Feuille d'exercice n° 23 : **Probabilités - indications**

Exercice 1 Calculez la probabilité de ne tirer aucun six dans n tirages.

Exercice 2 Utilisez la caractérisation d'une probabilité par les singletons.

Exercice 3 Introduire les événements T : « un trésor a été placé » et C_i : « un trésor a été placé dans le coffre n° i ». Que pouvez-vous supposer sur T et les C_i ?

1) Cherchez à conditionner par rapport au bon événement.

2) On vous demande de déterminer une probabilité conditionnelle. Revenez à la définition.

Exercice 4 Exercice élémentaire, utilisez la formule de Bayes.

Exercice 5 Modélisez en partant des événement S_i : « on a tiré un six au i^{e} lancer ». Commencez par calculer la probabilité de l'événement « on obtient le premier six au i^{e} lancer ».

Exercice 6 Le début et assez proche de l'exercice précédent. Vous pouvez toujours supposer que l'on réalise N lancers de dés, même si on ne les observe pas.

Pour le **3)**, il faudra faire intervenir une intégrale.

Exercice 7 Vous pouvez supposer que toutes les mains ont la même probabilité d'apparition, mais c'est un bon exercice que de savoir le redémontrer à partir d'un modèle de tirage sans remise dans une urne et de la formule des probabilité composées.

Il suffit ensuite de dénombrer et d'appliquer la formule de Bayes.

Exercice 8 Cet exercice n'est pas modélisable facilement à partir des outils du programme.

Pour le **2)**, conditionnez par rapport à la descendance de la première fleur.

Pour le **3)**, la modélisation probabiliste vous donner immédiatement deux propriétés sur la suite (u_n), qui sont très utiles.

Exercice 9 C'est une réécriture du célèbre paradoxe de Monty Hall. Techniquement, il n'y a pas grand chose à faire dans cet exercice, si ce n'est d'écrire correctement les données en jeu et d'appliquer vos formules. Si le doute vous taraude, n'hésitez pas à mener des simulations en Python.

Dans le **1)**, Saint-Pierre ouvre toujours une porte menant vers l'enfer.

Dans le **2)**, Saint-Pierre ouvrant une porte au hasard, il pourrait ouvrir la porte menant au paradis. On travaille conditionnellement au fait qu'il ne l'ait pas fait.

Exercice 10 L'exercice comporte déjà 4 indications !

Exercice 11 Introduisez la variable aléatoire correspondant au déplacement à chaque instant. Mieux : écrivez cette variable aléatoire en fonction d'une variable aléatoire de Bernoulli. L'hypothèse d'indépendance est implicite, ici.

Exercice 12

1) Écrivez l'espérance comme une somme double en observant que $k = \sum_{\ell=1}^{k} 1$.

2) Commencez par calculer $P(X \leqslant k)$ pour chaque k.

3) Utilisez les question précédentes !

Exercice 13 Il suffit de bien conditionner.

Les sommes multiples intervenant dans les calculs d'espérance sont pénibles à calculer. Essayez toutefois de repérer les sommes correspondant aux valeurs de $\mathrm{E}[X_i]$ et $\mathrm{E}[X_i^2]$, où $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(i, \frac{1}{6}\right)$: les valeurs de ces sommes sont données par le cours et vous n'avez pas besoin de les recalculer.

Exercice 14 Dans le **1b)**, n'hésitez pas à dénombrer (après avoir observé que ce que vous dénombrez suit une loi uniforme).

Dans le **2)**, conditionnez judicieusement.

Exercice 15 Exercice assez élémentaire, il suffit de conditionner judicieusement.

Exercice 16 Vous pouvez faire le calcul directement en conditionnant par rapport à X. La formule de Chu-Vandermonde a déjà été démontrée.

Vous pouvez aussi observer que le résultat ne dépend que de la loi jointe de (X, Y). Vous pouvez faire le calcul sur tout couple (X', Y') ayant même loi jointe.

Exercice 17 Il suffit d'appliquer les résultats du cours.

Dans le **2)**, choisissez un intervalle I_X de la forme $[\mu_n - \varepsilon, \mu_n + \varepsilon]$ et écrivez l'événement $m \in [\mu_n - \varepsilon, \mu_n + \varepsilon]$ à l'aide de valeurs absolues.

Exercice 18 On conditionne à chaque fois par rapport à l'état précédent.

On peut remarquer que pour chaque $1 \leqslant i \leqslant n$, $X_i^2 = 1$.