1) Continuité uniforme.

$f : I \to \mathbb{R}$

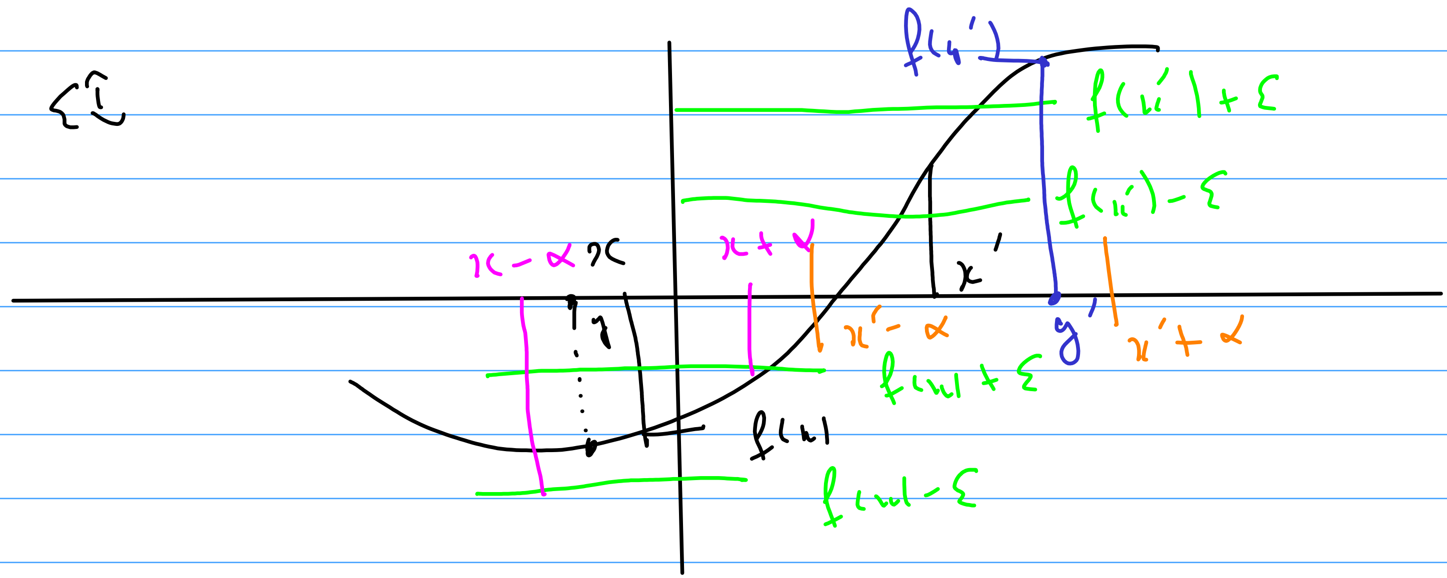
- f continue sur I ssi : $\forall x \in I$, f est continue en x

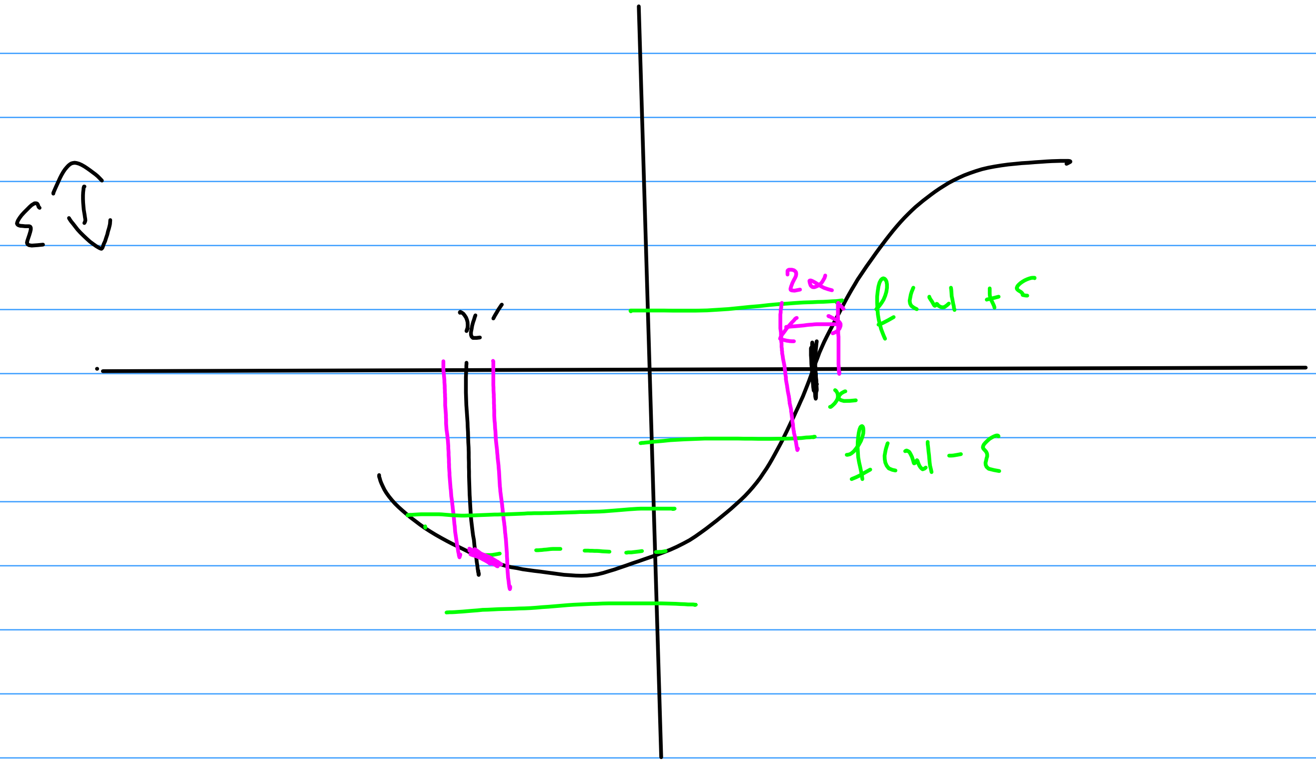
ssi : (1) $\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall y \in I, |x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

