Devoir surveillé n°3

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1) Écrire $-i$ et $1+i$ sous forme trigonométrique.

2) Calculer les racines n^{es} de $-i$ et de $1+i$.

3) Résoudre $z^2 - z + 1 - i = 0$.

4) En déduire les racines de $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$.

II. Théorème de Sturm.

L'objectif de ce problème est d'étudier des équations différentielles du type

$$y'' + qy = 0, \tag{$\mathscr{E}_q$}$$

où q est une fonction définie sur un intervalle I (cas particulier d'équation de Sturm-Liouville).

Dans la première partie, on établit un résultat de Sturm sur ces équations (1836). Dans la seconde partie, on montre des propriétés de solutions d'une telle équation pour des fonctions q particulières, en utilisant des résultats établis dans la première partie.

I - Un résultat de Sturm (1836).

On considère maintenant deux fonctions continues q_1 et q_2, définies sur un même intervalle I et vérifiant :

$$\forall x \in I,\ q_1(x) \leqslant q_2(x).$$

Soit $y_1 : I \to \mathbb{R}$ une solution non nulle de l'équation

$$y'' + q_1 y = 0, \tag{$\mathscr{E}_{q_1}$}$$

soit $y_2 : I \to \mathbb{R}$ une solution non nulle de l'équation

$$y'' + q_2 y = 0. \tag{$\mathscr{E}_{q_2}$}$$

Soit $\alpha < \beta$ deux lieux d'annulation consécutifs de y_1 sur I (c'est-à-dire : y_1 s'annule en α et β, mais pas sur $]\alpha, \beta[$). On cherche à établir le résultat suivant : y_2 s'annule sur $[\alpha, \beta]$.

1) Montrer que y_1 ne change pas de signe sur $]\alpha, \beta[$ et que $-y_1$ est aussi solution de $(\mathscr{E}_{q_1})$.

On peut donc supposer, sans perte de généralité, que y_1 est strictement positive sur $]\alpha, \beta[$. Comme $y_1(\alpha) = y_1(\beta) = 0$, une observation élémentaire sur les taux d'accroissement de y_1 en α et β associée au théorème de Cauchy-Lipschitz montre que

$$y_1'(\alpha) > 0 \quad \text{et} \quad y_1'(\beta) < 0.$$

On considère alors la fonction

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1'.$$

2) Montrer que W est dérivable sur I et exprimer W' en fonction de y_1, y_2, q_1 et q_2.

3) En raisonnant par l'absurde, montrer le théorème de Sturm : y_2 s'annule sur $[\alpha, \beta]$.
Indication : on pourra étudier les signes de W', $W(\alpha)$, $W(\beta)$.

On établit maintenant un corollaire de ce résultat. Soit $q : I \to \mathbb{R}$ continue, soit m et M deux réels strictement positifs vérifiant :

$$\forall x \in I,\ m \leqslant q(x) \leqslant M.$$

Soit y une solution non nulle de $(\mathscr{E}_q)$ sur I et $\alpha < \beta$ deux lieux d'annulation consécutifs de y sur I.

4) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$y'' + my = 0. \tag{$\mathscr{E}_m$}$$

5) Déterminer l'ensemble des lieux d'annulation d'une solution quelconque non nulle de $(\mathscr{E}_m)$. Que dire de l'écart entre deux lieux d'annulation successifs d'une telle solution ?

6) En déduire que :

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leqslant \beta - \alpha \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{m}}.$$

Indication : on pourra raisonner par l'absurde et considérer des solutions aux équations $(\mathscr{E}_m)$ et $(\mathscr{E}_M)$ appropriées.

II - Le cas où q est strictement positive et croissante.

On suppose dans cette partie que la fonction $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, strictement positive et croissante. Soit y une solution non nulle de $(\mathscr{E}_q)$.

7) Montrer que la fonction $z = y^2 + \dfrac{(y')^2}{q}$ est décroissante.

8) En déduire que y est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

9) En déduire aussi que si $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$ vérifient $y'(t_1) = y'(t_2) = 0$, alors $|y(t_1)| \leqslant |y(t_2)|$.

10) Montrer que y s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}_+$.

11) Soit $t_1 < t_2 < t_3$ trois lieux d'annulation consécutifs de y. Montrer que

$$t_3 - t_2 \leqslant t_2 - t_1$$

(c'est-à-dire : les lieux d'annulation de y se rapprochent).

III. Limites inférieures et supérieures d'une suite d'ensembles.

On considère un ensemble non vide E et une suite $(X_n)_{n\in N}$ de parties de E. On définit respectivement la *limite inf* et la *limite sup* de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\liminf(X_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{p\geqslant n} X_p \right) \qquad \text{et} \qquad \limsup(X_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{p\geqslant n} X_p \right).$$

1) Dans cette question, on considère que $E = \mathbb{R}$. Déterminer pour chacune des suites (X_n) suivantes les ensembles $\bigcap_{p\geqslant n} X_p$, $\bigcup_{p\geqslant n} X_p$ (pour un $n \in \mathbb{N}$ quelconque), puis les ensembles $\liminf X_n$ et $\limsup X_n$.

- **a)** $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = [\![0, n]\!]$
- **b)** $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = [n, +\infty[$
- **c)** $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = \{(-1)^n\}$

2) Soit un élément $x \in E$. Traduire à l'aide de quantificateurs $x \in \liminf(X_n)$. Expliquer par une phrase « en français » la signification de cette propriété. Faire de même pour $x \in \limsup X_n$.

3) Dans cette question, on montre que :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n \subset \liminf X_n \subset \limsup X_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

- **a)** Montrer que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n \subset \liminf X_n$.
- **b)** Montrer que $\liminf X_n \subset \limsup X_n$.
- **c)** Montrer que $\displaystyle\limsup X_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

4) On considère deux suites $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de E. Montrer que les relations suivantes.

- **a)** $\liminf(X_n \cap Y_n) = \liminf(X_n) \cap \liminf(Y_n)$
- **b)** $\limsup(X_n \cap Y_n) \subset \limsup(X_n) \cap \limsup(Y_n)$
- **c)** $\limsup(X_n) \cup \limsup(Y_n) = \limsup(X_n \cup Y_n)$

5) A-t-on toujours

$$\limsup(X_n \cap Y_n) = \limsup(X_n) \cap \limsup(Y_n),$$

pour deux suites $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de E ?

6) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties de E croissante pour l'inclusion, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n \subset X_{n+1}.$$

Déterminer $\limsup(X_n)$ et $\liminf(X_n)$.

— FIN —