Devoir à la maison n° 20

À rendre le 11 juin

Pour ce DM, vous rendrez, un exercice (au choix) si vous le rendez seul, deux exercices (au choix) si vous le rendez en binôme, trois exercices (au choix !) si vous le rendez en trinôme.

I. Premier exercice, élémentaire

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, vérifiant $f^2 \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ et $f^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

II. Deuxième exercice, classique

On note u l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ stables par u. En déduire qu'il existe une base relativement à laquelle la matrice de u est diagonale.

III. Troisième exercice, calculatoire

Calculer le rang des matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

IV. Quatrième exercice, un peu technique

On appelle t la transposition $(1 \quad 2)$ et c le cycle $(1, 2, 3, \dots, n)$.
Calculer c^k et $c^k t c^{-k}$ (pour chaque $1 \leqslant k < n$). En déduire que t et c engendrent $\mathcal{S}_n$.

V. Cinquième exercice, un peu plus difficile

Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et l'endomorphisme de E $d : f \mapsto f'$. On note $F = \mathrm{Vect}(\sin, \cos, \mathrm{sh}, \mathrm{ch})$.

1) Quelle est la dimension de F ? Montrer que f est stable par d.

On note maintenant $\varphi = d_{|F}$.

2) **a)** Écrire la matrice M de φ dans une base bien choisie et calculer M^n, pour tout entier naturel n.

b) Montrer que φ est un automorphisme de F et déterminer la matrice de sa réciproque.

3) Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$, $\mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id})$ en utilisant M. En déduire toutes les solutions de l'équation $y' - y = \mathrm{e}^{-t} + \sin t$.

4) Déterminer $\mathrm{Ker}\,[(\varphi + \mathrm{Id}) \circ (\varphi - \mathrm{Id})]$ et $\mathrm{Im}\,[(\varphi + \mathrm{Id}) \circ (\varphi - \mathrm{Id})]$. L'équation $y'' - y = \mathrm{ch}$ a-t-elle une solution dans F ?

— FIN —