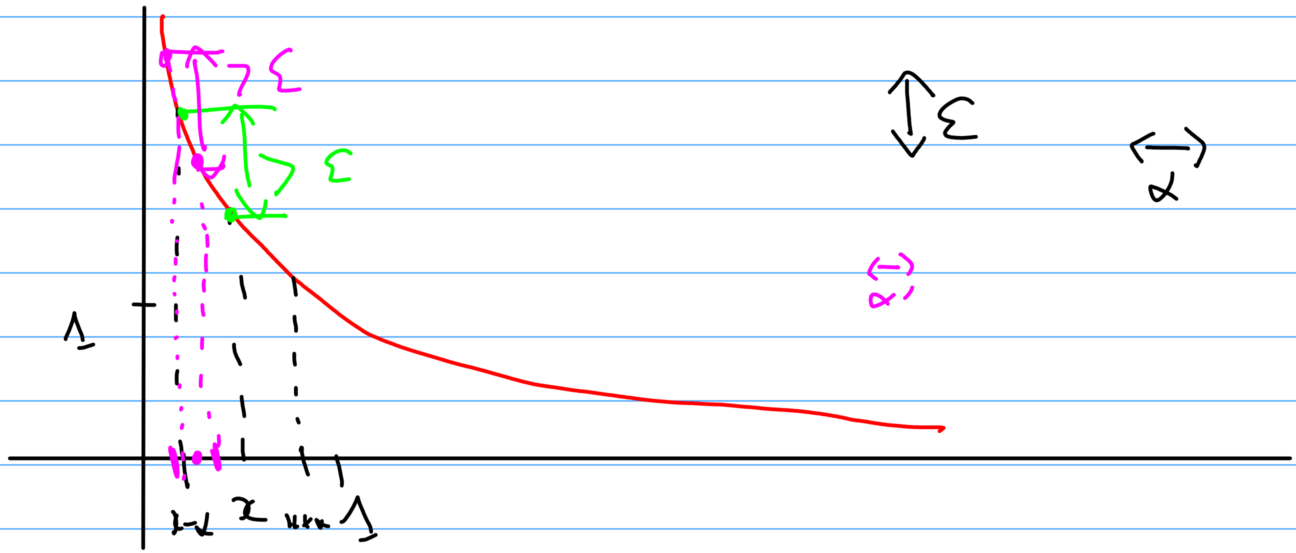
- déf : f est u^t cont. sur I ssi :

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in I, |x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

ε




ε
x'
2α
f(x)+ε
x
f(x)-ε


ε
ε
ε
α
α
1
x-α
x
x+α
1

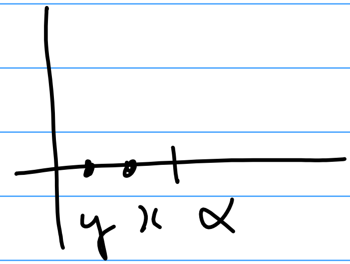
$\neg$(f u^t-cont)

Mq : $\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x, y, \ |x-y| < \alpha$ mais $|f(x)-f(y)| > \varepsilon$

x, y proches

f(x), f(y) éloignés

Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Soit $\alpha > 0$.



