LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I.

ANNÉE 2018 - 2019

C2 : MODÉLISATION DES SYSTÈMES ASSERVIS

C2-3 - Modelisation des systemes asservis

2 Octobre 2018

Table des matières

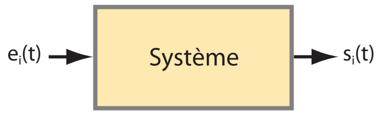
Compétences

- **Modéliser :** Proposer un modèle de connaissance
  - Systèmes linéaires continus et invariants.
  - Signaux canoniques d'entrée.
  - Schéma-bloc.

I. Système continu, linéaire et invariant

Définition 1 : *Système linéaire*

Un système est dit **linéaire** si, lorsque $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont respectivement les réponses de $e_1(t)$ et $e_2(t)$, alors $s_1(t)+\lambda s_2(t)$ est la réponse de $e_1(t)+\lambda e_2(t)$ pour tout réel λ.



Remarque 1 :

Les causes de “non-linéarité” sont multiples. En dehors de la non-linéarité intrinsèque de certains systèmes mécaniques, on distingue :

- la *saturation* (amplification, butée mécanique),
- le *seuil* (filtre, frottement),
- le *phénomène d'Hystérésis* (électromagnétisme, jeux mécaniques).

Un système réel est en général non linéaire, mais il est parfois possible, en se limitant à un domaine donné, d'en approcher le comportement par des approximations linéaires.

Définition 2 : *Système continu*

Un système se défini comme **continu** si les fonctions qui le caractérisent (entrées, sorties, perturbations) sont des fonctions continues du temps. On parle alors de **systèmes analogiques**.

Remarque 2 :

L'utilisation de systèmes informatiques impose le traitement de systèmes échantillonnés (ou numériques), ce qui nécessite des convertisseurs des grandeurs continues en grandeurs échantillonnées, et inversement.

(a) Grandeur continue (b) Grandeur discrète ou échantillonnée

FIGURE 1 – Différents modes de signaux

Définition 3 : *Système invariant*

Un système est **invariant** si la relation entrée-sortie ne se modifie pas dans le temps (le système ne vieillit pas). Si $s(t)$ est la réponse à $e(t)$, alors $\forall\tau$, $s(t+\tau)$ est la réponse à $e(t+\tau)$.

II. Principe d'étude des performances de systèmes asservis

1 Consignes, Perturbations et réponses

Définition 4 : *Consignes, Perturbations et réponses*

Les **consignes** et les **perturbations** se définissent comme étant les **entrées** du système :

- Les **consignes** sont les entrées imposées au systèmes. Elles sont maitrisées, peuvent se présentées sous différentes formes et peuvent être utilisées pour vérifier les performance des systèmes (signaux tests).
- Les **perturbations** sont les entrées non-maitrisées pour le système et peuvent venir modifier le comportement de ce dernier.

Pour quantifier les performances d'un système nous étudions alors les **réponses** (sortie) en fonction du type de consigne. Nous pouvons également vérifier la stabilité d'un système vis-à-vis d'une perturbation.

2 Définition de signaux canoniques (ou tests)

Définition 5 : *Signal*

Un **"signal"** est une grandeur physique mesurable porteuse d'une information. L'information est contenue dans la valeur ou dans la forme de variation du signal. Exemples : tension (V), vitesse $(m.s^{-1})$, déplacement (m), force (N), température $(°C)$.

Généralement des signaux **canoniques** sont utilisés pour étudier les effets sur les réponses d'un système et ainsi en vérifier les performances. On pourra appliquer ces signaux tests de manière expérimentale ou théorique à l'aide d'une modélisation du système.

Les fonctions d'entrée les plus couramment utilisées sont présentées ci-dessous.

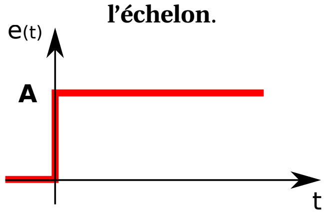
Echelon

L'**échelon unitaire** (ou échelon-unité) est définie par l'expression :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{e(t) = A\, u(t)} \tag{1}$$

où A est un scalaire constant appelé **amplitude de l'échelon**.

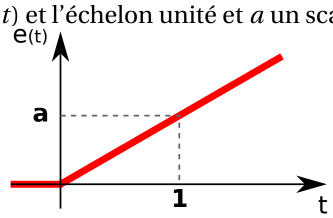


Rampe

La rampe est un fonction linaire (dans sa partie positive), définie par :

$$\boxed{e(t) = a\ t\ u(t)} \tag{2}$$

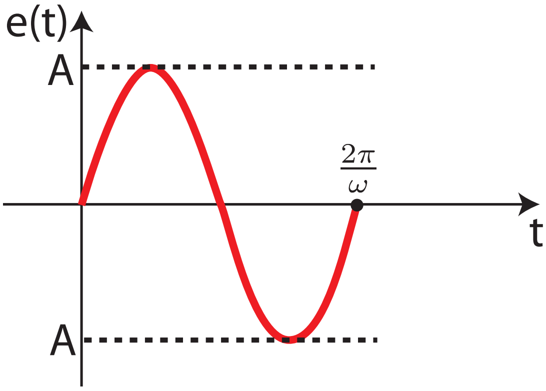
où $u(t)$ et l'échelon unité et a un scalaire.



Sinusoïde ou harmonique

$$\boxed{e(t) = A\ \sin(\omega t)\ u(t)} \tag{3}$$

où $u(t)$ est l'échelon unité, A et ω sont des constantes, respectivement l'amplitude et la fréquence du sinus.



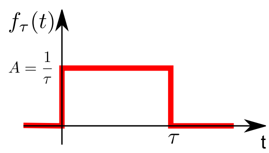
Dirac

Notée $\delta_{(t)}$, la fonction dirac correspond à un créneau de durée infiniment petite ($\tau \mapsto 0$), d'une amplitude infiniment grande ($A \mapsto +\infty$), et telle que l'aire sous la courbe soit égale à 1. Elle se résume donc à une impulsion instantanée. Si $f_\tau(t)$ est la fonction créneau suivante :

$$f_\tau(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} & \forall t \in [0;\tau] \\ 0 & \forall t \notin [0;\tau] \end{cases}$$

alors la définition de la fonction dirac sera :

$$\boxed{\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} f_\tau(t)} \tag{4}$$



Créneau

Dirac

3 Comportement dynamique de la sortie d'un signal

Définition 6 : *Système dynamique*

Un système est **dynamique** si la grandeur de sortie dépend des valeurs présentes et passées de la grandeur d'entrée (effet "mémoire"). Si elle ne dépend que de la valeur présente le système est dit **instantané**.

La réponse d'un système s'étudie en fonction du temps. On peut quantifier la performance d'un système en terme de forme temporelle de la sortie.

Exemple 1 : *Régulation en altitude de l'A.R. Drone*

Plaçons nous par exemple dans le cas de l'A.R. Drone. On souhaite appliquer une consigne en échelon ($e(t)$) proportionnelle à une altitude souhaitée ($s(t) = F(t)$). Le système ne donne pas instantanément la réponse souhaitée. La figure 2 donne un exemple de l'évolution de la sortie en fonction du temps.

