

Partie 1 : Acidité des pétioles

1. Le pH de la solution

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = c_0$$

$$\text{D'où } \text{pH} = -\log c_0 = 2,7$$

2. Mise dans l'eau

Lorsqu'on fait tremper les pétioles dans une grande quantité d'eau on dilue la solution acide. La concentration en ions H_3O^+ diminuant le pH augmente

3. Intérêt du découpage

En coupant la rhubarbe en tronçons, on augmente la surface d'échange entre l'eau et la rhubarbe, les échanges sont donc plus importants et la dilution plus rapide.

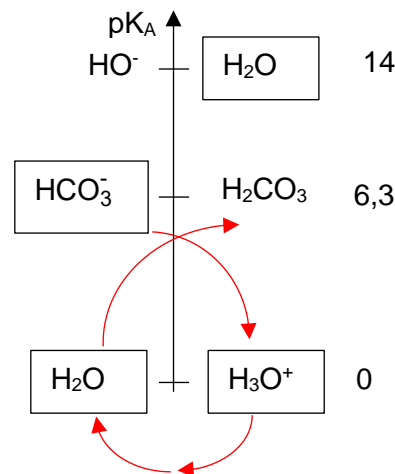
4. Nom officiel

Il s'agit de l'ion **hydrogénocarbonate**.

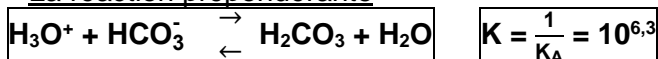
Il est à la fois acide et base c'est un **ampholyte**

5. La réaction

• Echelle d'acidité



• La réaction prépondérante



6. Etat final

Tableau d'avancement

| | H_3O^+ | + | HCO_3^- | \rightleftharpoons | H_2CO_3 | + H_2O |
|--------------|----------------------------|---|-------------------------|----------------------|-------------------------|------------------------|
| Etat initial | $C_0V_0 = 2 \cdot 10^{-4}$ | | $n_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ | | | excès |
| Etat final | $C_0V_0 - \xi$ | | $n_1 - \xi$ | | ξ | excès |

Or $K \gg 1$ la réaction est donc quasi totale, c'est le réactif limitant qui indique la fin de la réaction.

$n_1 > C_0V_0$ c'est donc H_3O^+ qui fait défaut et $\xi_F = C_0V_0$

Ainsi à l'état final :

$$[\text{HCO}_3^-] = \frac{n_1 - C_0V_0}{V_0} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[\text{H}_2\text{CO}_3] = C_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{Et } \text{pH} = \text{pK}_A + \text{Log} \frac{[\text{HCO}_3^-]}{[\text{H}_2\text{CO}_3]} = 6,9$$

On a alors $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-6,9} \ll [\text{HCO}_3^-]$ l'hypothèse est donc valable.

7. Intérêt d'ajouter du bicarbonate

D'après les calculs qui précèdent on montre que l'ajout du bicarbonate de soude permet de diminuer fortement l'acidité.

8. Identification des espèces

Plus le pH est faible et plus il y a d'ions H_3O^+ c'est donc la forme la plus acide qui prédomine.

Ainsi : **A = $\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_6$; B = $\text{C}_6\text{H}_7\text{O}_6^-$; C = $\text{C}_6\text{H}_6\text{O}_6^{2-}$**

9. Forme présente dans les pétioles

- A pH = 2,7 c'est la forme **A = $\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_6$** qui est majoritairement présente.
 - A pH = 6,9 c'est la forme **B = $\text{C}_6\text{H}_7\text{O}_6^-$** qui est majoritairement présente.
-

10. Proportions à pH = 10

D'après les courbes on remarque qu'il n'y a pas de $\text{C}_6\text{H}_6\text{O}_6^{2-}$

On relève **$\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_6$ 90%**
 $\text{C}_6\text{H}_7\text{O}_6^-$ 10%

11. Les pK_A

On a $\text{pH} = \text{pK}_A + \text{Log} \frac{[\text{A}^-]}{[\text{HA}]} = \text{pK}_A + \text{Log} \frac{\alpha_{\text{A}^-}}{\alpha_{\text{HA}}}$

Ainsi si $\alpha_{\text{A}^-} = \alpha_{\text{HA}}$ alors $\text{pH} = \text{pK}_A$.

L'intersection des courbes A et B donne **$\text{pK}_A(\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_6/\text{C}_6\text{H}_7\text{O}_6^-) = 4,2$**

L'intersection des courbes B et c donne **$\text{pK}_A(\text{C}_6\text{H}_7\text{O}_6^-/\text{C}_6\text{H}_6\text{O}_6^{2-}) = 11,6$**

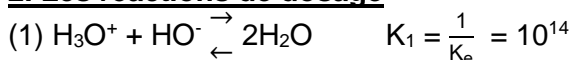
Partie 2 : titrage de l'acide oxalique

1. Acide chlorhydrique

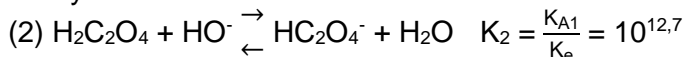
Une solution d'acide chlorhydrique correspond à une solution de $\text{H}_3\text{O}^+ ; \text{Cl}^-$ qui correspond à la mise dans l'eau de l'acide fort HCl.