F

On pose : $\begin{cases} x = \min(\alpha, 1) \\ y = \frac{x}{2} \end{cases}$: $0 < x - y = \frac{x}{2} \leq \frac{\alpha}{2} < \alpha$

$0 < \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \geq 1 > \varepsilon$ car $x \leq 1$

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$$

donc $\sqrt{\cdot}$ ne peut pas être lipsch:

$$\underline{\forall K>0}, \ \exists x, \ \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} > K$$

ie: $|\sqrt{x}-\sqrt{0}| > K\,|x-0|$

__ex.3 p.20:__ $\sqrt{\cdot}$ est u^t cont. sur $\mathbb{R}_+$.

f lipsch $\Longrightarrow$ f u^t cont.

$\not\Longleftarrow$

__Th.1.0.4:__ 1) Soit f u^t cont.

Soit $\varepsilon > 0$.

avec (2) : $\exists \alpha > 0, \forall x, y \in I, |x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ (2)

Fixons ce α.

Soit $x \in I$. Alors : si $y \in I$ et $|x-y| < \alpha$, avec (2),

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

On a mq : $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in I, \exists \alpha > 0, \forall y \in I,$

$|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

f est continue en x, donc sur I.

Supp. f u.c. sur I, soit $a \in I$.

Mq. f est cont. en a : $\forall \varepsilon > 0, \exists \beta > 0, \forall y \in I, |a-y| < \beta$

$\Rightarrow |f(a) - f(y)| < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$. f est u.c. : il existe $\alpha > 0$, tq :

$\forall x, y \in I$, $|x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$. (2)

Je pose : $\beta = \alpha$.

Soit $y \in I$, dans la phrase (2), avec $x = a$:

$\forall y \in I$, $|a-y| < \beta = \alpha \Rightarrow |f(a)-f(y)| < \varepsilon$: cqfd.

2) Soit f lipsch. sur I : il existe $k > 0$

tq. $\forall x, y \in I$, $\underbrace{|f(x)-f(y)|}_{< k\alpha} \leq k \underbrace{|x-y|}_{< \alpha}$

Mq. f unif. cont. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\alpha = \frac{\varepsilon}{k} > 0$

Soit $x, y \in I$, tq. $|x-y| < \alpha$ donc : $|x-y| < \frac{\varepsilon}{k}$

donc : $|f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$

$< k \times \varepsilon / k = \varepsilon$: cqfd

Th. de Heine : Une fonction cont. sur 1 seg^t est uniformément cont.

Démo : Rq : SEGMENT donc : Bolzano - Weierstrass !

Par absurde : $I = [a,b]$, f continue sur I on supp. n'est pas u^t cont :

$\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x, y \in I, |x-y| < \alpha$ et $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$ $(\ast)$

Fixons un tel ε.

Pr chaque $n \in \mathbb{N}$, on va appliquer $(\ast)$ avec $\alpha = \frac{1}{n+1}$.

donc il existe $x_n, y_n \in I$, $|x_n - y_n| < \frac{1}{n+1}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$.

En faisant cela, on a construit 2 suites de I (x_n) et (y_n)

tq. $\forall n \in \mathbb{N}$: $|x_n - y_n| < \frac{1}{n+1}$, $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$.

B.W : Il est ! suite de $\exists\, (x_{\varphi(n)})$ qui cv. vers 1 limite x.

$x_{\varphi(n)} \longrightarrow x$, mais, $\forall n$, $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| < \frac{1}{\varphi(n)+1}$

dc par encadrement : $y_{\varphi(n)} \longrightarrow x$.

