Feuille d'exercice n° 03 : **Sommes et calculs**

Exercice 1 (✎🚲) Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$. Quelles sont les expressions toujours égales entre elles ?

1) $\displaystyle \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k} b_{n+1-k}, \quad \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2 - \sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2\right)$

2) $\displaystyle \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right), \quad \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{p=1}^{n} b_p\right), \quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}(a_k b_p), \quad \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \sum_{p=1}^{n} b_p\right), \quad \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$

Exercice 2 (🚲) Montrer que pour toute famille $(z_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{C}^n$, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} z_k^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} z_i z_j.$$

Quel résultat bien connu cette formule généralise-t-elle ?

Exercice 3 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = (n+1)! - 1$.

Exercice 4 (✎)

1) Soit $k \in \mathbb{N}$. Écrire $(1+k)^4 - k^4$ sous la forme d'un polynôme de degré 3 en k.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. En s'inspirant de la démonstration du cours donnant la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$, calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$ (on donnera cette valeur sous la forme la plus factorisée possible).

Exercice 5 (🚲) Donner une expression simplifiée des quantités suivantes.

1) $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} i.j$ **2)** $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} i+j$ **3)** $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} i-j$ **4)** $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i,j)$

Même question en remplaçant $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n}$ par $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n}$ puis par $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n}$.

Exercice 6 En considérant $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$, calculer les sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2k+1}$, où $\lfloor\cdot\rfloor$ est la fonction « partie entière ».

Remarque : ces sommes sont souvent notées $\displaystyle\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}$ et $\displaystyle\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}$.

Exercice 7 (🚲) Écrire avec des factorielles les quantités suivantes.

1) $\displaystyle\prod_{k=n}^{m} k$ pour $n, m \in \mathbb{N}^*$ t.q. $n < m$.

2) $\displaystyle\prod_{k=1}^{p} n-p+k$ pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ t.q. $p \leq n$.

3) $\displaystyle\prod_{k=1}^{p} \frac{n-p+k}{k}$ pour $n \geq 2$ et $1 \leq p \leq n-1$.

4) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8 (🚲)

1) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle T_n = \sum_{k=1}^{n} k i^{k-1} = \frac{i - n i^n - (n+1) i^{(n+1)}}{2}$

2) Soit $p \in \mathbb{N}$. En déduire les valeurs des deux sommes :

$$S_1(p) = 1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + (-1)^p (2p+1),$$
$$S_2(p) = 2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + (-1)^{(p+1)} 2p.$$

Exercice 9 Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$, calculer les quantités suivantes.

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ **2)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$ **3)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$

Exercice 10 Soit a un nombre réel. On étudie le système linéaire suivant.

$$\mathcal{S}_a \ : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 3y & - & 2z & = & 5 \\ 2x & - & y & + & az & = & 1 \end{array} \right.$$

1) En fonction des valeurs du paramètre a, déterminer si le système $\mathcal{S}_a$ peut :

- **a)** n'admettre aucune solution ;
- **b)** admettre exactement une solution ;
- **c)** admettre une infinité de solutions.

2) Résoudre le système $\mathcal{S}_a$ lorsque celui-ci admet une (des) solution(s).

Exercice 11 Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels λ, a, b, c, d le système suivant.

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccccccc} (1+\lambda)x & + & y & + & z & + & t & = & a \\ x & + & (1+\lambda)y & + & z & + & t & = & b \\ x & + & y & + & (1+\lambda)z & + & t & = & c \\ x & + & y & + & z & + & (1+\lambda)t & = & d \end{array} \right.$$