Chap. XXIII : Probas :

1 - Événements, probas :

Déf : Univers : On appelle univers tout ensemble non vide = Ω.

Au programme en sup : Ω fini.

en spé : Ω peut être ∞.

On appelle <u>événement</u> toute partie de Ω.

On appelle <u>événement élémentaire</u> tout singleton de $\mathcal{P}(\Omega)$.

L'événement $\emptyset$ est appelé év. im<u>possible</u>.

L'év. Ω est appelé év. certain ou sûr.

⚠ ne pas confondre "impossible" et "de proba. nulle".

<u>Ex</u>: expérience: tirer 1 dé à 6 faces.

Je choisis $\Omega = [\![-5, 10]\!]$.

$[\![-5, 0]\!]$ est 1 év. (c'est 1 partie de Ω).

il n'est pas vide, donc pas impossible.

La proba que le résultat soit ds $[\![-5, 0]\!]$ est qd m̂ nulle.

On dit que $[\![-5, 0]\!]$ est "presque" impossible

ou "quasi" impossible.

Si A et B sont 2 év, on appelle

- év. contraire de A l'év. $\bar{A}$ ie $(\complement_\Omega A)$

- conjonction de A et B l'év. $A \cap B$
- disjonction de A et B l'év. $A \cup B$.

On dit que A et B sont <u>incompatibles</u> si $A \cap B = \emptyset$.

Si $(A_i)_{i \in I}$ est 1 famille d'év. indicée par un ensemble I, les A_i sont dits <u>mutuellement incompatibles</u> si leur conjonction $\bigcap_{i \in I} A_i$, est impossible, i.e. $\emptyset$.

Ils sont dits 2 à 2 incompatibles si $\forall i, j \in I$

tq $i \neq j$ on a $A_i \cap A_j = \emptyset$

Rq : 2 à 2 incompatibles $\Rightarrow$ mutuellement incompatibles.

$\not\Leftarrow$

<u>Ex</u> : on tire 1 dé à 6 faces.

$\Omega = [\![1, 6]\!]$,

$A_1 =$ le lancer est pair

$A_2 = \{1, 2, 3\}$

$A_3 =$ le lancer est 1 multiple de 3.

$A_1 \cap A_2 = \{2\}$, $A_1 \cap A_3 = \{6\}$, $A_2 \cap A_3 = \{3\}$

Ces év. ne sont pas 2 à 2 incompatibles.

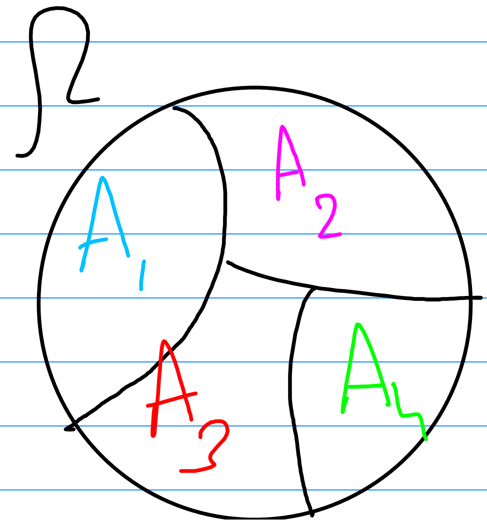
Mais $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$.

Les év. sont mutuellement incompatibles.

Si les év. A_i sont 2 à 2 incompatibles, leur réunion est dite <u>disjointe</u>, et notée $\bigsqcup_{i \in I} A_i$

ou $\coprod_{i \in I} A_i$.

C - <u>Systèmes complets</u> :



Déf : On appelle syst. cplet d'événements de Ω "" toute famille d'év $(A_i)_{i \in I}$

tq :

- $\forall i, j \in I$, $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ (les év. st 2 à 2 incompatibles)
- $\displaystyle\bigsqcup_{i \in I} A_i = \Omega$

Rq : "syst. cplet" = "partition"

presque... en maths, ds la déf de partition, il y a 1 3ème pt : $A_i \neq \emptyset$

Ex : • Si A est 1 év., $(A, \overline{A})$ est 1 syst. cplet.

