

# **XXIX Espaces euclidiens et préhilbertiens réels**

30 mars 2022

Le corps de base est  $\mathbb{R}$ .  $n, p, q, r$  et  $s$  désignent des entiers naturels non nuls.  $E$  désigne un espace vectoriel.

## 1 Produit scalaire, norme et distance.

### Définition 1.0.1.

On appelle *produit scalaire sur  $E$*  toute application  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  bilinéaire symétrique et telle que pour tout  $x \in E$ , on ait d'une part  $\varphi(x, x) \geq 0$  et d'autre part  $\varphi(x, x) = 0$  si et seulement si  $x = 0$ . Un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire est dit *préhilbertien*. Si de plus il est de dimension finie, il est dit *euclidien*.

**Remarque 1.0.2.** — Différentes notations sont utilisées couramment pour le produit scalaire de  $x$  et  $y$  :  $\langle x | y \rangle, \langle x, y \rangle, (x, y), \langle x, y \rangle, x \cdot y$ .  
— Par bilinéarité, si  $x$  ou  $y = 0$ ,  $\langle x | y \rangle = 0$ .  
— La symétrie et la linéarité par rapport à une variable suffisent à montrer la bilinéarité.  
— Jusqu'à maintenant on définissait le produit scalaire à partir d'angles. En fait c'est l'inverse que l'on fait lorsque l'on théorise tout cela.

**Exemple 1.0.3.** — Les produits scalaires usuels vus en début d'année sur  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  sont bien évidemment des produits scalaires.

- Il existe de nombreux produits scalaires sur  $\mathbb{R}^2$  ; par exemple  $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto x_1x_2 - y_1x_2 + 2y_1y_2 - x_1y_2$ .
- Il existe également sur  $\mathbb{R}^n$  un produit scalaire canonique ;  $(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ .
- Par extension, tout  $\mathbb{R}$ -ev de dimension  $n$ , étant isomorphe à  $\mathbb{R}^n$ , est muni d'un produit scalaire. Ainsi, sur  $\mathbb{R}_n[X]$  le produit scalaire usuel est  $\left( \sum_{k=0}^n a_k X^k \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^n b_k X^k \right) =$

$$\left( \sum_{k=0}^n a_k b_k \right).$$

- Soit  $a$  et  $b$  deux réels avec  $a < b$ . Sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ , l'application  $(f, g) \mapsto \int_a^b fg$  est un produit scalaire (attention : cet espace est de dimension infinie, donc n'est pas euclidien, mais préhilbertien réel).

### Exercice 1.0.4.

L'espérance munit-elle l'ensemble des variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé fini d'un produit scalaire (via  $\langle X, Y \rangle = E(XY)$ ) ?

Proposer une solution à ce « problème ».

### Définition 1.0.5 (Distance).

Soit  $E$  un ensemble (quelconque, pas nécessairement un espace vectoriel). On appelle *distance sur  $E$*  toute application  $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant les trois conditions suivantes :

- (i)  $\forall (x, y) \in E^2 \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$  ;
- (ii)  $\forall (x, y) \in E^2 \quad d(x, y) = d(y, x)$  (symétrie) ;
- (iii)  $\forall (x, y, z) \in E^3 \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (inégalité triangulaire).

Un ensemble muni d'une distance est appelé *espace métrique*.

### Remarque 1.0.6.

Il convient de ne pas oublier la positivité dans la définition d'une distance.

**Exemple 1.0.7.** — La distance usuelle dans le plan est une distance.

- La distance de deux points sur un graphe connexe, comptée comme le nombre minimal d'arêtes à parcourir sur ce graphe pour relier ces deux points.

### Remarque 1.0.8.

Soit  $E$  un ensemble muni d'une distance  $d$ . Soit  $(x, y, z) \in E^3$ . Alors, on a

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z).$$

### Démonstration.

On a  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ , donc  $d(x, z) - d(x, y) \leq$

$d(y, z)$ . De même,  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ , donc  $d(x, y) - d(x, z) \leq d(y, z)$ . Or  $|d(x, y) - d(x, z)| = \max(d(x, z) - d(x, y), d(x, y) - d(x, z))$ , d'où le résultat.  $\square$

### Définition 1.0.9 (Norme).

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On appelle norme sur  $E$  toute application  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant les trois conditions suivantes :

- (i)  $\forall x \in E \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$  ;
- (ii)  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  (homogénéité) ;
- (iii)  $\forall (x, y) \in E \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (inégalité triangulaire).

### Remarque 1.0.10.

Il convient de ne pas oublier la positivité dans la définition d'une norme.

### Exemple 1.0.11.

Sur  $\mathbb{R}^n$  et pour  $p \in [1, +\infty[$ , les applications

$$\|\cdot\|_p : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}$$

et

$$\|\cdot\|_\infty : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_k|$$

sont des normes.

