Devoir à la maison n° 16

À rendre le 6 avril

I. Dénombrement d'un ensemble d'applications.

Soit E un ensemble fini, de cardinal n. Quel est le nombre d'applications $f : E \to E$ vérifiant $f \circ f = f$? On écrira le résultat sous forme de somme.

Indication : Pour $f : E \to E$, on pourra chercher une condition nécessaire et suffisante sur $f_{|\,\mathrm{Im}(f)}$ pour que $f \circ f = f$.

II. Endomorphismes nilpotents.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un endomorphisme f de E est dit *nilpotent* s'il existe un entier naturel p vérifiant $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Dans ce cas, l'*indice* de f est le plus petit des entiers naturels p vérifiant $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On considère $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent, d'indice p.

1) Soit $u \in E \setminus \mathrm{Ker}(f^{p-1})$, montrer que la famille $(u, f(u), \dots, f^{p-1}(u))$ est libre.

2) En déduire que, si E est de dimension finie égale à n, alors $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

3) Soit $g \in \mathscr{GL}(E)$ vérifiant $f \circ g = g \circ f$ (g commute avec f). Montrer que $f + g \in \mathscr{GL}(E)$ lorsque :

- **a)** E est de dimension finie ;
- **b)** E est quelconque.

4) Donner des exemples d'endomorphismes f et g de $\mathscr{L}(\mathbb{K}^2)$, avec f est nilpotent, que $g \in \mathscr{GL}(\mathbb{K}^2)$ mais $f + g \notin \mathscr{GL}(\mathbb{K}^2)$.

— FIN —