On a alors **$[\text{H}_3\text{O}^+] = 5 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$**

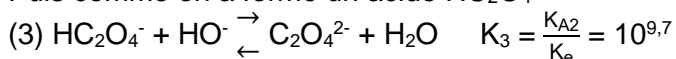
2. Les réactions de dosage



Or il y a un autre acide en solution :



Puis comme on a formé un acide HC_2O_4^-



3. Nature du dosage

L'écart entre chaque pK_A est inférieur à 4. Il s'agit donc de **réactions de dosages simultanées**.

Ainsi seule la quantité totale d'acide (chlorhydrique et oxalique) peut être déterminée.

Cette méthode ne permet donc pas de connaître la quantité d'acide oxalique.

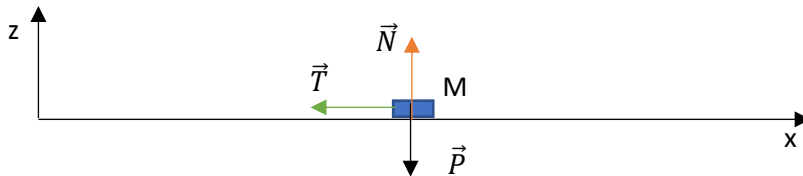
Résolution de problème (CCP 2019 PSI)

Référentiel : \mathcal{R} Lié à la route Galiléen

Système : la voiture

Forces : le poids $\vec{p} = m\vec{g}$

la réaction de la route : $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$



Méthode 1

Mise en équation

Loi : deuxième loi de Newton $m\vec{a} = \vec{p} + \vec{R}$

Projections : $m\ddot{x} = -T$

$$0 = -mg + N$$

D'où $N = mg$ et $T = fmg$

On obtient l'équation du mouvement $\ddot{x} = -fg$

En intégrant et en prenant en compte les conditions initiales la voiture roule à la vitesse v_0 et on prend l'origine du repère au moment où elle commence à freiner :

$$\dot{x} = -fgt + v_0$$

$$\text{et } x = -\frac{1}{2}fgt^2 + v_0t.$$

Information du document

On peut déterminer grâce à la photo la distance de freinage : 6 traits pleins et 5 intercalaires :

$$L = 3 \times 6 + 3,5 \times 5 = 35,5 \text{ m}$$

Durée de l'action

La voiture s'arrête à t_f

$$\text{D'où } v = 0 \text{ si } t_f = \frac{v_0}{fg}$$

Conclusion

En reportant t_f dans $x(t_f) = L$

$$L = -\frac{1}{2}fg\left(\frac{v_0}{fg}\right)^2 + \frac{v_0^2}{fg} = \frac{v_0^2}{2fg}$$

$$\text{ainsi } \boxed{v_0 = \sqrt{2fgL} = 23,6 \text{ m/s} = 85 \text{ km/h}}$$

Méthode 2

Information du document

On peut déterminer grâce à la photo la distance de freinage : 6 traits pleins et 5 intercalaires :

$$L = 3 \times 6 + 3,5 \times 5 = 35,5 \text{ m}$$

Mise en équation

Loi : Théorème de l'énergie cinétique : $\Delta E_c = W$

• Le poids et la réaction normale sont perpendiculaires au mouvement, ils ne travaillent pas.

Cependant on a par la seconde loi de Newton projetée sur Ox $-mg + N = 0$

D'où $N = mg$ et $T = fmg$

On peut donc calculer le travail de la force : $W = \int \vec{T} \cdot d\vec{l} = -mgfL$

• La variation de l'énergie cinétique : $\Delta E_c = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2$

• Théorème : $-\frac{1}{2}mv_0^2 = -mgfL$

$$\text{D'où } \boxed{v_0 = \sqrt{2fgL} = 23,6 \text{ m/s} = 85 \text{ km/h}}$$

Différents oscillateurs

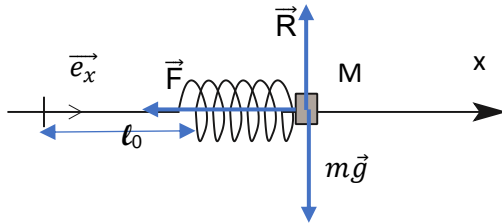
A- Oscillateur harmonique

Référentiel : Associé au laboratoire Galiléen

Système : $M(m)$

Forces : Le poids $\vec{p} = m\vec{g}$
La réaction du support \vec{R}
La tension du ressort $\vec{F} = -(x - \ell_0)\vec{e}_x$

Schéma :



1. Energie potentielle

Le travail élémentaire : $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -k(x - \ell_0)dx$
 $= -d\left(\frac{1}{2} k(x - \ell_0)^2\right) = -dE_p$

D'où $E_p = \frac{1}{2} k(x - \ell_0)^2$ en choisissant l'origine en $x = \ell_0$.

