2.2 Matrice d'une application linéaire :

Définitions et premiers exemples

E : $\mathbb{K}$-ev de dim p, $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_p)$

F : $\mathbb{K}$-ev de dim n, $\mathcal{C} = (f_1 \dots f_n)$

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

Notation : $u(\mathcal{B}) = (u(e_1), u(e_2) \dots u(e_p))$

<u>Déf</u> : La matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ (ou de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$), est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\, u(\mathcal{B})$.

Elle est notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ ou $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$.

$\mathcal{Z}$: Si $E = F$, $\mathcal{B} = \mathcal{C}$: $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u)$

est notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

$$E, \mathcal{B} \xrightarrow[\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\, u]{u} F, \mathcal{C}.$$

<u>Ex</u> : $\cdot E = \mathbb{R}^2$; $F = \mathbb{R}^3$

$\mathcal{C}_1 = (e_1, e_2)$; $\mathcal{C}_2 = (f_1, f_2, f_3)$

base canonique de $\mathbb{R}^2$ base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \\ 2x + 3y \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\varphi(e_1) = \varphi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = 1\times f_1 + 1\times f_2 + 2\times f_3$$

$$\varphi(e_2) = \varphi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix} = -1\times f_1 + 1\times f_2 + 3\times f_3$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\varphi) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow f_1 \\ \leftarrow f_2 \\ \leftarrow f_3 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \varphi(e_1) & \varphi(e_2) \end{array} & \end{array}$$

$\mathcal{B}_1 = (e_1', e_2') = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$ base de $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{B}_2 = (f_1', f_2', f_3') = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ base de $\mathbb{R}^3$

$$\varphi(e'_1) = \varphi\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix} = -\frac{5}{2} f'_1 - 2 \times f'_2 + \frac{5}{2} f'_3$$

$$\varphi(e'_2) = \varphi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix} = -2 \times f'_1 + 1 \times f'_2 + 1 \times f'_3$$

donc : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(\varphi) = \begin{pmatrix} -5/2 & -2 \\ -2 & 1 \\ 5/2 & 1 \end{pmatrix}$

2) $E = \mathbb{R}_3[X]$. $\mathcal{C} = (1, X, X^2, X^3)$

$\mathcal{B} = (X-1, X^2, X+1, X^3)$

$$u : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ P \longmapsto XP' + 2P - 1 \end{array}$$

$$u(X-1) = X + 2(X-1) - 1 = -3 + 3X$$

$$u(X^2) = 2X^2 + 2X^2 - 1 = -1 + 4X^2$$

$$u(X+1) = X + 2(X+1) - 1 = 1 + 3X$$

$$u(X^3) = 3X^3 + 2X^3 - 1 = -1 + 5X^3$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \begin{array}{c c}
\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \leftarrow X \\ \leftarrow X^2 \\ \leftarrow X^3 \end{array} \\
\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u(X-1) & u(X^2) & u(X+1) & u(X^3) \end{array} &
\end{array}$$

3) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

$\mathcal{C} = (f_1, f_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Existe-t-il $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tq. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(u) = M$?

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = M \iff \begin{cases} u(e_1) = 1 f_1 - 2 f_2 & = g_1 \\ u(e_2) = 4 f_1 + 5 f_2 & = g_2 \\ u(e_3) = \quad\quad 2 f_2 & = g_3 \end{cases}$$

Nous savons qu'il existe une unique $u \in \mathcal{L}(E,F)$

$$\text{tq.}\ \begin{cases} u(e_1) = g_1 \\ u(e_2) = g_2 \\ u(e_3) = g_3 \end{cases}$$ car (e_1, e_2, e_3) est 1 base de E.

Expression de u ?

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (y-z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x-y+z)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (y-z)\,e_1 + z\,e_2 + (x-y+z)\,e_3$$

de $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} u = M \iff \forall x,y,z \in \mathbb{R},$

$$u\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (y-z)\,u(e_1) + z\,u(e_2) + (x-y+z)\,u(e_3)$$

$$= (y-z)\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + (x-y+z)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y + 3z \\ 2x - 5y + 6z \end{pmatrix}$$

Dc la seule application convenable est :

$$u : \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y+3z \\ 2x-5y+6z \end{pmatrix}$$

Au brouillon : $u(e_1) = u\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

$f_1 - 2f_2 = \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ ✓

à faire aussi pour $u(e_2)$ et $u(e_3)$.

<u>Th</u> : E $\mathbb{K}$ ev, $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_p)$ base de E

F $\mathbb{K}$ ev, $\mathcal{C} = (f_1 \dots f_n)$ base de F.

Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe 1 unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ tq. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\, u = M$.

Démo : Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. $M = (m_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$.

$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = M \iff \forall j \in [\![1,p]\!]$, $u(e_j) = g_j$ avec $g_j = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} f_i$

Or on sait qu'il existe une unique une unique une unique $u \in \mathcal{L}(E,F)$ vérifiant cela.

Th : $E, \mathcal{B}$, $F, \mathcal{C}$.

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\, u \end{array}$$

est 1 isomorphisme.

Démo : • La bijectivité résulte du th. précédent.
• la linéarité : exo.

Rq : Si $E = \mathbb{K}^p$, $F = \mathbb{K}^n$
et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ st les bases canoniques de E et F,
si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'applica° u unique,
de E ds F tq. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = M$
est l'applica° linéaire canoniquement
associée à M.

Rq : Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont deux bases de E, que dire de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(id_E)$?

- Si $\mathcal{B} = \mathcal{C}$: $\quad \mathcal{B} = (e_1 \dots e_p)$.

$\forall j$, $\quad id_E(e_j) = e_j = 0 \times e_1 + \dots + 0 . e_{j-1} + 1 \times e_j + 0 \dots$

donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, id_E = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & 0 & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & 0 & & \\ & & 1 & & \\ & & 0 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & 0 & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow e_1 \\ \vdots \\ \leftarrow e_j \\ \\ \leftarrow e_p \end{array} \\ \dots\ e_j\ \dots & \end{array}$$

$$= I_p$$

• Si $\mathcal{B} \neq \mathcal{C}$: par ex : $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$

$\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$

et $e_1 \neq f_1$.

$$id_E(e_1) = e_1 \neq f_1$$

$$= a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_p f_p$$

avec $(a_1, \dots, a_p) \neq (1, 0, 0 \dots 0)$ car $e_1 \neq f_1$

dc : $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$ est la $1^{ère}$ col de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(id_E)$

et ce n'est pas $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$: dc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(id_E) \neq I_p$

bilan :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{D},\mathcal{C}}(\mathrm{id}_E) = I_p$$

ssi : $\mathcal{D} = \mathcal{C}$.