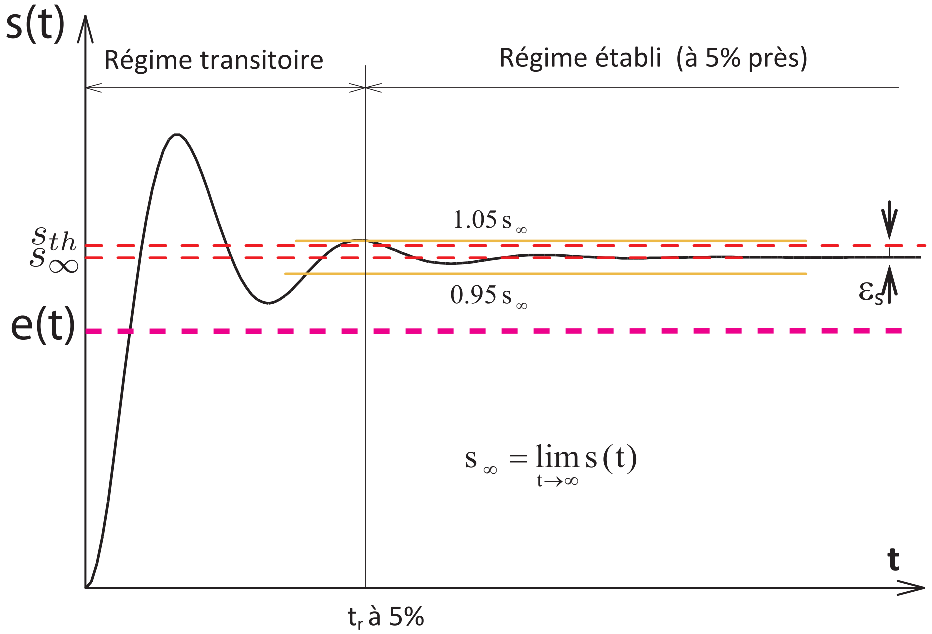
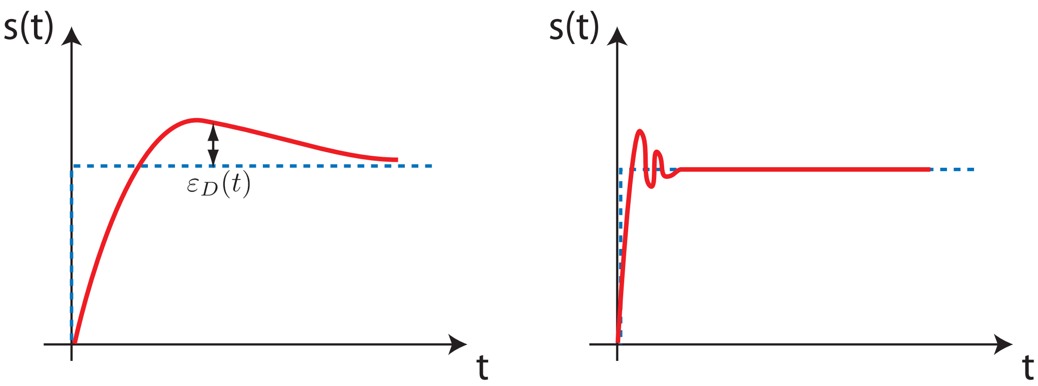


FIGURE 2 – Évaluation de la rapidité d'un système



(a) Système lent (b) Système rapide

FIGURE 3 – Évaluation de la rapidité d'un système

On atteint le régime établi ou permanent après une période de transition de durée t_r (temps de réponse ou d'établissement). Les oscillations apparues dans le régime transitoire sont amorties pour disparaître dans le régime permanent. L'entrée est amplifiée par le gain. La **performance** de la réponse peut être quantifiée selon plusieurs aspects.

a) Rapidité

Définition 7 : *Rapidité*

La **rapidité** d'un système concerne l'aspect dynamique de la performance d'un système et se définie comme son aptitude à atteindre rapidement la consigne souhaitée. Les figures 3 (a) et (b) comparent deux systèmes lents et rapides.

Propriété 1 : *Temps de réponse à* 5%

La rapidité se caractérise par la durée que le signal met pour se stabiliser autour de valeurs comprises entre 95% et 105% de la valeur asymptotique à l'infinie (s_∞). On l'appelle le **temps de réponse à** 5% et on le note $t_{r5\%}$ ou t_{r05} (figure 4).

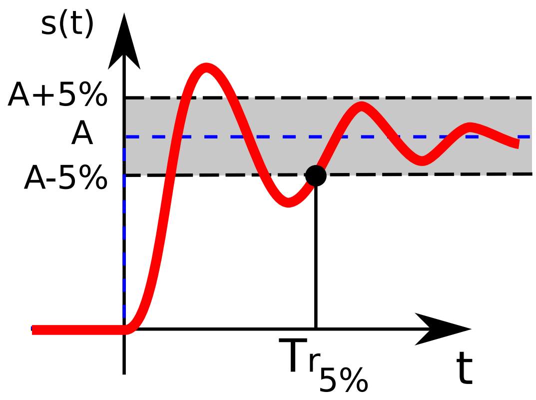


FIGURE 4 – Temps de réponse à 5%

b) Précision

Définition 8 : *Précision*

La **précision** se caractérise par la valeur de l'écart entre la réponse souhaité théorique d'un système (s_{th}) et la réponse obtenue.

On pourra quantifier cet écart en cours de réponse (précision dynamique) ou une fois la réponse obtenue (précision statique).

Précision statique : Elle caractérise l'écart **en régime permanent** entre la réponse souhaitée théorique (s_{th}) et la réponse obtenue asymptotique en régime établi (s_∞). On peut l'exprimer en valeur absolue ou relative (%). On distingue parmi les écarts statiques :

- **l'erreur statique** (ou de position) : Elle se mesure sur la réponse à un échelon. C'est l'écart ε_S entre la réponse souhaitée et la réponse obtenue en régime permanent.

$$\varepsilon_S = \varepsilon_0 = |s_\infty - s_{th}| = \lim_{t\to+\infty} |s(t) - s_{th}|$$

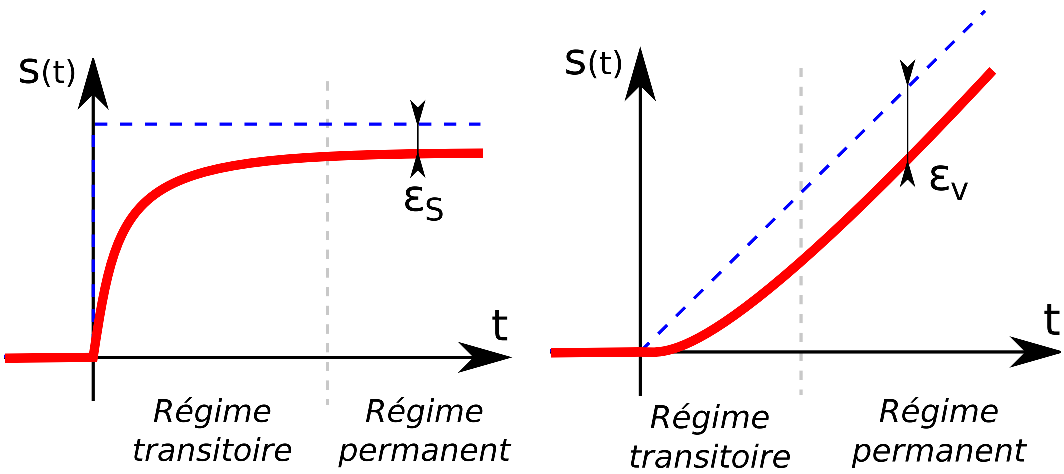
avec $e(t) = A\,u(t)$.

