Devoir surveillé n°5
Version 1

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Soit G un groupe noté multiplicativement.
Pour $a \in G$, on note τ_a l'application de G vers G définie par $\tau_a : x \mapsto axa^{-1}$.

1) Soit $a \in G$, montrer que τ_a est un endomorphisme du groupe $(G, \times)$.

2) Vérifier que $\forall a, b \in G$, $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$

3) Soit $a \in G$, montrer que τ_a est bijective et déterminer son application réciproque.

4) En déduire que $\mathcal{T} = \{\tau_a \mid a \in G\}$ muni du produit de composition est un groupe.

II. Étude d'une suite implicite.

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction

$$\varphi_n : x \mapsto nx^{n+1} - (n+1)x^n.$$

On considère aussi la fonction

$$\psi : x \mapsto (x-1)\mathrm{e}^{x}.$$

1) <u>Question préliminaire.</u> Montrer que pour tout $\lambda > 0$:

$$\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{e}^{\lambda}.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, dresser le tableau des variations de φ_n sur $\mathbb{R}_+$.

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\varphi_n(x) = 1$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}_+$.

On note dorénavant x_n l'unique réel positif vérifiant $\varphi_n(x) = 1$: on vient donc de construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

4) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + \dfrac{1}{n} \leqslant x_n \leqslant 1 + \dfrac{2}{n}$.

5) Que peut-on en déduire sur la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

6) Montrer que l'équation $\psi(x) = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, que l'on notera dorénavant α.

7) Justifier que $1 < \alpha < 2$.

8) Montrer que, pour tout $\lambda > 0$, $\varphi_n\left(1 + \dfrac{\lambda}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \psi(\lambda)$.

9) Soit $\varepsilon \in]0, \alpha - 1[$.

  a) Comparer $\psi(\alpha - \varepsilon)$, $\psi(\alpha)$ et $\psi(\alpha + \varepsilon)$.

b) Justifier qu'il existe un rang n_0 à partir duquel on ait

$$\varphi_n\left(1+\frac{\alpha-\varepsilon}{n}\right) < 1 < \varphi_n\left(1+\frac{\alpha+\varepsilon}{n}\right).$$

c) Justifier qu'à partir d'un certain rang,

$$1+\frac{\alpha-\varepsilon}{n} < x_n < 1+\frac{\alpha+\varepsilon}{n}.$$

10) Que peut-on donc dire sur la suite de terme général $n(x_n-1)$?

III. Une équation de Mordell.

On cherche déterminer l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ solutions de l'équation (de Mordell) suivante :

$$y^2 = x^3 + 16. \qquad (\mathscr{M})$$

On désigne par *cube parfait* tout cube d'entier. Ainsi, un entier $a \in \mathbb{Z}$ est un cube parfait s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant $a = n^3$.

1) Résultats préliminaires. Ces deux questions sont indépendantes, et leurs résultats pourront être utilisées dans le reste du devoir.

a) Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que a est pair si et seulement si a^2 est pair et que a est pair si et seulement si a^3 est pair.

b) Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ deux entiers premiers entre eux, tels que ab soit un cube parfait. Montrer que a et b sont des cubes parfaits.

Indication : On pourra partir de la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre dont ab est le cube.

2) Soit $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ solution de $(\mathscr{M})$ tel que y soit impair.

a) Montrer que y^2 est impair et en déduire que x est impair.

b) Soit d un diviseur de $y-4$ et de $y+4$. Montrer que d est impair et que d divise 8.

c) En déduire que $y-4$ et $y+4$ sont premiers entre eux.

d) En déduire qu'il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $y+4 = a^3$ et $y-4 = b^3$.

e) Montrer que $a-b$ est pair et que a^2+ab+b^2 est impair.

f) En factorisant a^3-b^3, montrer que $a = b+8$ et $3b^2+24b+64 = 1$.

g) Conclure en donnant l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ solution de $(\mathscr{M})$ tel que y soit impair

3) Soit $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ solution de $(\mathscr{M})$ tel que y soit pair.

a) Montrer que si $y \equiv 0[4]$ alors $y^2 \equiv 0[16]$, et si $y \equiv 2[4]$ alors $y^2 \equiv 4[16]$.

b) En démontrant des résultats analogues concernant x^3, montrer que x et y sont divisibles par 4.

On note alors $x = 4x'$ et $y = 4y'$.

c) Montrer que y' est impair.

On note alors $y' = 2n+1$.

d) Montrer que n et $n+1$ sont premiers entre eux et sont des cubes parfaits.

On note alors $n = c^3$ et $n+1 = d^3$.

e) Montrer que $d = c+1$, et en déduire les valeurs de n, y', x', y et x.

4) Déterminer l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ solutions de $(\mathscr{M})$.

— **FIN** —