Devoir à la maison n° 10

À rendre le 17 janvier

Dans tout ce problème, on considère un groupe $(G,*)$ de neutre e. On adoptera des notations multiplicatives : pour tout $x, y \in G$, on notera $xy = x * y$.

Si $g \in G$ et si H est un sous-groupe de G, on introduit le *translaté à gauche* de H par g comme

$$gH = \{ \, gh \mid h \in H \, \}$$

et le *translaté à droite* de H par g comme

$$Hg = \{ \, hg \mid h \in H \, \} \, .$$

Si H est un sous-groupe de G, on introduit le *normalisateur* de H dans G comme

$$\mathrm{N}_G(H) = \{ \, g \in G \mid gH = Hg \, \} \, .$$

On dit que ce sous-groupe H est *distingué* (on dit aussi parfois *normal*) si $\mathrm{N}_G(H) = G$, *i.e.* si pour tout $g \in G$: $gH = Hg$.

Si X est une partie de G, on introduit le *centralisateur* de X dans G comme

$$\mathrm{C}_G(X) = \{ \, g \in G \mid \forall x \in X, \ gx = xg \, \} \, .$$

Si $x \in G$, on notera $\mathrm{C}_G(x)$ à la place de $\mathrm{C}_G(\{x\})$.

I – Quelques généralités.

1) Soit H un sous-groupe de G.

- **a)** Montrer que
$$\mathrm{N}_G(H) = \left\{ \, g \in G \;\middle|\; gHg^{-1} = H \, \right\} .$$
- **b)** Montrer que $\mathrm{N}_G(H)$ est un sous-groupe de G.
- **c)** Montrer que $H \subset \mathrm{N}_G(H)$.

2) Soit X une partie de G.

- **a)** Montrer que, pour tout $x \in X$, $\mathrm{C}_G(x)$ est un sous-groupe de G.
- **b)** En déduire que $\mathrm{C}_G(X)$ est un sous-groupe de G.

3) Soit H un sous-groupe de G. Comparer (au sens de l'inclusion) $\mathrm{N}_G(H)$ et $\mathrm{C}_G(H)$.

II – Produit semi-direct.

Dans cette partie, on considère deux sous-groupes de G, que l'on notera H et K. On définit alors

$$HK = \{\, hk \mid (h,k) \in H \times K \,\}\,.$$

4) Montrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} H \times K & \longrightarrow & HK \\ (h,k) & \longmapsto & hk \end{array} \right.$ est une bijection si et seulement si $H \cap K = \{e\}$.

5) **a)** Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.

b) Dans ce cas, montrer que HK est le plus petit sous-groupe de G contenant $H \cup K$.

On dit alors que G est le *produit semi-direct* de K par H si

— $G = HK$;
— $H \cap K = \{e\}$;
— K est un sous-groupe distingué de G.

6) On suppose dans cette question que G est le produit semi-direct de K par H.

a) Montrer qu'il existe une unique application $\alpha : G \to H$ telle que, pour tout $(h,k) \in H \times K$, $\alpha(hk) = h$.

b) Montrer que α est un morphisme de groupes.

c) Montrer que $\alpha(H) = H$ et que $H \cap \mathrm{Ker}(\alpha) = \{e\}$.

7) Réciproquement, soit $\alpha : G \to H$ un morphisme de groupes vérifiant $\alpha(H) = H$ et $H \cap \mathrm{Ker}(\alpha) = \{e\}$. Montrer que G est le produit semi-direct de $\mathrm{Ker}(\alpha)$ par H.

— **FIN** —