Devoir à la maison n° 4

À rendre le 8 octobre

I. Nombres de Catalan

On pose $C_0 = 1$ et l'on définit par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$.

1) Calculer C_1, C_2, C_3, C_4 et C_5.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n \in \mathbb{N}^*$.

3) Montrer par récurrence simple que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n \geqslant 2^{n-1}$.

4) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n \geqslant 3^{n-2}$. On prendra un soin particulier à choisir le type de récurrence mise en œuvre.

5) Tenter de montrer par une récurrence similaire à celle de **4)** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n \geqslant 4^{n-2}$. À quel endroit ceci échoue-t-il ?

II. Un exercice

On désire prouver que pour tout nombre complexe z de module 1 on a :

$$\sqrt{3} \leqslant |1+z| + \left|1 - z + z^2\right| \leqslant \frac{13}{4}.$$

Dans tout l'exercice z désigne donc un nombre complexe de module 1.

1) On pose $t = |1+z|$, dans quel intervalle se trouve le réel t ?

2) Exprimer $\operatorname{Re}(z)$ à l'aide de t.

3) Montrer que

$$\left|1 - z + z^2\right|^2 = 3 - 4\operatorname{Re}(z) + 2\operatorname{Re}\left(z^2\right).$$

4) Exprimer $\operatorname{Re}(z^2)$ en fonction de $\operatorname{Re}(z)$ (indication : utiliser l'écriture trigonométrique). En déduire que

$$|1+z| + \left|1 - z + z^2\right| = t + \left|3 - t^2\right|.$$

5) En déduire l'inégalité demandée. Trouver un complexe z qui réalise le minimum.

— **FIN** —