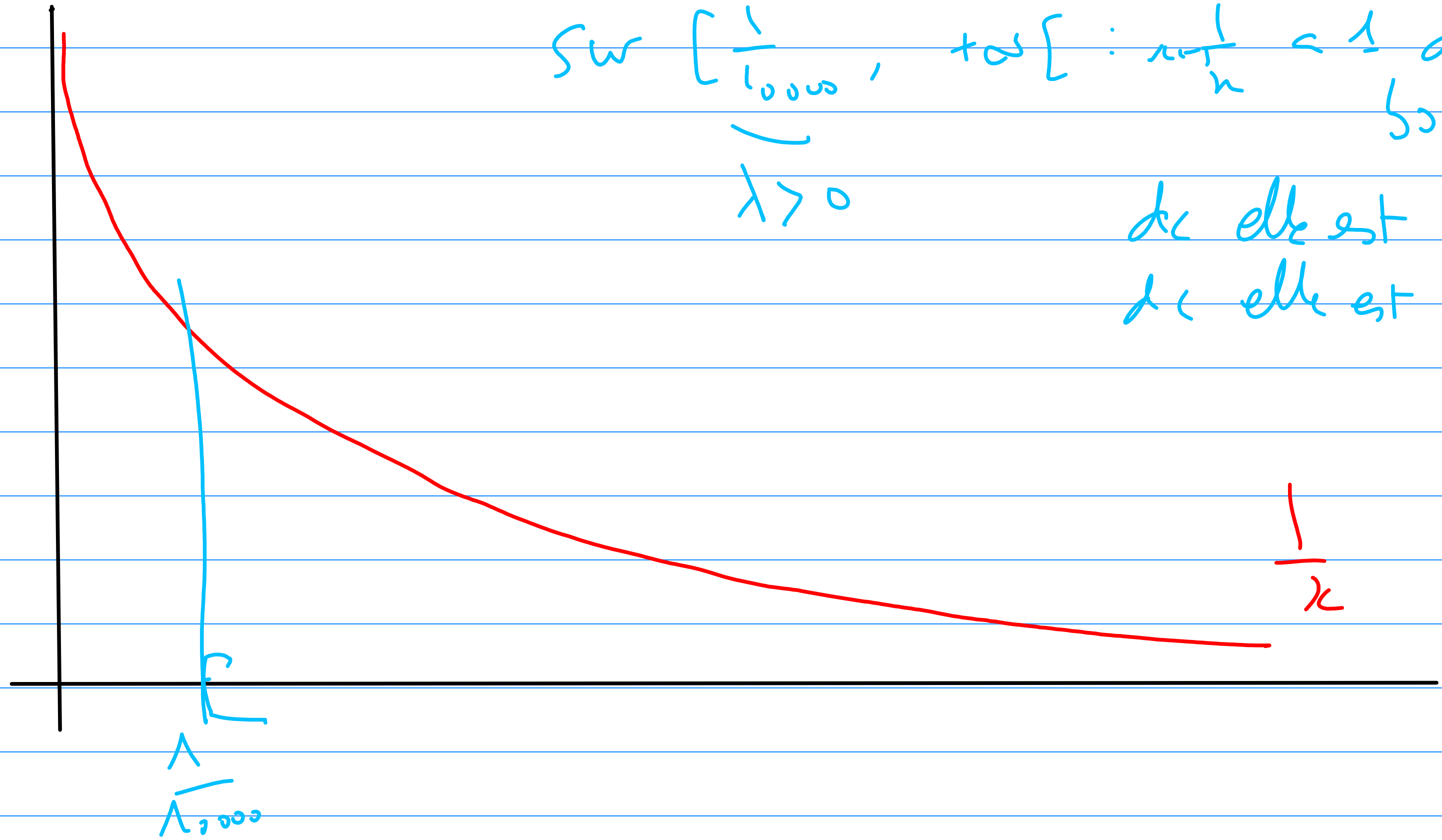
f est cont, dc par passage à la limite : $f(x_{\varphi(n)}) \longrightarrow f(x)$
$f(y_{\varphi(n)}) \longrightarrow f(x)$

dc : $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \longrightarrow 0$

sauf que : $\forall n$, $\underbrace{|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| > \varepsilon > 0}_{0 \geq \varepsilon > 0 \,:\, \text{ABSURDE}}$

Sur $\left[\frac{1}{1000}, +\infty\right[$: $x \mapsto \frac{1}{x}$ a 1 dérivée bornée
$\underbrace{\frac{1}{1000}}_{\lambda > 0}$

dc elle est lipschitz.
dc elle est u^t cont.



2) différentes intégrales : "la + simple" : intégrale de Riemann (au programme).

c'est quoi 1 intégrale ? "aire sous la courbe" c'est quoi 1 intégrale différente ? 1 autre $\int$?

ce n'est pas 1 intégrale pour laquelle l'intégrale de f a 1 autre valeur que l'intégrale de Riemann de f.

c'est 1 intégrale qui est définie pour d'autres fonctions.

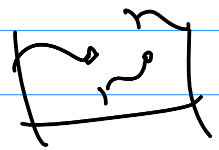
<u>Ex</u>: Si $\int_1$ et $\int_2$ st 2 intégrales:

si $\int_1 f$ et $\int_2 f$ existent : $\int_1 f = \int_2 f$

Mais : $\exists f$ fonction tq. $\int_1 f$ existe

et $\int_2 f$ n'existe pas.

int de Riemann: n'existe que pour des fonctions



continues par morceaux sur 1 segment.

en spé, on l'étend à des intervalles qcq.

