X Suites réelles et complexes

2 juillet 2020

1. Vocabulaire.

Définition 1.0.1 (Suite réelle)**.**
• Une *suite à valeurs réelles* ou *suite réelle* u est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, u. On note en général u_n au lieu de $u(n)$ l'image de n par u.
• Étant donnée une expression e contenant la variable n, on note $(e)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $\begin{array}{ccc}\mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & e\end{array}$.
Ainsi, la suite u est souvent notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
• La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi appelée *la suite de terme général* u_n.
• On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

Remarque 1.0.2 (Représentation graphique des termes d'une suite)**.**
Cela peut se faire en plaçant les termes sur la droite des réels (représentation unidimensionnelle) ou en traçant le "graphe" de la suite (représentation bidimensionnelle). Chacune présente des avantages et des inconvénients.

Définition 1.0.3 (Opérations sur les suites)**.**
• Étant donné deux suites u et v on peut former leur somme $u+v$, définie comme $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
• Étant donnéune suite u et un scalaire λ, on peut former la suite λu définie comme $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
• On dit que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni de ces deux opérations est un *espace vectoriel*.
• Étant donné deux suites u et v on peut former leur produit uv, définie comme $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
• Étant donné deux suites u et v telles que v ne s'annule pas, on peut former leur quotient $\dfrac{u}{v}$, définie comme $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
• Étant donné une suite u , on peut former la suite $|u|$ définie comme $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.
• Étant donné deux suites u et v, on peut former les suites $\min(u,v)$ et $\max(u,v)$, définie comme $(\min(u_n,v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\max(u_n,v_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 1.0.4.
• Étant donné une propriété P sur les suites réelles et un entier n_0 et une suite réelle u, on dit que P est *vraie à partir du rang* n_0 si la propriété P est vraie pour la suite des termes u_{n_0}, u_{n_0+1}, u_{n_0+2}, ... autrement dit pour la suite v où v est définie par $\forall n \in \mathbb{N}\ v_n = u_{n_0+n}$.
• On dit que P est *vraie à partir d'un certain rang* s'il existe un entier n_0 tel que la propriété P est vraie à partir du rang n_0.

Remarque 1.0.5.
En général, seul le comportement des suites quand n tend vers l'infini nous intéresse, et non les premiers termes de la suite, d'où l'intérêt de la notion de propriété vraie à partir d'un certain rang.

Exemple 1.0.6.
• La suite $(n(n-5))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas à valeurs positives ou nulles mais elle est à valeurs positives ou nulles à partir du rang 5 (ainsi d'ailleurs qu'à partir du rang 10, du rang 2389, ...).
• La suite u définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = \begin{cases} n & \text{si } n < 735 \\ 735 & \text{sinon} \end{cases}$$

n'est pas constante mais est constante à partir du rang 735.

Exemple 1.0.7.
Dire qu'une suite est positive ou nulle à partir d'un certain rang est équivalent à

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+n_0} \geqslant 0,$$

autrement dit :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant n_0 \Rightarrow u_k \geqslant 0.$$

Définition 1.0.8.
Une suite réelle u est dite :
(i) *constante* si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0$;
(ii) *stationnaire* si elle est constante à partir d'un certain rang, c'est-à-dire si

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n = u_{n_0}.$$

Remarque 1.0.9.
Jusque là, toutes les définitions données sur les suites à valeurs réelles s'étendent directement aux suites à valeurs complexes. Ce n'est plus le cas pour ce qui suit.

Définition 1.0.10.
Une suite réelle u est dite :

(i) *croissante* (resp. *stric. croissante*) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ (resp. $u_n < u_{n+1}$) ;

(ii) *décroissante* (resp. *stric. décroissante*) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$ (resp. $u_n > u_{n+1}$) ;

(iii) *monotone* si la suite est croissante ou décroissante ;

(iv) *strictement monotone* si la suite est strictement croissante ou strictement décroissante ;

(v) *majorée* (resp. *minorée*) s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$ (resp. $u_n \geqslant M$) ;

(vi) *bornée* si elle est majorée et minorée.

Remarque 1.0.11.
Toutes ces propriétés peuvent s'énoncer « à partir d'un certain rang ».

Cependant, une suite est majorée à partir d'un certain rang si et seulement si cette suite est majorée (*idem* pour minorée et bornée).

Remarque 1.0.12.
« (u_n) est bornée » s'écrit aussi : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$.

Remarque 1.0.13.
Pour montrer qu'une suite est croissante, on peut utiliser plusieurs méthodes : la plus classique consiste à étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$. On peut aussi comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1, **à condition de connaître le signe de** u_n.

Remarque 1.0.14.
• Toutes ces propriétés peuvent s'énoncer « à partir d'un certain rang ».
• « (u_n) est bornée » s'écrit aussi : $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$.
• Pour montrer qu'une suite est croissante, on peut utiliser plusieurs méthodes : la plus classique consiste à étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$. On peut aussi comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1, **à condition de connaître le signe de** u_n.

Remarque 1.0.15.
Une suite u est croissante si et seulement si pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $n \geqslant p$, $u_n \geqslant u_p$.

2. Limite d'une suite réelle.

2.1. Définition et premières propriétés.

Définition 2.1.1.
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que (u_n) tend (ou converge) vers ℓ si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note ceci $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$, ou plus simplement $u \to \ell$.

Remarque 2.1.2.
Ceci est équivalent à

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

En pratique, on préférera souvent (mais pas toujours) utiliser des inégalités larges.

Remarque 2.1.3.
On utilise souvent les abus de notation suivant :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Exemple 2.1.4.
Montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ converge vers 1.

Définition 2.1.5.
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que (u_n) est convergente s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$. Si (u_n) n'est

pas convergente, on dit qu'elle est divergente (ou diverge).

Théorème 2.1.6.
Toute suite convergente est bornée.

Démonstration.
Soit (u_n) convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. Alors d'après la proposition précédente, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant 1$, et donc $\ell - 1 \leqslant u_n \leqslant \ell + 1$. Par conséquent, (u_n) est bornée à partir du rang n_0. Mais les n_0 premiers termes de la suite étant en nombre fini, ils forment un ensemble borné. L'ensemble des termes de la suite (u_n) étant la réunion de deux ensembles bornées, il est borné également, et donc la suite (u_n) est bornée. □

Remarque 2.1.7.
La réciproque est évidemment fausse, comme le prouve la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 2.1.8.
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant A.$$

On note ceci $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, ou plus simplement $u \to +\infty$.

Définition 2.1.9.
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que (u_n) tend vers $-\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \leqslant A.$$

On note ceci $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, ou plus simplement $u \to -\infty$.

Remarque 2.1.10.
Une suite qui tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$) diverge.

On peut cependant introduire l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, que l'on appelle *droite numérique achevée*. Dans $\overline{\mathbb{R}}$, une suite tendant vers $+\infty$ (ou moins $-\infty$) converge. Le théorème 2.1.6 est toujours valable : toute suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ est bornée (par $-\infty$ et $+\infty$) !

Par défaut, la notion de convergence s'entendra dans $\mathbb{R}$. Le lecteur intéressé pourra consulter la partie 9 pour obtenir une présentation succinte unifiant ces points de vues.

Théorème 2.1.11 (Unicité de la limite)**.**
Soit (u_n) une suite réelle, soit $\ell_1, \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2$. Alors, $\ell_1 = \ell_2$.

Démonstration.
Il convient *a priori* de distinguer 9 cas. Par symétrie, et en supposant $\ell_1 \neq \ell_2$, il suffit de considérer les cas :

— $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$;
— $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 = -\infty$;
— $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 = +\infty$;
— $\ell_1 = -\infty$ et $\ell_2 = +\infty$.

Nous ne détaillerons ici que les deux premiers, les deux derniers sont laissés au lecteur.

