



LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON
SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR
CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I.
ANNÉE 2020 - 2021

C1 : PERFORMANCES STATIQUES ET CINÉMATIQUES DES SYSTÈMES COMPOSÉS DE CHAÎNE DE SOLIDES

TD 9 - Cinématique du point (C4-3)

8 Décembre 2020

Compétences

- **Analyser**; Caractériser des écarts : Grandeurs utilisées : unités du système international; homogénéité des grandeurs
- **Modéliser**; Proposer un modèle de connaissance et de comportement : Solide indéformable : définition; référentiel, repère; équivalence solide/référentiel; degrés de liberté; vecteur-vitesse angulaire de deux référentiels en mouvement l'un par rapport à l'autre
- **Résoudre**; Procéder à la mise en œuvre d'une démarche de résolution analytique : Dérivée temporelle d'un vecteur par rapport à un référentiel Relation entre les dérivées temporelles d'un vecteur par rapport à deux référentiels distincts Composition des vitesses angulaires Composition des vitesses

1 Véhicule à trois roues Clever

a) Présentation

Le Clever (Compact Low Emission VEHICLE for uRBan tRansportation) est un démonstrateur technologique développé par un tissu d'industriels européens dont BMW, l'Institut Français du Pétrole (IFP) et de nombreux équipementiers. Sa conception a pour objectif de développer des solutions de transport à faible consommation énergétique.

L'objectif de cette étude se concentre sur les exigences "**Permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol**" et "**S'insérer facilement dans le trafic**" détaillées dans le diagramme d'exigence sur la figure 1.

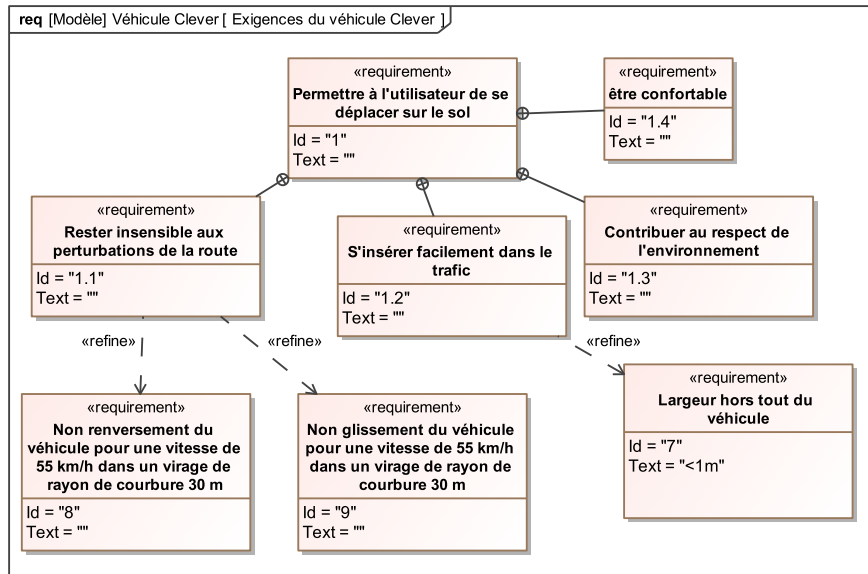


FIGURE 1 – Diagramme des exigences partiel du véhicule à trois roues Clever

b) Condition de non renversement et d'adhérence

Le mécanisme d'inclinaison peut être décrit globalement par la figure 2. Le groupe motopropulseur, comportant entre autres le moteur et les roues arrière, reste en permanence perpendiculaire au sol. La partie avant, constituée de l'habitacle et de la roue avant, peut au contraire s'incliner dans les virages grâce à un mécanisme hydraulique qui sera étudié ultérieurement dans le sujet. Les deux parties du Clever sont reliées par une liaison pivot d'axe parallèle au sol, schématisée sur la figure 4.

