1.2.c : Propriétés élémentaires :

Prop : Soit (Ω, P) 1 esp. probabilisé, A et B 2 év.

1) $P(\emptyset) = 0$
2) Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$
3) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Démo : 1) $A \cap \emptyset = \emptyset$ donc $P(\underbrace{A \sqcup \emptyset}_{= A}) = P(A) + P(\emptyset)$

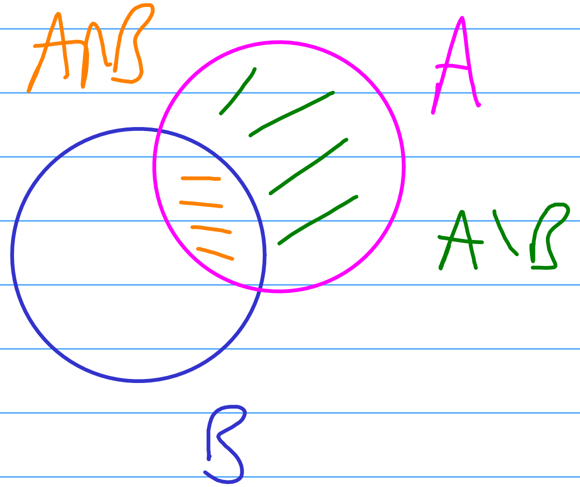
donc $P(\emptyset) = P(A) - P(A) = 0$

2) $B = A \sqcup (B\setminus A)$ [si $A \subset B$]

donc : $P(B) = P(A) + \underbrace{P(B\setminus A)}_{\geq 0}$

$\geq P(A)$

3) $A = (A\cap B) \sqcup (A\setminus B)$



donc :

$P(A) = P(A\cap B) + P(A\setminus B)$

donc $P(A\setminus B) = P(A) - P(A\cap B)$

4) $A\cup B = A \sqcup (B\setminus A)$

donc $P(A\cup B) = P(A) + P(B\setminus A)$

$$\underset{3}{=} P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

5) $$A \sqcup \bar{A} = \Omega$$

dc $$P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) = 1.$$

Rq : La formule du crible de Poincaré vue pour card permet aussi de généraliser $P(A \cup B)$ pour 1 famille finie d'év: $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$.

Prop. 1.2.11 : Si les A_i st 2 à 2 incompatibles, alors $\quad P\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$

Dém : simple récurrence.

Prop : (formule des probas totales, 1ère forme) :

Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ 1 syst. cplet d'év. de Ω.

Soit B 1 év.

rappel (1.2.11) : $B = \bigsqcup_{i=1}^{n} B \cap A_i$

dc : $\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)}$

Ex : Ω = les cartes d'1 jeu de 52 cartes.

syst. cplet
$$\begin{cases} A_1 = \text{les figures} \\ A_2 = \text{les cartes rouges ``numériques''} \\ A_3 = \text{les cartes noires ``\_\_\_''} \end{cases}$$

Si B est 1 év,

$P(B) = P($les cartes de B qui sont des figures$)$
$+ P($les cartes de B rouges numériques$)$
$+ P($les cartes de B noires numériques$)$.

d - détermination par les singletons :

On écrit : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ avec les ω_i 2 à 2 distincts.

Rq importante :
$(\{\omega_i\})_{1 \le i \le n}$ est 1 syst. cplet fini.

On a bien : si $i \neq j$, $\{\omega_i\} \cap \{\omega_j\} = \emptyset$
puisque $\omega_i \neq \omega_j$.

et $\bigsqcup_{i=1}^{n} \{\omega_i\} = \{\omega_1, \dots, \omega_n\} = \Omega$.

Prop : Si B est 1 év.

$$P(B) = \sum_{b \in B} P(\{b\})$$

<u>Démo</u> : avec le même raisonnement que dans la rq. précédente :

$$B = \bigsqcup_{b \in B} \{b\}$$

$$\left[\text{ie : } B = \{b_1 \ldots b_p\},\ B = \bigsqcup_{i=1}^{p} \{b_i\}\right]$$

donc : $P(B) = P\left(\bigsqcup_{b \in B} \{b\}\right)$

$$= \sum_{b \in B} P(\{b\}).$$

<u>Moralité</u> : si on connaît P sur les singletons seulement, alors on peut calculer P

sur tous les év.

parties de Ω à 1 él, i.e les singletons

<u>Qu</u> : si on a 1 fonction P : $\mathcal{P}_1(\Omega) \longrightarrow [0,1]$, correspond-elle à 1 proba sur $\mathcal{P}(\Omega)$?

