DS N°8

CHAMP A FORCE CENTRALE

Station Spatiale Internationale (ISS)

La Station spatiale internationale (ISS d'après le nom en anglais, International Space Station) est une station spatiale placée en orbite terrestre basse, occupée en permanence par un équipage international qui se consacre à la recherche scientifique dans l'environnement spatial. Ce programme, lancé et piloté par la NASA, est développé conjointement avec l'agence spatiale fédérale russe (FKA), avec la participation des agences spatiales européenne, japonaise et canadienne. L'ISS décrit une trajectoire elliptique d'altitude au périgée de 330 km et d'altitude à l'apogée 420 km, en 92,69 min. Elle a une masse m_{ISS} = 490 tonnes.

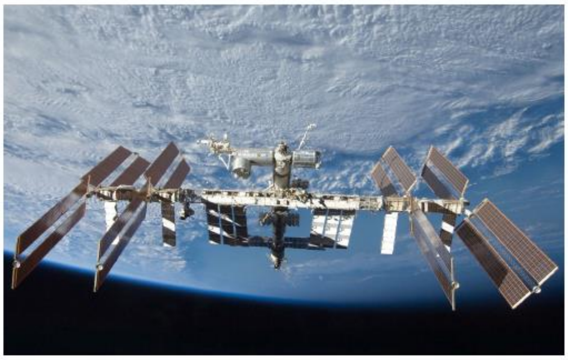


FIGURE 1 – ISS

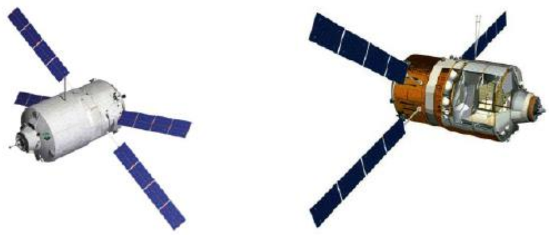


FIGURE 2 – ATV3 – Edoardo Amaldi

Les véhicules de transfert automatique ou ATV (de l'anglais « Automated Transfer Vehicle ») sont des vaisseaux spatiaux desservant la station spatiale internationale et chargés d'assurer son ravitaillement en énergie, matériaux et combustibles. De par leur nature, ils assurent et garantissent la viabilité et le fonctionnement de la station. En termes de défis techniques et de performances, ils constituent le plus ambitieux des projets de construction spatiale jamais entrepris en Europe.

Dans la suite de ce problème, nous ferons référence aux objets étudiés en utilisant leurs acronymes anglais : ATV pour Automated Transfert Vehicle (véhicule de transfert automatique), ISS pour International Space Station (station spatiale internationale).

L'ATV-3 Edoardo Amaldi a été lancé, par la dernière version du lanceur Ariane V, le 23 mars 2012, il a rejoint en moins de six jours l'ISS. Il s'y est arrimé le 29 mars. La manœuvre s'est déroulée à une vitesse de 28 000 $km \cdot h^{-1}$ avec une précision meilleure que 10 cm. Il l'a quittée le 4 octobre 2012 pour se détruire, comme prévu, lors de sa phase de rentrée atmosphérique au-dessus du pacifique.

Données numériques

Constante de gravitation : $G = 6,67408.10^{-11}$ USI

Masse de la Terre : $M_T = 5,972.10^{24}$ kg Rayon de la Terre : R_T = 6371 km

Masse de l'ISS : m_{ISS} = 490 tonnes

Altitude de l'orbite d'injection : h_i = 250, 0 km Altitude de l'orbite de l'ISS : h_{ISS} = 400, 0 km

A. Généralité sur les mouvements à force centrale

On étudie le mouvement d'un objet de masse m assimilé à un point matériel M en interaction avec la Terre de masse M_T , de centre O et de rayon R_T . L'interaction entre l'objet M et la Terre est identique à celle qui existerait si toute la masse de la Terre était concentrée en son centre O.

Le système constitué de la Terre et de l'objet M est supposé isolé, la seule interaction considérée dans la suite est celle entre la Terre et M.

On note r la distance entre le centre de la Terre et le point M. L'angle polaire sera noté θ.

0. Quel est le référentiel adapté pour l'étude du mouvement de M ? On le notera $\mathfrak{R}$ dans la suite, et il sera supposé galiléen à l'échelle du mouvement de M.

C'est le référentiel **géocentrique**.