Pour simplifier l'étude, on ne s'intéresse pas dans un premier temps à la roue avant, ce qui permet de se ramener au système schématisé sur la figure 4. On donne les caractéristiques géométriques et cinématiques suivantes :

- La route R est munie du repère $R_g = (O, \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$. Le référentiel associé est supposé galiléen.
- Le groupe motopropulseur 0 est animé d'un mouvement de rotation par rapport au sol dont le centre instantané de rotation est O. Le rayon de courbure de la trajectoire du point C dans R_g est R_C . Le repère lié à 0 est $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ tel que $\vec{z}_0 = \vec{z}_g$ et on note $\theta = (\vec{x}_g, \vec{x}_0) = (\vec{y}_g, \vec{y}_0)$. On a donc $\vec{OC} = R_C \cdot \vec{x}_0$. On remarquera bien que R_0 est mobile par rapport à R_g .
- L'habitacle 1 est liée au groupe 0 par une liaison pivot d'axe (C, \vec{y}_0) . Le repère lié à 1 ($R_1 = (C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$) est tel que $\vec{y}_1 = \vec{y}_0$. On note $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ l'angle d'inclinaison du système pendulaire. Le centre de gravité de 1 est G tel que $\vec{CG} = e \cdot \vec{z}_1$.
- Les roues arrière 2 et 3 sont liées au groupe 0 par des liaisons pivots d'axe (C, \vec{x}_0) .

