EL3 CIRCUITS LINEAIRES DU PREMIER ORDRE

Il s'agit de l'étude du comportement de certains dipôles passifs en régime variable dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

I. Equations de fonctionnement (rappels)

• Nous présentons ci-dessous, sous forme condensée, les propriétés des dipôles linéaires suivant son fonctionnement.

Dipôles linéaires passifs

Type de fonctionnement	Régime continu	Régime variable
Relation courant-tension	Relation affine : u = ri (convention récepteur)	u et i sont liés par une équation différentielle linéaire. Ex.: $i = C.\dfrac{du}{dt}$, $u = L.\dfrac{di}{dt} + ri$,...
Modélisation d'un dipôle linéaire passif	Résistance pure R.	Association des dipôles idéaux R, L, C.

L'application des lois de l'électrocinétique à un réseau linéaire en régime variable conduit à un système d'équations différentielles à coefficients constants.

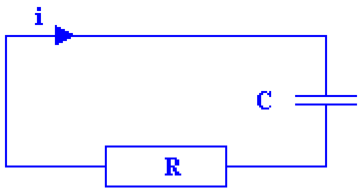
•Définitions :

• Circuit du 1° ordre : c'est un circuit dont l'étude conduit à une équation différentielle du 1° ordre du type: $a\,y(t) + b\,\dot{y}(t) = c(t)$
(où c(t) est une fonction connue liée à la présence des générateurs de commande).
Ex.: un circuit (R, L) ou (R, C).

