

Devoir à la maison n° 05

À rendre le 09 novembre

I. Construction du pentagone régulier à la règle et au compas.

Dans tout ce problème, on pose $z_0 = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

Partie I

- 1) Que vaut $S = 1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4$?
- 2) On pose $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$.
 - a) Montrer que α et β sont des réels.
 - b) Dédire de la question 1) que α et β sont les deux racines de l'équation $Z^2 + Z - 1 = 0$.
- 3) Donner la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Partie II

Le plan complexe est muni d'un repère orthonomé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On désigne par A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 les points du plan d'abscisses respectives 1, z_0, z_0^2, z_0^3 et z_0^4 .

- 1)
 - a) Par quelle transformation simple passe-t-on de A_0 à A_1 ? Puis de A_1 à A_2 ? Généraliser ce résultat.
 - b) Quelle est l'abscisse du point H intersection de la droite (A_1A_4) avec l'axe des abscisses ?
- 2) Soit \mathcal{C} le cercle de centre Ω d'affixe $-\frac{1}{2}$ et passant par le point B d'affixe i .
On désigne par M et N les points où \mathcal{C} rencontre l'axe des abscisses, M ayant une abscisse positive.
 - a) Prouver que M a pour abscisse α et que N a pour abscisse β .
 - b) Montrer que H est le milieu du segment $[OM]$.
 - c) Dédire de ce qui précède la description d'une construction à la règle et au compas d'un pentagone dont on connaît le centre O et un sommet A_0 .
 - d) Effectuer cette construction à la règle et au compas sur une feuille blanche.

II. Une inéquation.

On désire prouver que pour tout nombre complexe z de module 1 on a :

$$\sqrt{3} \leq |1 + z| + |1 - z + z^2| \leq \frac{13}{4}.$$

Dans tout l'exercice z désigne donc un nombre complexe de module 1.

1) On pose $t = |1 + z|$, dans quel intervalle se trouve le réel t ?

2) Exprimer $\operatorname{Re}(z)$ à l'aide de t .

3) Montrer que

$$|1 - z + z^2|^2 = 3 - 4\operatorname{Re}(z) + 2\operatorname{Re}(z^2).$$

4) Exprimer $\operatorname{Re}(z^2)$ en fonction de $\operatorname{Re}(z)$ (indication : utiliser l'écriture trigonométrique). En déduire que

$$|1 + z| + |1 - z + z^2| = t + |3 - t^2|.$$

5) En déduire l'inégalité demandée. Trouver un complexe z qui réalise le minimum.

— **FIN** —