2. Equation du mouvement

Le poids et la réaction normale sont perpendiculaires au mouvement, ils ne travaillent pas.

La particule n'est soumise qu'à des forces conservatives ou ne travaillant pas.

L'énergie mécanique est conservée au cours du temps.

- Energie cinétique $E_c = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$

- Energie potentielle : $E_p = \frac{1}{2} k(x - \ell_0)^2$

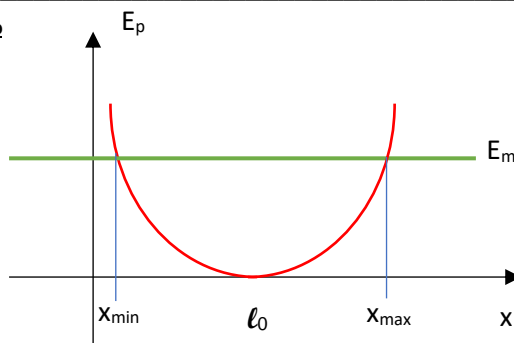
- Energie mécanique : $E_m = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} k(x - \ell_0)^2$

D'où $\frac{dE_m}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + k(x - \ell_0)\dot{x} = 0$

Or $\dot{x} \neq 0$ car il y a mouvement.

D'où $m\ddot{x} + k(x - \ell_0) = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \ell_0$ avec $\omega_0^2 = k/m$

3. Allure de E_p



Conditions initiales : $\dot{x} = 0$ et $x = x_0$

On en déduit la valeur de l'énergie mécanique $E_m = \frac{1}{2} k (x_0 - \ell_0)^2$

Or $E_m = E_p + E_c \geq E_p$

On trouve les valeurs extrêmes du mouvement en cherchant la solution à :

$$\frac{1}{2} k (x_0 - \ell_0)^2 = \frac{1}{2} k (x - \ell_0)^2$$

Soit $x_0 - \ell_0 = \pm (x - \ell_0)$

Soit $x = x_0$ ou $x = 2\ell_0 - x_0$

Les valeurs de x sont donc $[2\ell_0 - x_0 ; x_0]$

4. Solution de l'équation (1)

La solution générale est $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \ell_0$

Conditions initiales : $x(0) = x_0 = A + \ell_0$

et $\dot{x}(0) = 0 = \omega_0 B$

La solution est donc $x(t) = (x_0 - \ell_0) \cos(\omega_0 t) + \ell_0$

Compatibilité

$$-1 \leq \cos(\omega_0 t) \leq 1$$

$$\text{ainsi } 2\ell_0 - x_0 \leq x \leq x_0$$

On retrouve le même résultat.

5.a. Propriété de l'énergie potentielle

Pour la position d'équilibre on a un extremum d'énergie potentielle : $\left. \frac{dE}{dx} \right|_{x=x_e} = 0$

5.b. La dérivée seconde

La position d'équilibre est stable si $\left. \frac{d^2E}{dx^2} \right|_{x=x_e} = k > 0$

On a alors un **minimum d'énergie potentielle**.

5.c. Le pendule élastique

D'après les résultats précédents :

$$\frac{dE}{dx} = k(x - \ell_0) = 0 \text{ si } x = \ell_0$$

$$\text{On a } \frac{d^2E}{dx^2} = k > 0$$

C'est donc bien une position d'équilibre stable

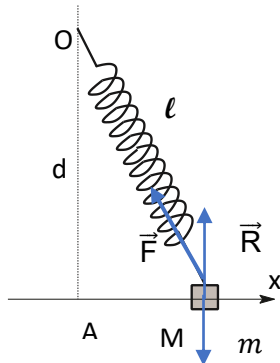
B- Oscillateur anharmonique

Référentiel : Associé au laboratoire Galiléen

Système : M(m)

Forces : Le poids $\vec{p} = m\vec{g}$
La réaction du support \vec{R}
La tension du ressort $\vec{F} = -(\ell - \ell_0)\vec{e}_x$

Schéma :



1. Energie potentielle

• Le poids et la réaction normale sont perpendiculaires au mouvement, ils ne travaillent pas.

• On a montré dans la première partie que l'énergie potentielle élastique s'écrivait : $E_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$ avec ℓ la longueur du ressort.

