Devoir à la maison n° 2

À rendre le 19 septembre

On considère la fonction définie sur $[-1, 1[$ par :

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}(x) - 2\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

On se propose de donner une expression simple de f par deux méthodes différentes.

1) Première méthode : Étude de fonction.

- **a)** Montrer que f est bien définie sur $[-1, 1[$.
- **b)** Déterminer sur quel intervalle f est dérivable.
- **c)** Déterminer f'.
- **d)** En déduire une expression simple de f.

2) Deuxième méthode : Avec des fonctions hyperboliques.

- **a)** Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer un réel z simple dépendant de y tel que :

$$\frac{1+\operatorname{th} y}{1-\operatorname{th} y} = \mathrm{e}^{z}.$$

- **b)** Montrer que tout réel $x \in]-1, 1[$ s'écrit sous la forme $x = \operatorname{th} y$, pour un certain réel y.
- **c)** Montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\sin\left(2\operatorname{Arctan}\left(\mathrm{e}^{y}\right) - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\operatorname{Arcsin}(\operatorname{th} y)\right).$$

- **d)** Que peut-on donc dire, pour tout $y \in \mathbb{R}$, des quantités $2\operatorname{Arctan}\left(\mathrm{e}^{y}\right) - \frac{\pi}{2}$ et $\operatorname{Arcsin}(\operatorname{th} y)$?
- **e)** Retrouver à partir de cela le résultat obtenu dans la question **1)d)**.

— **FIN** —