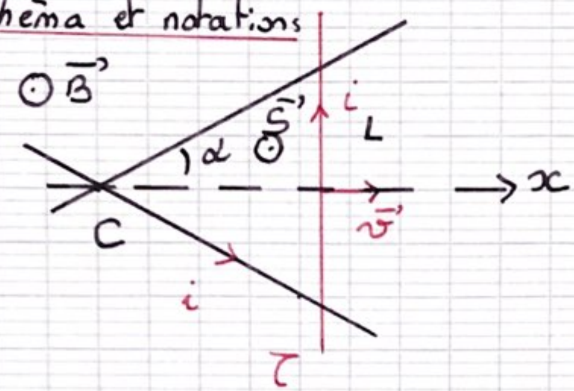
Circuit mobile dans champ stationnaire

Exercice 1.

Schéma et notations



1. La fem induite

Loi de Faraday $e = -\dfrac{d\phi}{dt}$

or $\phi = \int \vec{B} \cdot \vec{dS}$

$\phi = BS$

Il faut déterminer S : $S = xL = x^2 \operatorname{tg}\alpha$

d'où $\boxed{e = -B \operatorname{tg}\alpha \, 2x\dot{x}}$

---

2. L'intensité du courant

On a $i = e/R$ (si on peut négliger l'autoinduction)

avec $R = kl = k\left(2x \operatorname{tg}\alpha + \dfrac{2x}{\cos\alpha}\right)$

$= k2x \dfrac{\sin\alpha + 1}{\cos\alpha}$

D'où $i = -\dfrac{B \sin\alpha \, 2x\dot{x}}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{\cos\alpha}{2kx(\sin\alpha + 1)}$

$\boxed{i = -\dfrac{B}{k} \dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha + 1} \dot{x}}$ < 0 Loi de Lenz $\vec{B}_{ind}$ est selon $-\vec{B}$

---

3. Force de l'opérateur

Référentiel : $\mathcal{R}$ Galiléen

Système : $\mathcal{T}$

Forces : le poids $\vec{P}$

la réaction des Rails $\vec{R_1}$, $\vec{R_2}$

la force de Laplace $\vec{F_L}$

la force de l'opérateur $\vec{F}$

<u>Loi</u> : 2° loi de Newton $m\vec{a} = \Sigma\vec{F}$

On veut que la tige garde une vitesse constante $\vec{a} = \vec{0}$

Projection sur $\vec{e}_3$ $-P + R_1 + R_2 = 0$

$\Rightarrow \vec{F} = -\vec{F_L}$

Il faut donc determiner la force de Laplace.

$$\vec{F_L} = \int_L i \, \vec{dl} \wedge \vec{B} = i B \operatorname{tg}\alpha \, 2x \, \vec{e_x}$$

d'où $\vec{F} = -iB \operatorname{tg}\alpha \, 2x \, \vec{e_x}$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{B^2}{k} \frac{\sin\alpha \operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha + 1} 2x \, \dot{x} \, \vec{e_x}}$$

---

4. Les puissances

Puissance perdue par effet joule

$$P_J = Ri^2$$

$$= k \frac{\sin\alpha + 1}{\cos\alpha} 2x \cdot \frac{B^2}{k^2} \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + 1}\right)^2 \dot{x}^2$$

$$\boxed{P_J = \frac{B^2}{k} \operatorname{tg}\alpha \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + 1}\right) 2x \, \dot{x}^2}$$

Puissance fournie par l'operateur

$$P_{op} = F\dot{x}$$

$$\boxed{P_{op} = \frac{B^2}{k} \operatorname{tg}\alpha \left(\frac{\sin\alpha}{1 + \sin\alpha}\right) 2x \, \dot{x}^2}$$

L'operateur compense les pertes par effet joule.

Exercice 2

Referentiel : $\mathcal{R}$ Galileen

Systeme : le cadre

Forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$

la force de Laplace $\vec{F_L}$

Loi : 2· loi de Newton $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F_L}$

1· Cas : le cadre est entierement dans la region $\vec{B} = \vec{0}$

on a $\vec{F_L} = \vec{0}$ il n'y a pas de phenomene d'induction

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}}$$

2· Cas : le cadre est à cheval entre les deux regions.
La force de Laplace s'applique alors sur le coté bas du cadre, les forces exercées sur les cotés verticaux s'annulant entre elles.

