C3 : ANALYSE TEMPORELLE DES SYSTÈMES ASSERVIS

C3-1 - Analyse temporelle des systemes asservis du 1er ordre

16 Octobre 2018

Table des matières

I Système du premier ordre 1
1 Définitions . . . 1
2 Caractérisations de la réponse d'un système du premier ordre . . . 3
a) Réponse à un échelon . . . 3
b) Réponse à une rampe : . . . 5

Compétences

- **Modéliser :**
  - Proposer un modèle de connaissance et de comportement :
    > Systèmes linéaires continus et invariants;
    > Signaux canoniques d'entrée;
    > Schémas blocs;
    > Modèles de comportement.
- **Résoudre :** Proposer une démarche de résolution et mettre en oeuvre la résolution analytique :
  - Réponse fréquentielle des systèmes du 1er ordre
- **Expérimenter :** proposer, justifier et mettre en oeuvre un protocole expérimental
  - Prévoir les allures des réponses attendues;

I. Système du premier ordre

1 Définitions

Définition 1 : *Système du premier ordre*

On appelle **système du premier ordre** tout système linéaire, continu et invariant régi par une équation différentielle du premier degré de la forme :

$$\boxed{\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K\, e(t).} \quad (1)$$

Remarque 1 :

Pour la suite du cours, on considérera que les **conditions initiales de s(t) sont toujours nulles** :

- pour une équation différentielle du premier ordre : $s(t=0)=0$;
- pour une équation différentielle du deuxième ordre : $s'(t=0)=0$

Propriété 1 :

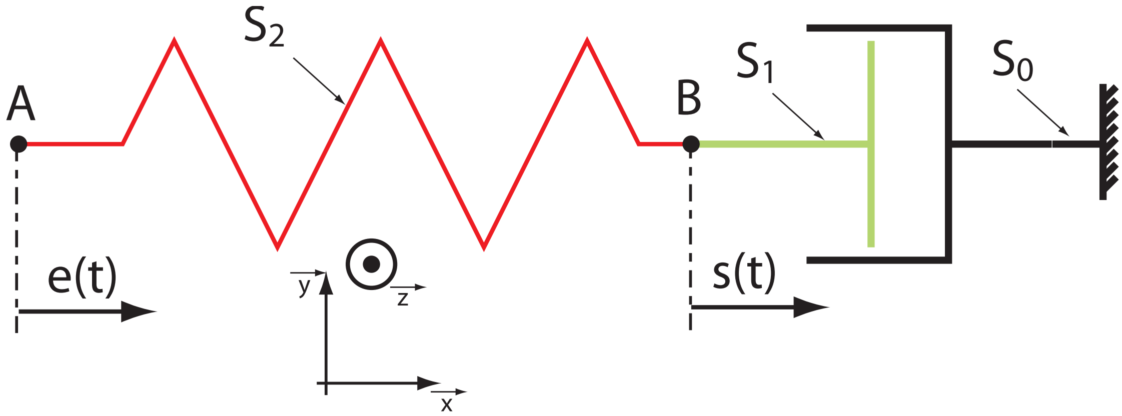
La fonction de transfert de ces systèmes peut s'écrire sous la **forme canonique suivante** :

$$\boxed{H(p)=\frac{K}{1+\tau p}} \tag{2}$$

où :

- τ : **constante de temps** (en s) ;
- K : **gain statique** (unité selon l'application).

Exemple 1 : *Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c*



On déplace l'extrémité A d'une longueur $e(t)$. Le point B répond à ce déplacement en se déplaçant d'une longueur $s(t)$. En isolant le solide S_1 de masse (m), on obtient le bilan des actions mécaniques extérieurs suivant $\vec{x}$:

- Le ressort S_2 de raideur k exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant $\vec{x}$,
$$F_r = -k(s(t) - e(t)).$$
- L'amortisseur S_0 de coefficient de viscosité c exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant $\vec{x}$,
$$F_c = -c \cdot \frac{ds(t)}{dt}.$$
- On néglige le poids du solide S_1.

En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique suivant la direction $\vec{x}$, on obtient :

$$F_r + Fc = m\frac{d^2s(t)}{dt^2}.$$

En négligeant la masse m (ce qui revient à négliger l'inertie), on obtient alors,

$$\boxed{c\frac{ds(t)}{dt} + ks(t) = ke(t).} \qquad (3)$$

Cette équation différentielle de degré 1 caractérise **un système du premier ordre**. On considère que les conditions initiales sont nulles $(s(t=0)=0)$.

Exemple 2 : *Détermination dans le domaine de Laplace de la fonction de transfert associée*

Dans le domaine de Laplace l'équation 3, s'écrit :

$$c \cdot p \cdot S(p) + kS(p) = kE(p).$$

On obtient alors,

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{k + c \cdot p};$$

qui s'écrit sous la forme canonique :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + \frac{c}{k} \cdot p};$$

On peut alors identifier la forme canonique avec les coefficients :

- $\tau = \frac{c}{k}$
- $K = 1$

2 Caractérisations de la réponse d'un système du premier ordre

a) Réponse à un échelon

On cherche à calculer la réponse temporelle s(t) à un échelon e(t) d'amplitude e_0 :

$$e(t) = e_0 \cdot u(t).$$

Remarque 2 :

Si $e_0 = 1$, la réponse $e(t)$ est appelée **réponse indicielle**.

