Devoir surveillé n° 05
– Version 1 –
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD : fonctions contractantes.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ telle que, pour tout $x, x' \in [a, b]$ avec $x \neq x'$, on a :

$$|f(x) - f(x')| < |x - x'|.$$

1) Montrer que f est continue sur $[a, b]$.

2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[a, b]$.

II. Suite de Fibonacci.

La suite (u_n) (**suite de Fibonacci**) est définie par

$$u_0 = 1 \;; \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \;.$$

1) Résoudre cette relation de récurrence et donner une expression de u_n en fonction de n.

Dans toute la suite on n'utilisera plus les résultats de la question précédente.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{N}^*$.

3) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n$. Que peut-on en déduire quant à la limite de (u_n) ?

5) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^n$.
Indication : On pourra introduire la suite $a_n = u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2$ et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = -a_n$.

6) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

7) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, puis $x_n = v_{2n}$ et $y_n = v_{2n+1}$.

a) Démontrer la relation $v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{v_n}$ pour tout entier naturel n.

b) Démontrer la relation $v_{n+2} - v_n = \dfrac{(-1)^n}{u_n u_{n+2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) En déduire que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

d) En déduire que la suite (v_n) converge. Quelle est sa limite ?

III. Entiers de Gauss.

On définit l'ensemble des *entiers de Gauss* : $\mathbb{Z}[i] = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z} \}$.
Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, on définit $N(a + ib) = a^2 + b^2$.

1) Montrer que $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ est un anneau commutatif.

On rappelle qu'un élément $z \in \mathbb{Z}[i]$ est inversible s'il existe $y \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $zy = 1$.

2) **a)** Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{Z}[i]$, $N(xy) = N(x)N(y)$.

b) En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{Z}[i]$, z est inversible si et seulement si $N(z) = 1$.

c) Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$?

On rappelle aussi que, si $x, y \in \mathbb{Z}[i]$, alors x divise y (ou est un diviseur de y) s'il existe $z \in \mathbb{Z}[i]$ vérifiant $y = zx$. On appelle *élément irréductible* de $\mathbb{Z}[i]$ tout élément de $\mathbb{Z}[i]$ qui ne peut s'écrire comme produit de deux éléments non inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

3) **a)** Soit $z \in \mathbb{Z}[i]$, supposons que $N(z)$ est un nombre premier. Montrer que z est irréductible.

b) La réciproque est elle vraie ?

c) Soit p un nombre premier. Montrer que p est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$ si et seulement si p ne s'écrit pas comme la somme de carrés de deux entiers.

d) Déterminer l'ensemble des diviseurs de $1 - 3i$.

4) Division euclidienne sur $\mathbb{Z}[i]$.

a) Montrer que tout nombre réel est à distance au plus $\dfrac{1}{2}$ d'un entier.

En déduire que si $z \in \mathbb{C}$, on peut trouver $q \in \mathbb{Z}[i]$ vérifiant $|z - q| < 1$.

b) En déduire que, pour tout $a, b \in \mathbb{Z}[i]$, avec $b \neq 0$, il existe $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ vérifiant $a = bq + r$ ainsi que $N(r) < N(b)$.

Indication : On pourra considérer $\dfrac{a}{b}$.

c) Y a-t-il unicité de cette écriture ?

— FIN —

Devoir surveillé n° 05
– Version 2 –
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Entiers de Gauss.

On définit l'ensemble des *entiers de Gauss* : $\mathbb{Z}[i] = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z} \}$.
Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, on définit $N(a + ib) = a^2 + b^2$.

1) Montrer que $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ est un anneau commutatif.

On rappelle qu'un élément $z \in \mathbb{Z}[i]$ est inversible s'il existe $y \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $zy = 1$.

2) **a)** Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{Z}[i]$, $N(xy) = N(x)N(y)$.

b) En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{Z}[i]$, z est inversible si et seulement si $N(z) = 1$.

c) Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$?