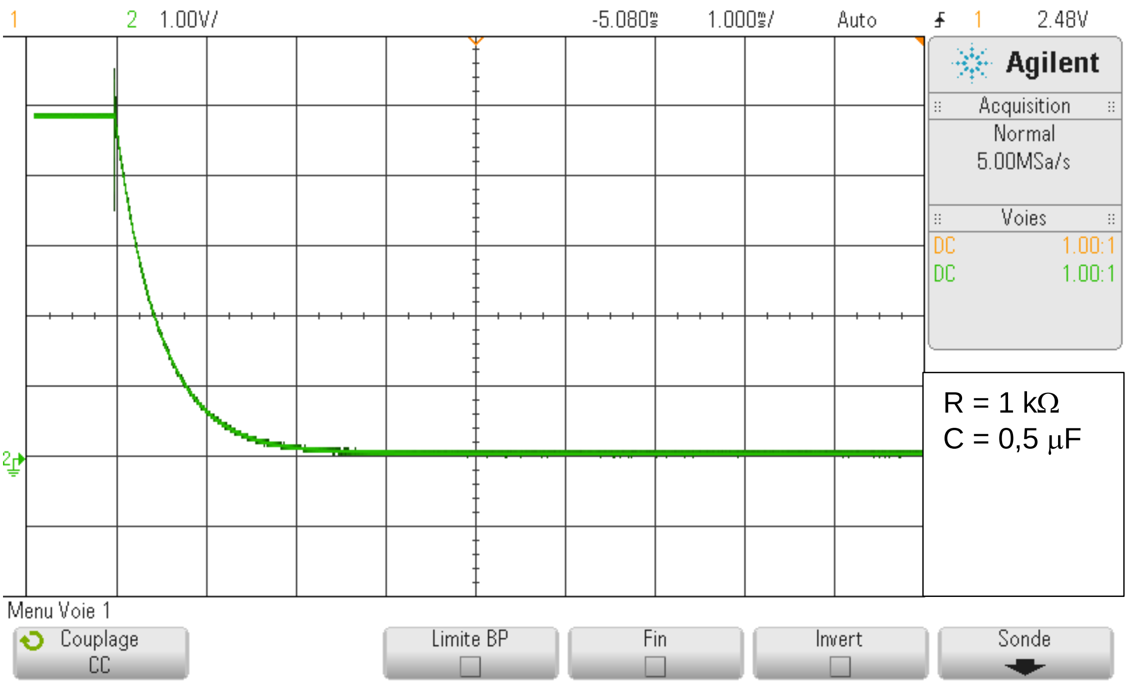
II. Régime libre d'un circuit RC

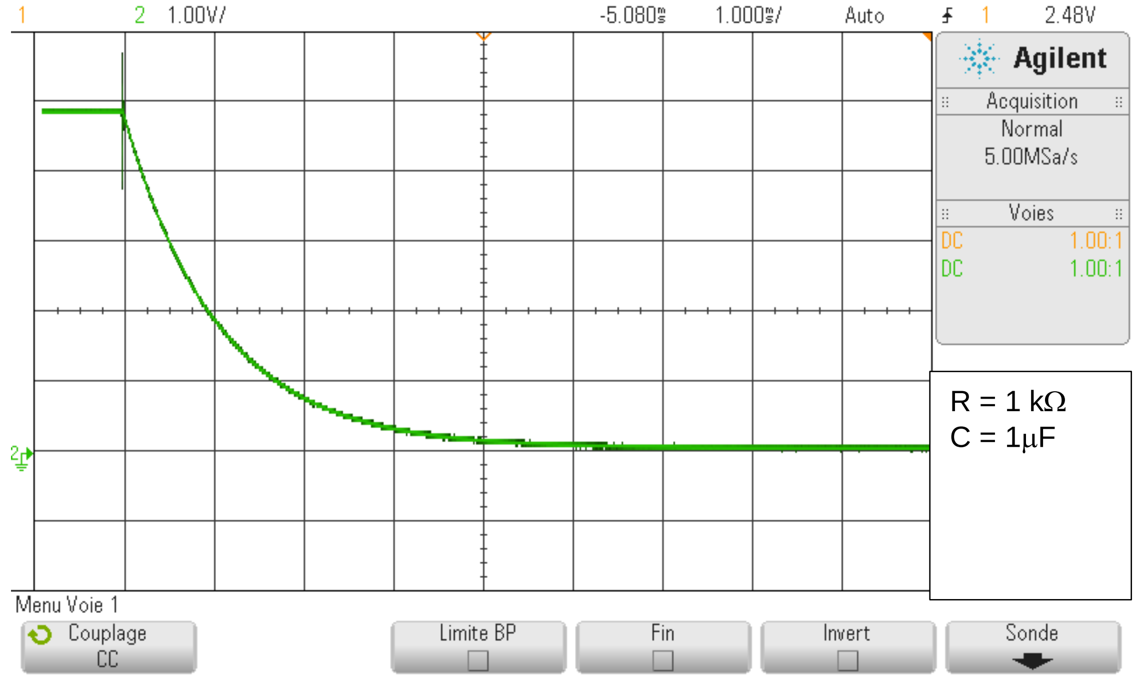
Le régime libre ou propre = évolution spontanée du circuit en absence de toute perturbation extérieure.

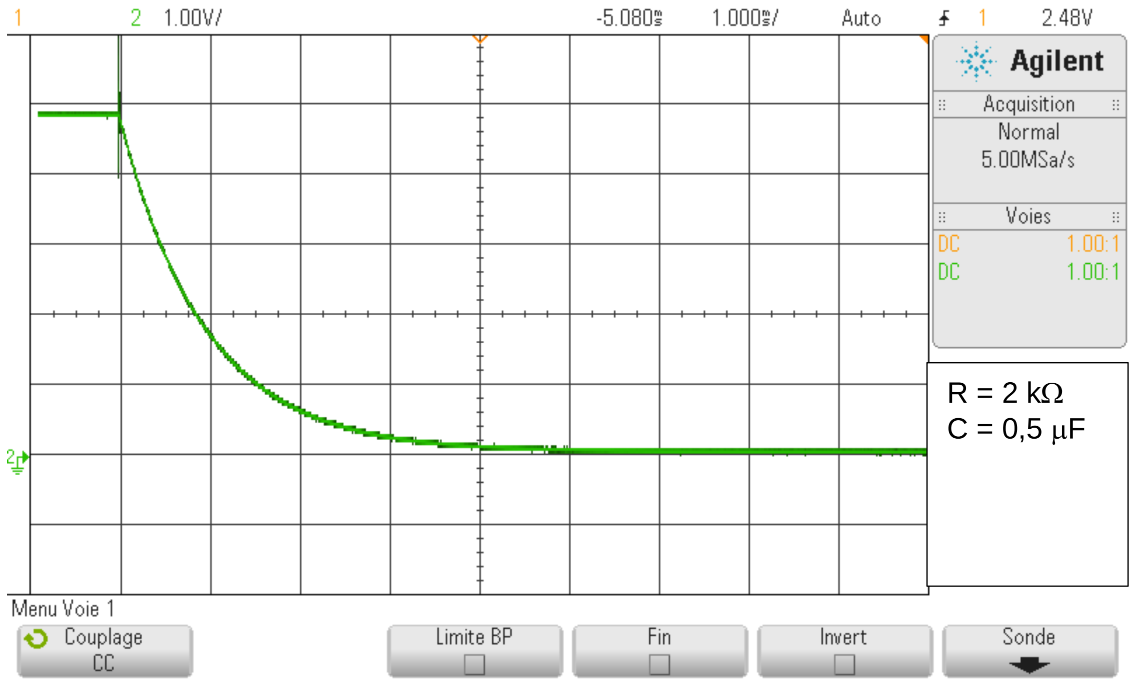
II.1. Observation



Soit un circuit formé d'un condensateur chargé que l'on branche sur une résistance
(Prévoir offset, f = 55 Hz)





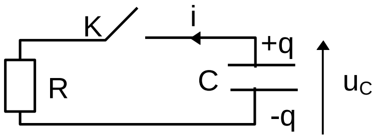


On remarque qu'au bout d'un temps plus ou moins long selon la valeur de RC la tension aux bornes du condensateur reste constamment nulle.

Ainsi l'évolution se décompose en deux parties :

- Le régime transitoire la tension aux bornes de C diminue.
- Le régime permanent la tension aux bornes de C reste constante.

