Devoir surveillé n° 07

– Version 1 –

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Montrer que, dans $\mathscr{C}([-1,1],\mathbb{C})$, $F = \left\{ f \in \mathscr{C}([-1,1],\mathbb{C}) \mid \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ et $G = \{ f \in \mathscr{C}([-1,1],\mathbb{C}) \mid f \text{ constante} \}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires.

II. Étude asymptotique d'une fonction (petites mines 2003, épreuve commune).

Partie I.

Notons $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{t}}{1+t^2}$. Il est clair que f est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, et que cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Nous noterons $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

1) Quelle est la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $-\infty$?

2) Qu'en déduisez-vous au sujet de $\mathscr{C}_f$?

3) Complétez chacune des phrases suivantes au moyen de l'une des locutions « est équivalent à », « est négligeable devant » et « est dominé par ».

$f(t) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \mathrm{e}^{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$

$f(t) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \dfrac{\mathrm{e}^{t}}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$

$f(t) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \dfrac{\mathrm{e}^{t}}{t^2}$ lorsque t tend vers $+\infty$

Lorsque plusieurs réponses sont acceptables, vous donnerez la plus précise. Bien entendu, vous justifierez votre réponse.

4) Quelle est la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?

5) Soit $t \in \mathbb{R}$, expliciter $f'(t)$.

6) Dressez le tableau des variations de f.

7) Soit $t \in \mathbb{R}$, expliciter $f''(t)$.

8) Montrer que l'équation $f''(t) = 0$ possède deux solutions réelles : l'une est évidente, l'autre sera notée α. Vous ne chercherez pas à calculer α.

9) Prouver l'encadrement $-\dfrac{1}{5} < \alpha < 0$.

10) Expliciter le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Que pouvez-vous en déduire concernant $\mathscr{C}_f$?

11) Tracez la courbe représentative de f. Vous préciserez son allure au voisinage du point d'abscisse 1.

Partie II.

Au vu des expressions de $f(t)$, $f'(t)$ et $f''(t)$, nous nous proposons d'établir que l'assertion $\mathscr{A}(n)$ suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\text{Il existe un polynôme } P_n \text{ tel que } \forall t \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)\mathrm{e}^{\,t}}{(1+t^2)^{n+1}}.}$$

Vous allez raisonner par récurrence sur n.

12) Il est clair que $\mathscr{A}(n)$ est vraie pour $n \in \{0, 1, 2\}$;

Vous dresserez simplement un tableau donnant l'expression de P_n pour ces valeurs de n.

13) Fixons $n \in \mathbb{N}$, et supposons l'assertion $\mathscr{A}(n)$ acquise. Etablissez l'assertion $\mathscr{A}(n+1)$;

Vous déterminerez l'expression de P_{n+1} en fonction de P_n et P'_n.

Il résulte donc des questions **12)** et **13)** que l'assertion $\mathscr{A}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

14) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n a tous ses coefficients dans $\mathbb{Z}$.

15) Préciser, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré et le coefficient dominant de P_n.

16) Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression simple de $c_n = P_n(i)$, où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Partie III.

Notons $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Ainsi F est la primitive de f qui s'annule en 0.

17) Quel est le sens de variation de F ?

18) Montrer que $F(x)$ possède une limite ℓ finie lorsque x tend vers $-\infty$. Vous ne chercherez pas à expliciter cette limite.

19) Prouver l'encadrement $-1 \leqslant \ell \leqslant 0$.

20) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de F, au point d'abscisse 0.

21) Expliciter le développement limité de F à l'ordre 4 au voisinage de 0.

Nous nous proposons d'étudier le comportement de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Nous noterons, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$J(x) = \int_1^x \frac{t\mathrm{e}^{\,t}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t, \quad K(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{\,t}}{t^3}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad L(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{\,t}}{t^4}\,\mathrm{d}t.$$

22) Prouver l'existence d'une constante A telle que $F(x) = f(x) + A + 2J(x)$ pour tout réel x.

23) Pour $x \geqslant 1$, placer les uns par rapport aux autres les réels 0, $J(x)$ et $K(x)$.