- **l'erreur de traînage** (ou de vitesse) : Elle se mesure sur la réponse à une rampe. C'est l'écart ε_V entre la réponse souhaitée et la réponse obtenue en régime permanent. Elle peut être infinie.

$$\varepsilon_V = \varepsilon_1 = |s_\infty - s_{th}| = \lim_{t\to+\infty} |s(t) - s_{th}|$$

avec $e(t) = A\,t\,u(t)$.

Précision dynamique : Elle caractérise l'écart en régime transitoire entre la réponse souhaitée et la réponse obtenue d'un point de vue instantané. On définit ainsi l'erreur dynamique $\varepsilon_D(t)$ instantanément en fonction du temps (figure 3 (a)). Cette définition est valable quel que soit le signal de consigne. Les erreurs statique et de traînage peuvent être obtenues en cherchant la limite de l'erreur dynamique quand t tend vers l'infini (régime permanent).



(a) Erreur statique (b) Erreur de trainage

FIGURE 5 – Définition des erreurs statiques et de trainage des systèmes

Remarque 3 : *Calcul de l'erreur en pratique*

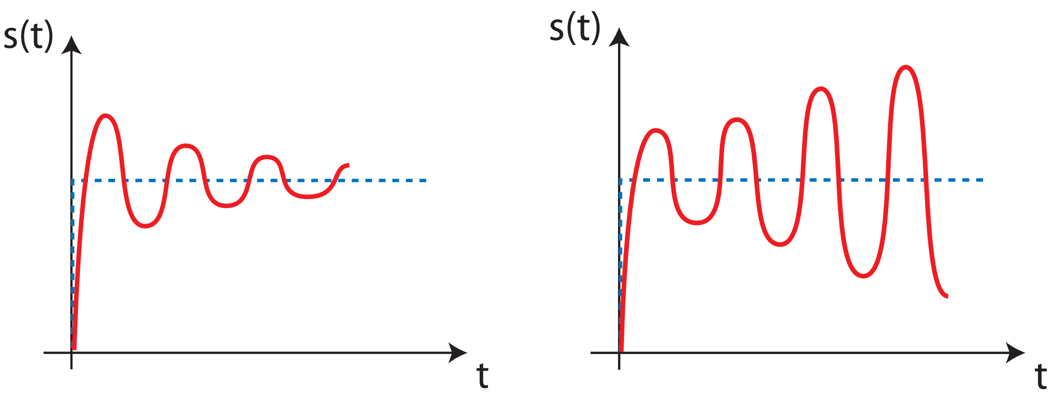
En pratique l'erreur sera calculée en prenant l'écart entre l'entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$ (à un coefficient près appelé gain statique)

$$\boxed{\varepsilon = \lim_{t\to+\infty} |e(t) - s(t)|.} \tag{5}$$

c) Stabilité

Définition 9 : *Stabilité*

La stabilité traduit la propriété de convergence temporelle asymptotique vers un état d'équilibre sous l'effet d'une sollicitation de type échelon. Les figures 6 (a) et (b) illustrent donc la différence entre un système amorti et non amorti donc instable.



Mal amorti Instable

FIGURE 6 – Évaluation de la stabilité d'un système

III. Représentation des systèmes asservis

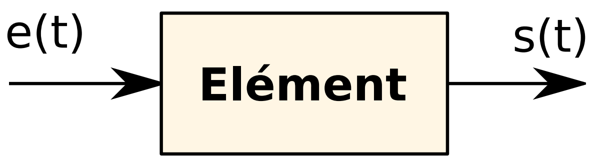
1 Représentation à l'aide d'un schéma bloc

Un système asservi se représente à l'aide de **blocs élémentaires fonctionnels**. L'assemblage des blocs élémentaires constitue le schéma bloc et permet de représenter la modélisation d'un système. Chaque bloc fonctionnel est représenté par une **fonction de transfert**.

a) Les blocs élémentaires

Le bloc élémentaire représente une fonction élémentaire. Si f est le nom de cette fonction, $e(t)$ une consigne et $s(t)$ la réponse, alors :

$$\boxed{s(t) = f\left(e(t)\right).} \tag{6}$$

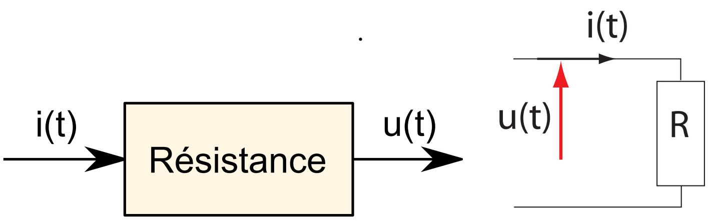


Exemple 2 :

- **Résistance électrique R :**

$$u(t) = R\, i(t)$$

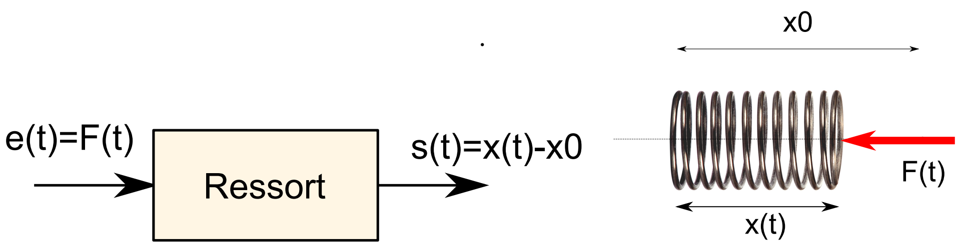
.



- **Ressort de raideur K :**

$$F(t) = -K\ (x(t) - x0)$$

.



Remarque 4 :
On remarquera que la relation entre la sollicitation et la réponse peut-être une équation différentielle, parfois complexe à résoudre.

Les blocs peuvent être assemblés **en série** pour obtenir une combinaison de fonctions (fig.7). Si f_1 et f_2 sont les fonctions relatives aux bloc 1 et 2, alors la réponse finale sera définie par :

$$\boxed{s_2(t) = f_2\left(e_2(t)\right) = f_2\left(f_1\left(e_1(t)\right)\right)} \tag{7}$$

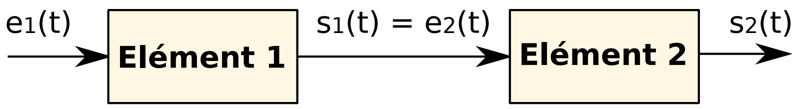
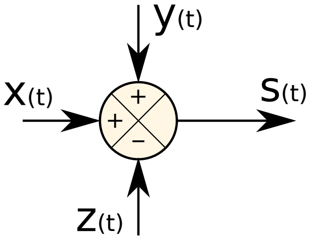


FIGURE 7 – Composition de blocs élémentaires

b) Les jonctions

Les Comparateurs (ou sommateur) : ces éléments permettent d'additionner (ou de soustraire) plusieurs informations **homogènes** (fig.**??**).

$$s(t) = x(t) + y(t) - z(t)$$



Exemple de comparateur

Dérivation - Points de prélèvement : les connexions entre les blocs peuvent avoir des dérivations. Ainsi la sortie d'un bloc peut être reliée à l'entrée de plusieurs autres blocs. C'est notamment le cas des points de prélèvement qui permettent de ramener une information en amont du schéma.