II.2. Mise en équation



t = 0 le condensateur porte la charge q_0
On ferme l'interrupteur K.

t > 0 équation de maille : $u_C(t) = \frac{q(t)}{C} = Ri(t)$

or $i(t) = -\frac{dq(t)}{dt}$

$\Rightarrow \quad \dot{q}(t) + \frac{1}{RC}q(t) = 0$

On pose **τ = RC**, il est homogène à un temps, c'est la constante de temps ou le temps de relaxation

$$\Rightarrow \quad \boxed{\dot{q}(t) + \frac{1}{\tau}q(t) = 0}$$

Il s'agit bien d'un système du premier ordre.

II.3. Portrait de phase

II.3.1. Définitions

• C'est la représentation dans le plan $(0, f(t), \frac{df(t)}{dt})$ lorsque t varie.

• On appelle point de phase un point P figuratif dont les coordonnées à un instant donné t sont $(f(t), \frac{df(t)}{dt})$

• Lorsque t varie, le point P décrit une courbe, cette courbe est appelée **trajectoire de phase**.

• On appelle portrait de phase l'ensemble des trajectoires de phase lorsque les conditions initiales varient.

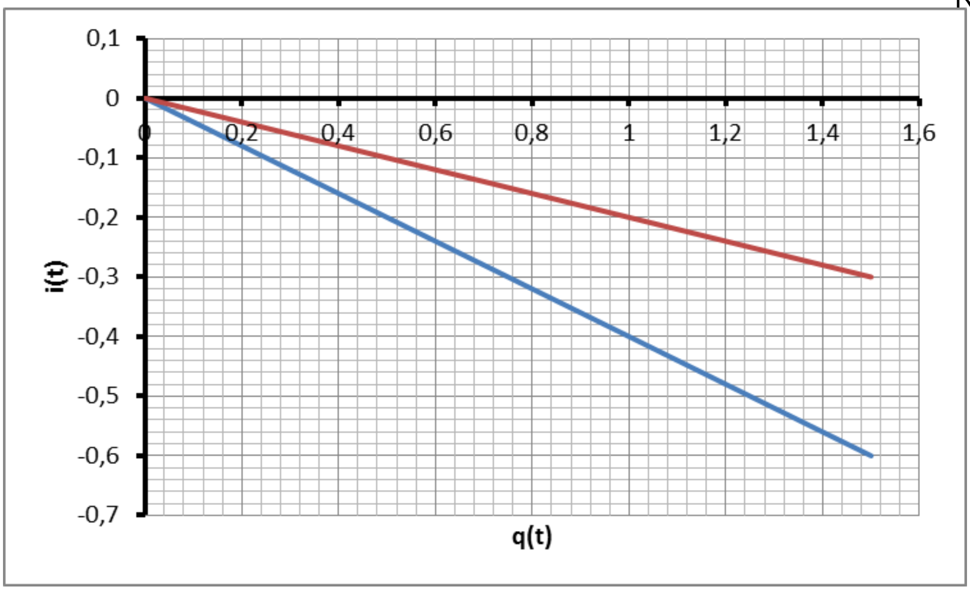
II.3.2 Représentation dans le plan de phase :

Dans notre cas $f(t) = q(t)$ et $\frac{df(t)}{dt} = -i(t)$.

Or d'après la mise en équation $\frac{q(t)}{C} = Ri(t)$

On a donc $i(t) = -\frac{q(t)}{RC}$

L'équation dela trajectoire de phase correspond à une droite de pente $-\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau}$



La mesure de la pente de la droite nous renseigne sur la valeur du temps caractéristique du circuit.
On peut suivre l'évolution de i(t) par un ampèremètre, et q(t) par l'intermédiaire de u(t) et d'un voltmètre.

II.4. Résolution

• Solution générale : $\dot{q}(t) + \frac{1}{\tau} q(t) = 0 \Rightarrow q(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

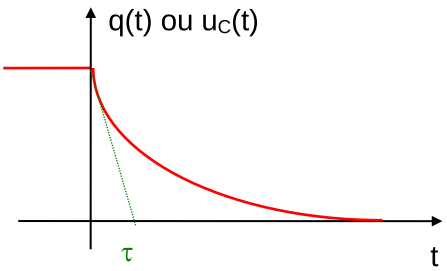
• Condition initiale : à t = 0 $q(0^-) = q_0 = q(0^+)$ car la charge d'un condensateur est une fonction continue du temps.

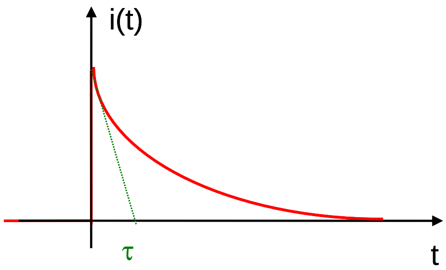
$$\Rightarrow q(t) = q_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

De même $\Rightarrow u_C(t) = \frac{q_0}{C} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

et $\Rightarrow i(t) = \frac{1}{\tau} q_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

• Schémas





Les tangentes à l'origine coupent l'axe des abscisses en t = τ.

