Devoir à la maison n° 04

À rendre le 06 octobre

I. Nombres de Catalan

On pose $C_0 = 1$ et l'on définit par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$.

1) Calculer C_1, C_2, C_3, C_4 et C_5.

2) Montrer par récurrence simple que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n \geqslant 2^{n-1}$.

3) Montrer par récurrence (forte ou multiple, à vous de choisir) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n \geqslant 3^{n-2}$.

4) Tenter de montrer par une récurrence similaire à celle de **3)** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n \geqslant 4^{n-2}$. À quel endroit ceci échoue-t-il ?

II. Système linéaire et puissances de matrice

On introduit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 8 \\ -5 & 1 & 11 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

1) Soit $Y = \begin{pmatrix} t \\ u \\ v \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Résoudre en X le système $PX = Y$.

2) En déduire que P est inversible ainsi que l'expression [1] de P^{-1}.

3) Calculer $N = P \times A \times P^{-1}$.

4) Calculer N^2, N^3 et en déduire une expression de N^n, pour tout entier naturel n.

5) En déduire une expression de A^n, pour tout entier naturel n.

6) La matrice A est-elle inversible ?

— FIN —

1. La suite de l'exercice dépend de cette réponse, il vous est *fortement* conseillé de vérifier votre calcul d'inverse.