Devoir surveillé n° 09
– Version 1 –
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \quad AXB = 0.$$

Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

2) Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à coefficients diagonaux dominants, c'est-à-dire telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

3) Déterminer les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ telles que $M^2 = 0$.

II. Tirages dans une urne.

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une succession d'épreuves, chaque épreuve étant définie comme suit :

- on tire une boule dans l'urne,
- on remet ensuite la boule tirée dans l'urne,
- on rajoute ensuite dans l'urne une boule de couleur opposée à celle qui vient d'être tirée.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé modélisant cette expérience.
Si $k \in \mathbb{N}^*$, on note B_k le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après la k^{e} épreuve. Par convention, B_0 est la variable aléatoire constante égale à 1.

1) Déterminer la loi de B_1 et donner son espérance, ainsi que sa variance.

2) Soit $k \in \mathbb{N}$.
Combien y a-t-il de boules dans l'urne après la k^{e} épreuve ? On justifiera ce résultat, au moins brièvement.
En déduire l'ensemble $B_k(\Omega)$ des valeurs que peut prendre B_k.

3) Détermination par récurrence de la loi de B_k.

a) Soit $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in B_k(\Omega)$. Déterminer $P(B_{k+1} = i \mid B_k = j)$ (on distinguera trois cas selon les valeurs relatives de i et j).

b) En utilisant la formule des probabilités totales, déduire de ce qui précède que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall i \in \mathbb{N}^*,\ P(B_{k+1} = i) = \frac{i}{k+2} P(B_k = i) + \frac{3+k-i}{k+2} P(B_k = i-1).$$

4) À l'aide de la formule du **3)b)**, déterminer la loi de B_2, puis celle de B_3.

5) Calculs explicites de quelques valeurs.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_k = (k+1)!P(B_k = 2)$.

a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(B_k = 1) = \dfrac{1}{(k+1)!}$.

b) Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la valeur de $P(B_k = k+1)$.

c) À l'aide de la formule du **3)b)**, exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, a_{k+1} en fonction de a_k et de k.

d) Déterminer deux réels A et B tels que la suite de terme général $b_k = a_k + Ak + B$ soit géométrique.
En déduire alors que :

$$\forall k \in \mathbb{N}\,,\ P(B_k = 2) = \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}.$$

6) Espérance de B_k.

a) À l'aide de la formule du **3)b)**, exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E(B_{k+1})$ en fonction de $E(B_k)$.

b) Déduire de ce qui précède que :

$$\forall k \in \mathbb{N}\,,\ E(B_k) = \frac{k+2}{2}.$$

c) Retrouver ce résultat en utilisant la variable aléatoire N_k égale au nombre de boules noires présentes dans l'urne après k tirages.

7) Variance de B_k.

a) Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E(B_{k+1}^2)$ en fonction de $E(B_k^2)$, de $E(B_k)$ et de k.

b) En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$V(B_{k+1}) = \frac{k}{k+2} V(B_k) + \frac{1}{4}.$$

c) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*\,,\ V(B_k) = \frac{k+2}{12}.$$

8) Comportement asymptotique de (B_k).

a) Soit $\alpha > 0$. Montrer, en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que

$$P\left(\left|\frac{B_k}{k+2} - \frac{1}{2}\right| < \alpha\right) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 1.$$

b) Interpréter ce résultat et le justifier intuitivement.

9) Covariance de B_k et de B_{k+1}.

a) Quelle est la covariance de B_0 et de B_1 ?

b) B_0 et B_1 sont-elles indépendantes ?

On suppose à partir de maintenant que $k \in \mathbb{N}^*$.

c) Exprimer la loi conjointe de B_k et B_{k+1} en fonction de la loi de B_k.

d) En déduire la covariance de B_k et B_{k+1}.

e) Les variables aléatoires B_k et B_{k+1} sont-elles indépendantes ?