On rappelle aussi que, si $x, y \in \mathbb{Z}[i]$, alors x divise y (ou est un diviseur de y) s'il existe $z \in \mathbb{Z}[i]$ vérifiant $y = zx$. On appelle *élément irréductible* de $\mathbb{Z}[i]$ tout élément de $\mathbb{Z}[i]$ qui ne peut s'écrire comme produit de deux éléments non inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

3) **a)** Soit $z \in \mathbb{Z}[i]$, supposons que $N(z)$ est un nombre premier. Montrer que z est irréductible.

b) La réciproque est elle vraie ?

c) Soit p un nombre premier. Montrer que p est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$ si et seulement si p ne s'écrit pas comme la somme de carrés de deux entiers.

d) Déterminer l'ensemble des diviseurs de $1 - 3i$.

4) Division euclidienne sur $\mathbb{Z}[i]$.

a) Montrer que tout nombre réel est à distance au plus $\frac{1}{2}$ d'un entier.
En déduire que si $z \in \mathbb{C}$, on peut trouver $q \in \mathbb{Z}[i]$ vérifiant $|z - q| < 1$.

b) En déduire que, pour tout $a, b \in \mathbb{Z}[i]$, avec $b \neq 0$, il existe $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ vérifiant $a = bq + r$ ainsi que $N(r) < N(b)$.
Indication : On pourra considérer $\frac{a}{b}$.

c) Y a-t-il unicité de cette écriture ?

II. Bijections bicontinues.

Le but de cet exercice est de trouver toutes les bijections *bicontinues* (*i.e.* les bijections continues à réciproque continue) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x = \frac{1}{2}\left(\varphi(x) + \varphi^{-1}(x)\right).$$

Soit φ une solution de ce problème. On pose $h = \varphi - \mathrm{Id}$.

1) Montrer que $\varphi \circ \varphi = 2\varphi - \mathrm{Id}$.

2) Montrer que φ ne peut pas être strictement décroissante, et en déduire qu'elle est strictement croissante en le justifiant avec précision.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi^n(x) = nh(x) + x$, et en déduire les limites quand n tend vers $+\infty$ et $-\infty$ de la suite $\left(\dfrac{\varphi^n(x)}{n}\right)_{n\in\mathbb{Z}^*}$, pour x fixé.

On suppose dans la suite que h est non nulle. Pour fixer les idées, supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $h(a) > 0$.

4) Établir que la suite $(\varphi^n(a))_{n\in\mathbb{Z}}$ est croissante et tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$ et vers $-\infty$ quand $n \to -\infty$.

5) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $\varphi^p(a) \leqslant x < \varphi^{p+1}(a)$.

6) En tirer que h est constante.

7) Conclure.

III. Limites inférieures et supérieures d'une suite bornée.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note U_n l'ensemble $\{\, u_k \mid k \in \mathbb{N},\ k \geqslant n \,\}$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que U_n possède une borne inférieure (notée m_n) ainsi qu'une borne supérieure (notée M_n).

b) Montrer que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $m_n \leqslant u_n \leqslant M_n$.

c) En déduire que $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et que : $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} M_n$.

On appelle alors *limite inférieure* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$, le réel $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n$. De même, on appelle *limite supérieure* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$, le réel $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n$. Comme on vient de le voir : $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$. L'intérêt de ces notions est que toute suite bornée possède une limite inférieure et une limite supérieure, alors que toute suite bornée ne possède pas forcément une limite au sens usuel.

2) **a)** On suppose que $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$. Montrer qu'alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$.

b) Réciproquement, montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Indication : Ne pas hésiter à utiliser des ε.

3) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une nouvelle suite réelle bornée. On suppose que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $n \geqslant N$ et pour tout $k \geqslant n$ on a $m_n \leqslant v_k$.

b) En déduire que $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \liminf\limits_{n\to+\infty} v_n$.

On montrerait de même l'inégalité $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \limsup\limits_{n\to+\infty} v_n$.

— FIN —