Si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$, posons $\varepsilon = \frac{1}{3}|\ell_1 - \ell_2| > 0$. Alors, il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

— si $n \geqslant n_1$, $|u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon$;
— si $n \geqslant n_2$, $|u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$.

Alors, pour $n \geqslant \max(n_1, n_2)$, on a par l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |\ell_1 - \ell_2| &= |\ell_1 - u_n - (\ell_2 - u_n)| \\ &\leqslant |\ell_1 - u_n| + |\ell_2 - u_n| \\ &\leqslant \frac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2|. \end{aligned}$$

C'est impossible !

Si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 = -\infty$, posons $A = \ell_1 - 1$ et $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Alors, il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

— si $n \geqslant n_1$, $|u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon$;
— si $n \geqslant n_2$, $u_n \leqslant A$.

Alors, pour $n \geqslant \max(n_1, n_2)$, on a $u_n \leqslant A < \ell_1 - \frac{1}{2} \leqslant u_n$. C'est impossible ! □

Définition 2.1.12 (Limite)**.**
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Lorsqu'il existe un élément $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ vérifiant $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, on l'appelle **la** *limite* de u, et on le note $\lim u$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Le symbole $\lim\limits_{n\to+\infty}$ ne peut s'utiliser qu'après avoir montré l'existence de ladite limite. L'utiliser avant est une erreur grave. On préfèrera *systématiquement* utiliser l'écriture $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Proposition 2.1.13.
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On a les propriétés suivantes :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \iff u_n - \ell \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff |u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Corollaire 2.1.14.
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \iff |u_n - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Corollaire 2.1.15.
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\ell \in \mathbb{R}$. Alors u tend vers ℓ si et seulement s'il existe $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tendant vers 0 telle que $u = \ell + v$.

Proposition 2.1.16.
Soit u une suite convergeant vers 0 et v une suite bornée. Alors uv converge vers 0.

Démonstration.
Soit $M > 0$ un majorant de $|v|$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour, tout entier naturel $n \geqslant N$, $|u_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{M}$. Ainsi, si $n \geqslant N$, $|u_n v_n| \leqslant \varepsilon$, d'où le résultat. □

Exemple 2.1.17.
Étudier la convergence de la suite $\left(\frac{\cos n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Proposition 2.1.18.
L'ensemble des suites convergeant vers 0 est stable par addition et par multiplication par un scalaire. On dit que l'ensemble des suites convergeant vers 0 est *un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeur réelles.*

Démonstration.
Comme un scalaire peut-être vu comme une suite constante, donc bornée, il suffit de montrer que la somme de deux suites convergeant vers 0 converge vers 0.

Soit u et v tendant vers 0, soit $\varepsilon > 0$. Il existe deux rangs $N \in \mathbb{N}$ et $N' \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout entier n,
- si $n \geqslant N$, $|u_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$;
- si $n \geqslant N'$, $|v_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Ainsi, si $n \geqslant \max(N, N')$, alors $|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n| \leqslant \varepsilon$, d'où le résultat. □

2.2. Opérations sur les limites.

Soit u et v deux suites qui admettent chacune pour limite $\ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$.

a. Étude de $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

v_n / u_n	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell \in \mathbb{R}$			
$+\infty$			
$-\infty$			

b. Étude de $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

v_n / u_n	$\ell' \in \mathbb{R}_+^*$	$\ell' \in \mathbb{R}_-^*$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell \in \mathbb{R}_+^*$					
$\ell \in \mathbb{R}_-^*$					
0					
$+\infty$					
$-\infty$					

c. Étude de $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Si la suite u ne s'annule pas.

Remarque 2.2.1.
Si v tend vers 0, alors $\dfrac{1}{1+v}$ tend vers 1.

$u_n \to$	$\ell \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$	0	$+\infty$	$-\infty$
$1/u_n \to$				

On obtient alors le comportement de $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ en utilisant les deux tableaux précédents.

d. Étude de $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.

$u_n \to$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\lvert u_n\rvert \to$			

e. Étude de $(\max(u_n, v_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 2.2.2.
Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\max(u_n, v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \max(\ell, \ell')$.

Démonstration.
Il suffit d'écrire $\max(u_n, v_n) = \dfrac{|u_n - v_n| + u_n + v_n}{2}$. $\square$

Remarque 2.2.3.
On a bien sûr le même résultat avec le minimum.

f. Exemples de formes indéterminées.

Exemple 2.2.4.
Déterminer les limites (si elles existent) des suites de termes généraux suivants :

1. $u_n = \frac{3n^2+n+15}{n^2+\sin n}$
2. $u_n = \frac{\mathrm{e}^{\,n}-3^n}{n^2-2^n}$
3. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

2.3. Limites et suites extraites.

Définition 2.3.1.
On appelle *suite extraite ou sous-suite de la suite* u toute suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. La fonction φ est une *extraction*, ou *extractrice*.

Remarque 2.3.2.
On ne conserve que les termes de rang $\varphi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, d'où la dénomination suite extraite.

Exemple 2.3.3.
$(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2.3.4.
Soit u une suite, φ et ψ deux extractrices. Quelle est la suite extraite de $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ par ψ ?

Lemme 2.3.5.
Soit φ une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$.

Théorème 2.3.6.
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $u \xrightarrow[+\infty]{} \ell$ alors toute suite extraite de u tend aussi vers ℓ.

Démonstration.
On traite le cas $\ell \in \mathbb{R}$, les deux autres cas sont laissés au lecteur.

Soit φ une extractrice, soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que , pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Soit $n \geqslant n_0$, on a alors $\varphi(n) \geqslant n \geqslant n_0$ et donc $\left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$. $\square$

Corollaire 2.3.7.
Si une suite admet deux suites extraites ne convergeant pas vers la même limite alors cette suite n'a pas de limite.

Si une suite admet une suite extraite n'ayant pas de limite, alors cette suite n'a pas de limite.

Exemple 2.3.8.
Montrer que les suites $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\cos\frac{n\pi}{3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne convergent pas.

Théorème 2.3.9.
Soit u une suite à valeurs réelles et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si on a $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Démonstration.
On traite le cas $\ell \in \mathbb{R}$, les deux autres cas sont laissés au lecteur.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc deux rangs N et N' tels que, pour tout entier naturel n,

— si $n \geqslant N$, $|u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon$;

— si $n \geqslant N'$, $|u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Ainsi, si $n \geqslant \max(2N, 2N'+1)$, on a $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ (il suffit de distinguer selon la parité de N), d'où le résultat. $\square$

2.4. Limites et inégalités.

Proposition 2.4.1.
Soit $u \in \mathbb{R}^N$ et $(a, b, \ell) \in \mathbb{R}$. Supposons $u \xrightarrow[+\infty]{} \ell$ et $a < \ell < b$. Alors à partir d'un certain rang, les valeurs de u sont comprises strictement entre a et b. Autrement dit :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ n \geqslant n_0 \Rightarrow a < u_n < b$$

Démonstration.
On pose $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\min(\ell - a; b - \ell) > 0$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. On a $a < \ell - \varepsilon < \ell + \varepsilon < b$,

Alors, si $n \geqslant n_0$, on a $\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$, donc $a < u_n < b$. $\square$

Corollaire 2.4.2.
En particulier toute suite convergeant vers une limite strictement positive (resp. strictement négative) est strictement positive (resp. strictement négative) à partir d'un certain rang.

Corollaire 2.4.3.
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(a, \ell) \in \mathbb{R}^2$. Supposons $u \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.

1. Si à partir d'un certain rang $u_n \leqslant a$, alors $\ell \leqslant a$.
2. Si à partir d'un certain rang $a \leqslant u_n$, alors $a \leqslant \ell$.

⚠ Ne pas croire que si à partir d'un certain rang $u_n < a$, alors $\ell < a$. En passant à la limite dans une inégalité, les inégalités strictes deviennent des inégalités larges. (Par exemple : la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0, et pourtant tous les termes sont strictement positifs).

