2) Applications multilinéaires :

$E_1 \dots E_n$: n ev. sur $\mathbb{K}$.

F : $\mathbb{K}$-ev.

$$\varphi : \begin{array}{rcl} E_1 \times E_2 \dots \times E_n & \longrightarrow & F \\ (x_1 \dots x_n) & \longmapsto & \varphi(x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

On fixe $(x_2 \dots x_n) \in E_2 \times E_3 \times \dots \times E_n$,

$$\varphi_1 : \begin{array}{rcl} E_1 & \longrightarrow & F \\ x_1 & \longmapsto & \varphi(x_1, \overbrace{x_2 \dots x_n}^{c^{tes}}) \end{array}$$

variable.

φ est linéaire par rapport à la 1ère v.

ssi φ_1 est linéaire.

ie : $\forall\ x_1, x_1' \in E_1, \forall (x_2 \dots x_n) \in E_2 \times \dots \times E_n$,

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\overbrace{\varphi(x_1 + \lambda x_1', x_2, x_3 \dots x_n)}^{\varphi_1(x_1 + \lambda x_1')}$$

$$= \underbrace{\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)}_{\varphi_1(x_1)} + \underbrace{\lambda \varphi(x_1', x_2 \dots x_n)}_{\lambda \varphi_1(x_1')}.$$

φ est n-lin. si elle est linéaire par rapport à toutes les variables.

Ex : $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

elle est trilinéaire ssi :

$\rightarrow \forall x_1, x'_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} ; \forall \lambda \in \mathbb{R} :$

$$\varphi(x_1 + \lambda x'_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3) + \lambda \varphi(x'_1, x_2, x_3)$$

$\rightarrow \forall x_1, x_2, x'_2, x_3, \lambda \in \mathbb{R} :$

$$\varphi(x_1, x_2 + \lambda x'_2, x_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3) + \lambda \varphi(x_1, x'_2, x_3)$$

$\rightarrow \forall x_1, x_2, x_3, x'_3, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3 + \lambda x'_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3) + \lambda \varphi(x_1, x_2, x'_3).$$

<u>Ex</u> : Soit φ trilinéaire.

Développer : $X = \varphi(a+3b,\ c-2a,\ 2d+e)$

$$X = \varphi(a,\ c-2a,\ 2d+e) + 3\varphi(b,\ c-2a,\ 2d+e)$$

1ère v.

$$= \varphi(a,\ c,\ 2d+e) - 2\varphi(a,\ a,\ 2d+e)$$

2ème v.

$$+\ 3\varphi(b, c, 2d+e) - 6\varphi(b, a, 2d+e)$$

$$= 2\varphi(a,c,d) + \varphi(a,c,e) - 4\varphi(a,a,d)$$

$3 \overset{\text{ü}}{=} \sim$.

$$- 2\varphi(a,a,e) + 6\varphi(b,c,d) + 3\varphi(b,c,e)$$

$$- 12\varphi(b,a,d) - 6\varphi(b,a,e).$$

c: φ $\boxed{\text{trilin.:}}$

$$\varphi(2a, 2b, 2c) = 2\varphi(a, 2b, 2c)$$

$$= 4\varphi(a, b, 2c)$$

$$= 8\varphi(a, b, c)$$

Si φ LINÉAIRE de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

c'est 1 fct° d'1 seule variable

(cette variable $\in \mathbb{R}^3$)

Si φ TRILINÉAIRE de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

c'est 1 fct° de 3 variable

(ces 3 variables $\in \mathbb{R}$).

$\mathcal{L}(E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n ; F)$: fonc. $\underline{\underline{n}}$-lin.

⚠ $\mathcal{L}(E_1 \times E_2 \ldots \times E_n ; F)$: fonc. $\underline{\underline{\text{linéaires}}}$

de $E_1 \times \ldots \times E_n$ ds F

Si $E_1 = E_2 = \ldots = E_n$:

$$\mathcal{L}(E, E, \ldots, E ; F) = \mathcal{L}_n(E, F)$$

$$\mathcal{L}_n(E, \mathbb{K}) = \mathcal{L}_n(E) = E^n \to \mathbb{K}.$$

⚠ $\mathcal{L}(E)$: endomorphisme : $E \to E$

<u>Ex</u> : p.s. usuel de $\mathbb{R}^3$:

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \right) \longmapsto ad + be + cf .$$

$$\underbrace{\varphi(u+\lambda v, w)}_{(u+\lambda v)\cdot w} = \underbrace{\varphi(u,w)}_{u\cdot w} + \lambda \underbrace{\varphi(v,w)}_{\lambda\, v\cdot w}$$

$$\underbrace{(u+\lambda v)}_{\text{vect.}} \cdot \underbrace{w}_{\text{vect.}}$$

$$u\cdot(v+\lambda w) = u\cdot v + \lambda\, u\cdot w .$$

p.s. est <u>symétrique</u> !

$$(2u)\cdot(2v) = 4\, u\cdot v.$$

$$\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$$

Ex :

$$\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$(A, B) \longmapsto A \times B$$

$$\varphi(A+\lambda B, C) = (A+\lambda B)\times C = AC + \lambda BC$$

$$= \varphi(A, C) + \lambda\, \varphi(B, C)$$

$$\varphi(A, B+\lambda C) = A(B+\lambda C)$$
$$= AB + \lambda AC$$
$$= \varphi(A,B) + \lambda\varphi(A,C).$$

bilin.

