

Feuille d'entraînement n° 3, semaine du 13 au 19 avril

Dimension finie et probabilités

Ces exercices sont totalement facultatifs. Ils sont plutôt simples, et peu originaux, pour vous permettre de réviser le cours, et voir si vous êtes capables de résoudre des exercices d'application (presque) directe du cours.

Exercice 1 Déterminer suivant la valeur de $x \in \mathbb{R}$ le rang de la famille de vecteurs $e_1 = (1, x, -1)$, $e_2 = (x, 1, x)$, $e_3 = (-1, x, 1)$.

Exercice 2 Soit $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ où E est un K -espace vectoriel de dimension finie n . Le but est de montrer les inégalités :

$$\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - n \leq \operatorname{rg}(f \circ g) \leq \inf(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g))$$

- 1) a) Montrer que $\operatorname{Im}(f \circ g) \subset \operatorname{Im}(f)$.
b) Montrer que $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker}(f \circ g)$.
c) En déduire l'inégalité de droite.
- 2) On pose $F = \operatorname{Im} g$, et $h = f|_F$.
a) Montrer que $f(F) = (f \circ g)(E)$ et en déduire que $\operatorname{rg} h = \operatorname{rg}(f \circ g)$.
b) Montrer que $\dim \operatorname{Ker} h \leq \dim \operatorname{Ker} f$.
c) Écrire la formule du rang pour h dans F et conclure.

Exercice 3

- 1) Pouvez-vous donner un endomorphisme f d'un espace-vectoriel E tel que $\operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Im}(f) \neq E$?
- 2) Même question avec $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) \neq \{0\}$.
- 3) Pouvez-vous donner un endomorphisme f d'un espace-vectoriel E qui n'est pas un projecteur et tel que $\operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = E$?

Exercice 4 La probabilité qu'un forage conduise à une nappe de pétrole est $1/10$.

Quelle est la probabilité pour que, sur dix forages, on ait au moins un succès ?

Combien de forages sont-ils nécessaires pour avoir au moins une chance sur deux de succès ?

Exercice 5 Un étudiant doit répondre à une question à choix multiple où cinq réponses sont proposées, une seule étant correcte.

Quand l'événement A : " l'étudiant a bien travaillé " est réalisé, la réponse fournie est la bonne réponse. Dans le cas contraire l'étudiant répond au hasard.

Si l'événement B : « la réponse fournie est correcte » est réalisé, calculer la probabilité $P(A|B)$ en fonction de $p = P(A)$.

Exercice 6 Il pleut en moyenne 3 jours sur 10.

Deux radios A et B annoncent la météo, avec une fiabilité de 95% pour la première, et de 90% pour la seconde (c'est-à-dire que, par exemple, s'il doit pleuvoir, la probabilité que la première radio ait fait la bonne prédiction est de 0,95.)

Lundi matin, la radio A annonce beau temps, et la radio B annonce de la pluie. Quelle est la probabilité qu'il pleuve ? (vous préciserez quelles hypothèses vous avez été conduits à faire sur le problème)