<u>Ex</u> : $\Omega = [\![1,4]\!]$

$P_1 : \mathcal{P}_1(\Omega) \longrightarrow [0,1]$

$\{1\} \longmapsto 1/2$

$\{2\} \longmapsto 1/3$

$\{3\} \longmapsto 1/6$

$\{4\} \longmapsto 0$

$P_2 : \mathcal{P}_1(\Omega) \longrightarrow [0,1]$

$\{1\} \longmapsto 1/2$

$\{2\} \longmapsto 1/3$

$\{3\} \longmapsto 1/6$

$\{4\} \longmapsto 1/6$

On pose pour $\forall$ év. B de Ω :

$P_1(B) = \sum_{b \in B} P_1(\{b\})$, idem avec P_2.

alors : $P_1(\Omega) = P_1(1) + P_1(2) + P_1(3) + P_1(4)$

$= 1/2 + 1/3 + 1/6 + 0$

$= \underline{1}$

P_1 est (peut-être) 1 proba

mais $P_2(\Omega) = P_2(1) + P_2(2) + P_2(3) + P_2(4)$

$= 1/2 + 1/3 + 1/6 + 1/6 > 1$

P_2 ne peut pas être 1 proba.

Cor. 1.2.15 : On ne peut pas avoir 2 probas $\neq$ qui prennent les $\hat{m}$ valeurs sur les singletons.

ie : si $p_1 \dots p_n$ sont des réels fixés, il existe au plus 1 proba P sur Ω tq. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(\{\omega_i\}) = p_i$.

$\hat{m}$ notations :

Prop. 1.2.16 : si $\forall i$, $p_i \in [0, 1]$ et si $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, alors il existe 1 unique proba P sur Ω tq. $\forall i \in [\![1, n]\!], P(\{\omega_i\}) = p_i$

Dém : avec 1.2.13, si P existe c'est forcé :

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$$
$$B \longmapsto \sum_{\substack{i=1 \\ \omega_i \in B}}^{n} p_i \quad = P(\{\omega_i\})$$

$$= \sum_{b \in B} P(\{b\})$$

d'où l'unicité de P

(on vient de refaire la démo de 1.2.14)

Vérifions que P est 1 proba :

1) $\forall i,\ p_i \geq 0$ alors $\forall B \in \mathcal{P}(\Omega)$

$P(B) \geq 0$.

et $\quad P(B) = \sum_{\substack{i=1 \\ \omega_i \in B}}^{n} p_i$ pas tous les i !

$$\leq \sum_{i=1}^{n} p_i$$ tous les i

$$\leq 1$$

dc P va de $\mathcal{P}(\Omega)$ ds $[0,1]$.

2) Soit A et B 2 év. incompatibles.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

alors si $\omega_i \in A \sqcup B$, $\omega_i \in A$ ou $\omega_i \in B$, mais pas aux 2.

$$P(A \sqcup B) = \sum_{\substack{i=1 \\ \omega_i \in A \sqcup B}}^{n} p_i$$

Σ coupée en 2

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ \omega_i \in A}}^{n} p_i + \sum_{\substack{i=1 \\ \omega_i \in B}}^{n} p_i$$

$$= P(A) + P(B)$$

3) $$P(\Omega) = \sum_{\substack{i=1 \\ \omega_i \in \Omega}}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \quad \square$$

Ex précédent : P_1 est 1 proba sur $[\![1,4]\!]$

car $1/2$, $1/3$, $1/6$, $0 \geq 0$

et $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+0=1$.

1.3. : Proba. conditionnelle :

a) Ex : On a 1 urne avec 3 boules rouges et 4 boules noires.

On tire 1 boule : si elle est rouge, on la garde si elle est noire : on la remet.

