donc liés. □

Lemme 3.2.5.
Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $E_k = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.
Alors M est triangulaire supérieure si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, E_k est stable par u.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Pour que E_k soit stable par u, il faut que $u(e_k) \in E_k$, c'est-à-dire que seuls les k premières lignes de la matrice colonne des coordonnées de $u(e_k)$ dans $\mathscr{B}$ soient non nulles.

Or la matrice M de u est la matrice formée de ces colonnes. Pour que tous les E_k, pour $k \in [\![1, n]\!]$ soient stables par u, il est donc nécessaire qu'elle soit triangulaire supérieure.

Réciproquement, supposons que cette matrice soit triangulaire supérieure. Alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et tout $i \in [\![1, k]\!]$, on a $u(e_i) \in E_i \subset E_k$. Donc pour tout $k \in [\![1, k]\!]$, $u(E_k) \subset \mathrm{Vect}\, u(e_1), \dots, u(e_k) \subset E_k$. □

Remarque 3.2.6.
Ce résultat s'adapte aux matrices triangulaires inférieures, en posant $E_1 = \mathrm{Vect}(e_k)$, $E_2 = \mathrm{Vect}(e_{k-1}, e_k)$, ...

Théorème 3.2.7.
L'inverse d'une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) inversible est également triangulaire supérieure (resp. inférieure).

Démonstration.
Nous donnons la démonstration pour les matrices triangulaires supérieures. Pour les matrices triangulaires inférieures, on peut exploiter la remarque ci-dessus ou utiliser les résultats sur la transposée en remarquant que la transposée d'une matrice triangulaire supérieure est triangulaire inférieure et vice-versa.

Soit $M \in \tau_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$.

On choisit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et on note u l'endomorphisme de E de matrice M relativement à $\mathscr{B}$.

M étant inversible, u est bijective.

D'après le lemme, tous les E_k sont stables par u. En appliquant le lemme, il suffit de montrer qu'ils sont stables par u^{-1} pour montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^{-1}) = M^{-1}$ est triangulaire supérieure.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On a $u(E_k) \subset E_k$, donc $E_k \subset u^{-1}(E_k)$. Or $\dim u^{-1}(E_k) = \dim E_k$ (image d'un sous-espace vectoriel par un morphisme bijectif), donc $u^{-1}(E_k) = E_k$. On a donc l'inclusion souhaitée : u^{-1} est donc triangulaire supérieure. □

3.3. Matrices diagonales

Définition 3.3.1.
On appelle *matrice diagonale* toute matrice carrée $(a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ telle que pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.
On note $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n.

Remarque 3.3.2.
• On note $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
• $\mathscr{D}_n(\mathbb{K}) = \tau_n^+(\mathbb{K}) \cap \tau_n^-(\mathbb{K})$.

Définition 3.3.3.
On appelle *matrice scalaire* toute matrice diagonale dont les coeffs de la diagonale sont tous égaux, *i.e.* de la forme $\lambda \mathrm{I}_n$.

Théorème 3.3.4.
$(\mathscr{D}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau et $(\mathscr{D}_n(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

Démonstration.
Anneau et ev : immédiat avec $\mathscr{D}_n(\mathbb{K}) = \tau_n^+(\mathbb{K}) \cap \tau_n^-(\mathbb{K})$.
Dimension : $(E_{ii})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ en forme une base. ☐

Remarque 3.3.5.
Une matrice diagonale est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Et dans ce cas $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^{-1} = \operatorname{diag}\left(\dfrac{1}{\lambda_1}, \dots, \dfrac{1}{\lambda_n}\right)$.
De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n))^p = \operatorname{diag}(\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p)$. Et si aucun coefficient diagonal n'est nul, cette relation est aussi valable pour $p \in \mathbb{Z}$.

3.4. Matrices symétriques et antisymétriques

Définition 3.4.1.
$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *symétrique (resp. antisymétrique)* si $A = {}^tA$ (resp. $A = -{}^tA$).

On note souvent $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de dimension n à coefficients dans $\mathbb{K}$, et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ celui des matrices antisymétriques.

Remarque 3.4.2.
Une matrice symétrique ou antisymétrique est toujours carrée.

Exemple 3.4.3.
$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique, pas $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 3.4.4.
$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ est anti-symétrique, pas $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 3.4.5.
Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$, on a $a_{ii} = -a_{ii}$ donc $a_{ii} = 0$. ☐

Théorème 3.4.6.
L'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) muni de $+$ et $\cdot$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ (resp. $\dfrac{n(n-1)}{2}$).

De plus, $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration.
Ce sont respectivement les noyaux de $A \mapsto {}^tA - A$ et $A \mapsto {}^tA + A$, donc ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si pour tout i, j, $m_{i,j} = m_{j,i}$. Si $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$, on a donc

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} E_{i,i} + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} m_{i,j}(E_{i,j} + E_{j,i}).$$

Ainsi, la famille $(E_{i,i})_{1 \leqslant i \leqslant n} \uplus (E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ engendre $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$. On vérifie aisément que cette famille est libre : c'est donc une base de $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$, et elle contient bien $n(n+1)/2$ vecteurs.

De même, si $M = (m_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si pour tout i, j, $m_{i,j} = -m_{j,i}$. La famille $(E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ alors $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ et est libre, c'est donc une base de $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$, et elle contient bien $n(n-1)/2$ vecteurs.

Enfin, si $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) \cap \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$, on a $M = {}^tM = -{}^tM$, donc $M = 0$. $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ sont donc en somme directe, la somme de leurs dimensions vaut n^2, d'où le résultat. ☐

Ce ne sont pas des sous-anneau de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$!

Exemple 3.4.7.
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Opérations élémentaires sur les matrices

Définition 4.0.1.
Il existe trois types d'opérations élémentaires sur les lignes et colonnes d'une matrice :
1. l'échange de deux lignes ou deux colonnes ;
2. la multiplication d'une ligne/colonne par un scalaire **non nul** ;
3. l'addition à une ligne/colonne d'une **autre** ligne/colonne multipliée par un scalaire.

Ces opérations sont notées respectivement :
1. $L_i \leftrightarrow L_j$ et $C_i \leftrightarrow C_j$;
2. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ **avec** $\lambda \neq 0$ (*idem* avec des colonnes) ;
3. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, avec $i \neq j$ (*idem* avec des colonnes).

