C8 : Modélisation des performances statiques des systèmes
C8-1 : Modélisation des actions mécaniques

Émilien DURIF

Lycée La Martinière Monplaisir Lyon
Classe de MPSI

Plan

Plan

Action mécanique : introduction

Action mécanique

On appelle **action mécanique** toute cause *susceptible* de mettre en mouvement, de maintenir en équilibre ou de déformer un corps. (Le mot *susceptible* n'est pas choisi au hasard car une action mécanique ne créera pas nécessairement de mouvement.)

Plan

Action mécanique : introduction

Classification

On distingue :

- Les actions mécaniques **de contact**. Le modèle associé dépendra de la nature du contact (ponctuel, linéique ou surfacique).
- Les actions mécaniques exercées **à distance** (pesanteur, champ magnétique, champ électrique, etc.).

Action mécanique : introduction

Classification

On distingue :

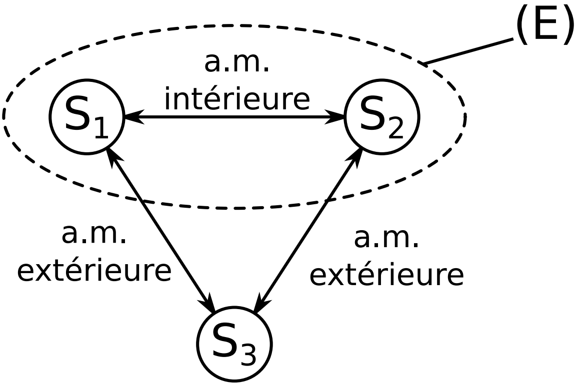
- Les actions mécaniques **de contact**. Le modèle associé dépendra de la nature du contact (ponctuel, linéique ou surfacique).
- Les actions mécaniques exercées **à distance** (pesanteur, champ magnétique, champ électrique, etc.).

Action mécanique

Classification

On distinguera également :

- les actions mécaniques **intérieures** à un ensemble de solides.
- les actions mécaniques **extérieures** à un ensemble de solides.

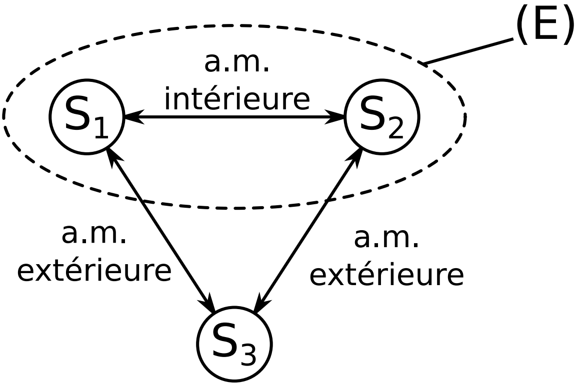


Action mécanique

Classification

On distinguera également :

- les actions mécaniques **intérieures** à un ensemble de solides.
- les actions mécaniques **extérieures** à un ensemble de solides.

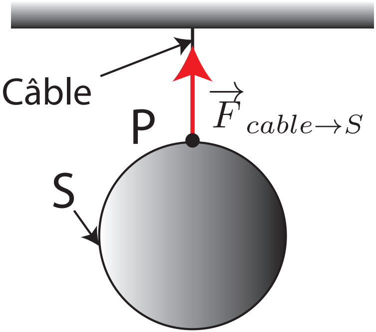


Plan

Action mécanique locale

Force et vecteur

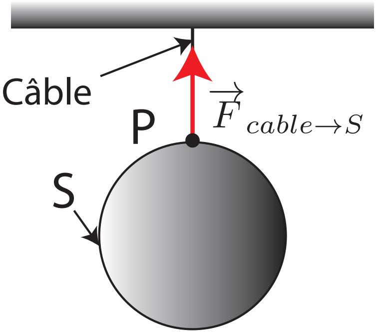
- Une force est une action mécanique représentée par un vecteur.
- La notion de vecteur est insuffisante à elle seule pour représenter complètement d'autres actions mécaniques.



Action mécanique locale

Force et vecteur

- Une force est une action mécanique représentée par un vecteur.
- La notion de vecteur est insuffisante à elle seule pour représenter complètement d'autres actions mécaniques.



Action mécanique locale

Propriétés : Représentation d'une action mécanique

- D'un point de vue local (en un certain point de l'ensemble étudié), nous admettrons qu'une action mécanique est entièrement définie par les 4 caractéristiques suivantes :
  - sa direction,
  - son sens,
  - son intensité,
  - son point d'application
- On admet ainsi que l'on peut toujours modéliser localement une action mécanique par un **vecteur lié** (vecteur + point).
- On parle alors d'une force et de son point d'application : $\left(\overrightarrow{F}, P\right)$.
- La norme d'une force s'exprime en Newton (N).
- Pour une force $\overrightarrow{F}$ de point d'application P, la droite passant par P et dirigée par $\overrightarrow{F}$ est appelée la **droite d'action** de la force $\overrightarrow{F}$.

Action mécanique locale

Propriétés : Représentation d'une action mécanique

- D'un point de vue local (en un certain point de l'ensemble étudié), nous admettrons qu'une action mécanique est entièrement définie par les 4 caractéristiques suivantes :
  - sa direction,
  - son sens,
  - son intensité,
  - son point d'application
- On admet ainsi que l'on peut toujours modéliser localement une action mécanique par un **vecteur lié** (vecteur + point).
- On parle alors d'une force et de son point d'application : $\left(\overrightarrow{F}, P\right)$.
- La norme d'une force s'exprime en Newton (N).
- Pour une force $\overrightarrow{F}$ de point d'application P, la droite passant par P et dirigée par $\overrightarrow{F}$ est appelée la **droite d'action** de la force $\overrightarrow{F}$.

Action mécanique locale

Propriétés : Représentation d'une action mécanique

- D'un point de vue local (en un certain point de l'ensemble étudié), nous admettrons qu'une action mécanique est entièrement définie par les 4 caractéristiques suivantes :
  - sa direction,
  - son sens,
  - son intensité,
  - son point d'application
- On admet ainsi que l'on peut toujours modéliser localement une action mécanique par un **vecteur lié** (vecteur + point).
- On parle alors d'une force et de son point d'application : $\left(\overrightarrow{F}, P\right)$.
- La norme d'une force s'exprime en Newton (N).
- Pour une force $\overrightarrow{F}$ de point d'application P, la droite passant par P et dirigée par $\overrightarrow{F}$ est appelée la **droite d'action** de la force $\overrightarrow{F}$.

Action mécanique locale

Propriétés : Représentation d'une action mécanique

- D'un point de vue local (en un certain point de l'ensemble étudié), nous admettrons qu'une action mécanique est entièrement définie par les 4 caractéristiques suivantes :
  - sa direction,
  - son sens,
  - son intensité.
  - son point d'application
- On admet ainsi que l'on peut toujours modéliser localement une action mécanique par un **vecteur lié** (vecteur + point).
- On parle alors d'une force et de son point d'application : $\left(\overrightarrow{F}, P\right)$.
- La norme d'une force s'exprime en Newton (N).
- Pour une force $\overrightarrow{F}$ de point d'application P, la droite passant par P et dirigée par $\overrightarrow{F}$ est appelée la **droite d'action** de la force $\overrightarrow{F}$.

Action mécanique locale

Propriétés : Représentation d'une action mécanique

- D'un point de vue local (en un certain point de l'ensemble étudié), nous admettrons qu'une action mécanique est entièrement définie par les 4 caractéristiques suivantes :
  - sa direction,
  - son sens,
  - son intensité.
  - son point d'application
- On admet ainsi que l'on peut toujours modéliser localement une action mécanique par un **vecteur lié** (vecteur + point).
- On parle alors d'une force et de son point d'application : $\left(\overrightarrow{F}, P\right)$.
- La norme d'une force s'exprime en Newton (N).
- Pour une force $\overrightarrow{F}$ de point d'application P, la droite passant par P et dirigée par $\overrightarrow{F}$ est appelée la **droite d'action** de la force $\overrightarrow{F}$.

Action mécanique locale

Propriétés : Représentation d'une action mécanique

- D'un point de vue local (en un certain point de l'ensemble étudié), nous admettrons qu'une action mécanique est entièrement définie par les 4 caractéristiques suivantes :
  - sa direction,
  - son sens,
  - son intensité.
  - son point d'application
- On admet ainsi que l'on peut toujours modéliser localement une action mécanique par un **vecteur lié** (vecteur + point).
- On parle alors d'une force et de son point d'application : $\left(\overrightarrow{F}, P\right)$.
- La norme d'une force s'exprime en Newton (N).
- Pour une force $\overrightarrow{F}$ de point d'application P, la droite passant par P et dirigée par $\overrightarrow{F}$ est appelée la **droite d'action** de la force $\overrightarrow{F}$.

Action mécanique locale

Propriétés : Représentation d'une action mécanique

- D'un point de vue local (en un certain point de l'ensemble étudié), nous admettrons qu'une action mécanique est entièrement définie par les 4 caractéristiques suivantes :
  - sa direction,
  - son sens,
  - son intensité.
  - son point d'application
- On admet ainsi que l'on peut toujours modéliser localement une action mécanique par un **vecteur lié** (vecteur + point).
- On parle alors d'une force et de son point d'application : $\left(\overrightarrow{F}, P\right)$.
- La norme d'une force s'exprime en Newton (N).
- Pour une force $\overrightarrow{F}$ de point d'application P, la droite passant par P et dirigée par $\overrightarrow{F}$ est appelée la **droite d'action** de la force $\overrightarrow{F}$.

Action mécanique locale

Propriétés : Représentation d'une action mécanique

- D'un point de vue local (en un certain point de l'ensemble étudié), nous admettrons qu'une action mécanique est entièrement définie par les 4 caractéristiques suivantes :
  - sa direction,
  - son sens,
  - son intensité.
  - son point d'application
- On admet ainsi que l'on peut toujours modéliser localement une action mécanique par un **vecteur lié** (vecteur + point).
- On parle alors d'une force et de son point d'application : $\left(\overrightarrow{F}, P\right)$.
- La norme d'une force s'exprime en Newton (N).
- Pour une force $\overrightarrow{F}$ de point d'application P, la droite passant par P et dirigée par $\overrightarrow{F}$ est appelée la **droite d'action** de la force $\overrightarrow{F}$.

Action mécanique locale

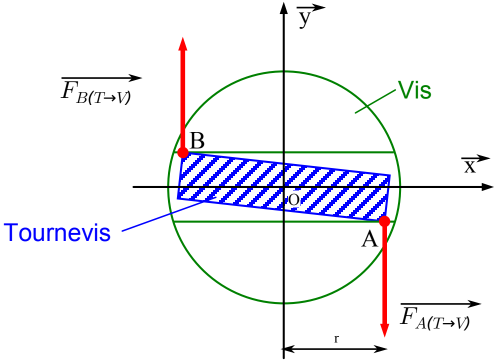
Propriétés : Représentation d'une action mécanique

- D'un point de vue local (en un certain point de l'ensemble étudié), nous admettrons qu'une action mécanique est entièrement définie par les 4 caractéristiques suivantes :
  - sa direction,
  - son sens,
  - son intensité.
  - son point d'application
- On admet ainsi que l'on peut toujours modéliser localement une action mécanique par un **vecteur lié** (vecteur + point).
- On parle alors d'une force et de son point d'application : $\left(\overrightarrow{F}, P\right)$.
- La norme d'une force s'exprime en Newton (N).
- Pour une force $\overrightarrow{F}$ de point d'application P, la droite passant par P et dirigée par $\overrightarrow{F}$ est appelée la **droite d'action** de la force $\overrightarrow{F}$.

