Devoir facultatif n° 1

L'objet de ce problème est la construction d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, vérifiant l'équation différentielle $f' = f$ avec la condition initiale $f(0) = 1$. Vous ne pourrez donc pas utiliser les fonctions exponentielle, logarithme et tous les objets construits dessus.

Pour tout réel x et tout entier naturel n vérifiant $|x| \neq n$, on pose

$$u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad v_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

1) Montrer l'inégalité de Bernoulli : pour tout entier naturel n et tout réel $a > -1$,

$$(1 + a)^n \geqslant 1 + na.$$

2) Montrer que, pour tout réel x, la suite $(u_n(x))_{n>|x|}$ est croissante (*i.e.* pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n > |x|$, alors $u_{n+1}(x) \geqslant u_n(x)$).

Indication : on pourra montrer que

$$u_{n+1}(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}$$

et appliquer l'inégalité de Bernoulli (en la justifiant).

3) Démontrer de même que, pour tout réel x, la suite $(v_n(x))_{n>|x|}$ est décroissante.

On utilisera pour cela la question précédente.

4) Montrer que, pour tout réel x, pour tout entier n suffisamment grand,

$$1 - \frac{x^2}{n} \leqslant \frac{u_n(x)}{v_n(x)} \leqslant 1.$$

5) Déduire des questions précédentes que les deux suites $(u_n(x))_{n>|x|}$ et $(v_n(x))_{n>|x|}$ convergent, puis qu'elles ont même limite.

Pour tout réel x, on note $\exp(x)$ la valeur de la limite commune aux deux suites $(u_n(x))_{n>|x|}$ et $(v_n(x))_{n>|x|}$.

6) Montrer que $\exp(0) = 1$.

7) Soit h un réel vérifiant $|h| < 1$, x un réel et n un entier naturel vérifiant $x + n > 1$. Montrer que

$$\left(1 + \frac{x+h}{n}\right)^n \geqslant \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{h}{1 + \frac{x}{n}}\right).$$

8) En déduire que

— si $0 < h < 1$,

$$\exp(x) \leqslant \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} \leqslant \frac{\exp(x)}{1-h} ;$$

— si $-1 < h < 0$,

$$\frac{\exp(x)}{1-h} \leqslant \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} \leqslant \exp(x).$$

9) Conclure.

— FIN —