Or par le théorème de Pythagore on a $\ell = \sqrt{d^2 + x^2}$

On a donc $E_p(x) = \frac{1}{2}k(\sqrt{d^2 + x^2} - \ell_0)^2$

On retrouve bien l'expression proposée : $E_p(x) = \frac{1}{2}k\ell_0^2 \left(\sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{x}{\ell_0}\right)^2} - 1 \right)^2$ avec $\alpha = d/\ell_0$.

2. Positions d'équilibre

On recherche les extrémums d'énergie potentielle :

$$\frac{dE}{dx} = k\ell_0^2 \frac{2x/\ell_0^2}{\sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{x}{\ell_0}\right)^2} - 1} \left(\sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{x}{\ell_0}\right)^2} - 1 \right)$$

$$\frac{dE}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \alpha^2 + \left(\frac{x}{\ell_0}\right)^2 = 1$$

• si $\alpha > 1$ il n'y a qu'une position d'équilibre : $x = 0$

• si $\alpha < 1$ il y a trois positions d'équilibre : $x = 0$; $x = \ell_0\sqrt{1 - \alpha^2}$; $x = -\ell_0\sqrt{1 - \alpha^2}$

3. Graphes

$$\text{On a } \frac{dE}{dx} = kx \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{x}{\ell_0}\right)^2}} \right)$$

$$\text{D'où } \frac{d^2E}{dx^2} = k \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{x}{\ell_0}\right)^2}} \right) + \frac{kx}{2\ell_0^2} \frac{x}{\left(\alpha^2 + \left(\frac{x}{\ell_0}\right)^2 \right)^{3/2}}$$

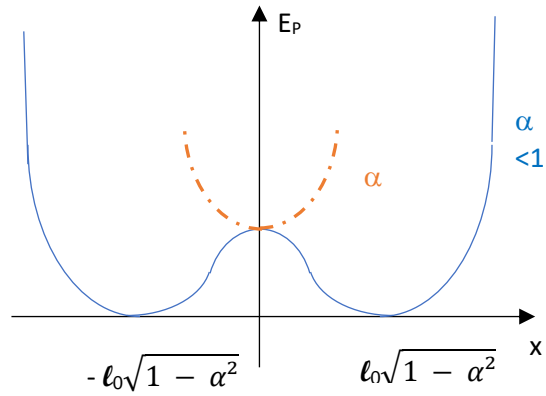
• si $x = 0$: $\frac{d^2E}{dx^2} = k(1 - 1/\alpha)$

C'est un **équilibre stable si $\alpha > 1$ et instable si $\alpha < 1$** .

• si $x = \ell_0\sqrt{1 - \alpha^2}$

on a alors $\alpha^2 + \left(\frac{x}{\ell_0}\right)^2 = 1$ d'où $\frac{d^2E}{dx^2} = \frac{kx_{eq}}{2\ell_0^2} > 0$

Le résultat est identique pour $x = -\ell_0\sqrt{1 - \alpha^2}$ qui sont donc **deux positions d'équilibre stable**.



4. Mouvement au voisinage de 0

On cherche une expression approchée de l'énergie potentielle à l'aide d'un développement limité à l'ordre 2 autour de 0.

$$E_p(x) = E_p(0) + x \left. \frac{dE}{dx} \right|_{x=0} + \frac{1}{2} x^2 \left. \frac{d^2 E}{dx^2} \right|_{x=0} + \dots$$

D'après les résultats précédents : $E_p(x) = E_p(0) + \frac{1}{2} x^2 k \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) = K \frac{1}{2} x^2$

Avec la même méthode qu'au A2 on obtient : $\ddot{x} + \omega_1^2 x = 0$ avec $\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$

On a donc bien un **oscillateur harmonique** de période $T = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi \sqrt{\frac{m\alpha}{k(\alpha-1)}}$

1. Accélération du point M

Elle correspond à la dérivée seconde du vecteur \overrightarrow{OM} .

$$\text{Or } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

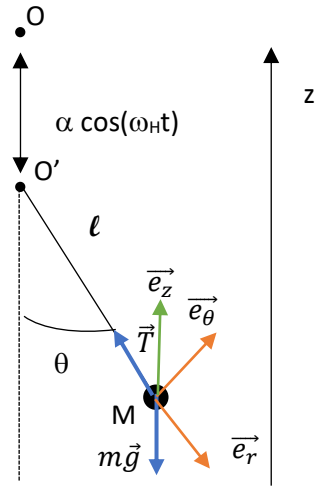
$$\text{D'où } \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = \vec{a}(M) = \frac{d^2 \overrightarrow{O'M}}{dt^2} - \omega_H^2 \alpha \cos(\omega_H t) \vec{e}_z$$