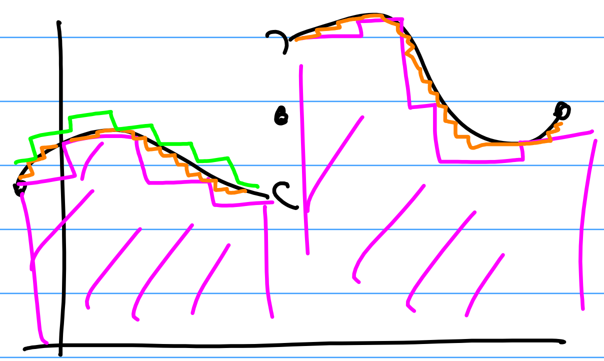
Si f n'est pas cont. par morceaux : $\int_{\mathbb{R}} f$ n'existe pas.

$\longrightarrow$ embêtant.

<u>ex :</u> "intégrale ultime" : intégrale de Lebesgue.

$$\int_L \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} = 0 . \qquad \int_R \mathbb{1}_{\mathbb{R}} \text{ : n'existe pas.}$$

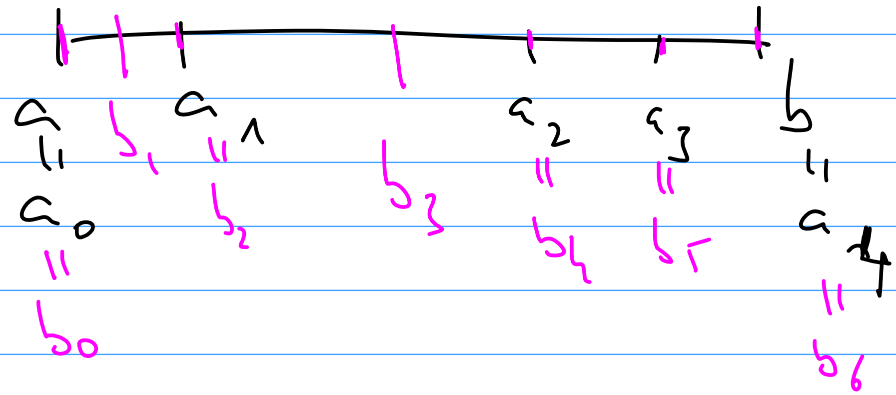
$$\int_R f \text{ existe} \implies \int_L f \text{ existe.}$$



2.1) Fonction en escalier : $I = [a, b]$

Def : **subdivision** : on appelle subdivision de $[a, b]$ tout $(n+1)$-uplet $(a_0 \dots a_n)$ tq :

$$a = a_0 < a_1 < a_2 \dots < a_n = b.$$

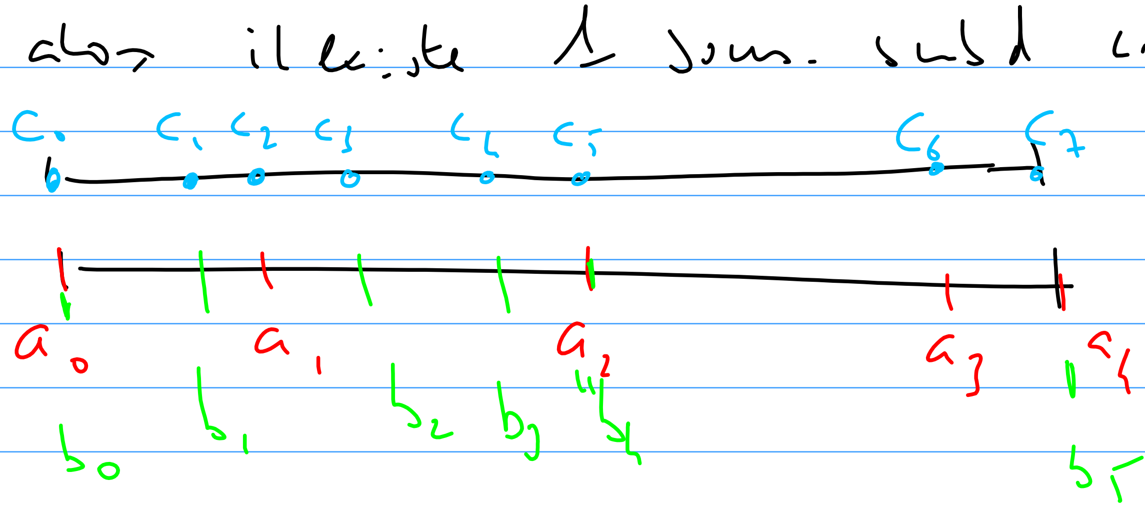


$(b_0 \dots b_6)$ est 1 sous-subd. de $(a_0 \dots a_4)$

Lemme : Si on a 2 subd. de $[a, b]$:

$$(a_0 \dots a_n) \ , \ (b_0 \dots b_p)$$

alors il existe 1 sous-subd commune aux 2.



