Devoir à la maison n° 20

À rendre le 23 mai

L'objectif de ce problème est de montrer le théorème d'approximation de Weierstrass :

pour toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\geqslant 1}$ telle que

$$\sup \{ |P_n(x) - f(x)| \mid x \in [0,1] \} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

1) Montrer l'inégalité triangulaire : pour toute variable aléatoire réelle X définie sur un espace probabilisé fini, $|\mathrm{E}X| \leqslant \mathrm{E}|X|$.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.

Pour tout $x \in [0,1]$, on considère une suite $(X_i^{(x)})_{i\geqslant 1}$ de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre x. On définit ensuite pour tout $n \geqslant 1$

$$T_n^{(x)} = \frac{X_1^{(x)} + \cdots + X_n^{(x)}}{n}$$

et

$$P_n(x) = \mathrm{E}\left[f\left(T_n^{(x)}\right)\right].$$

2) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, P_n est une fonction polynomiale.

3) Déterminer l'espérance et la variance de $T_n^{(x)}$.

4) On fixe un réel $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x, y \in [0,1]$, si $|x-y| \leqslant \alpha$, alors $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

5) Majorer $P\left(\left|T_n^{(x)} - x\right| \geqslant \alpha\right)$ par une quantité ne dépendant pas de x.

6) La fonction f est-elle bornée ? Proposer deux majorations de $\left|f(T_n^{(x)}) - f(x)\right|$, l'une sur l'événement $\left[\left|T_n^{(x)} - x\right| \geqslant \alpha\right]$, l'autre sur l'événement $\left[\left|T_n^{(x)} - x\right| < \alpha\right]$.

7) En déduire une majoration de $|P_n(x) - f(x)|$ ne dépendant pas de x et conclure.

8) Ce résultat s'étend sans problème à tout segment de $\mathbb{R}$. Est-il vrai sur $\mathbb{R}$ entier ?

9) On compare finalement deux modes de convergence de fonctions. Soit I un ensemble et f une fonction définie sur I.

a) Montrer que si $(P_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de polynômes vérifiant

$$\sup \{ |P_n(x) - f(x)| \mid x \in I \} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

alors pour tout $x \in I$, $P_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.

b) Montrer que, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, alors il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\geqslant 1}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.

— FIN —