

Feuille d'exercice n° 09 : **Arithmétique**

**Exercice 1** (✎) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

- 1)  $17 \mid (7^{8n+1} + 10(-1)^n)$  ;      2)  $11 \mid (9^{5n+2} - 4)$  ;      3)  $6 \mid (10^{3n+2} - 4^{n+1})$ .

**Exercice 2** (🚲) Quel est le reste de la division euclidienne de  $1234^{4321} + 4321^{1234}$  par 7 ?

**Exercice 3** Trouver le reste de la division par 13 du nombre  $100^{1000}$ .

**Exercice 4** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

- 1)  $n(n+1)(n+2)(n+3)$  est divisible par 24 ;  
2)  $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$  est divisible par 120.

**Exercice 5** (✎) Déterminer le pgcd et un couple de Bézout des couples d'entiers  $(a, b)$  suivants :

- 1)  $a = 33$  et  $b = 24$       2)  $a = 37$  et  $b = 27$       3)  $a = 270$  et  $b = 105$

**Exercice 6** (🚲📐) Soient  $a, b$  et  $c \in \mathbb{Z}$ , avec  $(a, b) \neq (0, 0)$ . On souhaite résoudre l'équation  $ax + by = c$ , notée  $\star$ , d'inconnue  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ .

- 1) Montrer que  $\star$  n'a pas de solution si  $c$  n'est pas un multiple de  $a \wedge b$ .  
2) On suppose dans cette question que  $a \wedge b$  divise  $c$ .  
a) En considérant un couple de coefficients de Bézout de  $(a, b)$ , montrer que  $\star$  possède une solution  $(x_0, y_0)$ .  
b) En s'appuyant sur  $(x_0, y_0)$ , résoudre complètement  $\star$ .  
3) Résoudre les équations d'inconnue  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  :  $2x + 5y = 13$ ,  $14x - 24y = 6$  et  $6x - 14y = 9$ .

**Exercice 7** Le pgcd de deux nombres est 12 ; les quotients successifs obtenus dans le calcul de ce pgcd par l'algorithme d'Euclide sont 8, 2 et 7. Trouver ces deux nombres.

**Exercice 8** (🚲) Résoudre les systèmes suivants, d'inconnues  $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ .

- 1)  $\begin{cases} x \wedge y = 3 \\ x + y = 21 \end{cases}$       2)  $\begin{cases} x \wedge y = 6 \\ x \vee y = 72 \end{cases}$

**Exercice 9** (✎) Montrer que deux entiers consécutifs sont toujours premiers entre eux.

**Exercice 10** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

- 1)  $(n^2 + n) \wedge (2n + 1) = 1$  ;      2)  $(3n^2 + 2n) \wedge (n + 1) = 1$ .

**Exercice 11** (🚲) Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  le système  $S : \begin{cases} x \equiv 4 \pmod{6} \\ x \equiv 7 \pmod{9} \end{cases}$ .

*Indication* : on recherchera d'abord une solution particulière.

**Exercice 12** (🚲) Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  les équations suivantes, d'inconnues  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ .

1)  $91x - 65y = 156$ .

2)  $135x - 54y = 63$ .

3)  $72x + 35y = 13$ .

**Exercice 13** Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation :  $x^2 + 5y^2 = 3$ .

**Exercice 14** Déterminer les entiers  $n$  vérifiant  $n^2 - 3n + 6 \equiv 0 \pmod{5}$ .

**Exercice 15** Un coq coûte 5 pièces d'argent, une poule 3 pièces, et un lot de quatre poussins 1 pièce. Quelqu'un a acheté 100 volailles pour 100 pièces ; combien en a-t-il acheté de chaque sorte ?

**Exercice 16** Soient  $a$  et  $n$  deux entiers supérieurs ou égaux à 2. Montrer que si  $a^n - 1$  est premier, alors  $a = 2$  et  $n$  est premier. La réciproque est-elle vraie ? Pour tout entier naturel  $p$  supérieur ou égal à 2, l'entier  $2^p - 1$  est appelé le  $p$ -ème nombre de Mersenne, souvent noté  $M_p$ .

**Exercice 17** (📖) Soit  $F$  l'application définie sur  $\mathbb{N}$  par  $n \rightarrow 2^{2^n} + 1$ . Si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F(n)$  est appelé  $n^{\text{e}}$  nombre de Fermat.

1) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $F(n) = \prod_{k=0}^{n-1} F(k) + 2$ .

2) Montrer que, pour tout couple  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $m \neq n$ ,  $F(m)$  et  $F(n)$  sont premiers entre eux.

3) Montrer que tout entier naturel  $n$  qui n'est pas de la forme  $2^m$  possède un diviseur impair autre que 1. En déduire que, si le nombre  $2^n + 1$  est premier, alors soit c'est un nombre de Fermat, soit  $n = 0$ .

4) Montrer que  $F(5)$  est divisible par 641.

**Exercice 18** Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2,  $\frac{1}{4}(n^3 + (n+2)^3)$  est un entier non premier.

**Exercice 19** Dans le système de numération de base 16 on pose  $a = 4A3$  et  $b = 10C4$ . Calculer  $a + b$ ,  $b - a$  et  $ab$  en base 16.