$$\left.\begin{matrix} (a_0 \dots a_n) \rightsquigarrow \{a_0 \dots a_n\} \\ (b_0 \dots b_p) \rightsquigarrow \{b_0 \dots b_p\} \end{matrix}\right\} \to \underbrace{\{a_0 \dots a_n\} \cup \{b_0 \dots b_p\}}$$

$$= \{c_0, \dots, c_q\}$$

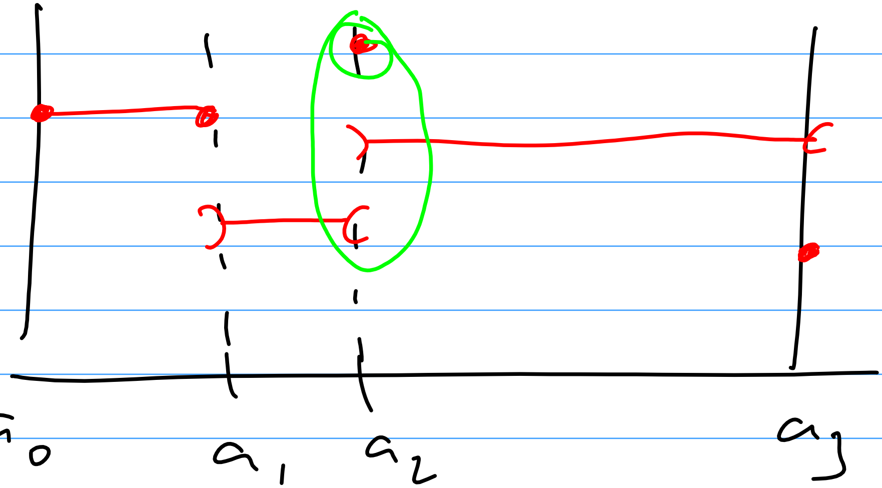
$$\text{tq } c_0 < \dots < c_q$$

alors $(c_0 \dots c_q)$ est 1 sous-subd commune

Déf : on dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est en escalier s'il existe 1 subd $(a_0, \dots, a_n)$ de I

tq : $\forall i \in [\![0, n-1]\!] : f|_{]a_i, a_{i+1}[}$ est cte.

Ex :



est en escalier.

Fin de 2.1.1 : $(\mathcal{E}([a,b], \mathbb{R}), +, \cdot)$ est 1 sev de $\mathbb{R}^{[a,b]}$

ie : $\forall f, g \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R},$

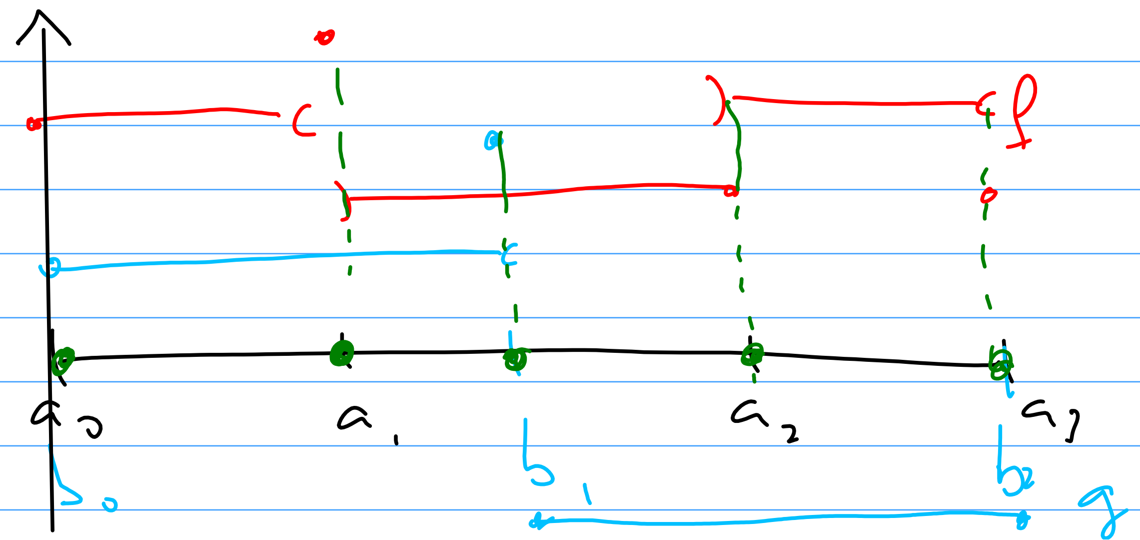
$$f + \lambda g \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}).$$