Action mécanique locale

Soit un tournevis plat (T), exerçant une action mécanique sur la tête d'une vis (V) (modélisation simplifiée).

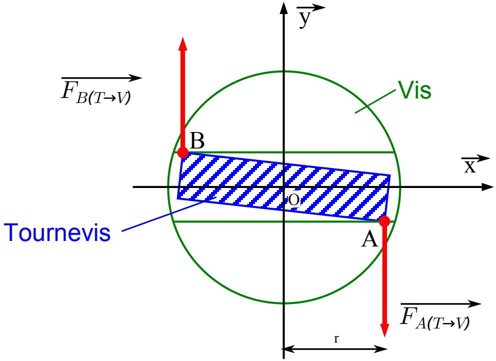
- Au point A, l'action exercée par le tournevis sur la vis peut se modéliser par la force : $\overrightarrow{F_{A(T\rightarrow V)}} = F_A\ \overrightarrow{y}$ (avec $F_A < 0$)
- Au point B, l'action exercée par le tournevis sur la vis peut se modéliser par la force : $\overrightarrow{F_{B(T\rightarrow V)}} = F_B\ \overrightarrow{y}$ (avec $F_B > 0$)



Action mécanique locale

Soit un tournevis plat (T), exerçant une action mécanique sur la tête d'une vis (V) (modélisation simplifiée).

- Au point A, l'action exercée par le tournevis sur la vis peut se modéliser par la force : $\overrightarrow{F_{A(T \to V)}} = F_A \ \overrightarrow{y}$ (avec $F_A < 0$)
- Au point B, l'action exercée par le tournevis sur la vis peut se modéliser par la force : $\overrightarrow{F_{B(T \to V)}} = F_B \ \overrightarrow{y}$ (avec $F_B > 0$)



Plan

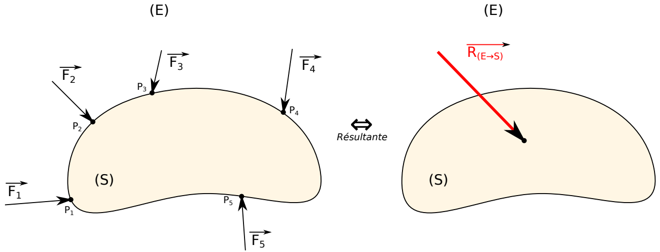
Action mécanique globale : résultante

Résultante des actions mécaniques

Soit un corps S subissant de la part d'un ensemble (E) une action mécanique modélisée localement par "n" forces $\overrightarrow{F_{i(E \to S)}}$ de points d'application P_i. On définit alors le vecteur suivant :

$$\boxed{\overrightarrow{R_{(E \to S)}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_{i(E \to S)}},} \quad (1)$$

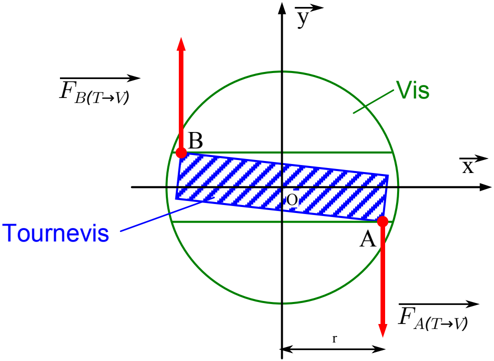
appelé **résultante des actions mécaniques exercées par** (E) **sur** (S).



Action mécanique globale : force

Pour le tournevis :

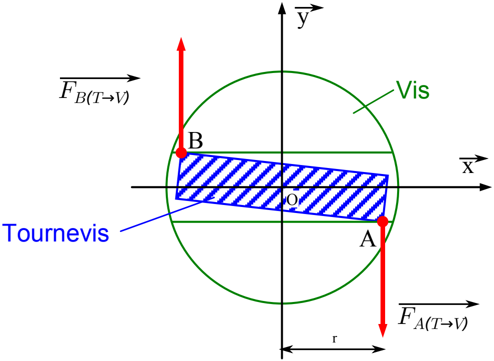
- $$\overrightarrow{R_{(T\to V)}} = \overrightarrow{F_{A(T\to V)}} + \overrightarrow{F_{B(T\to V)}}.$$



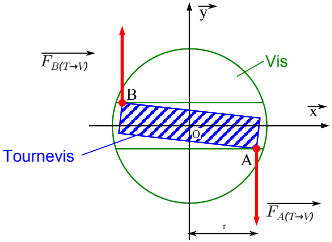
Action mécanique globale : force

Pour le tournevis :

- $$\overrightarrow{R_{(T\rightarrow V)}} = \overrightarrow{F_{A(T\rightarrow V)}} + \overrightarrow{F_{B(T\rightarrow V)}}.$$



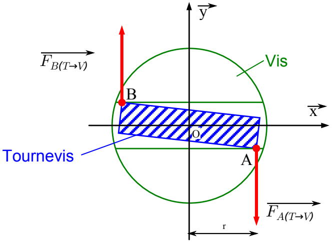
Action mécanique globale



Remarque

- Le problème précédent étant symétrique, on peut écrire $\overrightarrow{F_{A(T \to V)}} = -\overrightarrow{F_{B(T \to V)}}$.
- Ce qui donne : $\overrightarrow{R_{(T \to V)}} = \vec{0}$.
- Or la vis subit pourtant bien une action mécanique globale de la part du tournevis ! (Le tournevis la fait tourner.)
- La seule donnée de la résultante des actions mécaniques n'est donc pas suffisante pour modéliser cette action.

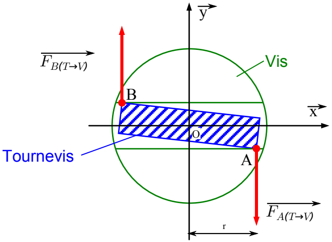
Action mécanique globale



Remarque

- Le problème précédent étant symétrique, on peut écrire $\overrightarrow{F_{A(T\to V)}} = -\overrightarrow{F_{B(T\to V)}}$.
- Ce qui donne : $\overrightarrow{R_{(T\to V)}} = \vec{0}$.
- Or la vis subit pourtant bien une action mécanique **globale** de la part du tournevis ! (Le tournevis la fait tourner.)
- La seule donnée de la résultante des actions mécaniques n'est donc **pas suffisante** pour modéliser cette action.

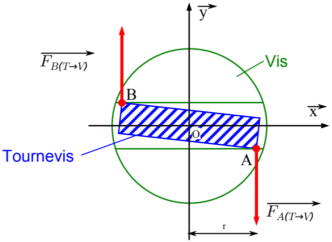
Action mécanique globale



Remarque

- Le problème précédent étant symétrique, on peut écrire $\overrightarrow{F_{A(T\to V)}} = -\overrightarrow{F_{B(T\to V)}}$.
- Ce qui donne : $\overrightarrow{R_{(T\to V)}} = \vec{0}$.
- Or la vis subit pourtant bien une action mécanique **globale** de la part du tournevis ! (Le tournevis la fait tourner.)
- La seule donnée de la résultante des actions mécaniques n'est donc **pas suffisante** pour modéliser cette action.

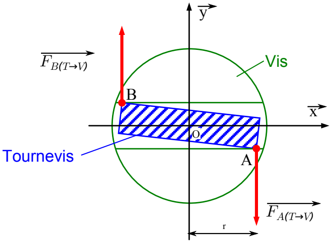
Action mécanique globale



Remarque

- Le problème précédent étant symétrique, on peut écrire $\overrightarrow{F_{A(T\to V)}} = -\overrightarrow{F_{B(T\to V)}}$.
- Ce qui donne : $\overrightarrow{R_{(T\to V)}} = \overrightarrow{0}$.
- Or la vis subit pourtant bien une action mécanique **globale** de la part du tournevis ! (Le tournevis la fait tourner.)
- La seule donnée de la résultante des actions mécaniques n'est donc **pas suffisante** pour modéliser cette action.

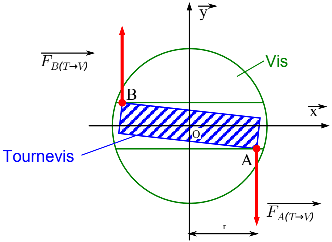
Action mécanique globale



Remarque

- Le problème précédent étant symétrique, on peut écrire $\overrightarrow{F_{A(T\rightarrow V)}} = -\overrightarrow{F_{B(T\rightarrow V)}}$.
- Ce qui donne : $\overrightarrow{R_{(T\rightarrow V)}} = \overrightarrow{0}$.
- Or la vis subit pourtant bien une action mécanique **globale** de la part du tournevis ! (Le tournevis la fait tourner.)
- La seule donnée de la résultante des actions mécaniques n'est donc **pas suffisante** pour modéliser cette action.

Action mécanique globale



Remarque

- Le problème précédent étant symétrique, on peut écrire $\overrightarrow{F_{A(T \to V)}} = -\overrightarrow{F_{B(T \to V)}}$.
- Ce qui donne : $\overrightarrow{R_{(T \to V)}} = \vec{0}$.
- Or la vis subit pourtant bien une action mécanique **globale** de la part du tournevis ! (Le tournevis la fait tourner.)
- La seule donnée de la résultante des actions mécaniques n'est donc **pas suffisante** pour modéliser cette action.

Action mécanique globale : moment

Moment d'une force (seule)

On appelle **moment en A de la force $\overrightarrow{F_i}$ de point d'application** P_i, le vecteur

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_{A\left(P_i,\overrightarrow{F_i}\right)}} = \overrightarrow{AP_i} \wedge \overrightarrow{F_i}} \qquad (2)$$

(A est un point quelconque de l'espace).

Astuce

- Le moment d'une force $\overrightarrow{F}$, exprimé au point A correspond à une "*force de rotation*" créé par $\overrightarrow{F}$ autour du point A.
- La direction de ce vecteur correspond à l'axe autour duquel cette "*force de rotation*" s'applique.
- Le sens de ce vecteur est tel que cette "*force de rotation*" tourne dans le sens direct quand le vecteur pointe vers nous.

Action mécanique globale : moment

Moment d'une force (seule)

On appelle **moment en A de la force $\overrightarrow{F_i}$ de point d'application P_i**, le vecteur

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_{A\left(P_i,\overrightarrow{F_i}\right)}} = \overrightarrow{AP_i} \wedge \overrightarrow{F_i}} \qquad (2)$$

(A est un point quelconque de l'espace).

Astuce

- Le moment d'une force $\overrightarrow{F}$, exprimé au point A correspond à une "*force de rotation*" créé par $\overrightarrow{F}$ autour du point A.
- La direction de ce vecteur correspond à l'axe autour duquel cette "*force de rotation*" s'applique.
- Le sens de ce vecteur est tel que cette "*force de rotation*" tourne dans le sens direct quand le vecteur pointe vers nous.