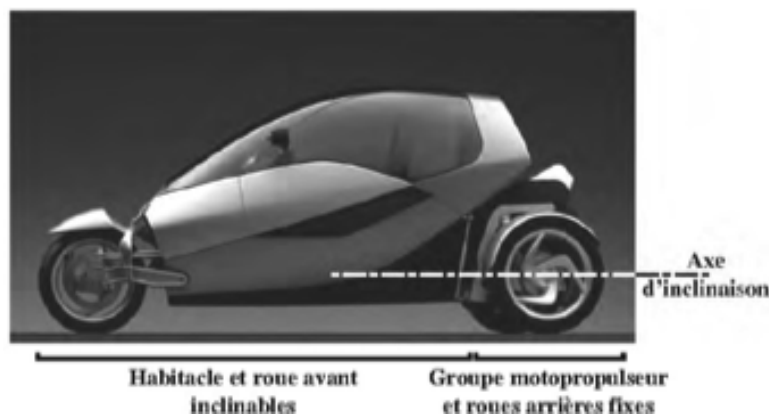


FIGURE 2 – Présentation du mécanisme d'inclinaison

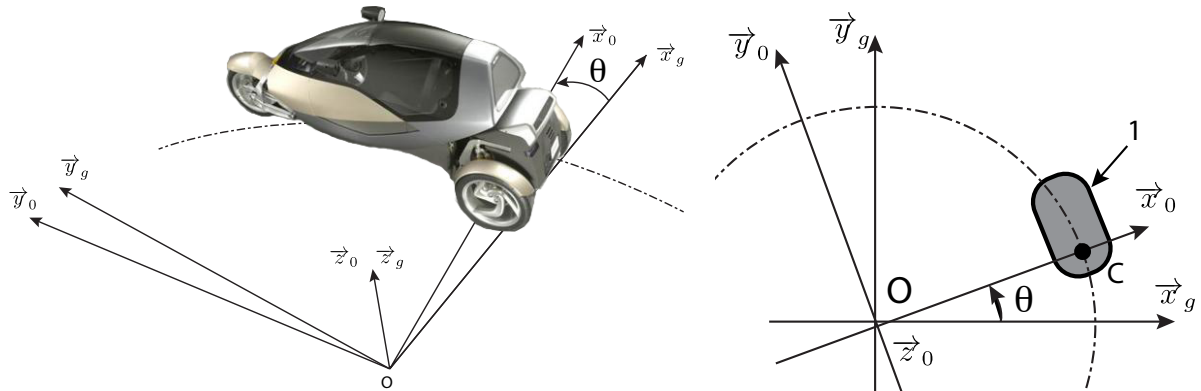


FIGURE 3 – Paramétrage du virage

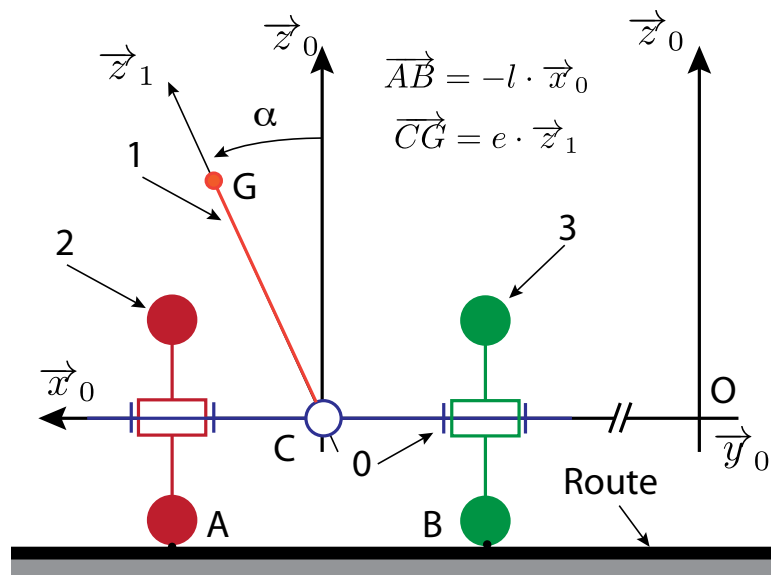


FIGURE 4 – Paramétrage du véhicule dans le virage

- On pose $V = \vec{V}(C/R_g) \cdot \vec{y}_0$.

On se place dans un cas où le rayon de courbure R_C de la trajectoire du point C et l'angle d'inclinaison α restent constants.

Q 1 : Faire les figures planes de projection permettant de paramétrer les différentes rotations du problème.

Q 2 : Exprimer la vitesse, notée $\vec{V}(G/R_g)$, du point G dans son mouvement par rapport à R_g en fonction de V , e , R_C et α .

Q 3 : Exprimer l'accélération, notée $\vec{a}(G/R_g)$, du point G dans son mouvement par rapport à R_g en fonction de V , e , R_C et α .

L'écriture d'une condition de non glissement en s'appuyant de la traduction de l'équilibre dynamique du Clever permet d'écrire :

$$-\vec{a}(G/R_g) \cdot \vec{x}_0 < f \cdot g$$

Q 4 : Donner l'expression de la vitesse maximale de non glissement V en fonction de e , R_C , α , f et g .

On se propose d'étudier la configuration suivante :

- $\alpha = 0$ (habitable à la vertical);
- position du centre de gravité, $e = 50\text{ cm}$;
- accélération de la pesanteur, $g = 9,81\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;
- coefficient d'adhérence pneu-route, $f = 0,8$.

Q 5 : Donner la vitesse maximale V permettant de vérifier la condition de non-glissement donnée par la cahier des charges. Que pouvons-nous en conclure ?

2 Étude d'une quille pendulaire

a) Introduction

L'étude proposée s'intéresse à quelques aspects de la conception d'une quille pendulaire équipant un monocoque 60' IMOCA.

Le comportement dynamique d'un voilier est conditionné par ses interactions avec les deux fluides avec lesquels il entre en contact : l'air et l'eau. Il reçoit de l'énergie sous la forme des actions aérodynamiques dues au mouvement relatif air/voiles. Ces actions mécaniques le font avancer et provoquent son inclinaison autour de son axe longitudinal (axe de direction \vec{z}_N sur la figure 5). C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids. Cette quille est généralement constituée d'un voile immergé dans l'eau à l'extrémité duquel se trouve un lest profilé. L'efficacité de la quille dépend de la masse du lest et de la longueur du voile. Ces deux paramètres présentent des limitations : le lest ne peut être trop important sous peine de solliciter dangereusement le voile de quille et la longueur de quille est limitée par le tirant d'eau maximal admissible (il faut permettre l'entrée dans les ports sans toucher le fond!).