Corollaire 2.4.4.
Soient u et v deux suites réelles telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$. Si les suites u et v convergent respectivement vers ℓ et ℓ', alors $\ell \leqslant \ell'$.

⚠ Là encore, même si à partir d'un certain rang, $u_n < v_n$, il se peut que $\ell = \ell'$.

Exemple 2.4.5.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 - \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{n}$, pourtant $1 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ et $1 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

Exercice 2.4.6.
Montrer que la suite $(H_n) = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas. On pourra commencer par montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Proposition 2.4.7.
Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante) et converge vers un réel ℓ, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell$ (resp. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \ell$).

Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strict. croissante (resp. strict. décroissante) et converge vers un réel ℓ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < \ell$ (resp. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > \ell$).

Démonstration.
On ne traite que le premier cas. S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > \ell$ alors, si $n \geqslant N$, $u_n - \ell \geqslant u_N - \ell > 0$, ce qui est impossible. $\square$

Remarque 2.4.8.
Ces propriétés ne permettent pas de montrer la convergence d'une suite. Elles se contentent de donner des renseignements sur la suite ou sa limite, *en cas de convergence.*

3. Résultats de convergence.

3.1. Composition.

Théorème 3.1.1.
Soient $a \in \bar{D}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ vérifiant

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$$

et u une suite réelle telle que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ soit bien définie (c'est-à-dire vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \in D$) et vérifiant

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a.$$

Alors,

$$f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} b.$$

Remarque 3.1.2.
Ce théorème est temporairement admis, la définition de convergence pour les fonctions n'ayant pas encore été donnée.

Exemple 3.1.3.
Si u est une suite qui converge vers 0, alors la suite $(\mathrm{e}^{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergeant vers 1.

3.2. Utilisation d'inégalités.

a. Techniques d'encadrement.

Théorème 3.2.1.
Soient u, v et w trois suites à valeurs réelles et $\ell \in \mathbb{R}$.

(i) **Th. de minoration :** Si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ et $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

(ii) **Th. de majoration :** Si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$ et $v_n \leqslant u_n$ à partir d'un certain rang, alors $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$.

(iii) **Th. d'encadrement :** Si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ et $w_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ et $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang, alors $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.

Remarque 3.2.2.
Le troisième résultat est souvent appelé « Théorème des gendarmes » dans les petites classes. Vous pouvez utiliser cette dénomination, ou tout simplement dire « par encadrement » quand vous l'utilisez.

Démonstration.
Ces trois résultats se démontrent aisément. □

Corollaire 3.2.3.
Soient u et v deux suites à valeurs réelles.
Si $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $|u_n| \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

b. Suites monotones.

Théorème 3.2.4 (de la limite monotone)**.**
Soit u une suite réelle.

1. Si u est croissante, elle admet une limite (dans $\overline{\mathbb{R}}$) et

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n.$$

   a) Dans le cas où u est majorée par un réel, cette limite est réelle et est le plus petit majorant de u.
   b) Dans le cas où u n'est pas majorée, cette limite vaut $+\infty$.

2. Même résultat, dans le cas d'une suite u décroissante *mutatis mutandis* (sup en inf, «majorée» en «minorée», $+\infty$ en $-\infty$).

Démonstration. 1. a) Notons $\ell = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc un entier naturel n_0 tel que $\ell - \varepsilon < u_{n_0} \leqslant \ell$. Par croissance de u et majoration de u par ℓ, on a, pour tout $n \geqslant n_0$,

$\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell$. Cela montre donc bien la convergence de u vers ℓ.

b) Soit $A \in \mathbb{R}$, A ne majore pas u : il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \geqslant A$. Ainsi, par croissance de u, on a, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant A$. Ainsi, u tend vers $+\infty$.

2. Idem

□

Exemple 3.2.5.
On exprime souvent le premier point du théorème en disant que «toute suite croissante majorée converge». Soit u et v les suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n \text{ et } v_n = n + n^2$$

La suite u est croissante, majorée par la suite v : c'est donc une suite croissante majorée. Donc u converge ?

Une suite croissante majorée converge vers le plus petit de tous ses majorants. Le plus petit de ses majorants n'est **pas** nécessairement le plus petit de ceux que vous avez déjà trouvés ! Retenir :

Corollaire 3.2.6.
Si u est croissante et majorée par $M \in \mathbb{R}$, alors u converge et sa limite est inférieure ou égale à M.

c. Suites adjacentes.

Définition 3.2.7.
Deux suites u et v sont dites *adjacentes* si l'une est croissante, l'autre est décroissante et leur différence tend vers 0.

Théorème 3.2.8.
Soit u et v deux suites adjacentes. Alors u et v convergent, et ont la même limite.

Démonstration.
Si u et v convergent, $u - v$ converge vers la différence de leurs limites, soit 0 : u et v ont donc même limite.

On peut supposer, sans perte de généralité, que u est croissante et que v est décroissante. Montrons maintenant que u converge (il suffit ensuite d'écrire $v = v - u + u$ pour conclure à la convergence de v). Il suffit de montrer que u est majorée par un réel, par exemple v_0. Sinon, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant $u_{n_0} > v_0$ et l'on aurait, par croissance de u et décroissance de v ainsi que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n - v_n > u_{n_0} - v_0$, ce qui contredit la convergence de $u - v$ vers 0. Ainsi, u converge. □

La définition et le théorème des suites adjacentes sont fondamentaux. Le fait qu'ils s'écrivent de façon très concise n'en réduit pas l'importance mais rend en revanche inexcusable les confusions entre ce qui relève de la définition et ce qui relève du théorème.

Remarque 3.2.9.
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles adjacentes, avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante.

Notons ℓ leur limite commune. Alors, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$ et $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ u_p \leqslant \ell \leqslant v_q$.

Exemple 3.2.10.
Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$ sont adjacentes.

Exemple 3.2.11 (Moyenne arithmetico - géométrique)**.**
Soient $u_0, v_0 \in \mathbb{R}_+^*$. On définit deux suites en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n.v_n}$. Alors ces deux suites sont adjacentes et leur limite commune est appelée *moyenne arithmetico - géométrique de* u_0 *et* v_0.

Exercice 3.2.12 (Algorithme des Babyloniens)**.**
On pose $v_0 = 2$. On définit deux suites en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2}{v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes. Quelle est leur limite ?

Définition 3.2.13.
Étant donné I un intervalle de $\mathbb{R}$, on appelle diamètre de I et on note $\delta(I)$ la valeur de $b - a$ où a et b sont les extrémités gauche et droite de

I si celles-ci sont réelles et $+\infty$ si l'une au moins n'est pas réelle.

Théorème 3.2.14 (Des segments emboîtés)**.**
Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de segments non vides emboîtés, c'est-à-dire vérifiant $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$ (autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subset I_n$) et vérifiant $\delta(I_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors l'ensemble

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

est un singleton. Autrement dit, il existe un unique réel appartenant à I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De plus, tout suite u à valeur réelle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I_n$ converge vers ce réel.

Démonstration.
Il suffit de noter, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n respectivement les extrémités gauche et droite de I_n. Les conditions sur les segments entraînent que a et b sont deux suites adjacentes. Elles ont dont une limite commune ℓ. De plus pour tout n, $a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$. Donc $\{\ \ell\ \} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Réciproquement, si $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant x \leqslant b_n$ donc, par encadrement, $x = \ell$.

Tout suite u vérifiant les conditions données est alors encadrée par a et b donc converge vers ℓ. $\square$

Corollaire 3.2.15 (Méthode de la dichotomie)**.**
Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_{n+1} est soit la moitié gauche du segment I_n, soit la moitié droite du segment I_n.

Alors la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de segments emboîtés, dont le diamètre tend vers 0.

Les extrémités gauche et droite de ces segments constituent donc des suites adjacentes.