### Remarque 1.0.12.

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'une norme  $\|\cdot\|$ . Alors pour tout  $(x, y) \in E^2$ , on a

$$|||x| - |y||| \leq \|x - y\|.$$

### Démonstration.

Soit  $(x, y) \in E^2$ . Remarquons qu'on a  $\|x\| = \|x + y - y\| \leq \|x + y\| + \|y\|$  par l'inégalité triangulaire, d'où l'on déduit  $\|x\| - \|y\| \leq \|x + y\|$ . Symétriquement, on remarque qu'on a  $\|y\| - \|x\| \leq \|x + y\|$ . Or  $|||x| - |y||| = \max(\|x\| - \|y\|, \|y\| - \|x\|)$ . On en déduit le résultat.  $\square$

### Définition 1.0.13 (Distance associée à une norme).

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'une norme  $\|\cdot\|$ . On appelle *distance associée à la norme*  $\|\cdot\|$  l'application  $(x, y) \mapsto \|x - y\|$ .

### Proposition 1.0.14.

Cette application est bien une distance.

### Exemple 1.0.15.

La distance associée à  $\|\cdot\|_1$  est parfois appelée *distance de Manhattan*. Dans Manhattan, les rues forment un damier « orthogonal », on ne peut donc que se déplacer parallèlement à ces axes. La distance parcourue entre deux points n'est donc pas la distance « euclidienne » usuelle ...

### Exercice 1.0.16.

Pour une norme  $\|\cdot\|$ , on appelle boule centrée en  $a \in E$  et de rayon  $r \geq 0$  l'ensemble

$$B(a, r) = \{ x \in E \mid \|a - x\| \leq r \}.$$

Tracer les boules centrées en 0 et de rayon 1 pour les normes  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

### Démonstration.

Soit  $d$  la distance associée à une norme  $\|\cdot\|$  sur un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$ . On a clairement  $\forall (x, y) \in E^2 \quad d(x, y) \geq 0$ , donc  $d$  est bien une application de  $E^2$  dans  $\mathbb{R}^+$ . On vérifie aisément les trois conditions de la définition d'une distance :

- (i) Soit  $(x, y) \in E^2$ . On a  $d(x, y) = \|x - y\|$ . Or  $\|x - y\| = 0 \iff x - y = 0$ . Donc  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ .
- (ii) Soit  $(x, y) \in E^2$ . On a  $d(y, x) = \|y - x\| = \|-(x - y)\| = |-1| \|x - y\| = d(x, y)$ .
- (iii) Soit  $(x, y, z) \in E^3$ . On a  $d(x, z) = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$ .

$\square$

### Définition 1.0.17 (Norme associée à un produit scalaire).

Soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien. On appelle *norme associée au produit scalaire*  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  l'application  $x \mapsto \sqrt{\langle x | x \rangle}$ .

**Remarque 1.0.18.** 1. Il est clair, par positivité du produit scalaire, que cette application est bien définie. La racine carrée étant à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , elle est de plus à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ . Il reste à voir si cette application est bien une norme.

2. La norme associée à un produit scalaire dépend évidemment du produit scalaire. Par exemple sur  $\mathbb{R}^2$ , les normes associées respectivement au produit scalaire usuel et au produit scalaire  $((x, y), (x', y')) \mapsto \frac{1}{2}xx' + 2yy'$  sont différentes (regarder par exemple les valeurs pour les vecteurs  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$ ).
3. On a directement que pour une famille  $(x_1, \dots, x_n)$  de vecteurs,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \langle x_i | x_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \langle x_i | x_j \rangle. \end{aligned}$$

Pour deux vecteurs, on retrouve  $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2 \langle x | y \rangle + \|y\|^2$ .

Dans tout ce qui suit, sauf mention expresse du contraire,  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  désigne un espace vectoriel préhilbertien, et  $\|\cdot\|$  la norme associée à son produit scalaire.

### Proposition 1.0.19.

Soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien et  $\|\cdot\|$  la norme associée. On a

1.  $\forall x \in E \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$  ;
2.  $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in E \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ .

**Démonstration.** 1. Soit  $x \in E$ . On a  $\|x\| = 0 \iff \langle x | x \rangle = 0$ .  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  étant un produit scalaire, on a donc  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ .

2. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $x \in E$ . On a  $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x | \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x | x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x | x \rangle}$ .

□

Avec ce qui précède, il suffit maintenant de démontrer que  $\|\cdot\|$  vérifie l'inégalité triangulaire pour démontrer qu'il s'agit bien d'une norme. Pour cela, on démontre tout d'abord le théorème suivant.

