Feuille d'exercice n° 24 : **Espaces vectoriels de dimension finie – Exercices supplémentaires**

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la famille $S = (X^k(1-X)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, et déterminer, pour tout $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$, les composantes du polynôme X^p dans la base S.

Exercice 2 Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 Soit $\omega \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. On note $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{C}_n[X] & \to & \mathbb{C}_n[X] \\ P & \mapsto & \omega P + P' \end{array}$.

1) Montrer que φ est surjective.

2) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, l'application $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & P(x)\mathrm{e}^{\omega x} \end{array}$ admet une primitive de la forme $x \mapsto Q(x)\mathrm{e}^{\omega x}$, où Q est un polynôme de degré au plus n.

Exercice 4

Déterminer un supplémentaire de $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P'(1) = 0\}$ dans $\mathbb{R}_4[X]$.

Exercice 5

Dans $\mathbb{R}_3[X]$ on note E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 1. Déterminer un sous-espace vectoriel supplémentaire de E et en donner une base.

Exercice 6 Montrer qu'il existe une unique forme linéaire f sur $\mathbb{R}^2$ telle que $f(1,2) = 2$ et $f(-2,1) = 5$. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 7

Théorèmes de factorisation.

Soit E, F et G des $\mathbb{K}$-espace vectoriels, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, G étant de dimension finie.

1) Soit $u \in \mathscr{L}(F, E)$ et $v \in \mathscr{L}(G, E)$. Montrer qu'il existe $h \in \mathscr{L}(G, F)$ tel que $v = u \circ h$ si et seulement si $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(u)$.

2) Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(E, G)$. Montrer qu'il existe $h \in \mathscr{L}(G, F)$ tel que $u = h \circ v$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

On pourra réaliser un schéma à chaque fois pour se représenter la situation.

Exercice 8 Soit E un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel de dimension $2p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$. Soit u un endomorphisme de E de rang p, vérifiant $u^2 = 0$. Comparer $\mathrm{Im}\, u$ et $\mathrm{Ker}\, u$.

Exercice 9 Montrer que l'ensemble $F = \{\, (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 3y - z - t = 0 \,\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$. En déterminer une base, un supplémentaire ainsi qu'une base de ce supplémentaire.