3.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Nous avons déjà vu que toute suite convergente est bornée. La réciproque est évidemment fausse, par exemple la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et divergente. Mais une version plus faible est vraie : c'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 3.3.1 (Bolzano-Weierstrass)**.**
On peut extraire de toute suite réelle bornée une suite convergente.

Remarque 3.3.2.
On peut remplacer « bornée » par « à valeurs dans un segment ».

Démonstration (Principe de la dichotomie à connaître, formalisation non exigible)**.**
Le cas où le segment est réduit à un point est trivial. Considérons donc un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ avec $a < b$ et une suite u à valeurs dans $[a, b]$ et montrons que u admet une suite extraite qui converge.

Définissons tout d'abord par dichotomie une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de segments comme suit :

1. $I_0 = [a, b]$
2. Pour tout n, on définit I_{n+1} comme étant la moitié gauche de I_n si u prend une infinité de fois ses valeurs dans cette moitié gauche. Sinon, on définit I_{n+1} comme étant la moitié droite de I_n.

   Il est clair que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de segments emboîtés de diamètre tendant vers 0, d'intersection réduite à un singleton l.

   On peut démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u prend une infinité de fois ses valeurs dans I_n.

   On va maintenant extraire une suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de u telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I_n$.

   Le principe est relativement simple : on prend u_0 pour premier terme de cette suite extraite. On a $u_0 \in I_0$. On prend alors pour terme suivant le premier terme suivant de u appartenant à I_1. Un tel terme existe puisque u prend une infinité de fois ses valeurs dans I_1. On prend alors pour terme suivant le premier terme suivant de u appartenant à I_2. Etc.

   Plus formellement, on définit par récurrence l'application φ comme suit :

   a) $\varphi(0) = 0$.
   b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n+1)$ est le plus petit entier k strictement supérieur à $\varphi(n)$ vérifiant $u_k \in I_{n+1}$. La suite u prenant une infinité de fois ses valeurs dans $I(n+1)$, un tel k existe.

   Posons alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.

   On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in I_n$. Donc v converge.

   La suite u admet donc bien une suite extraite convergente.

$\square$

4. Traduction séquentielle de certaines propriétés.

Définition 4.0.1.
On dit qu'une partie de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

Remarque 4.0.2.
On a déjà vu que l'ensemble des décimaux, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ étaient denses dans $\mathbb{R}$.

Proposition 4.0.3.
Soit $X \subset \mathbb{R}$. X est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $\ell \in \mathbb{R}$ il existe une suite u à valeurs dans X convergeant vers ℓ.

Démonstration.
Supposons que X est dense dans $\mathbb{R}$, soit $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout entier naturel n, $X \cap]\ell - \frac{1}{n+1}, \ell + \frac{1}{n+1}[$ est non vide et l'on peut donc construire une suite u d'éléments de X telle que, pour tout entier naturel n, $\ell - \frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \ell + \frac{1}{n+1}$. Par encadrement, u converge vers ℓ.

Réciproquement, soit une telle partie X, montrons que X est dense dans $\mathbb{R}$. Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Si $I \cap X = \varnothing$, il suffit de prendre ℓ comme étant le milieu de I : aucune suite à valeurs dans X ne peut converger vers ℓ. En effet, en considérant ε le quart du diamètre de I, on a, pour tout $x \in X$, $|x - \ell| > \varepsilon$. Ainsi, X rencontre I. □

Proposition 4.0.4.
Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$. Alors il existe une suite u à valeurs dans X de limite $\sup X$.

1. Si X est majorée, $\sup X \in \mathbb{R}$ et u converge.
2. Si X n'est pas majorée, alors $\sup X = +\infty$ et u tend vers $+\infty$.

Démonstration.
Si X n'est pas majorée, c'est facile : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x \in X$ vérifiant $x \geqslant n$. On construit donc une suite u à valeurs dans X vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant n$.

Si X est majorée, revenir à la caractérisation de la borne supérieure dans le cas réel donnée dans le chapitre VIII. □

Remarque 4.0.5.
Un résultat analogue existe concernant la borne inférieure.

Exercice 4.0.6.
Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée par un réel a tel qu'il existe une suite u à valeurs dans X de limite a. Montrer que $a = \sup X$.

5. Suites particulières.

5.1. Suites arithmétiques.

Définition 5.1.1.
Soit α et r deux complexes. On appelle *suite arithmétique* de premier terme α et de *raison* r la suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 = \alpha, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = r + u_n. \end{cases}$$

Remarque 5.1.2.
Une suite arithmétique est à valeurs réelles si et seulement si son premier terme et sa raison sont réels.

Remarque 5.1.3.
u est arithmétique de raison r si et seulement si

$$(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (r)_{n \in \mathbb{N}}.$$

On peut voir cela comme une équation portant sur une transformation linéaire de u.

Ce que l'on pourrait appeler « l'équation homogène associée » a pour solution toutes les suites constantes.

Le résultat suivant montre d'ailleurs que l'ensemble des suites arithmétiques de raison r est de la forme « solution particulière + solutions homogènes ».

Proposition 5.1.4.
Soit $r \in \mathbb{C}$ et u une suite arithmétique de raison r. Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = nr + u_0$. De plus

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}.$$

Démonstration.
Revenir à la formule donnant $\sum_{k=0}^{n} k$. □

Remarque 5.1.5.
Cette dernière formule est assez peu utile, il vaut souvent mieux revenir à la formule donnant $\sum_{k=0}^{n} k$.

Proposition 5.1.6.
Soit $r \in \mathbb{R}$ et u une suite arithmétique à valeurs réelles de raison r. Alors,
- si $r > 0$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$;
- si $r = 0$, u est la suite constante de valeur u_0 donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u_0$;
- si $r < 0$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

5.2. Suites géométriques.

Définition 5.2.1.
Soit α et r deux complexes. On appelle *suite géométrique* de premier terme α et de *raison* r la suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 = \alpha, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = r \cdot u_n. \end{cases}$$

Remarque 5.2.2.
Une suite géométrique est à valeurs réelles si et seulement si son premier terme est nul ou son premier terme et sa raison sont réels.

Remarque 5.2.3.
u est géométrique de raison r si et seulement si

$$(u_{n+1} - ru_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}}.$$

On peut voir cela comme une équation homogène portant sur une transformation linéaire de u.

Le résultat suivant montre d'ailleurs que l'ensemble des suites géométriques de raison q a la structure habituelle d'un ensemble de solutions homogènes.

Proposition 5.2.4.
Soit $r \in \mathbb{C}$ et u une suite géométrique de raison r. Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = r^n u_0$. De plus
- si $r \neq 1$, alors
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r};$$
- si $r = 1$, alors
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0.$$

Démonstration.
Revenir à la formule donnant $\sum_{k=0}^{n} r^k$. □

Proposition 5.2.5.
Soit $r \in \mathbb{R}$ et u une suite réelle géométrique de raison r, avec $u_0 \neq 0$.
- Si $r \in]-\infty, -1]$, alors u n'a pas de limite (ni finie, ni infinie).
- Si $r \in]-1, 1[$ (*i.e.* $|r| < 1$), alors u converge vers 0.
- Si $r = 1$, alors u est la suite constante, de valeur u_0 (elle converge donc vers u_0).
- Si $r \in]1, +\infty[$, alors u diverge vers $+\infty$ si $u_0 > 0$ et vers $-\infty$ sinon.
- La suite u converge si et seulement si $r \in]-1, 1]$ (c'est-à-dire $|r| < 1$ ou $r = 1$).

Démonstration.
Direct d'après la question précédente. □

On peut aussi énoncer les résultats de convergence dans $\mathbb{C}$ (voir la partie 7 pour une définition précise de la notion de limite de suite de complexes).

Proposition 5.2.6.
Soit $r \in \mathbb{C}$ et u une suite complexe géométrique de raison r, avec $u_0 \neq 0$.
— La suite u converge si et seulement si $|r| < 1$ ou $r = 1$.
— Si $|r| < 1$, alors u tend vers 0.

