Espaces vectoriels de dimension finie - exercices supplémentaires

Exercice 1 ( ) Soit U un sous-espace vectoriel de E espace vectoriel, et

$$A = \{f \in \mathscr{L}(E) \mid U \subset \mathrm{Ker}(f)\}.$$

Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$. Si E est de dimension finie, quelle est la dimension de A ? Donner un supplémentaire de A dans $\mathscr{L}(E)$.

Exercice 2 ( )

Théorèmes de factorisation.

Soit E, F et G des $\mathbb{K}$-espace vectoriels, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, G étant de dimension finie.

1) Soit $u \in \mathscr{L}(F, E)$ et $v \in \mathscr{L}(G, E)$. Montrer qu'il existe $h \in \mathscr{L}(G, F)$ tel que $v = u \circ h$ si et seulement si $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(u)$.

2) Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(E, G)$. Montrer qu'il existe $h \in \mathscr{L}(G, F)$ tel que $u = h \circ v$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

On pourra réaliser un schéma à chaque fois pour se représenter la situation.