# Devoir à la maison n° 7

À rendre le 29 novembre

## I. Injectivité et surjectivité de plusieurs fonctions.

Soit $E$ et $F$ deux ensembles, $f : E \to F$ une application et $G$ un troisième ensemble, ayant au moins deux éléments. On construit deux nouvelles applications :

$$f_* : \left\{ \begin{array}{ccc} E^G & \to & F^G \\ \varphi & \mapsto & f \circ \varphi \end{array} \right. \text{ et } f^* : \left\{ \begin{array}{ccc} G^F & \to & G^E \\ \varphi & \mapsto & \varphi \circ f \end{array} \right. .$$

Montrer les équivalences suivantes :

$$f \text{ est injective } \iff f_* \text{ est injective } \iff f^* \text{ est surjective.}$$

## II. Une égalité.

Soit $E$ et $F$ deux ensembles, $f : E \to F$, $A$ une partie de $E$ et $B$ une partie de $F$. Montrer que :

$$f(A \cap f^{\leftarrow}(B)) = f(A) \cap B.$$

## III. Un théorème de point fixe.

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application croissante. On veut montrer que $f$ possède un point fixe, *i.e.* qu'il existe $t \in [0,1]$ tel que $f(t) = t$.

**1)** On note $T = \{x \in [0,1] \mid f(x) \leqslant x\}$.

- **a)** Montrer que $T$ possède une borne inférieure, notée $t$.
- **b)** Montrer que $f(T) \subset T$.
- **c)** Montrer que $f(t)$ minore $T$.
- **d)** Déduire de tout ceci que $f(t) = t$.

**2)** Ce résultat est-il toujours vrai :

- **a)** pour $f : ]0,1] \to ]0,1]$ croissante ?
- **b)** pour $f : [0,1[ \to [0,1[$ croissante ?

**— FIN —**