Action mécanique globale : moment

Moment d'une force (seule)

On appelle **moment en A de la force $\overrightarrow{F_i}$ de point d'application P_i**, le vecteur

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_{A\left(P_i,\overrightarrow{F_i}\right)}} = \overrightarrow{AP_i} \wedge \overrightarrow{F_i}} \quad (2)$$

(A est un point quelconque de l'espace).

Astuce

- Le moment d'une force $\overrightarrow{F}$, exprimé au point A correspond à une "*force de rotation*" créé par $\overrightarrow{F}$ autour du point A.
- La direction de ce vecteur correspond à l'axe autour duquel cette "*force de rotation*" s'applique.
- Le sens de ce vecteur est tel que cette "*force de rotation*" tourne dans le sens direct quand le vecteur pointe vers nous.

Action mécanique globale : moment

Moment d'une force (seule)

On appelle **moment en A de la force $\overrightarrow{F_i}$ de point d'application P_i**, le vecteur

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_{A\left(P_i,\overrightarrow{F_i}\right)}} = \overrightarrow{AP_i} \wedge \overrightarrow{F_i}} \quad (2)$$

(A est un point quelconque de l'espace).

Astuce

- Le moment d'une force $\overrightarrow{F}$, exprimé au point A correspond à une "*force de rotation*" créé par $\overrightarrow{F}$ autour du point A.
- La direction de ce vecteur correspond à l'axe autour duquel cette "*force de rotation*" s'applique.
- Le sens de ce vecteur est tel que cette "*force de rotation*" tourne dans le sens direct quand le vecteur pointe vers nous.

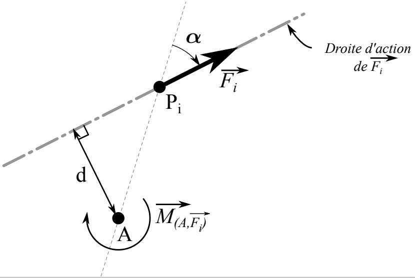
Action mécanique globale : moment

Propriétés

Soit (Δ_i) la droite d'application de la force $\overrightarrow{F_i}$ appliquée au point P_i. On note d la distance (orthogonale) entre (Δ_i) et A et $\alpha = \left(\widehat{\overrightarrow{AP_i}, \overrightarrow{F_i}}\right)$. Alors :

$$\boxed{\left\| \overrightarrow{\mathcal{M}_{A\left(P_i, \overrightarrow{F_i}\right)}} \right\| = d \left\| \overrightarrow{F_i} \right\|} \tag{3}$$

La distance d est appelée **bras de levier**.



Action mécanique globale : moment

Moment résultant des actions mécaniques

Soit un corps S subissant de la part d'un ensemble (E) une action mécanique modélisée localement par "n" forces $\overrightarrow{F_{i(E\rightarrow S)}}$, de points d'application P_i. On appelle **moment résultant en A de la résultante $\overrightarrow{F_i}$**, le vecteur

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_{A(E\rightarrow S)}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathcal{M}_{A\left(P_i,\overrightarrow{F_i}\right)}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AP_i} \wedge \overrightarrow{F_i};} \quad (4)$$

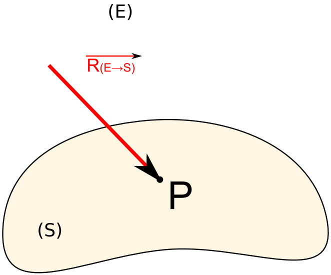
(A est un point quelconque de l'espace).

Action mécanique globale : moment

Remarque

Pour trouver le point d'application de l'effort résultant, il suffit de trouver le point P pour lequel $\overrightarrow{\mathcal{M}_{P(E\rightarrow S)}} = \overrightarrow{0}$. Ainsi P, vérifie :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_{P(E\rightarrow S)}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{PP_i} \wedge \overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{0}} \quad (5)$$



Plan

Torseurs des actions mécaniques extérieures

Torseur des actions mécaniques extérieures

Toute action mécanique peut être modélisée globalement par un torseur :

$$\boxed{\left\{\mathcal{T}_{(E\rightarrow S)}\right\} = {}_{A}\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{(E\rightarrow S)}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A(E\rightarrow S)}} \end{array} \right\}} \qquad (6)$$

C'est le torseur, réduit en A, des actions mécaniques exercées par (E) sur (S).

Plan

Torseurs des actions mécaniques extérieures : propriétés

Formule de changement de point

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{(E\rightarrow S)}\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R_{(E\rightarrow S)}}\\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A(E\rightarrow S)}}\end{array}\right\} = {}_B\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R_{(E\rightarrow S)}}\\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{B(E\rightarrow S)}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{A(E\rightarrow S)}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_{(E\rightarrow S)}}\end{array}\right\}.} \quad (7)$$

Torseurs des actions mécaniques extérieures : propriétés

Comoment de torseurs

Soit deux torseurs $\mathcal{T}^1(E \to S)$ et $\mathcal{T}^2(E \to S)$, tels que :

$\mathcal{T}^1(E \to S) = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}^1(E \to S) \\ \overrightarrow{M}_A^1(E \to S) \end{array} \right\}$ et $\mathcal{T}^2(E \to S) = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}^2(E \to S) \\ \overrightarrow{M}_A^2(E \to S) \end{array} \right\}$

Alors le comoment $\mathcal{T}^1(E \to S) \otimes \mathcal{T}^2(E \to S)$ s'obtient par :

$$\boxed{\mathcal{T}^1(E \to S) \otimes \mathcal{T}^2(E \to S) = \overrightarrow{R}^1(E \to S) \cdot \overrightarrow{M}_A^2(E \to S) + \overrightarrow{R}^2(E \to S) \cdot \overrightarrow{M}_A^1(E \to S).} \tag{8}$$

Automoment

L'**automoment** est le comoment d'un torseur par lui même et est donc le produit scalaire de sa résultante par son moment. Il est **constant**. On l'appelle "**invariant scalaire du torseur**".

$$\boxed{\overrightarrow{R}(E \to S) \cdot \overrightarrow{M}_A(E \to S) = \overrightarrow{R}(E \to S) \cdot \overrightarrow{M}_B(E \to S).} \tag{9}$$

Quelque soit A et B.

Torseurs des actions mécaniques extérieures : propriétés

Torseur couple

Le torseur d'action mécanique d'un ensemble matériel (E) sur un corps (S) est **un couple** s'il est de la forme :

$$\boxed{\left\{\mathcal{T}_{(E\rightarrow S)}\right\} = {}_{A}\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A(E\rightarrow S)}} \end{array} \right\}.} \tag{10}$$

avec,

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{A(E\rightarrow S)}} \neq \overrightarrow{0}.$$

Remarque

Ce torseur est **invariant**.

Torseurs des actions mécaniques extérieures : propriétés

Torseur couple

Le torseur d'action mécanique d'un ensemble matériel (E) sur un corps (S) est **un couple** s'il est de la forme :

$$\boxed{\left\{\mathcal{T}_{(E\to S)}\right\} = {}_{A}\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A(E\to S)}} \end{array} \right\}.} \tag{10}$$

avec,

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{A(E\to S)}} \neq \overrightarrow{0}.$$

Remarque

Ce torseur est **invariant**.

Torseurs des actions mécaniques extérieures : propriétés

Torseur à résultante ou glisseur

Le torseur d'action mécanique d'un ensemble matériel (E) sur un corps (S) est un torseur à résultante **s'il existe au moins un point** A pour lequel il est de la forme :

$$\boxed{\left\{\mathcal{T}_{(E\rightarrow S)}\right\} = {}_{A}\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R_{(E\rightarrow S)}}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}} \tag{11}$$

avec,

$$\overrightarrow{R_{(E\rightarrow S)}} \neq \overrightarrow{0}.$$

et A un point de l'axe central du torseur. On appelle également ce torseur **un glisseur**.

Remarque

- Si la résultante et le moment sont orthogonaux le torseur est un glisseur.
- Si l'automoment d'un torseur est nul alors c'est un glisseur.

Torseurs des actions mécaniques extérieures : propriétés

Torseur à résultante ou glisseur

Le torseur d'action mécanique d'un ensemble matériel (E) sur un corps (S) est un torseur à résultante **s'il existe au moins un point** A pour lequel il est de la forme :

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{(E\rightarrow S)}\} = {}_{A}\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R_{(E\rightarrow S)}} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}} \quad (11)$$

avec,

$$\overrightarrow{R_{(E\rightarrow S)}} \neq \overrightarrow{0}.$$

et A un point de l'axe central du torseur. On appelle également ce torseur **un glisseur**.

Remarque

- Si la **résultante** et le **moment** sont **orthogonaux** le torseur est un **glisseur**.
- Si l'**automoment** d'un torseur est **nul** alors c'est un **glisseur**.

Torseurs des actions mécaniques extérieures : propriétés

Torseur à résultante ou glisseur

Le torseur d'action mécanique d'un ensemble matériel (E) sur un corps (S) est un torseur à résultante **s'il existe au moins un point** A pour lequel il est de la forme :

$$\boxed{\left\{\mathcal{T}_{(E\rightarrow S)}\right\} = {}_{A}\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{(E\rightarrow S)}} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}} \qquad (11)$$

avec,

$$\overrightarrow{R_{(E\rightarrow S)}} \neq \overrightarrow{0}.$$

et A un point de l'axe central du torseur. On appelle également ce torseur **un glisseur**.

Remarque

- Si la **résultante** et le **moment** sont **orthogonaux** le torseur est un **glisseur**.
- Si l'**automoment** d'un torseur est **nul** alors c'est un **glisseur**.

Torseurs des actions mécaniques extérieures : propriétés

Equiprojectivité

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_{A(E\rightarrow S)}} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{B(E\rightarrow S)}} \cdot \overrightarrow{AB}.} \quad (12)$$

Torseurs des actions mécaniques extérieures : propriétés

Axe central

- Un **point central** d'un torseur est un point où le moment résultant a même direction que la résultante générale.
- L'**axe central** d'un torseur est la droite constituée par l'ensemble des points centraux. Il a même direction que la résultante du torseur. L'axe central n'existe que si la résultante du torseur n'est pas nulle.
- La position de la projection du point A sur l'axe central (que l'on notera H) est obtenu par la relation suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{\mathcal{M}_{A(E \to S)}}}{\overrightarrow{R}^2}} \qquad (13)$$

Torseurs des actions mécaniques extérieures : propriétés

Axe central

- Un **point central** d'un torseur est un point où le moment résultant a même direction que la résultante générale.
- L'**axe central** d'un torseur est la droite constituée par l'ensemble des points centraux. Il a même direction que la résultante du torseur. L'axe central n'existe que si la résultante du torseur n'est pas nulle.
- La position de la projection du point A sur l'axe central (que l'on notera H) est obtenu par la relation suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{\mathcal{M}_{A(E\rightarrow S)}}}{\overrightarrow{R}^2}} \tag{13}$$

Torseurs des actions mécaniques extérieures : propriétés

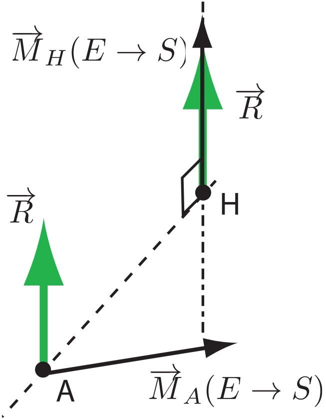
Axe central

- Un **point central** d'un torseur est un point où le moment résultant a même direction que la résultante générale.
- L'**axe central** d'un torseur est la droite constituée par l'ensemble des points centraux. Il a même direction que la résultante du torseur. L'axe central n'existe que si la résultante du torseur n'est pas nulle.
- La position de la projection du point A sur l'axe central (que l'on notera H) est obtenu par la relation suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{\mathcal{M}_{A(E\rightarrow S)}}}{\overrightarrow{R}^2}} \tag{13}$$

Torseurs des actions mécaniques extérieures : propriétés

$$\boxed{\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{\mathcal{M}_{A(E \to S)}}}{\overrightarrow{R}^2}}$$



Plan

Actions mécaniques de contact : actions réparties

- La notions “d’action mécanique ponctuelle” n’existe pas dans le réel.
- Elles sont en réalité réparties sur une surface, ou sur un volume.
- Les contacts entre solides sont en réalité surfaciques ou linéiques.
- Mais on peut représenter localement en chaque point de la surface une action mécanique locale appliquée à un élément de surface infiniment petit.