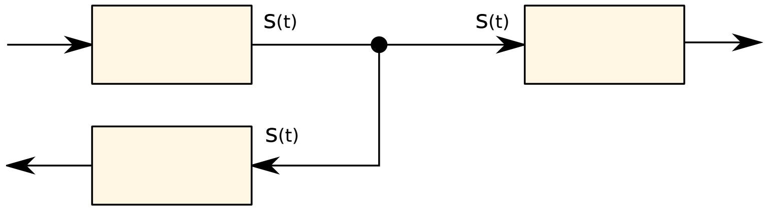


FIGURE 8 – Exemple de point de prélèvement

Remarque 5 :
- Concrètement, ce prélèvement peut-être réalisé par le biais de capteurs.
- Un signal n'est pas modifié par le prélèvement de sa valeur

c) Boucles ouvertes - Boucles fermées

• **Boucle ouverte :** Le système peut-être composé exclusivement de blocs en série. On parle alors de **système ouvert** ou **boucle ouverte** (fig.9).

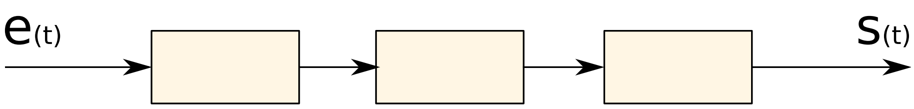


FIGURE 9 – Boucle ouverte

Les systèmes en boucles ouvertes n'ont aucun retour sur la réponse. Si le système n'est pas précis, ou s'il y a des perturbations, il n'y a aucun moyen de corriger le défaut.

• **Boucle fermée :** On parle de boucle fermée lorsque l'une des grandeur est prélevée et réutilisée en amont (fig.10).
Dans ce cas, on séparera les blocs en deux groupes :

- **La chaîne directe :** c'est l'ensemble des blocs directement placés entre la consigne et la réponse finale.
- **La chaîne de retour :** c'est l'ensemble des blocs qui permettent de remonter l'information.

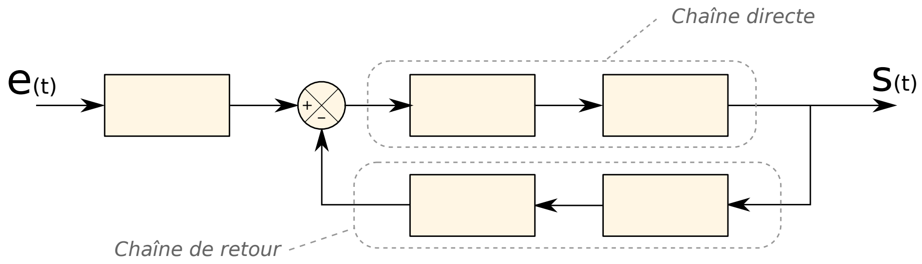


FIGURE 10 – Boucle fermée, composée de la chaîne directe et de la chaîne de retour

Les systèmes en boucle fermée permettent en particulier d'adapter la consigne en fonction de la réponse pour y apporter d'éventuelles corrections.
Classiquement la structure générale d'un système asservi se présente sous la forme du schéma bloc suivant.

d) Structure des systèmes asservis

Un système asservi peut être décomposé en deux grandes parties que l'on peut représenter à l'aide d'un schéma bloc :

- La **partie commande** (celle qui va traiter les données reçu de l'extérieur, mais aussi issues de l'état du système)
- La **partie opérative** (qui va agir pour générer le résultat du système)

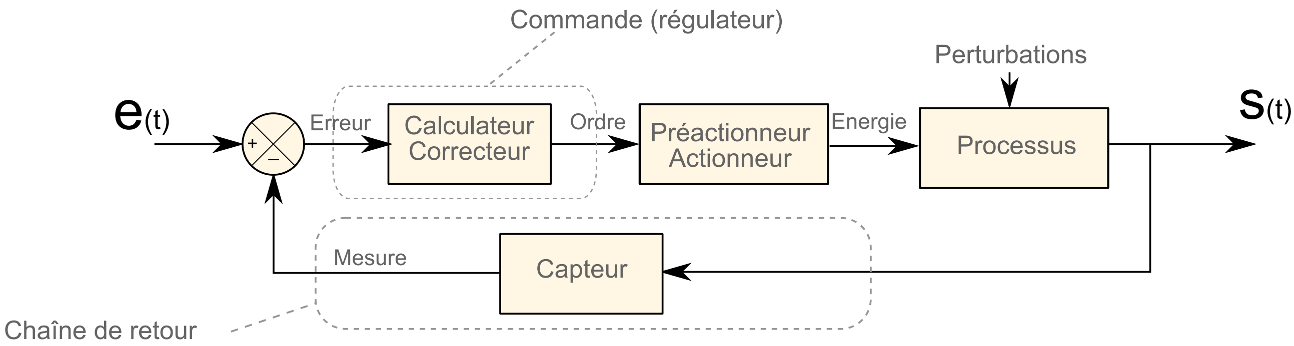


FIGURE 11 – Structure générale du système asservi

2 Représentation par équations différentielles

On démontre qu'un système dynamique linéaire, continu et invariant est toujours régi par une **équation différentielle** linéaire à coefficients constants. Cette équation différentielle est toujours de la forme :

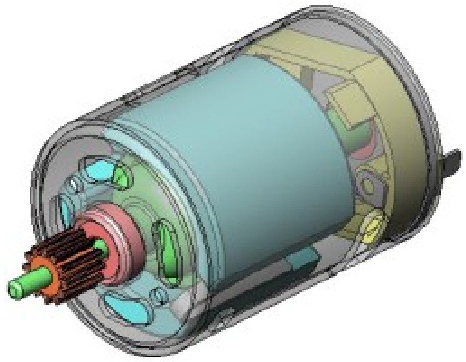
$$\boxed{a_0\, s(t) + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + \ldots + a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = b_0\, e(t) + b_1 \frac{de(t)}{dt} + \ldots + b_m \frac{d^m s(t)}{dt^m}} \tag{8}$$

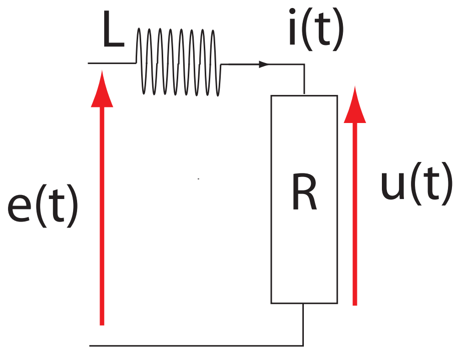
où :

- $a_0, a_1, \cdots, a_n, b_0, b_1, \cdots, b_m$ sont des constantes (invariants).
- $\frac{d^n s(t)}{dt^n}$ est la dérivée d'ordre n de $s(t)$.
- L'équation s'exprime en fonction de $s(t)$ et de $e(t)$ ainsi que de leurs dérivées successives par rapport au temps (linéarité).
- On appelle **ordre du système** le coefficient n.