On tire 1 $2^{\text{ème}}$ boule : quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?

Cette proba dépend de la couleur de la $1^{ère}$ boule.

- Si elle est rouge : $P(2^{e}\text{ b. rouge}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

[c'est à vous de préciser qu'on utilise la proba. uniforme)

cette proba est appelée

"probabilité que la 2^{e} boule soit rouge

sachant que la $1^{ère}$ boule est rouge".

notée : $P(2^{e}\text{ b. R} \mid 1^{ère}\text{ b. R})$

• <u>Si elle est noire :</u>

$$P(2^{e} \text{ b. rouge}) = \frac{3}{7}$$

Cette proba est appelée proba que la 2ème boule soit rouge sachant que la 1ère est noire.
notée : $P(2^{e} \text{ b.R} \mid 1^{e} \text{ b.N})$.

<u>Explication générale :</u> Si A et B sont 2 év, tq. $P(B) \neq 0$,
On appelle probabilité de A sachant B
le réel $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

pourquoi ce réel ?

On généralise la formule "naturelle" ds le cas de la proba uniforme.

En effet si Ω est muni de la proba uniforme, si on sait que l'ev. s'est produit, notre univers est restreint à B qd on regarde ensuite l'exp. A.

L'ev. à considérer n'est plus A mais $A \cap B$.

alors $$P(A \mid B) = \frac{\#(A\cap B)}{\# B} = \frac{\#(A\cap B)}{\#\Omega} \times \frac{\#\Omega}{\# B}$$

$P(A\cap B)$ $1/P(B)$

Prop : Si on note $P(A|B) = P_B(A)$
on peut définir 1 fonction :

$$P_B : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \longmapsto P_B(A) = P(A|B)$$

P_B est 1 probabilité sur Ω.

Dém : 1) $A \cap B \subset B$

donc : $0 \leq P(A \cap B) \leq P(B)$

donc : $0 \leq \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq 1$

$P_B(A)$

2) Si A_1 et A_2 st incompatibles,

alors on sait que $(A_1 \cap B)$ et $(A_2 \cap B)$ aussi

$$\left[(A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) = (A_1 \cap A_2) \cap B \right.$$
$$\left. = \emptyset \cap B = \emptyset \right]$$

d'c : $$P_B(A_1 \sqcup A_2) = \frac{P((A_1 \sqcup A_2) \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P((A_1 \cap B) \sqcup (A_2 \cap B))}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)}$$

$$= P_B(A_1) + P_B(A_2).$$

3) $$P_B(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

$\square$

Ex. 1.3.5 : On peut donner cette modélisation :

On note B pour la couleur blanche

N —— noire.

On note : B_1 l'év. : la $1^{ère}$ boule tirée est blanche

et idem pr B_2, N_1, N_2.

En supposant que les boules sont indiscernables au toucher et sont tirées au hasard, nous pouvons utiliser la proba. uniforme et nous avons :

$$P(B_1) = \frac{2}{3} \; ; \quad P(N_1) = \frac{1}{3}$$

$$P(B_2 | B_1) = \frac{3}{4} \; ; \quad P(B_2 | N_1) = \frac{1}{2}$$

et : $P(N_2 | B_1) = \frac{1}{4}$; $P(N_2 | N_1) = \frac{1}{2}$.

$$P_{B_1}(N_2) = P_{B_1}(\overline{B_2}) = 1 - \frac{3}{4}$$

b) <u>Proba. composées et 2ème forme des probas totales :</u>

<u>Prop. 1.3.6</u> : Soit A et B 2 év. tq. $P(B) \neq 0$.

Alors par déf : $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

donc : $\boxed{P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)}$ (*)

Rq : si $P(B) = 0$, puisque $A \cap B \subset B$,

alors $P(A \cap B) = 0$,

dc $P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$

pourrait être valable, à 1 détail près :

$P(A|B)$ n'existe pas . .

Convention utile, que vous devez rencontrer si vous l'utilisez :

« si $P(B) = 0$, on pose $P(A|B) \times P(B) = 0$ »

Cela permet d'utiliser (A) sans avoir à se préoccuper de la valeur de $P(B)$.

