2.3 - Inversibilité

Proposition 2.3.1 : E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dim. finie, tq. $\dim E = \dim F = n$. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
Fixons $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F.
u est bijective (ie inversible pour $\circ$)
ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ est inversible (pour $\times$).

Démonstration :

- Supposons qu'il existe $v \in \mathcal{L}(F,E)$ tq : $u \circ v = id_F$ et $v \circ u = id_E$

Posons : $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\, u$, $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\, v$

alors :

$$I_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(id_E)$$

$$= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v \circ u) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\, v) \times (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\, u)$$

$$= B \times A$$

de même : $I_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(id_F) = A \times B$.

dc A est inversible et $A^{-1} = B$.

(Rq : si u est inversible, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\, u)^{-1}$)

- Si A est inversible, fixons $v \in \mathcal{L}(F, E)$

tq : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(v) = A^{-1}$

Alors : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\, v \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\, u$

$= A^{-1} \cdot A$

$= I_n$

$= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(id_E)$.

Alors : $v \circ u = id_E$

de même : $u \circ v = id_F$, donc : $u^{-1} = v$.

<u>Ex</u> : $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Soit $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 4x + 2y - z \\ x + z \\ 3x - y + 2z \end{pmatrix}$

Si $\mathcal{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u).$$

Inverser A revient à inverser u.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$u\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = 4x + 2y - z \\ b = x + z \\ c = 3x - y + 2z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{7}(a - 3b + 2c) \\ y = \frac{1}{7}(a + 11b - 5c) \\ z = \frac{1}{7}(-a + 10b - 2c) \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -11 & -5 \\ -1 & 10 & -2 \end{pmatrix}}_{= A^{-1}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Corollaire 2.3.4 : <u>rappel</u> : Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, avec $\dim E = \dim F$,

alors :

(i) u est un isomorphisme

ssi (ii) u est inversible à gauche (il existe $v \in \mathcal{L}(F,E)$ q. $v \circ u = id_E$)

ssi (iii) u est inversible à droite (il existe $v \in \mathcal{L}(F,E)$ q. $u \circ v = id_F$)

Ce résultat se traduit avec des matrices :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

(i) A est inversible

ssi (ii) A est inversible à gauche ($\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ t.q. $BA = I_n$)

ssi (iii) A est inversible à droite.

Démonstration : $(i) \iff ((ii) \text{ et } (iii))$

il suffit de m.q. $\begin{cases} (ii) \implies (i) \\ (iii) \implies (i) \end{cases}$

Démontrons $(ii) \implies (i)$:

Soit $E = \mathbb{K}^n$, $\mathcal{B}$ une base de E, et $u \in \mathcal{L}(E)$

tq. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A$.

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq. $B.A = I_n$.

Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tq. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = B$.

dc $I_n = B.A$

$= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v \circ u)$

donc : $v \circ u = id_E$.

dc u est inversible à gauche : elle est donc inversible, et $u^{-1} = v$: A est donc inversible et $A^{-1} = B$.

Corollaire 2.3.5 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dim n, $\mathcal{B}$ une base de E et $(v_1 \dots v_n)$ une famille de vecteurs de E.

Alors : $(v_1, \dots, v_n)$ est 1 base de E

ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$ est inversible.

Démonstration : Notons $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tq. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = M$.

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$ implique que : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $u(e_j) = v_j$.

- Si u est bijective, alors : $rg(u) = n$

dc : $n = rg\, u = \dim \operatorname{im} u = \dim \operatorname{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n))$
$= \dim \operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_n) = rg(v_1, \dots, v_n)$

dc $\operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_n) = E$

dc $(v_1 \dots v_n)$ est génératrice, dc c'est 1 base de E par considération de son cardinal.

- Si $(v_1 \dots v_n)$ est 1 base, alors :

$n = rg(v_1, \dots, v_n) = rg(u(e_1) \dots u(e_n))$
$= rg\, u$ dc u est surjective, dc elle est bijective car il s'agit d'un endo. en dim. finie.

Rq : S'il y a une relation de dépendance entre les colonnes d'1 matrice, la famille des vecteurs colonne de cette matrice est liée, donc ce n'est pas une base : la matrice n'est pas inversible.

Ex : $M = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \underbrace{}_{C_1} & \underbrace{}_{C_2} & \underbrace{}_{C_3} \end{array} \end{array}$

Nous a :

$$2C_1 + C_2 = C_3$$

donc M n'est pas inversible.