Démonstration : $y = f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) \Rightarrow y - q_0 = -\frac{q_0}{\tau} t$.

• τ est une grandeur caractéristique du circuit RC considéré, il indique la rapidité d'évolution au cours du temps du régime libre : $t = \tau \Rightarrow q = \frac{q_0}{e}$

A titre indicatif q(t) vaut 5% de la valeur initiale pour t = 3τ, et 0.1% de celle-ci pour t = 7τ.

II.5. Bilan énergétique

• Bilan instantané

$$u_C(t) = \frac{q(t)}{C} = Ri(t) \xrightarrow{\times idt = -dq} -\frac{q}{C} dq = Ri^2 dt \Rightarrow -d\left(\frac{q^2}{2C}\right) = Ri^2 dt$$

On appelle :
$W_C = q^2/2C$: énergie totale emmagasinée dans le condensateur.
$\delta W_J = Ri^2 dt$: énergie élémentaire dissipée par effet Joule dans le circuit.

L'énergie perdue pour le condensateur est dissipée par effet joule.

• Bilan entre 0 et t

$$\Delta W_C = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} - \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}\left(\exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) - 1\right)$$

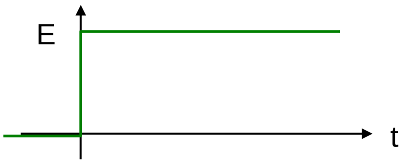
$$W_R = \int_0^t Ri^2 dt = \frac{q_0^2}{2C}\int_0^t \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) dt = \frac{q_0^2}{R\tau^2}\left[-\frac{\tau}{2}\exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)\right]_0^t = \frac{q_0^2}{2C}\left(1 - \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)\right)$$

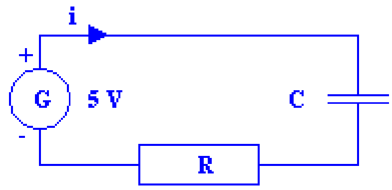
III. Réponse à un échelon de tension d'un circuit RC

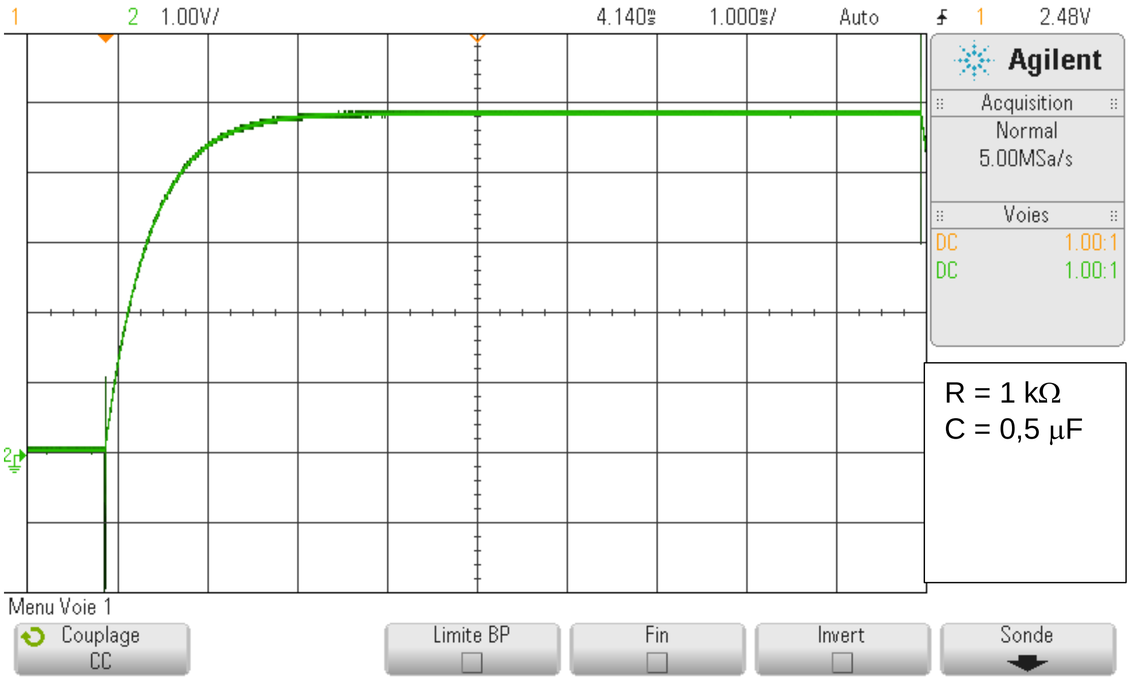
III.1. Observation

Echelon de tension :
A t<0 le générateur délivre une tension u(t) = 0V
A t>0 le générateur délivre une tension u(t) = E

