Devoir surveillé n° 08 - Remarques

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 28 points, ramené sur 5 points.
- Problèmes : exercice vu en TD sur 4 points, et les autres questions sur 4 points (v1 sur 84 points, v2 sur 108 points), ramené sur 15 points.

Statistiques descriptives.

	Calculs	Sujet 1 (sur 84)	Sujet 2 (sur 108)	Note finale
Note maximale	24	58	41	19
Note minimale	1	13	8	3
Moyenne	$\approx 9,81$	$\approx 37,32$	$\approx 22,45$	$\approx 9,82$
Écart-type	$\approx 4,56$	$\approx 10,84$	$\approx 8,69$	$\approx 3,21$

Remarques générales.

• Puisque décidément ça ne veut pas rentrer, j'ai enlevé un point sur 4 à chaque question dans laquelle il manquait un dx dans une intégrale, un n ou x ou autre chose n'était pas quantifié, ou une suite (u_n) était écrite u_n ; et j'ai mis 0 à la question quand le résultat n'était pas encadré ou qu'il était écrit que $f(x)$ était croissante, continue ou autre chose du même genre. Je suis épuisé de vous reprendre sur ces points.
• Pour la plupart, vous avez fait des efforts de présentation et vos copies sont claires et lisibles. Pour les récalcitrants, voici quelques morceaux choisis de rapports.
« Les candidats qui ont cédé à la facilité d'une rédaction bâclée ont été systématiquement sanctionnés. » (Centrale 2016, Maths 1)
« Les théorèmes doivent être connus et utilisés en vérifiant précisément les hypothèses. Les démonstrations et les calculs doivent figurer sur les copies et être d'autant plus détaillés que le résultat est donné. Rappelons que la présentation et la rédaction sont évaluées. Le manque de soin est systématiquement sanctionné. Il est par ailleurs indispensable de mettre en valeur les résultats, par exemple en les encadrant. » (Centrale 2015, Maths 2)
« Le jury ne peut que rappeler aux candidats qu'il est toujours utile et profitable de prendre un peu de temps pour comprendre l'architecture du problème et le lien entre les questions [...] La présence massive d'abréviations, de phrases sans verbe, de ratures ou l'emploi du blanc correcteur (sur du papier rose, ce n'est pas très discret ...) compliquent la tâche du correcteur, qui doit parfois interpréter ce qu'il lit. Et cette interprétation est rarement favorable au candidat. Le jury est toujours plus conciliant avec des copies bien présentées et des résultats encadrés. » (Centrale 2014, Maths 1)

I. Version 1

B). ECRICOME 2005.

Certains ont écrit « si $x > 1$, alors $I_n \leqslant 0$, sinon [...] ». Quelle HORREUR ! I_n ne dépend pas de x, qui est la variable d'intégration.
D'autres, dans le même ordre d'idée, ont pris I_n pour une fonction.
Enfin, quand vous utilisez une intégration par parties, il faut le dire ! Et si possible en toutes lettres, pas en utilisant « IPP » dans un coin.

2) (I_n) est une suite, c'est même écrit dans la question ! Donc il faut étudier le signe de $I_{n+1} - I_n$. En particulier, le fait que φ_n soit décroissante n'a absolument rien à voir avec la décroissance de (I_n). Par exemple, regardez ce qu'il se passe si l'on pose $\varphi_n(x) = -x + n$ ...
Certains ont voulu montrer que (I_n) était strictement décroissante. Cela partait d'une très bonne intention. Pour cela, ils ont montré que $\varphi_{n+1} - \varphi_n$ était négative, et prenait en un point une valeur strictement négative, et ils ont conclu que $\displaystyle\int_0^1 \varphi_{n+1} - \varphi_n < 0$. Et devinez quoi ? Malgré un milliard d'avertissements sur ce point, ils ont oublié de mentionner que $\varphi_{n+1} - \varphi_n$ était **continue** ! ! ! !

3) Là aussi certains ont voulu montrer que $I_n > 0$, avec la même erreur dans la remarque précédente.

4) Ne pas répondre entièrement à cette question, ou de manière erronée, est inquiétant.

C). E3A 2014 - Endomorphismes de carré nul.

1) La définition de sev stable n'est pas toujours connue.

3) Ne tirer de la question **2)** que : $\operatorname{rg} u \leqslant \dim \operatorname{Ker} u$ est juste mais très insuffisant : 1 point sur 4. Dire que l'on obtient cela grâce au théorème du rang est faux : 0 sur 4.

4.b.i) Pensez à utiliser la question **1)** !

5.a) Quasiment tous ceux qui ont traité cette question ont passé des pages à démontrer que les F_i étaient des sev, en montrant qu'ils étaient stables par combinaisons linéaires ! Certains ont même poussé le vice à le faire par réccurence (ce qui menait à une démonstration soit fausse, soit n'utilisant pas l'hypothèse de récurrence) ! Les F_i sont des images d'endomorphismes donc ce sont des sev, c'est du cours ! ! ! !