Définition 4.0.2.
Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
1. On appelle matrice d'échange de coefficients i, j la matrice $\varepsilon_{ij} = \mathrm{I}_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$ (la dessiner).
2. On appelle matrice de dilatation de coefficient i et de rapport λ la matrice $D_i(\lambda) = \mathrm{I}_n + (\lambda - 1)E_{ii}$ (la dessiner).
3. On appelle matrice de transvection de coefficients i, j et de rapport λ la matrice $T_{ij}(\lambda) = \mathrm{I}_n + \lambda E_{ij}$ (la dessiner).

Remarquons que ces trois matrices sont inversibles.

Théorème 4.0.3.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et $i, j \in [\![1, n]\!]$.
1. L'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ est équivalente à la multiplication de la matrice A à sa gauche par la matrice ε_{ij}.
2. L'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$ est équivalente à la multiplication de la matrice A à sa gauche par la matrice $\mathbb{D}_i(\lambda) = \mathrm{I}_n + (\lambda - 1)E_{ii}$.
3. L'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ est équivalente à la multiplication de la matrice A à sa gauche par la matrice $T_{ij}(\lambda) = \mathrm{I}_n + \lambda E_{ij}$.
4. L'opération $C_i \leftrightarrow C_j$ est équivalente à la multiplication de la matrice A à sa droite par la matrice ε_{ij}.
5. L'opération $C_i \leftarrow \lambda C_i$ est équivalente à la multiplication de la matrice A à sa droite par la matrice $D_i(\lambda)$.
6. L'opération $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ est équivalente à la multiplication de la matrice A à sa droite par la matrice $T_{ji}(\lambda) = \mathrm{I}_n + \lambda E_{ij}$ (attention aux coefficients !).

Démonstration.
On appelle $L_1, \ldots, L_n$ les lignes de A. Tout est basé sur le fait que $E_{ij}A$ est la matrice nulle où on a rajouté L_j à la $i$ème ligne (le montrer). Et c'est tout.
Pour remarquer que les trois matrices $\varepsilon_{i,j}$, $D_i(\lambda)$ et $T_{i,j}(\lambda)$ sont inversibles, pour les deux dernières c'est simple : elles sont triangulaires sans 0 sur la diagonale. Pour la première, il suffit de voir qu'elle est sa propre inverse, car $\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$ est la matrice ε_{ij} où on a échangé les lignes i et j, donc c'est I_n. □

Exemple 4.0.4.
Calculer

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 32 & 12 & 10 \\ 25 & 9 & 8 \end{pmatrix}$.

5. Rang d'une matrice

5.1. Définitions

Remarque 5.1.1. 1. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi : E \to F$ un isomorphisme de E sur F.

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $(x_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ une famille d'éléments de E.

Alors φ réalise une bijection de $\operatorname{Vect}(x_1,\dots,x_p)$ sur $\operatorname{Vect}(\varphi(x_1,\dots,x_p))$, donc les familles $(x_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ et $(\varphi(x_i))_{i\in[\![1,p]\!]}$ ont même rang.

2. En particulier, soit n un entier et soit F un espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une base $\mathscr{B}$. L'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & F & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ & x & \mapsto & \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \end{array}$$

est une bijection, donc pour toute famille $(x_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ d'éléments de F, $(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x_i))_{i\in[\![1,p]\!]}$ est une famille de même rang.

3. Par ailleurs, soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies respectives p et n et $(e_1,\dots,e_p)$ une base de E. Alors pour toute application linéaire u de E dans F, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(u) &= u(\operatorname{Vect}(e_1,\dots,e_p)) \\ &= \operatorname{Vect}(u(e_1),\dots,u(e_p)) \end{aligned}$$

donc $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(u(e_1),\dots,u(e_p))$.

Définition 5.1.2.
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Notons $C_1,\dots,C_p$ les colonnes de A. Alors on appelle *rang de* A et on note $\operatorname{rg}(A)$ l'entier $\operatorname{rg}(C_1,\dots,C_p)$.

Remarque 5.1.3.
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors

1. Pour tout $r \in [\![0,p]\!]$ et tout choix de r colonnes C_1, …, C_r de A, la famille $(C_1,\dots,C_r)$ est de rang inférieur ou égal à $\operatorname{rg} A$. C'est une conséquence du fait que l'espace engendré par C_1,…, C_r est inclus dans $\operatorname{Im} A$.
2. Il existe un choix de $\operatorname{rg}(A)$ colonnes de A, C_1, …, $C_{\operatorname{rg}(A)}$ tel que $\operatorname{Vect}\left(C_1,\dots,C_{\operatorname{rg}(A)}\right) = \operatorname{Im}(A)$. En effet, la famille des colonnes de A est une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ de dimension $\operatorname{rg}(A)$, on peut donc en extraire une base, qui comporte nécessairement $\operatorname{rg}(A)$ vecteurs colonnes.

Théorème 5.1.4.
Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies respectives p et n, de bases respectives $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, et $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u))$.

Démonstration.
En notant A la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$, C_1, …, C_p ses colonnes et e_1, …, e_p les vecteurs de $\mathscr{B}$, on a

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(C_1,\dots,C_p) = \operatorname{rg}(u(e_1),\dots,u(e_p)) = \operatorname{rg}(u).$$

□

Théorème 5.1.5.
Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie de base $\mathscr{C}$, $(v_1,\dots,v_p)$ une famille de vecteurs de F. Alors $\operatorname{rg}(\operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(v_1,\dots,v_p)) = \operatorname{rg}(v_1,\dots,v_p)$.

Démonstration.
En notant A la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(v_1,\dots,v_p)$, et C_1, …, C_p ses colonnes, on a

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(C_1,\dots,C_p) = \operatorname{rg}(v_1,\dots,v_p).$$

□

Théorème 5.1.6.
$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\operatorname{rg} A = n$.

Démonstration.
Soient $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, et $(v_1,\dots,v_n)$ une famille de vecteurs de E telle que $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1,\dots,v_n)$. Alors A inversible si et seulement si $(v_1,\dots,v_n)$ base si et seulement si $\operatorname{rg}(v_1,\dots,v_n) = n$ si et seulement si $\operatorname{rg} A = n$. □

Exercice 5.1.7.
Calculer les rangs suivants.

