Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 point, total sur 26 points, ramené sur 5 points, +25%.
- Problèmes : chaque question sur 4 points, total sur 80, ramené sur 15 points, +25% (V1) ou +75% (V2).

Statistiques descriptives.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \min\left(\frac{1}{10}\lceil 10x \rceil\,;20\right)$.

	Calculs	Problème V1	Problème V2	Note finale
Transformation	c	p_1	p_2	$\varphi\left(1,25\frac{5c}{26}+1,25\frac{15p_1}{80}+1,75\frac{15p_2}{80}\right)$
Note maximale	20	47	46	20
Note minimale	2	17	13	$7,2$
Moyenne	$\approx 10,96$	$\approx 31,95$	$\approx 26,33$	$\approx 10,69$
Écart-type	$\approx 3,79$	$\approx 7,72$	$\approx 9,22$	$\approx 2,92$
Premier quartile	9	28	21	$8,25$
Médiane	11	$31,5$	$23,5$	$10,05$
Troisième quartile	$13,5$	$37,5$	$31,75$	$11,75$

Remarques générales.

• Je lis beaucoup trop de phases d'analyse complètement inutiles (ex : **9)** de la V1, **8)** de la V2). Cela vous fait perdre du temps, de l'énergie, et cela montre au correcteur que vous n'avez pas bien compris la question. Bref, analysez les questions posées et répondez-y précisément.
• On attend des résultats de calculs simplifiés. Certains ne le font pas, perdent inutilement des points et, surtout, se compliquent les questions suivantes.
• Certains recopient encore (et toujours) les définitions des objets introduits par l'énoncé. C'est une pure perte de temps, de clarté, de concision. Abstenez-vous.

Exercice vu en TD (V1).

Il ne fallait pas oublier que les familles construites étaient des bases (c'est l'argument de concaténation de bases de supplémentaires).

Réduction d'un endomorphisme (V1).

J'ai relevé des $\dim(f)$. Cela n'a pas de sens.

1) Attention de ne pas confondre *endo*morphisme et *auto*morphisme.
Le calcul de $f(\lambda X + \mu Y)$ se fait très vite, sans passage au brouillon. Sinon, pensez à la bilinéarité du produit matriciel !

2) Question facile, mais, si vous vous trompez dessus, c'est la catastrophe.
Vous devez justifier. Ceux qui ont juste donné la matrice ont perdu des points (bêtement).

3) Inutile de calculer le déterminant vu que l'on vous demande ensuite l'inverse... sauf si vous n'arrivez pas à calculer M^{-1} !
On vous demandait de détailler l'inversion de M. Vous ne pouviez pas exhiber M^{-1} et vérifier $MM^{-1} = I_3$.
Vous devez donner un résultat simplifié. Les réponses du type $M^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ n'est pas acceptable.
Certains utilisent des opérations sur les lignes et les colonnes dans un calcul d'inverse. Ce n'est pas possible. Si c'est le cas pour vous, utilisez une notation de système.

5) Certains s'empressent de développer P, avec de le factoriser entièrement. Je ne comprends pas.
Je ne comprends pas ceux qui développent $\det(M - \lambda I_3)$ ailleurs que sur la deuxième ligne. Ouvrez les yeux et prenez le temps d'observer ce sur quoi vous travaillez.

6) J'ai lu : «$\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})$». Cela n'a pas de sens.
Il y avait un argument de dimension finie à apporter.
$\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}) \neq \{0\}$ est équivalent à la non injectivité de $f - \lambda \mathrm{Id}$, et non pas à sa non bijectivité.

7) Certains ont obtenu $\dim E_1 = \dim E_2 = 2$ (mauvaise ou non application du théorème du rang). Mais cela contredisait la première moitié de la question **7c)** !

7c) $\lambda_1 X = \lambda_2 X$ n'implique ni que $\lambda_1 = \lambda_2$ (et si $X = 0$?), ni que $X = 0$ (et si $\lambda_1 = \lambda_2$?). Il est inquiétant de voir certains étudiants se noyer sur ce type de questions.
Je lis des « si $x \in E_1 \cap E_2$, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. C'est impossible, donc $x = 0$ ». Cela me laisse circonspect quant à la valeur du mot « impossible »...

9) L'analyse était à faire au brouillon.

10) Comme demandé dans l'énoncé («en détaillant complètement»), il fallait calculer les deux matrices de passage.

11b) Attention, une matrice diagonale ne commute pas avec toute matrice. C'est un exercice (important) que nous avons fait : les seuls endomorphismes commutant avec tout endomorphismes sont ceux proportionnels à l'identité.
Certains semblent penser que pour toute matrices A et B, $(A + B)^n = A^n + B^n$. C'est inquiétant.
Certains oublient la formule du binôme de Newton, c'est embêtant.

12) Attention, $M^n = PT^nP^{-1}$ et non $M^n = P^nT^nP^{-n}$.

Matrices à coefficients entiers (V2).

Les arguments de calcul par blocs permettaient de répondre aisément et élégamment à plusieurs questions.
Vous avez (presque) tous répondu « Non » à la première question. Ceux qui ensuite, pour une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$, écrivaient « $\det(M) \neq 0$, donc $M \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{Z})$ » ont été lourdement pénalisés. Vous passiez à côté de la majeure partie du sujet.

1) Il suffisait de donner un contre-exemple simple. Vous deviez le détailler.

2) Pour la non commutativité, on attendait un contre-exemple. Il suffisait d'en donner un pour $n = 2$. Par exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
La première question était là pour vous empêcher d'écrire : « si $A, B \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{Z})$, alors AB est inversible, donc $AB \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{Z})$ ».

4) Question simple, qui n'a pas eu tout le succès attendu.

8) La matrice $\begin{pmatrix} u & v \\ -b & a \end{pmatrix}$ convient pour le produit mais n'est pas dans $\mathscr{GL}_2(\mathbb{Z})$.

9) Il était dommage de ne pas utiliser la question précédente ici, avec un calcul par blocs.

14) C'est toujours le même argument. Il convient de montrer qu'un certain ensemble d'entiers naturels est non vide. Ce n'est pas la propriété de la borne supérieure, mais le principe du minimum !

Prochain DS en spé ! Bonnes vacances !