Dém : Soit f, g en esc :

il existe subd adaptée à f : $(a_0 \dots a_n) = A$

— — — g : $(b_0 \dots b_p) = B$

Soit $(c_0 \dots c_q)$ sous-subdv. commune à A et B



$(c_0 \dots c_q)$ est adaptée à f et g :

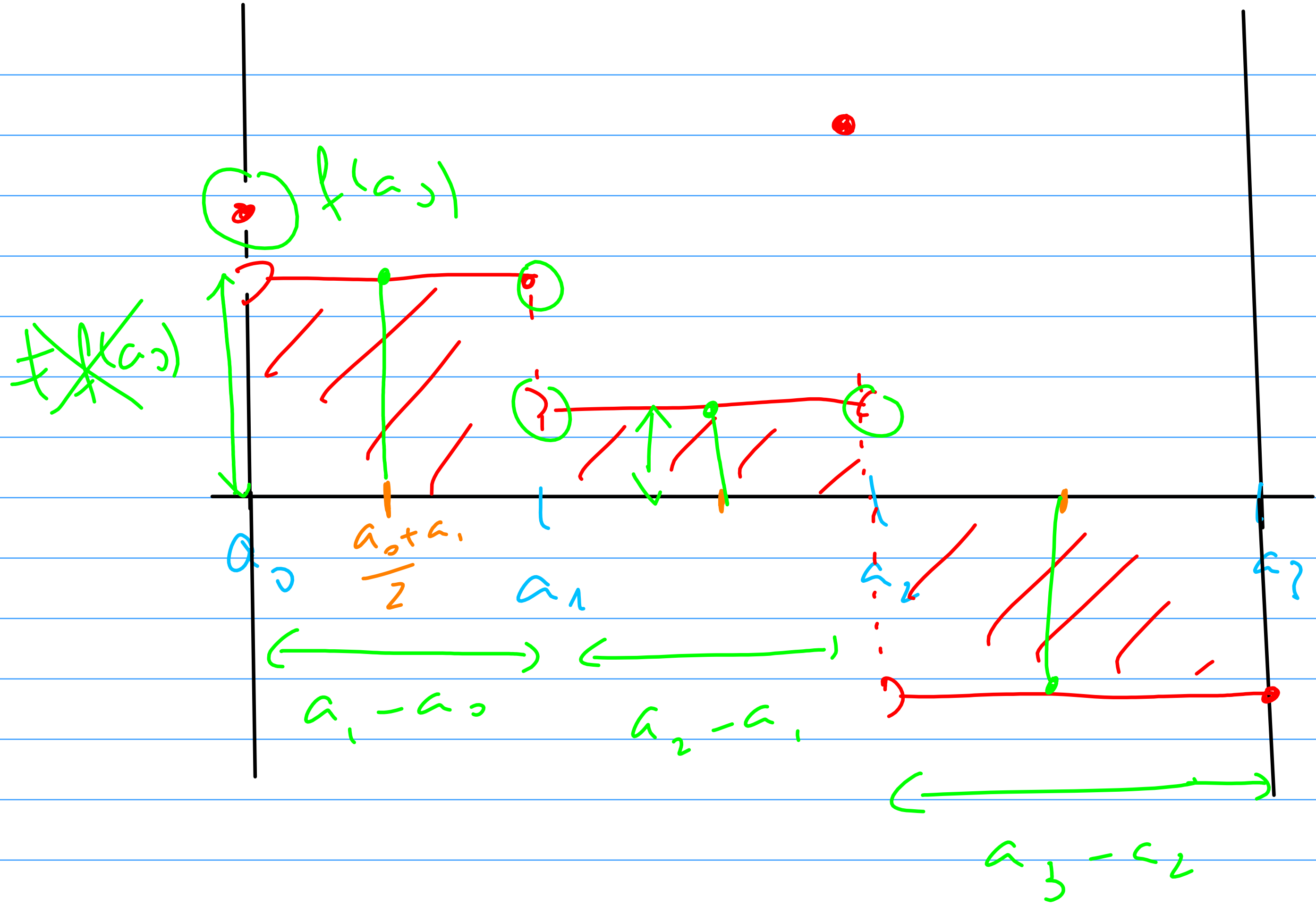
$\forall i \in [\![0, q-1]\!]$: $f|_{]c_i, c_{i+1}[}$ et $g|_{]c_i, c_{i+1}[}$ sont <u>constantes</u>.

donc évidemment : $f+\lambda g|_{]c_i, c_{i+1}[}$ aussi : $f+\lambda g$ est en esc.