Démonstration.
Il suffit de voir que $|u|$ est géométrique de raison $|q|$. Le cas où $q \in \mathbb{U} \setminus \{-1, 1\}$ sera traité en TD. ☐

5.3. Suites arithmético-géométriques.

Définition 5.3.1.
Une suite u est dite suite *arithmético-géométrique* s'il existe deux nombres complexes a et b vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarque 5.3.2.
Il s'agit d'une généralisation des notions de suites arithmétiques et géométriques :
— Si $a = 1$, alors u est une suite arithmétique.
— Si $b = 0$, alors u est une suite géométrique.

Remarque 5.3.3.
Ces suites interviennent fréquemment dans des problèmes concrets :
— évolution du capital restant à rembourser en fonction du temps dans le cas d'un emprunt à mensualités constantes ;
— modélisation de l'évolution d'une population.

Soit a et b deux complexes. On s'intéresse maintenant à l'ensemble des suites u solutions de l'équation

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b. \qquad \textbf{(AG)}$$

Remarque 5.3.4.
On peut écrire cela

$$(u_{n+1} - au_n)_{n\in\mathbb{N}} = (b)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Ce que l'on pourrait appeler « l'équation homogène associée » a pour solution toutes les suites géométriques de raison a.

Le résultat suivant montre d'ailleurs que l'ensemble des suites solutions de **AG** est de la forme « solution particulière + solutions homogènes ».

Proposition 5.3.5.
Soit v une solution de (**AG**) et u une suite. Alors u est solution de **AG** si et seulement si $u - v$ (*i.e.* la suite de terme général $u_n - v_n$ pour $n \in \mathbb{N}$) est géométrique de raison a.

Démonstration.
Très facile. ☐

Proposition 5.3.6.
Si $a \neq 1$, alors il existe une unique suite constante solution de (**AG**).

Démonstration.
Très facile. ☐

Remarque 5.3.7.
Si $a = 1$, on étudie une suite arithmétique ...

Méthode de résolution de (AG)

1. Si $a = 1$, les solutions de (**AG**) sont les suites arithmétiques de raison b (*i.e.* pour tout $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, u est solution de E si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nb$).
2. Si $a \neq 1$, on cherche une solution constante. Pour cela, on détermine l'unique α vérifiant

$$\alpha = a\alpha + b.$$

3. Les solutions de (**AG**) sont alors les suites $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que la suite $u - \alpha$ (c'est-à-dire $(u_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$) soit une suite géométrique de raison a. Autrement dit, les solutions de (**AG**) sont les suites $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = \alpha + a^n(u_0 - \alpha).$$

Remarque 5.3.8.
L'ensemble des solutions de (**AG**) a ici la même structure que dans les cas des systèmes linéaires et des équations différentielles linéaires (espace affine). Ce n'est pas une coïncidence ! Cela vient du fait que l'on résout $(u_{n+1} - au_n)_{n\in\mathbb{N}} = (b)_{n\in\mathbb{N}}$ et que $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dépend *linéairement* de u.

Exemple 5.3.9.
Donner le terme général de la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = 2u_n + 1. \end{cases}$$

Exemple 5.3.10.
Votre banquier vous propose un prêt à la consommation de 10 000 € «à un taux de 18% annuel» sur 5 ans, à mensualités fixes (soit 60 mensualités). Après avoir signé le contrat, vous constatez que le taux est de $1,5\%$ par mois. Quel est le montant des mensualités ? Quel est le coût total du crédit ? Que pensez-vous de la manière dont le prêt est présenté ?

5.4. Suites récurrentes linéaires doubles.

Définition 5.4.1.
On appelle *équation de récurrence linéaire double* ou *équation de récurrence linéaire d'ordre deux* toute équation de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0.$$

où a et b sont des complexes fixés et où la suite u (réelle ou complexe) est l'inconnue.

Toute solution de cette équation est appelée suite *récurrente linéaire double* (ou *d'ordre deux*).

On appelle *équation caractéristique* de cette équation de récurrence linéaire double, l'équation

$$r^2 + ar + b = 0.$$

On appelle *polynôme caractéristique* de cette équation de récurrence linéaire double, le polynôme

$$X^2 + aX + b.$$

Remarque 5.4.2.
Si $r \in \mathbb{C}$, alors r est solution de l'équation caractéristique si et seulement si $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de l'équation de récurrence linéaire double.

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, avec $b \neq 0$. On s'intéresse maintenant à l'ensemble des suites u solution de

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0. \qquad \textbf{(E)}$$

On note alors l'équation caractéristique de (**E**) :

$$r^2 + ar + b = 0. \qquad \textbf{(C)}$$

Théorème 5.4.3 (Solutions complexes de (**E**))**.**
On considère l'équation (**E**).

(i) Si (**C**) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2, les solutions de (**E**) sont les suites de la forme $(\lambda r_1^n + \mu r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, où λ et μ sont des complexes.

(ii) Si (**C**) admet une unique solution, r_0, alors les solutions de (**E**) sont les suites de la forme $(\lambda r_0^n + \mu n r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$, où λ et μ sont des complexes.

Dans les deux cas, il existe une unique solution à (**E**) pour u_0 et u_1 fixés.

Démonstration.
La preuve n'est pas exigible, en voici un schéma.

1. Montrer que s'il existe une solution, elle est entièrement déterminée par la donnée de u_0 et u_1.
2. Montrer selon les cas que les suites données dans l'énoncé du théorème sont effectivement *des* solutions.
3. Montrer, selon les cas, que pour tout choix de u_0 et u_1, une de ces suites est solution.
4. En déduire selon les cas que les suites données dans l'énoncé du théorème sont effectivement *les* solutions.

□

Dans tout ce qui suit, on ne s'intéressera qu'au cas où les coefficients a et b sont réels.

Théorème 5.4.4 (Solutions réelles de (**E**))**.**
On considère l'équation (**E**), avec $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

(i) Si $(\mathbf{C})$ admet deux solutions (réelles) distinctes r_1 et r_2, alors les solutions réelles de $(\mathbf{E})$ sont les suites de la forme $(\lambda r_1^n + \mu r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, où λ et μ sont des réels.

(ii) Si $(\mathbf{C})$ admet une unique solution (réelle) r_0, alors les solutions réelles de $(\mathbf{E})$ sont les suites de la forme $(\lambda r_0^n + \mu n r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$, où λ et μ sont des réels.

(iii) Si $(\mathbf{C})$ admet deux solutions complexes conjuguées, $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$, alors les solutions réelles de $(\mathbf{E})$ sont les suites de la forme $(r^n(\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)))_{(n\in\mathbb{N})}$ où λ et μ sont des réels.

Dans tous les cas, il existe une unique solution à $(\mathbf{E})$ pour u_0 et u_1 fixés.

Remarque 5.4.5.
En pratique, on rencontrera des suites définies par la valeur de u_0 et u_1 et une équation linéaire de récurrence d'ordre deux. On détermine alors les solutions générales de l'équation en utilisant le théorème ci-dessus, puis on détermine les constantes λ et μ avec les valeurs de u_0 et u_1.

Démonstration.
La preuve n'est pas exigible, en voici un schéma.

1. Montrer, en étudiant les différents cas que les suites données ci-dessus sont effectivement des solutions.
2. Montrer en étudiant les différents cas, que toute solution est une suite donnée ci-dessus (astuce bien pratique : si u est une solution à valeurs réelles de $(\mathbf{E})$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathrm{Re}(u_n))$ et u est aussi une solution complexe de $(\mathbf{E})$).
3. En déduire que les suites données dans l'énoncé du théorème sont effectivement *les* solutions.

□

Exemple 5.4.6 (Application pratique)**.**
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

Déterminer une expression de u_n en fonction de n.

