

VIII Relations d'ordre et d'équivalence.

7 octobre 2020

Dans tout ce chapitre, E est un ensemble.

1. Relations binaires.

Définition 1.0.1.

On appelle *relation binaire* tout triplet $\mathcal{R} = (E, F, \Gamma)$ où E et F sont des ensembles et où Γ est une partie de $E \times F$. Au lieu de noter $(x, y) \in \Gamma$, on note $x\mathcal{R}y$ ce qui se lit : x est en relation avec y .

Remarque 1.0.2.

On considérera uniquement des relations binaires sur un seul ensemble E , i.e. avec $E = F$.

Exemple 1.0.3. — « Aimer » est une relation binaire : Brandon aime Sue Ellen mais Sue Ellen n'aime pas Brandon. On voit sur cet exemple qu'en général $x\mathcal{R}y$ n'implique pas $y\mathcal{R}x$.

- L'égalité est l'exemple le plus courant de relation binaire.
- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On peut définir pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y$ ssi $y = f(x)$ (on a en fait défini ainsi une application via son graphe).
- Sur \mathbb{R} , \leq et $<$ (autre exemple où $x\mathcal{R}y$ est vrai mais $y\mathcal{R}x$ est faux).
- \subset est une relation binaire sur $\mathcal{P}(E)$.
- les divisibilités sur \mathbb{N} et \mathbb{Z} .

Remarque 1.0.4.

Une relation binaire sur un ensemble E fini peut être représentée au moyen d'un graphe dont les sommets sont les éléments de E et dont les arêtes sont orientées d'un sommet à l'autre : une flèche allant de x à y signifie $x\mathcal{R}y$.

Exercice 1.0.5.

Déterminer le graphe de la relation \leq sur $\{0, 1, 2, 3\}$. Faire de même pour la relation $|$.

Définition 1.0.6.

Soit \mathcal{R} une relation binaire sur E . On dit que \mathcal{R} est :

- (i) *réflexive* si $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.

- (ii) *transitive* si $\forall x, y, z \in E, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.
- (iii) *symétrique* si $\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
- (iv) *antisymétrique* si $\forall x, y \in E, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$.

Remarque 1.0.7.

Ces propriétés peuvent être décelées sur un graphe de la relation binaire, défini en 1.0.4.

Exemple 1.0.8. — « Aimer » ne vérifie aucune de ces propriétés.

- L'égalité est réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive.
- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $x\mathcal{R}y$ ssi $y = f(x)$: les propriétés de cette relation dépendent du choix de f mais ne vérifie aucune de ces propriétés en général (considérer par exemple $f : x \mapsto x + 1$ et $f : x \mapsto x$).
- \leq est réflexive, transitive et antisymétrique sur \mathbb{R} .
- $<$ est transitive et antisymétrique sur \mathbb{R} .
- \subset est réflexive, transitive et antisymétrique sur $\mathcal{P}(E)$.
- la divisibilité sur \mathbb{N} est réflexive, transitive et antisymétrique.
- la divisibilité sur \mathbb{Z} est réflexive et transitive mais pas antisymétrique.

Démonstration. — Montrons le résultat pour \subset : Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.

- On a bien entendu $A \subset A$, donc \subset est réflexive.
- On suppose $A \subset B$ et $B \subset C$. Alors $A \subset C$ et donc \subset est transitive.
- On suppose $A \subset B$ et $B \subset A$. Alors $A = B$, et \subset est antisymétrique.
- Montrons le résultat pour la divisibilité sur \mathbb{N} : soient $n, p, q \in \mathbb{N}$.
 - On a $n = 1 \times n$ donc $n|n$.
 - Si $n|p$ et $p|q$, alors il existe $k, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $p = kn$ et $q = \ell p$, donc $q = (\ell k)n$ et ainsi $n|q$.
 - Si $n|p$ et $p|n$, alors il existe $k, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $p = kn$ et $n = \ell p$, donc $n = (\ell k)n$ et ainsi $\ell k = 1$. Mais ℓ et k sont deux entiers naturels et sont donc égaux à 1, donc $n = p$.
- Dans le cas de la divisibilité dans \mathbb{Z} , on aurait pour ce point $k, \ell \in \mathbb{Z}$, et donc $\ell k = 1$ serait aussi vérifié si $k = \ell = -1$, et en effet si $n = -p$ on a bien $n|p$ et $p|n$, mais $n \neq p$!

□

2. Relations d'équivalence.

Définition 2.0.1.

On appelle *relation d'équivalence* toute relation binaire réflexive, transitive et symétrique.

Exemple 2.0.2.