Actions mécaniques de contact : actions réparties

- La notions "d'action mécanique ponctuelle" n'existe pas dans le réel.
- Elles sont en réalité réparties sur une surface, ou sur un volume.
- Les contacts entre solides sont en réalité surfaciques ou linéiques.
- Mais on peut représenter localement en chaque point de la surface une action mécanique locale appliquée à un élément de surface infiniment petit.

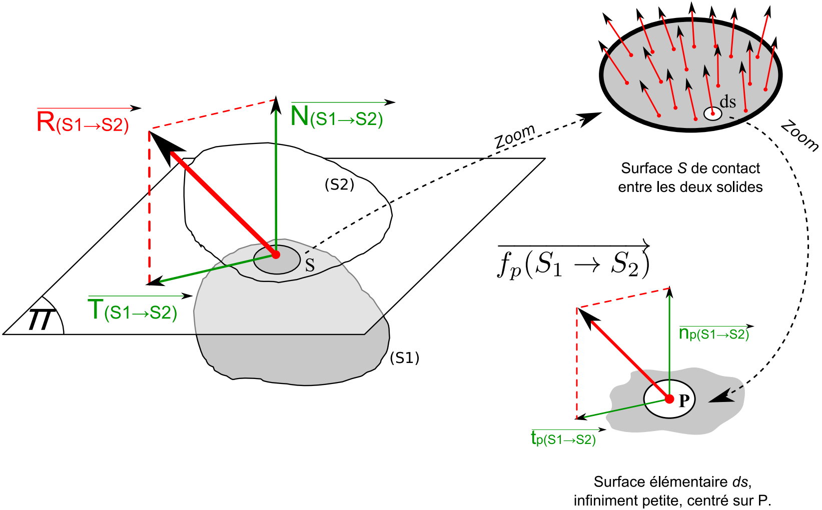
Actions mécaniques de contact : actions réparties

- La notions “d’action mécanique ponctuelle” n’existe pas dans le réel.
- Elles sont en réalité réparties sur une surface, ou sur un volume.
- Les contacts entre solides sont en réalité surfaciques ou linéiques.
- Mais on peut représenter localement en chaque point de la surface une action mécanique locale appliquée à un élément de surface infiniment petit.

Actions mécaniques de contact : actions réparties

- La notions “d’action mécanique ponctuelle” n’existe pas dans le réel.
- Elles sont en réalité réparties sur une surface, ou sur un volume.
- Les contacts entre solides sont en réalité surfaciques ou linéiques.
- Mais on peut représenter localement en chaque point de la surface une action mécanique locale appliquée à un élément de surface infiniment petit.

Actions mécaniques de contact : actions réparties



Actions mécaniques de contact : actions réparties

Densité surfacique d'effort et torseur d'action mécanique répartie

- L'action mécanique élémentaire de S_1 sur S_2 se caractérise en chaque point P de la surface de contact S par un vecteur :

$$\boxed{\overrightarrow{f_{P(S_1 \rightarrow S_2)}}} \qquad (14)$$

appelé "*densité surfacique d'effort*" au point P de S_1 sur S_2.

- $\overrightarrow{f_{P(S_1 \rightarrow S_2)}}$ est homogène à une force par unité de surface (homogène à une pression).
- Pour rappel :
  - Pour rappel, une pression s'exprime en Pa $(= N \cdot m^{-2})$.
  - On utilisera aussi le MPa $(= N \cdot mm^{-2})$.
  - On rappelle aussi que $1\,bar = 10^5\,Pa$.

Actions mécaniques de contact : actions réparties

Densité surfacique d'effort et torseur d'action mécanique répartie

- L'action mécanique élémentaire de S_1 sur S_2 se caractérise en chaque point P de la surface de contact S par un vecteur :

$$\boxed{\overrightarrow{f_{P(S_1 \rightarrow S_2)}}} \tag{14}$$

  appelé "*densité surfacique d'effort*" au point P de S_1 sur S_2.
- $\overrightarrow{f_{P(S_1 \rightarrow S_2)}}$ est homogène à une force par unité de surface (homogène à une pression).
- Pour rappel :
  - Pour rappel, une pression s'exprime en Pa $(= N \cdot m^{-2})$.
  - On utilisera aussi le MPa $(= N \cdot mm^{-2})$.
  - On rappelle aussi que $1 bar = 10^5 Pa$.

Actions mécaniques de contact : actions réparties

Densité surfacique d'effort et torseur d'action mécanique répartie

- L'action mécanique élémentaire de S_1 sur S_2 se caractérise en chaque point P de la surface de contact S par un vecteur :

$$\boxed{\overrightarrow{f_{P(S_1 \to S_2)}}} \tag{14}$$

appelé "*densité surfacique d'effort*" au point P de S_1 sur S_2.

- $\overrightarrow{f_{P(S_1 \to S_2)}}$ est homogène à une force par unité de surface (homogène à une pression).
- Pour rappel :
  - Pour rappel, une pression s'exprime en Pa $(= N \cdot m^{-2})$.
  - On utilisera aussi le MPa $(= N \cdot mm^{-2})$.
  - On rappelle aussi que $1 bar = 10^5 Pa$.

Actions mécaniques de contact : actions réparties

Densité surfacique d'effort et torseur d'action mécanique répartie

- L'action mécanique élémentaire de S_1 sur S_2 se caractérise en chaque point P de la surface de contact S par un vecteur :

$$\boxed{\overrightarrow{f_{P(S_1 \rightarrow S_2)}}} \tag{14}$$

appelé "*densité surfacique d'effort*" au point P de S_1 sur S_2.

- $\overrightarrow{f_{P(S_1 \rightarrow S_2)}}$ est homogène à une force par unité de surface (homogène à une pression).
- Pour rappel :
  - Pour rappel, une pression s'exprime en Pa $(= N \cdot m^{-2})$.
  - On utilisera aussi le MPa $(= N \cdot mm^{-2})$.
  - On rappelle aussi que $1 bar = 10^5 Pa$.

Actions mécaniques de contact : actions réparties

Densité surfacique d'effort et torseur d'action mécanique répartie

- L'action mécanique élémentaire de S_1 sur S_2 se caractérise en chaque point P de la surface de contact S par un vecteur :

$$\boxed{\overrightarrow{f_{P(S_1 \rightarrow S_2)}}} \tag{14}$$

  appelé "*densité surfacique d'effort*" au point P de S_1 sur S_2.
- $\overrightarrow{f_{P(S_1 \rightarrow S_2)}}$ est homogène à une force par unité de surface (homogène à une pression).
- Pour rappel :
  - Pour rappel, une pression s'exprime en Pa $(= N \cdot m^{-2})$.
  - On utilisera aussi le MPa $(= N \cdot mm^{-2})$.
  - On rappelle aussi que $1bar = 10^5 Pa$.

Actions mécaniques de contact : actions réparties

Densité surfacique d'effort et torseur d'action mécanique répartie

On définit alors complètement l'action mécanique de contact de S_1 sur S_2 par le torseur suivant :

$$\boxed{\left\{\mathcal{T}_{(S_1\rightarrow S_2)}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \displaystyle\int_{P\in S} \overrightarrow{f_{P(S_1\rightarrow S_2)}}\,ds \\ \displaystyle\int_{P\in S} \overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{f_{P(S_1\rightarrow S_2)}}\,ds \end{array}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R_{(S_1\rightarrow S_2)}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A(S_1\rightarrow S_2)}} \end{array}\right\}} \qquad (15)$$

appelé torseur d'action mécanique de contact de S_1 sur S_2.

Actions mécaniques de contact : actions réparties

Décomposition de la densité surfacique d'efforts

- Soit (π) le plan tangent commun à S_1 et à S_2 en P, de normal $\overrightarrow{n}$. On décompose alors :

$$\boxed{\overrightarrow{f_{P(S_1 \to S_2)}} = \underbrace{\overrightarrow{n_{P(S_1 \to S_2)}}}_{\perp \pi} + \underbrace{\overrightarrow{t_{P(S_1 \to S_2)}}}_{//\pi}.} \tag{16}$$

- $\overrightarrow{n_{P(S_1 \to S_2)}}$ est appelé **densité surfacique normale** ou **pression** au point P, des forces de contact de S_1 sur S_2.

$$\boxed{\overrightarrow{n_{P(S_1 \to S_2)}} = \left(\overrightarrow{f_{P(S_1 \to S_2)}} \cdot \overrightarrow{n}\right) \cdot \overrightarrow{n}.} \tag{17}$$

- $\overrightarrow{t_{P(S_1 \to S_2)}}$ est appelé **est appelé densité surfacique tangentielle** au point P, des forces de contact de S_1 sur S_2.

$$\boxed{\overrightarrow{t_{P(S_1 \to S_2)}} = \overrightarrow{f_{P(S_1 \to S_2)}} - \overrightarrow{n_{P(S_1 \to S_2)}}.} \tag{18}$$

Actions mécaniques de contact : actions réparties

Décomposition de la densité surfacique d'efforts

- Soit (π) le plan tangent commun à S_1 et à S_2 en P, de normal $\overrightarrow{n}$. On décompose alors :

$$\boxed{\overrightarrow{f_{P(S_1\rightarrow S_2)}} = \underbrace{\overrightarrow{n_{P(S_1\rightarrow S_2)}}}_{\perp\pi} + \underbrace{\overrightarrow{t_{P(S_1\rightarrow S_2)}}}_{//\pi}.} \quad (16)$$

- $\overrightarrow{n_{P(S_1\rightarrow S_2)}}$ est appelé **densité surfacique normale** ou **pression** au point P, des forces de contact de S_1 sur S_2.

$$\boxed{\overrightarrow{n_{P(S_1\rightarrow S_2)}} = \left(\overrightarrow{f_{P(S_1\rightarrow S_2)}}\cdot\overrightarrow{n}\right)\cdot\overrightarrow{n}.} \quad (17)$$

- $\overrightarrow{t_{P(S_1\rightarrow S_2)}}$ est appelé **est appelé densité surfacique tangentielle** au point P, des forces de contact de S_1 sur S_2.

$$\boxed{\overrightarrow{t_{P(S_1\rightarrow S_2)}} = \overrightarrow{f_{P(S_1\rightarrow S_2)}} - \overrightarrow{n_{P(S_1\rightarrow S_2)}}.} \quad (18)$$

Actions mécaniques de contact : actions réparties

Décomposition de la densité surfacique d'efforts

- Soit (π) le plan tangent commun à S_1 et à S_2 en P, de normal $\overrightarrow{n}$. On décompose alors :

$$\boxed{\overrightarrow{f_{P(S_1\rightarrow S_2)}} = \underbrace{\overrightarrow{n_{P(S_1\rightarrow S_2)}}}_{\perp\pi} + \underbrace{\overrightarrow{t_{P(S_1\rightarrow S_2)}}}_{//\pi}.} \tag{16}$$

- $\overrightarrow{n_{P(S_1\rightarrow S_2)}}$ est appelé **densité surfacique normale** ou **pression** au point P, des forces de contact de S_1 sur S_2.

$$\boxed{\overrightarrow{n_{P(S_1\rightarrow S_2)}} = \left(\overrightarrow{f_{P(S_1\rightarrow S_2)}}\cdot\overrightarrow{n}\right)\cdot\overrightarrow{n}.} \tag{17}$$

- $\overrightarrow{t_{P(S_1\rightarrow S_2)}}$ est appelé **est appelé densité surfacique tangentielle** au point P, des forces de contact de S_1 sur S_2.