• On a 1 jeu de 32 cartes.

$A_1 = \{$la carte est 1 figure$\}$

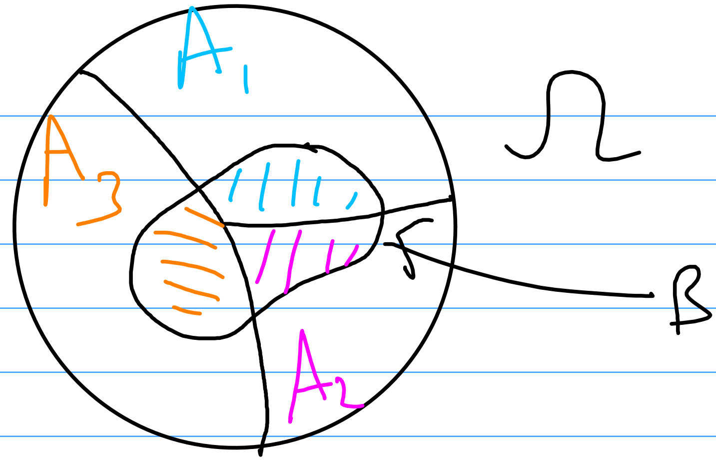
$A_2 = \{$la carte est rouge et n'est pas 1 figure$\}$

$A_3 = \{$la carte est noire et n'est pas 1 figure$\}$

(A_1, A_2, A_3) est 1 syst. cplet.

• $(A, A, \overline{A})$ n'est pas 1 syst. cplet.

Prop. 1.1.9 :



Soit $(A_i)_{i\in I}$ 1 syst. cplet d'év. de Ω, et B un év.

Alors :

$$B = \bigsqcup_{i\in I} (B \cap A_i)$$

Dém : $B = B \cap \Omega$ (car $B \subset \Omega$)

$$= B \cap \left(\bigsqcup_{i\in I} A_i \right)$$

$$\underset{\text{distr.}}{=} \bigsqcup_{i\in I} (B \cap A_i)$$

1.2 : Esp. probabilisés finis :

Déf : Soit Ω un univers fini.

On appelle probabilité sur Ω toute application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ ds $\mathbb{R}$ tq :

1) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) \in [0,1]$
2) $P(\Omega) = 1$
3) Si A et B sont 2 év. incompatibles, $P(A \sqcup B) = P(A) + P(B)$

Si $P(A) = 0$, on dit que A est négligeable ou quasi impossible.

Si $P(A) = 1$, on dit que A est presque sûr ou quasi sûr, ou presque certain...

Rq : Si Ω est ∞, petit pb : P ne peut pas être définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$. On définit P sur 1 partie des parties, appelée 1 tribu (RV en spé).

- pourquoi on a mis $P(\Omega) = 1$ ds la déf. mais pas $P(\emptyset) = 0$?

on essaie tjrs de donner les déf. les + légères possibles, or ici : $P(\emptyset) = 0$ découle de 2) et 3), donc pas la peine de le mettre.

⚠ si A est 1 év. sûr $\iff A = \Omega$

presque-sûr $\iff P(A) = 1$.

ex : 1 urne avec 3 boules : 1, 2, 3.
On en tire 2 sans remise. Le tirage est 1 couple (i, j) avec $i \neq j$.

univers : $[\![1,3]\!]^2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

$P = 1/6$

$P = 0$

On pose :

$$P(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1/6 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

c'est 1 probabilité.

$$P(\Omega) = P(\{(1,1)\} \sqcup \{(1,2)\} \sqcup \dots) = \sum P(i,j)$$

$$= 0 + 0 + 0 + \frac{1}{6} \times 6 = 1.$$

$$A = \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,2),(3,1)\}$$

$A \neq \Omega$ donc A n'est pas sûr.

