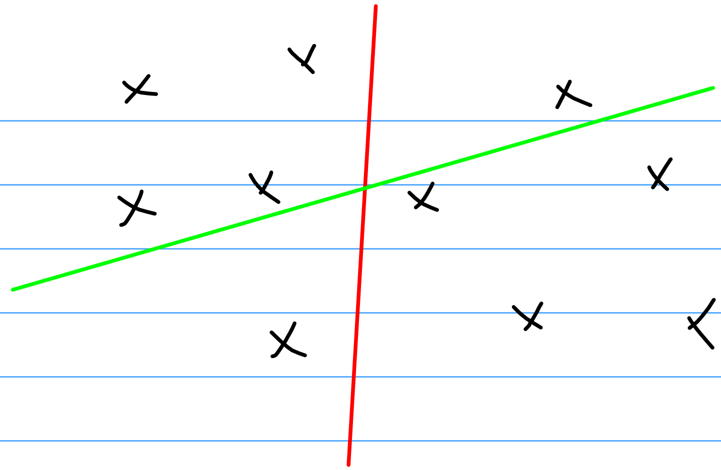
Ex. 1 : 1)



a) Soit $m \in \mathbb{R}$: pr $\forall p \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_{m,p}$ est 1 droite de pente m.

$\{\mathcal{D}_{m,p}, p \in \mathbb{R}\}$ est l'ens. des droites de pente m.

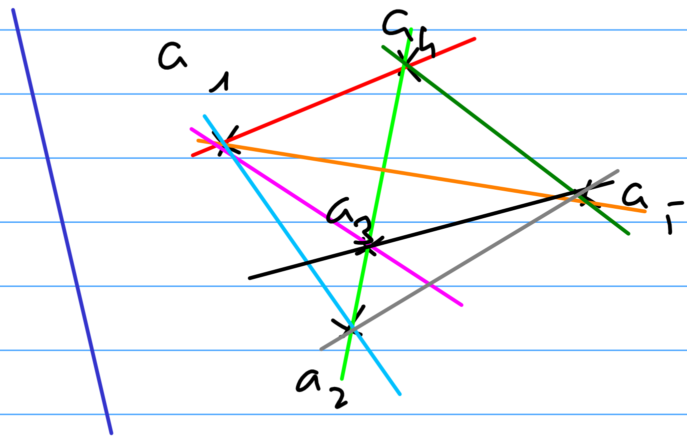
Toujours pour m fixé :

il existe $p \in \mathbb{R}$ tq. $\mathcal{D}_{m,p} \cap \mathcal{M}$ contient au moins 2 pts

$\Leftrightarrow$ il existe 1 droite de pente m passant par au moins 2 pts de $\mathcal{M}$.

Pour chaque choix de 2 pts de $\mathcal{M}$, il existe une unique droite passant par ces 2 pts. Il y a donc au plus $\binom{1000}{2}$ droites du plan passant par au moins 2 points de $\mathcal{M}$. Rq : il peut y en avoir moins si 2 choix différents de 2 points de $\mathcal{M}$ donnent 1 même droite, ce qui arrive dès que 3 pts de $\mathcal{M}$ sont alignés.

Il y a donc au plus $\binom{1000}{2}$ réels m tq. une droite de pente m passe par au moins deux pts de $\mathcal{M}$.

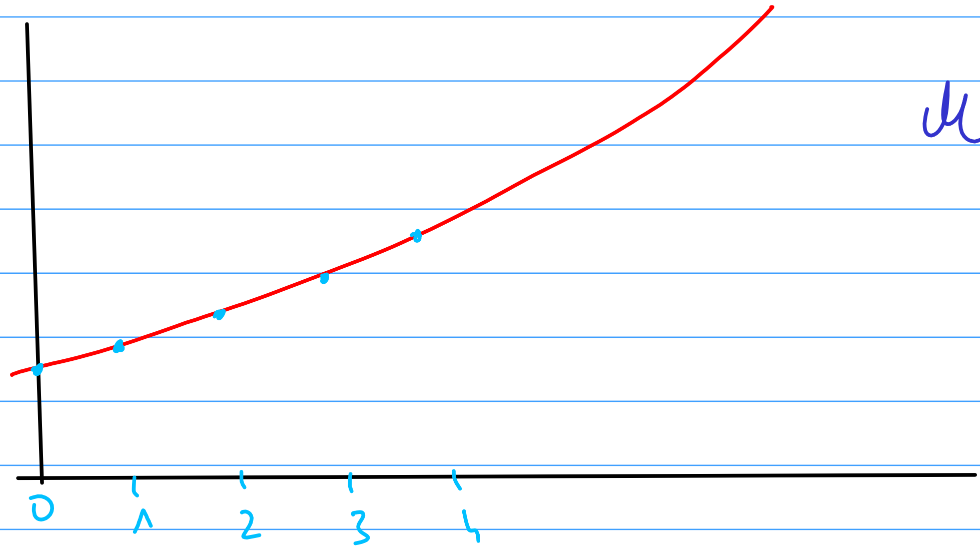


il n'y a que 8 réels $m_1 \dots m_8$ pour lesquels 1 droite de pente m_i passe 2 pts de $\{a_1 \dots a_i\}$

b) dès que l'on choisit 2 points parmi les 1000 pts de $\mathcal{M}$, nous avons 1 droite qui passe par ces 2 pts, et donc le cardinal de l'ensemble précédent vaut au moins 1.

