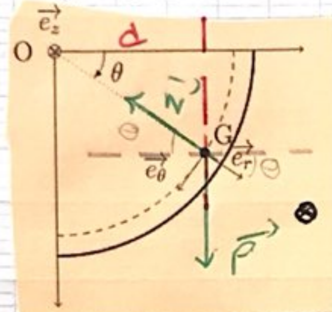
THEOREME du MOMENT CINETIQUE

Exercice 1

Referentiel : $\mathcal{R}$ Galileen
Systeme : L'enfant $G(m)$
Forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$
la reaction $\vec{N}$

1. Schéma



2. Theoreme du moment cinetique

- Le moment cinetique $\vec{L_O} = \vec{OG} \wedge m\vec{v}$

dans la base polaire $\vec{L_O} = r\vec{e_r} \wedge mr\dot{\theta}\vec{e_\theta} = mr^2\dot{\theta}\vec{e_z}$

- La derivée : $\frac{d\vec{L_O}}{dt} = mr^2\ddot{\theta}\vec{e_z}$ $\vec{e_z}$ est un vecteur fixe

- Le moment des forces

$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{N}) = \vec{OG} \wedge \vec{N} = \vec{0}$ C'est pour cela que nous avons choisi O

$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \vec{OG} \wedge m\vec{g}$

$= r\vec{e_r} \wedge mg(\cos\theta\,\vec{e_\theta} + \sin\theta\,\vec{e_r})$

$= mrg\cos\theta\,\vec{e_z}$

ou avec le bras de levier : $d = r\cos\theta$
+ regle de la main droite

Theoreme $\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O$

Projection sur $\vec{e_z}$: $mr^2\ddot{\theta} = mrg\cos\theta$

Soit $\boxed{\ddot{\theta} - \frac{g}{r}\cos\theta = 0}$

La vitesse

on multiplie par $\dot{\theta}$: $\ddot{\theta}.\dot{\theta} - \frac{g}{r}\cos\theta.\dot{\theta} = 0$

Soit $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{g}{r}\sin\theta\right)$

d'où $\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{r}\sin\theta + K$

Conditions initiales : à $t = 0$ $\theta = \theta_0$ $\dot{\theta} = 0$

d'où $\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{r}(\sin\theta - \sin\theta_0)$

or $\boxed{\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e_\theta} = \sqrt{2gr(\sin\theta - \sin\theta_0)}\,\vec{e_\theta}}$

3. Vitesse maximale

$v = v_{max}$ si $\theta = 90°$ $(\sin\theta = 1)$

$\boxed{v_{max} = 6{,}0 \text{ m/s} = 22 \text{ km/h}}$

La valeur est élevée mais on n'a pas pris en compte les frottements.

Exercice 2

Referentiel : $\mathcal{R}$ Galileen

Systeme : $M(m)$

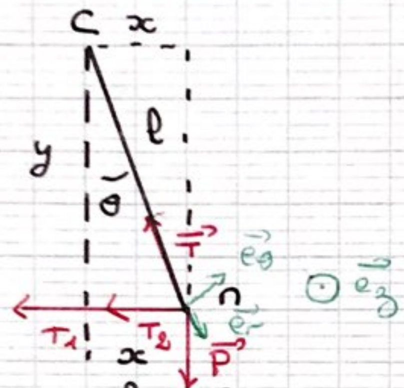
Forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$

la tension du fil $\vec{T}$

la tension du ressort 1 $\vec{T_1}$

la tension du ressort 2 $\vec{T_2}$

Schema



$x = l \sin\theta$; $y = l \cos\theta$

Loi : (On choisit le point C pour le theoreme du moment cinetique pour eliminer $\vec{T}$) ← normalement en vert

Theoreme du moment cinetique

. Le moment cinetique en C : $\vec{L_C} = \vec{CM} \wedge m\vec{v}$

$\vec{L_C} = l\vec{e_r} \wedge l\dot{\theta}\vec{e_\theta} = ml^2\dot{\theta}\vec{e_z}$

. La derivée : $\frac{d\vec{L_C}}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\vec{e_z}$ le vecteur $\vec{e_z}$ est un vecteur fixe

. Le moment des forces

$\vec{\mathcal{M}}_{T/C} = \vec{0}$ $\vec{T}$ et $\vec{CM}$ sont colineaire

$\vec{\mathcal{M}}_{P/C} = \vec{CM} \wedge m\vec{g} = -mgx\vec{e_z}$ par le bras de levier et main droite !

