

Feuille d'exercice n° 05 : Équations différentielles

**Exercice 1** (✎) Calculer les intégrales suivantes via un changement de variable adéquat.

- |   |  |  |
|---|--|--|
| 1) $\int_0^1 \frac{dt}{\operatorname{ch}(t)}$ | 4) $\int_1^e \frac{dt}{t + t(\ln t)^2}$    | 7) $\int_0^\pi \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t} dt$ |
| 2) $\int_0^1 t^2 \sqrt{1-t^2} dt$             | 5) $\int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{\ln t + 1}}$ | 8) $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t} + 2t}$         |
| 3) $\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$       | 6) $\int_0^1 \frac{dt}{e^t + 1}$           | 9) $\int_1^2 \frac{\ln(1+t) - \ln t}{t^2} dt$  |

**Exercice 2** (📐) Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ , soit  $I(a, b) = \int_a^b \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^4 + 1}} dx$ .

- Montrer que  $I(a, b) = I(-b, -a)$
- Soient  $a$  et  $b$  de même signe. Montrer que  $I\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) = I(a, b)$ . En déduire que  $I(a, \frac{1}{a}) = 0$ .
- Soit  $y \in [1, +\infty[$ , montrer qu'il existe un unique  $x \in \mathbb{R}_+$  tel que  $y = \operatorname{ch}(x)$ . On note alors  $x = \operatorname{Argch}(y)$ .  
*Remarque* : on dit que  $x$  est l'argument cosinus hyperbolique de  $y$ .
- Exprimer alors  $e^{\operatorname{Argch}(y)}$  en fonction de  $y$   
*Facultatif* : exprimer  $\operatorname{Argch}(y)$  en fonction de  $y$  et étudier la fonction  $\operatorname{Argch}$ .
- Calculer  $I(a, b)$  pour  $a \geq 1$  et  $b \geq 1$  en commençant par poser  $u = x + \frac{1}{x}$ , puis  $u = \sqrt{2} \operatorname{ch}(t)$ .
- En déduire  $I(a, b)$  lorsque  $a$  et  $b$  sont de même signe (non nul).

**Exercice 3** On pose, pour tout  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ ,  $I_{n,p} = \int_0^1 x^n (1-x)^p dx$ .

- Exprimer, pour tout  $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ ,  $I_{n,p}$  en fonction de  $I_{n+1,p-1}$ .
- En déduire  $I_{n,p}$  pour tout  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ ,
- Calculer  $I_{n,n}$  pour tout entier naturel  $n$  et en déduire la limite de la suite  $(I_{n,n})_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 4** (✎)

- Vérifier que la fonction  $f : x \mapsto \ln \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  est définie et dérivable sur  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  et calculer sa dérivée.
- Résoudre :  $y' - y \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$  sur  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  avec  $y(0) = 1$ .

Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes.

- |  |  |
|--|--|
| 2) $y' + y = (x^2 - 2x + 2)e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = 0$ .          | 6) $xy' - y = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ .                              |
| 3) $y' - 2y = \operatorname{sh} x - 2x \operatorname{ch} x$ sur $\mathbb{R}$ . | 7) $y' \sqrt{1-x^2} - y = 1$ sur $] -1, 1[$ .                        |
| 4) $xy' \ln x - y = 3x^2 \ln^2 x$ sur $]0, 1[$ .                               | 8) $y' - 3y = x^2 e^x + x e^{3x}$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = 1$ . |
| 5) $y' + x^2 y + x^2 = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = 0$ .                   |  |

**Exercice 5** Déterminer les fonctions  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables telles que  $\forall x \in [0, 1] \quad f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$ .

**Exercice 6** (🚲) Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle suivante sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $\mathbb{R}_-^*$ ,  $\mathbb{R}^*$  et  $\mathbb{R}$  :

$$xy' + y = x(3x + 4).$$

**Exercice 7** (📐) Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes.

- 1)  $y'' + y' - 2y = 8 \sin x$  avec  $y(\pi) = 0$  et  $y'(\pi) = 1$
- 2)  $y'' + y' = 4x^2 e^x$  avec  $y(0) = e$  et  $y'(0) = 0$
- 3)  $y'' + 4y = x^2 - x + 1$
- 5)  $y'' - 3y' + y = \sin x + \cos x$
- 4)  $y'' + y' + 2y = (8x + 1)e^x$
- 6)  $y'' - y = \operatorname{sh} x$

**Exercice 8** (🚲📐) On étudie les équations différentielles d'Euler, qui sont de la forme  $(\mathcal{E}) : ax^2y'' + bxy' + cy = g(x)$ , où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des constantes et  $g$  est une fonction.

- 1) On suppose que l'on étudie  $(\mathcal{E})$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et l'on pose  $z(t) = y(e^t)$ . Montrer que  $y$  est solution de  $(\mathcal{E})$  si et seulement si  $z$  est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre deux, à coefficients constants (à déterminer en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $c$ ).
- 2) Résoudre  $x^2y'' + xy' - y = 2x \ln(x)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- 3) Résoudre  $x^2y'' + 3xy' + y = (x + 1)^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- 4) Résoudre  $x^2y'' + 3xy' + y = 0$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 9** (🚲) Trouver les applications de  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(-x) = xe^x.$$

**Exercice 10** Le but de cet exercice est de résoudre le système différentiel **(S)** suivant :

$$\begin{cases} x'' &= x' + y' - y \\ y'' &= x' + y' - x \end{cases}, \quad \text{en } x, y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

- 1) Soient  $x, y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . On pose  $u = x + y$  et  $v = x - y$ . Montrer alors qu'il existe deux équations différentielles du second ordre **(E)** et **(F)** telles que l'on ait :  $(x, y)$  est solution de **(S)** si et seulement si  $u$  est solution de **(E)** et  $v$  est solution de **(F)**.
- 2) Résoudre **(E)**.
- 3) Résoudre **(F)**.
- 4) En déduire les solutions de **(S)**.