<u>Déf</u> : Soit $f \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R})$, $(a_0 \dots a_n)$ 1 subd. adaptée à f.

On appelle $\int_I f$, $\int_a^b f$, le réel :

$$\int_a^b f = \sum_{i=0}^{n-1} \overbrace{\underbrace{f\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right)}_{\text{hauteur rect.}} \times \underbrace{(a_{i+1} - a_i)}_{\text{base rect.}}}^{\text{aire rect. (algébrique)}}$$



<u>Pb</u> : $\int_I f$ dépend de $(a_0 \dots a_n)$.

<u>Qu</u> : si on prend une autre subd. adaptée, l'$\int_I f$ a-t-elle la même valeur ?

Oui il faut le montrer.

Principe : A et B 2 subd. et C 1 sous-subd commune à A et B

Si on arrive mq : $\int_I f$ déf. avec A

$= \int_I f$ —— C

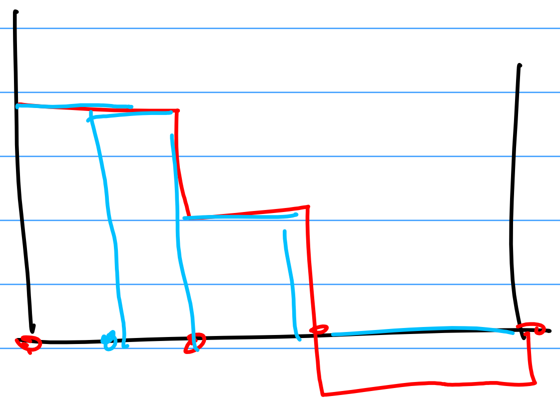
et $\int_I f$ déf avec B $= \int_I f$ déf avec C

alors : $\int_I f$ pour A $= \int_I f$ pour B.

On voit qu'il suffit de mq : $\forall$ subd A, et $\forall$ sous-subd C de A, $\int_I f$ pour A $= \int_I f$ pour C

Or peut encore simplifier le pb : il suffit de rq. si on rajoute 1 pt à la subd A, l'intégrale ne change pas.

Par réc, on pourra rajouter autant de pts que l'on veut, et arriver à n'importe quelle sous-subd C de A



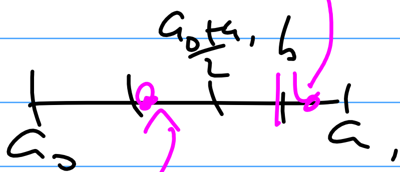
dém : $A = (a_0 \; \dots \; a_n)$

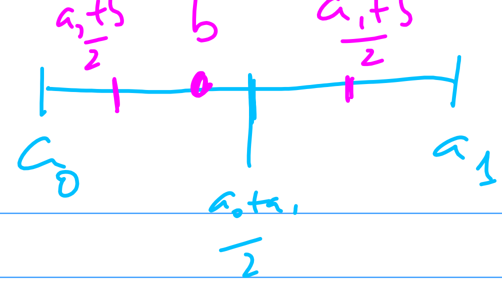
on lui rajoute 1 pt. b

par ex : $a_0 < b < a_1 < \dots < a_n$

$$\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{a_i+a_{i+1}}{2}\right)(a_{i+1}-a_i) = f\left(\frac{a_0+a_1}{2}\right)(a_1-a_0) + \overbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \dots}^{=S}$$

On rq : $a_0 < \frac{a_0+b}{2} < b < \frac{a_1+b}{2} < \underline{a_1}$





dc : $f\left(\frac{a_0+b}{2}\right) = f\left(\frac{a_0+a_1}{2}\right) = f\left(\frac{b+a_1}{2}\right)$

dc : $f\left(\frac{a_1+a_0}{2}\right)(a_1-a_0) = f\left(\frac{a_1+a_0}{2}\right)(a_1-b+b-a_0)$

$= f\left(\frac{a_1+a_0}{2}\right)(a_1-b) + f\left(\frac{a_1+a_0}{2}\right)(b-a_0)$

$= f\left(\frac{a_0+b}{2}\right)(b-a_0) + f\left(\frac{a_1+b}{2}\right)(a_1-b)$

dc $\int_I f$ pour $A = f\left(\frac{a_0+b}{2}\right)(b-a_0) + f\left(\frac{a_1+b}{2}\right)(a_1-b) + S$

$= \int_I f$ pour $A \cup \{b\}$. cqfd.