## Trigonométrie et complexes - un problème supplémentaire, corrigé

## Exercice 1

1) On utilise l'inégalité triangulaire :  $||z|-1|\leqslant t\leqslant |z|+1$ , et puisque |z|=1, il vient :

$$\boxed{0\leqslant t\leqslant 2}.$$

**2)** On a

$$t^2 = |1+z|^2 = (1+z)\overline{(1+z)} = 1 + \overline{z} + z + z\overline{z} = 1 + 2\operatorname{Re}(z) + |z|^2 = 2 + 2\operatorname{Re}(z),$$

donc

$$\boxed{\operatorname{Re}(z) = \frac{t^2 - 2}{2}}.$$

**3)** On a

$$\begin{aligned} \left| 1 - z + z^2 \right|^2 &= \left( 1 - z + z^2 \right) \overline{\left( 1 - z + z^2 \right)} \\ &= 1 - \overline{z} + \overline{z}^2 - z + z \overline{z} - z \overline{z}^2 + z^2 - z^2 \overline{z} + z^2 \overline{z}^2 \\ &= 1 + |z|^2 + |z^2|^2 - 2z - 2\overline{z} - z^2 - \overline{z}^2, \end{aligned}$$

d'où

$$1 - z + z^2 = 3 - 4 \operatorname{Re}(z) + 2 \operatorname{Re}(z^2)$$

4) Écrivons  $z = e^{i\theta}$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ . Alors  $z^2 = e^{i2\theta}$  donc  $\text{Re}(z^2) = \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$  d'où

$$Re(z^2) = 2Re(z)^2 - 1.$$

Il vient donc:

$$\operatorname{Re}(z^2) = 2\left(\frac{t^2 - 2}{2}\right)^2 - 1$$

et

$$\left|1 - z + z^{2}\right|^{2} = 3 - 4\operatorname{Re}(z) + 2\operatorname{Re}\left(z^{2}\right)$$

$$= 3 - 4 \cdot \frac{t^{2} - 2}{2} + 2 \cdot \left(2\left(\frac{t^{2} - 2}{2}\right)^{2} - 1\right)$$

$$= 9 - 6t^{2} + t^{4}$$

$$= (3 - t^{2})^{2},$$

d'où

$$|1 - z + z^2| = |3 - t^2|.$$

Finalement,

$$|1+z| + |1-z+z^2| = t + |3-t^2|$$

5) Soit  $f: t \mapsto t + |3 - t^2|$ . Si  $t \in [0, \sqrt{3}]$ , alors

$$f(t) = t - t^2 + 3 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}.$$

Ainsi, f est croissante sur [0, 1/2] et décroissante sur  $[1/2, \sqrt{3}]$ , et vaut 3 en 0,  $\frac{13}{4}$  en  $\frac{1}{2}$ , et  $\sqrt{3}$  en  $\sqrt{3}$ .

Si  $t \in \left[\sqrt{3}, 2\right]$ , alors

$$f(t) = t + t^2 - 3 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}.$$

Ainsi, f fonction est croissante sur  $[\sqrt{3}, 2]$ , et vaut  $\sqrt{3}$  en  $\sqrt{3}$  et 3 en 2.

On peut donc dresser le tableau de variation de  $t \mapsto t + |3 - t^2|$  (voir figure 1) et observer que cette fonction atteint son maximum  $\frac{13}{4}$  en  $\frac{1}{2}$ , et son minimum  $\sqrt{3}$  en  $\sqrt{3}$ .

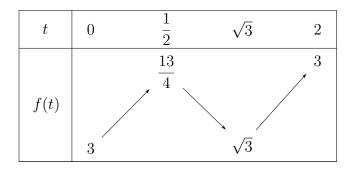


FIGURE 1 – Variations de  $t \mapsto t + |3 - t^2|$ .

Par conséquent,

$$\sqrt{3} \le |1+z| + |1-z+z^2| \le \frac{13}{4}$$
.

De plus, z réalise le minimum de |1+z| quand  $|1+z|=\sqrt{3}$ , et dans ce cas, d'après **2**),  $\operatorname{Re}(z)=\frac{(\sqrt{3})^2-2}{2}=\frac{1}{2}$ . Or |z|=1, donc  $\operatorname{Im}(z)=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$  donc  $z=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$  et  $z=\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$ . Alors,  $1-z+z^2=0$ , donc le minimum est bien atteint, et il l'est uniquement en ces deux points là.

Le minimum est atteint pour 
$$z = e^{i\frac{\pi}{3}}$$
 et  $z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ .