Devoir surveillé n° 2 - Remarques

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 34 points, ramené sur 5 points.
- Problèmes : chaque question sur 4 points, total sur 104 points, ramené sur 15 points.

Statistiques descriptives.

	Calculs	Problème	Note finale
Note maximale	29	66	19
Note minimale	4	11	6
Moyenne	$\approx 16,69$	$\approx 35,33$	$\approx 11,56$
Écart-type	$\approx 5,23$	$\approx 15,02$	$\approx 3,59$

Remarques générales.

Il faut encadrer tous vos résultats : à partir du prochain DS, les résultats non encadrés seront sanctionnés encore plus sévérement.

Ce sont les conclusions qu'il faut encadrer, pas les résultats intermédiaires.

Il faut introduire toutes les variables que vous utilisez.

Vous utilisez encore beaucoup trop d'équivalences là où des implications suffisent. Ou alors vous utilisez le symbole $\Leftrightarrow$ comme une abréviation pour ne pas avoir à écrire « donc ».

I. Un exercice déjà vu.

2. Pensez à justifier que A est inversible avant de parler de A^{-1}.

II. La série harmonique.

Les suites s'écrivent entre parenthèses ! La suite se note (u_n), u_n n'en est qu'un terme. En particulier, « u_n est croissante » n'a pas de sens.

2. $H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Il y a eu beaucoup d'erreurs sur l'indice de départ de cette somme : il s'agit de $n+1$ et non n.

3. Là aussi, beaucoup trop d'erreurs dans l'hérédité. Au rang $n+1$, c'est $H_{2n+2} - H_{n+1}$ qu'il faut calculer, et non $H_{2n+1} - H_{n+1}$. Et $H_{2n+2} - H_{n+1} = (H_{2n} - H_n) + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1}$. Revoyez ce calcul, il faut savoir effectuer ce genre de manipulations sans erreurs.

5. Beaucoup ont bien vu que $H_{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Après il y a eu pas mal d'arnaques du style « on pose $p = 2^n$ et donc $H_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$. Ce raisonnement est faux : il sous-entendrait que tous les entiers p sont de la forme 2^n avec n entier. Et donc le résultat est faux : considérez la suite (u_n) telle que $u_n = n$ si n est pair et $u_n = 0$ si n est impair. Alors $u_{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ mais $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc la suite (u_n) n'a pas de limite.

6. Relisez-bien la question : on vous demande de prouver l'hérédité de P_n aux rangs pairs. Ce résultat ne se démontrait pas par récurrence, et il n'y avait pas lieu d'initialiser quoi que ce soit.

10. Introduisez vos x ! Et l'énoncé demandait une inégalité stricte, qu'il fallait donc justifier, et pas seulement avec le tableau de variation. Je voulais lire quelque chose du genre « $f' < 0$ donc f est strictement décroissante et donc l'inégalité voulue est stricte ».

12. Il suffisait d'appliquer la question 10 à $\dfrac{1}{n}$.

13. Cet encadrement était déjà donné dans la question précédente ! L'inégalité de droite donnait une minoration de $\dfrac{1}{n}$, celle de gauche donnait une majoration de $\dfrac{1}{n+1}$: il n'y avait plus qu'à décaler la relation de $n+1$ à n. Beaucoup ont cherché des choses alambiquées et sont arrivés à des encadrements sans intérêt.

14. L'énoncé de la question 13 précisait bien « $n \geqslant 2$ » ! Il fallait donc sommer l'encadrement de la question précédente à partir de 2, et rajouter à part le terme pour $k = 1$.
Il fallait remarquer que les sommes de l'encadrement étaient téléescopiques !

15. Pour montrer cela, il fallait détailler $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
Et cette limite n'impliquait pas que $H_n - \ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: par exemple, $\dfrac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ mais $(n+1)-n$ ne tend pas vers 0.
Encore pire : $H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln n$ ne veut rien dire ! Une limite doit être une constante et ne peut pas dépendre de n.

18. Quand vous effectuez un décalage ou un renversement d'indice, il faut le dire !

19. Commencer par « soit $a, b \in \mathbb{N}$. Alors : $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k+1} + \dfrac{b}{k+2}$ donc ... » était déjà très problématique : avec a et b pris au hasard, il n'y a aucune raison pour que $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k+1} + \dfrac{b}{k+2}$: il faut le supposer ! Et puis de toute façon, commencer comme cela, c'est faire une **analyse**. Mais une analyse ne donne pas les solutions, mais des seulement des candidats. Et après il faut faire une synthèse. Et en fait, ici seule la synthèse répondait à la question : si $a = 1$ et $b = -1$, alors $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k+1} + \dfrac{b}{k+2}$. La réciproque n'a aucun intérêt !
On observait là encore que la somme obtenue était télescopique.

21. L'entier m doit être quantifié universellement **dans** l'hypothèse de récurrence. Ou alors il doit être fixé une fois pour toutes en dehors de cette hypothèse.
Attention, $\dbinom{0}{m+1}$ ne vaut pas toujours 0 : il vaut 1 si $m = 0$, et il fallait distinguer des cas.