b) Paramétrage

Le système de quille pendulaire est composée :

- Du berceau N encastré sur la coque du navire et dont le repère associé est $R_N(O, \vec{x}_N, \vec{y}_N, \vec{z}_N)$.
- de la quille 1 constituée du voile et du lest d'extrémité et dont le repère associé est $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.
- Du vérin 2-4 constitué du piston 2 et du cylindre 4 et dont les repères associés sont respectivement $R_2(A_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ et $R_4(C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ (la rotation relative 2-4 ne sera pas prise en compte dans l'étude et donc les bases de R_2 et R_4 seront confondues).
- Du vérin 3-5 constitué du piston 3 et du cylindre 5 et dont les repères associés sont respectivement $R_3(A_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ et $R_5(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ (la rotation relative 3-5 ne sera pas prise en compte dans l'étude et donc les bases de R_3 et R_5 seront confondues).
- Le paramétrage complet et la définition des liaisons entre ces solides est donné sur les figure 7 et 6.

c) Modèle 3D

- $\vec{OA} = R \cdot \vec{y}_1$; $\vec{AA}_2 = -d \cdot \vec{z}_N$; $\vec{AA}_3 = d \cdot \vec{z}_N$;
- $\vec{OC} = -a \cdot \vec{x}_N + b \cdot \vec{y}_N - d \cdot \vec{z}_N$;
- $\vec{OB} = a \cdot \vec{x}_N + b \cdot \vec{y}_N + d \cdot \vec{z}_N$;
- $\vec{DO} = L_{11} \cdot \vec{y}_1$; $\vec{OG}_1 = -L_1 \cdot \vec{y}_1$;

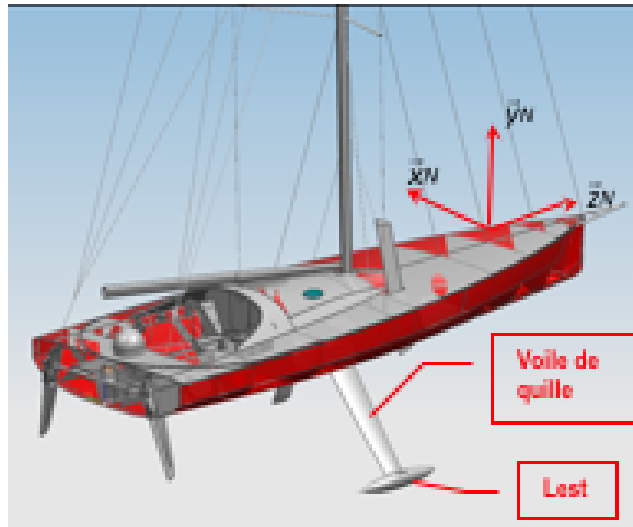


FIGURE 5 – Voilier 60' IMOCA - Image Cabinet Finot-Conq

- $\overrightarrow{A_2G_2} = -L_2 \cdot \vec{x}_2$; $\overrightarrow{A_3G_3} = -L_3 \cdot \vec{x}_3$
- avec $R > 0$; $a > 0$; $d > 0$; $b > 0$, $L_1 > 0$, $L_2 > 0$, $L_3 > 0$ et $L_{t1} > 0$;
- $\overrightarrow{CA_2} = x_{24} \cdot \vec{x}_2$ et $\overrightarrow{A_3B} = x_{35} \cdot \vec{x}_3$

