DS n° 10 : Fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom : Note :

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

Algèbre linéaire.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$ définie par $f : M \mapsto AM + MA$.

Déterminer en fonction de A : $\operatorname{tr}(f) =$ (1)

Déterminer l'ensemble des paramètres $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 1 & \lambda & -2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

(2)

Permutations.

On considère la permutation de $[\![1, 9]\!]$: $\sigma = (1,3,8,6)(5,2,6)(7,4)(9,1,6,3)(3,5,7,4)(1,5)(6,3)$.
Écrire les permutations suivantes comme produit de cycles à supports disjoints.

$\sigma =$ (3) $\sigma^{-1} =$ (4)

Calculer $\varepsilon(\sigma) =$ (5)

Déterminants.

Calculer les déterminants suivants.

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$ (6) $\begin{vmatrix} -5 & 12 & 3 \\ 7 & 6 & -8 \\ 11 & 4 & -3 \end{vmatrix} =$ (7)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $\theta \in]0, \pi/2[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les déterminants $n \times n$ suivants.

$\begin{vmatrix} a & \dots & \dots & a \\ b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix} =$ (8)

$$\begin{vmatrix} 2\cos(\theta) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos(\theta) \end{vmatrix} = \boxed{} \tag{9}$$

Espaces euclidiens.

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soit $\mathscr{B}$ la base $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right)$. Alors, l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de $\mathscr{B}$ est

(10)

Révisions.

Donner l'ensemble des racines septièmes de $-1+i$.

(11)

Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + \dfrac{2x}{1+x^2} y = \text{Arctan}(x)$:

(12)

Donner le DL en 0 et à l'ordre 3 de $\dfrac{\text{ch}(x)\ln(1+x)}{\cos(x)}$:

(13)

— FIN —