### Théorème 1.0.20 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

Soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien et  $\|\cdot\|$  la norme associée. Alors pour tout  $(x, y) \in E^2$ , on a

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

L'égalité a lieu si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

#### Démonstration.

Soient  $x, y \in E$ . Pour  $y = 0$  le résultat est évident. Sinon, on peut donner deux démonstrations

**Géométrique** Posons  $u = \frac{1}{\|y\|} y$ . On vérifie aisément  $\|u\| = 1$ . Posons alors  $x' = \langle x | u \rangle u$  et  $x'' = x - x'$  (faire un dessin). On a alors

$$\langle x' | x'' \rangle = \langle x' | x \rangle - \langle x' | x' \rangle = \langle x | u \rangle^2 - \langle x | u \rangle^2 = 0.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|x' + x''\|^2 = \|x'\|^2 + 2 \langle x' | x'' \rangle + \|x''\|^2 \\ &= \|x'\|^2 + \|x''\|^2 \\ &\geq \|x'\|^2. \end{aligned}$$

On en déduit  $\|x\| \cdot \|y\| \geq \|x'\| \cdot \|y\|$ . Or on a :

$$\begin{aligned} \|x'\| \cdot \|y\| &= |\langle x | u \rangle| \cdot \|y\| \\ &= |\langle x | y \rangle|. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

**Algébrique** pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a :  $\|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t \langle x | y \rangle + t^2 \|y\|^2$ . C'est un polynôme toujours positif, donc son discriminant est négatif ou nul.

Il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si ce discriminant est nul, donc si et seulement si ce polynôme a une racine réelle, donc si et seulement si il existe  $t$  tel que [à vous de l'écrire], donc si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

**Une idée calculatoire astucieuse** Si  $x = 0$  ou  $y = 0$ , le résultat est évident. Sinon, on remarque que  $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$  et l'on écrit ( $\pm$  signifie qu'on le fait pour  $+$  puis pour  $-$ ) :

$$0 \leq \left\| \frac{x}{\|x\|} \pm \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|^2 + \left\| \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \pm 2 \frac{\langle x | y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

ce qui donne

$$0 \leq 1 \pm \frac{\langle x | y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

et c'est fini !

□

**Proposition 1.0.21** (Inégalité triangulaire).

Soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien,  $x, y \in E$ . Alors,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

De plus, on a l'égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires et de même sens.

**Démonstration.**

On a  $\|x + y\|^2 = \langle x + y | x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x | y \rangle + \|y\|^2$ . Or  $(\|x\| + \|y\|)^2 = \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2$  et  $\langle x | y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$ , donc  $\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$ .  $\|x + y\|$  et  $\|x\| + \|y\|$  étant positifs, on en déduit le résultat.

L'égalité a lieu si et seulement si  $\langle x | y \rangle = \|x\| \cdot \|y\|$ . Pour cela, il est nécessaire d'avoir  $\langle x | y \rangle \geq 0$  (car le produit de deux normes est positif ou nul) et  $x$  et  $y$  colinéaires (cas d'égalité de Cauchy-Schwarz), donc il est nécessaire que  $x$  et  $y$  soient colinéaires — l'un s'écrit comme produit de l'autre par un scalaire — et de même sens — ce scalaire est positif ou nul. Cette condition est clairement suffisante.  $\square$

**Théorème 1.0.22.**

Soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien,  $x, y \in E$ .

1. Identité du parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

2. Identité de polarisation :

$$\begin{aligned} \langle x | y \rangle &= \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2). \end{aligned}$$

**Remarque 1.0.23.**

Faire le dessin d'un parallélogramme, on utilise le théorème d'Al-Kashi deux fois (une par hypothénuse).

**Démonstration.**

Il suffit de développer les normes.  $\square$

**Remarque 1.0.24.**

Ces identités permettent de retrouver l'expression du produit scalaire quand on ne connaît que la norme.

**Exemple 1.0.25.**

Existe-t-il un produit scalaire donnant la norme  $\|(x, y)\|^2 = (x + y)^2 + x^2$  ?

**2 Orthogonalité.**

Soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un ev préhilbertien et  $\|\cdot\|$  la norme associée.

**2.1 Premières définitions.****Définition 2.1.1.**

Soient  $x, y \in E$ . On dit que  $x$  est *unitaire* (ou *normé*) si  $\|x\| = 1$ . On dit que  $x$  et  $y$  sont *orthogonaux* et l'on note  $x \perp y$  si  $\langle x | y \rangle = 0$ .

**Remarque 2.1.2.**

Si  $x \neq 0_E$ , il y a exactement deux vecteurs unitaires colinéaires à  $x$ .

**Exemple 2.1.3.**

- Tout vecteur est toujours orthogonal au vecteur nul.
- Dans  $\mathbb{R}^2$  muni du produit scalaire usuel,  $(1, 3)$  et  $(-6, 2)$  sont orthogonaux.
- Dans  $\mathbb{R}^2$  muni du produit scalaire  $(x, y) \cdot (x', y') = 2xx' - xy' - x'y + 3yy'$ , les vecteurs  $(1, 1)$  et  $(2, -1)$  sont orthogonaux.

**2.2 Familles orthogonales.****Définition 2.2.1.**

Une famille de vecteurs est dite *orthogonale* s'ils sont 2 à 2 orthogonaux. Si les vecteurs sont de plus unitaires, la famille est dite *orthonormale* (ou *orthonormée*).