Exemple 3 : *Circuit RL*

Un circuit RL est habituellement utilisé pour modélisé des systèmes tels que les moteurs à courant continu ou des filtres.





Les équations électriques du circuit sont les suivantes :

$$e(t) = L\frac{di(t)}{dt} + R\,i(t).$$

Si on veut donner une relation entre $u(t)$ et l'entrée $e(t)$, il faut traduire l'équation différentiel par une relation simple.
Les **transformées de Laplace** donnée dans la partie suivantes permettent de modéliser et de résoudre plus simplement ces équation.

Définition 10 : *Système causal*

Pour un système physique, l'effet ne peut précéder la cause. Donc la sortie $s(t)$ à la date t ne peut dépendre que des entrées aux dates $t' \leq t$. Un système vérifiant cette propriété est dit causal. Cela se traduit sur la relation différentielle par $m \leq n$. De plus, on prendra pour référence $t = 0$, donc un système causal vérifie que $\forall t < 0$, $e(t) = 0$.

3 Représentation par les fonctions de transfert

a) Définition et propriétés

Définition 11 : *Transformée de Laplace*

Soit f une fonction de la variable réelle $t \in \mathbb{R}$ et supposée nulle pour $t < 0$, on appelle **Transformée de Laplace** de f, la fonction F définie par :

$$\boxed{F(p) = \mathscr{L}\left[f(t)\right] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt.} \tag{9}$$

- p : Variable complexe.
- Pour l'asservissement, t est le temps et on se limite aux fonctions causales, c'est à dire les fonctions f telles que $f(t) = 0$ pour $t < 0$.

Remarque 6 :

On note

$$F(p) = \mathscr{L}\left[f(t)\right] = T\mathscr{L}\left[f(t)\right]$$

où $F(p)$ est l'image de $f(t)$. $F(p)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$, et $f(t)$ est l'original de $F(p)$. L'objectif des transformées de Laplace est de ramener l'étude du comportement de ce système, à la résolution d'un **système algébrique** au lieu de résoudre des équations différentielles.

Propriété 2 :

- **Unicité :** à $f(t)$ correspond $F(p)$ unique, à $F(p)$ correspond $f(t)$ unique.
- **Linéarité :** $\mathscr{L}\left[\alpha\, f_1(t) + \beta\, f_2(t)\right] = \alpha\, \mathscr{L}\left[f_1(t)\right] + \beta\, \mathscr{L}\left[f_2(t)\right]$

b) Théorème généraux

Facteur d'échelle :

$$\boxed{\mathscr{L}\left[f(at)\right] = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right).} \tag{10}$$

Retard :

$$\boxed{\mathscr{L}\left[f(t-\tau)\right] = e^{-\tau p}F(p).} \tag{11}$$

Amortissement :

$$\boxed{\mathscr{L}\left[e^{-\omega t}f(t)\right] = F(p+\omega).} \tag{12}$$

Dérivation première :

$$\boxed{\mathscr{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = p\,F(p) - f(0^-).} \tag{13}$$

Dérivation seconde :

$$\boxed{\mathscr{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = p^2F(p) - p\,f(0^-) - f'(0^-).} \tag{14}$$

Intégration :

$$\boxed{\mathscr{L}\left[g(t)\right] = \frac{1}{p}F(p) + \frac{g(0^-)}{p} \qquad \text{avec } f(t) = \frac{dg(t)}{dt}.} \tag{15}$$

Théorème aux limites

Définition 12 : *Théorèmes aux limites*

Théorème de la valeur finale : Si le système est stable,

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} p\,F(p).} \tag{16}$$

Théorème de la valeur initiale :

$$\boxed{\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to+\infty} p\,F(p).} \tag{17}$$

Il est ainsi possible de connaître la valeur finale de la réponse d'un système par la seule donnée de sa transformée.

c) Fonctions de transfert de usuelles

Pour rappel : $u(t)$ est la fonction échelon unitaire.

$f(t)$	$F(p)=\mathscr{L}\left[f(t)\right]$	$f(t)$	$F(p)=\mathscr{L}\left[f(t)\right]$
$u(t)$	$\dfrac{1}{p}$	$\sin(\omega t)\,u(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$K\,u(t)$	$\dfrac{K}{p}$	$\cos(\omega t)\,u(t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$K\,t\,u(t)$	$\dfrac{K}{p^2}$	$\sinh(\omega t)\,u(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$e^{-at}u(t)$	$\dfrac{1}{p+a}$	$\cosh(\omega t)\,u(t)$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$
$t^n u(t)$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$e^{-at}\sin(\omega t)u(t)$	$\dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$e^{at}t^n u(t)$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$e^{-at}\cos(\omega t)u(t)$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
$\delta(t)$	1	$K\,\delta(t)$	K

d) Fonction de transfert à partir des équations différentielles

Si les conditions initiales sont nulles l'équation différentielle vue précédemment :

$$a_0\,s(t)+a_1\,\frac{ds(t)}{dt}+...+a_n\,\frac{d^n s(t)}{dt^n}=b_0\,e(t)+b_1\,\frac{de(t)}{dt}+...+b_m\,\frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

peut s'écrire en utilisant la transformée de Laplace :

$$a_0\,S(p)+a_1\,p\,S(p)+...+a_n\,p^n\,S(p)=b_0\,E(p)+b_1\,p\,E(p)+...+b_m\,p^m\,E(p).$$

D'où

$$\boxed{H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{b_0+b_1\,p+...+b_m\,p^m}{a_0+a_1\,p+...+a_n\,p^n}.} \qquad (18)$$

$H(p)$ est appelée fonction de transfert du système (ou transmittance).

Ce qui permet d'obtenir la valeur instantanée de la sortie, pour une entrée donnée, en repassant dans le domaine temporel à l'aide de la transformation de Laplace inverse.

Propriété 3 :

- On appelle **pôles** de la fonction de transfert les valeurs de p qui annulent son dénominateur;
- les **zéros** celles qui annulent son numérateur.
- Le degré **n** du dénominateur est appelé **ordre** du système.
- $$\boxed{H(p)=\frac{K}{p^\alpha}\,\frac{1+\tilde{b_1}p+...+\tilde{b_m}p^m}{1+\tilde{a}_1p+...+\tilde{a}_np^n}} \qquad (19)$$

  est la **forme canonique** de $H(p)$.
- On appelle K le **gain** du système et α sa **classe**.

4 Manipulations et simplifications de schémas-blocs

Un schéma-bloc n'est pas figé. On peut le représenter de différente manière, sans que cela ne change le résultat. L'intérêt est notamment de pouvoir le simplifier.

a) Blocs en série :

Dans le domaine de Laplace, les blocs en série (fig.12) se multiplient entre eux.