- L'égalité sur E est l'exemple le plus classique de relation d'équivalence.
- La relation de congruence modulo n sur \mathbb{Z} en est aussi une : on fixe $n \in \mathbb{Z}$ non nul, et on dit que deux entiers p et q sont *congrus modulo n* s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = q + kn$, ce qui se note $p = q[n]$ ou $p \equiv q[n]$.
- Sur \mathbb{R}^n , on a la relation d'équivalence : $M \mathcal{R} N$ si \overrightarrow{OM} et \overrightarrow{ON} sont colinéaires. C'est le point de départ de la *géométrie projective*.
- Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, deux matrices M et N sont dites semblables si $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}), M = P^{-1}NP$. Cela définit une relation d'équivalence.
- Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, deux matrices M et N sont dites équivalentes si $\exists (P, Q) \in GL_n(\mathbb{K})^2, M = Q^{-1}NP$. Cela définit une relation d'équivalence.

Définition 2.0.3.

Soit E un ensemble et \mathcal{R} une relation d'équivalence sur E . Alors, pour tout élément x de E , on appelle *classe d'équivalence* de x l'ensemble $\{y \in E \mid x \mathcal{R} y\}$, que l'on note parfois \bar{x} .

Exercice 2.0.4.

Compléter le graphe suivant (voir figure 1) avec le moins de flèches possibles de manière à obtenir le graphe d'une relation d'équivalence. Identifier les classes d'équivalences.

Proposition 2.0.5.

Soit E un ensemble et \mathcal{R} une relation d'équivalence sur E . Soit $(x, y) \in E^2$. Alors,

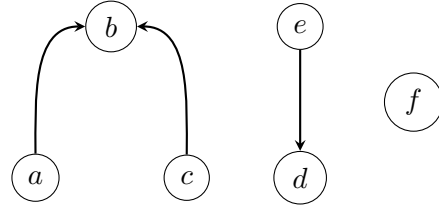


FIGURE 1 – À compléter (voir exercice 2.0.4).

1. $x \in \bar{x}$.
2. $x \mathcal{R} y \iff x \in \bar{y}$.
3. $x \mathcal{R} y \iff \bar{x} = \bar{y}$.

Démonstration.

Le premier point découle de la réflexivité. Le second découle de la définition de \bar{y} . Pour le troisième, il s'agit de montrer l'équivalence. Le sens direct se fait en montrant une double inclusion, qui découle de la transitivité. Le sens indirect découle du premier point et du second. □

Définition 2.0.6.

Soit E un ensemble, $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E indexée par un ensemble I . On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est une *partition* de E si les éléments de cette famille sont tous non vides, sont disjoints et si leur réunion vaut E .

- Proposition 2.0.7.**
1. Si \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur E , alors l'ensemble des classes d'équivalences de \mathcal{R} forme une partition de E .
 2. Réciproquement, si $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de E , alors la relation binaire définie sur E par $x \mathcal{R} y$ si $\exists i \in I, (x \in A_i) \wedge (y \in A_i)$ est une relation d'équivalence.

Nous introduisons maintenant dans un but culturel l'ensemble quotient (hors programme).

Définition 2.0.8.

Si \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur E , on appelle ensemble quotient de E par \mathcal{R} l'ensemble des classes d'équivalences, noté E/\mathcal{R} .

Exemple 2.0.9.

Si $f : E \rightarrow F$ est une application, la relation binaire sur E définie par $x\mathcal{R}y$ si $f(x) = f(y)$ est une relation d'équivalence. Quelle est alors la partition qui lui est naturellement associée ? On pourra alors se poser la question suivante : y a-t-il un moyen naturel de construire une injection $\tilde{f} : E/\mathcal{R} \rightarrow F$?

Exemple 2.0.10.

On manipule naturellement certains ensembles quotients : les vecteurs de \mathbb{R}^n et les fractions, par exemple.

3. Relations d'ordre.**Définition 3.0.1.**

On appelle *relation d'ordre* toute relation binaire réflexive, transitive et antisymétrique.

Remarque 3.0.2.

L'usage est de noter \preceq , parfois \leq , les relations d'ordre.

Exemple 3.0.3.

Reprendre tous les exemples précédents et repérer les relations d'ordre.

Définition 3.0.4.

Soit \preceq une relation d'ordre sur E .

1. On dit que $x, y \in E$ sont des *éléments comparables* si $x \preceq y$ ou $y \preceq x$.
2. On dit que \preceq est une *relation d'ordre totale* (ou que cet ordre est total) si tous les éléments de E sont comparables deux à deux. Sinon la relation est dite *partielle* (ou l'ordre est dit partiel).