- **Équation de la réponse :** On cherche à calculer $s(t)$ à partir de $H(p)$ et $E(p)$:

$$\begin{aligned} E(p) &= \frac{e_0}{p} \\ S(p) &= H(p) \cdot E(p) \\ &= \left(\frac{K}{1 + \tau p}\right) \frac{e_0}{p} \end{aligned}$$

La décomposition en élément simple donne :

$$S(p) = \frac{K \cdot e_0}{p} - \frac{K \cdot e_0}{\frac{1}{\tau} + p}$$

La transformée inverse donne :

$$s(t) = K \cdot e_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \cdot u(t)$$

On en déduit :

Théorème 1 :

La réponse d'un système du 1^{er} ordre à un échelon est de la forme :

$$\boxed{s(t) = K \cdot e_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \cdot u(t).} \tag{4}$$

Une représentation graphique est donnée en figure 1.

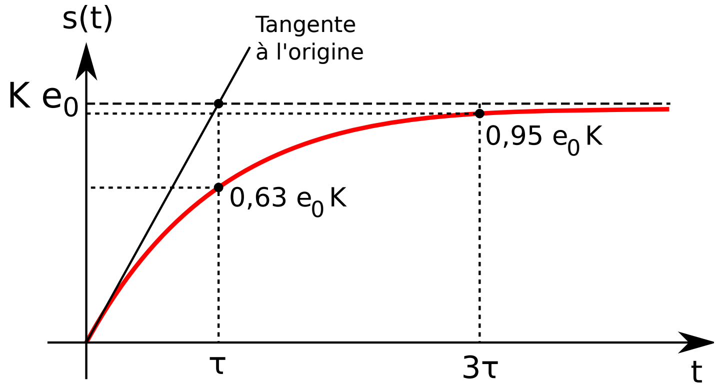


FIGURE 1 – Réponse indicielle d'un système du 1^{er} ordre

• **Comportement asymptotique :** On cherche à déterminer le comportement asymptotique (valeur et dérivée) de la réponse s(t) au voisinage de 0 et $+\infty$. Pour cela, on peut utiliser les théorèmes des valeurs limites :

Au voisinage de $+\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} p\cdot S(p) = Ke_0$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{ds(t)}{dt} = \lim_{p\to 0} p^2\cdot S(p) = 0$$

Au voisinage de 0 :

$$\lim_{t\to 0} s(t) = \lim_{p\to+\infty} p\cdot S(p) = 0$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{ds(t)}{dt} = \lim_{p\to+\infty} p^2\cdot S(p) = \frac{K\cdot e_0}{\tau}$$

D'où la propriété :

Propriété 2 :

La réponse indicielle à un système du 1^{er} ordre possède :

- une **asymptote horizontale au voisinage de** $+\infty$ d'ordonnée à l'origine $K\cdot e_0$,
- une **tangente à l'origine de coefficient directeur** $\frac{K\cdot e_0}{\tau}$.

• **Rapidité :** La rapidité d'une réponse à un échelon peut se caractériser par rapport au **temps de réponse à** 5% (noté t_r).

$$s_{(t_r)} = K\,e_0\left(1-e^{-t_r/\tau}\right) = 0{,}95\,K\,e_0$$
$$\Leftrightarrow t_r = -\tau\ln(0{,}05)$$

avec $\ln(0.05) \approx -3$. Ainsi :

Propriété 3 :

Le temps de réponse à 5% d'un système du 1^{er} ordre soumis à un échelon vaut (environ) :

$$\boxed{t_r \approx 3\,\tau.} \tag{5}$$

• **Précision** La précision de la réponse à un échelon peut être indiquée par **l'erreur statique**, noté ε_s. Elle s'obtient en recherchant l'écart au voisinage de $+\infty$:

$$\boxed{\varepsilon_s = \lim_{t\to+\infty} (e(t)-s(t))} \tag{6}$$

Attention :

Il convient d'abord de vérifier que $e(t)$ et $s(t)$ soient **homogènes** pour être comparables ! Cela prend en compte aussi bien la nature des entrées-sorties, mais également l'amplification de la sortie par rapport à l'entrée. On prendra donc soit un gain unitaire ($K = 1$), soit l'équation 6 légèrement modifiée :

$$\boxed{\varepsilon_s = \lim_{t\to+\infty} (K\,e(t) - s(t))} \qquad (7)$$

Pour illustrer cela, prenons un gain $K = 1$. D'après le raisonnement suivant :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_s &= \lim_{t\to+\infty} (e(t) - s(t)) \\
&= \lim_{p\to 0} p\cdot\big(E(p) - H(p)\cdot E(p)\big) \\
&= \lim_{p\to 0} p\cdot E(p)\left(1 - \frac{1}{1+\tau p}\right) \\
&= \lim_{p\to 0} p\cdot \frac{e_0}{p}\left(1 - \frac{1}{1+\tau p}\right) \\
&= \lim_{p\to 0} e_0\left(1 - \frac{1}{1}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dans tous les cas, on déduit que :