- Si les 1000 pts sont alignés, il n'y a qu'1 droite du plan qui passe par au moins 2 pts de $\mathcal{M}$: 1 est le plus cardinal possible de l'ens. précédent.

- $\binom{1000}{2}$ majore le cardinal de cet ensemble. Il est atteint s'il est possible de trouver $\binom{1000}{2}$ droites passant par au moins 2 pts de $\mathcal{M}$, qui ne sont jamais 2 à 2 parallèles.



$\mathcal{M} = \left\{ (k, e^k), k \in [\![0, 999]\!] \right\}$

"rappel" : e est transcendant : il n'existe aucun polynôme non nul à coefficients entiers dont e est racine.

Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites passant chacune par 2 points de $\mathcal{M}$:

$\mathcal{D}_1$ passe par (a, e^a) et (b, e^b) avec $a, b \in \mathbb{N}$, $a \neq b$.

$\mathcal{D}_2$ passe par (c, e^c) et (d, e^d) avec $c, d \in \mathbb{N}$, $c \neq d$.

avec : $(a, b) \neq (c, d)$ et $(a, b) \neq (d, c)$, ie : $\{a, b\} \neq \{c, d\}$.

Supposons que $\mathcal{D}_1 // \mathcal{D}_2$, dc elles ont la même pente :

$$\frac{e^a - e^b}{a-b} = \frac{e^c - e^d}{c-d} \quad \text{ie : } (c-d)e^a + (d-c)e^b + (b-a)e^c + (a-b)e^d = 0$$

l'1 des entiers a, b, c, d n'est égal à aucun des 3 autres par hyp.

supposons que c'est a : alors le coeff $(c-d) \neq 0$ donc :

$$P(e) = (c-d)\, e^a + (d-c)\, e^b + (b-a)\, e^c + (a-b)\, e^d$$

P est le polynôme : $(c-d)X^a + (d-c)X^b + (b-a)X^c + (a-b)X^d$

et il est non nul d'après la q. précédente, mais il a e pour racine et il a des coeff entiers : c'est absurde car e est transcendant.

2) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$
$p \longmapsto \text{card}(\mathcal{D}_{m,p} \cap \mathcal{M})$ prend ses valeurs dans $\{0,1\}$.

D'après la qu. précédente, l'ens. des réels m tq. il existe $p \in \mathbb{R}$ tq. $\text{card}(\mathcal{D}_{m,p} \cap \mathcal{M}) \geqslant 2$ est fini, or $\mathbb{R}$ est ∞, dc il existe un réel m_0 qui n'est pas cet ensemble : pour ce m_0, $\forall p \in \mathbb{R}$, $\text{card}(\mathcal{D}_{m_0,p} \cap \mathcal{M}) < 2$, et dc ce m_0 convient.

3) Fixons m_0. Si $(a,b) \in \mathcal{M}$, il se trouve sur 1 et 1 seule droite de pente m_0. Cette droite a pour éq :

$$y = m_0 x + p, \quad \text{pour 1 certain } p \in \mathbb{R}.$$

Or si (a,b) et (c,d) sont 2 pts distincts de $\mathcal{M}$, le 1^er est sur la droite $y = m_0 x + p_1$, le 2^nd est sur la droite $y = m_0 x + p_2$, et d'après la qu. 2, $p_1 \neq p_2$.

Dc à chaque point A de $\mathcal{M}$, on peut associer de manière unique 1 réel p_A.

On peut numéroter $A_1 \dots A_{1000}$ les points de $\mathcal{M}$, et noter p_i le réel tq. $A_i \in \mathcal{D}_{m_0, p_i}$. On peut supposer que :

$$p_1 < p_2 < p_3 \dots < p_{1000}.$$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y-(mx+p) \end{array}$$ avec $m, p \in \mathbb{R}$

Alors : $f(x,y) = 0 \iff (x,y) \in \mathcal{D}_{m,p}$

$f(x,y) > 0 \iff (x,y)$ est au-dessus de $\mathcal{D}_{m,p}$

$f(x,y) < 0 \iff (x,y)$ est en dessous de $\mathcal{D}_{m,p}$

Soit $p \in \left]p_{500}, p_{501}\right[$.

Alors : $\forall i \in [\![1, 500]\!]$, $A_i = (x_i, y_i) \in \mathcal{D}_{m_0, p_i}$

donc $y_i - (m_0 x_i + p_i) = 0 > y_i - (m_0 x_i + p)$

donc A_i est strict^t au-dessus de $\mathcal{D}_{m_0,p}$

de m̂, $\forall i \in [\![501, 999]\!]$, A_i est en dessous de $\mathcal{D}_{m_0,p}$

Ainsi $\mathcal{D}_{m_0,p}$ sépare $\mathcal{M}$ en deux groupes de 1000 points.