

Devoir à la maison n° 17

À rendre le 31 mars

On considère l'application f ainsi que les deux ensembles F et G suivants :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}^3 &\rightarrow \mathbb{K}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (2x + y + z, -x - z, x + y + 2z), \\ F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3, \quad x + y + z = 0\}, \\ G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3, \quad x = y = z\}. \end{aligned}$$

1) Étude de f :

- a) Justifier que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3)$.
- b) Calculer $\text{Ker}(f)$ et justifier que $\text{Im}(f) = \mathbb{K}^3$. En déduire que $f \in \mathcal{GL}(\mathbb{K}^3)$ et expliciter f^{-1} .
- c) Calculer f^2 . En déduire que $f^2 = 3f - 2\text{Id}_{\mathbb{K}^3}$.

2) Projecteurs associés à f : On pose $p = f - \text{Id}_{\mathbb{K}^3}$ et $q = 2\text{Id}_{\mathbb{K}^3} - f$.

- a) Vérifier que p et q sont des projecteurs de \mathbb{K}^3 puis que $\begin{cases} p + q = \text{Id}_{\mathbb{K}^3}, \\ 2p + q = f, \\ p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}^3)}. \end{cases}$
- b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^n = 2^n p + q$.
- c) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$, expliciter $f^n(x, y, z)$ en fonction de x, y, z et n .
- d) Calculer $f \circ (2^{-1}p + q)$ et $(2^{-1}p + q) \circ f$.
- e) En déduire que $f \in \mathcal{GL}(\mathbb{K}^3)$ et que $f^{-1} = 2^{-1}p + q$. Retrouver ainsi le résultat de la question 1.b.

3) Étude de F et G :

- a) Justifier que F et G sont des \mathbb{K} -sous-espaces vectoriels de \mathbb{K}^3 et exhiber une base de chaque de ces espaces.
- b) Montrer que $\mathbb{K}^3 = F \oplus G$.
- c) Expliciter le projecteur $p_{F//G}$ de \mathbb{K}^3 sur F parallèlement à G ainsi que le projecteur $p_{G//F}$ de \mathbb{K}^3 sur G parallèlement à F .

4) Application à l'étude de trois suites :

On considère trois suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$(u_0, v_0, w_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= u_n \sqrt{v_n w_n}, \\ v_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{u_n w_n}}, \\ w_{n+1} &= w_n \sqrt{u_n v_n}. \end{cases}$$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0, \quad v_n > 0, \quad w_n > 0$.

On considère alors les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de termes généraux $a_n = \ln(u_n), b_n = \ln(v_n)$ et $c_n = \ln(w_n)$.

Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{b_n + c_n}{2}, \\ b_{n+1} = -\frac{a_n + c_n}{2}, \\ c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} + c_n. \end{cases}$$

b) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}) = \frac{1}{2}f(a_n, b_n, c_n)$.

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (a_n, b_n, c_n) = \frac{1}{2^n}f^n(a_0, b_0, c_0)$.

d) A l'aide de la question 2)c), exprimer a_n, b_n, c_n en fonction de a_0, b_0, c_0 et n . Justifier la convergence des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et expliciter leurs limites respectives.

— FIN —