- $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;
- $\operatorname{rg}(\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n))$;

- $\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Définition 5.1.8.
Soit n et p deux entiers. On dit qu'une matrice A de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est *équivalente* à une autre matrice B de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'il existe deux matrices $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ inversibles telles que $A = PBQ$.

Proposition 5.1.9.
La relation « être équivalente à » sur l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une relation d'équivalence.

Démonstration.
Cette relation est

Réflexive car pour toute $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A = \mathrm{I}_n A \mathrm{I}_p$ et I_n et I_p sont inversibles ;

Symétrique car pour tout $(A, B) \in (\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$ tel que A et B sont équivalentes, il existe deux matrices $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ inversibles telles que $A = PBQ$, et on a alors $B = P^{-1}AQ^{-1}$ et P^{-1} et Q^{-1} sont inversibles ;

Transitive car pour tout $(A, B, C) \in (\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^3$ tel que A et B sont équivalentes et B et C sont équivalentes. Alors il existe $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $Q \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $R \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $S \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ inversibles, telles que $A = PBQ$ et $B = RCS$, donc $A = (PR)C(SQ)$ et PR et SQ sont inversibles.

Il s'agit donc bien d'une relation d'équivalence. □

Proposition 5.1.10.
1. Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux bases de F. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u)$ sont des matrices équivalentes.
2. Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, munies de bases respectives $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Soit A une matrice équivalente à $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$. Alors il existe une base $\mathscr{B}'$ de E et une base $\mathscr{C}'$ de F telles que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u) = A$.

Démonstration.
1. D'après le théorème de changement de base, on a
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{C}')^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$$
et les matrices de changement de base sont inversibles, donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ sont équivalentes.
2. Posons $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$. A est équivalente à M, donc on peut trouver $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ inversibles telles que $A = PMQ$. Soit $f \in \mathscr{L}(F)$ et $g \in \mathscr{L}(E)$ les applications vérifiant $P^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f)$ et $Q = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$. P et Q étant inversibles, f et g sont des automorphismes. Notons $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{C}'$ les images respectives de $\mathscr{B}$ de $\mathscr{C}$ par g et f. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = Q$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{C}') = P^{-1}$. Donc d'après le théorème de changement de base $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u) = P\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)Q$. □

Théorème 5.1.11 (Théorème de réduction)**.**
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice de rang r.
1. Alors, $r \leqslant \min(n, p)$.
2. A est équivalente à la matrice $J_{n,p,r}$ définie par
$$J_{n,p,r} = \begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{I}_r & 0_{r,p-r}\\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r}\end{pmatrix}.$$

Démonstration.
1. On note $V_1, \dots, V_p$ les colonnes de A. Il s'agit de p vecteurs de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, donc $\operatorname{rg}(V_1, \dots, V_p) \leqslant p$ et de plus $\operatorname{rg}(V_1, \dots, V_p) \leqslant \dim \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = n$.
2. Considérons $u : \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à la matrice A. u est de même rang que A.

   On sait qu'on peut trouver un supplémentaire S de $\operatorname{Ker} u$ tel que u réalise un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$. De plus $\dim S = \operatorname{rg}(u) = r$ et $\dim \operatorname{Ker} u = p - r$. Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de S, $(e_{r+1}, \dots, e_p)$ une base de $\operatorname{Ker} u$. Posons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$. $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}^p$. Posons $f_i = u(e_i)$ pour $i \in [\![1, r]\!]$. Alors $(f_1, \dots, f_r)$ est une base de $\operatorname{Im} u$, qu'on peut compléter en une base $\mathscr{C}$ de $\mathbb{K}^n$.

Alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = J_{n,p,r}$. Or u a pour matrice A dans les bases canoniques, donc A et $J_{n,p,r}$ sont équivalentes.

□

Remarque 5.1.12.
Nous venons de voir une interprétation géométrique de ce résultat. On peut aussi en donner une interprétation matricielle.

On applique l'algorithme du pivot de Gauss au système $AX = B$, avec $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Après une phase de descente, on arrive à un système échelonné en lignes. Quitte à échanger quelques colonnes, A est donc équivalente à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} J & * \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix} \text{ avec } J = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarquons qu'hormis ces échanges de colonnes, nous n'avons effectué que des opérations sur les lignes. Après la phase de remontée (opérations sur les lignes, toujours), on obtient que A est équivalente à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} I_r & * \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}.$$

Il suffit donc d'effectuer quelques opérations élémentaires sur les colonnes de A pour obtenir que A est équivalente à $J_{n,p,r}$.

On remarquera donc que, en écrivant $A = PJ_{n,p,r}Q$, avec $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{R})$, on lit dans P les opérations effectuées sur les lignes de A pendant l'algorithme du pivot de Gauss et dans Q celles effectuées sur les colonnes de A.

5.2. Opérations laissant le rang invariant

Théorème 5.2.1.
Multiplier une matrice par une matrice inversible (à droite ou à gauche) ne change pas son rang.

Démonstration.
Ce n'est que le point de vue matriciel du résultat analogue sur les applications linéaires. □

Tous les théorèmes suivants utiliseront ce résultat.

Théorème 5.2.2.
Deux matrices A et B sont équivalentes si et seulement si elles sont de même taille et de même rang.

Démonstration.
Dans un sens, utiliser le résultat précédent. Dans l'autre, utiliser le théorème de réduction. □

Théorème 5.2.3 (Invariance par transposition)**.**
Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$.

Démonstration.
C'est un corollaire du théorème de réduction : si $A = BJ_{n,p,r}C$, ${}^tA =^t C^t J^t_{n,p,r}B =^t CJ^t_{p,n,r}B$, qui est de rang r, car ${}^tB$ et ${}^tC$ sont inversibles et $J_{p,n,r}$ est de rang r. □

Corollaire 5.2.4.
Les résultats sur le rang applicables aux colonnes des matrices vus précédemment s'appliquent aussi aux lignes. Plus précisément :

1. Le rang d'une matrice est le rang de ses vecteurs lignes.
2. Le rang d'une famille de lignes d'une matrice est inférieur ou égal à celui de la matrice.
3. Pour tout matrice de rang r, il existe une famille de r lignes de cette matrice constituant une famille libre.