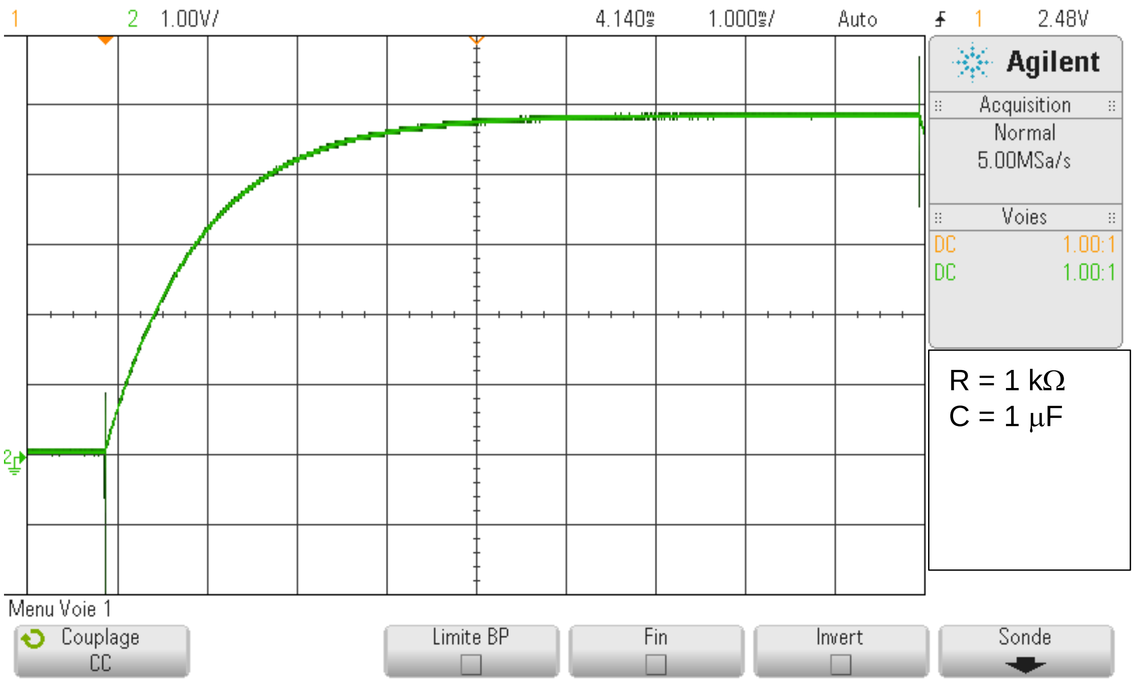
Ainsi on applique au circuit RC un échelon de tension.





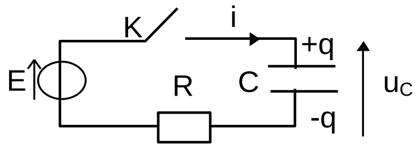


R = 1 kΩ
C = 0,5 μF



R = 1 kΩ
C = 1 μF

III.2. Mise en équation



t = 0 le condensateur ne porte pas de charge
On ferme l'interrupteur K.

t > 0 équation de maille : $u_C + Ri = E$

or $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ et $u_C(t) = \frac{q(t)}{C}$

$\Rightarrow$ $\dot{q}(t) + \frac{1}{\tau} q(t) = \frac{E}{R}$

On pose **τ = RC**, il est homogène à un temps, c'est la constante de temps ou le temps de relaxation

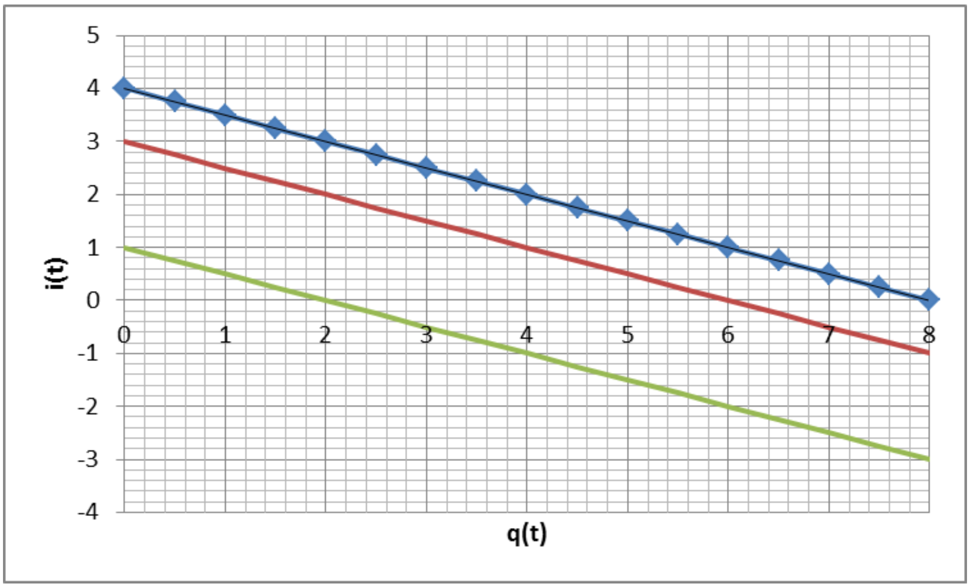
Il s'agit bien d'un système du premier ordre.

