Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 point, total sur 32 points, ramené sur 5 points, +45%.
- Problème et exercice de TD : exercice de TD sur 8 points, chaque question du problème sur 4 points, total sur 108 points, ramené sur 15 points, +70%.

Statistiques descriptives.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \min\left(\frac{1}{10}\lceil 10x \rceil\,; 20\right)$.

	Calculs	Problème	Note finale
Transformation	c	p	$\varphi\left(1,45\frac{5c}{32}+1,7\frac{15p}{108}\right)$
Note maximale	28	80	20+
Note minimale	2	13	$3,9$
Moyenne	$\approx 11,18$	$\approx 31,86$	$\approx 9,98$
Écart-type	$\approx 5,00$	$\approx 11,74$	$\approx 3,12$
Premier quartile	8	$23,75$	$7,8$
Médiane	$10,75$	32	10
Troisième quartile	$13,5$	$35,75$	$11,1$

Remarques générales.

• La première page de votre copie doit être particulièrement soignée : c'est le premier contact du correcteur avec votre travail. C'est elle qui donne le ton : une première page sale, comportant des erreurs ou des ommissions n'incitera pas le correcteur à l'indulgence. Ainsi, dans la ou les premières questions, vous devez détailler tous les arguments que vous donnez.
• Abstenez-vous de recopier l'énoncé. C'est inutile, cela vous fait perdre du temps, ainsi qu'au correcteur. Cela ne peut donc que vous pénaliser. À l'inverse, il convient d'anoncer tout ce que vous allez démontrer : cela éclaire le correcteur quant à vos intentions. Bien entendu, le correcteur se doute que vous allez répondre à la question : écrire « montrons que [intitulé de la question] » n'est pas utile.
• Vous ne pouvez encadrer la dernière équivalence d'une suite d'équivalences : votre réponse n'est pas « est équivalent à [...] » (quoi donc ?), mais « [...] est équivalent à [...] ».
• Beaucoup d'étudiants ont particulièrement mal introduit leurs variables. Vous ne pouvez espérer comprendre les questions que l'on vous pose, et donc y répondre, si vous ne faites pas attention à ce point.
• Lors de l'étude du sens de variation d'une fonction, vous devez conclure à la monotonie *stricte* sur des intervalles. Dire qu'une fonction est « croissante » est insuffisant.
• Dans un tableau de variations, une flèche traduit une propriété de monotonie *stricte*, et non large.
• Il est déprimant de lire encore des enchainements d'égalités (ou d'inégalités) sans liaisons logiques. À ce moment de l'année, c'est anormal.
• Certains donnent l'impression de ne plus savoir faire des choses simples (comme exprimer « f est impaire »). C'est désarmant : vous devez au contraire rédiger attentionnément les points « simples » (qui ne le sont donc pas tant que ça, vu le nombre d'erreurs commises dans ce devoir), avant d'attaquer des questions plus délicates.
• Concernant les tracés de courbes, vous devez toujours indiquer le nom de la fonction représentée, représenter les tangentes horizontales et verticales (plus tard : aussi au niveau des points d'inflexion) ainsi que les asymptotes. Arrangez-vous avec l'échelle pour que la courbe de la fonction s'approche de l'asymptote. Vous ne devez pas gribouiller votre schéma sur un coin de copie : n'hésitez pas à prendre une page entière pour ça.
• Pour étudier l'ensemble de définition d'une composée, vous devez commencer par ce qui est « à l'intérieur ». Par exemple, si vous étudiez le domaine de définition de $f \circ g$, vous devez d'abord définir le domaine de définition de g puis, si g est définie en x, vous poser la question : « sous quelle condition $f(g(x))$ est-elle définie ? ».

I - Un exercice vu en TD.

L'injectivité de f ne s'écrit pas : « pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in F$ tel que $y = f(x)$ ». On sait bien qu'un tel y existe et est unique : c'est $f(x)$ ...
Pour montrer que f est injective, prenez x, y quelconques et montrez que si $f(x) = f(y)$, alors $x = y$: considérez des parties A, A' *ad hoc*.

II - Étude de trois fonctions.

• La fonction f n'est pas la fonction $\tan^2$.
• Dans les deux courbes que vous deviez tracer, essayez de respecter les valeurs que vous connaissez : $\tan(\pi/6)$, $\tan(\pi/4)$ et $\tan(\pi/3)$ ... au moins de manière approchée.