Exemple 5.2.5.
$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ se calcule plus vite en passant à la transposée, *i.e.* en raisonnant sur les lignes au lieu des colonnes. On peut aussi faire un mix.

Théorème 5.2.6.
Les opérations élémentaires sur les lignes et colonnes préservent le rang.

Démonstration.
Facile car ces opérations reviennent à multiplier par des matrices inversibles. □

Théorème 5.2.7.
Supprimer une ligne ou une colonne de zéros dans une matrice ne change pas son rang.

Démonstration.
Pour les colonnes : analogue du résultat sur les vecteurs. Pour les lignes : passer à la transposée. □

5.3. Calculs pratiques

Remarque 5.3.1.
Calcul du rang et de l'inverse d'une matrice grâce au pivot de Gauss.

Pour le rang On peut appliquer la méthode du pivot à une matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ non nécessairement carrée.

On peut mélanger les opérations sur les lignes et les colonnes.

On arrive au final à une matrice contenant des lignes non nulles $L_1, \dots, L_k$, dont le premier élément est situé colonne c_1, ..., c_k avec $c_1 < \dots < c_k$, puis $n-k$ lignes nulles. Alors $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg}(\operatorname{Vect}(L_1, \dots, L_k)) = k$ car les lignes L_1, ..., L_k forment une famille libre.

Pour le calcul du noyau d'une matrice non nécessairement carrée, on peut remarquer que les opérations sur les lignes le laissent invariant car multiplier à gauche une matrice par une matrice inversible ne change pas son noyau.

Pour le calcul de l'image d'une matrice non nécessairement carrée, on peut remarquer que les opérations sur les colonnes la laissent invariante car multiplier à droite une matrice par une matrice inversible ne change pas son image.

Pour le calcul de l'inverse d'une matrice carrée on peut travailler sur les lignes ou sur les colonnes mais **surtout pas sur les deux**. En effet, l'algorithme du calcul de l'inverse consiste à multiplier la matrice A par des matrices élémentaires jusqu'à obtenir l'identité, et à multiplier en parallèle la matrice identité par les mêmes matrices.

5.4. Matrices extraites

Définition 5.4.1.
Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle matrice extraite de M toute matrice obtenue en supprimant h des lignes de M et k de ses colonnes avec $h \in [\![0, n-1]\!]$ et $k \in [\![0, p-1]\!]$.

Proposition 5.4.2.
Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et A une matrice extraite de M. Alors $\operatorname{rg}(A) \leqslant \operatorname{rg}(M)$.

Démonstration.
Posons $r = \operatorname{rg}(A)$. Alors on peut trouver r colonnes C_1, ..., C_r de A linéairement indépendantes. Notons C'_1, ..., C'_r les r colonnes de M correspondantes. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, C_i est obtenue en supprimant certaines lignes de C'_i. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ r scalaires. Considérons les combinaisons linéaires $S' = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i C'_i$ et $S = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i C_i$. S est obtenue en rayant certaines lignes de S', donc si S' est nulle, S l'est également et tous les λ_i, sont alors nuls.

C'_1, ..., C'_r sont donc linéairement indépendantes, donc $\operatorname{rg}(M) \geqslant r$. □

Proposition 5.4.3.
Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Posons $r = \operatorname{rg}(M)$. Alors il existe une matrice A extraite de M, carrée, de taille r et inversible (donc de rang r).

Démonstration.
On peut trouver des colonnes C_1, ..., C_r de M telles que $\operatorname{rg}(C_1, \dots, C_r) = r$. Ces colonnes permettent donc de former une matrice B de taille $n \times r$ de rang r. B possède n lignes. Comme elle est de rang r, il existe une r lignes L_1, ..., L_r de B telles que $\operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg}(L_1, \dots, L_r)$.

Or ces lignes L_1, ..., L_r permettent de former une matrice A, extraite de M. Cette matrice A est de taille $r \times r$ (donc carrée) et de rang r, donc inversible. □

6. Systèmes d'équations linéaires

6.1. Généralités

Définition 6.1.1.
On appelle *système linéaire à n équations et p inconnues* tout système de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{cases}$$

où les a_{ij} et les b_i sont dans $\mathbb{K}$, et les x_i sont les inconnues. Le *système homogène associé* correspond au cas où $b_1 = \cdots = b_n = 0$.

On dit que le système est *compatible* s'il admet une solution.

Interprétation matricielle En écrivant le système $AX = B$, on voit que (S) est compatible si et seulement si $B \in \operatorname{Im} A$.

Interprétation linéaire En choisissant un espace vectoriel E de dimension p et F de dimension n munis respectivement d'une base $\mathscr{B}$ et d'une base $\mathscr{C}$ et en notant u l'application linéaire de E dans F et b le vecteur de F tels que $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(u)$ et $B = \operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(b)$, on voit que (S) est compatible si et seulement si $b \in \operatorname{Im} u$.

Interprétation vectorielle En notant C_j les colonnes de A, on note que (S) est compatible si et seulement si $B \in \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p)$.

Interprétation duale En notant L_i les lignes de A, et u_i les formes linéaires sur F telles que $L_i = \operatorname{Mat}_{\mathscr{C},\mathbb{K}}(u_i)$, on note que (S) est compatible si et seulement si les $u_i^{-1}(\{ b_i \})$, pour $i \in [\![1, p]\!]$, contiennent au moins un vecteur en commun.

Interprétation géométrique Soit $i \in [\![1, n]\!]$. En supposant que $u_i^{-1}(\{ b_i \})$ est non vide, alors il s'agit d'un hyperplan affine (*i.e.* il est de la forme $X_0 + H$ où $H = \operatorname{Ker} u_i$ est un hyperplan) si u_i n'est pas la forme linéaire nulle et il s'agit de F sinon. Donc l'ensemble des solutions est ou bien vide ou bien l'intersection d'un certain nombre d'hyperplans (autant que de lignes non nulles).

Exemple 6.1.2.