2. Vecteur dans la base polaire

Dans la base polaire on a $\overrightarrow{O'M} = \ell \vec{e}_r$

$$\text{D'où } \frac{d \overrightarrow{O'M}}{dt} = \ell \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\text{Ainsi } \frac{d^2 \overrightarrow{O'M}}{dt^2} = -\ell \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + \ell \ddot{\theta} \vec{e}_\theta$$



Référentiel : Associé au laboratoire Galiléen

Système : M(m)

Forces : Le poids $\vec{p} = m\vec{g}$

La tension du fil \vec{T}

3. Loi : Deuxième loi de Newton : $m\vec{a}(M) = \vec{p} + \vec{T}$

On projette la relation sur \vec{e}_θ afin d'éliminer la tension du fil (voir schéma)

$$m\ell \ddot{\theta} - \omega_H^2 \alpha \cos(\omega_H t) \sin\theta = -mg \sin\theta$$

$$\text{D'où } \ddot{\theta} + \sin\theta \left(\frac{g}{\ell} - \frac{\omega_H^2 \alpha}{\ell} \cos(\omega_H t) \right) = 0$$

$$\text{On retrouve bien l'équation proposée : } \ddot{\theta} + \omega_0^2 (1 - \lambda \cos(\omega_H t)) \sin\theta = 0 \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \text{ et } \lambda = \frac{\omega_H^2 \alpha}{g}$$

4. Le pendule simple

Si $\lambda = 0$ on a alors $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$

On multiplie par $\dot{\theta}$

on a alors : $\dot{\theta} \ddot{\theta} + \omega_0^2 \dot{\theta} \sin\theta = 0$

$$\text{Ainsi } \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \omega_0^2 \dot{\theta} \cos\theta = A$$

Conditions initiales : $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$

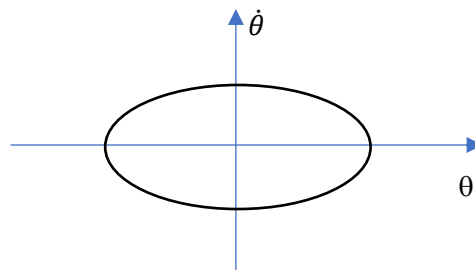
$$\text{Soit } \frac{1}{2} \dot{\theta}_0^2 - \omega_0^2 = A$$

$$\text{Finalement on obtient } \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \omega_0^2 (1 - \cos\theta) = \frac{1}{2} \dot{\theta}_0^2$$

La perturbation est de faible amplitude, on peut faire l'approximation : $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$

$$\text{En reportant dans l'équation du mouvement } \ddot{\theta}^2 + \omega_0^2 \theta = \dot{\theta}_0^2$$

Il s'agit d'une ellipse centrée sur l'origine :



5. Faibles perturbation pour le pendule paramétrique

On linéarise avec la relation $\sin\theta \approx \theta$

$$\text{On a alors } \ddot{\theta} + \omega_0^2 (1 - \lambda \cos(\omega_H t)) \theta = 0$$

On obtient l'équation d'un oscillateur harmonique dont la pulsation dépend du temps :

$$\omega(t) = \omega_0 \sqrt{1 - \lambda \cos(\omega_H t)} \quad (\text{Il faut bien sûr que } \lambda < 1)$$

6. Condition d'instabilité

On donne $\ddot{\theta}(t) + v\dot{\theta}(t) = 0$.

Par identification $v = \omega_0^2(1 - \lambda \cos(\omega_H t))$

La condition d'instabilité est $v < 0$ donc $\lambda > 1$

On a donc $\lambda = \frac{\alpha \omega_H^2}{g} > 1$

7. Analyse des portraits de phase

Une trajectoire de phase s'enroule dans le sens horaire.

Pour $\lambda = 0,1$; $0,5$ et même 1 la trajectoire de phase est bornée. Ce qui correspond bien à un état stable.

On relève sur le portrait de phase que la particule revient vers la position d'équilibre ($\theta = 0$ et $\dot{\theta} = 0$) et cela à cause des frottements.

Pour $\lambda = 2$, θ augment fortement. Le système est instable.

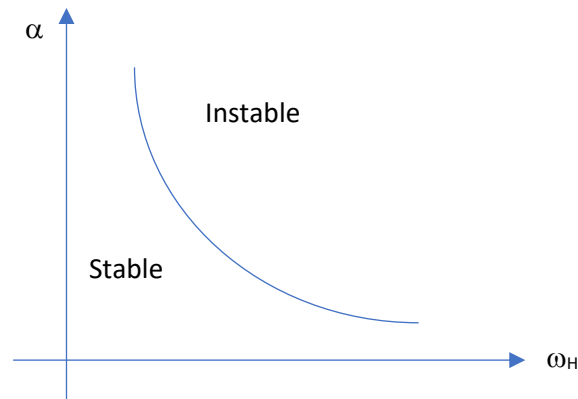
Ces résultats sont cohérents avec l'analyse de la question précédente.