**Exemple 2.2.2.**

Les  $f_n : x \mapsto \cos(nx)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , forment une famille orthogonale pour le produit scalaire usuel de  $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ .

**Théorème 2.2.3** (Pythagore).

Soit  $(v_1, \dots, v_n)$  une famille orthogonale de  $n$  vecteurs. Alors  $\left\| \sum_{k=1}^n v_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|v_k\|^2$ .

**Démonstration.**

On développe le produit scalaire :  $\left\| \sum_{k=1}^n v_k \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle v_i | v_j \rangle$ .  $\square$

**Exemple 2.2.4.**

Dans  $\mathbb{R}^3$  muni du produit scalaire usuel, on pose  $v_1 = (1, 2, 3)$ ,  $v_2 = (-5, 1, 1)$  et  $v_3 = (-1, -16, 11)$ . Vérifier que la famille  $(v_1, v_2, v_3)$  est orthogonale et s'assurer que l'égalité donnée par le théorème de Pythagore est vérifiée.

**Théorème 2.2.5.**

Toute famille orthogonale ne comportant **aucun vecteur nul** est libre.

**Démonstration.**

Soient  $\lambda_k$  tels que  $\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k = 0$ . Alors pour tout  $i$ ,  $\left\langle \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k \mid v_i \right\rangle = 0$  or quand on développe la somme on a  $\lambda_i \langle v_i | v_i \rangle$ .  $\square$

**Remarque 2.2.6.**

Toute famille orthonormale est une famille orthogonale ne comportant aucun vecteur nul.

**Corollaire 2.2.7.**

Toute famille orthogonale ne comportant **aucun vecteur nul** et de cardinal  $\dim E$  est une base de  $E$ .

**Exemple 2.2.8.**

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  forment une famille orthogonale, et donc une base de  $\mathbb{R}^3$ .

**Théorème 2.2.9** (orthonormalisation de Gram-Schmidt).

On suppose  $E$  euclidien de dim  $n$ . Soit  $(u_1, \dots, u_n)$  une base de  $E$ . Alors il existe une base  $(v_1, \dots, v_n)$  de  $E$  telle que :

1.  $(v_1, \dots, v_n)$  est orthonormale ;
2. pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k).$$

Les  $v_k$  sont uniques au signe près et on peut

$$\text{choisir : } v_k = \frac{u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k | v_i \rangle v_i}{\left\| u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k | v_i \rangle v_i \right\|}.$$

**Démonstration.**

Explication pour le choix de  $v_1$ .

• Analyse : on suppose la famille construite jusqu'au rang  $k$ . Construisons le  $k+1^{\text{e}}$  vecteur.

Il faut choisir  $v_{k+1}$  dans  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k, u_{k+1})$  :  $v_{k+1} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \mu u_{k+1}$ .  $\langle v_{k+1} | v_j \rangle = 0$  donne  $\lambda_j + \mu \langle u_{k+1} | v_j \rangle = 0$ , donc  $v_{k+1} = \mu \left( - \sum_{i=1}^k \langle u_{k+1} | v_i \rangle v_i + u_{k+1} \right)$ . Reste à choisir  $\mu$  pour

avoir  $\|v_{k+1}\| = 1$  (2 choix possibles).

• Synthèse : on a vu unicité au signe près. On vérifie que les vecteurs trouvés conviennent bien.  $\square$

**Exemple 2.2.10.**

Orthonormaliser  $(1, X, X^2)$  pour le produit scalaire de  $\mathbb{R}_2[X]$ ,  $\langle P | Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ . On trouve  $(P_1, P_2, P_3)$ , où

$$P_1 = 1,$$

$$P_2 = \frac{X - 1/2}{1/(2\sqrt{3})} = \sqrt{3}(2X - 1),$$

$$P_3 = \frac{X^2 - X + 1/6}{\|\dots\|} = \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1).$$

**Corollaire 2.2.11.**

Tout espace euclidien a une base orthonormale. Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

**Démonstration.**

Pour l'existence, il suffit d'orthonormaliser une base quelconque.

Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une famille orthonormale de  $E$ . On peut la compléter en base de  $E$  :  $(e_1, \dots, e_p, e'_{p+1}, \dots, e'_n)$ .

On orthonormalise ensuite cette base : pour les  $p$  premiers vecteurs, on a à chaque fois le choix entre  $e_i$  et  $-e_i$ , on choisit bien entendu  $e_i$ .

On obtient donc une base orthonormée de  $E$  dont les  $p$  premiers vecteurs sont  $e_1, \dots, e_p$ .  $\square$

**Proposition 2.2.12.**

[Coordonnées dans une base orthonormale]  $E$  euclidien,  $(v_1, \dots, v_n)$  base orthonormale de  $E$ .

Alors, pour tout  $x \in E$ ,  $x = \sum_{k=1}^n \langle x | v_k \rangle v_k$ .