Propriété 4 :

L'erreur statique ε_s d'un système du 1^{er} ordre soumis à un échelon est nulle :

$$\boxed{\varepsilon_s = 0.} \qquad (8)$$

b) Réponse à une rampe :

Dans ce cas, l'entrée est une rampe :

$$e(t) = a\,t\,u(t)$$

• **Équation de la réponse :** On cherche à calculer $s(t)$ à partir de $H(p)$ et $E(p)$:

$$\begin{aligned}
E(p) &= \frac{a}{p^2} \\
S(p) &= H(p)E(p) \\
&= \left(\frac{K}{1+\tau p}\right)\frac{a}{p^2} \\
&= K\,a\left(\frac{1}{p^2} - \frac{\tau}{p} + \frac{\tau^2}{1+\tau p}\right)
\end{aligned}$$

Après transformée inverse, on obtient :

Théorème 2 :

La réponse d'un système du 1^{er} ordre soumis à une rampe est de la forme :

$$\boxed{s(t) = K\,a\left(t + \tau\left(e^{-t/\tau} - 1\right)\right)\,u(t).} \qquad (9)$$

• **Comportement asymptotique :** On cherche à déterminer le comportement asymptotique (valeur et dérivée) de la réponse s(t) au voisinage de 0 et $+\infty$. Pour cela, on utilise les théorèmes des valeurs limites.

Au voisinage de $+\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} p\,S(p) = \lim_{p\to 0} \frac{K\,a}{p\left(1+\tau p\right)} = +\infty$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{ds(t)}{dt} = \lim_{p\to 0} p^2\,S(p) = K\,a$$

Au voisinage de 0 :

$$\lim_{t\to 0} s(t) = \lim_{p\to+\infty} p\,S(p) = \lim_{p\to+\infty} \frac{K\,a}{p\left(1+\tau p\right)} = 0$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{ds(t)}{dt} = \lim_{p\to+\infty} p^2\,S(p) = 0$$

Propriété 5 :

La réponse d'un système du 1er ordre à une rampe possède :

- **une tangente horizontale au voisinage de** 0,
- **une asymptote oblique, de coefficient directeur** $K\,a$.

• **Précision :** Comme pour le 1er ordre, on mesure la précision en comparant l'entrée $e(t)$ avec la sortie $s(t)$. Toutefois, cette étude n'a de sens que si les deux grandeurs sont homogène, et notamment si le gain est unitaire ($K = 1$) ou que l'entrée est multipliée par le gain K. Dans le cas contraire, l'asymptote de $s(t)$ ne sera pas parallèle à $e(t)$ et les deux grandeurs ne seront pas comparables.

Pour $K = 1$ (voir fig.2), on trouve :

$$\boxed{\epsilon_v = a\,\tau.} \tag{10}$$

• **Rapidité :** La rapidité d'une réponse à une rampe peut se caractériser par un **retard de traînage** r_t (voir fig.2). Dans le cas d'un système du 1er ordre :

$$\boxed{r_t = \tau.} \tag{11}$$

au final :

Propriété 6 :

La réponse à une rampe d'un système du 1er ordre de gain unitaire possède :

- **une asymptote oblique d'équation** $y_{(t)} = a\,(t-\tau)$ **au voisinage de** $+\infty$.
- **une tangente horizontale au voisinage de** 0.

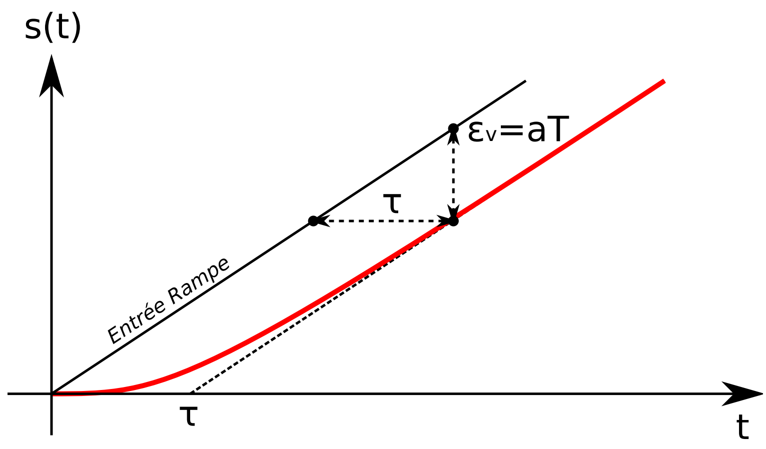


FIGURE 2 – Réponse à une rampe d'un système du 1er ordre (ici $K = 1$)