A.1. Interaction gravitationnelle

A.1.1. Donner l'expression de la force gravitationnelle exercée par la Terre de centre O sur l'objet M. Exprimer la norme de la force en fonction de l'altitude h de M (prise à partir du sol). Faire l'application numérique de la force exercée par la Terre sur l'ISS.

La force $\vec{F} = -G\frac{mM_T}{r^2}\vec{e_r}$

La norme : $F = G\frac{mM_T}{(R_T+h)^2}$

Application numérique : $F = 4{,}26\ 10^6 N$

A.1.2. Montrer que la force gravitationnelle est conservative dans $\mathfrak{R}$ et établir l'expression de l'énergie potentielle $E_{p,grav}$. On prendra l'origine de $E_{p,grav}$ à l'infini, c'est-à-dire $\lim\limits_{r\to\infty} E_{p,grav}=0$

Expression du travail : $\delta W = \vec{F}.\vec{dl} = -G\frac{mM_T}{r^2}\vec{e_r}.dr\vec{e_r}$

(On ne garde que la composante sur $\vec{e_r}$ du déplacement élémentaire en coordonnées sphériques)

$\delta W = -G\frac{mM_T}{r^2}dr = d(G\frac{mM_T}{r}) = -dE_{p,grav.}$

Ainsi $E_{p,grav} = -G\frac{mM_T}{r}$ + constante

Or $\lim\limits_{r\to\infty} E_{p,grav}=0$

D'où $\boxed{\mathbf{E_{p,grav} = -G\frac{mM_T}{r}}}$

A.2. Conservation du moment cinétique

A.2.1. Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ de M par rapport à O dans le référentiel $\mathfrak{R}$ se conserve.

Théorème du moment cinétique : $\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{F} = \vec{0}$ par définition de la force

Ainsi $\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \vec{0}$

Le moment cinétique de M par rapport à O est donc conservé.

A.2.2. Justifier la planéité du mouvement de M. On précisera le plan du mouvement.

Par définition $\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v}$

Le rayon vecteur est en permanence perpendiculaire à une direction fixe, **le mouvement est donc plan.**

A.2.4. En déduire que la quantité $r^2\dot{\theta}$ se conserve au cours du mouvement. Comment s'appelle cette quantité ? On notera C cette constante.

On choisit les coordonnées polaires dans le plan du mouvement.

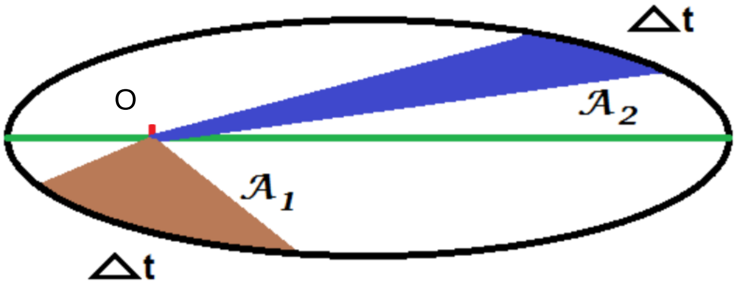
Ainsi $\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v} = r\vec{e_r}\wedge m(\dot{r}\vec{e_r}+r\dot{\theta}\vec{e_\theta})$

D'où $\overrightarrow{L_O} = m\, r^2\dot{\theta}\vec{e_Z}$ vecteur constant.

On a bien $\boxed{\mathbf{r^2\dot{\theta} = C = constante}}$

A.2.5. Énoncer la 2ème loi de Kepler, et l'accompagner d'un schéma pour l'illustrer.(Aucune démonstration n'est demandée)

Le rayon vecteur balaie des surfaces égales durant des intervalles de temps égaux.



A1 = A2

A.3. <u>Énergie mécanique – Mouvements possibles</u>

A.3.1 Que peut-on dire de l'énergie mécanique de M ?

M n'est soumise qu'à des forces conservatives, son **<u>énergie mécanique est constante</u>**.

A.3.2. Établir l'expression de l'énergie mécanique sous la forme $E_m = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$ et établir l'expression de $E_{p,eff}(r)$ en fonction de G, m, M_T , C et r uniquement.

