Devoir surveillé n°7
Version 1

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Soit
$$F = \left\{ f \in \mathscr{C}([-1,1], \mathbb{C}) \mid \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$$
$$\text{et } G = \{ f \in \mathscr{C}([-1,1], \mathbb{C}) \mid \ f \text{ constante} \}.$$
Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{C}([-1,1], \mathbb{C})$.

II. Polynômes réciproques.

On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$ est *réciproque* si
$$X^n P\left(\frac{1}{X}\right) = P(X) \qquad (\mathscr{E})$$

1) Quelques exemples.

- **a)** Parmi le polynômes constants, lesquels sont réciproques ?
- **b)** Donner un exemple de polynôme réciproque de degré 1 et un exemple de polynôme non réciproque de degré 1 (on justifiera la réponse).
- **c)** Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on considère $P = (X-\alpha)(X-\beta)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (α, β) pour que P soit réciproque.

2) Opérations.
Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ deux polynômes réciproques.

- **a)** Montrer que PQ est réciproque.
- **b)** Donner un exemple où P et Q ne sont pas réciproques et où PQ est réciproque.
- **c)** On suppose que $P \mid Q$, notons A le polynôme vérifiant $Q = AP$. Montrer que A est réciproque.

3) Caractérisation par les coefficients.
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$, écrit sous forme développée réduite $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.
Montrer que P est réciproque si et seulement si pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, $a_k = a_{n-k}$.

4) Racines d'un polynôme réciproque.
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme réciproque.

a) Montrer que 0 n'est pas racine de P.

b) Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Montrer que si α est racine de P, alors $\dfrac{1}{\alpha}$ l'est aussi. La réciproque est-elle vraie ?

c) On suppose que 1 est racine de P. Montrer que la multiplicité de 1 en tant que racine de P est supérieure ou égale à 2.

Indication : on pensera à dériver la relation ($\mathscr{E}$).

d) On suppose que P est de degré impair. Montrer que -1 est racine de P.

e) On suppose que P est de degré pair et que -1 est racine de P. Montrer que la multiplicité de -1 en tant que racine de P est supérieure ou égale à 2.

5) Caractérisation par les racines.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

a) En raisonnant par récurrence, montrer que si P est réciproque et est de degré pair, alors 1 est de multiplicité paire en tant que racine de P et, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^*$, α et α^{-1} ont même multiplicité en tant que racines de P.

b) Montrer la réciproque du résultat précédent.

c) Qu'en est-il des polynômes de degrés impairs ?

III. Règle de l'Hôpital .

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

1) Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a, b]$.

2) Montrer qu'il existe un nombre réel $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Indication : on pourra considérer l'application $h : x \mapsto f(x) - pg(x)$, où $p = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

3) De la même manière, montrer que pour tout $y \in]a, b[$, il existe un élément $c(y) \in]y, b[$ tel que

$$\frac{f(y) - f(b)}{g(y) - g(b)} = \frac{f'(c(y))}{g'(c(y))}.$$

4) On suppose que $\frac{f'(x)}{g'(x)} \underset{\substack{x \to b \\ x < b}}{\longrightarrow} \ell$, où ℓ est un nombre réel. Montrer que

$$\frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} \underset{\substack{x \to b \\ x < b}}{\longrightarrow} \ell.$$

Ce résultat est connu sous le nom de « Règle de l'Hôpital ».

5) *Application :* Calculer la limite à gauche en 1 de $x \mapsto \dfrac{\mathrm{Arccos} x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

— **FIN** —