Écrire ces différents points de vue avec $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

6.2. Solutions

Définition 6.2.1.
Soit (S) un système linéaire écrit sous forme matricielle $AX = B$. On appelle *rang du système* le rang de la matrice A. On le note $\operatorname{rg}(S)$.

Théorème 6.2.2.
Soit (S) un système linéaire de matrice associée $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. L'ensemble des solutions du système homogène associé à (S) est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $p - \operatorname{rg}(S)$ (p est le nombre d'inconnues).
2. L'ensemble des solutions de (S) est soit vide, soit un sous-espace affine de direction l'ensemble des solutions du système homogène associé à (S).

Démonstration.
1. Cet ensemble $\mathscr{S}_0$ de solutions est tout simplement $\operatorname{Ker} A$, et on utilise le théorème du rang.
2. On note $\mathscr{S}$ cet ensemble de solutions. Si (S) est compatible, soit $X_0 \in \mathscr{S}$ une solution. Soit X une autre solution. On montre alors facilement que $X - X_0$ est solution du système homogène, donc $X \in \mathscr{S}_0 + X_0$, et $\mathscr{S} \subset \mathscr{S}_0 + X_0$.
   Réciproquement, soit $X \in \mathscr{S}_0 + X_0$. Il est facile de voir que $X \in \mathscr{S}$.

□

Définition 6.2.3.
Soit (S) un système linéaire écrit sous forme matricielle $AX = B$. Si A est inversible, on dit que (S) est un *système de Cramer*.

Théorème 6.2.4.
Tout système de Cramer a une unique solution, qui est $A^{-1}B$.

Démonstration.
Il est facile de voir que $A^{-1}B$ est une solution. C'est la seule car $\mathscr{S}$ est un sea dont la direction est de dimension $n-n=0$. □

7. Matrices semblables et trace

Dans toute cette partie, on ne considère que des matrices carrées.

7.1. Matrices semblables

a. Changement de base pour un endomorphisme

Proposition 7.1.1.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}').$$

Démonstration.
C'est une conséquence immédiate de la formule de changement de base dans le cas où $F=E$, $\mathscr{C}=\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}'=\mathscr{B}'$ (théorème 2.4.7). □

Définition 7.1.2.
Soit A et B deux matrices carrées de taille n. Deux matrices A et B sont dites semblables si et seulement s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A = P^{-1}BP$.

La relation « A est semblable à B » est appelée relation de *similitude*.

Proposition 7.1.3.
La relation de similitude est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration.
Cette relation est

Réflexive car pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a $A = \mathrm{I}_n^{-1}A\mathrm{I}_n$.

Symétrique car pour tout $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ et tout $P \in GL_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A=P^{-1}BP$, alors $P^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ et $B = \left(P^{-1}\right)^{-1}AP^{-1}$.

Transitive car pour tout $(A,B,C) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^3$ et tout $(P,Q) \in GL_n(\mathbb{K})^2$ vérifiant $A = P^{-1}BP$ et $B = Q^{-1}CQ$, on a $A = P^{-1}Q^{-1}CQP = (QP)^{-1}C(QP)$.

□

Remarque 7.1.4.
Deux matrices semblables sont nécessairement équivalentes mais la réciproque n'est pas vraie. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, I_2 et $17\mathrm{I}_2$ ont même rang (2) donc sont équivalentes mais ne sont pas semblables car pour tout matrice carrée P de taille 2 inversible, $P^{-1}(\mathrm{I}_2)P = \mathrm{I}_2 \neq 17\mathrm{I}_2$.

Proposition 7.1.5.
Soit A et B deux matrices carrées de taille n. A et B sont semblables si et seulement si ce sont les matrices d'un même endomorphisme u exprimées dans deux bases différentes.

Plus exactement, A et B sont semblables si et seulement s'il existe un espace vectoriel E de dimension n, deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ et un endomorphisme u tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = A$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = B$.

Démonstration.
Le sens indirect est une conséquence de la formule de changement de base pour un endomorphisme (proposition 7.1.1).

Montrons le sens direct. Supposons que A et B sont semblables, c'est-à-dire qu'il existe P tel que $A = P^{-1}BP$. Choisissons un espace vectoriel E de dimension n et une base $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ de cet espace (on peut par exemple prendre $E = \mathbb{K}^n$ et $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$). Notons e'_1, …, e'_n les vecteurs de E dont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ sont les colonnes de P. Alors $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$.

Notons enfin u l'endomorphisme de E vérifiant $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = B$.

Alors,

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\\ &= P^{-1}BP\\ &= A,\end{aligned}$$

donc A et B sont les deux matrices d'un même endomorphisme relativement aux bases respectives $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}$. □

Proposition 7.1.6.
Considérons deux matrices A et B semblables de taille n. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k et B^k sont des matrices semblables.

Démonstration.
Ce résultat peut être démontré au moins des deux manières suivantes :

Par le calcul On montre par récurrence sur k que pour tout k, on a $A^k = P^{-1}B^kP$. Pour montrer que ce prédicat est héréditaire, il suffit de constater que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que le prédicat est vérifié, on a également $A^{k+1} = A^kA = P^{-1}B^kPP^{-1}BP$.

Géométriquement A et B sont deux matrices d'un même endomorphisme u, donc A^k et B^k sont deux matrices de u^k.

□

7.2. Trace d'une matrice carrée

a. Définition

Définition 7.2.1.
Soit A une matrice carrée de taille n. Alors la *trace de* A, notée $\mathrm{tr}\,(A)$ (ou $\mathrm{Tr}(A)$), est la somme des éléments diagonaux de A.

En notant $(a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!]}$ les coefficients de A :

$$\mathrm{tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Remarque 7.2.2.
Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\mathrm{tr}\,({}^tA) = \mathrm{tr}\,(A).$$

Démonstration.
Les matrices ${}^tA$ et A ont les mêmes éléments diagonaux. □

b. Linéarité

Proposition 7.2.3.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application trace est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration.
Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Posons $C = \lambda A + B$ et montrons $\mathrm{tr}\,(\lambda A + B) = \lambda \mathrm{tr}\,(A) + \mathrm{tr}\,(B)$. Notons (a_{ij}), (b_{ij}) et c_{ij} les coefficients respectivement de A, de B et de C.