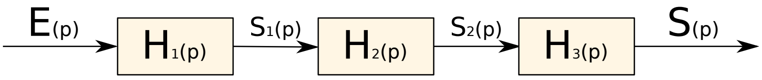


FIGURE 12 – Blocs en série

$$\begin{cases} S_1(p) = H_1(p)\,E(p) \\ S_2(p) = H_2(p)\,S_1(p) \\ S(p) = H_3(p)\,S_2(p) \end{cases} \Longrightarrow S(p) = H_3(p)\,H_2(p)\,H_1(p)\,E(p)$$

Au final :

$$H(p) = H_3(p)\,H_2(p)\,H_1(p)$$

b) Blocs en parallèle :

Les blocs en parallèle font nécessairement intervenir des comparateurs.

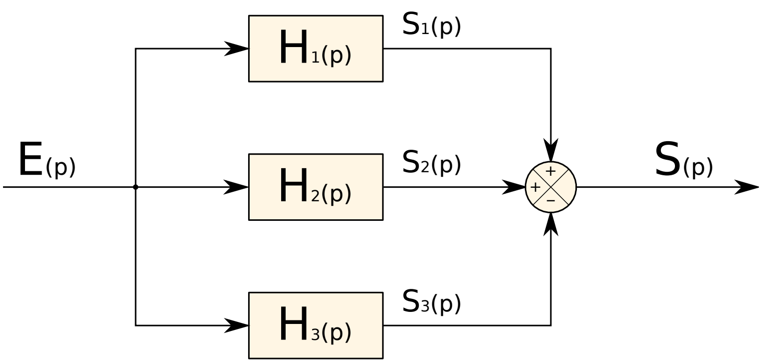


FIGURE 13 – Blocs en parallèle

Le calcul ci-dessous reprend la structure de la figure 13.

$$\begin{cases} S_1(p) = H_1(p)\,E(p) \\ S_2(p) = H_2(p)\,E(p) \\ S_3(p) = H_3(p)\,E(p) \\ S(p) = S_1(p) + S_2(p) - S_3(p) \end{cases} \Longrightarrow S(p) = \left[H_1(p) + H_2(p) - H_3(p)\right]\,E(p)$$

Ainsi :

$$H(p) = H_1(p) + H_2(p) - H_3(p)$$

c) Systèmes bouclés

Une commande en boucle fermée peut se mettre sous la forme de la figure 14

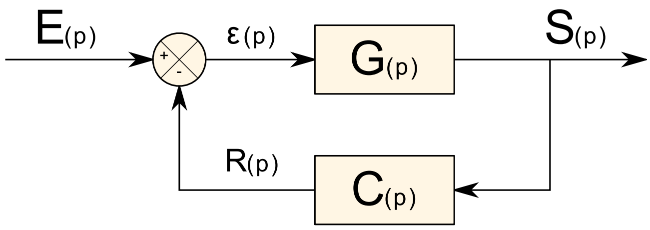


FIGURE 14 – Schméa bloc d'un système en boucle fermée

Les FT aux niveaux des différents blocs permettent d'écrire :

$$\left.\begin{aligned} S(p) &= G(p)\,\varepsilon(p) \\ R(p) &= C(p)\,S(p) \\ \varepsilon(p) &= E(p) - R(p) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow S(p) = G(p)\left[E(p) - C(p)\,S(p)\right]$$

Définition 13 : *Fonction de Transfert en Boucle Fermée*

L'ensemble permet de définir alors la **Fonction de Transfert en Boucle Fermée** du système (FTBF) :

$$\boxed{FTBF(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)C(p)}} \qquad (20)$$

On peut aussi appelé cette formule : **formule de Black**.

Remarque 7 :

Le signe "+" du dénominateur est l'inverse du signe du comparateur (ici : un "−"). Si nous avions eu un comparateur "+/+", la fonction de transfert aurait été :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 - G(p)C(p)}$$

Toutefois, certaines études se feront à partir de la **Fonction de Transfert en Boucle Ouverte** définie par le schéma 15.

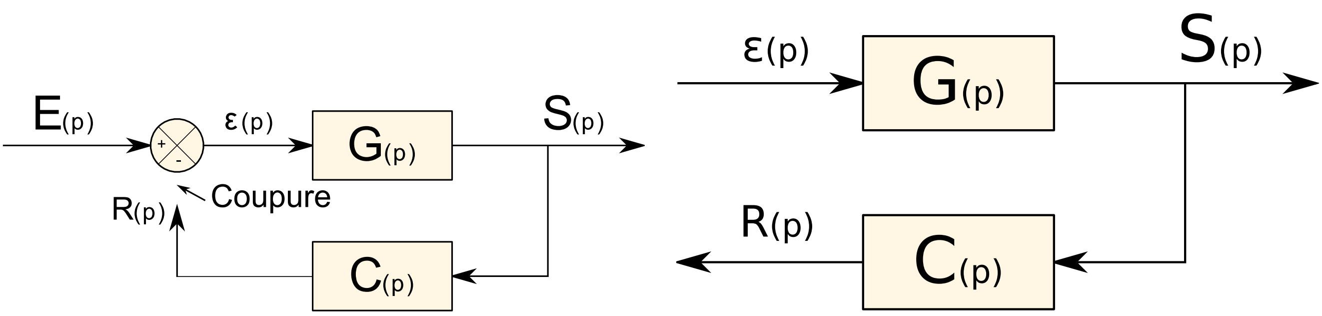


FIGURE 15 – Schéma-bloc d'un système en boucle ouverte

Définition 14 : *Fonction de Transfert en Boucle ouverte*

Ici, la fonction de transfert en boucle ouverte est donc :

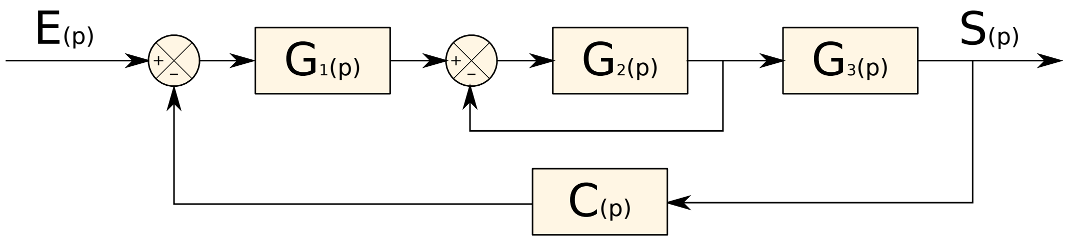
$$\boxed{FTBO(p) = \frac{R(p)}{E(p)} = G(p)\,C(p).} \tag{21}$$

d) Simplifications de boucles concentriques

Si l'une des branches est constituée de plusieurs boucles strictement imbriquées les unes dans les autres, on peut alors calculer la fonction de transfert boucle par boucle, en commençant par la boucle la plus "*à l'intérieure*".

