

Feuille d'exercice n° 22 : **Espaces vectoriels de dimension finie – Exercices supplémentaires**

**Exercice 1** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Démontrer que la famille  $S = (X^k(1-X)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ , et déterminer, pour tout  $p \in \{0, 1, \dots, n\}$ , les composantes du polynôme  $X^p$  dans la base  $S$ .

**Exercice 2** Déterminer pour quelles valeurs de  $t \in \mathbb{R}$  les vecteurs  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 3** Soit  $\omega \in \mathbb{C}^*$  et  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $\varphi : \mathbb{C}_n[X] \rightarrow \mathbb{C}_n[X]$ .  
$$P \mapsto \omega P + P'$$

1) Montrer que  $\varphi$  est surjective.

2) Montrer que pour tout  $P \in \mathbb{C}_n[X]$ , l'application  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   
$$x \mapsto P(x)e^{\omega x}$$
 admet une primitive de la forme  $x \mapsto Q(x)e^{\omega x}$ , où  $Q$  est un polynôme de degré au plus  $n$ .

**Exercice 4**

Déterminer un supplémentaire de  $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P'(1) = 0\}$  dans  $\mathbb{R}_4[X]$ .

**Exercice 5**

Dans  $\mathbb{R}_3[X]$  on note  $E$  l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 1. Déterminer un sous-espace vectoriel supplémentaire de  $E$  et en donner une base.

**Exercice 6** Montrer qu'il existe une unique forme linéaire  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$  telle que  $f(1, 2) = 2$  et  $f(-2, 1) = 5$ . Déterminer le noyau et l'image de  $f$ .

**Exercice 7**

**Théorèmes de factorisation.**

Soit  $E$ ,  $F$  et  $G$  des  $\mathbb{K}$ -espace vectoriels, avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $G$  étant de dimension finie.

- 1) Soit  $u \in \mathcal{L}(F, E)$  et  $v \in \mathcal{L}(G, E)$ . Montrer qu'il existe  $h \in \mathcal{L}(G, F)$  tel que  $v = u \circ h$  si et seulement si  $\text{Im}(v) \subset \text{Im}(u)$ .
- 2) Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(E, G)$ . Montrer qu'il existe  $h \in \mathcal{L}(G, F)$  tel que  $u = h \circ v$  si et seulement si  $\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(u)$ .

On pourra réaliser un schéma à chaque fois pour se représenter la situation.

**Exercice 8** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace-vectoriel de dimension  $2p$ , avec  $p \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  de rang  $p$ , vérifiant  $u^2 = 0$ . Comparer  $\text{Im } u$  et  $\text{Ker } u$ .

**Exercice 9** Montrer que l'ensemble  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 3y - z - t = 0\}$  est un hyperplan de  $\mathbb{R}^4$ . En déterminer une base, un supplémentaire ainsi qu'une base de ce supplémentaire.