Devoir surveillé n°10
Version 2
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Vers le théorème de Cayley-Hamilton.

Soient E un $\mathbb{K}$-ev, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On considère l'application :

$$P : \begin{array}{rcl} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \det(x\mathrm{Id} - u) \end{array}.$$

Propriétés générales

1) Montrer que P est une fonction polynomiale de degré n. Quel est son coefficient dominant ? Quel est son terme constant ?

2) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que λ est racine de P si et seulement si $\lambda\mathrm{Id} - u$ n'est pas injectif. Que peut-on dans ce cas dire de $\mathrm{Ker}(\lambda\mathrm{Id} - u)$?

3) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une racine de P. On pose $d = \dim \mathrm{Ker}(\lambda\mathrm{Id} - u)$. Justifier l'existence d'une base $\mathscr{B}$ de E dont les d premiers vecteurs vérifient l'équation $u(x) = \lambda x$.

4) Expliciter les d premières colonnes de la matrice représentative de u dans cette $\mathscr{B}$.

5) En déduire que d est inférieur à la multiplicité de λ en tant que racine de P.

Quelques endomorphismes diagonalisables

On reprend toutes les notations de la partie précédente, en supposant de plus que $\dim E = 3$ et que le polynôme P est scindé dans $\mathbb{K}$. On étudie quelques cas particuliers.

6) On suppose ici que P a trois racines distinctes α, β et γ. Soient $e \in \mathrm{Ker}(\alpha\mathrm{Id} - u)$, $f \in \mathrm{Ker}(\beta\mathrm{Id} - u)$ et $g \in \mathrm{Ker}(\gamma\mathrm{Id} - u)$, tels que e, f et g soient tous trois non nuls.

- **a)** Montrer que (e, f, g) est une base de E.
- **b)** Quelle est la matrice de u dans cette base ?
- **c)** Application : Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

  Déterminer une base dans laquelle la matrice de u est diagonale.

7) On suppose ici que P a deux racines distinctes α racine simple et β racine double, et que $\dim \mathrm{Ker}(\beta\mathrm{Id} - u) = 2$.

- **a)** Montrer que $\mathrm{Ker}(\alpha\mathrm{Id} - u)$ et $\mathrm{Ker}(\beta\mathrm{Id} - u)$ sont en somme directe.
- **b)** Justifier le fait que $\dim \mathrm{Ker}(\alpha\mathrm{Id} - u) = 1$.
- **c)** Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

d) Application : Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Matrice compagnon

Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_{r-1} \in \mathbb{K}$. On note M la matrice carrée d'ordre r suivante, appelée matrice compagnon de la famille $(a_0, \ldots, a_{r-1})$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & . & . & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & & & & . & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & & & & . & a_2 \\ . & . & . & . & & & . & a_3 \\ . & & . & . & . & & . & . \\ . & & & . & . & . & . & . \\ . & & & & 0 & 1 & 0 & a_{r-2} \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 1 & a_{r-1} \end{pmatrix}$$

8) Montrer que :

$$\det(xI_3 - M) = x^r - \sum_{k=0}^{r-1} a_k x^k.$$

Polynômes d'endomorphisme

À tout polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$ noté $\sum_{k=0}^{p} \alpha_k X^k$, on associe l'endomorphisme noté $A(u)$ tel que $A(u) = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k u^k$.

9) Soient $A \in \mathbb{K}[X]$ et $s \in \mathbb{N}^*$. On note $\tilde{A} = X^s.A$. Montrer que $u^s \circ A(u) = \tilde{A}(u)$.

10) Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $(BA)(u) = B(u) \circ A(u)$.

Théorème de Cayley-Hamilton

Soit $x \in E \backslash \{0\}$. On note $\mathscr{E} = \Big\{k \in \mathbb{N}^* \mid (x, u(x), \ldots, u^{k-1}(x)) \text{ est libre}\Big\}$.

11) Montrer que $\mathscr{E}$ admet un plus grand élément r, et que $r \leqslant n$.

12) En déduire qu'il existe r éléments $a_0, \ldots, a_{r-1} \in \mathbb{K}$ tels que $u^r(x) = \sum_{k=0}^{r-1} a_k u^k(x)$.

13) Justifier alors l'existence d'une base $\mathscr{B}'$ de E dont les r premiers vecteurs sont

$$(x, u(x), \ldots, u^{r-1}(x)).$$

14) Expliciter les r premières colonnes de la matrice représentative de u dans cette $\mathscr{B}'$.

15) En déduire l'existence d'un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = Q \times \left(X^r - \sum_{k=0}^{r-1} a_k X^k\right)$.

16) Établir le théorème de Cayley-Hamilton : $P(u) = 0$.

II. Calcul approché de $\zeta(3)$.

Le but de ce problème est de mettre en oeuvre une méthode d'accélération de convergence pour calculer la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ à ε près, avec ici $\varepsilon = 5.10^{-5}$.

La somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ est notée $\zeta(3)$, où ζ est la fonction de Riemann.

1) **a)** Soient q un entier $\geqslant 2$ et N un entier $\geqslant 1$.
Donner une majoration du reste

$$R(N, q) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^q}$$

en le comparant à une intégrale.

b) Déterminer un entier naturel N pour que $R(N, 3)$ soit inférieur à ε.

2) Pour tout entier p naturel non nul, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; u(n, p) = \frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}.$$

a) Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} u(n, p)$ est convergente.

b) On pose

$$\sigma(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} u(n, p).$$

Calculer $\sigma(1)$.

c) Pour $p \geqslant 2$ et pour n quelconque dans $\mathbb{N}^*$, exprimer $u(n, p-1) - u(n+1, p-1)$ en fonction de p et $u(n, p)$.

d) En déduire la valeur de $\sigma(p)$ en fonction de p pour tout $p \geqslant 2$.

3) **a)** Montrer par récurrence l'existence de trois suites (a_p), (b_p) et (c_p) d'entiers naturels définies pour $p \geqslant 2$ telles que, pour tout réel x strictement positif et pour tout entier $p \geqslant 2$ on ait :

$$\frac{1}{x^3} = \sum_{k=2}^{p} \frac{a_k}{x(x+1)\cdots(x+k)} + \frac{b_p x + c_p}{x^3(x+1)(x+2)\cdots(x+p)}.$$

On explicitera en particulier les valeurs de a_{p+1}, b_{p+1} et c_{p+1} en fonction de celles de a_p, b_p, c_p et p.

b) Montrer que pour tout $p \geqslant 2$, $b_p \geqslant c_p \geqslant 0$.

c) Calculer a_p, b_p et c_p pour $p = 2$, 3 et 4.

d) Expliciter pour $p \geqslant 2$ la valeur de c_p, puis celle de b_p à l'aide d'une somme. En déduire un équivalent simple de b_p lorsque p tend vers $+\infty$.

4) Donner un majorant simple de

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)\cdots(n+4)}$$

et montrer, à l'aide de tout ce qui précède, comment calculer $\zeta(3)$ à ε près avec une valeur de N moins grande que celle trouvée à la question **1)b)**.

— FIN —