Exemple 3.0.5. — On définit la relation d'ordre usuelle sur \mathbb{N} , notée \leq par : $a \leq b$ si $\exists k \in \mathbb{N}, b = a + k$. C'est une relation d'ordre totale.

- La relation d'ordre usuelle \leq sur \mathbb{R} est totale : quand on choisit deux réels, il y en a toujours un des deux qui est inférieur ou égal à l'autre.
- La relation d'ordre \subset sur $\mathcal{P}(E)$ est partielle (si $\text{Card } E \geq 2$) : en effet, quand on choisit deux parties de E , il n'y a aucune raison pour que l'une soit incluse dans l'autre.
- La relation de divisibilité sur \mathbb{N} est une relation d'ordre partielle : quand on choisit deux entiers positifs, l'un n'est pas forcément multiple ou diviseur de l'autre.

4. Majorants, minorants et compagnie.

Dans toute cette section, \preceq est une relation d'ordre sur E et A est une partie de E .

4.1. Majorants, minorants.

Définition 4.1.1. (i) On dit que A est *majorée* (resp. *minorée*) pour \preceq s'il existe un élément $M \in E$ tel que pour tout $a \in A$, $a \preceq M$ (resp. $M \preceq a$) ; on dit alors que M est UN *majorant* (resp. *minorant*) de A ou que M *majoré* (resp. *minore*) A .

- (ii) on dit que A est *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée.



En général, une partie majorée a plusieurs majorants, et peut même en avoir une infinité !

Exemple 4.1.2.

- $[1, 2]$ dans \mathbb{R} est majoré par tout réel x tel que $2 \leq x$, et minoré par tout réel y tel que $y \leq 1$.
- $] - \infty, 2[$ est majoré mais non minoré.

- Pour la relation \subset , $\mathcal{P}(E)$ est minorée par \emptyset et majorée par E .

Exercice 4.1.3.

On considère dans $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ muni de \subset la partie $A = \{ [0, n] \mid n \in \mathbb{N} \}$.

Déterminer l'ensemble des minorants et celui des majorants de A .

4.2. Plus grand et plus petit éléments.**Définition 4.2.1.**

On dit que $x \in E$ est un *plus grand élément* ou *maximum* (resp. *plus petit élément* ou *minimum*) de A si x est un majorant (resp. minorant de A) **ET** $x \in A$.

Exemple 4.2.2.

- $I = [-1, 2[$ a un plus petit élément, mais pas de plus grand élément. En effet, -1 est un minorant de I et $-1 \in I$. Mais supposons par l'absurde que I ait un plus grand élément M . Alors $M \in I$, donc $M < 2$. Ainsi il existe $a \in]M, 2[$, donc $a \in I$ et $M < a$, ce qui est en contradiction avec le fait que M majore I .
- \mathbb{R} n'est ni majoré ni minoré, donc n'a ni plus grand ni plus petit élément.

Théorème 4.2.3.

Si A a un plus grand élément, ce dernier est unique. Il en est de même pour un petit élément, s'il existe. Dans le cas d'existence, le plus grand élément de A est alors noté $\max A$, et le plus petit élément de A est noté $\min A$.

Démonstration.

On suppose que A a deux maxima : ils sont alors réciproquement plus grand l'un que l'autre, et par antisymétrie ils sont égaux. \square

Exemple 4.2.4.

Dans \mathbb{N} muni de la relation d'ordre $|$: 0 est le plus grand élément et 1 est le plus petit. En effet tout entier divise 0 , et 1 divise tout entier.

Exercice 4.2.5.

En reprenant les notations de l'exercice 4.1.3, déterminer si A possède un maximum, ainsi qu'un minimum.

4.3. Bornes supérieure et inférieure.

Définition 4.3.1. (i) **S'il existe**, le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A est appelé la borne supérieure de A et noté $\sup A$.

(ii) **S'il existe**, le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A est appelé la borne inférieure de A et noté $\inf A$.



Il y a une grosse différence entre \max et \sup : le premier doit appartenir à A , pas le deuxième.

Exemple 4.3.2.

$I = [-1, 2[$ a une borne inférieure et une borne supérieure : l'ensemble des minorants de I est $] -\infty, -1]$, qui admet -1 comme maximum, et donc -1 est la borne inférieure de I . De même $[2, +\infty[$ est l'ensemble des majorants de I , et il admet 2 comme minimum, donc 2 est la borne supérieure de I .

Exercice 4.3.3.

En reprenant les notations de l'exercice 4.1.3, déterminer si A possède une borne supérieure, ainsi qu'une borne inférieure.

Exercice 4.3.4.

