



Feuille d'exercice n° 25 : **Espaces euclidiens**



Exercice 1 () Sur $\mathbb{R}_3[X]$, on considère les formes bilinéaires suivantes. Dire lesquelles sont des produits scalaires.

- 1) $\varphi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$
- 2) $\chi(P, Q) = \int_{-1}^1 (P'(t)Q(t) + P(t)Q'(t)) dt$
- 3) $\psi(P, Q) = \int_{-1}^1 P'(t)Q'(t) dt + P(0)Q(0).$



Exercice 2 () À deux polynômes $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on associe

$$\langle P, Q \rangle = (a_0 + a_1)b_0 + (a_0 + 3a_1)b_1 + 3a_2b_2.$$

Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

Exercice 3 ( ) Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $v_1, \dots, v_n \in E$.

Montrer l'inégalité : $\left\| \sum_{i=1}^n v_i \right\|^2 \leq n \sum_{i=1}^n \|v_i\|^2.$

Exercice 4 ( ) Soit $a < b$ deux réels.

- 1) Soient f et g deux applications continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . Montrer que :

$$\left(\int_a^b f(t)g(t) dt \right)^2 \leq \int_a^b f^2(t) dt \int_a^b g^2(t) dt.$$

Étudier le cas d'égalité.

- 2) Soit f une application continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . Montrer que :

$$\left(\int_a^b f(t) dt \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(t) dt.$$

Étudier le cas d'égalité.

Exercice 5 ( ) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Montrer que, sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application $(A, B) \rightarrow \text{tr}(^tAB)$ est un produit scalaire.
- 2) Soit N la norme associée à ce produit scalaire (on l'appelle *norme de Frobenius*), montrer que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), N(AB) \leq N(A)N(B).$$


- 3) Montrer que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), |\text{tr}(A)| \leq \sqrt{n}N(A).$$


Exercice 6 Soit E un espace euclidien, et (e_1, \dots, e_n) des vecteurs unitaires vérifiant : $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2$.

- 1) Montrer que (e_1, \dots, e_n) est une famille orthogonale.
- 2) Montrer que (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormale.

Remarque : on ne suppose pas que la dimension de l'espace est n .


Exercice 7 () Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer les égalités suivantes.


- 1) $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$
- 2) $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
- 3) $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

Exercice 8 ()

On munit $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire usuel : $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$. Déterminer F^\perp , avec $F = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$. Que peut-on en conclure ?

Indication : si $f \in F^\perp$, on pourra s'intéresser à la fonction $t \mapsto tf(t)$.

Exercice 9 () On sait que l'application $(A, B) \mapsto \text{tr}(^tAB)$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans \mathbb{R} est un produit scalaire. Calculer l'orthogonal de l'ensemble des matrices diagonales puis celui des matrices symétriques.

Exercice 10 () \mathbb{R}^3 est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien. Vérifier que les vecteurs $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (1, 0, 2)$ et $e_3 = (1, 1, 1)$ forment une base de \mathbb{R}^3 et en déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt.

Exercice 11 () On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire : $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt$. Existe-t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall P \in \mathbb{R}[X], (P|A) = P(0)$?

Exercice 12 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est orthogonal (c'est-à-dire $\text{Ker}(p) \perp \text{Im}(p)$) si et seulement si : $\forall x \in E : \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Indication : pour montrer une des implications, avec $k \in \text{Ker } p$ et $i \in \text{Im } p$, on pourra considérer le vecteur $i + \lambda k$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.


Exercice 13

- 1) Montrer qu'un parallélogramme est un rectangle si et seulement si ses diagonales sont de même longueur.
- 2) Montrer qu'un parallélogramme est un losange si et seulement si ses diagonales sont orthogonales.

Exercice 14 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 2. Soit x et $y \in E$. Montrer les propriétés suivantes.

- 1) Si $\|x\| = \|y\|$, alors il existe un hyperplan H de E tel que $y = s(x)$ où s est la symétrie orthogonale par rapport à H .
- 2) Si $\langle x, y \rangle = \|y\|^2$, alors il existe un hyperplan H de E tel que $y = p(x)$ où p est la projection orthogonale sur H .
- 3) Les hyperplans trouvés précédemment sont-ils uniques ?

Exercice 15 Déterminer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (e^x - (ax + b))^2 dx$.

Exercice 16 () Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. À tout couple (P, Q) de E , on associe $\langle P, Q \rangle = \int_0^\pi P(\cos t)Q(\cos t)dt$. On appelle k^e polynôme de Tchebychev le polynôme défini par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, P_k(\cos \theta) = \cos(k\theta).$$


1) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .

2) Montrer que les polynômes de Tchebychev P_0, \dots, P_n constituent une base orthogonale de E .

Bonus : si cela n'est pas clair, montrez l'existence et l'unicité de ces polynômes, déterminer le degré et le coefficient dominant de chacun.

Exercice 17 Soit E un espace euclidien, f et g deux endomorphismes de E qui commutent. On suppose que les matrices de f et de g dans une base orthonormée sont respectivement symétriques et antisymétriques.

Montrer que $\forall u \in E, \langle f(u), g(u) \rangle = 0$, puis que $\forall u \in E, \|(f - g)(u)\| = \|(f + g)(u)\|$.

Exercice 18 () Soit $E = \mathbb{R}^3$, muni de sa structure euclidienne usuelle, soit $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Déterminer les matrices dans la base \mathcal{C} des transformations suivantes.

1) La symétrie et la projection orthogonale par rapport au plan d'équation $x - 2y + 3z = 0$.

2) La symétrie et la projection orthogonale par rapport à la droite engendrée par le vecteur $e_1 - 4e_3$.

Exercice 19 Soit E un espace euclidien de dimension n , et $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ une base orthonormale de E . Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $u = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ est un vecteur unitaire de E .


1) Déterminer la matrice dans la base \mathcal{B} de la projection orthogonale sur la droite D engendrée par u .

2) En déduire les matrices de la projection orthogonale sur D^\perp , de la symétrie orthogonale par rapport à D et de la symétrie orthogonale par rapport à D^\perp .

Exercice 20 Soit f un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien E .

1) Montrer que $\text{Ker}(f - \text{Id}) = \text{Im}(f - \text{Id})^\perp$.


2) En déduire que si $(f - \text{Id})^2 = 0$, alors $f = \text{Id}$.

Exercice 21 () Déterminer les natures et les éléments caractéristiques des transformations de \mathbb{R}^2 dont les matrices dans la base canonique sont les suivantes.

1) $A = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$

2) $B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

3) $C = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 22 () Caractériser les endomorphismes dont les matrices dans la base canonique de \mathbb{R}^2 sont les suivantes.

1) $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

2) $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Exercice 23 Soient E un espace euclidien orienté de dimension 2, r une rotation de E et s une réflexion de E . Déterminer $r \circ s \circ r$ et $s \circ r \circ s$.