24) Avec une intégration par parties soigneusement justifiée, montrer que $K(x) - 3L(x)$ est négligeable devant $\dfrac{\mathrm{e}^{\,x}}{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

25) En découpant l'intervalle $[1, x]$ sous la forme $[1, x^{3/4}] \cup [x^{3/4}, x]$, montrer que $L(x)$ est négligeable devant $\dfrac{\mathrm{e}^{\,x}}{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

26) En déduire un équivalent simple de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

27) Exploiter les résultats des questions **17)**, **19)**, **20)** et **26)** pour donner l'allure de la courbe représentative de F.

— **FIN** —

Devoir surveillé n° 07
– Version 2 –
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

Pour chaque réel x, on considère la fonction

$$f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{t\mathrm{e}^{tx}}{\mathrm{e}^{t}-1} & \text{si} \quad t \neq 0, \\ 1 & \text{si} \quad t = 0. \end{cases}$$

Dans ce problème, on identifiera systématiquement un polynôme à la fonction polynomiale qui lui est associée.
Chaque partie utilise des résultats des parties précédentes, que l'on pourra librement admettre.

I - Questions préliminaires.

On se donne un réel x.

1) Montrer que f_x est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, déterminer $f_x'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$.

2) Montrer que f_x est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f_x'(0)$.

II - Définitions des polynômes et nombres de Bernoulli.

On se donne un réel x.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer un développement limité à l'ordre n et au voisinage de 0 de $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{t}-1}{t}$.

4) En déduire (sans le calculer) que f_x admet un développement limité à tout ordre, au voisinage de 0.

Ainsi, on écrit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$f_x(t) \underset{t\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k(x)}{k!} t^k + o(t^n)$$

et l'on définit le n^{e} nombre de Bernoulli : $b_n = B_n(0)$. Notamment,

$$f_0(t) = \frac{t}{\mathrm{e}^{t}-1} \underset{t\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!} t^k + o(t^n).$$

5) Déterminer b_0, b_1, b_2 et b_3.
Indication : on pourra établir une relation fonctionnelle faisant intervenir f_0.

6) Déterminer $B_0(x)$, $B_1(x)$ et $B_2(x)$.

7) À partir du développement de f_0 écrit ci-dessus ainsi que de celui de $t \mapsto \mathrm{e}^{xt}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} x^k.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est un polynôme de degré n : c'est le n^{e} polynôme de Bernoulli.

III - Quelques propriétés.

On se donne un réel x.

8) Soit $n \in \mathbb{N}$ impair et supérieur ou égal à 2. Montrer que $b_n = 0$.
Indication : on pourra considérer la fonction $t \mapsto f_0(t) + \dfrac{t}{2}$.

9) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$.

10) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$.

11) En déduire une expression permettant calculer les b_n par récurrence.

12) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n' = nB_{n-1}$.

13) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 B_n = 0$.

14) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est l'unique polynôme vérifiant :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \int_y^{y+1} B_n = y^n.$$

IV - Formule de Faulbaher.

Pour $n, m \in \mathbb{N}$, notons S_n^m la somme des puissances n^{es} des m premiers entiers naturels non nuls, *i.e.*

$$S_n^m = \sum_{k=0}^{m} k^n.$$

15) Montrer la formule de Faulbaher : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n^{m-1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} b_k m^{n+1-k}.$$

V - Relation de distribution.

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie la relation de distribution d'ordre $n \in \mathbb{N}$ si

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{t+k}{m}\right) = \frac{1}{m^{n-1}} f(t).$$

16) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n vérifie la relation de distribution d'ordre n.

VI - Formule d'Euler-Maclaurin.

On définit les *polynômes réduits de Bernoulli* par : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\overline{B_n}(x) = B_n(x - \lfloor x \rfloor)$
On souhaite montrer la formule d'Euler-Maclaurin : pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$ tel que $a < b$, pour tout $r \in \mathbb{N}$, si f est de classe $\mathscr{C}^{r+1}$ sur $[a, b]$, alors

$$\sum_{k=a+1}^{b} f(k) - \int_a^b f = \sum_{k=0}^{r} (-1)^{k+1} \frac{b_{k+1}}{(k+1)!} \left(f^k(b) - f^{(k)}(a)\right) + \frac{(-1)^r}{(r+1)!} \int_a^b \overline{B_{r+1}} f^{r+1}.$$

17) Démontrer la formule d'Euler-Maclaurin dans le cas $r = 0$.

18) Conclure par récurrence.

— FIN —