On considère la relation d'ordre $|$ sur \mathbb{N} . Déterminer les ensembles des minorants et majorants des parties suivantes, puis dire si ces parties sont majorées, minorées, admettent un maximum, un minimum, une borne supérieure ou inférieure (que l'on déterminera le cas échéant).

1. $A = \{1\}$
2. $B = \{2, 3\}$
3. $C = \{2p + 1 \mid p \in \mathbb{N}\}$
4. $D = \{2p \mid p \in \mathbb{N}\}$

Proposition 4.3.5.

Soit $A \subset E$ et $M \in E$.

1. Si A admet une borne supérieure, alors $\sup A \preccurlyeq M \Leftrightarrow \forall x \in A \quad x \preccurlyeq M$.
2. ($M = \sup A$) si et seulement si M vérifie deux points :
 - (i) M majore A
 - (ii) si $x \in E$ et $x \prec M$, alors il existe $a \in A$ tel que $x \prec a \preccurlyeq M$.

Remarque 4.3.6.

L'idée est la suivante : si on peut « caser » un élément de E entre M et A , ce qui revient en fait à trouver un majorant de A plus petit que M , alors M n'est pas la borne supérieure de A : la borne supérieure « colle » à A .

Démonstration. 1. \Rightarrow : car $\sup A$ est un majorant de A .

\Leftarrow : car $\sup A$ est le plus petit majorant de A .

2. Remarquons qu'ici, $x \prec y$ signifie $x \preccurlyeq y$ et $x \neq y$. Par définition d'une borne supérieure, il suffit pour montrer cette équivalence de démontrer que le point (ii) équivaut à : M est le plus petit majorant de A . Supposons que nous avons (ii). Soit alors N un majorant de A , tel que $N \prec M$. Alors avec (ii), il existe $a \in A$ tel que $N \prec a$. Ceci est absurde car N majore A , donc $M \preccurlyeq N$: M est bien inférieur à tout majorant de A . Supposons réciproquement que M est le plus petit majorant de A . Soit $x \in E$ tel que $x \prec M$. Alors, x étant plus petit que M , x n'est pas un majorant de A . En prenant la négation de la phrase « x majore A », nous obtenons : il existe $a \in A$ tel que $x \prec a$. Mais si de plus M majore A , alors $a \preccurlyeq M$ et nous avons fini.

Ce dernier raisonnement sera très souvent utilisé dans les exercices. □

Théorème 4.3.7.

Si A possède un maximum (resp. minimum), alors A a une borne supérieure (resp. inférieure) et cette borne est justement le maximum (resp. le minimum) de A : $\sup A = \max A$ (resp. $\inf A = \min A$).

Démonstration.

On ne donne la démonstration que pour la borne supérieure (c'est la même pour la borne inférieure) : soit \mathcal{E} l'ensemble des majorants de A . Il faut montrer que \mathcal{E} a un plus petit élément. Par définition $\max A$ est un majorant de A , donc $\max A \in \mathcal{E}$. Soit $M \in \mathcal{E}$. M est plus grand que tout élément de A , or $\max A$ appartient à A donc $A \preccurlyeq M$, et ce pour tout M de \mathcal{E} : $\max A$ est donc un minortant de \mathcal{E} . De ces deux points on tire $\max A = \min \mathcal{E}$, et donc $\max A = \sup A$. □

4.4. Application aux fonctions réelles.**Définition 4.4.1.**

Soient A une partie de \mathbb{R} et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

- (i) On dit que f est *majorée* (resp. *minorée*) sur A si $f(A)$ l'est pour la relation naturelle sur \mathbb{R} , i.e. : $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in A \quad f(x) \leq M$ (resp. $M \leq f(x)$). Dans ce cas on dit que M est un *majorant* (resp. *minorant*) de f , ou que M *majore* (resp. *minore*) f .
- (ii) On dit que f est *bornée* si elle est majorée et minorée. Ceci est équivalent à : $|f|$ est majorée.



Un majorant ou minorant ne doit pas dépendre de la variable de la fonction ! Ainsi sur \mathbb{R}_+ , $x \mapsto x$ n'est pas un majorant de \sin , bien que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \sin x \leq x$. Un majorant est une **CONSTANTE**.

Définition 4.4.2.

Si l'ensemble $f(A)$ a un maximum (resp. un minimum), alors ce dernier est appelé le *maximum* (resp. *minimum*) de f sur A , et noté $\max_A f$ ou $\max_{x \in A} f(x)$ (resp. $\min_A f$ ou $\min_{x \in A} f(x)$). Ainsi $\max_A f(A) = \max_A f$. Un maximum ou minimum d'une fonction est donc un majorant ou minorant **ATTEINT**.

On appelle *extremum* de f tout minimum ou maximum de f .