**Démonstration.**

Soit  $x \in E$ , soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tels que  $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k$ . Si  $1 \leq k \leq n$ , on a par bilinéarité du produit scalaire

$$\begin{aligned} \langle x | v_k \rangle &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle v_i | v_k \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{i,k} \\ &= \lambda_k. \end{aligned}$$

 $\square$ **Exemple 2.2.13.**

Trouver les coordonnées de  $(1, -3)$  dans la base  $\left( \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) \right)$  (pour le produit scalaire usuel).

**Exercice 2.2.14.**

Exprimer la formule de la proposition 2.2.12 dans le cas où  $(v_1, \dots, v_n)$  base orthogonale de  $E$ .

**Proposition 2.2.15** (Expression du produit scalaire dans une base orthonormale).

Soit  $E$  euclidien,  $(v_1, \dots, v_n)$  une base orthonormale de  $E$ .  $x$  et  $y$  de coordonnées  $(x_i)$  et  $(y_i)$  dans la base  $(v_1, \dots, v_n)$ . Alors  $\langle x | y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ .

**Corollaire 2.2.16.**

Avec les mêmes notations,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

**Remarque 2.2.17.**

Tous les produits scalaires ont la même expression «usuelle» à condition de se placer dans une base orthonormale **pour ce produit scalaire**.

**Remarque 2.2.18.**

Ces formules d'adaptent encore dans le cas de bases orthogonales.

**2.3 Sous-espaces vectoriels orthogonaux.****Définition 2.3.1.**

Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On dit que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces orthogonaux et on écrit  $F \perp G$  si

$$\forall x \in F \quad \forall y \in G \quad x \perp y.$$

**Exemple 2.3.2.**

Dans  $\mathbb{R}^3$  avec le produit scalaire usuel,  $\text{Vect}(1, -1, 0) \perp \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 0, 1))$ .

**Remarque 2.3.3.**

Si  $F$  et  $G$  sont orthogonaux, alors ils sont en somme directe. En effet, soit alors  $x \in F \cap G$ . On a alors  $x \perp x$ , donc  $\langle x | x \rangle = 0$ , donc  $x = 0$ . Donc  $F \cap G \subset \{0\}$ , d'où on déduit le résultat.

**Théorème 2.3.4.**

Soient  $F$  et  $G$  deux sev de dimension finies de  $E$ . On note  $(f_1, \dots, f_q)$  une famille génératrice de  $F$  et  $(g_1, \dots, g_p)$  une famille génératrice de  $G$ . Alors  $F \perp G$  si et seulement si pour tout  $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$  on a  $\langle f_i | g_j \rangle = 0$ .

**Démonstration.**

( $\Rightarrow$ ) par définition de  $F \perp G$ .

( $\Leftarrow$ ) soient  $f = \sum \lambda_i f_i$  et  $g = \sum \mu_j g_j$ . Alors  $\langle f | g \rangle = \sum_i \sum_j \lambda_i \mu_j \langle f_i | g_j \rangle = 0$ .  $\square$

**Définition 2.3.5.**

Soit  $X$  une partie (quelconque) de  $E$ . On appelle *orthogonal* de  $X$  et on note  $X^\perp$  (ou  $X^o$ ) l'ensemble  $\{y \in E \mid \forall x \in X \langle x | y \rangle = 0\}$ .

**Proposition 2.3.6.**

Soit  $X$  une partie de  $E$ . Alors

1.  $X^\perp$  est un sev de  $E$ ;
2. Pour toute partie  $Y$  de  $E$  telle que  $X \subset Y$ , on a  $Y^\perp \subset X^\perp$ ;
3.  $X \subset (X^\perp)^\perp$ .

**Démonstration.** 1. On a  $0 \in X^\perp$  car 0 est orthogonal à tout vecteur, donc à tout vecteur de  $X$ ; de plus toute combinaison linéaire de vecteurs orthogonaux à tout vecteur de  $X$  est orthogonale à tout vecteur de  $X$ .

Sinon, il suffit de voir que

$$X^\perp = \bigcap_{x \in X} \text{Ker } \langle x | \cdot \rangle.$$

2. Tout élément de  $Y^\perp$  est orthogonal à tout vecteur de  $Y$ , donc a fortiori à tout vecteur de  $X$ .
3. Soit  $x$  un vecteur de  $X$ . Tout vecteur de  $X^\perp$  est orthogonal à tout vecteur de  $X$ , donc en particulier à  $x$ . Donc  $x$  est orthogonal à tout vecteur de  $X^\perp$ , donc appartient à  $(X^\perp)^\perp$ .  $\square$

**Remarque 2.3.7.**

Il n'y a pas forcément égalité dans le dernier point. Par exemple, avec  $X = \emptyset$ ,  $(X^\perp)^\perp = \{0\}$ .

**Théorème 2.3.8.**

Soit  $F$  un sev de  $E$ . Alors  $F^\perp$  est le plus grand sous-espace vectoriel orthogonal à  $F$  (et  $F$  et  $F^\perp$  sont de plus en somme directe).