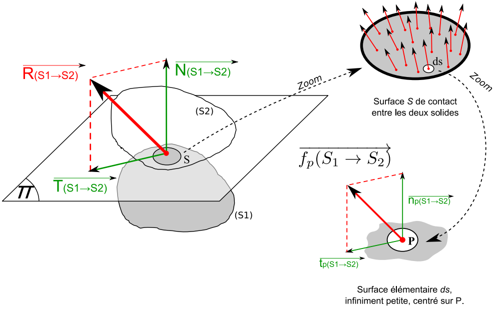
$$\boxed{\overrightarrow{t_{P(S_1\rightarrow S_2)}} = \overrightarrow{f_{P(S_1\rightarrow S_2)}} - \overrightarrow{n_{P(S_1\rightarrow S_2)}}.} \tag{18}$$

Actions mécaniques de contact : actions réparties

Lorsque ce sera possible (i.e. toute la surface (S) de contact est un plan π), on pourra aussi décomposer la résultante du torseur d'action mécanique de contact comme suit :

$$\boxed{\overrightarrow{R_{(S_1 \rightarrow S_2)}} = \underbrace{\overrightarrow{N_{S_1 \rightarrow S_2}}}_{\perp \pi} + \underbrace{\overrightarrow{T_{S_1 \rightarrow S_2}}}_{//\pi}.} \tag{19}$$

- $\overrightarrow{N_{S_1 \rightarrow S_2}}$ est l'effort résultant normal,
- $\overrightarrow{T_{S_1 \rightarrow S_2}}$ est l'effort résultant tangentiel.



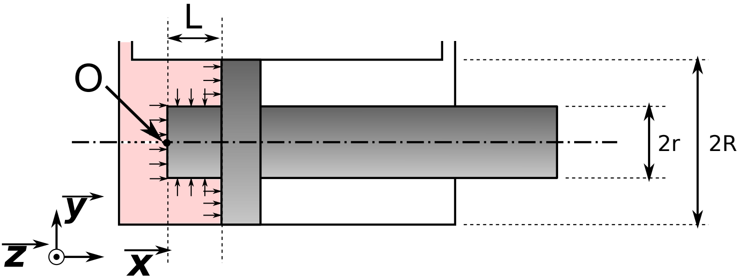
Actions mécaniques de contact : actions réparties

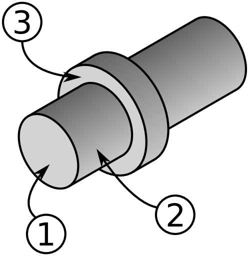
Pression d'un fluide au repos

Lorsqu'un solide S est plongé dans un fluide au repos F, celui-ci exerce une action mécanique répartie, purement normale (pas tangentielle), d'intensité la valeur de la pression de ce fluide :

$$\boxed{\overrightarrow{f_{P(F \to S)}} = \overrightarrow{n p_{(F \to S)}}} \tag{20}$$

Actions mécaniques de contact : actions réparties





Actions mécaniques de contact : actions réparties

- On cherche à déterminer le torseur de l'action du fluide sur la tige du vérin T :

$$\left\{\mathcal{T}_{(F\rightarrow T)}\right\} = \left\{\mathcal{T}_{(F\rightarrow 1)}\right\} + \left\{\mathcal{T}_{(F\rightarrow 2)}\right\} + \left\{\mathcal{T}_{(F\rightarrow 3)}\right\}$$

-

$$\overrightarrow{R_{(F\rightarrow 1)}} = \int_{P\in(1)} p\,\vec{x}\,dS = p\,\vec{x}\int P\in(1)dS$$
$$= p\;S\,\vec{x}$$

-

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O(F\rightarrow 1)}} = \int_{P\in(1)} \overrightarrow{OP}\wedge p\,\vec{x}\,dS = \int_{P\in(1)} \rho\;\vec{e_r}\wedge p\,\vec{x}\,dS$$

-

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O(F\rightarrow 1)}} = \int_{P\in(1)} \rho\;\vec{e_\theta}\,dS$$
$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{\rho=0}^{\rho=r} \rho\;\vec{e_\theta}\,d\rho\;d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\vec{e_\theta}\,d\theta\int_{\rho=0}^{\rho=r}\rho\;dr = \vec{0}$$

- $\left\{\mathcal{T}_{(F\rightarrow 2)}\right\}$: (à faire à la maison)
- $\left\{\mathcal{T}_{(F\rightarrow 3)}\right\}$: (à faire à la maison)

Actions mécaniques de contact : actions réparties

- On cherche à déterminer le torseur de l'action du fluide sur la tige du vérin T :

$$\left\{\mathcal{T}_{(F\rightarrow T)}\right\} = \left\{\mathcal{T}_{(F\rightarrow 1)}\right\} + \left\{\mathcal{T}_{(F\rightarrow 2)}\right\} + \left\{\mathcal{T}_{(F\rightarrow 3)}\right\}$$

- $$\overrightarrow{R_{(F\rightarrow 1)}} = \int_{P\in(1)} p\,\overrightarrow{x}\,dS = p\,\overrightarrow{x}\int P\in(1)dS = p\,S\,\overrightarrow{x}$$

- $$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O(F\rightarrow 1)}} = \int_{P\in(1)} \overrightarrow{OP}\wedge p\,\overrightarrow{x}\,dS = \int_{P\in(1)} \rho\,\overrightarrow{e_r}\wedge p\,\overrightarrow{x}\,dS$$

- $$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O(F\rightarrow 1)}} = \int_{P\in(1)} \rho\,\overrightarrow{e_\theta}\,dS$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{\rho=0}^{\rho=r} \rho\,\overrightarrow{e_\theta}\,d\rho\,d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\overrightarrow{e_\theta}\,d\theta\int_{\rho=0}^{\rho=r}\rho\,dr = \overrightarrow{0}$$

- $\left\{\mathcal{T}_{(F\rightarrow 2)}\right\}$: (à faire à la maison)
- $\left\{\mathcal{T}_{(F\rightarrow 3)}\right\}$: (à faire à la maison)

Actions mécaniques de contact : actions réparties

- On cherche à déterminer le torseur de l'action du fluide sur la tige du vérin T :

$$\left\{\mathcal{T}_{(F\rightarrow T)}\right\} = \left\{\mathcal{T}_{(F\rightarrow 1)}\right\} + \left\{\mathcal{T}_{(F\rightarrow 2)}\right\} + \left\{\mathcal{T}_{(F\rightarrow 3)}\right\}$$

-

$$\overrightarrow{R_{(F\rightarrow 1)}} = \int_{P\in(1)} p\,\overrightarrow{x}\,dS = p\,\overrightarrow{x}\int P\in(1)dS$$
$$= p\;S\,\overrightarrow{x}$$

-

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O(F\rightarrow 1)}} = \int_{P\in(1)} \overrightarrow{OP}\wedge p\,\overrightarrow{x}\,dS = \int_{P\in(1)} \rho\;\overrightarrow{e_r}\wedge p\,\overrightarrow{x}\,dS$$

-

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O(F\rightarrow 1)}} = \int_{P\in(1)} \rho\;\overrightarrow{e_\theta}\,dS$$
$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{\rho=0}^{\rho=r} \rho\;\overrightarrow{e_\theta}\,d\rho\;d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\overrightarrow{e_\theta}\,d\theta\int_{\rho=0}^{\rho=r}\rho\;dr = \overrightarrow{0}$$

- $\left\{\mathcal{T}_{(F\rightarrow 2)}\right\}$: (à faire à la maison)
- $\left\{\mathcal{T}_{(F\rightarrow 3)}\right\}$: (à faire à la maison)

Actions mécaniques de contact : actions réparties

- On cherche à déterminer le torseur de l'action du fluide sur la tige du vérin T :
$$\left\{\mathcal{T}_{(F\rightarrow T)}\right\} = \left\{\mathcal{T}_{(F\rightarrow 1)}\right\} + \left\{\mathcal{T}_{(F\rightarrow 2)}\right\} + \left\{\mathcal{T}_{(F\rightarrow 3)}\right\}$$
-
$$\overrightarrow{R_{(F\rightarrow 1)}} = \int_{P\in(1)} p\,\overrightarrow{x}\,dS = p\,\overrightarrow{x}\int P \in (1)dS$$
$$= p\;S\,\overrightarrow{x}$$
-
$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O(F\rightarrow 1)}} = \int_{P\in(1)} \overrightarrow{OP} \wedge p\,\overrightarrow{x}\,dS = \int_{P\in(1)} \rho\;\overrightarrow{e_r} \wedge p\,\overrightarrow{x}\,dS$$
-
$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O(F\rightarrow 1)}} = \int_{P\in(1)} \rho\;\overrightarrow{e_\theta}\,dS$$
$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{\rho=0}^{\rho=r} \rho\;\overrightarrow{e_\theta}\,d\rho\;d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \overrightarrow{e_\theta}\,d\theta\;\int_{\rho=0}^{\rho=r} \rho\;dr = \overrightarrow{0}$$
- $\left\{\mathcal{T}_{(F\rightarrow 2)}\right\}$: (à faire à la maison)
- $\left\{\mathcal{T}_{(F\rightarrow 3)}\right\}$: (à faire à la maison)