Remarque 5.4.7.
La méthode vue ici est très proche de celle utilisée pour résoudre les équations différentielles linéaires de degré deux à coefficients constants. Ce n'est d'ailleurs pas une coïncidence ...

6. Suites définies par une relation de récurrence d'ordre 1.

On étudie dans cette partie *les suites (réelles) récurrentes d'ordre 1*, c'est-à-dire les suites réelles u vérifiant une relation du type : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$.

6.1. Définition de la suite.

On se donne donc une partie D de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, et $a \in \mathbb{R}$. On veut définir la suite u par récurrence de la façon suivante

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \text{et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Une telle définition n'est pas nécessairement légitime : par exemple, si $a \notin D$, alors u_1 est mal défini donc la suite est mal définie. Autre exemple : on prend pour f l'application $x \mapsto \sqrt{x} - 1$ et pour a la valeur 4. On a bien $a \in \mathbb{R}^+$ mais $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, $u_3 = -1 < 0$ et u_4 est mal défini.

Une condition suffisante [1] pour que la suite soit bien définie est de trouver une partie A de D (*i.e.* une partie A de $\mathbb{R}$ sur laquelle f est bien définie) *stable par* f (*i.e.* $\forall x \in A,\ f(x) \in A$) et contenant le premier terme de la suite ($a \in A$).

En notant, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ la propriété «u_n est bien définie et $u_n \in A$», on peut alors montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P(n)$; on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie, donc que u est bien définie.

Exemple 6.1.1. 1. Soit $a \in [-1, +\infty[$, et notons u la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \text{et } \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$$

1. Cette condition est aussi nécessaire (pourquoi ?) mais en pratique, c'est le fait qu'elle soit suffisante qui nous intéressera.

Notons f la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$. Alors l'ensemble de définition $[-1, +\infty[$ est stable par f. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

2. Notons v la suite définie par

$$\begin{cases} v_0 = 5 \\ \text{et } \forall n \in \mathbb{N}\ v_{n+1} = v_n^{\frac{3}{2}} - 1 \end{cases}$$

Posons

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^{\frac{3}{2}} - 1 \end{array}$$

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^+$, qui n'est pas stable par f puisque $f(0) \notin \mathbb{R}^+$. En revanche, en posant $A = [4, +\infty[$, on peut remarquer que A est une partie de l'ensemble de définition de f stable par f : en effet, f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $f(4) = 7 \geqslant 4$ donc pour tout $x \in A$, on a $f(x) \geqslant f(4) \geqslant 4$ donc $f(x) \in A$. Or 5 appartient à A donc on peut montrer que v est bien définie.

Dans toute la suite, A désigne une partie de $\mathbb{R}$, et f une application définie (au moins) sur A et telle que $f(A) \subset A$ et a un élément de A.

6.2. Recherche d'une limite éventuelle.

Proposition 6.2.1.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ et f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$. On dit que ℓ est *un point fixe de f*.

Remarque 6.2.2.
Cette proposition sert à déterminer les limites *éventuelles* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou à montrer qu'elle n'admet pas de limite.

En aucun cas, elle ne permet de montrer que u a une limite.

Exemple 6.2.3. — Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + 1 \end{cases}$$

— Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + \frac{1}{4} \end{cases}$$

6.3. Cas où f est croissante sur A.

Proposition 6.3.1.
Si f est une fonction *croissante* sur A : alors la suite u est *monotone*. Plus précisément :
— si $u_0 \leqslant u_1$, alors u est croissante ;
— si $u_0 \geqslant u_1$, alors u est décroissante.

Démonstration.
Montrons le premier point (le second est similaire). Supposons f croissante sur A et $u_0 \leqslant u_1$. Alors, pour $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ l'assertion «$u_n \leqslant u_{n+1}$».
— On a $u_0 \leqslant u_1$ donc on a $P(0)$.
— Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$. Alors on a $u_n \leqslant u_{n+1}$. Or f est croissante sur A, donc $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$, donc $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$, donc on a $P(n+1)$.
On a donc, d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leqslant u_{n+1}$. □

Remarque 6.3.2.
Vous n'avez pas besoin de retenir cette proposition. En revanche, vous devez retenir la technique de démonstration pour être en mesure de l'adapter à un cas concret.

Exemple 6.3.3.
Étudier, pour $a = 0$ et pour $a = 2$, la suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}. \end{cases}$$

Exemple 6.3.4.
Étudier la suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n + 1. \end{cases}$$

La suite u admet-elle une limite ? laquelle ?

Exercice 6.3.5.
Montrer qu'une fonction croissante et continue $f : I \to I$, où I est un segment, possède un point fixe.

6.4. Cas où f est décroissante sur A.

Proposition 6.4.1.
Si f est une fonction décroissante sur A, alors les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et de sens contraire. Plus précisément :
- si $u_0 \leqslant u_2$, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;
- si $u_0 \geqslant u_2$, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Démonstration.
Montrons le premier point (le second se montre de la même façon).

Supposons f décroissante. Alors $f \circ f$ est croissante.

Supposons de plus $u_0 \leqslant u_2$.

Montrons alors que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

En posant $v = (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = (f\circ f)(v_n)$ et $v_0 \leqslant v_1$.

Donc v est croissante, d'après la proposition 6.3.1.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} \leqslant u_{2n+2}$.

f étant décroissante, on en déduit $\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_{2n}) \geqslant f(u_{2n+2})$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+1} \geqslant u_{2n+3}$. □

Remarque 6.4.2.
Même remarque que pour la proposition 6.4.1.

Exemple 6.4.3.
Étudier la suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 = 10, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 10 - \sqrt{u_n}. \end{cases}$$

7. Suites à valeurs complexes.

Nous allons définir la notion de convergence de suites à valeurs complexes en s'appuyant sur les convergences des suites (réelles) des parties réelles et imaginaires associées.

On pourrait définir de manière intrinsèque cette convergence, le lecteur intéressé se rapportera à la partie 9.4.

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes. Notons $\mathrm{Re}(u)$ la suite $\mathrm{Re}(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathrm{Im}(u)$ la suite $\mathrm{Im}(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $|u|$ la suite $|u_n|_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit alors ℓ un complexe.

Remarque 7.0.1.
1. On rappelle que pour tout complexe z, on a
$$|z| \leqslant |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$$
$$|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$$
$$|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$$
2. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$|u_n - \ell| \leqslant |\mathrm{Re}(u_n) - \mathrm{Re}(\ell)| + |\mathrm{Im}(u_n) - \mathrm{Im}(\ell)|$$
$$|\mathrm{Re}(u_n) - \mathrm{Re}(\ell)| \leqslant |u_n - \ell|$$
$$|\mathrm{Im}(u_n) - \mathrm{Im}(\ell)| \leqslant |u_n - \ell|$$

Proposition 7.0.2.
On a
$$|u_n - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
si et seulement si
$$\mathrm{Re}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Re}(\ell) \text{ et } \mathrm{Im}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Im}(\ell).$$

Définition 7.0.3.
On dit que u converge vers ℓ si
$$|u_n - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Démonstration.
C'est une conséquence directe de la remarque précédente. □

Remarque 7.0.4.
1. Cette définition étend la définition de la convergence pour les suites à valeurs réelles.
2. Il n'y a pas de notion similaire à $+\infty$ et $-\infty$ sur $\mathbb{C}$, donc pas de notion de limite infinie pour les suites à valeurs complexes (mais on peut regarder si $|u|$ tend vers $+\infty$).
3. Les résultats usuels sur les suites à valeurs réelles s'étendent naturellement aux suites à valeurs complexes... sauf ceux qui font appel à l'ordre sur $\mathbb{R}$ vu qu'il n'y a pas d'ordre «raisonnable» sur $\mathbb{C}$.

La proposition suivante peut être utile.

