Ex. 12 : 1) $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$

$e \longmapsto f(e)$: l'élève à qui e doit faire 1 cadeau.

f est 1 bijection de $\mathcal{E}$ ds $\mathcal{E}$.

Le processus mis en place est équivalent à choisir 1 bijec° de $\mathcal{E}$ ds $\mathcal{E}$.

Si $\mathcal{E} = \{e_1 \dots e_n\}$, 1 bijection de $\mathcal{E}$ ds $\mathcal{E}$ peut être vue c 1 bijection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$

ie 1 élé^t de S_n.

Le tirage se fait au hasard, donc chaque permutation a 1 probabilité $\frac{1}{n!}$ d'être choisie.

2) $B = \{\sigma \in S_n, \forall k \in [\![1,n]\!], \sigma(k) \neq k\}$

$\overline{B} = S_n \setminus B = \{\sigma \in S_n, \exists k \in [\![1,n]\!], \sigma(k) = k\}$

$= \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ avec :

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $A_k = \{\sigma \in S_n,\ \sigma(k) = k\}$.

⚠ cette réunion n'est pas disjointe !

$$id_{[\![1,n]\!]} \in \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

On cherche à calculer $P(B)$.

$$P(B) = 1 - P(\overline{B})$$

$$= 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right).$$

$$= 1 - \#\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \times \frac{1}{n!}$$

Pour calculer $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$, utilisons la formule du crible de Poincaré

$$\#\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \#\left(\bigcap_{l=1}^{k} A_{i_l}\right)$$

$$\sigma \in \bigcap_{l=1}^{k} A_{i_l} \ ? \qquad X = \{i_1 \dots i_l\}$$

$$\sigma \in \bigcap_{l=1}^{k} A_{i_l} \iff \cdot \ \forall x \in X,\ \sigma(x) = x$$

$\cdot\ \sigma|_{\bar{X}}$ est 1 bijection de $\bar{X}$ dans lui-même.

Ex: $n = 5$, $i_1 = 2$, $i_2 = 4$.

$\bigcap_{l=1}^{2} A_{i_l}$: 1) $1 \mapsto 1$ $\rightsquigarrow$ $\mathrm{id}_{\{1,\dots,5\}}$

$2 \mapsto 2$

$3 \mapsto 3$

$4 \mapsto 4$

$5 \mapsto 5$

2) $1 \mapsto 1$
$2 \mapsto 2$
$3 \mapsto 5$
$4 \mapsto 4$
$5 \mapsto 3$

3) $2 \mapsto 2$
$4 \mapsto 4$
$1 \mapsto 3$
$3 \mapsto 1$
$5 \mapsto 5$

4) $2 \mapsto 2$
$4 \mapsto 4$
$1 \mapsto 3$
$3 \mapsto 5$
$5 \mapsto 1$

5) $2 \mapsto 2$
$4 \mapsto 4$
$1 \mapsto 5$
$3 \mapsto 3$
$5 \mapsto 1$

6) $2 \mapsto 2$
$4 \mapsto 4$,
$1 \mapsto 5$
$3 \mapsto 1$
$5 \mapsto 3$

<u>Cas g^{al}</u> : $\displaystyle\bigcap_{l=1}^{k} A_{i_l}$ est en bijection

avec l'ens. des permutations

de $[\![1,n]\!] \setminus \{i_1 \dots i_k\}$.

$$\#\left(\bigcap_{l=1}^{k} A_{i_l}\right) = (n-k)!$$

$$\#\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} (n-k)!$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} (n-k)! \Big(\underbrace{\sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} 1}_{= \binom{n}{k}}\Big)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times (n-k)! \, (-1)^{k+1}.$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!}$$

$$P(B) = 1 - \frac{1}{n!} \times \# \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right)$$

$$= 1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}_{\text{Taylor.}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

4)

Taylor-Lagrange appliqué à exp entre -1 et 0.

$$\left| e^{-1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\overbrace{(-1)^k}^{(0-1)^k}}{k!} \times \underbrace{\exp^{(k)}(0)}_{=1} \right| \leq \sup_{[-1,0]} \frac{\exp^{(n+1)}}{(n+1)!} \times |0-1|^{n+1}$$

$$\leq \frac{1}{41!} < 10^{-19}$$

$$41! = 9! \times 10 \times 11 \times \dots \times 41$$

$$> 9! \times 10 \times 11 \times \dots \times 18$$

$$> 9! \times 10^{9}$$

$$> 10^{19}$$

dc : $P(B) \sim \frac{1}{e}$ à 10^{-19} près

$\sim 0,367\ 879\ 441\ 171 \ldots$