DS n° 9 : Fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom : Note :

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

Algèbre linéaire

On considère l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ $\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x - y + z + t \\ x + y - 2z - t \\ -x + y - t \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{rg}(\varphi) = \boxed{} \quad (1) \qquad \dim(\mathrm{Ker}\,\varphi) = \boxed{} \quad (2)$$

On considère l'application linéaire $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_4[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \displaystyle\int_0^{42} P(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$.

$$\dim(\mathrm{Ker}\, f) = \boxed{} \quad (3)$$

Soit $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ et $\mathscr{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ deux bases de $\mathbb{R}^2$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = M$. Alors :

$$u : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \boxed{} . \quad (4)$$

Soit $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y + z \\ -2x + y + 3z \\ 4x - y + z \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathscr{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$, $\mathscr{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ deux bases de $\mathbb{R}^3$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}_1) = \boxed{} \quad (5) \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{C}}(u) = \boxed{} \quad (7)$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{C}) = \boxed{} \quad (6) \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1}(u) = \boxed{} \quad (8)$$

Probabilités

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$.

$$\mathrm{E}[X] = \boxed{} \quad (9) \qquad V(X) = \boxed{} \quad (10)$$

On tire ensuite une variable aléatoire $Y \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 0, X \rrbracket)$.

$$Y(\Omega) = \boxed{} \quad (11)$$

$$\forall k \in Y(\Omega),\ P(Y = k) = \boxed{} \quad (12)$$

$$\mathrm{E}[Y] = \boxed{} \quad (13)$$

— FIN —