3.3 - Matrices diagonales

<u>Déf</u> : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est diagonale si : $\forall i, j \in [\![1, n]\!], i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

<u>Ex</u> : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonale. Elle est notée $\mathrm{diag}(1,2,3)$

$$\mathrm{diag}(\alpha_1 \ldots \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

<u>Prop</u> : On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ens. des matrices diag. d'ordre n.

Alors : $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.

<u>Prop</u> :

- $(\mathcal{D}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est 1 sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- $(\mathcal{D}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est 1 anneau.
- 1 matrice diag. est inversible ssi elle n'a aucun 0 sur la diagonale.
- $\mathrm{diag}(\alpha_1 \dots \alpha_n) \times \mathrm{diag}(\beta_1 \dots \beta_n)$
  $= \mathrm{diag}(\alpha_1\beta_1, \dots, \alpha_n\beta_n)$
- si $\forall i, \alpha_i \neq 0$, $(\mathrm{diag}(\alpha_1 \dots \alpha_n))^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\alpha_1}, \dots, \frac{1}{\alpha_n}\right)$.

<u>Ex</u> : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$

<u>Prop:</u> • $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) + \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$

<u>ex:</u> $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

• $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\,(E_{ii})_{1 \leq i \leq n}$

dc: $\dim \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = n$.

• Grassman:

$$\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \dim \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) + \dim \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}) - \dim \underbrace{\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})}_{= \mathcal{D}_n(\mathbb{K})}$$

$$n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} - n.$$