Devoir à la maison n° 8

À rendre le 06 décembre

I. Système de congruence des Caraïbes.

Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux, et soit r_1 , r_2 deux entiers naturels non nuls. On considère le système de congruences suivant, d'inconnue $n \in \mathbb{N}$:

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{ccc} n & \equiv & r_1\ [a] \\ n & \equiv & r_2\ [b] \end{array}\right.$$

1) Justifier l'existence de deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$.

2) On pose $r_0 = aur_2 + bvr_1$. Montrer que r_0 est une solution de (S).

3) Soit $n \in \mathbb{N}$ une solution de (S).

- **a)** Montrer que n vérifie $\left\{\begin{array}{ccc} n & \equiv & r_0[a] \\ n & \equiv & r_0[b] \end{array}\right.$
- **b)** En déduire successivement que : a, b, $a \vee b$ et enfin ab sont des diviseurs de $n - r_0$.
- **c)** En déduire que n vérifie $n \equiv r_0[ab]$.

4) Soit n un entier vérifiant $n \equiv r_0[ab]$, n est-il solution de (S) ? En déduire l'ensemble des solutions de (S).

5) Application directe :
Une bande de 17 pirates dispose d'un butin composé de N pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager également et de donner le reste au cuisinier (qui n'est, lui, pas un pirate). Celui ci reçoit 3 pièces. Mais une rixe éclate et 6 pirates sont tués. Tout le butin est reconstitué et partagé entre les survivants comme précédemment ; le cuisinier reçoit alors 4 pièces.
Dans un naufrage ultérieur, seuls le butin, 6 pirates et le cuisinier sont sauvés. Le butin est à nouveau partagé de la même manière et le cuisinier reçoit 5 pièces.
Quelle est alors la fortune minimale que peut espérer le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

II. Identité de Frobenius et petit théorème de Fermat.

Soit p un nombre premier.

1) Montrer que p divise $\binom{p}{k}$ pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$.

2) En déduire l'identité de Frobenius : $\forall x,\ y \in \mathbb{Z},\ (x+y)^p \equiv x^p + y^p\ [p]$.

3) En déduire le petit théorème de Fermat.

— **FIN** —