$= -mgl\sin\theta\,\vec{e_z}$

Pour la tension des ressorts

$\vec{T_1} = -k(\vec{AM} - \vec{AM_0})$ → Δl longueur du ressort - longueur à vide à partir du point fixe A vers le point mobile M

$= -k\,\vec{M_0M}$

$\vec{T_2} = -k(\vec{BM} - \vec{BM_0})$

$= -k\vec{M_0M} = \vec{T_1}$

$\vec{\mathcal{M}}_{T_1,T_2/C} = 2\,\vec{CM} \wedge (-k\vec{M_0M})$ $\qquad M_0M = x$

$= -2xky\,\vec{e_z}$ par le bras levier

$= -2\ell^2 k\cos\theta\sin\theta\,\vec{e_z}$

. Le théorème $\frac{d\vec{L_C}}{dr} = \vec{\mathcal{M}_C}$

Projection sur $\vec{e_z}$: $m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta - 2\ell^2 k\cos\theta\sin\theta$

$\ddot{\theta} = -\left(\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}\cos\theta\right)\sin\theta$

si il y a de petites oscillations (logique si on reste sur l'axe Ox) $\cos\theta \simeq 1$

$\sin\theta \simeq \theta$

d'où $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ avec $\boxed{\begin{aligned}\omega_0^2 &= \omega_1^2 + \omega_2^2 \\ &= \sqrt{g/L} + \sqrt{2k/m}\end{aligned}}$

Exercice 3

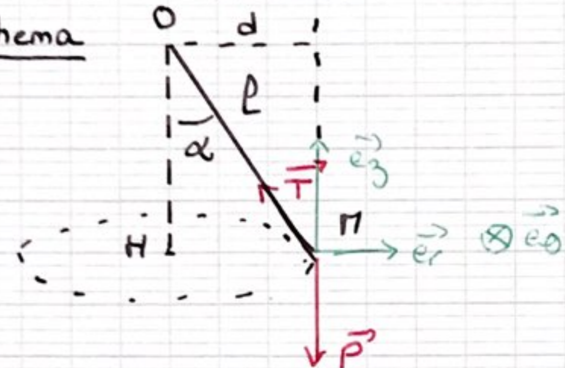
Referentiel : $\mathcal{R}$ Galileen

Systeme : $M(m)$

Forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$

la tension $\vec{T}$

Schema



1. Loi : Theoreme du moment cinetique en O

. Le moment : $\vec{L_O} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$

$\vec{L_O} = \ell(\sin\alpha\,\vec{e_r} - \cos\alpha\,\vec{e_z}) \wedge m\ell\sin\alpha\,\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

$= m\ell^2\sin\alpha\,\dot{\theta}\,[\sin\alpha\,\vec{e_z} + \cos\alpha\,\vec{e_r}]$

. La derivée : $\frac{d\vec{L_O}}{dt}$. attention $\vec{er}$ n'est pas fixe

$\frac{d\vec{L_O}}{dt} = m\ell^2\sin\alpha\,\ddot{\theta}\,(\sin\alpha\,\vec{e_z} + \cos\alpha\,\vec{e_r}) + m\ell^2\sin\alpha\cos\alpha\,\dot{\theta}^2\,\vec{e_\theta}$

. Le moment des forces

$\vec{\mathcal{M}}_{T/O} = \vec{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}$

$\vec{\mathcal{M}}_{P/O} = \vec{OM} \wedge m\vec{g} = mgd\,\vec{e_\theta}$ bras de levier

$= mg\ell\sin\alpha\,\vec{e_\theta}$ et regle de la main droit

. Le theoreme $\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O$

Projections sur $\vec{e_z}$ ou $\vec{e}$
sur $\vec{e_\theta}$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = 0 \\ m\ell^2\sin\alpha\cos\theta\,\dot{\theta}^2 = mg\ell\sin\alpha \end{cases}$$

on a donc $\ddot{\theta} = 0$ le mouvement est uniforme et $\dot{\theta}^2 = g/l\cos\alpha$

or $v = l\sin\alpha\,\dot{\theta}$

d'où $\boxed{v^2 = lg\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = v_0^2}$

2. La periode du mouvement

La periode $T = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{\dot{\theta}}{2\pi}$

d'où $\boxed{T = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{l\cos\alpha}}}$