— **FIN** —

Devoir surveillé n° 09
– Version 2 –

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

Dans tout le problème, a et b désignent des entiers naturels tous deux non nuls et l'on note $N = a + b$.
On considère une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires, dans laquelle on effectue des tirages successifs, au « hasard » et « avec remise » d'une boule, en procédant de la façon suivante :
— lorsque la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant,
— lorsque la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne mais remplacée dans l'urne par une boule blanche et l'on procède au tirage suivant.

Partie I

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini modélisant cette expérience et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaire à l'obtention d'une première boule blanche.

1) Préciser soigneusement l'ensemble des valeurs prises par la variable Y.

2) Pour tout entier k compris entre 1 et $b+1$, calculer la valeur de la probabilité $P(Y = k)$.

3) Vérifier que

$$P(Y = b+1) = \frac{b!}{N^b}$$

et que, pour tout entier k compris entre 1 et b, la formule suivante est vraie :

$$P(Y = k) = \frac{b!}{(b-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{b!}{(b-k)!N^k} \quad .$$

4) Soit M un entier naturel non nul et $a_0, a_1, \dots, a_M$ une famille de réels. Établir que

$$\sum_{k=1}^{M} k(a_{k-1} - a_k) = \left(\sum_{k=0}^{M-1} a_k \right) - M a_M \quad .$$

5) En déduire que $\mathrm{E}[Y] = \displaystyle\sum_{k=0}^{b} \frac{b!}{(b-k)!N^k}$.

Partie II

Dans cette partie, on note :

— pour tout entier $n \geqslant 1$, q_n la probabilité de l'événement, noté N_n : « la n^{e} boule tirée est noire »,
— pour tout entier $n \geqslant 0$, X_n le nombre aléatoire de boules noires obtenues au cours des n premiers tirages (par convention, $X_0 = 0$),
— pour tout entier $n \geqslant 0$ et $k \geqslant 0$, $p_{n,k}$ la probabilité de l'événement : « au cours des n premiers tirages, on a obtenu exactement k boules noires ».

6) Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $p_{n,0}$ puis $p_{n,n}$. Que vaut la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}$?

7) Démontrer la formule suivante, valable pour tous les entiers naturels n et k non nuls :

$$N \cdot p_{n,k} = (a+k)p_{n-1,k} + (b+1-k)p_{n-1,k-1} \quad . \qquad \textbf{(F)}$$

8) Calcul de l'espérance de X_n.

a) À l'aide de la formule (**F**) obtenue dans la question **7)**, démontrer la formule pour $n \geqslant 1$:

$$N\mathrm{E}\left[X_n\right] = \sum_{k=0}^{n-1} \left[b + k(N-1)\right] p_{n-1,k} \quad ,$$

puis justifier que

$$\mathrm{E}\left[X_n\right] = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \mathrm{E}\left[X_{n-1}\right] + \frac{b}{N} \quad .$$

b) En utilisant la dernière formule établie à la question **8)a)**, prouver que, pour tout entier naturel n, on a

$$\mathrm{E}\left[X_n\right] = b\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right] \quad .$$

9) Calcul de q_n.

a) En utilisant une formule des probabilités totales, établir la formule suivante valable pour tout entier naturel n :

$$N \cdot q_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (b-k)p_{n,k} \quad .$$

b) Pour tout entier naturel n, exprimer alors q_{n+1} en fonction de $\mathrm{E}\left[X_n\right]$ et en déduire l'expression de q_{n+1} en fonction de n, b, N.

10) Calcul de la variance de X_n. On introduit la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \mathrm{E}\left[X_n(X_n - 1)\right] \quad .$$

a) À l'aide de la formule (**F**) obtenue dans la question **7)**,montrer que l'on a :

$$N \cdot u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left[k(k-1)(a+b-2) + 2(b-1)k\right] p_{n-1,k} \quad .$$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ satisfait à la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = \left(1 - \frac{2}{N}\right) u_{n-1} + \frac{2b(b-1)}{N} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}\right] .$$

c) À l'aide d'une récurrence, démontrer que la formule suivante est valable pour tout entier naturel n :

$$u_n = b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right] .$$

d) Donner alors la valeur de $\mathrm{Var}\,(X_n)$ puis préciser sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

— FIN —