Les extrema sont uniques mais peuvent être atteints plusieurs fois. Considérer par exemple les fonctions continues périodiques comme sin ou cos.

Exemple 4.4.3.

- $x \mapsto x^2$ admet un minimum mais pas de majorant sur \mathbb{R} .
- Arctan est majorée et minorée sur \mathbb{R} , mais n'admet ni minimum ni maximum.

Définition 4.4.4.

Si l'ensemble $f(A)$ admet une borne supérieure (resp. une borne inférieure), alors cette dernière est appelée la *borne supérieure* (resp. *inférieure*) de f sur A . On la note $\sup_A f$ ou $\sup_{x \in A} f(x)$ (resp. $\inf_A f$ ou $\inf_{x \in A} f(x)$). Ainsi $\sup f(A) = \sup_A f$.

Théorème 4.4.5.

Si f admet un maximum (resp. un minimum) sur A , alors f admet également une borne supérieure (resp. une borne inférieure) sur A , et $\sup_A f = \max_A f$ (resp. $\inf_A f = \min_A f$).

Exercice 4.4.6.

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \max(0, \text{Arctan}(x)) \end{aligned}$$

Déterminer les ensembles de majorants et de minorants de f , puis si f admet un maximum, un minimum, une borne supérieure ou inférieure (que l'on déterminera le cas échéant). Tracer l'allure de la fonction

5. Relation d'ordre naturelle sur \mathbb{N} .

La relation naturelle est la relation usuelle \leq .

Théorème 5.0.1.

Toute partie non vide de \mathbb{N} possède un plus petit élément.

On donne ici deux démonstrations de cette propriété. On remarquera que l'on utilise ici des récurrences et que l'on a montré le principe de récurrence en utilisant cette propriété : cette dernière est donc équivalente au principe de récurrence.

Démonstration.

Soit $A \subset \mathbb{N}$, tq $A \neq \emptyset$, et soit $a_0 \in A$. On suppose que A n'a pas de plus petit élément. Puisque $a_0 \in A$, a_0 ne peut pas être un minorant de A , sinon ce serait un minimum. Donc il existe $a_1 < a_0$ dans A . Mais de même, a_1 ne peut pas être un minorant, donc il existe $a_2 < a_1$ dans A . Par récurrence, on construit une suite d'éléments de A (a_n) tq pour tout n , $a_{n+1} < a_n$, ou encore $a_{n+1} \leq a_n - 1$, donc à nouveau par récurrence on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq a_0 - n$$

Cette proposition est en particulier vraie pour l'entier $a_0 + 1$, c'est-à-dire : $a_{a_0+1} \leq a_0 - a_0 - 1$. Mais ceci est absurde car $a_{a_0+1} \in \mathbb{N}$. \square

Démonstration.

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ l'assertion «toute partie de \mathbb{N} contenant l'entier n possède un plus petit élément». Montrons $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$ par récurrence forte.

- Toute partie de \mathbb{N} contenant l'entier 0 possède 0 pour plus petit élément. Donc on a clairement $P(0)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $k \leq n$, on a $P(k)$ et montrons $P(n+1)$.

Soit A une partie de \mathbb{N} contenant l'entier $n+1$. Alors ou bien A contient un entier k strictement inférieur à $n+1$, ou bien elle n'en contient pas.

- Dans le premier cas, on sait qu'on a $P(k)$, donc A admet un plus petit élément.
- Dans le second, cela signifie que $n+1$ est le plus petit élément de A . A admet donc un plus petit élément.

On a donc $P(n+1)$.

Donc P est héréditaire.

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$$

On en déduit le résultat :

Soit A une partie non vide de \mathbb{N} . Alors A possède un élément n , or on a $P(n)$, donc A possède un plus petit élément n . \square

Corollaire 5.0.2.

Toute partie non vide minorée (resp majorée) de \mathbb{Z} possède un plus petit (resp. grand) élément.

Démonstration.

Soit $A \subset \mathbb{Z}$ avec $A \neq \emptyset$ et m un minorant de A (resp. M un majorant de A). On pose $B = \{n - m \mid n \in A\}$ (resp. $B = \{M - n \mid n \in A\}$).

Alors B est une partie non vide de \mathbb{N} .

Donc B possède un plus petit (resp. plus grand) élément. On en déduit le résultat. \square

Exercice 5.0.3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente (i.e. il existe $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $A^p = 0$).

Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^{n_0-1} \neq 0$ et $A^{n_0} = 0$.

Cet entier n_0 s'appelle *l'indice de nilpotence* de A .

6. Relation d'ordre naturelle sur \mathbb{R} .

On admettra l'existence de \mathbb{R} et les propriétés usuelles sur \mathbb{R} .

