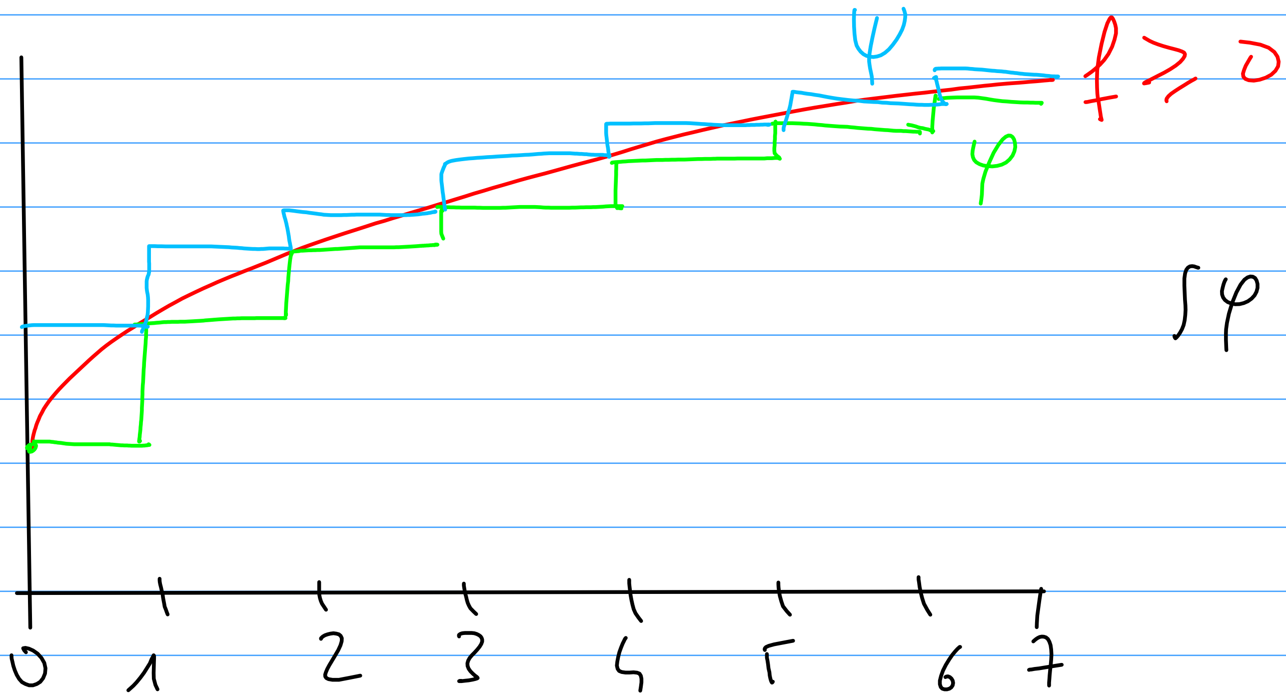
8) Comparaison série-intégrale :



$$\int \varphi \leq \int f \leq \int \psi$$

$$\int_0^7 \varphi = \sum_{k=0}^{6} \int_k^{k+1} \varphi = \sum_{k=0}^{6} f(k)$$

$$\int_0^7 \psi = \sum_{k=1}^{7} f(k) \quad : \quad \sum_{k=0}^{6} f(k) \leq \int_0^7 f \leq \sum_{k=1}^{7} f(k)$$

et donc, avec 1 décalage d'indice :

$$\sum_{k=0}^{7} f(k) \le \int_0^8 f \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{7} f(k) \le \left(\int_0^8 f\right) - f(0)$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\cancel{6}\, n-1} f(k) \le \int_0^{\cancel{7}\, n} f \le \sum_{k=1}^{\cancel{7}\, n} f(k) \le \left(\int_0^{\cancel{8}\, n+1} f\right) - f(0)}$$

2 séries

2 intégrales

<u>Th</u> : Si f est ≥ 0 et monotone (et continue)

alors : $\left(\int_0^n f\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sum_{k=0}^{n} f(k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même nature.

$\underline{R_7}$: Si f est $\uparrow$ et ≥ 0, non nulle,

il existe $x \in \mathbb{R}_+$ tq. $f(x) > 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geq x$, $f(n) \geq f(x) > 0$

donc la suite $(f(n))_n \not\to 0$

donc la série $\sum_{k} f(k)$ div. grossièrement.

donc avec $f \uparrow$, $\int f$ et $\sum f(k)$ div. tjs.

dans ce cas, cette méthode ne sert pas à déterminer la nature de $\int$ et $\sum$, mais peut être utile pour obtenir des encadrements, des équivalents etc...

Ex. 8.0.3 : Soit $\alpha > 0$.

