Informatique tronc commun TP nº 10

Jeudi 9 février 2018

1. **Lisez attentivement tout l'énoncé avant de commencer.**
2. Commencez la séance en créant un dossier au nom du TP dans le répertoire dédié à l'informatique de votre compte.
3. Ayez toujours un crayon et un papier sous la main. Quand vous réfléchissez à une question, utilisez les !
4. Vous devez être autonome. Ainsi, avant de poser une question à l'enseignant, merci de commencer par :
   — relire l'énoncé du TP (beaucoup de réponses se trouvent dedans) ;
   — relire les passages du cours[1] relatifs à votre problème ;
   — effectuer une recherche dans l'aide disponible sur votre ordinateur (ou sur internet) concernant votre question.

   Il est alors raisonnable d'appeler votre enseignant pour lui demander des explications ou une confirmation !

Le but de ce TP est d'apprendre à calculer de manière approchée des intégrales. On étudie ensuite une application au traitement de signal par ondelettes.

Instructions de rendu

Attention : suivez précisément ces instructions. Vous enverrez à votre enseignant un fichier d'extension `.py` (script `Python`) nommé

`tp10_berne_durif.py`,

où les noms de vos enseignants sont à remplacer par ceux des membres du binôme. Le nom de ce fichier ne devra comporter ni espace, ni accent, ni apostrophe, ni majuscule. Dans ce fichier, vous respecterez les consignes suivantes.

— Écrivez d'abord en commentaires (ligne débutant par #), le titre du TP, les noms et prénoms des étudiants du groupe.

1. Dans le cas fort improbable où vous ne vous en souviendriez pas.

— Commencez chaque question par son numéro écrit en commentaires.
— Les questions demandant une réponse écrite seront rédigées en commentaires.
— Les questions demandant une réponse sous forme de fonction ou de script respecteront pointilleusement les noms de variables et de fonctions demandés.

Les figures demandées porteront toutes un nom du types `tp10_berne_zannad_num.png`, où les noms de vos enseignants sont à remplacer par ceux des membres du binôme et où

— `num` vaut `q02` pour la question 2 ;
— `num` vaut `q05` pour la question 5 ;
— `num` vaut `q09` pour la question 9 ;
— `num` vaut `q10` pour la question 10 (question facultative) ;
— `num` vaut `q11` pour la question 11 (question facultative).

1 Calcul approché d'une intégrale

On commencera par écrire dans le script les fonctions `Rg(f,a,b,N)`, `Rd(f,a,b,N)` et `T(f,a,b,N)` du cours portant sur le calcul approché d'intégrales.

2 Préliminaire.

On considère la fonction suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rcl} \cos(8\pi x) & \text{si} & x < 1/4 \ ; \\ 1/2 + \cos(160\pi x) & \text{si} & 1/4 \leq x < 1/2 \ ; \\ -1/2 & \text{si} & 1/2 \leq x < 3/4 \ ; \\ 8(x-1)(16x-13) + \cos(32\pi x) & \text{si} & x \geq 3/4. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Q1 Écrire une fonction `f(x)` renvoyant $f(\mathtt{x})$, pour $\mathtt{x} \in [0,1]$.

Q2 Écrire une fonction `plot_f(nom_de_fichier)` ne renvoyant rien et enregistrant dans `nom_de_fichier` le graphe de la fonction f.

Vous enverrez la figure produite à votre enseignant.

Q3 Calculer à la main $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

3 Traitement du signal par ondelettes.

On considère *l'ondelette mère* de la base de Haar :

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \text{si} & 0 \leq x < 1/2 \ ; \\ -1 & \text{si} & 1/2 \leq x < 1 \ ; \\ 0 & \text{sinon} & . \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Pour tout entier naturel r (que l'on appelle *niveau de résolution*) et tout entier $i \in [\![0, 2^r[\![$, on considère *l'ondelette fille* :

$$\psi_{r,i} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{2^r}\psi\left(2^r\left(x - \frac{i}{2^r}\right)\right). \end{array} \right.$$

Remarque 3.0.1. Ces fonctions ont les propriétés suivantes : pour tout $r, s \in \mathbb{N}$ et tout $i \in [\![0, 2^r[\![$, $j \in [\![0, 2^s[\![$ avec $(r, i) \neq (s, j)$

1. $\psi_{r,i}$ est nulle hors de $[0, 1]$;
2. $\displaystyle\int_0^1 \psi_{r,i}(t)\mathrm{d}t = 0$;
3. $\displaystyle\int_0^1 \psi_{r,i}(t)^2\mathrm{d}t = 1$;
4. $\displaystyle\int_0^1 \psi_{r,i}(t)\psi_{s,j}(t)\mathrm{d}t = 0$.