6.1. Opérations usuelles.

Théorème 6.1.1 (Compatibilité de la relation d'ordre avec l'addition et la multiplication).

On a, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$$

et

$$(x \leq y \text{ et } 0 \leq z) \Rightarrow xz \leq yz.$$

On en déduit les règles usuelles de manipulation des inégalités, pour tous $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$:

$$(x \leq y \text{ et } x' \leq y') \Rightarrow x + x' \leq y + y'$$

$$(0 \leq x \leq y \text{ et } 0 \leq x' \leq y') \Rightarrow xx' \leq yy'$$

$$x \leq y \Rightarrow -y \leq -x$$

$$0 < x \leq y \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}.$$

Tout cela reste vrai avec des inégalités strictes.

Définition 6.1.2.

On appelle droite achevée l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, où $-\infty$ et $+\infty$ sont deux éléments distincts n'appartenant pas à \mathbb{R} . De plus, on prolonge l'ordre sur \mathbb{R} , l'addition et la multiplication de façon à avoir les propriétés suivantes :

- (i) Prolongement de l'ordre : $\forall x \in \mathbb{R} \quad -\infty < x < +\infty$.
- (ii) Prolongement de l'addition : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x + +\infty = +\infty$, $x + (-\infty) = -\infty$, $+\infty + +\infty = +\infty$, $-\infty + (-\infty) = -\infty$.
- (iii) Prolongement de l'opposé : $-(+\infty) = -\infty$, $-(-\infty) = +\infty$.
- (iv) Prolongement de la multiplication : pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $+\infty \times x = +\infty$ si $x > 0$, $+\infty \times x = -\infty$ si $x < 0$ et $(-\infty) \times x = -(+\infty \times x)$.
- (v) Prolongement de l'inverse : $\frac{1}{+\infty} = 0$ et $\frac{1}{-\infty} = 0$.



Il y a des formes indéterminées : $+$ et \times ne sont pas des lois de composition interne sur $\overline{\mathbb{R}}$.

6.2. Propriété de la borne supérieure.

Cette propriété fait partie des propriétés inhérentes à \mathbb{R} de par sa construction.

Théorème 6.2.1.

Toute partie non vide majorée (resp. minorée) de \mathbb{R} admet une borne supérieure (resp. inférieure) dans \mathbb{R} .

Remarque 6.2.2.

C'est un résultat d'existence : il assure l'existence d'un objet sans donner sa valeur. Ce théorème est tout à fait inutile pour calculer une borne sup. Au mieux, il permet de montrer que la borne sup

d'un ensemble existe, et donc on peut en parler (ce qui est interdit sinon).

Il est cependant fondamental dans un grand nombre de résultats théoriques qui servent tous les jours : TVI, théorèmes de la limite monotone, de Rolle, TAF, construction de l'intégrale ...

Corollaire 6.2.3.

Toute partie de \mathbb{R} admet une borne supérieure (resp. inférieure) dans \mathbb{R} .

Démonstration.

Soit A une partie de \mathbb{R} . Et posons $A' = A \cap \mathbb{R}$.

- Si $+\infty \in A$, alors A admet $+\infty$ pour maximum.
- Dans le cas contraire, on a les possibilités suivantes :
 - Si A' est vide, alors A admet $-\infty$ pour borne supérieure.
 - Si A' est non vide alors on a deux possibilités :
 - Si A' est non majorée dans \mathbb{R} , alors A admet $+\infty$ comme borne supérieure.
 - Si A' est majorée dans \mathbb{R} , alors d'après la propriété de la borne supérieure, elle admet une borne supérieure M dans \mathbb{R} . Cette borne supérieure est aussi une borne supérieure de A dans \mathbb{R} .

□

Remarque 6.2.4.

Dans le cas d'une fonction réelle (définie sur un ensemble non vide), l'image de cette fonction est forcément non vide.

Ainsi, une fonction réelle majorée admet une borne supérieure et une fonction réelle minorée admet une borne inférieure.

On a aussi une caractérisation fort utile des bornes supérieures et inférieures.

Proposition 6.2.5. 1. Soit A une partie non vide, majorée de \mathbb{R} . Alors, $a \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure de A si et seulement si $\forall x \in A, x \leq a$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \cap]a - \varepsilon, a]$.

2. Soit A une partie non vide, minorée de \mathbb{R} . Alors, $a \in \mathbb{R}$ est la borne inférieure de A si et seulement si $\forall x \in A, x \geq a$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \cap [a, a + \varepsilon[$.

Démonstration.

On ne démontre que la partie concernant les bornes supérieures, l'autre en découle immédiatement.

