DS n°10 : Fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom : Note :

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

Matrices et algèbre linéaire

Soit $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -7 & 8 & -4 \\ 1 & 6 & 2 \\ 8 & -2 & 11 \end{pmatrix}$. Déterminer les trois noyaux suivants :

$\mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}$ (1) $\mathrm{Ker}(A - 2\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}$ (2) $\mathrm{Ker}(A + \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}$ (3)

Alors, $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$, où P et P^{-1} valent respectivement

$P =$ (4) $P^{-1} =$ (5)

Déterminer les rangs des matrices suivantes.

$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -2 & -8 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} =$ (6) $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 6 \\ 3 & 7 & 1 & 9 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} =$ (7)

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $\varphi(1+X) = X^2 - 1$, $\varphi(X + X^2) = (X+1)^2$ et $\varphi(1 + X^2) = 2X + 2X^2$. Calculer :

$\mathrm{rg}(\varphi) =$ (8) $\mathrm{tr}\,(\varphi) =$ (9) $\det(\varphi) =$ (10)

Permutations

On considère la permutation de $[\![1,9]\!]$: $\sigma = (1\ 2\ 9)(3\ 2\ 9\ 8)(1\ 2)(4\ 5\ 8\ 7)^2(1\ 2)(6\ 4\ 3)$.
Écrire les permutations suivantes comme produit de cycles à supports disjoints.

$$\sigma = \boxed{} \quad (11) \qquad \sigma^{-1} = \boxed{} \quad (12)$$

Calculer $\varepsilon(\sigma) = \boxed{}$ (13)

De l'analyse, en vrac

On considère une suite réelle v vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n^2 + \dfrac{3}{16}$.

Alors v converge si et seulement si $v_0 \in \boxed{}$ (14)

En cas de convergence, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{}$ (15)

Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer l'expression de $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\cos(x)\mathrm{e}^{\,x})$.

$$\boxed{} \quad (16)$$

Déterminer l'équivalent suivant.

$$\cos^n\left(\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{} \quad (17)$$

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 et en 0 de $\dfrac{\mathrm{e}^{\,x}}{1-\tan(x)}$.

$$\boxed{} \quad (18)$$

Calculer les intégrales suivantes.

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(t)}{t + t\ln^2(t)}\,\mathrm{d}t = \boxed{} \quad (19) \qquad \int_0^1 t\,\mathrm{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t = \boxed{} \quad (20)$$

— **FIN** —