Feuille d'exercice n° 04 : **Nombres complexes**

Exercice 1 ( ) Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

1) $\dfrac{1+2i}{3-4i}$

2) $\dfrac{1}{(1+2i)^2}$

3) $\dfrac{(1+i)^3}{(1-i)^2}$

4) $\dfrac{1+i}{3-i}+\dfrac{1-i}{3+i}$

5) $\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{i}}$

6) $(1+(1+(1+2i)^2)^{-1})$

Exercice 2 Montrer que pour tout $(a,b,c,d)\in\mathbb{Z}^4$, il existe $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ tel que

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=m^2+n^2.$$

Exercice 3 Soit $\theta\in\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, $z=\dfrac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta}$. Calculer $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$.

Exercice 4 ( ) Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

1) $\left(\sqrt{3}-i\right)^{11}$

2) $(-1+i)^{17}$

3) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{-42}$

Exercice 5 ( ) Résoudre pour $z\in\mathbb{C}$, $2\arg(z+i)=\arg(z)+\arg(i)\ [2\pi]$.

Exercice 6 Soient z_1 et z_2 deux complexes de module 1, tels que $1+z_1z_2\neq 0$. Montrer que

$$\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\in\mathbb{R}.$$

Exercice 7 Soit $a\in[0;2\pi[$ et n un entier naturel. Déterminer le module et l'argument de : $(1+i\mathrm{e}^{ia})^n$.

Exercice 8 Soit $\omega=\exp\left(\dfrac{2i\pi}{7}\right)$. Calculer $A=\omega+\omega^2+\omega^4$ et $B=\omega^3+\omega^5+\omega^6$.
(*Indication* : on pourra d'abord calculer AB et $A+B$.)

Exercice 9 ( ) Déterminer les racines 4$^{\text{es}}$ dans $\mathbb{C}$ de $-119+120i$

Exercice 10 ( ) Soit $(n,z)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{C}$ tel que $z^n=(z+1)^n=1$. Montrer que n est multiple de 6 et que $z^3=1$.

Exercice 11 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue x : $(1+x)^{2n}=(1-x)^{2n}$. Calculer alors le produit des solutions de cette équation.

Exercice 12 ( ) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1) Écrire $-i$ et $1+i$ sous forme trigonométrique.

2) Calculer les racines n^{es} de $-i$ et de $1+i$.

3) Résoudre $z^2-z+1-i=0$.

4) En déduire les racines de $z^{2n}-z^n+1-i=0$.

Exercice 13 Soit n un entier naturel non nul, notons $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n.$$

Exercice 14 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\overline{z} = z^3$.

Exercice 15 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $z^4 + 2\lambda^2 z^2(1+\cos\theta)\cos\theta + \lambda^4(1+\cos\theta)^2 = 0$ $(\lambda \in \mathbb{C}, \theta \in [0,\pi])$. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum\limits_{k=1}^{4} z_k^n$ où les z_k sont les racines de cette équation.

Exercice 16

1) Calculer les racines carrées de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.

2) Calculer les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 17

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.

2) En déduire que $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$ est racine du polynôme $16X^4 - 20X^2 + 5$.

3) En déduire la valeur de $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$.

4) Montrer que $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Exercice 18 Calculer $\cos 5\theta$, $\cos 8\theta$, $\sin 6\theta$, $\sin 9\theta$, en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exercice 19 Linéariser les quantités suivantes.

1) $\cos^2(x)\sin^3(x)$.

2) $\cos^6(x) + \sin^6(x)$.

Exercice 20 Soient $n \in \mathbb{N}$ et a, $b \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}\cos(a+kb)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}\sin(a+kb)$.

Exercice 21 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z vérifiant chacune des équations suivantes.

1) $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 1$

2) $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 22 Quel est l'ensemble des nombres complexes z tels que $\dfrac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pur ?

Exercice 23 Déterminer les points d'affixe $z \in \mathbb{C}$ vérifiant chaque situation.

1) 1, z et z^2 soient les affixes de trois points alignés.

2) z et $\dfrac{1}{z}$ soient les affixes de deux vecteurs orthogonaux.

3) 1, z et $z+i$ soient les affixes des sommets d'un triangle dont le centre du cercle circonscrit est l'origine O du repère.

4) z, $\dfrac{1}{z}$ et $z-1$ soient les affixes de trois points situés sur un même cercle de centre O.

Exercice 24 Soient A, B et C trois points, distincts deux à deux, d'affixes respectifs a, b et c. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

1) ABC est un triangle équilatéral.

2) j ou j^2 est racine du polynôme $aX^2 + bX + c$.

3) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

4) $(b-a)^2 + (c-b)^2 + (a-c)^2 = 0$.

Exercice 25 Soit A, B, A' et B' quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Montrer qu'il existe une et une seule similitude directe qui transforme A en A' et B en B'.

Exercice 26 (✎)

1) Caractériser géométriquement l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & (2+2i)z - (7+4i) \end{array} \right.$

2) Soient r la rotation de centre le point d'affixe 1 et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$, et s la symétrie centrale de centre le point d'affixe $i+3$. Caractériser géométriquement l'application $s \circ r$.

3) Soit r la rotation de centre le point d'affixe $1+i$ et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{4}$. Déterminer l'expression complexe de r.