Devoir à la maison n° 16

À rendre le 28 mars

I. Un exercice d'algèbre linéaire.

On s'intéresse pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}^*$ à l'ensemble noté $F(\lambda)$ des endomorphismes linéaires de $\mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation $f \circ f = \lambda f$:

$$F(\lambda) = \left\{ f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3) \;\middle|\; f^2 = \lambda f \right\}.$$

1) Étude générale.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $f \in F(\lambda)$.

- **a)** Montrer que $\operatorname{Im} f = \{ u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = \lambda u \}$.
- **b)** On veut montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$. Soit $x \in \mathbb{R}^3$.
  - **i)** Analyse. On suppose que $x = u + v$, avec $u \in \operatorname{Im} f$ et $v \in \operatorname{Ker} f$. En calculant $f(x)$, trouver la valeur de u, et donc celle de v.
  - **ii)** Procéder à une phase de synthèse.
  - **iii)** Conclure.

2) Un exemple.
On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -x + y + z \\ -6x + 4y + 2z \\ 3x - y + z \end{pmatrix} \end{array}.$$

- **a)** Montrer que f appartient a $F(\lambda)$, pour un certain λ, que l'on précisera.
- **b)** Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$, ainsi que de $\operatorname{Im} f$.
- **c)** Le vecteur $w = (7, 6, 5)$ appartient-il a $\operatorname{Im} f$?

II. Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 3.

On souhaite résoudre l'équation différentielle

$$y''' = y'' + 5y' + 3y. \tag{$\mathscr{E}$}$$

Pour cela, on introduit les ensembles

$$\begin{aligned} E &= \{\, f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f''' = f'' + 5f' + 3f \,\}, \\ F &= \{\, f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f' = 3f \,\}, \\ G &= \{\, f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f'' + 2f' + f = 0 \,\}. \end{aligned}$$

1) Expliquer brièvement pourquoi E, F et G sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

2) Soit $f \in F$, calculer f', f'' et f''' en fonction de f. En déduire que $f \in E$. Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E.

3) Soit $f \in G$, calculer f''' en fonction de f'', f' et f. En déduire que $f \in E$. Ainsi, G est un sous-espace vectoriel de E.

4) Montrer que F et G sont en somme directe.

5) On désire maintenant montrer que $E = F \oplus G$.

- **a)** Soit $f \in E$, supposons qu'il existe $f_1 \in F$ et $f_2 \in G$ tels que $f = f_1 + f_2$. Expliciter f' en fonction de f_1 et f_2', puis f'' en fonction de f_1 et f_2''. En déduire f_1 puis f_2, en fonction de f.
- **b)** Conclure.

6) Donner une famille génératrice de F et une famille génératrice de G.

7) En déduire une famille génératrice de E. Exhiber alors toutes les solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{E})$.

— **FIN** —