Si de plus  $E$  est euclidien, alors  $E = F \oplus F^\perp$  et  $F^\perp$  est l'unique sous-espace vectoriel  $G$  vérifiant  $E = F \oplus G$  et  $F \perp G$ . C'est pourquoi on appelle  $F^\perp$  le supplémentaire orthogonal de  $F$  dans  $E$ .

De plus, dans le cas euclidien, on a  $F = (F^\perp)^\perp$ .

**Démonstration.**

On sait déjà que  $F^\perp$  est un sous-espace vectoriel.  $F$  et  $F^\perp$  sont clairement orthogonaux (donc en somme directe) et de plus pour tout sous-espace vectoriel  $G$  tel que  $F$  et  $G$  sont orthogonaux, tout élément  $x$  de  $G$  est orthogonal à tout élément de  $F$ , donc appartient à  $F^\perp$ , donc  $G \subset F^\perp$ .

Supposons de plus que  $E$  est euclidien. Alors le sous-espace vectoriel  $F$  est aussi un espace vectoriel euclidien, donc possède une base orthonormale  $(f_1, \dots, f_q)$ . Cette base est une famille orthonormale de  $E$ , qu'on peut compléter en une base orthonormale  $(f_1, \dots, f_q, g_1, \dots, g_p)$  de  $E$ . Posons  $G = \text{Vect}(g_1, \dots, g_p)$ . On a alors  $\dim E = p + q = \dim F + \dim G$ . De plus pour tout  $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$  et tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on a  $f_i \perp g_j$ , donc  $F \perp G$ , donc  $G \subset F^\perp$ . Donc  $\dim E \leq \dim F + \dim F^\perp$ . Or  $F$  et  $F^\perp$  sont en somme directe, donc  $\dim(F \oplus F^\perp) \leq \dim E$ , donc  $G = F^\perp$  et  $E = F \oplus F^\perp$  (et de plus,  $F^\perp = \text{Vect}(g_1, \dots, g_p)$ ).

On en déduit,  $\dim(F^\perp)^\perp = \dim E - \dim F^\perp = \dim F$ . Or on sait qu'on a  $F \subset (F^\perp)^\perp$ , donc  $F = (F^\perp)^\perp$ .  $\square$

**Remarque 2.3.9 (Important).**

Le résultat ne se généralise pas à des espaces préhilbertiens  $E$  qui ne sont pas de dimension finie. Dans ce cas (non euclidien), on peut trouver des sous-espaces vectoriels  $F$  tels que  $F$  et  $F^\perp$  ne soient pas supplémentaires et tels que  $(F^\perp)^\perp \neq F$  (on peut même trouver  $F$  tel que  $F \neq E$  et  $F^\perp = \{0\}$ ). On verra ce résultat en exercice dans le cas de  $\mathbb{R}[X]$ .

**Remarque 2.3.10 (Culturelle).**

En revanche, pour toute partie  $X$  d'un espace préhilbertien, on a toujours  $\left((X^\perp)^\perp\right)^\perp = X^\perp$  (une inclusion est la conséquence du fait que  $(X^\perp)^\perp$  contient  $X$  et qu'en conséquence leurs orthogonaux sont inclus dans l'autre sens; l'autre inclusion vient du fait que le biorthogonal de  $X^\perp$  contient  $X^\perp$ ).

**Exemple 2.3.11.**

On pose, pour tout couple  $(P, Q)$  d'éléments de  $\mathbb{R}_2[X]$ ,  $\langle P | Q \rangle = P'(1)Q'(1) + P(-1)Q(-1) +$



$P(0)Q(0)$ . Vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire et trouver  $\mathbb{R}_1[X]^\perp$  dans  $\mathbb{R}_2[X]$ .

### Exercice 2.3.12.

On considère dans  $\mathbb{R}[X]$  le sev  $F = \text{Vect}(1+X, 1+X^2, \dots, 1+X^n, \dots)$ . On rappelle qu'un hyperplan est un sev admettant un supplémentaire de dimension 1.

On munit  $\mathbb{R}[X]$  du produit scalaire

$$\left( \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k, \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k.$$

1. Montrer que  $F$  est un hyperplan de  $\mathbb{R}[X]$ .
2. Déterminer  $F^\perp$  pour le produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}[X]$ .
3. Quel résultat vrai en dimension finie est ici mis en défaut ?

DANS TOUTE LA SUITE,  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  EST UN ESPACE VECTORIEL EUCLIDIEN DE DIMENSION  $n$ .

## 2.4 Formes linéaires et hyperplans d'un espace euclidien.

**Théorème 2.4.1** (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet).

Soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  euclidien. Soit  $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ . Alors il existe un unique  $v_f \in E$  vérifiant  $\forall x \in E$   $f(x) = \langle v_f | x \rangle$  ou encore  $f = \langle v_f | \cdot \rangle$ .

On trois preuves de ce résultats.

**Démonstration** (Preuve géométrique.).

La forme linéaire  $f$  est définie par son noyau (hyperplan  $H$ ) et la valeur prise sur un vecteur qui n'est pas dans le noyau.

