Devoir facultatif n° 4

Dans ce problème, on note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers dans l'intervalle d'entiers $[\![1, n]\!]$:

$$\pi(n) = \text{Card}\left\{ p \in [\![1, n]\!] \mid p \in \mathscr{P} \right\}.$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note μ_n le plus petit multiple strictement positif commun aux nombres 1, 2,..., n :

$$\mu_n = \text{PPCM}(1, 2, \ldots, n).$$

On rappelle que si $p \in \mathscr{P}$, on note $\nu_p(a)$ la valuation p-adique d'un entier a. On rappelle aussi que si $a, b \in \mathbb{N}^*$, alors

$$a \mid b \Leftrightarrow \forall p \in \mathscr{P},\ \nu_p(a) \leqslant \nu_p(b).$$

L'objectif de ce problème est de démontrer une inégalité de Tchebychev sur la répartition des nombres premiers :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\},\ \ln(2)\frac{n}{\ln(n)} \leqslant \pi(n).$$

I - Résultats préliminaires.

1) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $k \wedge (2k+1) = 1$.

2) Un critère de divisibilité par un produit de trois entiers.
Soit $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $ac \mid d$, $bc \mid d$ et $a \wedge b = 1$.

- **a)** Justifier l'existence de $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $adu + bdv = d$.
- **b)** En déduire que $abc \mid d$.

3) Propriétés élémentaires de μ_n.

- **a)** Déterminer μ_2, μ_3 et μ_4.
- **b)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu_n \mid \mu_{n+1}$.

4) Valuations p-adiques de μ_n.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $p \in \mathscr{P}$, $\nu_p(\mu_n) = \max(\nu_p(1), \ldots, \nu_p(n))$.

II - Un diviseur non trivial de μ_n.

Soit $a, b \in \mathbb{N}$ vérifiant $1 \leqslant a \leqslant b$, on pose

$$I(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-a}\mathrm{d}x.$$

5) Calcul de $I(a,b)$.

- **a)** Calculer $I(1,b)$.
- **b)** Montrer que si $a < b$, alors $I(a+1,b) = \dfrac{a}{b-a} I(a,b)$.
- **c)** En déduire que $I(a,b) = \dfrac{1}{a\binom{b}{a}}$.

6) Lien avec μ_n.

- **a)** Montrer que $I(a,b) = \displaystyle\sum_{k=0}^{b-a} \frac{(-1)^k}{k+a}\binom{b-a}{k}$.
- **b)** En considérant $\mu_b I(a,b)$, en déduire que $a\binom{b}{a}$ divise μ_b.

III - Minoration de μ_n (théorème de Nair, 1982).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

7)
- **a)** En utilisant ce qui précède, montrer que $n\binom{2n}{n}$ divise μ_{2n+1}.
- **b)** Montrer que $(2n+1)\binom{2n}{n} = (n+1)\binom{2n+1}{n+1}$ et en déduire que $(2n+1)\binom{2n}{n}$ divise aussi μ_{2n+1}.
- **c)** En déduire que $n(2n+1)\binom{2n}{n}$ divise aussi μ_{2n+1}.

8) Montrer que pour tout $0 \leqslant k \leqslant 2n$, $\binom{2n}{k} \leqslant \binom{2n}{n}$.

Indication : on pourra étudier les variations de la suite finie $\left(\binom{2n}{0}, \ldots, \binom{2n}{2n}\right)$.

9) En déduire que $(2n+1)\binom{2n}{n} \geqslant 4^n$.

10) En déduire que $\mu_{2n+1} \geqslant n4^n$.

11) Montrer que si $n \geqslant 9$, alors $\mu_n \geqslant 2^n$.

Indication : on pourra discuter selon la parité de n.

IV - Conclusion.

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

12) Soit $p \in \mathscr{P}$. Montrer que pour tout $a \geqslant 2$, $p^{\nu_p(a)} \leqslant a$.

13) En déduire que $\mu_n \leqslant n^{\pi(n)}$.

14) En déduire finalement l'inégalité de Tchebychev :

$$\ln(2)\frac{n}{\ln(n)} \leqslant \pi(n)$$

— **FIN** —