8. Courbe limite

La condition d'instabilité : $\frac{\alpha \omega_H^2}{g} > 1$, condition de stabilité : $\frac{\alpha \omega_H^2}{g} < 1$

La frontière est donnée par $\frac{\alpha \omega_H^2}{g} = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{g}{\omega_H^2}$

D'où la courbe :



Pour une houle de fréquence $0,5$ Hz le mouvement devient instable pour $\alpha = \frac{g}{4\pi^2 f_H^2} = 1\text{m}$

C'est un ordre de grandeur correcte.

DS N°8 du 13 février 2020

MECANIQUE

- Les questions doivent être clairement séparées.
- Toute réponse doit être introduite par le numéro de la question et un titre, elle doit être justifiée.
- La rédaction doit être claire et concise.
- Les résultats doivent être encadrés.
- Les différents exercices sont à démarrer sur une nouvelle page.
- Vérifiez l'homogénéité des résultats.

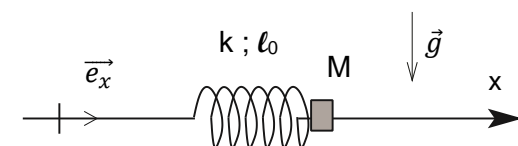
Différents oscillateurs**A- Oscillateur harmonique**

Figure 1 – Pendule élastique horizontal

On considère un pendule élastique constitué d'un point matériel M de masse m astreint à se déplacer sur un axe horizontal Ox. L'axe Ox est fixe dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. L'origine des abscisses O constitue une extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 dont l'autre extrémité est fixé au point M. Initialement le point M est lâché sans vitesse initiale depuis un point d'abscisse $2l_0 > x_0 > l_0$. On considère que le mouvement de M sur l'axe Ox s'effectue sans aucun frottement.

1. Exprimer l'énergie potentielle $E_p(x)$ du point M.
2. Montrer que le système est conservatif et en déduire l'équation du mouvement sous la forme :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 l_0 \quad (1)$$

avec ω_0 à exprimer en fonction de k et m.

3. Tracer l'allure de cette fonction $E_p(x)$ et en déduire le domaine des valeurs de x accessibles au cours du mouvement, avec ces conditions initiales.
4. Résoudre l'équation (1) et vérifier la compatibilité du résultat avec celui de la question précédente.
5. On généralise l'étude précédente dans le cas où le point M, toujours astreint à se déplacer sur l'axe horizontal Ox est soumis à une résultante de forces qui dérive d'une énergie potentielle $E(x)$. On suppose qu'une position d'équilibre x_e existe pour M.
 - a. Rappeler la propriété que possède l'énergie potentielle en $x = x_e$.
 - b. Rappeler la condition sur $\frac{d^2E}{dx^2}(x_e)$ pour que x_e soit une position d'équilibre stable. Que peut-on dire alors de $E(x)$ en x_e ?
 - c. Dans l'exemple du pendule élastique précédent, où est sa position d'équilibre ? est-elle stable ou instable ?

B- Oscillateur anharmonique : stabilité, instabilité, métastabilité

On considère la nouvelle configuration du pendule représentée en figure 2. Le point M est toujours astreint à se déplacer sur l'axe horizontal x'Ax en ne subissant aucun frottement. L'origine des x est prise en A. L'étude se fera dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen où Ax est fixe.

1. Montrer que la résultante des forces s'appliquant sur M dans le référentiel d'étude dérive d'une énergie potentielle $E_p(x)$ qu'on calculera puis qu'on mettra sous la forme suivante (à une constante près) :

$$E_p(x) = \frac{1}{2} k l_0^2 \left(\sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{x}{l_0}\right)^2} - 1 \right)^2 \quad (2)$$

où $\alpha = d/l_0$.

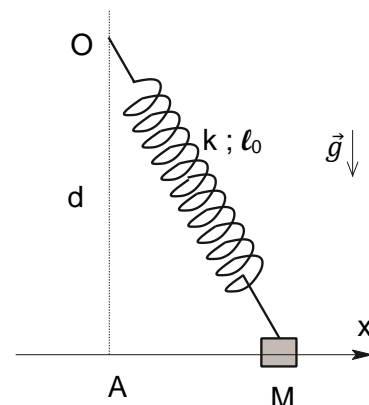


Figure 2- Oscillateur anharmonique

2. Préciser les positions d'équilibre dans les cas $\alpha < 1$ et $\alpha > 1$.
3. Tracer, dans chacun des cas $\alpha < 1$ et $\alpha > 1$, l'allure de la fonction $E_p(x)$. Qu'en déduire quant à la stabilité des différentes positions d'équilibre ?
4. On considère le cas $\alpha > 1$. Déterminer l'équation des petits mouvements autour de la (les) position(s) d'équilibre stable. Montrer que ce mouvement se ramène à celui d'un oscillateur harmonique dont on exprimera la période T en fonction de k , m et α .