De même,  $(\text{Vect } v_f)^\perp$  est de dimension  $n-1$ , donc c'est un hyperplan. Si on choisit  $v_f$  vecteur normal à  $H$ , alors  $f$  et  $\langle v_f | \cdot \rangle$  sont des formes linéaires de même noyau, donc sont proportionnelles. La norme de  $v_f$  est alors choisie de sorte qu'elle corresponde avec la valeur précédente de  $f$  sur un vecteur qui n'est pas dans le noyau.  $\square$

**Démonstration** (Preuve algébrique.).

On considère l'application

$$\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ v & \longmapsto (x \mapsto \langle v | x \rangle) \end{cases}.$$

Par bilinéarité du produit scalaire,  $\varphi$  est linéaire. De plus, avec  $v_1, v_2 \in E$ , si  $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$ , alors pour tout  $x \in E$ ,  $\langle v_1 | x \rangle = \langle v_2 | x \rangle$ , i.e. pour tout  $x \in E$ ,  $\langle v_1 - v_2 | x \rangle = 0$ , donc  $v_1 - v_2 \in E^\perp$ .

Or  $E^\perp = \{0\}$  car pour tout  $x \in E^\perp$ ,  $\langle x | x \rangle = 0$ . Donc  $v_1 = v_2$  et  $\varphi$  est injective.

Mais comme  $\dim E = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ , alors  $\varphi$  est un isomorphisme. D'où le résultat.  $\square$

**Démonstration** (Preuve matricielle.).

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ . Notons

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},1}(f) = (a_1 \quad \dots \quad a_n).$$

Posons

$$a = \sum_{i=1}^n a_i e_i.$$

Si  $x \in E$  est de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  dans  $\mathcal{B}$ , alors

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i = \langle a | x \rangle.$$

L'unicité se déduit immédiatement de la représentation matricielle.  $\square$

### Définition 2.4.2.

Soit  $H$  un hyperplan d'un espace euclidien, alors  $H^\perp$  est une droite vectorielle appelée *droite normale* à  $H$ .

Tout vecteur  $v$  vérifiant  $H^\perp = \text{Vect}(v)$  est appelé *vecteur normal* à  $H$ .

### Proposition 2.4.3.

Soit  $H$  un hyperplan d'un espace euclidien  $E$ , soit  $v \in E$ . Alors  $v$  est un vecteur normal à  $H$  si et seulement si  $v \neq 0_E$  et  $v \in H^\perp$ .

**Démonstration.**

Immédiat.  $\square$

### Remarque 2.4.4.

Si  $H$  est un hyperplan de  $E$ , considérons  $f$  une forme linéaire non nulle telle que  $H = \text{Ker}(f)$ . Il existe alors  $v \in E$  tel que  $f = \langle v, \cdot \rangle$ .

Alors,  $v$  est un vecteur normal à  $H$ .

**Remarque 2.4.5** (Écriture matricielle du produit scalaire).

Soit  $e = (e_1, \dots, e_n)$  base orthonormale de  $E$ ,  $x$  et  $y$  des vecteurs de matrices (dans  $e$ )  $X$  et  $Y$ .

Alors  $\langle x | y \rangle = {}^t X.Y$ .

Dans le cadre d'application du théorème de Riesz-Fréchet, on a  $f(x) = {}^t V_f.X$ , et ainsi  $\text{Mat}_e(f) = {}^t \text{Mat}_e(v_f)$ . Les points de vue se rejoignent.

## 2.5 Symétries et projecteurs orthogonaux.

### Définition 2.5.1.

On appelle *projection orthogonale* (resp. *symétrie orthogonale*) toute projection (resp. symétrie) sur un (resp. par rapport à un) sev  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ .

### Proposition 2.5.2.

Un projecteur  $p$  est orthogonal si et seulement si  $\text{Im } p \perp \text{Ker } p$ . Une symétrie  $s$  est orthogonale si et seulement si  $\text{Ker}(s - \text{Id}) \perp \text{Ker}(s + \text{Id})$ .

#### Démonstration.

Direct.  $\square$

**Théorème 2.5.3** (expression d'un projecteur orthogonal dans une base orthonormée).

Soit  $F$  sev d'un ev euclidien  $E$ . Soit  $(f_1, \dots, f_p)$  une base orthonormale de  $F$ . Soit  $x \in E$ . Le projeté orthogonal de  $x$  sur  $F$  est  $p(x) = \sum_{i=1}^p \langle x | f_i \rangle f_i$ .

