Feuille d'exercice n° 18 : **Espaces vectoriels**

Exercice 1 ( ) Dire si les objets suivants sont des espaces vectoriels.

1) L'ensemble des fonctions réelles, définies sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

2) L'ensemble des fonctions impaires, définies sur $\mathbb{R}$.

3) L'ensemble des fonctions définies sur $[a, b]$, continues et vérifiant $f(a) = 7f(b) + \displaystyle\int_a^b t^3 f(t)\,\mathrm{d}t$.

4) L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant $f'' + \omega^2 f = 0$.

5) L'ensemble des primitives de la fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^{x}$ sur $\mathbb{R}$.

6) L'ensemble des nombres complexes d'argument $\pi/4 + k\pi$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

7) L'ensemble des points (x, y) de $\mathbb{R}^2$, vérifiant $\sin(x + y) = 0$.

8) L'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux au vecteur $(-1, 3, -2)$.

Exercice 2 ( ) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On pose $F = E^2$. Pour tout couple $((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ d'éléments de F, on pose $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, et tout $(x, y) \in F$, on note $\lambda \cdot (x, y) = (ax - by, bx + ay)$, où $a = \operatorname{Re}\lambda$ et $b = \operatorname{Im}\lambda$.

Montrer que $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (appelé le complexifié du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E).

Exercice 3 ( )

1) Soit les vecteurs $v_1 = (1 - i, i)$, $v_2 = (2, -1 + i)$ et $v_3 = (1 + i, i)$. Le vecteur v_1 est-il combinaison linéaire de v_2 et v_3 dans $\mathbb{C}^2$, considéré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel ? comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

2) Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $x \mapsto \sin x$ est-elle combinaison linéaire des deux fonctions $x \mapsto \sin 2x$ et $x \mapsto \sin 3x$? Généraliser.

Exercice 4 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que $F \cup G = F + G \Leftrightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 5 ( ) Montrer que, dans $\mathscr{C}([-1, 1], \mathbb{C})$, $F = \left\{ f \in \mathscr{C}([-1, 1], \mathbb{C}) \mid \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ et $G = \{f \in \mathscr{C}([-1, 1], \mathbb{C}) \mid f \text{ constante}\}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Exercice 6 ( ) Soit $F = \{\, f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) + f(1) = 0 \,\}$.

1) Montrer que F est un espace vectoriel.

2) Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 7 Soient F, G, F', G' des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, tels que $F \cap G = F' \cap G'$.

Montrer que $(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F$.

Exercice 8 Soit A et B deux parties d'un espace vectoriel E. Comparer $\operatorname{Vect}(A \cap B)$ et $\operatorname{Vect} A \cap \operatorname{Vect} B$.

Exercice 9 Soit $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ deux sous-espaces affines **disjoints** d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On note V et W leurs directions respectives. Soit $a \in \mathscr{V}$ et $b \in \mathscr{W}$. On pose $U = V + W$, $\mathscr{V}' = a + U$ et $\mathscr{W}' = b + U$. Montrer que $\mathscr{V}'$ et $\mathscr{W}'$ sont deux sous-espaces affines disjoints, de même direction et contenant respectivement $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$.

Exercice 10 (✎) Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires.

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x^2$

2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 4x - 3$

3) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x^2}$

4) $\varphi : \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ f \mapsto f(3/4)$

5) $\chi : \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ f \mapsto -\displaystyle\int_{1/2}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$

6) $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \sin(3x+5y)$

7) $\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto xy$

8) $\rho : \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ f \mapsto \left(x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t\right)$

Exercice 11 (✎) Calculer le noyau et l'image de f :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x + 2y \\ -x - 4y + 2z \\ 2x + 5y - z \end{pmatrix} \end{array}.$$

Exercice 12 Pour chaque propriété suivante, donner un exemple d'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ la vérifiant.

1) $\mathrm{Ker}(f)$ est inclus strictement dans $\mathrm{Im}(f)$.

2) $\mathrm{Im}(f)$ est inclus strictement dans $\mathrm{Ker}(f)$.

3) $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

4) $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires.

Exercice 13 (✎🚲) Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f^2$ et $\mathrm{Im}\, f^2 \subset \mathrm{Im}\, f$.

2) Montrer que $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0_E\} \iff \mathrm{Ker}\, f^2 = \mathrm{Ker}\, f$.

3) Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f \iff \mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Im}\, f$.

Exercice 14 (✎🚲)

1) Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Établir l'équivalence

$$g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E,G)} \iff \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g.$$

2) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, vérifiant $f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

a) Montrer que $(f - \mathrm{Id}_E) \circ (f + 2\mathrm{Id}_E) = (f + 2\mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E) = f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

b) En déduire que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(f + 2\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.

c) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E)$.

Exercice 15 (🚲) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, où E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. On suppose que

$$\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda x.$$

Montrer que

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(x) = \lambda x.$$

Exercice 16 (✎) Dans $\mathbb{R}^4$, comparer (*i.e.* dire s'ils sont égaux ou si l'un est inclus dans l'autre) les sous-espaces F et G suivants :

$$\begin{aligned} F &= \mathrm{Vect}\,\{(1,0,1,1),(-1,-2,3,-1),(-5,-3,1,-5)\}\ ; \\ G &= \mathrm{Vect}\,\{(-1,-1,1,-1),(4,1,2,4)\}\,. \end{aligned}$$

Exercice 17 (✎) Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1,x_2,x_3,x_4) vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Le cas échéant, en donner une famille génératrice.

Exercice 18 (✎🚲) Soit dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (4,1,4)$ et $v_3 = (2,-1,4)$.

1) Montrer que v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires. Faire de même avec v_1 et v_3, puis avec v_2 et v_3.

2) La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?

Exercice 19 Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^k$. Montrer que la famille $(f_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 20 Quelle est la nature de l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -5x + 2y \\ -12x + 5y \\ -4x + 2y - z \end{pmatrix} \end{array}$?

Déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 21 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $p, q \in \mathscr{L}(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre les deux assertions suivantes :

1) $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$;

2) p et q sont deux projecteurs de même noyau.

Exercice 22 (✎) On pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$ et $G = \mathrm{Vect}(1, 1, 0)$.

1) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer une expression explicite de la projection de $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G.

Exercice 23 Soit p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que $p - q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = q$.