Supposons d'abord que a est la borne supérieure de A . Alors, a majore A et donc $\forall x \in A, x \leq a$. Soit $\varepsilon > 0$, $a - \varepsilon < a$ et $a - \varepsilon$ n'est donc pas un majorant de A . Il existe donc $x \in A$ vérifiant $a - \varepsilon < x$ et, comme a majore A , on a $x \leq a$, ce qui permet de conclure pour cette implication.

Réciproquement, si a vérifie : $\forall x \in A, x \leq a$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \cap]a - \varepsilon, a]$. Ainsi, a est bien un majorant de A . Montrons que c'en est le plus petit. Sinon, il existerait $b \in \mathbb{R}$ majorant A , avec $b < a$. Alors, $]b, a[\cap A = \emptyset$, ce qui contredit l'hypothèse. a est donc la borne supérieure de A . □

Exercice 6.2.6.

Soit (u_n) une suite réelle croissante, soit $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

En utilisant la définition de limite vue en terminale, montrer que $\ell = \sup \{ u_n \mid n \in \mathbb{N} \}$.

6.3. Caractère archimédien de \mathbb{R} et partie entière.

a. Propriété d'Archimède.

Proposition 6.3.1.

Soient deux réels x et y tels que $x > 0$. Alors il existe un entier N tel que $Nx \geq y$.

• Slogan : « quelle que soit la taille de nos enjambées, on peut aller au bout du monde si on fait assez de pas ».

Démonstration.

Soit $A = \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$. On souhaite montrer que A n'est pas majoré et l'on raisonne par l'absurde. Si A est majoré, comme $0 = 0x \in A$, A est aussi non vide et par la propriété de la borne supérieure, A admet une borne supérieure, que nous noterons α . Remarquons que $\alpha - x < \alpha$, donc $\alpha - x$ ne majore pas A , donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha - x < nx$. On a alors $\alpha < (n+1)x$, ce qui contredit le fait que α majore A . Ainsi, A n'est pas majoré. □

Exercice 6.3.2.

En revenant aux définitions vues en terminale, montrer que $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

b. Partie entière.**Définition 6.3.3.**

Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier, noté $\lfloor x \rfloor$ (parfois $E(x)$ ou $\mathbb{E}(x)$) et que l'on appelle *partie entière* de x , vérifiant : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Démonstration.

Soit $A = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$.

La propriété d'Archimède implique qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \times 1 \geq -x$, donc $-k \leq x$, donc $-k \in A$. Ainsi, A est non vide.

Une seconde fois, la propriété d'Archimède implique qu'il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $\ell \times 1 \geq x$. Ainsi, si $k \in A$, alors $k \leq x \leq \ell$, donc A est majorée par ℓ .

Ainsi, A est une partie non vide et majorée de \mathbb{Z} , donc A possède un plus grand élément, noté n . On a alors $n \leq x$ et comme $n + 1 > n$, $n + 1 \notin A$ donc $n + 1 > x$, d'où l'existence.

Soit N un entier vérifiant $N \leq x < N + 1$. Alors $N \in A$. De plus, si $k \in A$, alors $k \leq x < N + 1$ donc $k < N + 1$ donc $k \leq N$. N est donc bien le plus grand élément de A , d'où l'unicité. \square

Remarque 6.3.4.

On vient de montrer que $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x . On peut très bien définir $\lfloor x \rfloor$ de cette manière, et voir la définition 6.3.3 comme une caractérisation de $\lfloor x \rfloor$.

Remarque 6.3.5.

Ce résultat permet de montrer que si deux réels x et y vérifient $y - x > 1$, il existe un entier n tel que $x < n < y$: il suffit de prendre $n = \lfloor x \rfloor + 1$. On a alors $x < n$ et aussi $n \leq x + 1 < x + (y - x) = y$.



Ne pas confondre la partie entière avec la troncature. Ainsi $\lfloor -3, 2 \rfloor = -4$ et non -3 !

c. Densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} .**Théorème 6.3.6.**

Tout intervalle ouvert non vide rencontre \mathbb{Q} . Autrement dit, soient x, y des réels tels que $x < y$; alors il existe un nombre rationnel q tel que $x < q < y$.

Démonstration.

D'après la propriété d'Archimède, on peut trouver un entier naturel non nul r tel que $r(y - x) > 1$. D'après la remarque précédente, il existe un entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $rx < p < ry$. En posant $q = p/r$ on a le résultat. \square

Corollaire 6.3.7.

Tout intervalle ouvert non vide rencontre $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Autrement dit, soient x, y des réels tels que $x < y$; alors il existe un nombre irrationnel q tel que $x < q < y$.

Démonstration.