Liaison	Type	Caractéristique géométrique	Paramètres
N/1	Pivot	Axe (O, \vec{z}_N)	$\theta_1 = (\vec{x}_N, \vec{x}_1)$
N/2	Pivot (sphérique en 3D)	Axe (C, \vec{z}_N)	$\theta_2 = (\vec{x}_N, \vec{x}_2)$
N/3	Pivot (sphérique en 3D)	Axe (B, \vec{z}_N)	$\theta_3 = (\vec{x}_N, \vec{x}_3)$
2/4	Pivot glissant	Axe (A_2, \vec{x}_2)	$\overrightarrow{CA_2} = x_{24} \cdot \vec{x}_2$
5/3	Pivot glissant	Axe (A_3, \vec{x}_3)	$\overrightarrow{A_3B} = x_{35} \cdot \vec{x}_3$
2/1	Pivot (sphérique en 3D)	Axe (A_2, \vec{z}_N)	
3/1	Pivot (sphérique en 3D)	Axe (A_3, \vec{z}_N)	

TABLE 1 – Paramétrage des liaisons

Remarque 1 : Modélisation plane

Pour la modélisation plane le plan d'étude est $(A, \vec{x}_N, \vec{y}_N)$. Dans ce modèle, les points A_2 et A_3 sont confondus avec le point A ($d = 0$) et les points C et B sont projetés dans le plan $(A, \vec{x}_N, \vec{y}_N)$.

d) Questions

- Q 6 :** Exprimer la vitesse $\vec{V}(G_1 \in 1/N)$ en fonction de $\dot{\theta}_1$ et des paramètres géométriques utiles.
- Q 7 :** Exprimer la vitesse $\vec{V}(G_2 \in 2/N)$ en fonction de $\dot{\theta}_2$, \dot{x}_{24} , x_{24} et des paramètres géométriques utiles.
- Q 8 :** Exprimer la vitesse $\vec{V}(G_3 \in 3/N)$ en fonction de $\dot{\theta}_3$, \dot{x}_{35} , x_{35} et des paramètres géométriques utiles.
- Q 9 :** Exprimer la vitesse $\vec{V}(A_2 \in 2/4)$ en fonction de \dot{x}_{24} et des paramètres géométriques utiles.
- Q 10 :** Exprimer l'accélération $\vec{\Gamma}(G_1/N)$ en fonction de $\dot{\theta}_1$, $\ddot{\theta}_1$ et des paramètres géométriques utiles.
- Q 11 :** Exprimer l'accélération $\vec{\Gamma}(G_2/N)$ en fonction de $\dot{\theta}_2$, \dot{x}_{24} , x_{24} , $\ddot{\theta}_2$, \ddot{x}_{24} et des paramètres géométriques utiles.
- Q 12 :** Exprimer l'accélération $\vec{\Gamma}(A_2 \in 2/4)$ en fonction de \dot{x}_{24} , \ddot{x}_{24} et $\dot{\theta}_2$ et des paramètres géométriques utiles.