$\cdot \ \vec{F_L} = i a B \vec{e_x}$

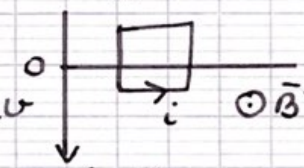
D'où equation mecanique $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + iaB\vec{e_x}$

$$\Rightarrow m\frac{dv}{dt} = mg + iaB$$

$\cdot$ Il faut donc determiner i

$\phi = BS = Bxa$

Loi de Faraday $e = -\dfrac{d\phi}{dt} = -Bav$



Equation electrique : $e = Ri + L\dfrac{di}{dt}$

on a donc

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = mg + aBi \\ -Bav = Ri + L\dfrac{di}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i = \dfrac{m}{aB}(\dot{v} - g) \\ -Bav = \dfrac{Rm}{aB}(\dot{v} - g) - \dfrac{Lm}{Ba}\ddot{v} \end{cases}$$

d'où $\boxed{\ddot{v} + \dfrac{R}{L}\dot{v} + \dfrac{(Ba)^2}{Lm}v = \dfrac{R}{L}g}$

3· Cas le cadre est entierement dans la region $\vec{B} \neq \vec{0}$

Le flux de $\vec{B}$ reste constant il n'y a pas de phenomene d'induction $\boxed{\dfrac{dv}{dt} = \vec{g}}$

1. La fem induite

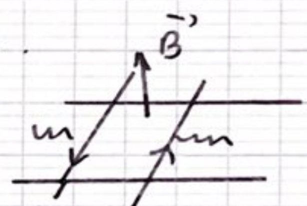
Le mouvement des tiges provoque une variation de surface offerte à $\vec{B}$ et donc une variation de flux

$$\phi = BS = Bd(x_2 - x_1)$$

Loi de Faraday $\boxed{e = -\frac{d\phi}{dt} = Bd(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)}$

2. Oscillations

On néglige les effets du champ propre.



Référentiel : $\mathcal{R}$ Galiléen

Système : tige 1 ou 2

Forces : le poids $\vec{P}$

la réaction des rails $\vec{R_N}$

la tension du ressort $\vec{T}$

la force de Laplace $\vec{F_L}$

Loi : 2° loi de Newton : $m\vec{a} = \Sigma \vec{F}$

Projection sur $\vec{e_x}$: $m\ddot{x}_1 = F_L + T$

or $\vec{F_L} = i\vec{l} \wedge \vec{B} = -iBd\vec{e_x}$

$\vec{T} = -k(l_1 - l_0)\vec{e_x} = -kx_1\vec{e_x}$

d'où $m\ddot{x}_1 = -k x_1 - iBd$

De même $m\ddot{x}_2 = -k_0 x_2 + iBd$ (le courant change de sens)

On a de plus $e = 2Ri = Bd(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 - \frac{(Bd)^2}{2R}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 + \frac{(Bd)^2}{2R}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \end{cases}$$

on pose $S = x_1 + x_2$

$D = x_1 - x_2$

$$\begin{cases} m\ddot{S} = -kS \\ m\ddot{D} = -kD - \frac{(Bd)^2}{R}\dot{D} \end{cases}$$

d'où $\begin{cases} \ddot{S} + \omega_0^2 S = 0 \\ \ddot{D} + \frac{(Bd)^2}{mR}\dot{D} + \omega_0^2 D = 0 \end{cases}$ $\qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Solution S : $S = x_1 + x_2 = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$

Conditions initiales à $t=0$ $\quad x_1 = a \quad x_2 = 0$

$\dot{x}_1 = 0 \quad \dot{x}_2 = 0$

D'où $S = x_1 + x_2 = a\cos\omega_0 t$

Solution D $\quad \ddot{D} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{D} + \omega_0^2 D = 0$

Equation caractéristique : $D^2 + \frac{\omega_0}{Q}D - \omega_0^2 = 0$

$\Delta = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$

Il y a oscillations si $\Delta < 0$ $\quad Q > 1/2 \Rightarrow \frac{\sqrt{km}\,R}{(Bd)^2} > 1/2$