En vertu du théorème précédent, il existe un rationnel r non nul entre $x\sqrt{2}$ et $y\sqrt{2}$. En effet, si $0 \leq x < y$, on a $r > x\sqrt{2}$ donc $r \neq 0$, si $x < y \geq 0$, même raisonnement, et si $x < 0 < y$, on applique le théorème précédent à 0 et y par exemple pour obtenir r . Il suffit alors de prendre $q = \frac{r}{\sqrt{2}}$. q est forcément irrationnel, sinon $\sqrt{2}$ serait rationnel. \square

d. Approximations décimales.**Définition 6.3.8.**

Soit x un réel et ε un réel strictement positif. On appelle *valeur approchée de x à la précision ε* tout réel y tel que $|x - y| \leq \varepsilon$. Si $y \leq x$ on dit que y est une valeur approchée *par défaut*, si $y \geq x$, on dit que y est une valeur approchée *par excès*.

- Souvent on cherche des valeurs approchées qui soient des décimaux.

Théorème 6.3.9.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout entier n on note $a_n = \frac{\lfloor 10^n a \rfloor}{10^n}$ et $a'_n = \frac{\lfloor 10^n a \rfloor + 1}{10^n}$. Alors a_n et a'_n sont respectivement des valeurs approchées par défaut et excès de a à 10^{-n} près, qui de plus sont des décimaux.

Démonstration.

Évident par propriété de la partie entière. \square

Exercice 6.3.10.

Calculer une approximation décimale de $1/7$ à 10^{-5} près.

Ce dernier résultat a pour corollaire le résultat fondamental suivant :

Corollaire 6.3.11.

Tout réel est limite d'une suite de rationnels.

Exercice 6.3.12.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $\forall q \in \mathbb{Q}, f(q) = q$.

Quelle est cette fonction f ?

6.4. Intervalles de \mathbb{R} .

Il existe neuf types d'intervalles dans \mathbb{R} (avec $a, b \in \mathbb{R}$) :

1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$;
2. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$;
3. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$;
4. $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$;
5. $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$;
6. $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$;
7. $] - \infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$;
8. $] - \infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$;
9. $] - \infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Les intervalles de types 1 à 4 sont dits *bornés*. Ceux de types 1, 5, 7 et 9 sont dits *fermés*. Ceux de types 4, 6 et 8 et 9 sont dits *ouverts*. Ceux de type 2 et 3 sont dits *semi-ouverts* ou *semi-fermés*. Seuls les intervalles de type 1 sont à la fois fermés et bornés : on dit que ce sont des *segments*.

Un intervalle peut être *vide* ou *réduit à un point* (dans le cas 1 si $a = b$). Un intervalle qui n'est ni vide ni réduit à un point est dit *non trivial*.

Énoncer tous ces intervalles est fastidieux : on préfère une définition unifiée d'intervalle qui les

- (ii) Pour tous $u, v \in I$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :
 $u \leq t \leq v \Rightarrow t \in I$.

définit tous d'un coup :

Théorème 6.4.1.

Soit I une partie de \mathbb{R} . Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) I est un intervalle de \mathbb{R} ;

Démonstration.

C'est trivial si $I = \emptyset$ (on a alors (ii) et (i) car $I = [0, -1]$).

(i) \Rightarrow (ii) Facile et connu.

(ii) \Rightarrow (i) On distingue plusieurs cas :

- Supposons d'abord que I majoré et minoré. On pose $a = \inf I$ et $b = \sup I$. Alors pour tout $x \in I$, on a $x \leq b$ et $x \geq a$, donc $x \in [a, b]$, et donc $I \subset [a, b]$ (1).
 - Si $a = b$, alors $I = \{a\} = [a, a]$ (car I non vide).
 - Si $a < b$, alors soit $x \in]a, b[$. Par définition de la borne inf il existe $u \in I$ tel que $a \leq u < x$. De même il existe $v \in I$ tel que $x < v \leq b$. Alors $x \in [u, v]$ et donc $x \in I$. Donc $]a, b[\subset I$ (2). Ainsi on a la chaîne d'inégalité : $]a, b[\subset I \subset [a, b]$, donc I est de de l'un des types précédents. On détermine précisément lequel en regardant juste si a et b appartiennent ou pas à I .
- Si I n'est pas majoré mais est minoré, alors I n'a pas de sup, donc $I \subset [a, +\infty[$, et comme toute à l'heure, $]a, +\infty[\subset I$. On finit comme précédemment.
- Si I n'est pas minoré mais majoré : idem avec $] - \infty, b[$.
- Si I n'est ni majoré ni minoré, alors $I = \mathbb{R}$.

□