Ce sera très pratique Rq 1.3.9.

<u>Rq. 1.3.7</u> : $P(A \cap B \cap C \cap D) \neq 0$

$\Rightarrow P(A), P(B), P(C)$ et $P(D)$ ne sont pas nulles

On a : $P(A) \times P(B|A) = P(A\cap B)$

et $P(A\cap B) \times P(C | A\cap B) = P(A\cap B\cap C)$

et $P(A\cap B\cap C) \times P(D | A\cap B\cap C) = P(A\cap B\cap C\cap D)$

dc : $P(A\cap B\cap C\cap D) = P(A) \times P(B|A)$
$\times P(C|A\cap B)$
$\times P(D|A\cap B\cap C)$.

Ex. 1.3.8 : $A_1 \dots A_n$ des év.

tq. $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \neq 0$.

$$P(A_1) \times P(A_2 \mid A_1) = P(A_1 \cap A_2)$$

$$\shortparallel$$

$$P(A_1 \cap A_2) \times P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$\shortparallel$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{3} A_i\right) \times P\left(A_4 \mid \bigcap_{i=1}^{3} A_i\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i\right)$$

$$\vdots$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \times P\left(A_{k+1} \mid \bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i\right)$$

par réc :

$$\prod_{k=1}^{n} P\left(A_k \mid \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

[(I) pour $k=1$: $\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i = \bigcap_{i=1}^{0} A_i = \Omega$

par convention

d'où : $P(A_1 \mid \bigcap_{i=1}^{0} A_i) = P(A_1)$].

<u>Prop. 1.3.9</u> : Proba. totale, 2ème forme :

B 1 év., $(A_i)_{1 \le i \le n}$ 1 syst. cplet d'év.

On avait la 1ère forme :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$

2 possibilités :

1) on vérifie que $\forall i$, $P(A_i) \neq 0$ (sinon 2))

2) on utilise la convention :

si $P(A_i) = 0$, on pose $P(B|A_i) \times P(A_i) = 0$

Dans ce cas :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \times P(A_i)}$$

Ex 1.3.11 : 4 b. B, 3 b N

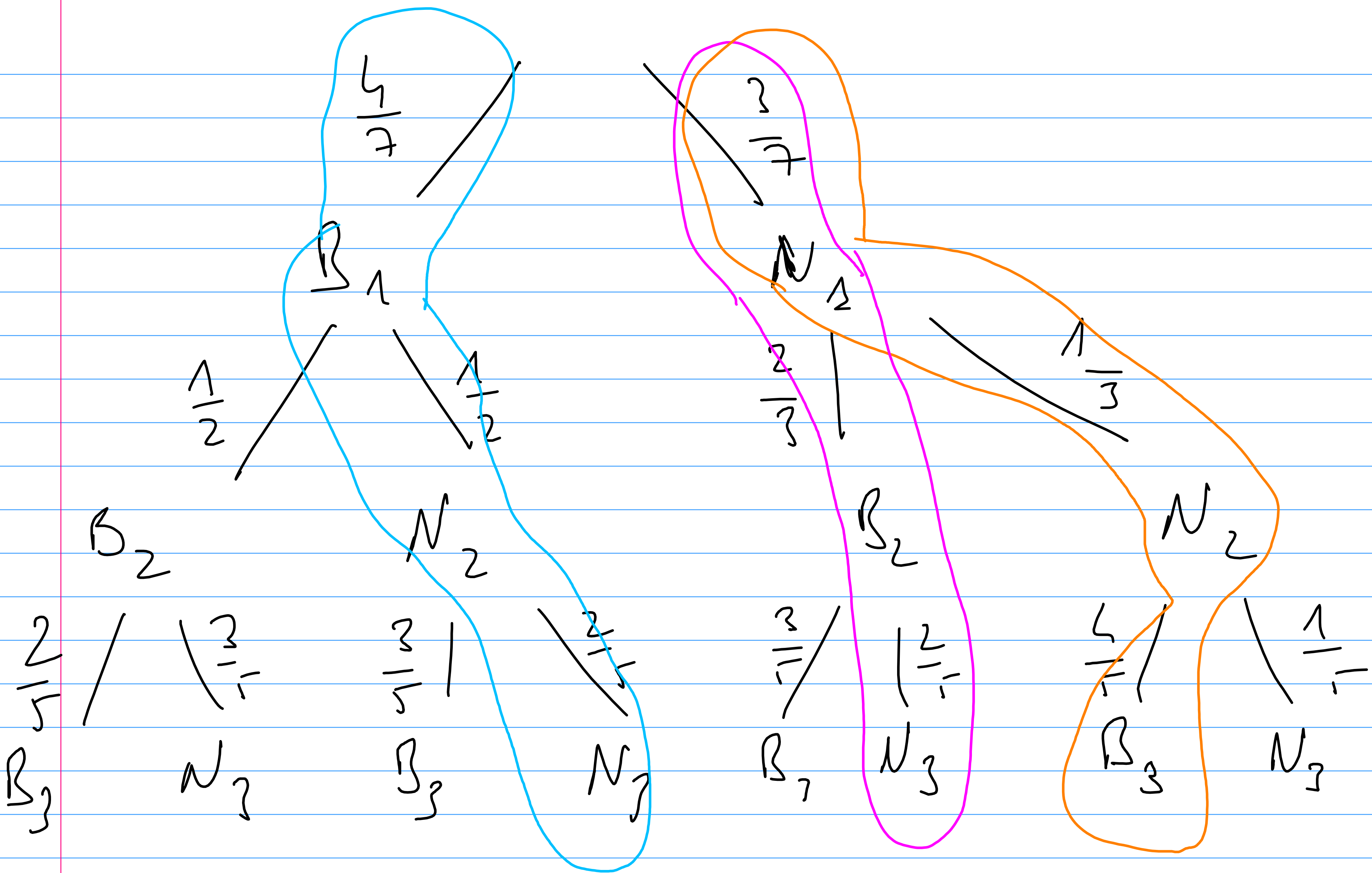
on tire 3 boules sans remise.

