

Champ à force centrale

①

Exercice 1

Référentiel : R_G Galileen

Système : la Pume

Force : $\vec{F} = -G \frac{M_L M_T}{r_1^2} \vec{u}$

3^e loi de Kepler : $\frac{T_L^2}{r_1^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$

$$M_T = \frac{4\pi^2 r_1^3}{T_L^2 G} = 6,1 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

(Si on demande la démonstration: 2^e loi de Newton pour le mouvement circulaire, on obtient v , puis T)

Exercice 2.

Référentiel : Jupicentrique Galileen

Système : Satellite m

Force : $\vec{F} = -G \frac{M m}{r^2} \vec{u}$

1. Relation

3^e loi de Kepler : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$

2. Masse de Jupiter

T^2	$2,33 \cdot 10^8$	$9,41 \cdot 10^{10}$	$38,2 \cdot 10^{10}$	$208 \cdot 10^{10}$
r^3	$7,51 \cdot 10^8$	$30,2 \cdot 10^{25}$	$122,5 \cdot 10^{25}$	$664,5 \cdot 10^{25}$

on pose $x = r^3$ $y = T^2$ on a $ax + b = y$ est une droite de pente $4\pi^2/GM$

on obtient $T^2 = 8,11 \cdot 10^{-6} r^3 + 1,12 \cdot 10^{10}$ 3

d'où $M = \frac{4\pi^2}{Ga} = 1,9 \cdot 10^{27} \text{ kg}$ 17

Exercice 3Referentiel : \mathcal{R}_0 GaliléenSystème : Satellite1. Trajectoire circulaire

Force : $\vec{F}' = -\frac{GMm}{r^2} \vec{u}_r$

Loi : 2^e loi de Newton $m\vec{a}' = \vec{F}'$

Projections :
$$\begin{cases} -m \frac{v^2}{r} = -\frac{GMm}{r^2} \\ m \frac{dv}{dt} = 0 \end{cases}$$

le mouvement est uniforme

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{R_T + h_0}}$$

Energie potentielle : $E_p = -\frac{GMm}{r}$

Energie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$

Energie mécanique $E_m = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$

La période $T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow T = \frac{2\pi (R_T + h_0)^{3/2}}{\sqrt{GM}}$

2. Forme globale de la trajectoire

Du fait des frottements l'énergie mécanique diminue.
Donc le rayon de l'orbite diminue aussi (à cause du signe \ominus)



spiral

3. Variation d'altitude

On suppose que l'orbite reste quasi-circulaire
Pour un tour $\Delta h = -\alpha T$ (α est constant)

(3)

Theoreme des petites variations:

$$\Delta v \approx v'(h) \Delta h = \frac{-\sqrt{g\pi}}{2(R_T + h)^{3/2}} \Delta h$$

$$\text{or } T = \frac{2\pi(R_T + h)^{3/2}}{\sqrt{g\pi}}$$

$$\text{on a alors } \Delta v \approx - \Delta h \cdot \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{d'où } \boxed{\Delta v = dT}$$

La vitesse augmente ($E_c = -E_m$)

(4)

Exercice 4Referentiel : Rg GalileenSystème : le satelliteForce : $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{u}$ 1. Satellite rasant

- Vitesse pour une orbite circulaire $v = \sqrt{\frac{GM}{R_T + h}}$
or $h = 0$

et sur terre $F = \frac{mGM}{r_0^2} = mg_0$

d'où $GM = r_0^2 g_0$

⇒ $v_0 = \sqrt{r_0 g_0} = 7,92 \text{ km/s}$

- 3^e loi de Kepler : $\frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \frac{4\pi^2}{r_0^2 g_0}$

d'où $T = 2\pi \sqrt{\frac{r_0}{g_0}} = 5077 \text{ s} = 7^h 24 \text{ mn } 37 \text{ s}$

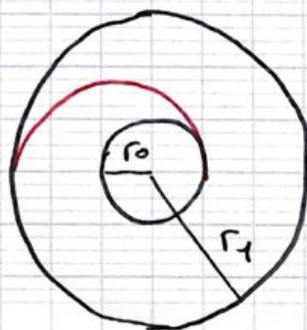
2. Satellite Géostationnaire

- 3^e loi de Kepler $\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{4\pi^2}{r_0^2 g_0}$

d'où $r_1 = \left(\frac{T_1^2 r_0}{g_0} \right)^{1/3} = 42,3 \times 10^3 \text{ km}$

- Mouvement circulaire

$v_1 = r_0 \sqrt{\frac{g_0}{r_1}} = 3,08 \text{ km/s}$

3.1 Schema

(5)

3.2. Vitesse sur l'orbite elliptique

Energie mécanique sur l'orbite elliptique :

$$E_m = -\frac{GMm}{2a} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

$$\text{d'où } -\frac{r_0^2 g}{r_0 + r_1} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{r_0^2 g_0}{r}$$

$$\text{d'où } v = \sqrt{2g_0 r_0^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0 + r_1} \right)}$$

$$\text{en P } r = r_0 \quad v_P = v'_0 = \sqrt{2g_0 \frac{r_0 r_1}{r_1 + r_0}} = 10,4 \text{ km/s}$$

$$\text{en A } r = r_1 \quad v_A = v'_1 = \sqrt{2g_0 \frac{r_0^3}{r_1(r_0 + r_1)}} = 1,58 \text{ km/s}$$

3.3 Durée du transfert

Le transfert correspond à une demi ellipse $\sigma = \frac{T_e}{2}$

$$3^{\text{e}} \text{ loi de Kepler } \frac{T_e^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{g_0 r_0^2}$$

$$\Rightarrow T_e = \frac{2\pi}{r_0 \sqrt{g_0}} \cdot \frac{(r_1 + r_0)^{3/2}}{2\sqrt{2}}$$

$$\sigma = \frac{\pi}{r_0 \sqrt{g_0}} \frac{(r_1 + r_0)^{3/2}}{2\sqrt{2}} = 1,88 \cdot 10^4 \text{ s} = 5 \text{ h } 14 \text{ mn.}$$

Exercice 5Referentiel : R_G GaliléenSystème : SatelliteForce : $\vec{F} = - \frac{GMm}{r^2} \vec{u}$ 1. Schema2. Le demi grand axe

$$a = \frac{r_A + r_P}{2}$$

$$a = \frac{d_A + d_P + 2R_T}{2} = 24,4 \cdot 10^3 \text{ km}$$

3. Energie mécanique

$$E_m = - \frac{GMm}{2a} = -8,97 \cdot 10^{\cancel{10}} \text{ J}$$

9

La periode

$$3^{\text{e}} \text{ loi de Kepler : } \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}} = 38 \cdot 10^3 \text{ s} = 0,44 \text{ Jours}$$

4. Le moment cinétique

En A et en P la vitesse et le rayon vecteur sont perpendiculaires

$$L_0 = m r_A v_A = m r_P v_P \quad \text{car le moment cinétique est constant.}$$

5. Vitesse en P

D'après la question 4

$$v_P = v_A \frac{r_A}{r_P} = 22,4 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$