1) Le signe de $\dfrac{x}{x+1}$ s'obtient aisément par un tableau de signes, il est donc maladroit d'étudier la fonction $\psi : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$.
Si vous tenez vraiment à étudier les variations de ψ, le plus simple est d'écrire $\psi(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1}$, ce qui permet de conclure. Il est donc doublement maladroit de dériver ψ. Mais si vous le faites et remarquez que ψ' est strictement positive, attention : $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ n'est pas un intervalle, donc ψ n'est pas (forcément) strictement croissante.
L'énoncé vous donnait une indication : g et h ont le même ensemble de définition ...
J'ai lu souvent : « g est définie ssi [machin dépendant de x non introduit] ». Cela n'a pas de sens : une fonction est définie sur un intervalle, ou en un point.
Merci de revoir la conjugaison du verbe définir afin de ne plus confondre « est défini(e) » et « définit ».

2) $\tan \xrightarrow[\pi/2]{} +\infty$ est faux (c'est vrai *à gauche* de $\pi/2$).

5) Dire que f est bijective sur $[0, \pi/2[$ est imprécis : il manque l'espace d'arrivée. Dites, par exemple, que f réalise une bijection de $[0, \pi/2[$ sur $\mathbb{R}_+$.

6) Dire que « Arctan est la réciproque de tan » est une ☠HORREUR☠ : la fonction tangente n'est pas bijective.
Vous n'avez pas besoin de raisonner par équivalences ici, vous avez juste à déduire que $t = \text{Arctan}\sqrt{x}$.

8) L'énoncé vous imposait un raisonnement (simplifier g, <u>en déduire</u> que $g = h$). Vous serez fortement pénalisés si vous ne respectez pas l'énoncé.
Si vous vouliez dériver g pour montrer que $g' = h'$, faites attention au fait que g (et h) ne sont pas dérivables sur $\mathbb{R}_+$, mais uniquement sur $\mathbb{R}_+^*$. Vous obtenez ensuite qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $\underline{x > 0}$, $g(x) = h(x) + c$. Cela ne veut pas dire que $g = h + c$ (il vous faut un argument de continuité en 0, par exemple), et vous ne pouvez pas utiliser $g(0) = h(0)$.

9) La fonction h n'est pas dérivable en 0 (la courbe de f admet une tangente horizontale au point de coordonnées $(0, 0)$).

10) Pour montrer que $h \xrightarrow[+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$, vous devez revenir explicitement à la limite vue en cours ($\text{Arctan} \xrightarrow[+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$) et composer par $\sqrt{t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$.

III - Une équation fonctionnelle

1-a) La fonction g' n'est pas strictement négative : $g'(1) = 0$! Elle l'est juste sur $]0, 1[$, ce qui suffit à conclure à la décroissance stricte de g sur $]0, 1]$.

2-a) La question **c)** vous donne $f(0) = 0$, avec la question **b)** vous avez $f(1) = 0$. Bref, la réponse est donnée dans l'énoncé, il ne vous reste plus qu'à le démontrer.

3-b) La méthode de la variation de la constante n'est pas toujours bien rédigée (loin de là). Si vous prenez $C : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, pensez à la supposer dérivable. Après avoir posé $y : x \mapsto xC(x)$, vous ne pouvez par dire que pour tout $x > 0$, $C'(x)x = k$: vous n'avez pas supposé que y est solution (et vous n'avez pas à le faire). Il convient de dire que pour tout $x > 0$, $y'(x) + y(x)/x = C'(x)x$, donc que **SI** pour tout $x > 0$, $C'(x)x = k$, alors y est solution. On manipule ici une condition **SUFFISANTE**.

3-c) On vous demande de traduire d'abord : f est solution de $xy' - y = f'(1)$. Vous ne pouvez pas dire « pour tout $x > 0$, il existe $C \in \mathbb{R}$ [...] » : C dépendrait de x.
On vous demande aussi de donner $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, pas juste $x > 0$!

4-a) Un produit de fonctions non dérivables peut-être dérivable : par exemple $x \mapsto \sqrt{x} \times \sqrt{x}$.
L'énoncé vous précise que f_1 est définie sur $\mathbb{R}$. Ce n'est pas parce que l'on étudiait f sur $\mathbb{R}_+^*$ en **3)** que f_1 n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$.