Alors, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,(C) &= \sum_{i=1}^{n} c_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{ii} b_{ii}) \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \\
&= \lambda \mathrm{tr}\,(A) + \mathrm{tr}\,(B).
\end{aligned}$$

□

c. Propriété fondamentale de la trace

Proposition 7.2.4.
Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, alors,

$$\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA).$$

⚠ $\mathrm{tr}\,(A \times B) \neq \mathrm{tr}\,A \times \mathrm{tr}\,B$; par exemple, dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, $0 = \mathrm{tr}\,(E_{11} \times E_{22}) \neq 1 = \mathrm{tr}\,(E_{11}) \times \mathrm{tr}\,(E_{22})$.

Démonstration.
Posons $C = AB$ et $D = BA$. Notons (a_{ij}), (b_{ij}), (c_{ij}) et (d_{ij}) les coefficients respectifs de A, B, C et D.

On a, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}.$$

D'où, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki},$$

$$d_{ii} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki}.$$

D'où :

$$\operatorname{tr}(C) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki},$$
$$\operatorname{tr}(D) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{ik}.$$

Ainsi,

$$\operatorname{tr}(C) = \sum_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant n} a_{\alpha\beta}b_{\beta\alpha},$$
$$\operatorname{tr}(D) = \sum_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant n} a_{\alpha\beta}b_{\beta\alpha},$$

d'où l'égalité recherchée. □

Remarque 7.2.5. 1. On peut déduire de cette égalité que la trace d'un produit de matrices est invariant par permutations circulaires : pour toutes matrices $A_1, \dots, A_k$ de taille n, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A_1A_2\dots A_{k-1}A_k) &= \operatorname{tr}(A_2\dots A_kA_1)\\ &= \operatorname{tr}(A_3\dots A_kA_1A_2)\\ &\dots\end{aligned}$$

2. En revanche, la trace d'un produit de matrice n'est **pas** invariant par n'importe quelle permutation. Par exemple, dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, en notant (E_{ij}) les matrices de la base canonique :

$$\operatorname{tr}(E_{21}E_{11}E_{12}) = 1 \neq 0 = \operatorname{tr}(E_{11}E_{21}E_{12}).$$

d. Invariance par similitude

Proposition 7.2.6.
Deux matrices semblables ont même trace (on dit que la trace est un *invariant de similitude*) : soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, deux matrices semblables. Alors $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

Démonstration.
Il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A = P^{-1}BP$. Alors on a

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A) &= \operatorname{tr}\left(P^{-1}(BP)\right)\\ &= \operatorname{tr}\left((BP)P^{-1}\right)\\ &= \operatorname{tr}(B).\end{aligned}$$

□

Ce résultat n'est pas valable pour des matrices équivalentes. Par exemple dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr}(\mathrm{I}_2.\mathrm{I}_2.(2\mathrm{I}_2)) \neq \operatorname{tr}\mathrm{I}_2$.

e. Trace d'un endomorphisme en dimension finie

Définition 7.2.7.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. La *trace de l'endomorphisme* u et on note $\operatorname{tr}(u)$ (ou $\operatorname{Tr}(u)$) est le scalaire défini par

$$\operatorname{tr}(u) = \operatorname{tr}(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)),$$

où $\mathscr{B}$ est une base quelconque de E. Cette valeur ne dépend pas du choix de la base $\mathscr{B}$.

Démonstration.
On a vu d'une part que deux matrices d'un même endomorphisme sont nécessairement semblables et d'autre part que la trace de matrices est un invariant de similitude. La valeur de $\operatorname{tr}(u)$ ne dépend donc pas du choix de la base $\mathscr{B}$. □

f. Propriétés

Proposition 7.2.8.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. La trace est une forme linéaire sur $\mathscr{L}(E)$.

Démonstration.
Il suffit de choisir une base de $\mathscr{B}$ de E et constater que pour tous endomorphismes u et v, de matrices respectives A et B, et pour tout scalaire λ, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\lambda u + v) &= \operatorname{tr}(\lambda A + B)\\ &= \lambda\operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)\\ &= \lambda\operatorname{tr}(u) + \operatorname{tr}(v).\end{aligned}$$

□

Proposition 7.2.9.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et v et u deux endomorphismes de E. Alors,

$$\operatorname{tr}(v \circ u) = \operatorname{tr}(u \circ v).$$

Démonstration.
Il suffit de choisir une base $\mathscr{B}$ de E. En notant A et B les matrices respectives de u et v, la matrice de $v \circ u$ est BA, celle de $u \circ v$ est AB et on sait que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, d'où le résultat. □

Exemple 7.2.10.
Vérifier ce résultat sur deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$.

g. Trace d'un projecteur

Proposition 7.2.11.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur. Alors, la trace de p est la dimension de $\operatorname{Im} p$:

$$\operatorname{tr}(p) = \operatorname{rg} p.$$

Démonstration.
Notons n la dimension de E, q celle de $\operatorname{Im} p$. p étant un projecteur, on a $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$. Soit $(e_1, \dots, e_q)$ une base de $\operatorname{Im} p$. On a $\dim \operatorname{Ker} p = n - q$, donc on peut trouver une base $(e_{q+1}, \dots, e_n)$ de $\operatorname{Ker} p$. La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est alors une base $\mathscr{B}$ de E et relativement à cette base, la matrice de p est une matrice diagonale dont les q premiers coefficients valent 1 et tous les autres sont nuls. Sa trace est donc q. □

Remarque 7.2.12.
Ce résultat est faux pour d'autres endomorphismes que les projecteurs. Considérer par exemple un endomorphisme de matrice E_{12}.

8. Matrices par blocs

Définition 8.0.1.
Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On peut écrire la matrice sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1p} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{np} \end{pmatrix}.$$

En traçant $q-1$ lignes horizontales distinctes et $r-1$ lignes verticales distinctes dans le tableau représentant M, on peut décomposer M en $q \times r$ matrices extraites M_{ij} pour $(i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,r]\!]$:

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1r} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{q1} & M_{q2} & \cdots & M_{qr} \end{pmatrix}.$$

Cette décomposition est appelée *décomposition par blocs* de M en $q \times r$ blocs.

