Devoir surveillé n°9
Version n°1
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Étude d'une suite double récurrente.

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, vérifiant la relation de récurrence linéaire suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcll} x_{n+1} & = & -9x_n & -18y_n \\ y_{n+1} & = & 6x_n & +12y_n \end{array}\right.$$

avec $x_0 = -137$ et $y_0 = 18$. On se propose dans ce problème de déterminer les termes généraux de ces deux suites.
On note $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et l'on identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

1) Montrer qu'il existe une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que la relation de récurrence linéaire ci-dessus soit équivalente à la relation $U_{n+1} = AU_n$, où $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

2) Établir une expression de U_n en fonction de A, de U_0 et de n.

3) Déterminer le noyau de A, et en donner une base $\mathscr{B}_1$. Calculer le rang de A.

4) Montrer que l'ensemble des vecteurs $X \in \mathbb{R}^2$ tels que $AX = 3X$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Quelle est sa dimension ? En donner une base, que l'on notera $\mathscr{B}_2$.

5) Montrer que la concaténation $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \uplus \mathscr{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

6) Soit $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$. Montrer que P est inversible et montrer (si possible, sans calcul) que le produit $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D.

7) Exprimer, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de P, D et de n . En déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

8) Donner les termes généraux x_n et y_n.

II. Étude d'une suite de tirages.

Dans tout le problème, a et b désignent des entiers naturels tous deux non nuls et l'on note $N = a + b$.
On considère une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires, dans laquelle on effectue des tirages successifs, au « hasard » et « avec remise » d'une boule, en procédant de la façon suivante :

— lorsque la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant,
— lorsque la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne mais remplacée dans l'urne par une boule blanche et l'on procède au tirage suivant.

Partie I

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini modélisant cette expérience et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaire à l'obtention d'une première boule blanche.

1) Préciser soigneusement l'ensemble des valeurs prises par la variable Y.

2) Pour tout entier k compris entre 1 et $b+1$, calculer la valeur de la probabilité $P(Y = k)$.

3) Vérifier que
$$P(Y = b+1) = \frac{b!}{N^b}$$
et que, pour tout entier k compris entre 1 et b, la formule suivante est vraie :
$$P(Y = k) = \frac{b!}{(b-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{b!}{(b-k)!N^k} \quad .$$

4) Soit M un entier naturel non nul et $a_0, a_1, \ldots, a_M$ une famille de réels. Établir que
$$\sum_{k=1}^{M} k(a_{k-1} - a_k) = \left(\sum_{k=0}^{M-1} a_k\right) - M a_M \quad .$$

5) En déduire que $\mathrm{E}\left[Y\right] = \displaystyle\sum_{k=0}^{b} \frac{b!}{(b-k)!N^k}$.

Partie II

Dans cette partie, on note :
— pour tout entier $n \geqslant 1$, q_n la probabilité de l'événement, noté N_n : « la n^{e} boule tirée est noire »,
— pour tout entier $n \geqslant 0$, X_n le nombre aléatoire de boules noires obtenues au cours des n premiers tirages (par convention, $X_0 = 0$),
— pour tout entier $n \geqslant 0$ et $k \geqslant 0$, $p_{n,k}$ la probabilité de l'événement : « au cours des n premiers tirages, on a obtenu exactement k boules noires ».

6) Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $p_{n,0}$ puis $p_{n,n}$. Que vaut la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}$?

7) Démontrer la formule suivante, valable pour tous les entiers naturels n et k non nuls :
$$N \cdot p_{n,k} = (a+k)p_{n-1,k} + (b+1-k)p_{n-1,k-1} \quad . \qquad \textbf{(F)}$$

8) <u>Calcul de l'espérance de X_n.</u>

a) À l'aide de la formule (**F**) obtenue dans la question **7)**, démontrer la formule pour $n \geqslant 1$:

$$N\mathrm{E}\left[X_n\right] = \sum_{k=0}^{n-1} \left[b + k(N-1)\right] p_{n-1,k} \ ,$$

puis justifier que

$$\mathrm{E}\left[X_n\right] = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \mathrm{E}\left[X_{n-1}\right] + \frac{b}{N} \ .$$

b) En utilisant la dernière formule établie à la question **8)a)**, prouver que, pour tout entier naturel n, on a

$$\mathrm{E}\left[X_n\right] = b\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right] \ .$$

9) <u>Calcul de q_n.</u>

a) En utilisant une formule des probabilités totales, établir la formule suivante valable pour tout entier naturel n :

$$N \cdot q_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (b-k) p_{n,k} \ .$$

b) Pour tout entier naturel n, exprimer alors q_{n+1} en fonction de $\mathrm{E}\left[X_n\right]$ et en déduire l'expression de q_{n+1} en fonction de n, b, N.

10) <u>Calcul de la variance de X_n.</u> On introduit la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \mathrm{E}\left[X_n(X_n - 1)\right] \ .$$

a) À l'aide de la formule (**F**) obtenue dans la question **7)**,montrer que l'on a :

$$N \cdot u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left[k(k-1)(a+b-2) + 2(b-1)k\right] p_{n-1,k} \ .$$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ satisfait à la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \geqslant 1, \ u_n = \left(1 - \frac{2}{N}\right) u_{n-1} + \frac{2b(b-1)}{N} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}\right] \ .$$

c) À l'aide d'une récurrence, démontrer que la formule suivante est valable pour tout entier naturel n :

$$u_n = b(b-1)\left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right] \ .$$

d) Donner alors la valeur de $\mathrm{Var}\left(X_n\right)$ puis préciser sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

— FIN —