Ex. 14 : 1) $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ x = z \right\}$: F est 1 plan, il faut, il suffit, de donner 2 vect. de F non-colinéaires pour en avoir 1 base : par ex $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$F \oplus G = \mathbb{R}^3$ ssi : la concaténa° d'1 base de F et d'1 base de G est 1 base de $\mathbb{R}^3$

ssi $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est 1 base de $\mathbb{R}^3$

ssi : $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ \exists ! (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in G} \quad (\star)$$

$$(\star) \iff \begin{cases} b + c = x \\ a + c = y \\ b = z \end{cases} \iff \begin{cases} a = -x + y + z \\ b = z \\ c = x - z \end{cases}$$

$(\star)$ a 1 unique sol^{n}, dc $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est 1 bas de $\mathbb{R}^3$

dc $F \oplus G = \mathbb{R}^3$

2) avec le calcul précédent, si on note p_F^G le projecteur sur F $/\!/^{t}$ à G :

$$\forall \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ p_F^G\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (-x+y+z)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}z\\-x+y+z\\z\end{pmatrix}.$$