# Devoir à la maison n° 3

À rendre le 1er octobre

## I. Étude d'une somme

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}.$$

On se propose de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

**1)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\left[\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}\right](-1)^{k-1}.$$

**2)** En déduire une expression simplifiée de $S_{n+1} - S_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**3)** Montrer que, pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}.$$

**4)** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1}.$$

**5)** Conclure, sans utiliser de raisonnement par récurrence.

## II. Calcul des puissances d'une matrice

On introduit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 8 \\ -5 & 1 & 11 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**1)** Soit $Y = \begin{pmatrix} t \\ u \\ v \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Résoudre en $X$ le système $PX = Y$.

**2)** En déduire que $P$ est inversible ainsi que l'expression[1] de $P^{-1}$.

**3)** Calculer $N = P \times A \times P^{-1}$.

**4)** Calculer $N^2$, $N^3$ et en déduire une expression de $N^n$, pour tout entier naturel $n$.

**5)** En déduire une expression de $A^n$, pour tout entier naturel $n$.

**6)** La matrice $A$ est-elle inversible ?

— **FIN** —

1. La suite de l'exercice dépend de cette réponse, il vous est *fortement* conseillé de vérifier votre calcul d'inverse.