Actions mécaniques de contact : actions réparties

- On cherche à déterminer le torseur de l'action du fluide sur la tige du vérin T :
$$\left\{\mathcal{T}_{(F\rightarrow T)}\right\} = \left\{\mathcal{T}_{(F\rightarrow 1)}\right\} + \left\{\mathcal{T}_{(F\rightarrow 2)}\right\} + \left\{\mathcal{T}_{(F\rightarrow 3)}\right\}$$
-
$$\overrightarrow{R_{(F\rightarrow 1)}} = \int_{P\in(1)} p\overrightarrow{x}\,dS = p\overrightarrow{x}\int P\in(1)dS$$
$$= p\ S\overrightarrow{x}$$
-
$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O(F\rightarrow 1)}} = \int_{P\in(1)} \overrightarrow{OP}\wedge p\overrightarrow{x}\,dS = \int_{P\in(1)} \rho\ \overrightarrow{e_r}\wedge p\overrightarrow{x}\,dS$$
-
$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O(F\rightarrow 1)}} = \int_{P\in(1)} \rho\ \overrightarrow{e_\theta}\,dS$$
$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{\rho=0}^{\rho=r} \rho\ \overrightarrow{e_\theta}\,d\rho\ d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \overrightarrow{e_\theta}\,d\theta \int_{\rho=0}^{\rho=r} \rho\ dr = \overrightarrow{0}$$
- $\left\{\mathcal{T}_{(F\rightarrow 2)}\right\}$: (à faire à la maison)
- $\left\{\mathcal{T}_{(F\rightarrow 3)}\right\}$: (à faire à la maison)

Actions mécaniques de contact : actions réparties

- On cherche à déterminer le torseur de l'action du fluide sur la tige du vérin T :

$$\left\{\mathcal{T}_{(F\to T)}\right\} = \left\{\mathcal{T}_{(F\to 1)}\right\} + \left\{\mathcal{T}_{(F\to 2)}\right\} + \left\{\mathcal{T}_{(F\to 3)}\right\}$$

-

$$\overrightarrow{R_{(F\to 1)}} = \int_{P\in(1)} p\,\overrightarrow{x}\,dS = p\,\overrightarrow{x} \int P \in (1) dS = p\ S\,\overrightarrow{x}$$

-

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O(F\to 1)}} = \int_{P\in(1)} \overrightarrow{OP} \wedge p\,\overrightarrow{x}\,dS = \int_{P\in(1)} \rho\ \overrightarrow{e_r} \wedge p\,\overrightarrow{x}\,dS$$

-

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O(F\to 1)}} = \int_{P\in(1)} \rho\ \overrightarrow{e_\theta}\,dS$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=r} \rho\ \overrightarrow{e_\theta}\,d\rho\ d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \overrightarrow{e_\theta}\,d\theta \int_{\rho=0}^{\rho=r} \rho\ dr = \overrightarrow{0}$$

- $\left\{\mathcal{T}_{(F\to 2)}\right\}$: (à faire à la maison)
- $\left\{\mathcal{T}_{(F\to 3)}\right\}$: (à faire à la maison)

Actions mécaniques de contact : actions réparties

Théorème de Pascal

Pour un fluide homogène et statique F, la pression effective en un point M, immergé à une profondeur h vaut :

$$\boxed{p_{(M)} = \mu \ g \ h + p_{atm}.} \tag{21}$$

avec $p_{(M)}$ = pression au point M (en Pa), P_{atm} = pression atmosphérique (en Pa), μ = masse volumique du fluide (en $Kg \cdot m^{-3}$) et h = profondeur (en m).

Théorème d'Archimède

Dans le cas d'un fluide F au repos, ou dans le cas d'un fluide parfait (sans viscosité), tout corps S plongé dans ce fluide reçoit, de la part de celui-ci, une action mécanique représentable par un glisseur :

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{(F\rightarrow S)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{P} = m_f \ g \ \overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_G} \tag{22}$$

où G est le barycentre de la partie immergée, m_f = masse du fluide déplacé (en Kg), g est l'accélération de pesanteur (en $m \cdot s^{-2}$) et $\overrightarrow{z}$ est le vecteur unitaire vertical ascendant.

Actions mécaniques de contact : actions réparties

Théorème de Pascal

Pour un fluide homogène et statique F, la pression effective en un point M, immergé à une profondeur h vaut :

$$\boxed{p_{(M)} = \mu\ g\ h + p_{atm}.} \tag{21}$$

avec $p_{(M)}$ = pression au point M (en Pa), P_{atm} = pression atmosphérique (en Pa), μ = masse volumique du fluide (en $Kg \cdot m^{-3}$) et h = profondeur (en m).

Théorème d'Archimède

Dans le cas d'un fluide F au repos, ou dans le cas d'un fluide parfait (sans viscosité), tout corps S plongé dans ce fluide reçoit, de la part de celui-ci, une action mécanique représentable par un glisseur :

$$\boxed{\left\{\mathcal{T}_{(F\rightarrow S)}\right\} = {}_{G}\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{P} = m_f\ g\ \overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}} \tag{22}$$

où G est le barycentre de la partie immergée, m_f = masse du fluide déplacé (en Kg), g est l'accélération de pesanteur (en $m \cdot s^{-2}$) et $\overrightarrow{z}$ est le vecteur unitaire vertical ascendant.

Actions mécaniques de contact : actions réparties

Contacts linéiques - Actions linéiques

Le principe de modélisation est le même :

- On parle de densité linéique d'effort $\overrightarrow{f_{P(S_1\rightarrow S_2)}}$ appliquée à un élément de ligne dl, en tout point P d'une ligne L.
- On définit de même l'action mécanique de contact de S_1 sur S_2 par le torseur suivant :

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{(S_1\rightarrow S_2)}\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\displaystyle\int_{P\in L}\overrightarrow{f_{P(S_1\rightarrow S_2)}}\,dL\\ \displaystyle\int_{P\in L}\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{f_{P(S_1\rightarrow S_2)}}\,dL\end{array}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R_{(S_1\rightarrow S_2)}}\\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A(S_1\rightarrow S_2)}}\end{array}\right\}} \quad (23)$$

- On décompose de la même façon $\overrightarrow{f_{P(S_1\rightarrow S_2)}}$ en une composante normale et une composante tangentielle (de même pour $\overrightarrow{R_{(S_1\rightarrow S_2)}}$) lorsque c'est possible).

Actions mécaniques de contact : actions réparties

Contacts linéiques - Actions linéiques

Le principe de modélisation est le même :

- On parle de densité linéique d'effort $\overrightarrow{f_{P(S_1 \to S_2)}}$ appliquée à un élément de ligne dl, en tout point P d'une ligne L.
- On définit de même l'action mécanique de contact de S_1 sur S_2 par le torseur suivant :

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{(S_1 \to S_2)}\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\int_{P \in L} \overrightarrow{f_{P(S_1 \to S_2)}}\, dL \\ \displaystyle\int_{P \in L} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{f_{P(S_1 \to S_2)}}\, dL \end{array} \right\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{(S_1 \to S_2)}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A(S_1 \to S_2)}} \end{array} \right\}} \quad (23)$$

- On décompose de la même façon $\overrightarrow{f_{P(S_1 \to S_2)}}$ en une composante normale et une composante tangentielle (de même pour $\overrightarrow{R_{(S_1 \to S_2)}}$) lorsque c'est possible).

Actions mécaniques de contact : actions réparties

Contacts linéiques - Actions linéiques

Le principe de modélisation est le même :

- On parle de densité linéique d'effort $\overrightarrow{f_{P(S_1 \to S_2)}}$ appliquée à un élément de ligne dl, en tout point P d'une ligne L.
- On définit de même l'action mécanique de contact de S_1 sur S_2 par le torseur suivant :

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{(S_1 \to S_2)}\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\int_{P \in L} \overrightarrow{f_{P(S_1 \to S_2)}}\, dL \\ \displaystyle\int_{P \in L} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{f_{P(S_1 \to S_2)}}\, dL \end{array} \right\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{(S_1 \to S_2)}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A(S_1 \to S_2)}} \end{array} \right\}} \quad (23)$$

- On décompose de la même façon $\overrightarrow{f_{P(S_1 \to S_2)}}$ en une composante normale et une composante tangentielle (de même pour $\overrightarrow{R_{(S_1 \to S_2)}}$) lorsque c'est possible).

Plan

Actions mécaniques de contact : frottements et lois de Coulomb

Le frottement :

- **résistance au mouvement** relative de ces deux solides.
- **action mécanique tangentielle d'un solide sur l'autre ayant tendance à s'opposer au mouvement désiré.**
- *XVIII*ème siècle : **Charles de Coulomb** : lois et modèles issues de l'expérience et n'ont pas de fondement théorique,

Actions mécaniques de contact : frottements et lois de Coulomb

Le frottement :

- **résistance au mouvement** relative de ces deux solides.
- **action mécanique tangentielle d'un solide sur l'autre ayant tendance à s'opposer au mouvement désiré**.
- *XVIII*$^{\text{ème}}$ siècle : **Charles de Coulomb** : lois et modèles issues de l'expérience et n'ont pas de fondement théorique,

Actions mécaniques de contact : frottements et lois de Coulomb

Le frottement :

- **résistance au mouvement** relative de ces deux solides.
- **action mécanique tangentielle d'un solide sur l'autre ayant tendance à s'opposer au mouvement désiré**.
- *XVIII*ème siècle : **Charles de Coulomb** : lois et modèles issues de l'expérience et n'ont pas de fondement théorique,

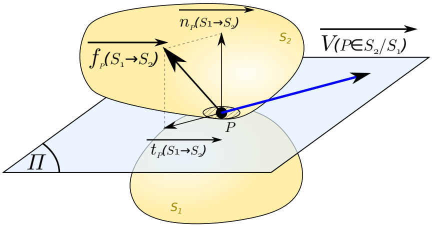
Actions mécaniques de contact : frottements et lois de Coulomb

Présentation du problème

Soit deux solides (ou ensembles) S_1 et S_2, en contact. Soit P un point appartenant à la zone de contact, tel que l'action répartie au point P est :

$$\boxed{\overrightarrow{f_p(S_1 \rightarrow S_2)} = \overrightarrow{n_p(S_1 \rightarrow S_2)} + \overrightarrow{t_p(S_1 \rightarrow S_2)}} \qquad (24)$$

où $\overrightarrow{n_p(S_1 \rightarrow S_2)}$ et $\overrightarrow{t_p(S_1 \rightarrow S_2)}$ sont respectivement les pressions normales et tangentielles.



Actions mécaniques de contact : frottements et lois de Coulomb

Lois de Coulomb

- Les lois de Coulomb permettent de caractériser les vecteurs $\overrightarrow{t_p(S_1 \rightarrow S_2)}$ et $\overrightarrow{n_p(S_1 \rightarrow S_2)}$.
- Leur norme est donnée par :
  Adhérence $\overrightarrow{V_{(P\in S_2/S_1)}} = \overrightarrow{0}$ **:**

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{t_p(S_1 \rightarrow S_2)}\right\| \leq f^* \left\|\overrightarrow{n_p(S_1 \rightarrow S_2)}\right\|} \tag{25}$$

  Glissement $\overrightarrow{V_{(P\in S_2/S_1)}} \neq \overrightarrow{0}$ **:**

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{t_p(S_1 \rightarrow S_2)}\right\| = f \left\|\overrightarrow{n_p(S_1 \rightarrow S_2)}\right\|.} \tag{26}$$

- f et f^* sont respectivement appelés **coefficient de frottement et d'adhérence** entre S_1 et S_2.