Proposition 7.0.5.

$$u \xrightarrow[+\infty]{} \ell \Rightarrow |u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\ell|$$

Démonstration.
De la définition 7.0.3 et de l'inégalité triangulaire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ||u_n| - |\ell|| \leqslant |u_n - \ell|$$

on déduit immédiatement $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\ell|$, d'où le résultat.

□

Proposition 7.0.6.
Soit u, v deux suites complexes convergeant respectivement vers ℓ et ℓ', soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors $\lambda u + \mu v$ converge, vers $\lambda\ell + \mu\ell'$.

Remarque 7.0.7. 1. La réciproque est évidemment fausse

2. Cette proposition permet notamment d'assurer que si u a une limite ℓ non nulle alors, à partir d'un certain rang, $|u|$ est compris entre $\frac{1}{2}|\ell|$ et $\frac{3}{2}|\ell|$.

Définition 7.0.8.
On dit que u est bornée si son module l'est.

Remarque 7.0.9.
C'est équivalent au fait que $\mathrm{Re}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ soient bornées.

Proposition 7.0.10.
Toute suite complexe convergente est bornée.

Théorème 7.0.11 (Bolzano-Weierstrass)**.**
De toute suite à valeurs complexes bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Démonstration (non exigible)**.**
Considérons une suite u à valeurs complexes bornées. Notons r et j respectivement les suites $\mathrm{Re}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.

r et j sont bornées et à valeurs réelles. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass sur les suites à valeurs réelles, on peut donc extraire de chacune une sous-suite convergente. Pourtant cela ne suffit pas à montrer le résultat. Pourquoi ?

Considérons φ une extraction de r telle que $r \circ \varphi$ converge.

Alors $j \circ \varphi$ est bornée. On peut donc en trouver une extraction ψ telle que $j \circ \varphi \circ \psi$ converge.

$r \circ \varphi$ converge donc $r \circ \varphi \circ \psi$ converge vers la même valeur.

Or $r \circ \varphi \circ \psi = \mathrm{Re}(u \circ \varphi \circ \psi)$ et $j \circ \varphi \circ \psi = \mathrm{Im}(u \circ \varphi \circ \psi)$.

Donc $u \circ \varphi \circ \psi$ converge. □

8. Premiers exemples de séries numériques.

Les séries numériques sont des cas particuliers de suites, que nous étudierons en fin d'année. Nous pouvons cependant commencer à étudier quelques exemples significatifs.

8.1. Séries télescopiques.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes.

Proposition 8.1.1.
Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sum_{n=0}^{N}(u_{n+1} - u_n)\right)_{N\in\mathbb{N}}$ ont même nature.
Dans le cas de convergence, si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors

$$\sum_{n=0}^{N} u_{n+1} - u_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} \ell - u_0.$$

Démonstration.
Nous savons déjà que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ont même nature.
De plus la somme $\sum_{n=0}^{N}(u_{n+1} - u_n)$ vaut $u_{N+1} - u_0$ par sommation télescopique. Elle est donc égale au terme u_{N+1}, à une constante près, et a donc la même nature que la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Dans le cas de convergence, il reste à passer à la limite dans la relation $\sum_{n=0}^{N}(u_{n+1}-u_n) = u_{N+1}-u_0$. □

8.2. Séries géométriques.

Soit z un nombre complexe, p un entier naturel.

Proposition 8.2.1.
La suite $\left(\sum_{n=p}^{N} z^n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $|z|<1$. Le cas échéant,

$$\sum_{n=p}^{N} z^n \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{z^p}{1-z}.$$

Démonstration.
C'est une conséquence directe de la formule de sommation géométrique :

$$\sum_{n=p}^{N} z^n = \frac{z^p}{1-z} - \frac{z^{N+1}}{1-z} \text{ si } z \neq 1 \text{ et } N+1-p \text{ sinon.}$$

Il suffit donc de voir que si $z \neq 1$, (z^{N+1}) converge si et seulement si $|z|<1$ et, dans le cas de convergence, converge vers 0.

Le cas $|z| \neq 1$ s'obtient aisément en considérant le module. Le cas $|z|=1$ est un exercice classique et sera traité en TD. □

9. Annexe : unification des notions de limites.

On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$.

Remarque 9.0.1.
Nous avons étudié trois types de limites différents : vers un point réel, vers $+\infty$ et vers $-\infty$. Vous avez remarqué que les définitions « naïves » de ces trois notions de limites ont une structure en commun. Afin d'éviter des répétitions fastidieuses et de mettre en avant les idées pertinentes, nous sommes ammenés à développer un vocabulaire permettant de traiter simultanément ces trois notions : c'est le début de la *topologie*, qui fait intervenir la notion de voisinage. Il convient de bien savoir utiliser de manière pertinent les deux visions, :

— dans les cas où l'on sait si la limite étudiée est finie, vaut $+\infty$ ou $-\infty$, on utilisera les définitions naïves des limites (propositions 9.2.4, 9.2.5 et 9.2.6) ;

— dans les autres cas, il peut être judicieux de raisonner en termes de voisinages.

9.1. Voisinages

Définition 9.1.1.
Soit a un réel. Soit ε un réel *strictement* positif.

(i) On appelle *boule ouverte de centre a et de rayon ε*, et on note $\mathcal{B}(a,\varepsilon)$ l'ensemble des réels situés à une distance de a strictement inférieure à ε :
$$\begin{aligned}\mathcal{B}(a,\varepsilon) &= \{\, x\in\mathbb{R} \mid |x-a|<\varepsilon \,\}\\ &=]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\end{aligned}$$

(ii) On appelle *boule fermée de centre a et de rayon ε*, et on note $\mathcal{B}_f(a,\varepsilon)$ l'ensemble des réels situés à une distance de a inférieure ou égale à ε :
$$\begin{aligned}\mathcal{B}_f(a,\varepsilon) &= \{\, x\in\mathbb{R} \mid |x-a|\leqslant\varepsilon \,\}\\ &= [a-\varepsilon, a+\varepsilon]\end{aligned}$$

(iii) On appelle *voisinage* de a toute partie de $\mathbb{R}$ contenant au moins une boule ouverte de centre a. L'ensemble des voisinages de a est noté $\mathcal{V}(a)$.
$$\mathcal{V}(a) = \left\{ E\in\mathscr{P}(\mathbb{R}) \;\middle|\; \exists\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*} \quad \mathcal{B}(a,\varepsilon)\subset E \right\}$$

(iv) On appelle *voisinage de* $+\infty$ toute partie de $\mathbb{R}$ contenant au moins un intervalle de la forme $]A,+\infty[$, où A est un réel. L'ensemble des voisinages de $+\infty$ est noté $\mathcal{V}(+\infty)$.
$$\mathcal{V}(+\infty) = \{\, E \mid \exists A\in\mathbb{R} \quad]A,+\infty[\subset E \,\}$$

(v) On appelle *voisinage de* $-\infty$ toute partie de $\mathbb{R}$ contenant au moins un intervalle de la forme $]-\infty,A[$, où A est un réel. L'ensemble des voisinages de $-\infty$ est noté $\mathcal{V}(-\infty)$.
$$\mathcal{V}(-\infty) = \{\, E \mid \exists A\in\mathbb{R} \quad]-\infty,A[\subset E \,\}$$

Proposition 9.1.2.
Soit $V \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) V est un voisinage de a

(ii) V contient au moins un intervalle ouvert (non vide) contenant a

(iii) V contient au moins un intervalle fermé (non réduit à un point) contenant a dont a n'est pas une extrémité.

Démonstration.
Simple, une fois que l'on a remarqué que si $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$,

$$\mathcal{B}\left(a, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset \mathcal{B}_f\left(a, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset \mathcal{B}(a, \varepsilon).$$

$\square$

Définition 9.1.3.
Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et P un prédicat sur les réels. On dit que P est vraie *au voisinage de a* si l'ensemble $\{\, x \in \mathbb{R} \mid P(x) \,\}$ est un voisinage de a.