Formellement, une décomposition par bloc de M est la donnée de $q \times r$ matrices M_{ij} pour $(i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,r]\!]$ telles que

1. Pour tout $i \in [\![1,q]\!]$, les matrices $M_{i1}, \dots, M_{ir}$ ont un même nombre de lignes n_i (toutes les matrices d'une même ligne ont même nombre de lignes).
2. Pour tout $j \in [\![1,r]\!]$, les matrices $M_{1j}, \dots, M_{qj}$ ont un même nombre de colonnes p_j (toutes les matrices d'une même colonne ont même nombre de colonnes).
3. En notant a_{hk}^{ij} le coefficient de la ligne h, colonne k de la matrice M_{ij} pour $(i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,r]\!]$ et $(h,k) \in [\![1,n_i]\!] \times [\![1,p_j]\!]$, on a $a_{hk}^{ij} = m_{(s+h)(t+k)}$ où $s = n_1 + \dots + n_{i-1}$ et $t = p_1 + \dots + p_{j-1}$.

On dira que la décomposition précédente est *triangulaire supérieure par blocs* si $n = p$ et que :

1. pour tout $i \in [\![1,q]\!]$, M_{ii} est carrée ;
2. pour tout $(i,j) \in [\![1,q]\!]^2$ avec $i > j$, M_{ij} est nulle.

On définit de même les décompositions *triangulaires inférieures par blocs.*

Enfin, les décompositions *diagonales par blocs* sont celles dont tous les blocs M_{ij} tels $i \neq j$ sont nuls et tous les blocs M_{ii} sont carrés.

Exemple 8.0.2.
En posant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \end{pmatrix},$$

A peut se décomposer par bloc en

$$\begin{pmatrix} B & C & D \\ E & F & G \\ H & I & J \end{pmatrix},$$

où

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 13 & 14 \end{pmatrix},$$
$$F = \begin{pmatrix} 15 \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} 16 & 17 & 18 \end{pmatrix},$$
$$H = \begin{pmatrix} 19 & 20 \\ 25 & 26 \\ 31 & 32 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 21 \\ 27 \\ 33 \end{pmatrix},$$
$$J = \begin{pmatrix} 22 & 23 & 24 \\ 28 & 29 & 30 \\ 34 & 35 & 36 \end{pmatrix}.$$

Remarque 8.0.3.
Lorsqu'on parle de décomposition triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure, diagonale) par bloc, c'est bien la décomposition qui est triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure, diagonale). Toute matrice carrée admet en effet une décomposition (triviale) triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure, diagonale) par bloc.

Proposition 8.0.4 (Interprétation géométrique)**.**
On peut interpréter la décomposition par blocs de la façon suivante. Considérons la matrice $n \times p$ donnée dans la définition précédente :

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1r} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{q1} & M_{q2} & \cdots & M_{qr} \end{pmatrix},$$

où pour tout $(i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,r]\!]$, M_{ij} est de taille $n_i \times p_j$. Soit E et F des espaces vectoriels respectivement de dimension p et n, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F et $u \in \mathscr{L}(E,F)$ vérifiant $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$.

On note $\mathscr{B}_1$ la famille des p_1 premiers vecteurs de $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}_2$ celle des p_2 suivants, ..., $\mathscr{B}_r$ celle des p_r derniers et $E_1 = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1)$, ..., $E_r = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_r)$. Pour tout $j \in [\![1,r]\!]$, $\mathscr{B}_j$ est une base de E_j.

On note $\mathscr{C}_1$ la famille des n_1 premiers vecteurs de $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}_2$ celle des n_2 suivants, ..., $\mathscr{C}_r$ celle des n_r derniers et $F_1 = \mathrm{Vect}(\mathscr{C}_1)$, ..., $F_q = \mathrm{Vect}(\mathscr{C}_q)$. Pour tout $i \in [\![1,q]\!]$, $\mathscr{C}_i$ est une base de F_i.

Alors

$$E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_r,$$
$$F = F_1 \oplus \ldots \oplus F_q.$$

Tout $y \in F$ s'écrit de façon unique $\pi'_1(y) + \ldots + \pi'_q(y)$, où $\pi'_i(y) \in F_i$ pour tout $i \in [\![1,q]\!]$ (π'_i est alors la projection sur F_i parallèlement à la somme des F_k pour $k \neq i$).

De même notons, pour tout $j \in [\![1,r]\!]$, π_j la projection sur E_j parallèlement à la somme des E_k pour $k \neq j$.

Alors, pour tout $(i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,r]\!]$, on note

$$u_{ij} : \left\{ \begin{array}{ccc} E_j & \longrightarrow & F_i \\ x & \longmapsto & \pi'_i(u(x)) \end{array} \right. .$$

Ainsi, u_{ij} est obtenu en restreignant u au départ à E_j et, comme il n'est pas a priori possible de le restreindre à l'arrivée à F_i en le composant à gauche par la projection sur F_i (par rapport à la somme des F_k pour $k \neq i$) : $u_{ij} = \pi'_i \circ u_{|E_j}$.

On a alors, pour tout $x \in E$:

$$u(x) = \sum_{(i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,r]\!]} u_{ij}(\pi_j(x)).$$

De plus, pour tout $(i, j) \in [\![1, q]\!] \times [\![1, r]\!]$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_j, \mathscr{C}_i}(u_{ij}) = M_{ij}.$$

Démonstration.
Remarquons tout d'abord que pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} u(x) &= u\left(\sum_{j=1}^{r} \pi_j(x)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{r} u(\pi_j(x)) \\ &= \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{q} \pi'_i(u(\pi_j(x))) \\ &= \sum_{(i,j)\in[\![1,q]\!]\times[\![1,r]\!]} u_{ij}(\pi_j(x)). \end{aligned}$$

Soit $(i, j) \in [\![1, q]\!] \times [\![1, r]\!]$. On a

$$\begin{aligned} \mathscr{C}_i &= (f_{s+1}, f_{s+2}, \ldots, f_{s+n_i}), \\ \mathscr{B}_j &= (e_{t+1}, e_{t+2}, \ldots, e_{t+p_j}), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} s &= n_1 + \ldots + n_{i-1}, \\ t &= p_1 + \ldots + p_{j-1}. \end{aligned}$$