Actions mécaniques de contact : frottements et lois de Coulomb

Lois de Coulomb

- La **direction** de $\overrightarrow{n_p(S_1 \rightarrow S_2)}$ est celle de la normale au plan tangent au contact.
- La **direction** de $\overrightarrow{t_p(S_1 \rightarrow S_2)}$ est comprise dans le plan tangent au contact et telle que :

$$\boxed{\overrightarrow{t_p(S_1 \rightarrow S_2)} \wedge \overrightarrow{V_{(P \in S_2/S_1)}} = \overrightarrow{0}} \tag{27}$$

- Pour exploiter les conditions sur les normes il est parfois utile de déterminer le sens de $\overrightarrow{t_p(S_1 \rightarrow S_2)}$: **L'action tangentielle de S_1 sur S_2 s'oppose au mouvement (éventuel) de S_2/S_1** :

$$\boxed{\overrightarrow{t_p(S_1 \rightarrow S_2)} \cdot \overrightarrow{V_{(P \in S_2/S_1)}} < 0.} \tag{28}$$

Actions mécaniques de contact : frottements et lois de Coulomb

Remarque

- En réalité, le coefficient d'adhérence est légèrement supérieur au coefficient de frottement : $f^* > f$. Mais dans la pratique de la modélisation, on considèrera généralement $f^* = f$.
- Le modèle ci-dessus concerne les frottements dits "*frottements secs*", par opposition aux "*frottements visqueux*" faisant intervenir la vitesse de déplacement.
- f dépend du couple de matériaux en contact, mais aussi de la lubrification, de la température, de l'état de surface...

Couples matériaux	acier/acier	acier/coussinet	fonte/ garniture de freins
f	$0,1$ à $0,2$	$0,03$ à $0,2$	0,4

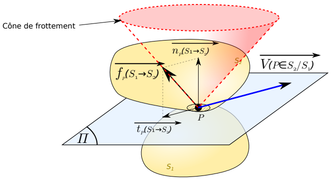
Couples matériaux	pneus/route sèche	contact sans frottement
f	$0,6$ à $0,7$	0

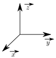
Actions de contact réparties : frottements et lois de Coulomb

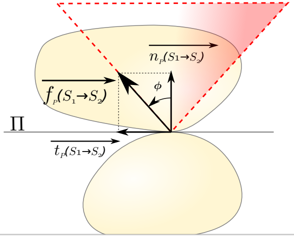
Interprétations graphiques - cône de frottement et adhérence

Soit le cône de frottement ou d'adhérence :

- d'axe normal au contact,
- de sommet P,
- de demi-angle au sommet Φ tel que $\tan(\Phi) = f$ (**angle de frottement** ou **d'adhérence**). La proportionnalité entre $\|\overrightarrow{t_p(S_1 \to S_2)}\|$ et $\|\overrightarrow{n_p(S_1 \to S_2)}\|$ implique que $\overrightarrow{f_p(S_1 \to S_2)}$ se situe :
- **sur le cône de frottement** dans le cas du frottement
- **à l'intérieur du cône de frottement** dans le cas de l'adhérence.





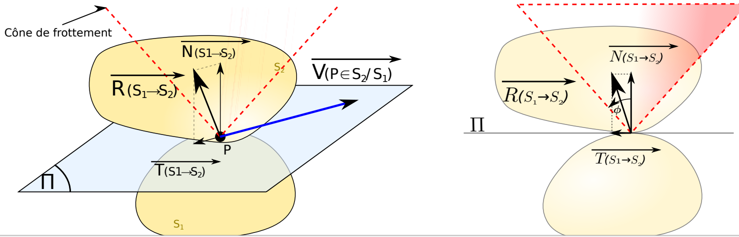


Actions de contact réparties : frottements et lois de Coulomb

Interprétations graphiques - cône de frottement et adhérence

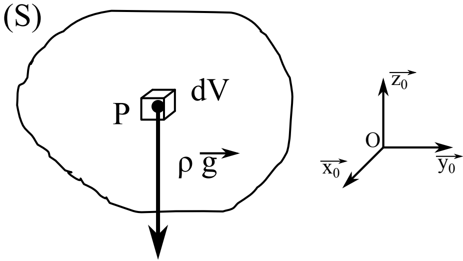
Soit le cône de frottement ou d'adhérence :

- d'axe normal au contact,
- de sommet P,
- de demi-angle au sommet Φ tel que $\tan(\Phi) = f$ (**angle de frottement** ou **d'adhérence**). La proportionnalité entre $\|\overrightarrow{t_p(S_1 \rightarrow S_2)}\|$ et $\|\overrightarrow{n_p(S_1 \rightarrow S_2)}\|$ implique que $\overrightarrow{f_p(S_1 \rightarrow S_2)}$ se situe :
- **sur le cône de frottement** dans le cas du frottement
- **à l'intérieur du cône de frottement** dans le cas de l'adhérence.



Actions mécaniques à distance

- $\overrightarrow{g} = -g\ \overrightarrow{z_0}$: Accélération de la pesanteur : avec $g = 9.81 m \cdot s^{-2}$.
- ρ : masse volumique du matériau de S (en $Kg \cdot m^{-3}$).
- $\rho \overrightarrow{g}$: Densité volumique d'effort (en $N \cdot m^{-3}$).



Actions mécaniques à distance

Soit $\left\{\mathcal{T}_{(Terre \to S)}\right\}$ le torseur d'action mécanique à distance exercé par le champ de pesanteur sur S.

$$\left\{\mathcal{T}_{(Terre \to S)}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R_{(Terre \to S)}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A(Terre \to S)}} \end{array}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \int_{P \in V} \rho \, \overrightarrow{g} \, dV \\ \int_{P \in V} \overrightarrow{AP} \wedge (\rho \overrightarrow{g}) dV \end{array}\right\}$$

$$= {}_A\left\{\begin{array}{c} \int_{P \in V} \overrightarrow{g} \, dm \\ \int_{P \in V} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{g} \, dm \end{array}\right\}$$

Actions mécaniques à distance

Géométrie de masse

- **Masse du solide :**

$$\boxed{M = \int_{P \in V} dm} \quad (29)$$

- **Centre de gravité G :** c'est le barycentre des points du solide pondéré de la masse volumique :

$$\boxed{M \, \overrightarrow{AG} = \int_{P \in V} \overrightarrow{AP} \, dm} \quad (30)$$

Actions mécaniques à distance

Géométrie de masse

- **Masse du solide :**

$$\boxed{M = \int_{P \in V} dm} \qquad (29)$$

- **Centre de gravité G :** c'est le barycentre des points du solide pondéré de la masse volumique :

$$\boxed{M\,\overrightarrow{AG} = \int_{P \in V} \overrightarrow{AP}\,dm} \qquad (30)$$

Actions mécaniques à distance

Géométrie de masse

- Expression de l'action mécanique au centre de gravité

$$\boxed{\left\{\mathcal{T}_{(Terre \to S)}\right\} = {}_G\left\{\begin{array}{c} -M\, g\, \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}} \tag{31}$$

Plan

Actions mécaniques dues aux liaisons sans frottement

- On considère les liaisons réalisées par **contact direct** entre deux pièces, **sans frottement** et **sans jeu** (liaisons parfaites).
- Le torseur d'action de contact est aussi appelé torseur statique, torseur d'inter-efforts ou torseur transmissible.
- On se donne un repère $R = (O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ centré sur chaque liaison.
- Dans le cas des liaisons entre une pièce S_1 et S_2, les composantes du torseur seront souvent exprimées avec les notations de torseur-colonne suivantes :

$$\{\mathcal{T}_{(1\rightarrow 2)}\} = {}_{P}\left\{\begin{array}{cc} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{array}\right\}_{(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})}$$

  - X_{12}, Y_{12} et Z_{12} sont les projections de la résultante dans la base $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$.
  - L_{12}, M_{12} et N_{12} sont les projections du moment en P dans la base $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$.

Actions mécaniques dues aux liaisons sans frottement

- On considère les liaisons réalisées par **contact direct** entre deux pièces, **sans frottement** et **sans jeu** (liaisons parfaites).
- Le torseur d'action de contact est aussi appelé torseur statique, torseur d'inter-efforts ou torseur transmissible.
- On se donne un repère $R = (O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ centré sur chaque liaison.
- Dans le cas des liaisons entre une pièce S_1 et S_2, les composantes du torseur seront souvent exprimées avec les notations de torseur-colonne suivantes :

$$\{\mathcal{T}_{(1\to 2)}\} = {}_P\left\{\begin{array}{cc} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{array}\right\}_{(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})}$$

  - X_{12}, Y_{12} et Z_{12} sont les projections de la résultante dans la base $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$,
  - L_{12}, M_{12} et N_{12} sont les projections du moment en P dans la base $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$.

Actions mécaniques dues aux liaisons sans frottement

- On considère les liaisons réalisées par **contact direct** entre deux pièces, **sans frottement** et **sans jeu** (liaisons parfaites).
- Le torseur d'action de contact est aussi appelé torseur statique, torseur d'inter-efforts ou torseur transmissible.
- On se donne un repère $R = \left(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$ centré sur chaque liaison.
- Dans le cas des liaisons entre une pièce S_1 et S_2, les composantes du torseur seront souvent exprimées avec les notations de torseur-colonne suivantes :

$$\left\{\mathcal{T}_{(1\rightarrow 2)}\right\} = {}_{P}\left\{\begin{array}{cc} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{array}\right\}_{(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})}$$

  - X_{12},Y_{12} et Z_{12} sont les projections de la résultante dans la base $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$,
  - L_{12},M_{12} et N_{12} sont les projections du moment en P dans la base $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$.

Actions mécaniques dues aux liaisons sans frottement

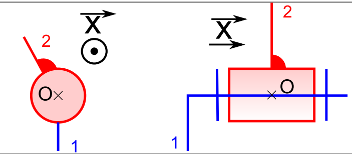
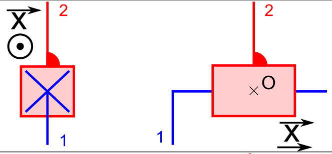
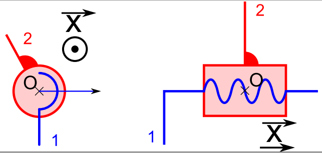
- On considère les liaisons réalisées par **contact direct** entre deux pièces, **sans frottement** et **sans jeu** (liaisons parfaites).
- Le torseur d'action de contact est aussi appelé torseur statique, torseur d'inter-efforts ou torseur transmissible.
- On se donne un repère $R = \left(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$ centré sur chaque liaison.
- Dans le cas des liaisons entre une pièce S_1 et S_2, les composantes du torseur seront souvent exprimées avec les notations de torseur-colonne suivantes :

$$\left\{\mathcal{T}_{(1\to 2)}\right\} = {}_{P}\left\{\begin{array}{cc} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{array}\right\}_{(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})}$$

  - X_{12}, Y_{12} et Z_{12} sont les projections de la résultante dans la base $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$,
  - L_{12}, M_{12} et N_{12} sont les projections du moment en P dans la base $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$.