C- Pendule paramétrique

On s'intéresse, dans cette partie, au principe de fonctionnement d'un dispositif chargé de récupérer l'énergie de la houle. Il est composé d'un flotteur étanche et clos dans lequel est suspendue une roue qui joue le rôle de pendule embarqué. La roue possède un axe horizontal, sa partie supérieure est évidée et sa partie inférieure est lestée de béton. Sous l'action de la houle, le flotteur se met à osciller, entraînant à son tour un mouvement de va-et-vient de la roue pendule. Le mouvement relatif entre la roue et le flotteur actionne un système hydroélectrique qui convertit l'énergie mécanique en énergie électrique.

Pour comprendre comment les oscillations verticales de la houle peuvent générer un mouvement d'oscillation du flotteur, on modélise très simplement le flotteur par un pendule simple de masse m et de longueur ℓ , uniquement soumis à son poids et à la tension du fil (inextensible, sans masse). L'action des vagues rend le point de fixation O' mobile (figure 4).

On note O le point fixe coïncidant avec O' en absence de mouvement.

On a $\overrightarrow{OO'} = \alpha \cos(\omega_H t) \vec{e}_z$

1. Montrer que le vecteur accélération du point M est :

$$\vec{a}(M) = \frac{d^2 \overrightarrow{O'M}}{dt^2} - \alpha \omega_H^2 \cos(\omega_H t) \vec{e}_z$$

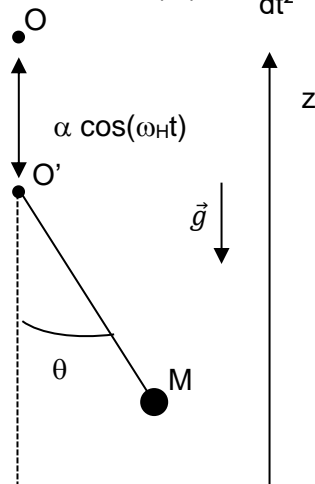


Figure 4 – Modélisation simplifiée du flotteur SEAREV

2. Exprimer $\frac{d^2 \overrightarrow{O'M}}{dt^2}$ dans la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

3. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, montrer que :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 (1 - \lambda \cos(\omega_H t)) \sin \theta = 0$$

en donnant les expressions de ω_0 et λ en fonction de α , g , ℓ , et ω_H .

Cette équation généralise celle du pendule simple : on parle de pendule paramétrique.

4. On s'intéresse brièvement (uniquement dans cette question) au cas du pendule simple ordinaire : $\lambda = 0$. Partant de l'équilibre ($\dot{\theta}=0$, $\theta=0$), on perturbe le système en lui donnant une faible vitesse angulaire : $\dot{\theta}(t=0) = \dot{\theta}_0 > 0$.

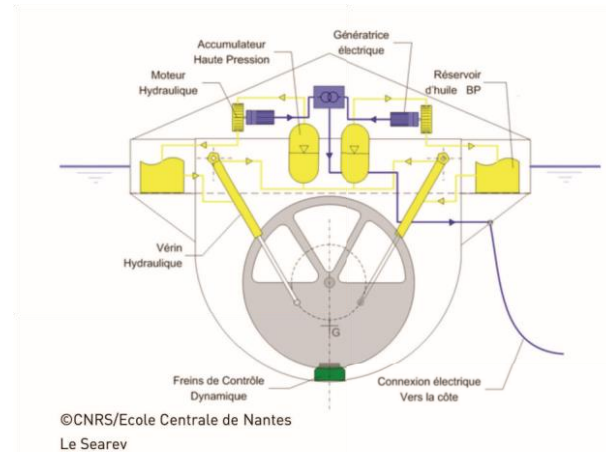


Figure 3- Schéma du système SEAREV

Etablir l'équation de la trajectoire de phase reliant $\omega = \dot{\theta}$ et θ . Tracer cette trajectoire dans le repère $(\theta, \dot{\theta})$.

On revient à présent au cas du pendule paramétrique : $\lambda \neq 0$.

5. On suppose que le pendule paramétrique est écarté de sa position d'équilibre d'un angle très faible $\delta\theta_0$. En linéarisant l'équation du mouvement, montrer qu'on retrouve l'équation d'un oscillateur harmonique dont la pulsation varierait avec le temps.
6. On simplifie le problème : la petite perturbation est instable si l'équation différentielle peut s'écrire (à un instant donné) $\ddot{\theta}(t) + \nu\dot{\theta}(t) = 0$ avec $\nu < 0$. Déterminer alors une condition d'instabilité faisant intervenir α , ω_H ainsi que g .

