QCM n° 6

Échauffement n°1 Calculer $\int^x (1+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Échauffement n°2 Calculer $\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2t}}{1+\mathrm{e}^{t}}\,\mathrm{d}t$.

Échauffement n°3 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + 2xy = \mathrm{e}^{-x^2}$.

Question n°1 Soit $a, b \in \mathbb{C}$.

- ☐ $\mathrm{Re}(a+b) = \mathrm{Re}(a) + \mathrm{Re}(b)$
- ☐ $\mathrm{Im}(ab) = \mathrm{Im}(a)\,\mathrm{Im}(b)$
- ☐ $|a+b| = |a| + |b|$
- ☐ $|ab| = |a|.|b|$
- ☐ $\overline{ab} = \bar{a}.\bar{b}$
- ☐ $\overline{a-b} = \bar{a} - \bar{b}$

Question n°2 Soit $P = X^2 - X + 1$.

- ☐ P a deux racines distinctes, complexes et conjuguées.
- ☐ Le produit de ces deux racines vaut 1.
- ☐ La somme de ces deux racines vaut -1.

Calculez ces deux racines sans utiliser le discriminant.

Soit $Q = X^2 - iX - 1$.

- ☐ Q a deux racines distinctes, complexes et conjuguées.
- ☐ Le produit de ces deux racines vaut -1.
- ☐ La somme de ces deux racines vaut i.

Trouvez une relation entre les racines de Q et celles de P et en déduire les racines de Q, tout cela sans utiliser le discriminant.

Question n°3 Soit a et b deux réels non nuls tels que $a \leqslant b$. Alors

- ☐ $a^{-1} \geqslant b^{-1}$
- ☐ $a^2 \leqslant b^2$.
- ☐ pour tout réel c, $ac \leqslant bc$.
- ☐ $\min(|a|,|b|) \leqslant \sqrt{a^2+b^2} \leqslant |a|+|b| \leqslant \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} \leqslant 2\max(|a|,|b|)$

Question n°4 Parmi les fonctions suivantes, repérez celles qui sont de la forme $t \mapsto K \times \varphi(t) \times f'(\varphi(t))$, où φ et f sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et $K \in \mathbb{R}$.

- ☐ $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$;
- ☐ $t \mapsto \dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}$;
- ☐ $t \mapsto t\ln(t)$;
- ☐ $t \mapsto \mathrm{ch}(t)$;
- ☐ $t \mapsto \cos^(t)\sin^3(t)$;
- ☐ $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1+t}}$.

Question n°5 Soit $(\mathscr{E})$: $y' + 2y = \mathrm{e}^{x}$.

- ☐ L'ensemble des solutions de l'équation homogène est $\left\{K\mathrm{e}^{-2x},\ K \in \mathbb{R}\right\}$.
- ☐ $x \mapsto \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{x}$ est une solution particulière de $(\mathscr{E})$.
- ☐ $x \mapsto \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{x} + \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-2x}$ est la seule solution de $(\mathscr{E})$ qui vaut 1 en 0.
- ☐ Si f est une solution de $(\mathscr{E})$ qui s'annule, alors c'est la fonction nulle.

Question n°6 Soit $(\mathscr{E})$: $y'' + 2y = 0$.

- ☐ Le polynôme caractéristique de $(\mathscr{E})$ est X^2+2.
- ☐ $(\mathscr{E})$ n'a pas de solution réelle.
- ☐ L'ensemble des solutions réelles de $(\mathscr{E})$ est $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\cos(2x)+\mu\sin(2x) \end{array}\right\}$.
- ☐ L'ensemble des solutions complexes de $(\mathscr{E})$ est $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda\cos(2x)+\mu\sin(2x) \end{array},\ \lambda,\mu \in \mathbb{C}\right\}$.

Question n°7

- ☐ Une suite strictement croissante tend vers $+\infty$;
- ☐ Une suite strictement croissante et minorée par 0 tend vers $+\infty$;
- ☐ Une suite d'entiers strictement croissante tend vers $+\infty$;
- ☐ Une suite d'entiers strictement croissante et minorée par 0 tend vers $+\infty$;
- ☐ Une suite majorée et strictement croissante tend vers $+\infty$;
- ☐ Une suite non majorée et strictement croissante tend vers $+\infty$.