Devoir surveillé n° 1 - Remarques

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 28 points, ramené sur 5 points.
- Problèmes : chaque question sur 4 points, total sur 92 points, ramené sur 15 points.

Statistiques descriptives.

	Calculs	Problème	Note finale
Note maximale	22	69	20
Note minimale	4	11	6
Moyenne	$\approx 10,98$	$\approx 32,22$	$\approx 11,14$
Écart-type	$\approx 4,90$	$\approx 12,44$	$\approx 3,01$

Remarques générales.

Il faut encadrer tous vos résultats : à partir du prochain DS, les résultats non encadrés seront sanctionnés encore plus sévérement.

Il faut introduire toutes les variables que vous utilisez.

Vous utilisez encore beaucoup trop d'équivalences là où des implications suffisent. Ou alors vous utilisez le symbole $\Leftrightarrow$ comme une abréviation pour ne pas avoir à écrire « donc ».

Attention, ce sont les fonctions qui sont dérivables, pas leurs images, donc « $f(x)$ est dérivable » n'a pas de sens. C'est : « f est dérivable ». De plus, on écrit « f est dérivable sur $[0,1[$ » ou « f est dérivable en tout $x \in [0,1[$ » et non « f est dérivable pour tout $x \in [0,1[$ ».

« f est définie ssi $x \in I$ » n'a pas de sens. Déjà, je ne comprends pas « f est définie ». Ensuite, le membre de droite dépend de x, pas celui de gauche ! On écrit « f est définie en x ssi $x \in I$ », après avoir introduit x évidemment.

I. Concavité du logarithme.

1. Vos x sont rarement introduits.

2.a. T_a est le nom de la tangente, donc c'est un ensemble de points. Écrire « $T_a = \frac{1}{a}(x-a) + \ln a$ » n'a donc aucun sens. Une équation de la tangente est ici $T_a \ : \ y = \frac{1}{a}(x-a) + \ln a$.

2.b. Il fallait penser à utiliser la première question, il n'était pas nécessaire de tout refaire.

3.a. Vos t sont rarement introduits.

3.b. Pour justifier la dérivabilité, il fallait montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $x(t) > 0$. C'était ça, et rien d'autre !
Il y a beaucoup trop d'erreurs dans le calcul de $f'(t)$. J'ai souvent lu $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(x(t)) = \frac{1}{x(t)}$. Parfois aussi, $y(t)$ n'est pas dérivée. Parfois encore, $\ln a$ est dérivé en $\frac{1}{a}$, alors que a est une constante ! Tout cela est très embêtant.

3.c. Beaucoup d'erreurs de raisonnement pour donner les signes de $f'(0)$ et $f'(1)$. Des encadrements des termes intervenant dans ces deux réels ne fonctionnaient pas, mais beaucoup n'ont pas eu de scrupules à écrire des choses du genre : « $x > 0$ et $y < 0$ donc $x + y > 0$ ».

4.a. Les a_i doivent être quantifiés dans l'hypothèse de récurrence, puisque leur nombre dépend de n. Beaucoup d'arnaques du genre $\ln(a + b) = \ln(a) + \ln(b)$ dans l'hérédité.

4.b. Beaucoup montrent que « si $a = b$ alors $\sqrt{ab} = \dfrac{a+b}{2}$ » et concluent que « si $a = b$ ssi $\sqrt{ab} = \dfrac{a+b}{2}$ » : attention à la logique.

4.c. C'était la question vraiment difficile de ce devoir.

II. Étude d'une fonction.

1. Attention à l'écriture de l'ensemble des points d'annulation de sin : il s'écrit $\{k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$, et pas autrement (ou éventuellement $\pi\mathbb{Z}$, mais nous n'avons pas encore vu cette notation). Les autres écritures n'ont pas de sens.
Attention aussi au symbole « privé de » pour les ensembles : c'est un backslash et pas un slash. On écrit $A\backslash B$ et surtout pas A/B qui a une toute autre signification (hors-programme).

2. Il y avait 3 arguments à donner : la périodicité (2π et pas π !), l'imparité, et la symétrie par rapport à $\dfrac{\pi}{2}$: $\sin(\pi - x) = \sin(x)$. Il fallait les donner dans cet ordre exclusivement et expliquer à chaque étape la réduction qui en découlait : d'abord on réduit de $\mathbb{R}$ à $]-\pi, \pi[$, puis à $]0, \pi[$, puis à $[\pi/2, \pi[$.
N'oubliez pas non plus que l'imparité ne peut être utilisée que sur un intervalle centré en 0. Utilisez l'imparité sur $[0, \pi[$ ne permet absolument pas de réduire l'intervalle d'étude.
On pouvait aussi remarquer que $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$, ce qui permettait de réduire à $[-\pi/2, \pi/2]$ en une seule fois, mais il faut expliquer comment retrouver tout le graphe de f à partir de cela, ce qui est moins habituel qu'avec les propriétés précédents. Ensuite par imparité on réduit à $]-\pi/2, 0]$, puis la propriété de départ permet encore de passer à $[\pi/2, \pi[$.

3. Là encore, la justification de la dérivabilité a souvent été éxpédiée par une simple affirmation sans explication. Il suffisait de (mais il fallait) dire que le dénominateur était dérivable et ne s'annulait pas sur le domaine de définition de f.

4. Justifiez votre résultat grâce aux propriétés de la question 2.

5. Il faut tracer les tangentes horizontales et les asymptotes (qui étaient ici verticales). Attention, les asymptotes sont des droites, à tracer, et ne se représentent pas par des doubles flèches comme les tangentes.

6. Il fallait citer le nom du théorème utilisé : le théorème de la bijection ! Il fallait aussi très clairement justifier pourquoi l'ensemble d'arrivée était $[1, +\infty[$, et pas seulement en renvoyant au tableau de variation. Attention, cet intervalle n'est pas $[f(\pi/2), f(\pi)[$ car $f(\pi)$ n'existe pas. C'est $[f(\pi/2), \lim\limits_{+\infty} f[$.
Enfin, il fallait justifier pourquoi g^{-1} était strictement croissante.

7. Attention, $x \in [\pi/2, \pi[$, donc $\arcsin(\sin(x)) = \pi - x$, et non x.

9. Même problème qu'au-dessus : $g(y) \in [\pi/2, \pi[$ donc $\cos(g(y)) \leqslant 0$, donc si $\cos^2(g(y)) = 1 - \dfrac{1}{y^2}$, alors $\cos(g(y)) = -\sqrt{1 - \dfrac{1}{y^2}}$.

Attention au signe : le terme sous l'intégrale est ici positif, et la borne du bas de l'intégrale est plus petite que celle du haut, donc cette intégrale est positive. Si vous trouvez $-\dfrac{\pi}{12}$, vous devez voir qu'il y a un problème.