Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 point, total sur 26 points, ramené sur 5 points ,+40%.
- Problème et exercice de TD, chaque question sur 4 points, total sur 60 points (version 1) ou 80 points (version 2), ramené sur 15 points, +30% (version 1) ou +50% (version 2).

Statistiques descriptives.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \min\left(\frac{1}{10}\lceil 10x\rceil\,;20\right)$.

	Calculs	Problème (V1)	Problème (V2)	Note finale
Transformation	c	p_1	p_2	$\varphi\left(1,4\frac{5c}{26}+1,3\frac{15p_1}{60}+1,5\frac{15p_2}{80}\right)$
Note maximale	22	34	56	20+
Note minimale	2	0	10	$1,4$
Moyenne	≈ 9.35	$\approx 17,17$	$\approx 27,00$	$\approx 9,01$
Écart-type	$\approx 4,25$	$\approx 7,83$	$\approx 12,03$	$\approx 3,87$
Premier quartile	7	$11,5$	19	$6,7$
Médiane	8	17	$25,5$	$8,9$
Troisième quartile	$11,5$	$21,5$	$31,75$	$10,9$

Remarques générales.

• Vos premières réponses doivent être particulièrement soignées. Elles donnent le ton de la copie. Si vous les bâclez, le correcteur ne sera pas indulgent avec vous par la suite. Ainsi, oublier la moitié de la première question ou rendre une première page illisible n'est pas acceptable.
• Chaque fois que vous utilisez un résultat, vous devez rappeler son nom (s'il en a un, mais c'est souvent le cas !), ainsi que ses hypothèses, ainsi que vérifier toutes ces hypothèses. On cite d'ailleurs les hypothèses en les vérifiant. Si vous n'arrivez pas à toutes les vérifiez, n'arnaquez pas le correcteur. Il est tout à fait possible (et c'est apprécié), de dire « pour montrer le théorème [...], on doit vérifier que [A], [B] et [C]. On a montré [A] et [B], admettons [C]. On a alors [...] ». Vous avez alors fait proprement un morceau de question, c'est valorisé !

Un exercice vu en TD : distance à la corde.

Il est désespérant de voir que la plupart des étudiants font l'impasse sur cet exercice, pourtant bien guidé.
L'indication vous demandait de choisir λ tel que $g(c) = 0$. C'est pourtant simple ! Ne pas le faire est, à mes yeux, incompréhensible.

Interpolation polynomiale de Hermite.

1a) Certains ont montré que si P et Q ont une racine commune, ils ne sont pas premiers entre eux. Ceci est la réciproque de la propriété demandée, et non sa contraposée.
Vous ne pouvez pas dire « si P et Q ne sont pas premiers entre eux, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $X - \lambda$ divise P et Q » : c'est directement équivalent à la question !

2) Faites attention à écrire une hypothèse de récurrence correcte. Notamment, si vous effectuez une récurrence en fonction de n (c'était tout à fait possible), il fallait renommer Q et/ou P. Certains ont, par exemple, voulu montrer que si $Q = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i'}{P_i}$, alors $Q = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{P_i'}{P_i}$. Forcément, c'est voué à l'échec.

Dans « l'hérédité », écrire $\left[\prod_{i=1}^{n+1} P_i\right]' = \sum_{i=1}^{n+1} P_i' \prod_{k\neq i} P_k$ revient à utiliser le résultat à démontrer. C'est une arnaque !

3a) Pensez à introduire proprement le degré de P, si vous l'utilisez.

On vous demande d'utiliser la formule de Taylor (notamment, pour vérifier que vous la connaissez). Si vous ne l'utilisez pas, vous serez pénalisés.

3b) Nul besoin ici de montrer que $(\mathbb{R}^{2p}, +)$ et $(\mathbb{R}_{2p-1}[X], +)$ sont des groupes : c'est du cours !

3c) Avec $P = \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)^2$, on a bien pour tout i : $P(x_i) = P'(x_i) = 0$, avec $P \neq 0$. Il fallait donc considérer le degré de P, avec $P \in \operatorname{Ker} \varphi$.