Mais $P(A) = 1$ donc A est quasi sûr.

b) <u>proba uniforme</u> :

<u>Déf</u> : Ω un univers fini, <u>non vide</u>

considérons :

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$$
$$A \longmapsto \frac{\# A}{\# \Omega}.$$

Alors P est 1 probabilité sur Ω, appelée probabilité uniforme (toutes év. él. ont la même proba).

Démo : 1) Si $A \subset \Omega$, $0 \leq \# A \leq \# \Omega$

donc : $0 \leq \dfrac{\# A}{\# \Omega} \leq 1$

2) $P(\Omega) = \dfrac{\# \Omega}{\# \Omega} = 1$

3) Soit A et B 2 év. incompatibles.

$$P(A \sqcup B) = \frac{\#(A \sqcup B)}{\# \Omega}$$

$$= \frac{\# A + \# B}{\# \Omega} = P(A) + P(B).$$

<u>Ex.</u> Soit $\Omega = [\![1,n]\!]$.

et : $P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$

$$A \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \in A \\ 0 & \text{si } 1 \notin A. \end{cases}$$

1) Mq. P est 1 proba.

2) Quelle est la situation modélisée ?

1) • $\forall A$, $P(A) \in [0,1]$.

• $1 \in \Omega$ donc $P(\Omega) = \underline{1}$

• Soit A et B 2 év. incompatibles.

3 cas possibles :

(i) $1 \notin A$ et $1 \notin B$: $P(A) = 0$, $P(B) = 0$

et $1 \notin A \cup B$

donc $0 = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

(ii) $1 \in A$ et $1 \notin B$: donc $1 \in A \cup B$

$P(A \cup B) = 1$

$= 1 + 0 = P(A) + P(B)$

(iii) $1 \notin A$ et $1 \in B$: idem.

On ne peut pas avoir $1 \in A$ et $1 \in B$ car

$A \cap B = \emptyset$.

P est bien 1 proba.

2) Ce n'est pas la proba uniforme,

par ex $P(\{n\}) = 0 \neq \frac{1}{n}$.

donc la boule n'est pas tirée "au hasard".

(sauf si $n=1$ ...)

La situation modélisée est celle où le gars qui tire triche et prend toujours la boule 1.

ici : $P(A)$ représente la probabilité que la boule tirée soit de A.

Interro 16 : ex. 4 : E sev, F et G sev en somme directe.

$\mathcal{F}$: base finie de F

$\mathcal{G}$: ——— de G.

Donner 1 base de F+G et la dimension.

base : $\mathcal{F} \uplus \mathcal{G}$.

$\mathcal{F} = (f_1 \dots f_n)$, $\mathcal{G} = (g_1 \dots g_p)$

• Mq. la famille $\mathcal{F} \uplus \mathcal{G}$ est libre.

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p$ tq.

$$\sum \lambda_i f_i + \sum \mu_j g_j = 0$$

donc $$\underbrace{\sum \lambda_i f_i}_{\in F} = \underbrace{- \sum \mu_j g_j}_{\in G} \in F \cap G$$

$F \cap G = \{0\}$ donc : $\sum \lambda_i f_i = \sum \mu_j g_j = 0$

$(f_1, \dots, f_n)$ libre donc $\forall i \; \lambda_i = 0$

De même, $\forall j$, $\mu_j = 0$

Ainsi $\mathcal{F} \uplus \mathcal{G}$ est libre.

• Mq. Si $x \in F+G$, $\exists \lambda_i, \mu_j$ tq.

$$x = \sum \lambda_i f_i + \sum \mu_j g_j$$

(ce qui prouve que $\mathcal{F} \uplus \mathcal{G}$ est gén. de $F+G$)

Soit $x \in F+G$, $\exists y \in F, z \in G$ tq.

$$x = y + z$$

$y \in F = \text{vect}(f_1 \dots f_n)$

donc $\exists \lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{K}$ tq.

$$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$$

de m. $\exists \mu_1 \dots \mu_p$ tq.

$$z = \sum \mu_j g_j$$

donc $x = \sum \lambda_i f_i + \sum \mu_j g_j$