Par définition $E_m = E_c + E_P$

Avec les coordonnées polaires et les résultats précédents :

Ainsi $E_m = \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\,m\,r^2\dot{\theta}^2 - G\frac{mM_T}{r}$

Avec $\dot{\theta} = C/r^2$

$E_m = \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\,m\,\frac{C^2}{r^2} - G\frac{mM_T}{r}$

Ainsi $\boxed{\mathbf{E_{p,eff}(r) = \frac{1}{2}\,m\,\frac{C^2}{r^2} - G\frac{mM_T}{r}}}$

A.3.3. On donne la représentation de $E_{p,eff}(r)$, Décrire rapidement les différents mouvements possibles pour l'objet M selon la valeur de son énergie mécanique.

Le mouvement de M n'est possible que si $E_m \geq E_{p,eff.}$

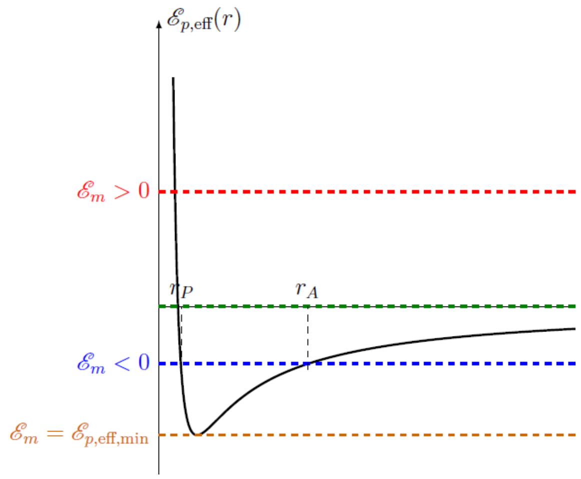
D'après le graphe

<u>$E_m > 0$</u> on a un **<u>état de diffusion</u>**, M peut échapper à l'attraction terrestre et partir à l'infini.

<u>$E_m < 0$</u> on a un **<u>état lié</u>**, M décrit une trajectoire elliptique, le rayon est compris entre r_p et r_A

<u>$E_m = E_{p,eff}$</u> on a un **<u>état lié</u>**, M décrit un cercle de rayon r_0

Allure de la courbe représentative de $\mathscr{E}_{p,\text{eff}}(r)$.



B. Trajectoire de l'ISS

L'ISS se trouve sur une orbite quasiment circulaire, à une altitude h_{ISS} = 400, 0 km, dont le plan orbital forme un angle de 51,6° avec le plan de l'équateur.

B.1.Justifier que le mouvement circulaire est nécessairement uniforme.

Pour une orbite circulaire r = R = constante.
Or on a montré $C = r^2\dot{\theta} = R^2\dot{\theta}$
Ainsi la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est constante.
Or $v = R\dot{\theta}$

La vitesse de M est donc de norme constante le mouvement est uniforme.

B.2. Établir l'expression de la norme de la vitesse v_{ISS} en fonction de G, M_T et R_{ISS} (le rayon de la trajectoire circulaire de l'ISS), puis en fonction de G, M_T , R_T et h_{ISS}.

Deuxième loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{F}$

Projection sur $\vec{e_r}$ pour un mouvement circulaire : $-m\,\frac{v_{ISS}^2}{R_{ISS}} = -\,G\frac{mM_T}{R_{ISS}^2}$

D'où $\boxed{\mathbf{v_{ISS}} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_{ISS}}} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h_{ISS}}}}$

B.3. Faire l'application numérique de v_{ISS} et comparer à la valeur fréquemment citée de «28 000 km·h^{-1}»

v_{ISS} = 7,67 km/s = 27,6 10^6 km/h

Cela correspond à la valeur attendue.

B.4. Retrouver la 3ème de Kepler. En déduire la période T_{ISS} du mouvement de l'ISS autour de la Terre. Comparer à la valeur indiquée en introduction de ce problème.

On a pour une orbite circulaire la période qui est donnée par la relation : $T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM_T}}$

D'où la troisième loi de Kepler $\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}}$

Dans le cas qui nous intéresse : $\boxed{\mathbf{T_{ISS} = (R_T + h_{ISS})^{3/2}\frac{2\pi}{\sqrt{GM_T}}}}$

Application numérique : T_{ISS} = 5545 s = 92,4 min

Cela correspond à la valeur attendue.

B.5. Établir l'expression de l'énergie mécanique de l'ISS en mouvement circulaire. Faire l'application numérique.