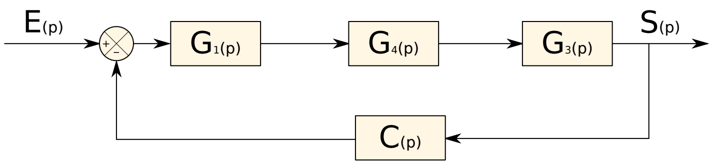
Exemple 4 :

Déterminer la fonction de transfert $H(p)$



On commence par simplifier la 1^{ere} boucle intérieure (appelons-la $G_4(p)$) :

$$G_4(p) = \frac{G_2(p)}{1+G_2(p)}$$



On peut alors calculer la fonction de transfert de la seconde boucle (qui est la fonction de transfert globale) :

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{G_1(p)G_4(p)G_3(p)}{1+G_1(p)G_4(p)G_3(p)C(p)} \\ &= \frac{G_1(p)G_3(p)\frac{G_2(p)}{1+G_2(p)}}{1+G_1(p)G_3(p)C(p)\frac{G_2(p)}{1+G_2(p)}} \\ &= \frac{\frac{G_1(p)G_2(p)G_3(p)}{1+G_2(p)}}{\frac{1+G_2(p)+G_1(p)G_2(p)G_3(p)C(p)}{1+G_2(p)}} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$H(p) = \frac{G_1(p)G_2(p)G_3(p)}{1+G_2(p)\big(1+G_1(p)G_3(p)C(p)\big)}$$

e) Déplacement des blocs autour des points de prélèvement

Il peut-être intéressant de "déplacer" les blocs au delà des points de prélèvement (fig.16). Dans ce cas, le bloc est "*propagée*" dans chacune des dérivations.

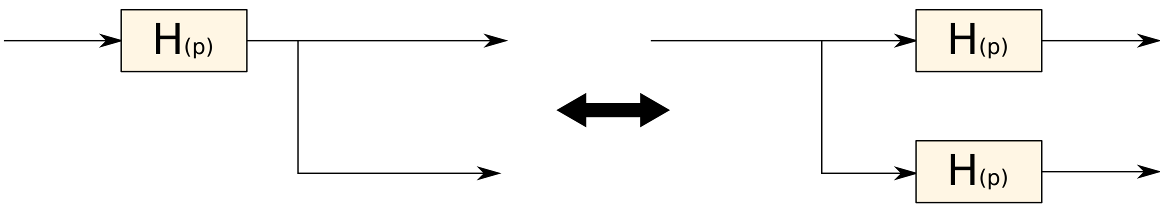


FIGURE 16 – Déplacement d'un bloc au delà d'un point de prélèvement

A l'inverse, si l'on souhaite ramener un bloc en amont d'un point de prélèvement (fig.17), il faudra "*corriger*" le changement dans la seconde branche, en appliquant la fonction de transfert inverse.

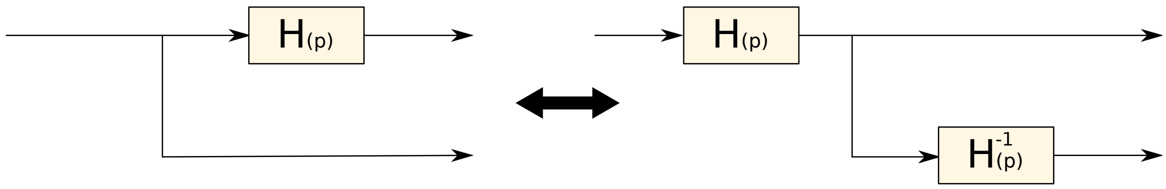


FIGURE 17 – Déplacement en mont d'un point de prélèvement

f) Déplacement des blocs autour des comparateurs

Au même titre que les points de prélèvement, un bloc en aval peut être ramené en deux blocs en amont d'un comparateur (fig.19).

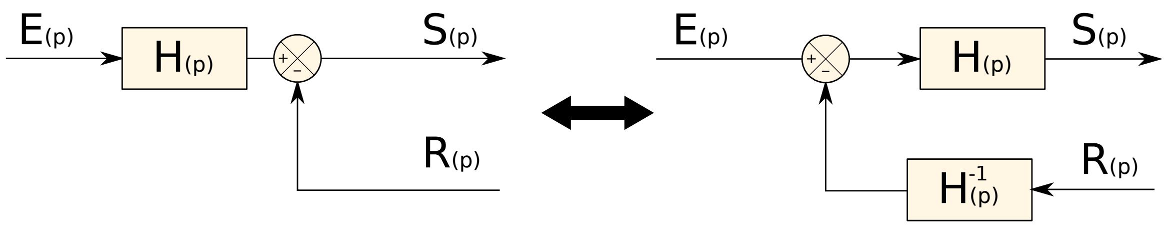


FIGURE 18 – Déplacement en aval d'un point de prélèvement

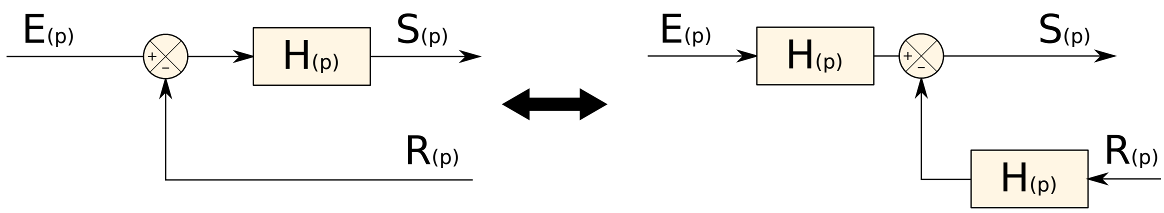


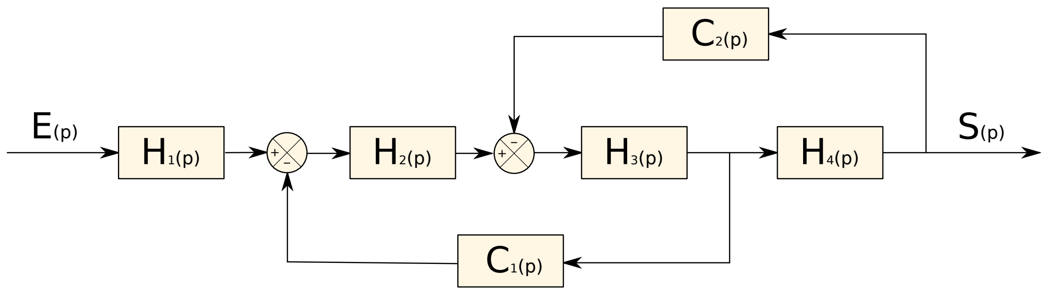
FIGURE 19 – Déplacement en amont d'un point de prélèvement

Attention :

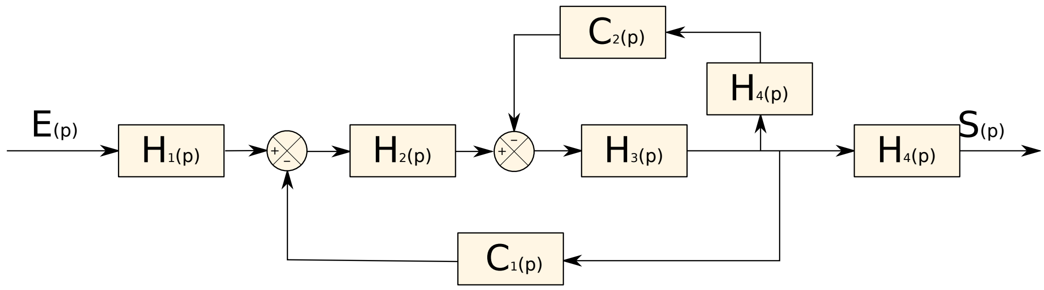
Dans le cas des comparateurs, il convient de veiller à l'homogénéité des entrées !