III.3. Le portrait de phase

Dans notre cas f(t) = q(t) et $\frac{df(t)}{dt} = i(t)$.

Or d'après la mise en équation $i(t) = \frac{-q(t)}{RC} + \frac{E}{R}$

L'équation de la trajectoire de phase correspond à une droite de pente $-\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau}$ et d'ordonnée à l'origine E/R



III.4. Résolution

- Solution générale de l'équation homogène : $q_1(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$
- Solution particulière de l'équation totale : $q_2(t) = CE$
- Solution générale de l'équation totale : $q(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + CE$

- Condition initiale : à t = 0 q = 0

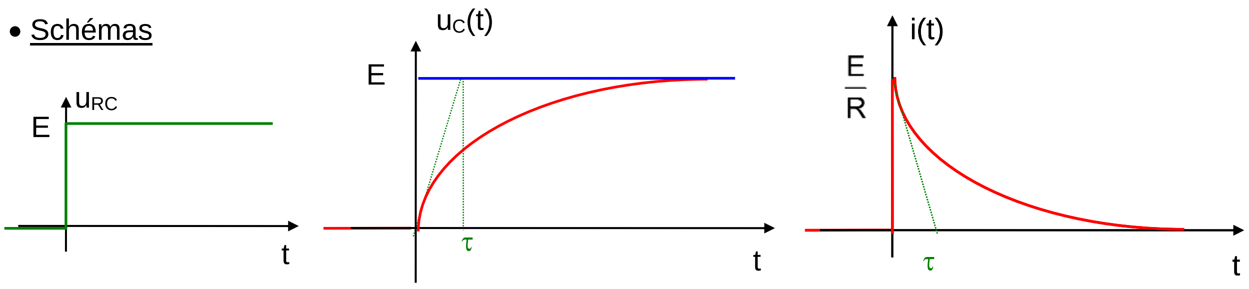
La continuité de la charge aux bornes d'un condensateur $\Rightarrow$ A = -CE

D 'où $q(t) = CE\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$

Et $i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

• <u>Remarques</u> : quand $t \to \infty$ $q \to CE$
i en à nouveau discontinu.

• <u>Schémas</u>



III.5.Bilan énergétique

$$u_C + Ri = E \xrightarrow{idt\,=\,dq} \frac{q}{C}dq + Ri^2dt = Eidt \Rightarrow d\left(\frac{q^2}{2C}\right) + Ri^2dt = Eidt$$

Ou encore $\frac{q^2}{2C} + \int_0^t Ri^2dt = \int_0^t Eidt$

On appelle :

$\delta W_c = d(q^2/2C)$ *: énergie emmagasinée dans le condensateur.*

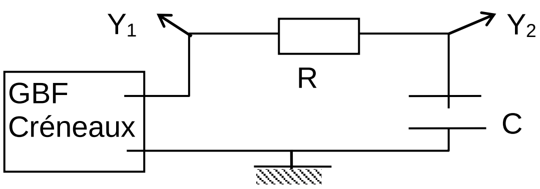
$\delta W_g = Eidt$ *: énergie élémentaire fournie par le générateur.*

$\delta W_J = Ri^2dt$ *: énergie élémentaire dissipée par effet Joule dans le circuit.*

Une partie de l'énergie fournie au circuit par le générateur est emmagasinée par le condensateur, le reste est dissipée par effet joule.

IV. Observations expérimentales d'un circuit RC

• Le montage :



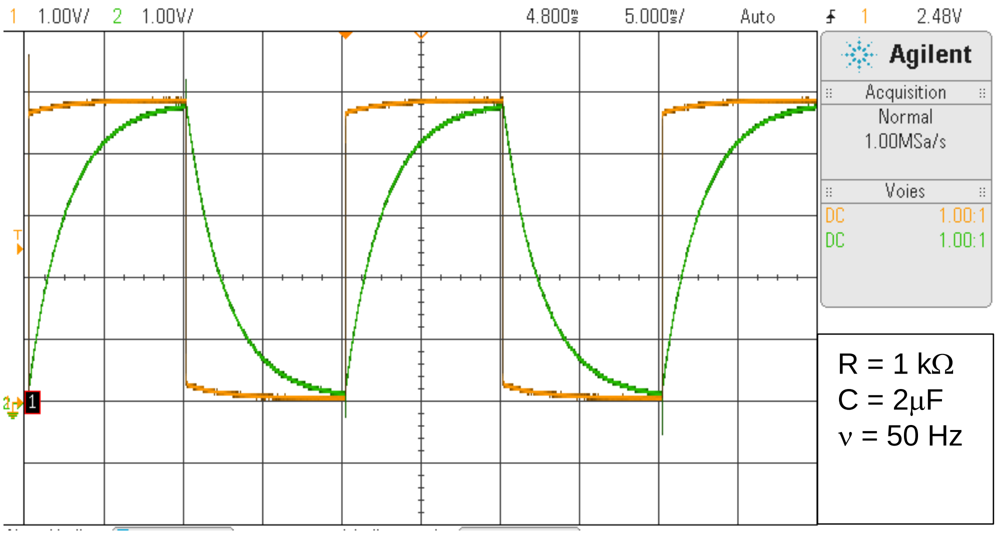
GBF = générateur délivrant des signaux (sinusoïdal, carré ou créneau et dents de scie) dont on peut régler la fréquence (de 10 Hz à 10 MHz) et l'amplitude (jusqu'à environ 10 V).
On utilise un oscilloscope bicourbe pour observer en Y_2 la tension aux bornes du condensateur et en Y_1 les créneaux.

