Feuille d'exercice n° 05 : Intégration pour les équations différentielles - fiche d'entraînement - correction

Exercice 1

1)
$$\int x^3 \sqrt{4 + x^4} \, \mathrm{d}x = \frac{(x^4 + 4)^{3/2}}{6}$$

$$2) \int \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = \ln(\ln x)$$

3)
$$\int \frac{(x+5) \, \mathrm{d}x}{\sqrt{x+4}} = 2 \left(\frac{(x+4)^{3/2}}{3} + \sqrt{x+4} \right)$$

4)
$$\int xe^{-x/10} dx = (-10x - 100)e^{-x/10}$$

5)
$$\int x^2 e^{-x/10} dx = (-10x^2 - 200x - 2000)e^{-x/10}$$

6)
$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9}$$

7)
$$\int x^n \ln x \, dx = \frac{x^{n+1} \ln(x)}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \text{ si } n \neq -1, \frac{\ln^2 x}{2} \text{ si } n = -1$$

8)
$$\int x^2 \sin x \, dx = 2x \sin x + (2 - x^2) \cos x$$

9)
$$\int x^3 e^{-x^2} dx = \frac{(-x^2 - 1)e^{-x^2}}{2}$$

10)
$$\int x^3 \sqrt{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{x^2 (x^2+1)^{3/2}}{5} - \frac{2(x^2+1)^{3/2}}{15}$$

11)
$$\int \operatorname{Arcsin}(x) \, \mathrm{d}x = x \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1 - x^2}$$

12)
$$\int \operatorname{Arcsin}^{2}(x) \, \mathrm{d}x = x \operatorname{Arcsin}^{2} x + 2\sqrt{1 - x^{2}} \operatorname{Arcsin} x - 2x$$

13)
$$\int \operatorname{Arctan}(x) \, \mathrm{d}x = x \operatorname{Arctan} x - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$$

14)
$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} \, \mathrm{d}x = -\operatorname{Arcsin}(x/3) - \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$

15)
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}} = -\ln\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} + \frac{1}{|x|}\right) \text{ (poser } x = \cos u \text{ puis } t = \frac{1}{\cos u} + \tan u \text{) ou plus rapide}$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}} = -\operatorname{Argch}(1/|x|) \text{ en posant } : 1/|x| = \operatorname{ch} u.$$

16)
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{a}{|x|} + \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{|x|} \right) \text{ (poser } x = a \tan u \text{ puis } t = \frac{1}{\sin u} + \cot u \text{) ou plus rapide}$$
$$: \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{Argsh}(a/|x|) \text{ en posant } a/|x| = \operatorname{sh} u.$$

17)
$$\int \sqrt{4+x^2} \, dx = 2 \operatorname{Argsh}(x/2) + \frac{x\sqrt{x^2+4}}{2}$$

18)
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \frac{\ln(x+a)}{2a} - \frac{\ln(x-a)}{2a}$$

19)
$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = a \operatorname{Arcsin}(a/|x|) + \sqrt{x^2 - a^2}$$

20)
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{\operatorname{Arctan}(x/a)}{2a^3} + \frac{x}{2a^2x^2 + 2a^4}$$
 (poser $x = a \tan u$).

Exercice 2

1) on pose
$$u = x^2 =$$
, et ensuite on fait une ipp : $\int x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int u f(u) du = \frac{1}{2} (ug(u) - \int g(u) du = \frac{1}{2} (x^2 g(x^2) - h(x^2))$

2)
$$\int x^{2n-1} f(x^n) dx = \frac{1}{n} (x^n g(x^n) - h(x^n))$$
 par analogie.

Exercice 3 Dans les primitives suivantes, trouver un entier n qui permette un calcul par changement de variable, et calculer la primitive :

1) avec
$$n = 3$$
, $\int x^n \sqrt{1 - x^4} \, dx = -\frac{1}{6} (1 - x^4)^{3/2}$.

2) avec
$$n = 3$$
: $\int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}} dx = -\frac{1}{2}\sqrt{1-x^4}$, et avec $n = 1$: $\int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}} dx = -\frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(x^2)$.

3) avec
$$n = 9$$
: $\int \frac{x^n}{1+x^{10}} dx = \frac{1}{10} \ln(1+x^10)$, et avec $n = 4$, $\int \frac{x^n}{1+x^{10}} dx = \frac{1}{5} \operatorname{Arctan}(x^5)$.

4) avec
$$n = 7$$
, $\int \frac{x^6}{1+x^n} dx = \frac{1}{7} \ln(1+x^7)$, et avec $n = 14$, $\int \frac{x^6}{1+x^n} dx = \frac{1}{7} \operatorname{Arctan}(x^7)$.

5) avec
$$n = 1$$
, $\int x^n e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$.

6) avec
$$n = 4$$
, $\int x^n e^{2x^5} dx = \frac{1}{10} e^{2x^5}$.

7) avec
$$n = 6$$
, $\int x^5 \sqrt{1 - x^n} \, dx = -\frac{1}{9} (1 - x^6)^{3/2}$.

8) avec
$$n = 7$$
, $\int \frac{x^6}{\sqrt{1 - x^n}} dx = -\frac{2}{7}\sqrt{1 - x^7}$, et avec $n = 14$, $\int \frac{x^6}{\sqrt{1 - x^n}} dx = \frac{1}{7}\operatorname{Arcsin}(x^7)$.

9) avec
$$n = 1$$
, $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^n \ln x} = \ln(\ln x)$.

10) avec
$$n = 1$$
, $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^n (\ln x)^7} = -\frac{1}{6 \ln^6 x}$

11) avec
$$n = 5$$
, $\int x^n \sin(x^6) dx = -\frac{1}{6} \cos(x^6)$.

- **12)** avec n = 3, $\int \frac{\sin^n x \cos x}{\sqrt{3 + \sin^4 x}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{3 + \sin^4 x}$.
- **13)** avec n = 4, $\int \frac{\sin^3 x \cos x}{\sqrt{3 + \sin^n x}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{3 + \sin^4 x}$.