Exemple 5 :

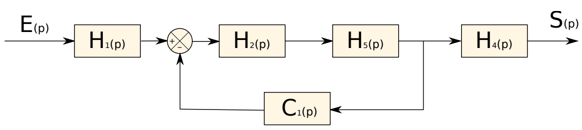
Déterminer la fonction de transfert $H(p)$ **:**



On peut commencer par déplacer le bloc $H_4(p)$ au delà du point de prélèvement.

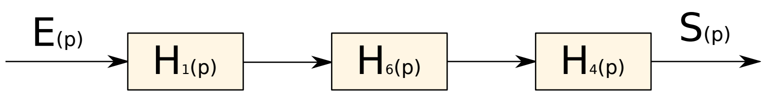


On peut alors simplifier la première boucle (intérieure) :



$$H_5(p) = \frac{H_3(p)}{1 + H_3(p)H_4(p)C_2(p)}$$

On peut alors calculer la seconde boucle :



$$H_6(p) = \frac{H_2(p)H_5(p)}{1 + H_2(p)H_5(p)C_1(p)}$$

Au final, il ne reste que des blocs en série. La fonction de transfert sera donc :

$$H(p) = H_1(p)H_6(p)H_4(p)$$

$$= H_1(p)H_4(p)\frac{H_2(p)\frac{H_3(p)}{1+H_3(p)H_4(p)C_2(p)}}{1 + H_2(p)\frac{H_3(p)}{1+H_3(p)H_4(p)C_3(p)}C_1(p)}$$

Au final :

$$H(p) = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)}{1 + H_3(p)H_4(p)C_2(p) + H_2(p)H_3(p)C_1(p)}$$

IV. Méthode de décomposition en éléments simples

1 Décomposition

Soit une fonction rationnelle :

$$Y(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

où $N(p)$ et $D(p)$ sont des dénominateur.

Supposons que $D(p)$ se factorise **au maximum** sous la forme :

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{\left(p+a_1\right)^{n_1}\left(p+a_2\right)^{n_2}\cdots\left(p^2+b_1p+c_1\right)^{m_1}\left(p^2+b_2p+c_2\right)^{m_2}\cdots}$$

(où les facteurs d'ordre 2 n'ont pas de racine réelle, et ne sont donc pas factorisables dans $\mathbb{R}$). On montre que cette fraction peut se décomposé en une somme de fractions (dit **éléments simples**) :

$$\begin{aligned}\frac{N(p)}{D(p)} = & \frac{A}{p+a_1} + \frac{B}{\left(p+a_1\right)^2} + \frac{C}{\left(p+a_1\right)^3} + \cdots + \frac{D}{\left(p+a_1\right)^{n_1}} \\ & + \frac{E}{p+a_2} + \frac{F}{\left(p+a_2\right)^2} + \frac{G}{\left(p+a_2\right)^3} + \cdots + \frac{H}{\left(p+a_2\right)^{n_2}} \\ & + \cdots \\ & + \frac{Ip+J}{p^2+b_1p+c_1} + \frac{Kp+L}{\left(p^2+b_1p+c_1\right)^2} + \frac{Mp+N}{\left(p^2+b_1p+c_1\right)^3} + \cdots + \frac{Op+P}{\left(p^2+b_1p+c_1\right)^{m_1}} \\ & + \frac{Qp+R}{p^2+b_2p+c_2} + \frac{Sp+T}{\left(p^2+b_2p+c_2\right)^2} + \frac{Up+V}{\left(p^2+b_2p+c_2\right)^3} + \cdots + \frac{Wp+X}{\left(p^2+b_2p+c_2\right)^{m_1}} \\ & + \cdots\end{aligned}$$

Ce qui précède se base sur les remarques suivantes :

Remarque 8 :

- Les facteurs multiples (à la puissance n) engendreront n éléments simples, dont les dénominateurs seront à la puissance $1, 2, \cdots$ jusqu'à n.
- Les facteurs d'ordre 2 (trinômes du 2^{nd} degrés qui n'ont pas de racines réelles) engendreront des éléments simples dont le dénominateur sera un binôme du 1^{er} degrés.

2 Détermination des inconnues

Plusieurs méthodes sont possibles pour déterminer les inconnus des numérateurs.

a) Identification du numérateur : la bouée de secours !

La méthode consiste à remettre tous les éléments simples au même dénominateur pour ré-obtenir une seule fraction rationnelle. Le numérateur sera donc un polynôme, fonction de toutes les inconnues. Les numérateurs peuvent alors être identifiés, coefficient.

Exemple 6 :

$$Y(p) = \frac{2}{p\left(p+3\right)^2}$$

$$Y(p) = = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+3} + \frac{C}{(p+3)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{p\left(p+3\right)^2} = \frac{A(p+3)^2 + Bp(p+3) + Cp}{p(p+3)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{p\left(p+3\right)^2} = \frac{p^2(A+B) + p(6A+3B+C) + 9A}{p(p+3)}$$

$$\Leftrightarrow 2 = p^2(A+B) + p(6A+3B+C) + 9A$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B & = 0 \\ 6A+3B+C & = 0 \\ 9A & = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cdots$$

b) Recherche de solution par limites :

Une méthode efficace consiste à venir multiplier la fonction $Y(p)$ par l'un des facteurs, puis à faire tendre la variable p vers sa racine.

Exemple 7 :

En reprenant l'exemple précédent :

$$Y(p) \times p$$
$$= \frac{Ap}{p} + \frac{Bp}{p+3} + \frac{Cp}{(p+3)^2}$$
$$= A + \frac{Bp}{p+3} + \frac{Cp}{(p+3)^2}$$
$$\lim_{p \to 0} Y(p) \times p = A$$

En faisant la même chose sur la fraction non-décomposée :

$$\begin{aligned}
Y(p) \times p &= \frac{2p}{p\left(p+3\right)^2} \\
&= \frac{2}{\left(p+3\right)^2} \\
\lim_{p \to 0} Y(p) \times p &= \frac{2}{(0+3)^2} \\
&= \frac{2}{9}
\end{aligned}$$

Ainsi : $A = \frac{2}{9}$. Faisons de même en multipliant par $(p+3)^2$:

$$\begin{aligned}
\lim_{p \to -3} Y(p) \times (p+3)^2 &= \lim_{p \to -3} \left(\frac{A(p+3)^2}{p} + \frac{B(p+3)^2}{p+3} + C \right) \\
&= C \\
&= \lim_{p \to -3} \frac{2(p+3)^2}{p\left(p+3\right)^2} \\
&= \lim_{p \to -3} \frac{2}{p}
\end{aligned}$$

On en déduit que $C = -\frac{2}{3}$.

Pour ce qui est la recherche des inconnues issues des éléments simples dont les dénominateurs est d'ordre 2, La méthode est similaire, à la différence que l'on fait tendre la variable p vers la racine complexe. Le résultat sera alors un nombre complexe, dont on pourra identifier partie imaginaire et partie réelle.