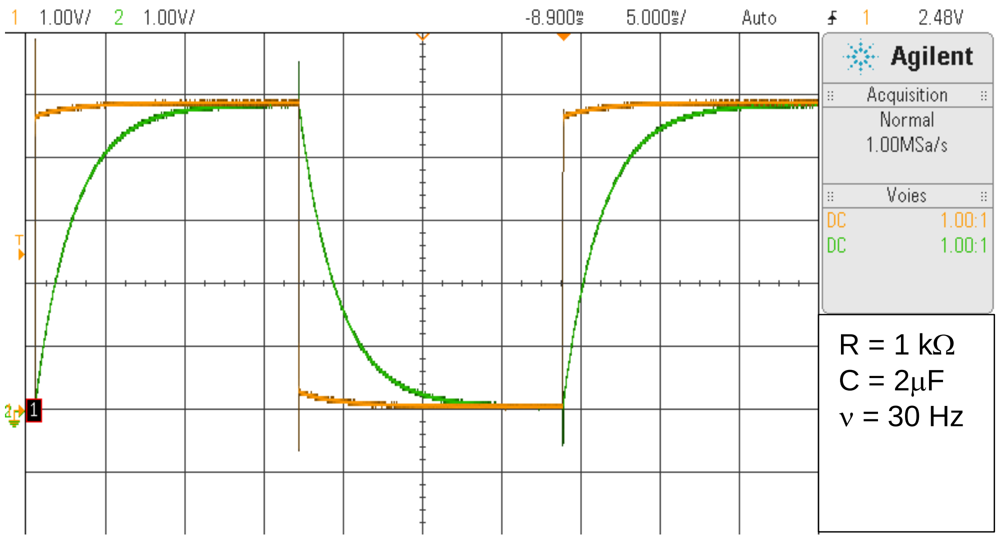
• Les valeurs
On choisit R = 1 kΩ, C = 2μF $\Rightarrow \tau = 2$ ms.

Pour observer la charge et la décharge du condensateur il faut que $\frac{T}{2} >> \tau$.

Dans la pratique $\frac{T}{2} = 5\tau$ suffit, on choisit donc T = 20 ms soit $\nu = 50$ Hz.

- Observations





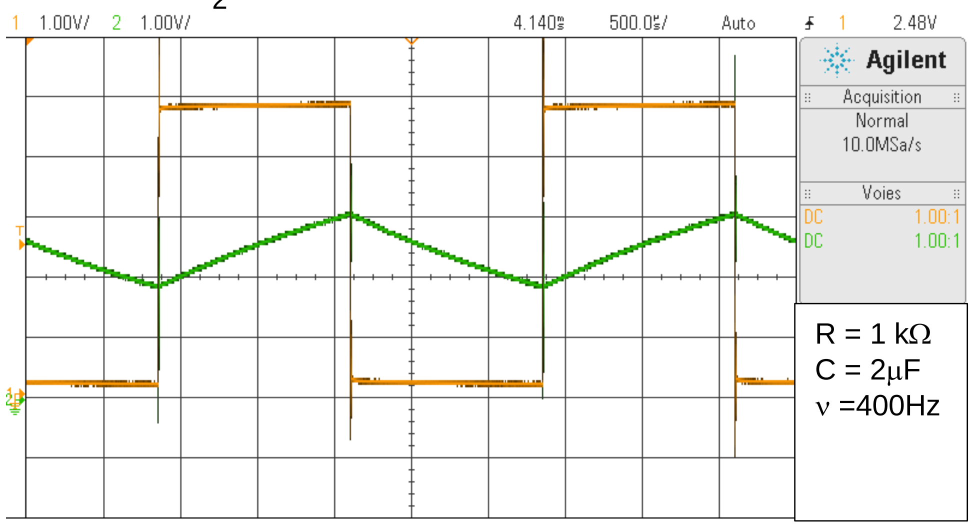
- Temps de montée t_m= le temps que met la tension aux bornes de la capacité pour passer de 10% à 90% de sa valeur en régime permanent.