$E_m = E_c + E_P = \frac{1}{2}\, m\, v^2 - G\frac{mM_T}{r}$

En remplaçant v : $\boxed{\mathbf{E_m = - G\frac{mM_T}{2R_{ISS}} = - G\frac{mM_T}{2(R_T+h_{ISS})}}}$

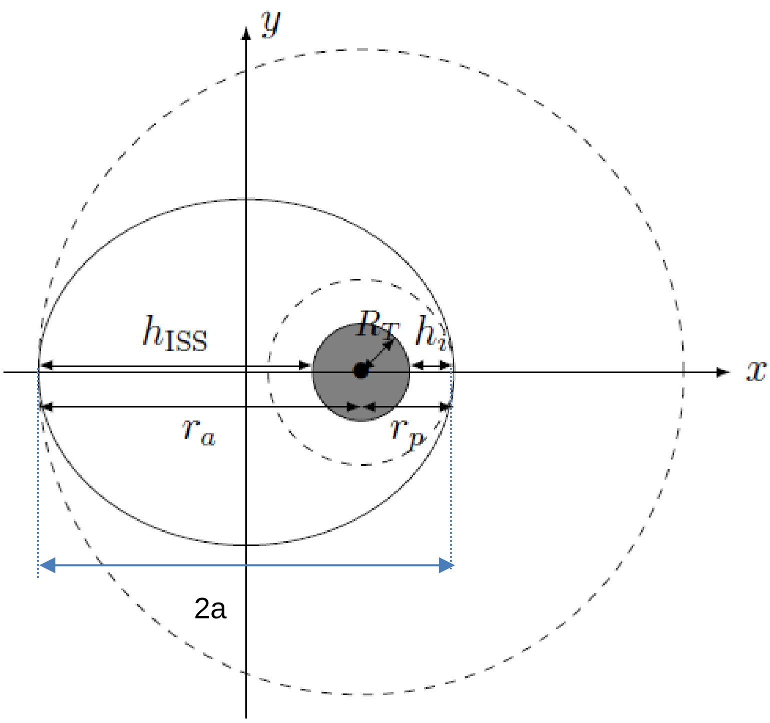
Application numérique : $E_m = - 1{,}44\ 10^{13}$ J

C. Trajectoire suivie pour la mise en orbite

Les ATV sont lancés depuis la base de Baïkonour à la latitude $\lambda_B = 45°57'54''$ nord

Après une dizaine de minutes de vol, Ariane V libère l'ATV sur une première orbite circulaire, dite d'injection, d'altitude $h_i = 250{,}0$ km, située dans le même plan orbital que l'orbite de l'ISS. Puis l'ATV, en empruntant une orbite elliptique, rejoint l'orbite de l'ISS.

C.1 Compléter le schéma ci-dessous en précisant : les rayons r_p et r_a au périgée et à l'apogée de la trajectoire elliptique, les altitudes h_i et h_{ISS} et le demi-grand axe a de la trajectoire elliptique.



C.2. Déterminer le demi-grand axe de la trajectoire elliptique alors décrite par l'ATV, en fonction de R_T, h_i et h_{ISS}. Faire l'application numérique.

$a = \frac{r_P + r_A}{2} = R_T + \frac{h_{ISS} + h_i}{2}$

a = 6696 km

C.3. En déduire la durée du transfert de l'orbite d'injection à l'orbite de l'ISS.

La durée du transfert τ correspond à la demi période T_e de la trajectoire elliptique.

D'après la troisième loi de Kepler $T_e^2 = a^3\frac{4\pi^2}{GM_T}$

D'où $\boxed{\tau = \pi\frac{a^{3/2}}{\sqrt{GM_T}}}$

Application numérique : τ = 2726 s = 45,4 mn

C.4. Donner l'expression littérale de l'énergie à fournir à l'ATV au moment de son transfert sur l'orbite de l'ISS.

On a montré l'expression de l'énergie mécanique sur une orbite circulaire de rayon R : $E_{mc} = -\,G\frac{mM_T}{2R}$

On peut généraliser ce résultat pour une orbite elliptique en replaçant 2R par 2a : $E_{me} = -\,G\frac{mM_T}{2a}$

Ainsi $\boxed{\mathbf{\Delta E_m = E_{mc} - E_{me} = -GM_Tm\left(\frac{1}{2(R_T+h_{iss})} - \frac{1}{2R_T+h_{ISS}+h_i}\right)}}$