

## Devoir à la maison n° 08

À rendre le 1<sup>er</sup> décembre

### I. Borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ .

Dans tout ce problème, on pourra utiliser sans démonstration le résultat connu suivant :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, x^2 \neq 2.$$

Soit

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Q}_+^* \mid x^2 < 2 \right\} \text{ et } B = \left\{ x \in \mathbb{Q}_+^* \mid x^2 > 2 \right\}.$$

On désire montrer par l'absurde que  $A$  ne possède pas de borne supérieure dans  $\mathbb{Q}$ . Supposons donc qu'une telle borne supérieure existe et notons la  $\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{Q}$ ). On pose  $\beta = \frac{2}{\alpha}$ .

- 1) Soit  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ,  $x \mapsto \frac{2}{x}$ . Montrer que  $f(A) = B$  et que  $f(B) = A$ .
- 2) Montrer que  $\beta$  est la borne inférieure de  $B$  dans  $\mathbb{Q}$ .
- 3)   a) Montrer que  $\alpha^2 \leq 2$  et en déduire que  $\beta^2 \geq 2$ .  
      b) En déduire une comparaison de  $\alpha$  et de  $\beta$ .
- 4)   a) Soit  $a \in A$  et  $b \in B$ , montrer que  $a \leq b$ .  
      b) Retrouver la comparaison entre  $\alpha$  et  $\beta$  précédemment obtenue.
- 5) En utilisant  $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$ , déduire une contradiction des questions précédentes.
- 6) L'ensemble ordonné  $(\mathbb{Q}, \leq)$  possède-t-il donc la propriété de la borne supérieure ?

### II. Une équation sur les entiers.

Résoudre en  $(n, x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^4$  l'équation  $n^x + n^y = n^z$ .

— FIN —