#### Démonstration.

On complète  $(f_1, \dots, f_p)$  en une base orthonormale de  $E$  notée  $(f_1, \dots, f_n)$ . Alors  $(f_{p+1}, \dots, f_n)$  est une base de  $F^\perp$

( $\perp$  + dimension). Donc  $x = \sum_{i=1}^n \langle x | f_i \rangle f_i$ , donc somme

d'un élément de  $F$  et d'un élément de  $F^\perp$  : cet élément de  $F$  est le projeté de  $x$  sur  $F$ .  $\square$

### Exemple 2.5.4.

Déterminer la projection orthogonale (et la symétrie orthogonale) de  $(2, 1)$  sur  $\text{Vect}(-1, 2)$ , ainsi que sur son supplémentaire orthogonal, pour le produit scalaire

$$((x_1, y_1) | (x_2, y_2)) = 5x_1x_2 + 2y_1x_2 + 2x_1y_2 + y_1y_2.$$

### Remarque 2.5.5.

On peut ré-écrire le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt comme suit.

Avec  $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ , en notant  $p_k$  le projeté de  $e_{k+1}$  sur  $F_k$ , on procède comme suit.

- On renormalise  $e_1$  pour obtenir  $v_1$ .
- Pour chaque  $1 \leq k \leq p-1$ , on remarque que  $e_{k+1} - p_k \in F_k^\perp$ . On renormalise donc  $e_k - p_k$  pour obtenir  $v_{k+1}$ .

## 2.6 Distance à un sous ev.

**Définition 2.6.1** (distance d'un point à une partie d'un espace euclidien).

Soit  $A$  une partie de  $E$  et  $x \in E$ . On appelle distance de  $x$  à  $A$  et on note  $d(x, A)$  le réel  $\inf_{a \in A} d(x, a)$ .

### Théorème 2.6.2.

Soit  $F$  un sev de  $E$ . Alors la distance de  $x$  à  $F$  est atteinte en un seul point, qui est la projection orthogonale de  $x$ . De plus :  $d(x, F)^2 = \|x - p(x)\|^2$ . En particulier  $d(x, F) = 0$  si et seulement si  $x \in F$ .

#### Démonstration.

Soit  $f \in F$ . On a la décomposition dans  $F^\perp \oplus F$  :  $x - f = x - p(x) + p(x) - f$ . On conclut en appliquant le théorème de Pythagore.  $\square$

### Exemple 2.6.3.

Le minimum de la fonction

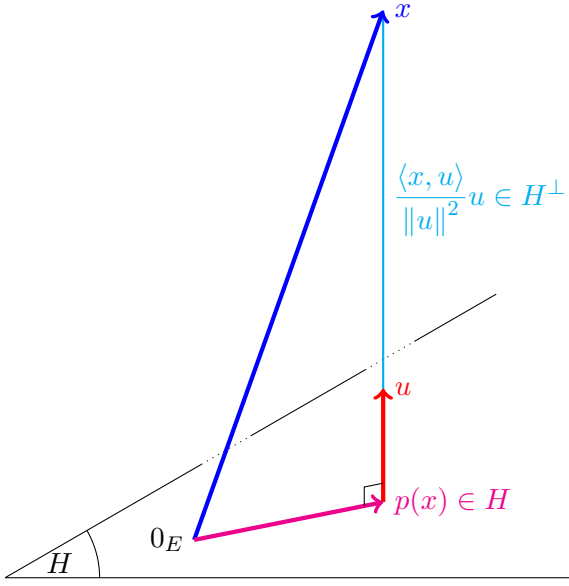
$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) & \mapsto \int_0^1 (-a - bx + x^2)^2 dx \end{cases}$$

est atteint pour  $a = -1/6$  et  $b = 1$  et vaut  $1/180$ .

## 2.7 Distance et projection sur un hyperplan

Dans toute cette partie,  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  désigne un espace euclidien,  $H$  un hyperplan de  $E$  et  $u$  un vecteur normal à  $E$ .

Notamment,  $H = \text{Vect}(u)^\perp$ .


 FIGURE 1 – Projection orthogonale sur un hyperplan  $H$ .

**Proposition 2.7.1** (voir figure 1).

 Soit  $x \in E$ , le projeté orthogonal de  $x$  sur  $H$  est

$$p(x) = x - \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u.$$

 La distance de  $x$  à  $H$  est

$$d(x, H) = \frac{|\langle x, u \rangle|}{\|u\|}.$$

**Démonstration.**

Il suffit d'observer que

$$x = x - \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u + \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u$$

et que

$$\langle x - \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u, u \rangle = \langle x, u \rangle - \langle x, u \rangle = 0,$$

donc que

$$x - \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u \in H.$$

On peut aussi observer que  $\frac{u}{\|u\|}$  est une b.o.n. de  $H^\perp$ , et donc que  $\frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u$  est le projeté orthogonal de  $x$  sur  $\text{Vect}(u)$ . Ainsi,  $x - \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u$  est le projeté orthogonal de  $x$  sur  $\text{Vect}(u)^\perp$ .  $\square$

**Corollaire 2.7.2.**

 Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une b.o.n. de  $E$ , dans laquelle on écrit

$$u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n,$$

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

 Alors, la distance de  $x$  à  $H$  est

$$\frac{|x_1 u_1 + \dots + x_n u_n|}{\sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}}.$$

**Démonstration.**

 Immédiat.  $\square$