Ex: $\varphi : \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(f,g) \longmapsto \int_0^1 fg.$$

φ est bilin.

$$\int_0^1 (f+\lambda g)\cdot h = \int_0^1 fh + \lambda \int_0^1 gh.$$

Ex :

$$\det : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) \mapsto ad - bc = \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

elle est bilinéaire.

Non-ex :

$$\varphi : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$$

$$(f, g) \mapsto f \circ g$$

$$\varphi(f + \lambda g, h) = (f + \lambda g) \circ h$$

$$= f \circ h + \lambda g \circ h = \varphi(f, h) + \lambda \varphi(g, h)$$

φ est lin. pr la 1ère var.

$$\varphi(f, g+\lambda h) = f\circ(g+\lambda h) \underset{\text{en g}^{al}}{\neq} f\circ g + \lambda f\circ h.$$

ex :

$f : x \longmapsto x^2$

$g : x \longmapsto x+1$

$h : x \longmapsto x$.

$\lambda = 1$

$$f\circ(g+h) : x \longmapsto (2x+1)^2 = 4x^2+1+4x$$

$f\circ g + f\circ h : x \longmapsto (x+1)^2 + x^2$

$$= 2x^2 + 1 + 2x.$$

$$\neq f\circ(g+h)$$

dc φ n'est pas lin. par rapport à la 2ème var.

fonctions symétriques :

$\# S_2 = 2! = 2$

- 2 var : facile : $f(x,y) = f(y,x)$
- 3 var : moins intuitif.

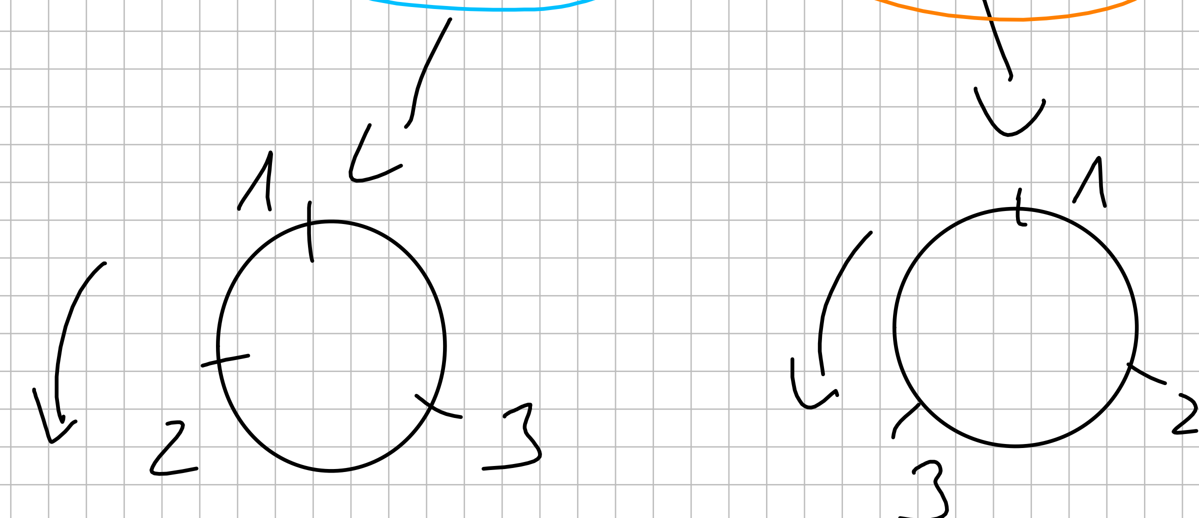
$$f(x,y,z) = f(x,z,y) = f(y,x,z)$$
$$= f(y,z,x) = f(z,x,y)$$
$$= f(z,y,x)$$

$\# S_3 = 3! = 6$

- 4 var : 24 "variantes".

