Devoir à la maison n° 21

À rendre le 6 juin

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Calcul des puissances de A.

a) Trouver les réels λ_1 et λ_2 tels que $A - \lambda_i I_3$ n'est pas injective (c'est à dire $\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I_3) \neq \{ 0_3 \}$), avec $\lambda_1 < \lambda_2$.

b) La matrice A est-elle inversible ?

c) Déterminer une base (et donc la dimension) de $\operatorname{Ker}(f - \lambda_1 Id_E)$ et $\operatorname{Ker}(f - \lambda_2 I_E)$.

d) Montrer qu'il n'existe pas de base dans laquelle la matrice de f serait diagonale.

e) Déterminer le vecteur $\overrightarrow{u_1}$ de E vérifiant :
— $\overrightarrow{u_1} \in \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{Id}_E)$;
— la première composante de $\overrightarrow{u_1}$ est 1.

f) Déterminer le vecteur $\overrightarrow{u_2}$ de E vérifiant :
— $\overrightarrow{u_1} \in \operatorname{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{Id}_E)$;
— la deuxième composante de $\overrightarrow{u_2}$ est 1.

g) Soit $\overrightarrow{u_3} = (1, 1, 1)$. Montrer que $\mathscr{C} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une base de E.

h) Déterminer

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) \,\text{et}\, Q = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$$

Quelle relation y a t'il entre P et Q ?

i) Donner la matrice de f dans la base $\mathscr{C}$, que l'on notera T.

j) Quelle relation y a t'il entre A, T, P et Q ?

k) Prouver que, pour tout entier naturel n non nul, il existe $a_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

On donnera le réel α_1 ainsi qu'une relation entre α_{n+1} et α_n.

l) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_n = n2^{n-1}.$$

En déduire l'écriture matricielle de A^n en fonction de n.

2) **Matrices commutant avec A.** $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ désignant l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3, on considère le sous-ensemble $C(A)$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices M telles que :

$$AM = MA.$$

a) Montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Pour M appartenant à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $M' = P^{-1}MP$. Montrer que :

$$AM = MA \Leftrightarrow TM' = M'T.$$

c) Montrer qu'une matrice M' de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $TM' = M'T$ si et seulement si M' est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

où a, b et c sont trois réels.

d) En déduire que M appartient à $C(A)$ si et seulement s'il existe des réels a, b et c tels que :

$$M = \begin{pmatrix} -a+2b & 2a-2b & -a+b+2c \\ -a+b & 2a-b & -a+b+c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

e) Déterminer une base et la dimension de $C(A)$.

— **FIN** —