

## Devoir à la maison n° 14

À rendre le 15 mars

Le but de ce problème est de démontrer la formule de Stirling (James Stirling, mathématicien écossais 1692 - 1770), qui donne un équivalent de  $n!$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Cette formule est à la fois géométrique, arithmétique et analytique, de par la présence dans son expression de  $\pi$ ,  $n!$  et  $e$ , respectivement.

### Partie I

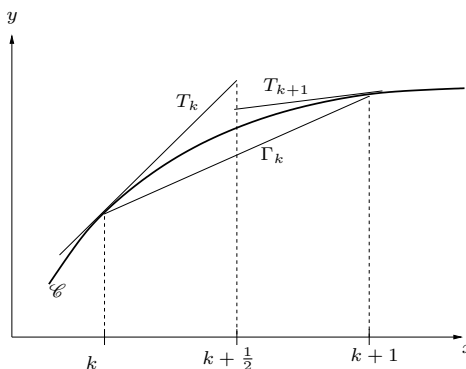
- 1) Calculer pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  l'intégrale  $I_n = \int_1^n \ln(t) dt$ .

On étudie dans la suite un encadrement de  $I_n$  à l'aide de considérations géométriques.

À cet effet on désigne par  $k$  un entier naturel non nul et on considère dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct :

- la courbe représentative  $\mathcal{C}$  de la fonction  $\ln$  ;
- le segment  $\Gamma_k$  dont les extrémités sont les points de  $\mathcal{C}$  d'abscisses  $k$  et  $k+1$  ;
- la tangente  $T_k$  à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $k$  ;
- la tangente  $T_{k+1}$  à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $k+1$ .

Tous ces différents objets sont représentés sur la figure suivante.



- 2) a) On considère les fonctions  $f$  et  $g$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  dont les graphes sont  $T_k$  et  $T_{k+1}$ . Montrer que pour tout  $x \in [k, k + \frac{1}{2}]$ ,  $\ln x \leq f(x)$ .
- b) De même, montrer que pour tout  $x \in [k + \frac{1}{2}, k + 1]$ ,  $\ln x \leq g(x)$ .
- c) Que peut-on dire de la position de  $T_k$  par rapport à  $\mathcal{C}$  pour les points d'abscisse comprise entre  $k$  et  $k + \frac{1}{2}$  ? De la position de  $T_{k+1}$  par rapport à  $\mathcal{C}$  pour les points d'abscisse comprise entre  $k + \frac{1}{2}$  et  $k+1$  ? Justifier en utilisant les questions précédentes et non pas la figure, qui est peut-être fautive.

- 3) Montrer que  $\Gamma_k$  se situe sous  $\mathcal{C}$  pour les points d'abscisse comprise entre  $k$  et  $k+1$ .
- 4) a) La figure précédente fait intervenir trois trapèzes, encadrant la courbe  $\mathcal{C}$ . En utilisant l'aire de ces trapèzes et l'aire sous la courbe  $\mathcal{C}$ , montrer l'encadrement :

$$\frac{1}{2}(\ln k + \ln(k+1)) \leq \int_k^{k+1} \ln t \, dt \leq \frac{1}{2}(\ln k + \ln(k+1)) + \frac{1}{8} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).$$

- b) En déduire que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\ln(n!) - \frac{1}{2} \ln(n) \leq I_n \leq \ln(n!) - \frac{1}{2} \ln(n) + \frac{1}{8} \left( 1 - \frac{1}{n} \right).$$

- 5) On considère la suite  $u_n = \ln(n!) - \frac{1}{2} \ln(n)$ .

- a) Montrer que la suite  $(I_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et majorée par  $\frac{1}{8}$ . Par conséquent cette suite converge vers une limite que nous noterons  $L$ .
- b) Déduire des questions précédentes que  $\frac{n^n \sqrt{n}}{e^n n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{L-1}$ , et enfin que  $n! \sim \frac{n^n}{e^n} \sqrt{n} e^{1-L}$ .

## Partie II

Le but de cette partie est de calculer la valeur de  $K = e^{L-1}$  afin d'en déduire la formule de Stirling.

On pose à cet effet pour tout entier naturel  $n$  :  $w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) \, dt$ .

- 6) a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$w_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) \cos^2(t) \, dt.$$

- b) En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , une relation entre  $w_{n+2}$  et  $w_n$ .
- c) Calculer  $w_0$ .

- d) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$ .

- 7) On se propose de déterminer un équivalent de  $w_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , c'est-à-dire une suite  $v_n$  telle que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soient équivalentes.

- a) Établir l'égalité  $w_{n+2} \leq w_{n+1} \leq w_n$ .
- b) En déduire que  $w_n$  et  $w_{n+1}$  sont deux suites équivalentes, i.e.  $w_n \sim w_{n+1}$ .
- c) Établir que  $((n+1)w_{n+1}w_n)$  est constante : que vaut cette constante ?
- d) Donner un équivalent de  $w_n$ .

- 8) Avec les deux questions 6) et 7), montrer que  $\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \sqrt{n\pi} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

- 9) Déterminer la valeur de  $K$  avec ce résultat et de la formule établie à la fin de la partie I :

$$n! \sim K \frac{n^n}{e^n} \sqrt{n}.$$

- 10) En déduire enfin un équivalent de  $n!$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  (formule de Stirling).

— FIN —