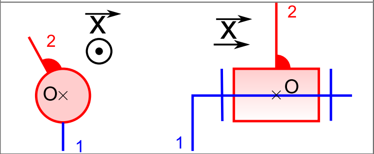
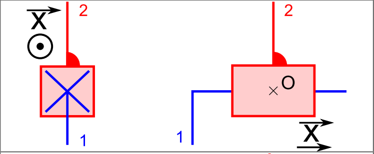
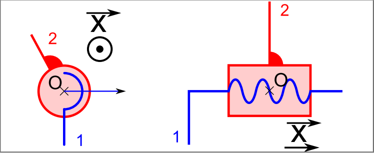
Liaisons sans frottement

On se donne un repère $R_0 = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ centré sur chaque liaison.

Nom	Paramétrage	Torseur statique
Liaisons pivot d'axe $(\Delta) = (O, \vec{x})$ $\forall M \in (O, \vec{x})$		
Liaisons glissière de direction $\vec{x}$ $\forall M$		
Liaisons hélicoïdale d'axe $(\Delta) = (O, \vec{x})$ et de pas p $\forall M \in (O, \vec{x})$		

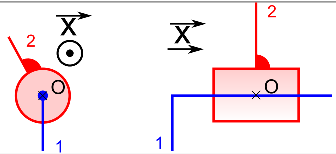
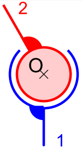
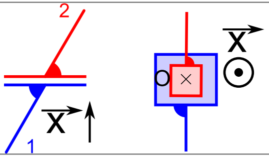
Liaisons sans frottement

On se donne un repère $R_0 = (O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ centré sur chaque liaison.

Nom	Paramétrage	Torseur statique
Liaisons pivot d'axe $(\Delta) = (O, \overrightarrow{x})$ $\forall M \in (O, \overrightarrow{x})$		$\{\mathcal{T}_{(1\to 2)}\} = {}_M\left\{\begin{array}{cc} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{array}\right\}_{(\overrightarrow{x},-,-)}$
Liaisons glissière de direction $\overrightarrow{x}$ $\forall M$		$\{\mathcal{T}_{(1\to 2)}\} = {}_M\left\{\begin{array}{cc} 0 & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{array}\right\}_{(\overrightarrow{x},-,-)}$
Liaisons hélicoïdale d'axe $(\Delta) = (O, \overrightarrow{x})$ et de pas p $\forall M \in (O, \overrightarrow{x})$		$\{\mathcal{T}_{(1\to 0)}\} = {}_O\left\{\begin{array}{cc} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{array}\right\}_{(\overrightarrow{x},-,-)}$ avec $L_{12} = -\frac{p}{2\,\pi} X_{12}$

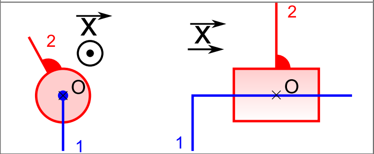
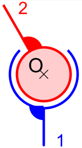
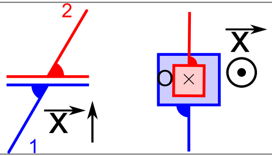
Liaisons sans frottement

On se donne un repère $R_0 = (O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ centré sur chaque liaison.

Nom	Paramétrage	Torseur statique
Liaison pivot glissant d'axe $(\Delta) = (O, \overrightarrow{x})$ $\forall M \in (O, \overrightarrow{x})$		
Liaison sphérique de centre O		
Liaison plane de normale $\overrightarrow{x}$ $\forall M$		

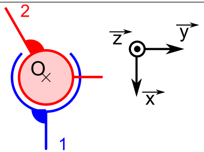
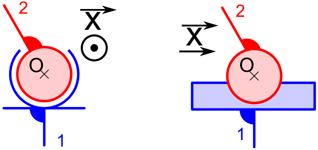
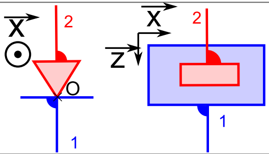
Liaisons sans frottement

On se donne un repère $R_0 = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ centré sur chaque liaison.

Nom	Paramétrage	Torseur statique
Liaison pivot glissant d'axe $(\Delta) = (O, \vec{x})$ $\forall M \in (O, \vec{x})$		$\{\mathcal{T}_{(1\rightarrow 2)}\} = {}_M\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},-,-)}$
Liaison sphérique de centre O		$\{\mathcal{T}_{(1\rightarrow 2)}\} = {}_O\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(-,-,-)}$
Liaison plane de normale $\vec{x}$ $\forall M$		$\{\mathcal{T}_{(1\rightarrow 2)}\} = {}_M\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & M_{12} \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},-,-)}$

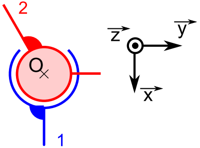
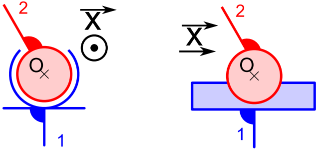
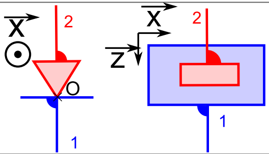
Liaisons sans frottement

On se donne un repère $R_0 = (O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ centré sur chaque liaison.

Nom	Paramétrage	Torseur statique
Liaison sphérique à doigt de centre O, d'axes $\overrightarrow{y}$ et $\overrightarrow{z}$		
Liaison sphère-cylindre ou linéaire annulaire d'axe $(O, \overrightarrow{x})$ O centre de la sphère		
Liaison cylindre-plan ou linéaire rectiligne d'axe $(O, \overrightarrow{x})$ et de normale $\overrightarrow{y}$ $\forall M \in (O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$		

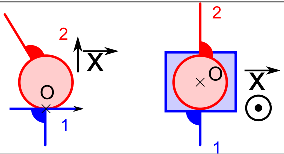
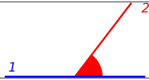
Liaisons sans frottement

On se donne un repère $R_0 = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ centré sur chaque liaison.

Nom	Paramétrage	Torseur statique
Liaison sphérique à doigt de centre O, d'axes $\vec{y}$ et $\vec{z}$		$\{\mathcal{T}_{(1\to 2)}\} = {}_O\left\{\begin{matrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Liaison sphère-cylindre ou linéaire annulaire d'axe $(O, \vec{x})$ O centre de la sphère		$\{\mathcal{T}_{(1\to 2)}\} = {}_O\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{matrix}\right\}_{(\vec{x},-,-)}$
Liaison cylindre-plan ou linéaire rectiligne d'axe $(O, \vec{x})$ et de normale $\vec{y}$ $\forall M \in (O, \vec{x}, \vec{y})$		$\{\mathcal{T}_{(1\to 2)}\} = {}_M\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & N_{12} \end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

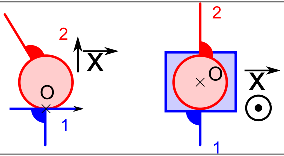
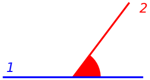
Liaisons sans frottement

On se donne un repère $R_0 = (O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ centré sur chaque liaison.

Nom	Paramétrage	Torseur statique
Liaison sphère-plan ou ponctuelle de normale $(O, \overrightarrow{x})$ $\forall M \in (O, \overrightarrow{x})$		
Liaison encastrement $\forall M$		

Liaisons sans frottement

On se donne un repère $R_0 = (O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ centré sur chaque liaison.

Nom	Paramétrage	Torseur statique
Liaison sphère-plan ou ponctuelle de normale $(O, \overrightarrow{x})$ $\forall M \in (O, \overrightarrow{x})$		$\{\mathcal{T}_{(1\to 2)}\} = {}_M\left\{\begin{array}{cc} X_{12} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{(\overrightarrow{x},-,-)}$
Liaison encastrement $\forall M$		$\{\mathcal{T}_{(1\to 2)}\} = {}_M\left\{\begin{array}{cc} X_{12} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{(\overrightarrow{x},-,-)}$

Plan

Liaisons sans frottement : cas du $2D$

Problème plan

- **Problème plan :**
  - les résultantes n'ont pas de composante suivant la normale à ce plan,
  - les moments sont dirigés suivant cette normale.
- Exemple de problème plan de normale $\overrightarrow{z}$ et pour une liaison pivot d'axe $(O, \overrightarrow{z})$:

  Son torseur $_O\left\{\begin{array}{cc} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{array}\right\}_{(-,-,\overrightarrow{z})}$ s'écrit : $_O\left\{\begin{array}{cc} X & * \\ Y & * \\ * & 0 \end{array}\right\}_{(-,-,\overrightarrow{z})}$
- soit un glisseur dont le support, situé dans le plan $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$, passe par O.

Liaisons sans frottement : cas du $2D$

Problème plan

- **Problème plan :**
  - les résultantes n'ont pas de composante suivant la normale à ce plan,
  - les moments sont dirigés suivant cette normale.
- Exemple de problème plan de normale $\overrightarrow{z}$ et pour une liaison pivot d'axe $(O, \overrightarrow{z})$:

  Son torseur $\left\{ \begin{array}{cc} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{array} \right\}_{(-,-,\overrightarrow{z})}$ s'écrit : $\left\{ \begin{array}{cc} X & * \\ Y & * \\ * & 0 \end{array} \right\}_{(-,-,\overrightarrow{z})}$ (en O)
- soit un glisseur dont le support, situé dans le plan $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$, passe par O.

Liaisons sans frottement : cas du $2D$

Problème plan

- **Problème plan :**
  - les résultantes n'ont pas de composante suivant la normale à ce plan,
  - les moments sont dirigés suivant cette normale.
- Exemple de problème plan de normale $\overrightarrow{z}$ et pour une liaison pivot d'axe $(O, \overrightarrow{z})$:

  Son torseur $_O\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{(-,-,\overrightarrow{z})}$ s'écrit : $_O\begin{Bmatrix} X & * \\ Y & * \\ * & 0 \end{Bmatrix}_{(-,-,\overrightarrow{z})}$
- soit un glisseur dont le support, situé dans le plan $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$, passe par O.

Liaisons sans frottement : cas du $2D$

Problème plan

- **Problème plan :**
  - les résultantes n'ont pas de composante suivant la normale à ce plan,
  - les moments sont dirigés suivant cette normale.
- Exemple de problème plan de normale $\overrightarrow{z}$ et pour une liaison pivot d'axe $(O, \overrightarrow{z})$:

Son torseur $\,_O\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_{(-,-,\overrightarrow{z})}$ s'écrit : $\,_O\begin{Bmatrix} X & * \\ Y & * \\ * & 0 \end{Bmatrix}_{(-,-,\overrightarrow{z})}$

- soit un glisseur dont le support, situé dans le plan $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$, passe par O.

Liaisons sans frottement : cas du $2D$

Problème plan

- **Problème plan :**
  - les résultantes n'ont pas de composante suivant la normale à ce plan,
  - les moments sont dirigés suivant cette normale.
- Exemple de problème plan de normale $\overrightarrow{z}$ et pour une liaison pivot d'axe $(O, \overrightarrow{z})$:

  Son torseur $_{O}\left\{\begin{array}{cc} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{array}\right\}_{(-,-,\overrightarrow{z})}$ s'écrit : $_{O}\left\{\begin{array}{cc} X & * \\ Y & * \\ * & 0 \end{array}\right\}_{(-,-,\overrightarrow{z})}$
- soit un glisseur dont le support, situé dans le plan $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$, passe par O.