3 :

$$S_3 = \{ id, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2) \}.$$



$$f : \mathbb{C}^3 \longrightarrow F$$
$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto f(x_1, x_2, x_3)$$

Si : $\sigma \in S_n$:

$$\sigma * f : E^3 \longrightarrow F$$
$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$$

<u>ex</u> : $\sigma \in S_3$: $\sigma = (1\ 2\ 3)$

$$\sigma * f(x_1, x_2, x_3) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$$
$$= f(x_2, x_3, x_1)$$

Ex : $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$.

$$\sigma_1 * (\sigma_2 * f) = \begin{cases} (\sigma_1 \circ \sigma_2) * f \\ \text{ou } (\sigma_2 \circ \sigma_1) * f \end{cases} \quad ??$$

On note : $g = \sigma_2 * f$.

$$\sigma_1 * (\sigma_2 * f) = \sigma_1 * g.$$

$$\big(\sigma_1 * (\sigma_2 * f)\big)(x_1 \dots x_n) = (\sigma_1 * g)(x_1, \dots, x_n)$$

$$= g(x_{\sigma_1(1)}, \dots, x_{\sigma_1(n)})$$

$$= g(y_1, \dots, y_n)$$

$$= \sigma_2 * f(y_1, \dots, y_n)$$

$$= f(y_{\sigma_2(1)}, \dots, y_{\sigma_2(n)})$$

Mais : $y_i = x_{\sigma_1(i)}$

dc $y_{\sigma_2(j)} = x_{\sigma_1 \circ \sigma_2(j)}$

dc : $\sigma_1 * (\sigma_2 * f)(x_1 \dots x_n)$

$$= (\sigma_1 \circ \sigma_2) * f(x_1 \dots x_n)$$

Rq : $\sigma_1 * (\sigma_2 * f)$ est noté $\sigma_1 * \sigma_2 * f$

Déf : Si f est n-lin. de E^n ds F,

- f est dite symétrique si

$$\forall \sigma \in S_n, \quad \sigma * f = f.$$

- f est dite antisymétrique si

$$\forall \sigma \in S_n, \quad \sigma * f = \varepsilon(\sigma) \cdot f.$$

ex : 2 var : f est antisym

si : $\begin{cases} \overbrace{id * f = f}^{\text{tjrs vrai}} & (\varepsilon(id) = 1) \\ (1\ 2) * f = -f & (\varepsilon((1\ 2)) = -1) \end{cases}$

si : $\forall x, y,\ f(y, x) = -f(x, y)$

ex : $\det\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) = ad - bc$

$$\det\left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = bc - ad = -\det\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right)$$

det est antisym.

Ex, 3 var:

$$S_3 = \{ id, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2) \}$$

f est antisym ssi

$$f(x_1, x_2, x_3) = + f(x_2, x_3, x_1)$$
$$= + f(x_3, x_1, x_2)$$

$$= - f(x_1, x_3, x_2)$$
$$= - f(x_2, x_1, x_3)$$

$$= - f(x_3, x_2, x_1).$$

Th : $f \in \mathcal{L}_n(E, F)$ est antisym.

ssi : $\forall$ transposi° τ de S_n, $\tau * f = -f$. (A)

Dem : ($\Rightarrow$) Si : f est antisym :

par def : $\forall \sigma \in S_n$, $\sigma * f = \varepsilon(\sigma) f$

dc en particulier pour τ transposi° :

$$\tau * f = \varepsilon(\tau) f = -f.$$

($\Leftarrow$) Soit $\sigma \in S_n$, si f vérifie (A) :

il existe $\tau_1, \tau_2 \dots \tau_p$ des transposi°

Soit $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \cdots \circ \tau_p$. $\to \varepsilon(\sigma) = \prod_{i=1}^{p} \varepsilon(\tau_i) = (-1)^p$.

alors

$$\sigma * f = \Big(\tau_1 * \big(\tau_2 * \cdots * \tau_{p-1} * \overbrace{(\tau_p * f)}^{-f \text{ avec } (*)}\big)\Big)$$

$$= \tau_1 * \big(\tau_2 * \cdots * \tau_{p-1} * (-f)\big)$$

$$= -\tau_1 * \tau_2 * \cdots * \tau_{p-2} * \underbrace{(\tau_{p-1} * f)}_{-f}$$

$$= (-1)^2 \, \tau_1 * \cdots * \tau_{p-2} * f$$

$$\vdots$$

$$= (-1)^p f \, ,$$

$$= \varepsilon(\sigma) f .$$

f est antisym.

Prop. 2.2.8 : $f \in \mathcal{L}_n(E,F)$ antisymétrique.

(i) Si on échange 2 variables, on change le signe :

$$\forall x_1 \dots x_n : -f(x_1, \dots, x_i \dots x_j \dots x_n)$$
$$= f(x_1, \dots x_j \dots x_i \dots x_n)$$
$$= (i\ j) * f(x_1 \dots x_n)$$

(ii) Si $x_1 \dots x_n \in E$

et 2 var. sont égales :

$\exists i \neq j$ tq. $x_i = x_j$

alors $f(x_1 \dots x_n) = 0$

<u>dim</u>: $f(x_1 \dots x_n)$

$= f(x_1 \dots x_i \dots x_j \dots x_n)$

$=$

$= f(x_1 \dots \underbrace{x_j}_{=x_i} \dots \underbrace{x_i}_{=x_j} \dots x_n)$

$= (i \quad j) * f(x_1 \dots x_n)$

$= - f(x_1 \dots x_n)$

dc $f(x_1 \dots x_n) = 0$.