A t_1 $\quad u_C = 0.1\,E = E\left(1 - \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right)\right) \Rightarrow t_1 \approx 0.1\tau$

A t_2 $\quad u_C = 0.9\,E = E\left(1 - \exp\left(-\frac{t_2}{\tau}\right)\right) \Rightarrow t_2 \approx 2.3\tau$

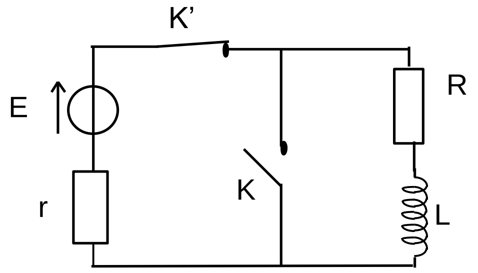
D'où $t_m = t_2 - t_1 = 2.2\tau$.

- <u>Remarque</u> si $\frac{T}{2} << \tau$ on observe alors une triangularisation de la tension aux bornes de C.



V. Circuit RL

V.1. Mise en équation



t < 0 L'interrupteur K est ouvert
L'interrupteur K' est fermé
t = 0 On ouvre K' et on ferme K

t > 0 équation de maille : $L\,\dot{i}(t) + Ri = 0$

$\Rightarrow \qquad \dot{i}(t) + \frac{R}{L} i(t) = 0$

On pose **τ = L / R**, il est homogène à un temps, c'est la constante de temps ou le temps de relaxation

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\dot{i}(t) + \frac{1}{\tau} i(t) = 0}$$

Il s'agit bien d'un système du premier ordre.

$$\dot{i}(t) + \frac{1}{\tau} i(t) = 0 \xrightarrow{\times L\frac{d}{dt}} \dot{u}_L(t) + \frac{1}{\tau} u_L(t) = 0$$

V.2. Résolution

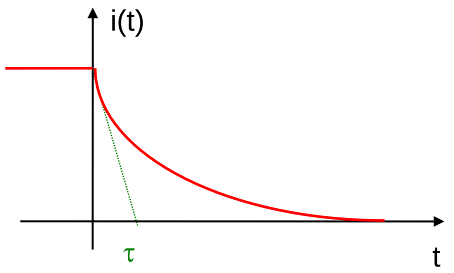
• Solution générale : $\dot{i}(t) + \frac{1}{\tau} i(t) = 0 = 0 \Rightarrow i(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

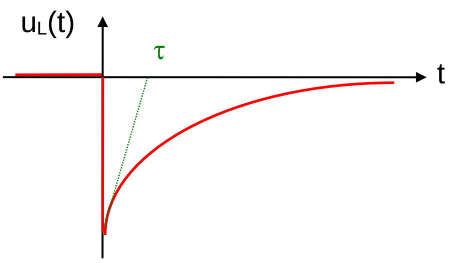
• Condition initiale : à t = 0 $i(0^-) = i_0 = \frac{E}{r+R} = i(0^+)$ car l'intensité qui traverse une bobine est une fonction continue du temps.

$$\Rightarrow i(t) = i_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

De même $\Rightarrow u_L(t) = -L\frac{i_0}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = -Ri_0\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

• Schémas





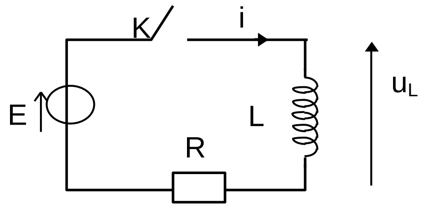
Les tangentes à l'origine coupent l'axe des abscisses en t = τ.

V.3. Bilan énergétique

$$Ri = -L\frac{di}{dt} \xrightarrow{\times idt} Ri^2dt = -d\left(\frac{Li^2}{2}\right)$$

L'énergie perdue par la bobine a été dissipée par effet joule.

V.4. Réponse à un échelon de tension



t < 0 L'interrupteur K est ouvert
t =0 on ferme l'interrupteur K

Ainsi on applique au circuit RL un échelon de tension.

• Mise en équation : $u_L + Ri = E$

or $u_L = L\dfrac{di}{dt}$

d'où $\dot{i}(t) + \dfrac{1}{\tau} i(t) = \dfrac{E}{L}$ avec $\tau = L/R$

• Résolution :

→ Solution générale de l'équation homogène : $i_1(t) = A \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$

→ Solution particulière de l'équation totale : $i_2(t) = \dfrac{E}{R}$

→ Solution générale de l'équation totale : $i(t) = A \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) + \dfrac{E}{R}$

• Condition initiale : à t = 0 i = 0

La continuité de l'intensité qui traverse une bobine $\Rightarrow A = -\dfrac{E}{R}$

D 'où $i(t) = \dfrac{E}{R}\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)$

• Remarque : quand $t \to \infty$ $i \to \dfrac{E}{R}$

Le retard de l'établissement du courant dans un tel circuit est une conséquence physique du phénomène d'auto-induction de la bobine.

EL3 DIPOLES LINEAIRES PASSIFS EN REGIME TRANSITOIRE