A l'év. : on a tiré exact^t 2 boules noires.

B_1 : la 1re boule est blanche.

N_1 : ——— noire

idem avec B_2, B_3, N_2, N_3.



$$P(A) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{7} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{5}$$

On note que :

$$P(A) = P(N_3 \mid B_1 \cap N_2) + P(N_3 \mid N_1 \cap B_2) + P(B_3 \mid N_1 \cap N_2)$$

d'où ça sort ? proba totales !

(B_1, N_1) est 1 syst. cplet.

d'où $P(A) = P(A \mid B_1) \times P(B_1) + P(A \mid N_1) \times P(N_1)$

$$= P_{B_1}(A) \times P(B_1) + P_{N_1}(A) \times P(N_1)$$

(B_2, N_2) est 1 syst. cplet :

$$P_{B_1}(A) = P_{B_1}(A \mid B_2) \times P_{B_1}(B_2) + P_{B_1}(A \mid N_2) \times P_{B_1}(N_2)$$

$$= P(A \mid B_1 \cap B_2) \times P(B_2 \mid B_1) + P(A \mid B_1 \cap N_2) \times P(N_2 \mid B_1)$$

idem avec $P_{N_1}(A)$, on finalement a :

$$P(A) = \left(P(A \mid B_1 \cap B_2) \times P(B_2 \mid B_1) \times P(B_1)\right) = 0$$

$$+ P(A \mid B_1 \cap N_2) \times P(N_2 \mid B_1) \times P(B_1)$$

$$+ P(A \mid N_1 \cap B_2) \times P(B_2 \mid N_1) \times P(N_1)$$

$$+ P(A \mid N_1 \cap N_2) \times P(N_2 \mid N_1) \times P(N_2)$$

$$= P(N_3 \mid B_1 \cap N_2) \times P(N_2 \mid B_1) \times P(B_1)$$

$$+ P(N_3 \mid N_1 \cap B_2) \times P(B_2 \mid N_1) \times P(N_1)$$

$$+ P(B_3 \mid N_1 \cap N_2) \times P(N_2 \mid N_1) \times P(N_1)$$

$$= \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{1} + \frac{3}{7} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{1} + \frac{2}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$$