Devoir surveillé n° 4

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$.

2) En déduire que, si $p, q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux, on a

$$\sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor k \times \frac{p}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

II. Une équation de Mordell.

On cherche déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ solutions de l'équation (de Mordell) suivante :

$$y^2 = x^3 + 16. \qquad (\mathscr{M})$$

On désigne par *cube parfait* tout cube d'entier. Ainsi, un entier $a \in \mathbb{Z}$ est un cube parfait s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant $a = n^3$.

1) Résultats préliminaires. Ces deux questions sont indépendantes, et leurs résultats pourront être utilisées dans le reste du devoir.

a) Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que a est pair si et seulement si a^2 est pair et que a est pair si et seulement si a^3 est pair.

b) Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ deux entiers premiers entre eux, tels que ab soit un cube parfait. Montrer que a et b sont des cubes parfaits.

Indication : On pourra partir de la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre dont ab est le cube.

2) Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ solution de $(\mathscr{M})$ tel que y soit impair.

a) Montrer que y^2 est impair et en déduire que x est impair.

b) Soit d un diviseur de $y - 4$ et de $y + 4$. Montrer que d est impair et que d divise 8.

c) En déduire que $y-4$ et $y+4$ sont premiers entre eux.

d) En déduire qu'il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $y+4=a^3$ et $y-4=b^3$.

e) Montrer que $a-b$ est pair et que a^2+ab+b^2 est impair.

f) En factorisant a^3-b^3, montrer que $a=b+8$ et $3b^2+24b+64=1$.

g) Conclure en donnant l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ solution de $(\mathscr{M})$ tel que y soit impair

3) Soit $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ solution de $(\mathscr{M})$ tel que y soit pair.

a) Montrer que si $y \equiv 0[4]$ alors $y^2 \equiv 0[16]$, et si $y \equiv 2[4]$ alors $y^2 \equiv 4[16]$.

b) En démontrant des résultats analogues concernant x^3, montrer que x et y sont divisibles par 4.

On note alors $x=4x'$ et $y=4y'$.

c) Montrer que y' est impair.

On note alors $y'=2n+1$.

d) Montrer que n et $n+1$ sont premiers entre eux et sont des cubes parfaits.

On note alors $n=c^3$ et $n+1=d^3$.

e) Montrer que $d=c+1$, et en déduire les valeurs de n, y', x', y et x.

4) Déterminer l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ solutions de $(\mathscr{M})$.

III. Fonctions sup-continues.

On considère l'ensemble $E=[0,1] \subset \mathbb{R}$, que l'on munit de l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$. On s'intéresse aux applications allant de E dans E. Soit $f : E \to E$ une telle application.
On rappelle que f est *croissante* si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$$

On dit que f est *sup-continue* si et seulement si :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A \neq \varnothing \Longrightarrow f(\sup A) = \sup f(A)$$

1) Justifier que la définition de f sup-continue est correcte (c'est-à-dire que ce qui est écrit a toujours un sens).

2) Soit f et g deux applications de E dans E.

a) Montrer que pour tout $A \subset E$, $(g \circ f)(A) = g(f(A))$.

b) En déduire que si f et g sont sup-continues, alors $g \circ f$ est sup-continue.

3) Montrer que si une application $f : E \to E$ est croissante, alors pour toute partie $A \subset E$ non vide, on a $\sup(f(A)) \leqslant f(\sup A)$.

4) Exhiber un exemple d'application $f : E \to E$ qui est croissante, mais qui n'est pas sup-continue.

5) Montrer que si $f : E \to E$ est sup-continue, alors f est croissante.

On considère désormais une application $f : E \to E$ qui est sup-continue. On note l'ensemble des points fixes de f :

$$\mathrm{Fix}(f) = \{\, x \in E \mid f(x) = x \,\}.$$

On note aussi :

$$X = \{\, x \in E \mid f(x) \leqslant x \,\}.$$

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$$

avec la convention $f^0 = \mathrm{Id}_E$, et l'on pose finalement :

$$Y = \{\, f^n(0) \mid n \in \mathbb{N} \,\} = \{\, y \in E \mid \exists n \in \mathbb{N},\ y = f^n(0) \,\}.$$

6) Montrer que X possède une borne inférieure, que l'on notera désormais α.

7) Justifier que $\alpha \in E$.

8) Montrer que α est le plus petit élément de $\mathrm{Fix}(f)$.

9) Justifier que Y possède une borne supérieure, que l'on notera β, et que $\beta \in E$.

10) Montrer que

$$f(Y) = \{\, f^n(0) \mid n \in \mathbb{N}^* \,\}$$

et que

$$\sup Y = \sup f(Y).$$

11) Montrer que $\alpha = \beta$.

— **FIN** —