

Feuille d'exercice n° 19 : Applications linéaires et familles de vecteurs

**Exercice 1** (✎) Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires.

- 1)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x^2$
- 2)  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 4x - 3$
- 3)  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x^2}$
- 4)  $\varphi : \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(3/4)$
- 5)  $\chi : \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto -\int_{1/2}^1 f(t) dt$
- 6)  $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sin(3x + 5y)$
- 7)  $\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$
- 8)  $\rho : \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}), f \mapsto \left(x \mapsto e^{-x} \int_0^1 f(t) dt\right)$

**Exercice 2** (✎) Calculer le noyau et l'image de  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ -x - 4y + 2z \\ 2x + 5y - z \end{pmatrix}.$$

**Exercice 3** Pour chaque propriété suivante, donner un exemple d'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  la vérifiant.

- 1)  $\text{Ker}(f)$  est inclus strictement dans  $\text{Im}(f)$ .
- 2)  $\text{Im}(f)$  est inclus strictement dans  $\text{Ker}(f)$ .
- 3)  $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$ .
- 4)  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont supplémentaires.

**Exercice 4** (✎🚲) Soit  $E$  un espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

- 1) Montrer que  $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$  et  $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$ .
- 2) Montrer que  $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\} \iff \text{Ker } f^2 = \text{Ker } f$ .
- 3) Montrer que  $E = \text{Ker } f + \text{Im } f \iff \text{Im } f^2 = \text{Im } f$ .

**Exercice 5** (✎🚲) Soit  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . Établir l'équivalence

$$g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E, G)} \iff \text{Im } f \subset \text{Ker } g.$$

- 2) Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ , vérifiant  $f^2 + f - 2\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .
  - a) Montrer que  $(f - \text{Id}_E) \circ (f + 2\text{Id}_E) = (f + 2\text{Id}_E) \circ (f - \text{Id}_E) = f^2 + f - 2\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .
  - b) En déduire que  $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$  et  $\text{Im}(f + 2\text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ .
  - c) Montrer que  $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$ .

**Exercice 6** (🚲) Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ , où  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On suppose que

$$\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda x.$$

Montrer que

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(x) = \lambda x.$$

**Exercice 7** (✎) Dans  $\mathbb{R}^4$ , comparer (*i.e.* dire s'ils sont égaux ou si l'un est inclus dans l'autre) les sous-espaces  $F$  et  $G$  suivants :

$$\begin{aligned} F &= \text{Vect} \{ (1, 0, 1, 1), (-1, -2, 3, -1), (-5, -3, 1, -5) \} ; \\ G &= \text{Vect} \{ (-1, -1, 1, -1), (4, 1, 2, 4) \} . \end{aligned}$$

**Exercice 8** (✎) Dans  $\mathbb{R}^4$  on considère l'ensemble  $E$  des vecteurs  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  vérifiant  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ . L'ensemble  $E$  est-il un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  ? Le cas échéant, en donner une famille génératrice.

**Exercice 9** (✎🚲) Soit dans  $\mathbb{R}^3$  les vecteurs  $v_1 = (1, 1, 0)$ ,  $v_2 = (4, 1, 4)$  et  $v_3 = (2, -1, 4)$ .

- 1) Montrer que  $v_1$  et  $v_2$  ne sont pas colinéaires. Faire de même avec  $v_1$  et  $v_3$ , puis avec  $v_2$  et  $v_3$ .
- 2) La famille  $(v_1, v_2, v_3)$  est-elle libre ?

**Exercice 10** Soit  $A$  et  $B$  deux parties d'un espace vectoriel  $E$ . Comparer  $\text{Vect}(A \cap B)$  et  $\text{Vect } A \cap \text{Vect } B$ .

**Exercice 11** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout entier  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on pose  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^k$ . Montrer que la famille  $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une famille libre de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

**Exercice 12** Quelle est la nature de l'application  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ?

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -5x & + & 2y \\ -12x & + & 5y \\ -4x & + & 2y & - & z \end{pmatrix}$$

Déterminer ses éléments caractéristiques.

**Exercice 13** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, soit  $p, q \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer qu'il y a équivalence entre les deux assertions suivantes :

- 1)  $p \circ q = p$  et  $q \circ p = q$  ;
- 2)  $p$  et  $q$  sont deux projecteurs de même noyau.

**Exercice 14** (✎) On pose  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$  et  $G = \text{Vect}(1, 1, 0)$ .

- 1) Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ .
- 2) Déterminer une expression explicite de la projection de  $\mathbb{R}^3$  sur  $F$  parallèlement à  $G$ .

**Exercice 15** Soit  $p$  et  $q$  deux projecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Montrer que  $p - q$  est un projecteur si et seulement si  $p \circ q = q \circ p = q$ .