On présente dans les figures 5 et 6 ci-après une simulation des portraits de phase du pendule paramétrique linéarisé, obtenus pour les valeurs suivantes de λ : 0,1 ; 0,5 ; 1 ; 2. Les autres paramètres sont fixés à $\omega_0 = 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$ et $\omega_H = \pi \text{ rad.s}^{-1}$.

7. Ces quatre portraits de phase sont-ils en accord avec la condition obtenue à la question précédentes ? Justifier la réponse soigneusement.
8. Dans un diagramme (ω_H, α) , tracer la courbe limite entre zones stable et instable $\alpha(\omega_H)$, et indiquer les zones stables et instables du diagramme.

Pour une houle de fréquence voisine de 0,5 Hz, au-delà de quelle amplitude α le mouvement du pendule s'amplifiera-t-il ? cette valeur est-elle plausible ?

En réalité, le seuil d'instabilité dépend également de ω_0 donc de la longueur du pendule. L'étude complète du diagramme d'instabilité du pendule paramétrique permet donc d'optimiser la mise au point du système SEREV.

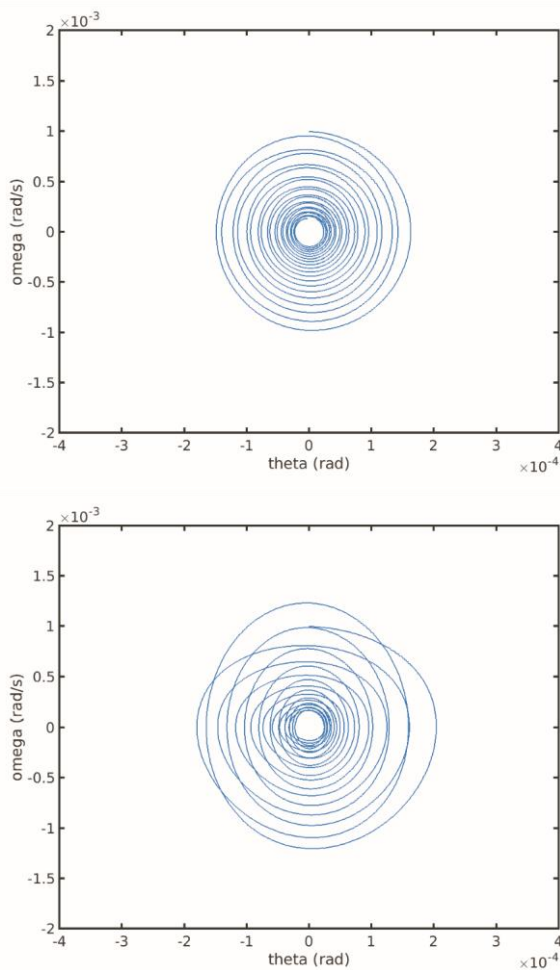


Figure 5- Portraits de phase de l'oscillateur paramétrique pour $\lambda = 0,1$ et $\lambda = 0,5$ (de haut en bas)

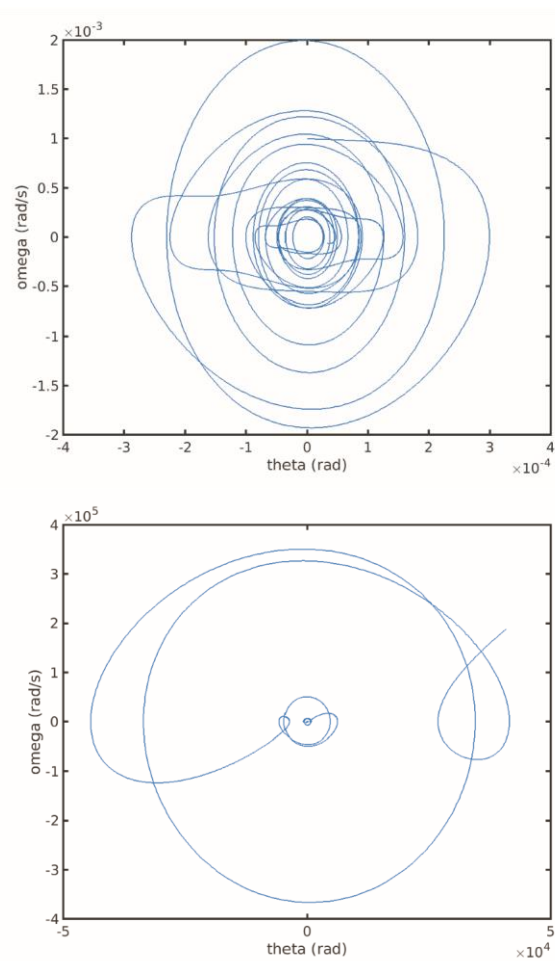


Figure 6- Portraits de phase de l'oscillateur paramétrique pour $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$ (de haut en bas)