Exemple 9.1.4.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Traduire l'expression « f est à valeurs positives au voisinage de a » :

1. pour $a \in \mathbb{R}$?
2. pour $a = +\infty$?
3. pour $a = -\infty$?

Mêmes questions pour

1. «f est nulle au voisinage de a»
2. «f est non nulle au voisinage de a»

Au voisinage de quels points les fonctions $\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}}$ sont-elles nulles ?

9.2. Convergence de suite dans $\overline{\mathbb{R}}$

Définition 9.2.1.
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

(i) On dit que u *tend vers* ℓ, ou que u_n *tend vers* ℓ quand n tend vers $+\infty$ (noté $u \xrightarrow[+\infty]{} \ell$ ou $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$), si, pour tout voisinage V de ℓ, les valeurs prises par u appartiennent toutes à V à partir d'un certain rang. Autrement dit, si l'on a

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \in V$$

(ii) Si $\ell \in \mathbb{R}$, on dit alors que u *converge vers* ℓ.

(iii) On dit que u *converge* ou est *convergente* si et seulement s'il existe un réel vers lequel elle converge.

(iv) On dit que la suite u *diverge* (ou *est divergente*) si et seulement si elle ne converge pas.

Remarque 9.2.2.
Si $u \xrightarrow[+\infty]{} \ell$, on dit que ℓ est une limite de u. Nous montrerons bientôt l'unicité de cette limite.

Remarque 9.2.3.
Une suite qui tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$) diverge.

Proposition 9.2.4.
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors u converge vers ℓ si et seulement si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Démonstration.
Si u tend vers $\ell \in \mathbb{R}$, soit $\varepsilon > 0$. Alors $\mathcal{B}(\ell, \varepsilon)$ est un voisinage de ℓ donc il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel toutes les valeurs de u sont dans ce voisinage : $\forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Réciproquement, soit V un voisinage de ℓ. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $\mathcal{B}(\ell, \varepsilon) \subset V$. Il existe alors un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Soit $n \geqslant N$, on a donc $u_n \in \mathcal{B}(\ell, \varepsilon) \subset V$, d'où le résultat. $\square$

Proposition 9.2.5.
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Alors on a $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ si et seulement si on a

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant A.$$

Démonstration.
À faire en exercice. □

Proposition 9.2.6.
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Alors on a $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ si et seulement si on a

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \leqslant A.$$

Démonstration.
À faire en exercice. □

9.3. Démonstrations des résultats précédemment obtenus

Les propriétés énoncées auparavant peuvent maintenant se prouver plus rapidement !

Lemme 9.3.1 (Propriété de Hausdorff)**.**
Soit ℓ_1 et ℓ_2 deux éléments distincts de $\overline{\mathbb{R}}$. Alors il existe V_1 et V_2 des voisinages respectifs de ℓ_1 et ℓ_2, tels que V_1 et V_2 soient disjoints.

Démonstration.
— Supposons que ℓ_1 et ℓ_2 sont deux réels, alors il suffit de prendre pour V_1 et V_2 les boules de centre respectifs ℓ_1 et ℓ_2 et de rayon $\frac{1}{3}|\ell_1 - \ell_2|$
— Supposons $\ell_1 = +\infty$ et $\ell_2 = -\infty$. Alors, il suffit de prendre respectivement $[1, +\infty[$ et $]-\infty, -1]$.
— Supposons $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 = +\infty$. Alors, il suffit de prendre pour V_1 la boule de centre ℓ_1 et de rayon 1, et pour V_2 l'intervalle $[\ell_1 + 2, +\infty[$.
— Le cas $\ell_1 \in \mathbb{R}$, $\ell_2 = -\infty$ est similaire.

On a donc le résultat. □

Théorème 9.3.2 (Unicité de la limite)**.**
Soit u une suite réelle. Alors si u admet une limite, celle-ci est unique.

Démonstration.
Il suffit de démontrer que u ne peut admettre deux limites distinctes. Par l'absurde, supposons que u admette deux limites ℓ_1 et ℓ_2 distinctes. D'après le lemme précédent, on peut choisir des voisinages V_1 et V_2 respectivement de ℓ_1 et ℓ_2 qui soient disjoints. u ayant pour limite ℓ_1 (resp. ℓ_2), choisissons un rang n_1 (resp. n_2) tel que les termes de u appartiennent à V_1 (resp. V_2) à partir du rang n_1 (resp. n_2). Notons n_0 le plus grand de ces deux rangs. Alors u_{n_0} appartient à la fois à V_1 et à V_2, ce qui est absurde puisque $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. □

Définition 9.3.3 (Limite)**.**
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Lorsqu'il existe un élément ℓ de $\overline{\mathbb{R}}$ vérifiant $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, on l'appelle **la** *limite* de u, et on le note $\lim\limits_{+\infty} u$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Démonstration.
Il suffit de démontrer que u ne peut admettre deux limites distinctes. Par l'absurde, supposons que u admette deux limites ℓ_1 et ℓ_2 distinctes. D'après le lemme précédent, on peut choisir des voisinages V_1 et V_2 respectivement de ℓ_1 et ℓ_2 qui soient disjoints. u ayant pour limite ℓ_1 (resp. ℓ_2), choisissons un rang n_1 (resp. n_2) tel que les termes de u appartiennent à V_1 (resp. V_2) à partir du rang n_1 (resp. n_2). Notons n_0 le plus grand de ces deux rangs. Alors u_{n_0} appartient à la fois à V_1 et à V_2, ce qui est absurde puisque $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. □

Théorème 9.3.4.
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $u \xrightarrow[+\infty]{} \ell$ alors toute suite extraite de u tend aussi vers ℓ.

Démonstration.
Soit φ une extractrice, soit V un voisinage de ℓ. Il existe donc un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que , pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in V$. Soit $n \geqslant n_0$, on a alors $\varphi(n) \geqslant n \geqslant n_0$ et donc $u_{\varphi(n)} \in V$. □

Théorème 9.3.5.
Soit u une suite à valeurs réelles et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si on a $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Démonstration.
Soit V un voisinage de ℓ. Il existe donc deux rangs N et N' tels que, pour tout entier naturel n,
— si $n \geqslant N$, $u_{2n} \in V$;

— si $n \geqslant N'$, $u_{2n+1} \in V$.

Ainsi, si $n \geqslant \max(2N, 2N'+1)$, on a $u_n \in V$ (il suffit de distinguer selon la parité de N), d'où le résultat. □

Proposition 9.3.6.
Soit $u \in \mathbb{R}^N$ et $(a, b, \ell) \in \mathbb{R}$. Supposons $u \xrightarrow[+\infty]{} \ell$ et $a < \ell < b$. Alors à partir d'un certain rang, les valeurs de u sont comprises strictement entre a et b. Autrement dit :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ n \geqslant n_0 \Rightarrow a < u_n < b$$

Démonstration.
$]a, b[$ est un voisinage de ℓ. □

9.4. Suites complexes

Il est possible de définir la notion de limite d'une suite complexe de la même manière que pour les suites réelles, en utilisant les voisinages. Ainsi, si l'on définit ce qu'est une *boule ouverte* dans $\mathbb{C}$ (ce qui a été fait dans le chapitre sur les complexes), on dira qu'un *voisinage* d'un complexe ℓ est toute partie de $\mathbb{C}$ contenant une boule ouverte contenant ℓ. La définition **9.2.1** peut alors être répétée dans le cas d'une suite complexe. Faisons le bilan : dans la définition **9.1.1**, on change les valeurs absolues en modules et on ne parle plus d'intervalle, on exclut le cas des limites infinies qui n'ont pas de sens dans $\mathbb{C}$, et le reste est commun aux suites réelles et complexes.

De manière générale, dans tout ensemble sur lequel on peut construire une *distance* on peut donner les définitions de boule ouverte, voisinage et limite d'une suite de cette manière.