D'où $x_1 - x_2 = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)$

avec $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

Conditions initiales $\Rightarrow$ $\boxed{x_2 - x_1 = a e^{\frac{-\omega_0 t}{2Q}}\left(\cos\Omega t + \frac{\sin\Omega t}{\sqrt{4Q^2-1}}\right)}$

On obtient $x_1 = \frac{S+D}{2}$

$x_2 = \frac{S-D}{2}$

---

3. Bilan énergétique

Equation électrique : $e = (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)Bd = 2Ri$ ①

Equations mécaniques : $m\ddot{x}_1 + kx_1 = -iBd$ ②

$m\ddot{x}_2 + kx_2 = +iBd$ ③

① × i $\quad 2Ri^2 = Bdi(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$

② × $\dot{x}_1$ $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{k}{2}x_1^2\right) = -iBd\dot{x}_1$

③ × x_2' $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}x_2'^2 + \frac{k}{2}x_2^2\right) = iBd\,x_2'$

on a alors $\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\left(x_1'^2 + x_2'^2\right) + \frac{k}{2}\left(x_2^2 + x_1^2\right)\right) = -2Ri^2$

Soit $\boxed{\frac{d}{dt}\left(E_c + E_p\right) = -2Ri^2}$

Exercice 4.

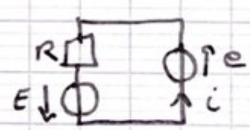
1. Oscillation.

Le passage d'un courant va induire une force de Laplace selon $\vec{e_x}$. Ainsi le ressort va être, dans un premier temps, comprimé. Sous l'action de la force de rappel du ressort il va y avoir des oscillations.

Equation electrique

le flux : $\Phi = BS = Bax$

loi de Faraday : $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bav$



Loi des mailles : $E - Bax' = Ri$

Equation mecanique

Referentiel : $\mathcal{R}$ Galileen

Systeme : la tige

Forces : le poids $\vec{P}$

la reaction des rails $\vec{R_N}$

la force de Laplace $\vec{F_L} = i\,\vec{L}\wedge\vec{B} = iBa\,\vec{e_x}$

la tension du ressort $\vec{T} = -kx\,\vec{e_x}$

Loi : 2° loi de Newton $m\vec{a} = \Sigma\vec{F}$

Projection sur Ox $\quad m\ddot{x} = -kx + iBa$

Equation en x

$$m\ddot{x} = -kx + \frac{E - Bax'}{R}Ba$$

$$\ddot{x} + \frac{(Ba)^2}{mR}x' + \frac{k}{m}x = \frac{BaE}{mR}$$

Forme canonique : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{BaE}{mR}$

avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ $\quad Q = \omega_0 mR/(Ba)^2$

Equation caracteristique : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$

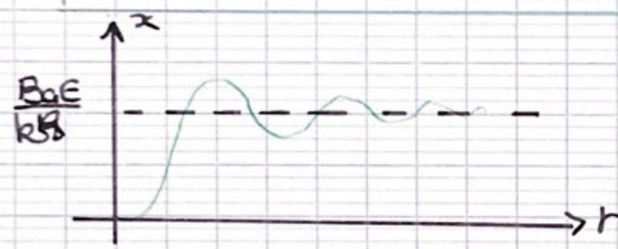
$$r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$
$$= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\Omega$$

Solution generale : $x = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\right) + \frac{BaE}{kR}$

Conditions initiales

à $t = 0$ $\begin{cases} x = 0 = A + \frac{BaE}{kR} \\ \dot{x} = 0 = -\frac{\omega_0}{2Q}A + B\Omega \end{cases}$

d'où $\boxed{x - \frac{BaE}{kR} = -\frac{BaE}{kR}\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left[\cos\Omega t - \frac{\omega_0}{2Q\Omega}\sin\Omega t\right]}$



2. Regime sinusoidale

On passe en notations complexes

$$\underline{X}\left(-\omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right) = -\frac{Ba}{mR}E_m$$

$$\underline{X} = \frac{\frac{Ba}{mR}E_m}{(\omega_0^2 - \omega^2) - j\frac{\omega\omega_0}{Q}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &x(t) = X\cos(\omega t + \varphi) \\ &\text{avec } X = \frac{Ba/mR}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}}E_m \\ &\varphi = -\text{Arctg}\,\frac{\omega\omega_0}{Q(\omega_0^2 - \omega^2)} \end{aligned}}$$