Q4 Écrire une fonction `psi(r,i,x)` renvoyant $\psi_{\mathtt{r},\mathtt{i}}(\mathtt{x})$, pour $\mathtt{r} \in \mathbb{N}$, $\mathtt{i} \in [\![0, 2^{\mathtt{r}}[\![$ et $\mathtt{x} \in \mathbb{R}$.

Q5 Écrire une fonction `plot_psi(r,i,nom_de_fichier)` ne renvoyant rien et enregistrant dans `nom_de_fichier` le graphe de la fonction $\psi_{r,i}$ sur $[0, 1]$.

Vous enverrez la figure produite pour $r = 2$ et $i = 1$ à votre enseignant.

Si $r \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![0, 2^r[\![$, on pose

$$\alpha_{r,i} = \int_0^1 \psi_{r,i}(t)f(t)\mathrm{d}t$$

et

$$\alpha_{-1} = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

Si $r \in \mathbb{N}$, on pose

$$H_r(t) = \sum_{i=0}^{2^r-1} \alpha_{r,i}\psi_{r,i}(t).$$

Enfin, si $N \in \mathbb{N}$, on reconstruit le signal de f au niveau de résolution N par :

$$\widehat{f}_N(t) = \alpha_{-1} + \sum_{r=0}^{N} H_r(t) = \alpha_{-1} + \sum_{r=0}^{N} \sum_{i=0}^{2^r-1} \alpha_{r,i}\psi_{r,i}(t).$$

Q6 En vous aidant des graphes de ψ tracés dans la question précédente, exprimer littéralement $\alpha_{r,i}$ en fonction d'intégrales de la fonction f (ainsi que de r et de i).

Q7 Écrire une fonction `alpha(r,i)` calculant $\alpha_{\mathtt{r},\mathtt{i}}$ pour $\mathtt{r} \in \mathbb{N}$ et $\mathtt{i} \in [\![0, 2^{\mathtt{r}}[\![$. On utilisera la méthode des trapèzes avec 1000 trapèzes pour calculer les intégrales de f.

Q8 Écrire une fonction `fchap(a,t,N)` calculant $\widehat{f}_{\mathtt{N}}(t)$ pour $\mathtt{N} \in \mathbb{N}$, $\mathtt{t} \in \mathbb{R}$ et en supposoant que les coefficients $\alpha_{r,i}$ ainsi que α_{-1} ont été précalculés et sont contenus dans `a`.

Par exemple, avec $\mathtt{N} = 2$, on supposera que

$$\mathtt{a} = [[\alpha_{0,0}]\ ,\ [\alpha_{1,0}, \alpha_{1,1}]\ ,\ [\alpha_{2,0}, \alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}]\ ,\ \alpha_{-1}]\,.$$

Q9 Écrire une fonction `plot_Haar(nom_de_fichier)` enregistrant les graphes de f, $\widehat{f}_0$, $\widehat{f}_1$, $\widehat{f}_3$ et $\widehat{f}_6$ dans `nom_de_fichier`.
On fera attention à ne calculer les coefficients $\alpha_{r,i}$ qu'une fois !

Vous enverrez la figure produite à votre enseignant.

4 Facultatif : représentation des erreurs d'approximation.

Remarque 4.0.2. Dans cette partie, à chaque fois qu'une erreur d'approximation est inférieure à 10^{-16}, on pourra remplacer son logarithme en base 10 par -16, afin d'éviter les erreurs numériques.

Q10 Écrire une fonction `plot_erreurs(nom_de_fichier)` représentant dans `nom_de_fichier` les erreurs d'approximation de $\int_{3/4}^{1} f$ par les méthodes des rectangles à gauche, à droite, la méthode des trapèzes et la méthodes de Simpson. On fera varier de 1 à 100 le nombre de morceaux utilisés, et l'on utilisera une échelle semi-logarithmique décimale.

Vous enverrez la figure produite à votre enseignant.

Q11 Écrire une fonction `plot_erreurs_log(nom_de_fichier)` représentant dans `nom_de_fichier` les erreurs d'approximation de $\int_{3/4}^{1} f$ par les méthodes des rectangles à gauche, à droite, la méthode des trapèzes et la méthodes de Simpson. On fera varier de 1 à 10^6 le nombre de morceaux utilisés, et l'on utilisera une échelle logarithmique décimale.

Vous enverrez la figure produite à votre enseignant.

Q12 Commenter les deux figures obtenues aux questions précédentes.