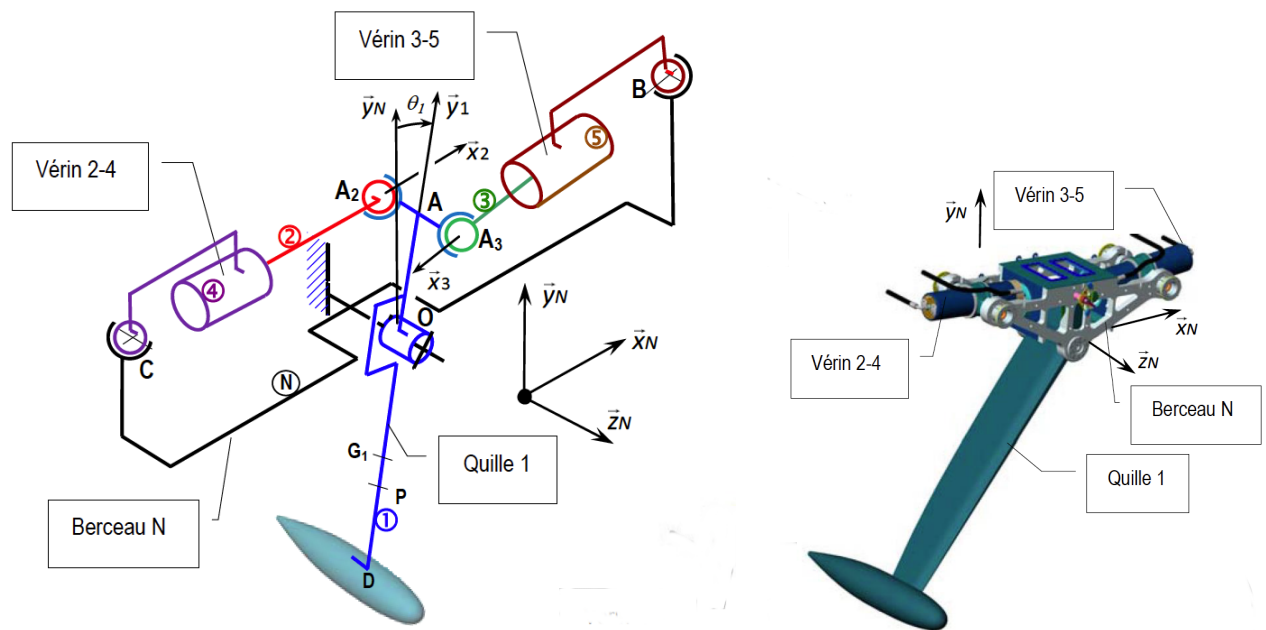


FIGURE 6 – Modèle à trois dimensions de l'ensemble

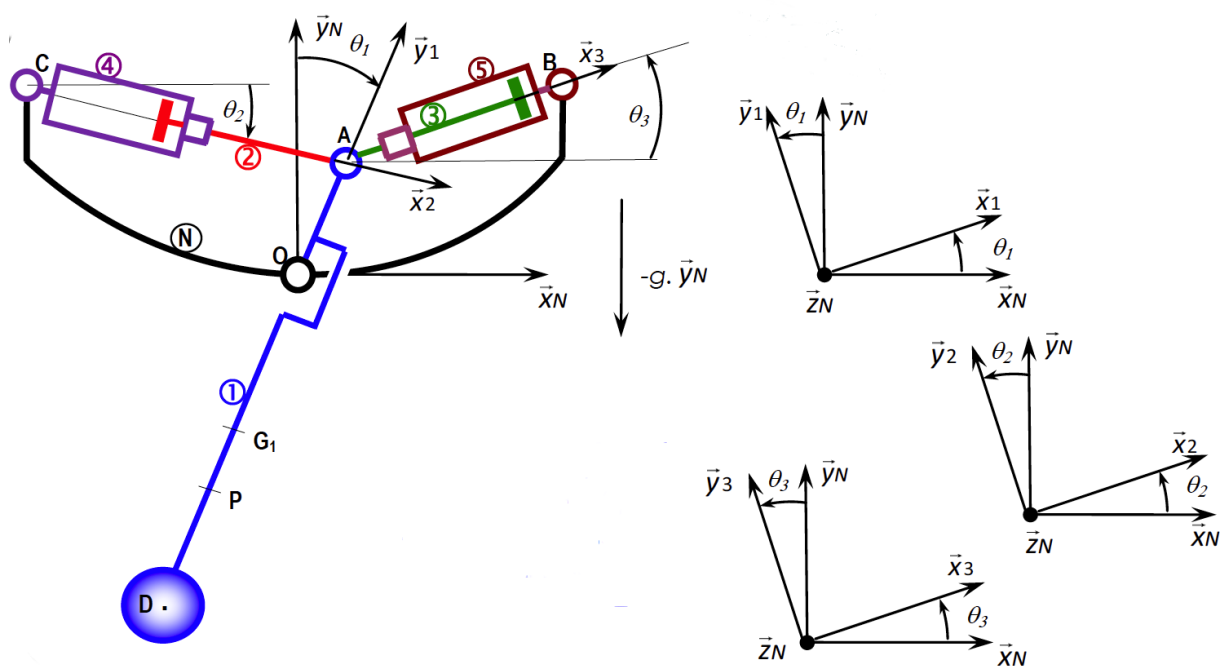


FIGURE 7 – Modèle plan (2D) de l'ensemble