On pose : $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$.

f est positive, continue, $\searrow$ (car $\alpha > 0$)

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1, 0\}$.

dc :
$$\int_1^n f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\,dt$$

mais, $\forall t \in [k, k+1]$: $\dfrac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \dfrac{1}{t^\alpha} \leq \dfrac{1}{k^\alpha}$

dc :
$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^\alpha}\,dt = \frac{1}{k^\alpha}$$

en sommant pr k de 1 à $n-1$:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \underset{1}{\leq} \int_1^n f \underset{2}{\leq} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} - 1$$

1 donne aussi :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{3}{\leq} \int_1^n f + 1$$

3 et 2 :

$$\boxed{\int_1^{n+1} f \underset{2}{\leq} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{3}{\leq} \left(\int_1^n f\right) + 1}$$

avec ② : si $\int_1^{n+1} f \to +\infty$, alors $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \longrightarrow +\infty$

avec ① : si $\left(\int_1^n f\right)$ cv, elle est majorée,

donc $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right)$ aussi, or elle est ↗, elle cv.

Mais $\int_1^n f = \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt = \int_1^n t^\beta dt$ (avec $\beta = -\alpha$)

⚠ si $\alpha \neq 1$

$$= \left[\frac{1}{\beta+1} t^{\beta+1}\right]_1^n = \left[\frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha}\right]_1^n$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right)$$

Ici : Si $\alpha > 1$: alors $\alpha - 1 > 0$ donc $\displaystyle\int_1^n f \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{\alpha - 1}$

donc $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right)$ CV.

Si $\alpha < 1$: alors $\alpha - 1 < 0$ donc $\displaystyle\int_1^n f \longrightarrow +\infty$

donc $\displaystyle\left(\sum \frac{1}{k^\alpha}\right)$ div.

Si $\alpha = 1$: $\displaystyle\int_1^n f = \int_1^n \frac{1}{t}\,dt = [\ln t]_1^n = \ln n \longrightarrow +\infty$

donc $\displaystyle\sum \frac{1}{k}$ div.

<u>Ex. 8.0.4 :</u> $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{1+x} \end{array}$, cont., ≥ 0, $\searrow$.

avec la méthode de comparaison série / intégrale :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \leq \int_0^n f = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

<u>ie</u> : $$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+2} \underset{1}{\leq} \int_0^n f \underset{2}{\leq} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}$$

On peut encadrer : $u_n = \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f$

avec (2) : $\frac{1}{n+1} + 0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} - \int_0^n f + \frac{1}{n+1}$

dc $\quad \dfrac{1}{n+1} \leq u_n \quad (\star)$

avec (1) : $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \int_0^1 f$

dc $\quad \displaystyle 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \int_0^1 f \leq 0 + 1$

dc : $\quad u_n \leq 1. \quad (\#)$

Si on mq. (u_n) est monotone, avec $(\#)$ ~~et $(\star)$~~, elle cv.

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} + \int_0^n f - \int_0^{n+1} f$$

$$= \frac{1}{n+2} - \int_n^{n+1} f$$

or $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} f \leq \frac{1}{n}$ dc $u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}$

< 0

dc $(u_n) \downarrow$, avec $(*)$ elle est minorée par 0

dc elle cv.

3) fonction définie à partir d'1 intégrale :

Cadre : f : fonction continue sur $[a,b]$

φ, ψ : 2 fonctions dérivables définies : $I \to [a,b]$

et : $\Gamma : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\, dt$.

$\in [a,b]$ existe par déf ! $\in [a,b]$

x n'apparaît que ds les bornes

introduisons F une primitive de f.

alors $\forall x \in I$, $\Gamma(x) = F(\psi(x)) - F(\varphi(x))$

f, φ, ψ sont dérivables, donc par composition, Γ aussi

et $$\Gamma'(x) = \psi'(x) \times F'(\psi(x)) - \varphi'(x) F'(\varphi(x))$$
$$= \psi'(x) f(\psi(x)) - \varphi'(x) f(\varphi(x))$$

ex : Soit $\Gamma : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \displaystyle\int_{2x+1}^{x^3} \frac{1}{t}\, dt \end{array}$

alors $$\Gamma'(x) = 3x^2 \times \frac{1}{x^3} - 2 \times \frac{1}{2x+1} = \frac{3}{x} - \frac{2}{2x+1}.$$

⚠ **ex :** $F : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \int_1^2 \frac{1}{\ln(t+x)}\,dt$$

On n'est pas ds le cadre du th. : x intervient ds l'intégrande, mais pas ds les bornes !

Changt de var : $u = t+x$, $du = dt$

$$F(x) = \int_{1+x}^{2+x} \frac{1}{u}\,du \quad \text{dc : } F'(x) = \frac{1}{\ln(2+x)} - \frac{1}{\ln(1+x)}.$$

pas de x

x n'apparait que ds les bornes.