Devoir surveillé n°10
Version 1

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en classe.

On considère un ivrogne marchant le long d'un trottoir. À chaque seconde, il avance avec probabilité un demi d'un pas, et recule d'un pas avec la même probabilité. On supposera que tous les pas sont de la même longueur. On se donne un repère le long du trottoir, gradué en pas. On note X_n la position de l'ivrogne au bout de $n \in \mathbb{N}$ secondes.
Donner la loi de X_n , son espérance et sa variance.

II. Exponentielle de matrice.

La première partie de ce problème est indépendante des trois suivantes.

Les résultats obtenus dans la partie **II** sont utilisés dans les parties suivantes. Vous les admettre, le cas échéant.
Un résultat calculatoire est fourni au début de chacune des parties **III** et **IV**. Vous ne pourrez bien entendu pas les utiliser dans la partie **II**, et devrez détailler leur obtention.

Partie I - Exponentielle d'une matrice nilpotente

Soit p un entier naturel non nul. On note $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ l'anneau des matrices carrées réelles d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$.

Une matrice A de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ est dite nilpotente d'indice 3 si elle vérifie $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$.

Dans cette partie, on note A une matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, nilpotente d'indice 3 . On note aussi I la matrice unité d'ordre p.

Pour tout réel t, on note $E(t)$ la matrice

$$E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2.$$

1) Vérifier la relation : $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2$, $E(s)E(t) = E(s+t)$.

2) En déduire que $(E(t))^n = E(nt)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

3) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que la matrice $E(t)$ est inversible. Quel est son inverse ?

4) Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre.

5) En déduire que l'application $E\ :\ t \mapsto E(t)$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, est injective.

6) Dans cette question, on prend $p = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Expliciter $E(t)$ sous la forme matricielle, pour $t \in \mathbb{R}$.

Partie II - Diagonalisation d'une matrice A

Dans cette partie, on note $\mathscr{B}_e = (e_1, e_2)$ la base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui lui est canoniquement associé.

7) Montrer que $F = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $G = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ sont deux droites vectorielles, supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$. Préciser un vecteur directeur u_1 de F, et un vecteur directeur u_2 de G.

8) Sans calculs, déterminer la matrice de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dans la base $\mathscr{B}_u = (u_1, u_2)$.

9) En déduire qu'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale (toutes deux carrées d'ordre 2) telles que $A = PDP^{-1}$.
Expliciter P, D et P^{-1}.

10) Expliciter D^n pour tout n entier naturel. Démontrer la relation $A^n = PD^nP^{-1}$.
En déduire l'expression de A^n sous forme matricielle.

Partie III - Racines carrées de A

On reprend les notations de la partie **II**.

On se propose dans cette partie de déterminer toutes les matrices $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ solution de l'équation $X^2 = A$.

On admet que l'on a obtenu précédemment

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11) Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, vérifiant $M^2 = D$.
Montrer que $MD = DM$ et en déduire que M est diagonale.
Quels peuvent être ses coefficients diagonaux ?

12) Soit $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. En étudiant $M = P^{-1}XP$, déterminer une écriture des matrices X solutions de l'équation $X^2 = A$. On ne demande pas de calculer explicitement les coefficients de X .

13) On note $X_1, \ldots, X_m$ les solutions de l'équation $X^2 = A$.
Sans calculer explicitement ces m solutions, déterminer leur somme $S = X_1 + \ldots + X_m$ et leur produit $P = X_1 \ldots X_m$.

Partie IV - Exponentielle de tA

On reprend les notations de la partie **II**.

On admet que l'on a obtenu précédemment, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 \times 2^n - 2 & 6 - 6 \times 2^n \\ 2^n - 1 & 3 - 2 \times 2^n \end{pmatrix}.$$

14) En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que, pour tout réel t , on a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{e}^{\,t}.$$

15) Pour tout réel t, pour tout entier naturel n, on note $E_n(t)$ la matrice définie par $E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k$.

On écrira cette matrice sous la forme $E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$.

Expliciter (sous forme de sommes) ses coefficients $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$, $d_n(t)$.

16) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $E(t)$ la matrice $E(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$ avec $a(t) = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n(t)$, $b(t) = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n(t)$, etc.
Expliciter $E(t)$.

17) Montrer qu'il existe deux matrices Q et R (carrées d'ordre deux) telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \; E(t) = \mathrm{e}^{\,2t} Q + \mathrm{e}^{\,t} R.$$

18) Calculer les matrices Q^2, R^2, QR et RQ.

19) Que peut-on dire des endomorphismes q et r de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associés aux matrices Q et R ?
On pourra préciser la réponse en utilisant les droites F et G de la question **7)**.

20) En déduire que

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, E(s)E(t) = E(s+t).$$

Que dire que $(E(t))^n$ pour $n \in \mathbb{N}$? de $(E(t))^{-1}$?

21) L'application $E \; : \; t \mapsto E(t)$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathscr{M}_2(R)$ est-elle injective ?

— **FIN** —