<u>ex</u>: $\det\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = ab - ab = 0$.

(iii) si à 1 variable on ajoute 1 c.l. des autres, ça ne change pas la val. de f.

ie : $f(x_1, \dots, x_i, \dots x_n)$

$$= f\left(x_1, \dots, x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j x_j, x_{i+1} \dots x_n\right)$$

ex : $\det\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right)$$

$$+ \lambda \underbrace{\det\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)}_{=0}$$

Dém: $i = 1$:

$$f\Big(x_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i x_i,\ x_2, \dots, x_n\Big)$$

$$\underset{1^{\text{ère}}\ \text{var.}}{=} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$+ \underbrace{\sum_{i=2}^{n} \lambda_i f(x_i, x_2, \overset{i}{\dots}, x_n)} = f(x_1 \dots x_n)$$

$$= \lambda_2 f(x_2, x_2, \dots)$$

$$+ \lambda_3 f(x_3, x_2, x_3, \dots)$$

$$+ \dots + \lambda_n f(x_n, x_2, \dots, x_n)$$

$$\underset{(ii)}{=} 0$$

(iv) Si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

ex : $\det\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \lambda\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \lambda \det\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)$

(iii) $C_2 \leftarrow C_2 - \lambda C_1$ $\quad \| \qquad\qquad = 0$

$\det\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \lambda\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)$

$\|$

$\det\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, 0\right) = 0$

B : si 1 var. est nulle, $(\exists i, x_i = 0)$ par lin. par rapport à la var. i, $f(x_1 \dots x_n) = 0$.

dém : Si $(x_1 \dots x_n)$ est liée,

1 des vect. est c.l. des autres.

par ex, si x_1 est c.l. de $x_2 \dots x_n$:

$$x_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i x_i$$

$$f(x_1, \dots, x_n) \underset{\text{(lin)}}{=} f\left(x_1 - \sum_{i=2}^{n} \lambda_i x_i, x_2 \dots x_n\right)$$

$$= f(0, x_2 \dots x_n)$$

$$\underset{\substack{\text{lin.}\\ 1^{\text{ère}}\text{ var.}}}{=} 0 .$$

Déf : Si $f \in \mathcal{L}_n(E, F)$, on dit qu'elle est alternée si :

$\forall (x_1 \dots x_n) \in E^n$,

$[\exists i, j \in [\![1..n]\!], i \neq j \Rightarrow x_i = x_j] \Rightarrow f(x_1 \dots x_n) = 0$

ie : f est nulle sur tous les n-uplets ayant 2 variables égales.

Rq : avec (iii) de 2.2.8 :

f antisym $\Rightarrow$ f alternée.

Th. 2.2.11 : alternée $\Leftrightarrow$ antisymétrique.

Démo : ($\Rightarrow$) : Soit f alternée ($f : E^n \to F$).

Soit τ transposition. Mq. $\tau * f = -f$.

faisons-le pour $\tau = (1 \ 2)$.

Soit $X = (x_1 \dots x_n) \in E^n$.

Soit $X' = (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_3 \dots x_n)$

$$0 \underset{\substack{f \\ \text{alternée}}}{=} f(X') = f(x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_3 \dots x_n)$$

$$\underset{1^{\text{ère}}\text{ var.}}{=} f(x_1, x_1 + x_2, x_3 \dots x_n)$$

$$+ \; f(x_2, x_1 + x_2, x_3 - - x_n)$$

$$= \; f(x_1, x_1, x_3, -, x_n) = 0$$

2≤ var.

$$+ \; f(x_1, x_2, x_3, \cdots x_n)$$

$$+ \; f(x_2, x_1, x_3 \cdots x_n)$$

$$+ \; f(x_2, x_2, x_3 - - x_n) = 0$$

$$0 = f(x_1, x_2, x_3 \cdots x_n) + \underbrace{f(x_2, x_1, x_3 \cdots x_n)}_{(1\;2) * f(x_1 \cdots x_n)}$$

d.h.: $(1\;2) * f = -f$.

idem avec les transpos$^{\circ}$.

dc f est antisym.

S : φ est n-lin :

$$\varphi(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

$$= \lambda^{n} \varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

⚠ S : φ est linéaire. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\varphi(2a, 2b, 2c) = \varphi(2(a,b,c))$$

$$= 2\varphi(a, b, c)$$