Soit $k \in [\![1, p_j]\!]$. En notant $(m_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]}$ les coefficients de M, on a

$$\begin{aligned} u_{ij}(e_k) &= \pi'_i(u(e_{t+k})) \\ &= \pi'_i\left(\sum_{h=1}^{n} m_{h(t+k)} f_h\right) \\ &= \sum_{h=s+1}^{s+n_i} m_{h(t+k)} f_h \\ &= \sum_{h=1}^{n_i} m_{(s+h)(t+k)} f_{s+h}. \end{aligned}$$

On en déduit que la matrice de u_{ij} est la matrice des $\left(m_{(s+h),(t+k)}\right)_{(h,k)\in[\![1,n_i]\!]\times[\![1,p_j]\!]}$ qui est exactement la matrice M_{ij}. On a donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_j,\mathscr{C}_i}(u_{ij}) = M_{ij}$. □

Proposition 8.0.5 (Addition par blocs)**.**
Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$, admettant des décompositions par blocs

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{q1} & A_{q2} & \cdots & A_{qr} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{q1} & B_{q2} & \cdots & B_{qr} \end{pmatrix},$$

où pour tout $(i, j) \in [\![1, q]\!] \times [\![1, r]\!]$, A_{ij} et B_{ij} sont de même taille.

Alors $A + B$ vaut

$$\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1r}+B_{1r} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2r}+B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{q1}+B_{q1} & A_{q2}+B_{q2} & \cdots & A_{qr}+B_{qr} \end{pmatrix}.$$

Démonstration.
Notons, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$ (resp. pour tout $j \in [\![1, r]\!]$), n_i (resp. p_j) le nombre de lignes (resp. de colonnes) des matrices de la ligne i (resp. de la colonne j) de ces décompositions par bloc.

Posons $C = A + B$ et pour tout $(i, j) \in [\![1, q]\!] \times [\![1, r]\!]$, $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$.

Notons a_{ij} pour $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$ les coefficients de la matrice A, b_{ij} ceux de B, c_{ij} ceux de C et pour tout $(i, j) \in [\![1, q]\!] \times [\![1, r]\!]$ et tout $(k, h) \in [\![1, n_i]\!] \times [\![1, p_j]\!]$, a^{ij}_{hk} (resp. b^{ij}_{hk}, resp. c^{ij}_{hk}) ceux de A_{ij} (resp. B_{ij}, resp. C_{ij}). On a alors, en posant $s = n_1 + \ldots + n_{i-1} + h$ et $t = p_1 + \ldots + p_{j-1} + k$.

$$c_{st} = a_{st} + b_{st} = a^{ij}_{hk} + b^{ij}_{hk} = c^{ij}_{hk}$$

On a donc

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{q1} & C_{q2} & \cdots & C_{qr} \end{pmatrix}$$

D'où le résultat. □

Proposition 8.0.6 (Multiplication par blocs)**.**
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

On considère des décompositions de A en $r \times s$ blocs et de B en $s \times t$ blocs,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix},$$

telles que pour tout pour tout $(i,k,j) \in [\![1,r]\!] \times [\![1,s]\!] \times [\![1,t]\!]$, les matrices A_{ik} et B_{kj} aient des tailles compatibles par la multiplication.

Alors le produit $A \times B$ s'écrit par blocs :

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rt} \end{pmatrix},$$

où pour tout $(i,j) \in [\![1,r]\!] \times [\![1,t]\!]$, on a

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{s} A_{ik} \times B_{kj}$$

Démonstration (non exigible)**.**
Nous donnons ici les grandes lignes de la démonstration, que nous traitons de façon géométrique.

Choisissons E, F, G trois espaces vectoriels de dimensions respectives q, p, n et trois bases respectives $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ de ces espaces.

Notons $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$ les applications linéaires vérifiant $\mathrm{Mat}_{(\mathscr{B},\mathscr{C})}(u) = B$ et $\mathrm{Mat}_{(\mathscr{C},\mathscr{D})}(v) = A$.

Comme précédemment, on peut, à partir de la base $\mathscr{B}$, décomposer E en une somme directe $E_1 \oplus \ldots \oplus E_t$ et construire des projections $\pi_1, \ldots, \pi_t$ sur ces sous-espaces respectifs, parallèlement à la somme des autres.

On fait de même pour décomposer F en $F_1 \oplus \ldots \oplus F_s$ et construire les projections $\pi'_1, \ldots, \pi'_s$ associées et pour décomposer G en $G_1 \oplus \ldots \oplus G_r$ et construire les projections $\pi''_1, \ldots, \pi''_r$ associées.

Posons $w = v \circ u$.

On peut construire comme précédemment des $u_{ij} \in \mathscr{L}(E_j, F_i)$ pour $(i,j) \in [\![1,s]\!] \times [\![1,t]\!]$ pour décomposer u, des $v_{ij} \in \mathscr{L}(F_j, G_i)$ pour $(i,j) \in [\![1,r]\!] \times [\![1,s]\!]$ pour décomposer v et des $w_{ij} \in \mathscr{L}(E_j, G_i)$ pour $(i,j) \in [\![1,r]\!] \times [\![1,t]\!]$ pour décomposer w.

En posant $C_{ij} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(w_{ij})$ pour $(i,j) \in [\![1,r]\!] \times [\![1,t]\!]$, on obtient une décomposition par bloc de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(w)$ qui n'est autre que $A \times B$.

Soit alors $(i,j) \in [\![1,r]\!] \times [\![1,s]\!]$ et $x \in E_j$. On a

$$\begin{aligned} w_{ij} &= \pi''_i \circ w_{|E_j} \\ &= \pi''_i \circ v \circ u_{|E_j} \\ &= \pi''_i \circ v \circ \left(\sum_{k=1}^{s} \pi'_k\right) \circ u_{|E_j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \pi''_i \circ v \circ \pi'_k \circ u_{|E_j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \pi''_i \circ v_{|F_k} \circ \pi'_k \circ u_{|E_j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} v_{ik} \circ u_{kj}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(\sum_{k=1}^{n} v_{ik} \circ u_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(v_{ik}) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \times B_{kj}. \end{aligned}$$

$\square$