II. Version 2

A). E3A 2014 - Étude d'intégrales.

1) Le cas $n = 0$ est trop souvent oublié, ou alors vous y pensez après avoir dérivé f_n, ce qui est trop tard.
Pour le sens de variation de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, dériver la fonction est absolument inutile. Par composition de fonctions basiques, elle est évidemment décroissante.

2) D'une part vos graphiques sont affreux, comme d'habitude. D'autre part, dans quasiment tous les cas, vous faites un dessin et il n'y a rien d'autre. Comment obtenez-vous ces graphes ? Mystère ... Et en général ils sont faux. Ici il était indispensable de connaîtres les pentes des tangentes en 0 et en 1, et pour cela il fallait calculer les dérivées des fonctions en 0 et en 1. Ces calculs et justifications doivent apparaître dans les copies.

Pour la monotonie, mêmes erreurs que dans la version 1 : pour la décroissance, $f_{n+1} \leqslant f_n$ et la croissance de l'intégrale suffisent. La continuité des fonctions ne sert à rien. Si vous voulez montrer la stricte décroissance, il vous faut de plus savoir qu'en au moins un point on a $f_{n+1} < f_n$, et il FAUT la continuité de ces fonctions.

Pour le calcul de la limite, j'ai trop souvent vu : $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\displaystyle\int_0^1 x_n \, \mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Cela revient à écrire : $\lim(\displaystyle\int f_n) = \int(\lim f_n)$, ce qui est totalement faux en général, et n'a jamais été vu en cours : c'est une abominable invention (mais tellement pratique ...).

3) L'abréviation IPP (comme toutes le autres) est bannie à l'écrit. Et une fois de plus, il y a deux parties, donc c'est une intégration par partie**S**.

6) Que d'erreurs de calcul ... vous ne savez pas manipuler les parenthèses, alors le facteur $\dfrac{1}{2}$ qui apparaissait au début du calcul ne se retrouve en facteur qu'un d'un seul terme après vos IPP.

7) Le piège : $\dfrac{\alpha}{n+1} + \dfrac{\beta}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{n^2} + o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ est FAUX ! En effet, $\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n}.\dfrac{1}{1+1/n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$.

B). Endomorphismes cycliques.

Ici il n'y pas de $\mathbb{K}$: le corps de base est $\mathbb{R}$, lisez l'énoncé !

1) Lisez bien **toute** la question et répondez à **tout** ce qui est demandé.

2) Écrire « on a aisément $g^k \in \mathscr{C}(f)$ » sans plus d'explication ne rapporte pas de point (en général, les phrases avec « trivial », « facile » et autres adjectifs du même genre sont très mal vues). Rajouter que cela était dû à la stabilité par composition et pouvait se montrer par récurrence pouvait suffire, sans avoir à détailler la récurrence.

3) Question massacrée. J'ai eu droit à toutes sortes d'arguments douteux. Un seul raisonnement était valable : faire intervenir une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$. De toute façon, pas besoin de réfléchir, ça doit être un réflexe : pour montrer l'existence d'un plus grand entier, c'est **toujours** ce théorème que l'on utilise. Et il ne s'appelle pas « théorème de la borne supérieure ».

4) Massacre également. Pour la liberté, on l'a déjà. Il fallait montrer que cette famille était génératrice.

Extraire une base finie d'une famille génératrice infinie n'est pas possible (revoir le cours : nous n'avons fait cela qu'à partir d'une famille génératrice finie).

Et cette famille n'est pas libre maximale : on sait qu'elle devient liée si on lui rajoute $f^p(a)$, et seulement ce vecteur, pas n'importe lequel.

5) Question très largement non comprise.

Utiliser que deux polynômes coïncidant en un certain nombre de points sont égaux était clairement hors de propos : g et h ne sont pas des polynômes de $\mathbb{R}[X]$.

8) Beaucoup d'imprécisions voire d'arnaques dans les calculs. Il faut montrer que les termes de degré n s'annulent, et que les termes de degré $n-1$ ne s'annulent pas.

9) Pour cette question et quelques questions suivantes, il était à peu près indispensable de montrer proprement que si $\deg P = n$, alors pour tout $k \leqslant n$, $\deg \Delta^k(P) = \deg P - k$. Certains ont énoncé clairement ce résultat mais sans le montrer. Passe encore ... Mais la plupart n'a écrit que des phrases floues ou incorrectes.

15) Écrire « $\mathscr{C}(D) = \mathscr{C}(\Delta)$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ » ne veut rien dire. Deux ensembles sont égaux, ou ils ne le sont pas. Ils ne sont pas « égaux sur un autre ensemble ». Il fallait parler des restrictions de D et Δ à $\mathbb{R}_n[X]$.