Si $P \in \operatorname{Ker} \varphi$, P n'a pas une infinité de racines, mais seulement p racines (au moins) : $x_1, \dots, x_p$.

3d) Utiliser séparément l'injectivité et la surjectivité de φ est franchement maladroit, sans être faux. Vous pouviez utiliser directement la bijectivité de φ.

4) Vu que le sujet vous donne une formule explicite dans la suite, vous ne pouviez vous contenter d'exhiber P_H et de justifier que le polynôme exhibé convenait. Il fallait expliquer comment vous obteniez P_H de manière élémentaire. Lisez tout l'énoncé !

Il était tout à fait convenable d'expliquer comment obtenir le système à résoudre, puis d'en donner la solution, en indiquant que vous avez effectué l'algorithme du pivot de Gauss au brouillon, par exemple. Le mieux étant bien entendu de vérifier votre résultat sur votre copie !

6b) Je ne devrais pas lire des justifications du type « $Q_i(x_k) = 0$ donc $Q_i'(x_k) = 0$ ». C'est aberrant. Vous devez avoir la rigueur (ou plutôt la force morale) de ne pas affirmer des choses juste parce que cela vous arrange.

J'ai lu : « $Q_i(x_i) = \sum_{i=1}^{p} \frac{2}{x_i - x_j}$. Pour $i = j$ (*sic*), on divise par 0, donc $Q_i(x_i) = \sum_{i\neq j} \frac{2}{x_i - x_j}$. » Passons sur l'erreur grossière d'écriture de la somme : la variable i ne peut être prise comme indice de sommation, c'est un indice déjà utilisé. Mais surtout, quelle arnaque ! Dire « j'ai écrit n'importe quoi, du coup si j'enlève les termes faux, cela donne le résultat voulu » est d'une malhonnêteté intellectuelle rare. Vous devez avoir l'intégrité de n'écrire que des raisonnements justes (ou du moins, qui le sont à vos yeux). Ici, je ne peux croire que c'est le cas. Pour information : j'ai arrêté de corriger cette copie à ce niveau. Croyez le : tenter de telles arnaques ne peut que vous coûter des points.

6c) Certains ont montré que $Q_k(x_k) = 1$ dans cette question, mais n'ont pas répondu à la question **6a)**. C'est dommage, vous perdez directement les points de **6a)**, sans compensation.

Écrire $P(x_i) = \sum_{i=1}^{p} [(1 - Q_i'(x_i)(x_i - x_i))a_i + (x_i - x_i)b_i]Q_i(x_i)$ n'est pas correct. L'indice i est déjà utilisé comme indice de sommation ...

Théorème de Mason et applications.

1) Une racine réelle de P est aussi une racine complexe de P : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

$n_0(P)$ n'est ni le nombre de racines imaginaires non réelles de P, ni le nombre de racines simples de P. La définition explicite de $n_0(P)$ était pourtant donnée !

Vous deviez utiliser que $P \neq 0$!

6) Il fallait penser à justifier que les $\alpha_i, \beta_k, \gamma_\ell$ sont distincts deux à deux.

8) Il est dommage de ne pas voir que $f' + g' = (f+g)' = 1' = 0$.

N'oubliez pas de montrer que $L(g) \neq 0$ avant de diviser par $L(g)$.

10) Une fraction rationnelle de degré strictement positif n'est pas nécessairement un polynôme. Exemple : $\frac{X^2 + 42}{X + 1515}$.

Même si f n'est pas constante, vous pouvez avoir $\deg(f') < \deg(f) - 1$ (*cf.* cours).

Donnez la majoration la plus intéressante possible, ici, *i.e.* la plus petite. Ainsi, écrire $\deg(N(PQR)L(f)) \leqslant n_0(PQR) - 1$ est bien plus intéressant qu'écrire $\deg(N(PQR)L(f)) \leqslant \deg(P) + \deg(Q) + \deg(R) - 1$.

12) Ne répétez pas les arguments de l'énoncé pour P, R : utilisez la symétrie de l'énoncé.

15) Citez toutes les hypothèses du théorème de Mason. Notamment, P^n, Q^n et R^n ne sont pas constants.