3.1 - Transposée

Ex : $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad {}^tM = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$= M^T$

Définition : Si $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$,

La transposée est la matrice ${}^tM = (m_{ji})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$

Bonne habitude : donner 1 autre nom aux coeff : noter ${}^tM = (n_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$

avec : $\forall i \in [\![1, p]\!], \forall j \in [\![1, n]\!]$:

$$n_{ij} = m_{ji}.$$

Proposition 3.1.3 :

1)
$$\varphi : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$$
$$A \longmapsto {}^tA$$

φ est linéaire.

2) $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$,

$${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA.$$

3) ${}^t({}^tA) = A$

4) A est inversible ssi ${}^tA$ est inversible,

et dans ce cas : $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

<u>Démo :</u> 2) $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq q}}$

${}^tA = (\alpha_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq n}}$, ${}^tB = (\beta_{ij})_{\substack{1\leq i\leq q \\ 1\leq j\leq p}}$

Soit $i \in [\![1,q]\!]$, $j \in [\![1,n]\!]$:

le coeff j,i de $A\times B$ vaut : $\sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki}$

dc : le coeff. i,j de ${}^t(AB)$ vaut :

$$\sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki} .$$

le coeff. i,j de ${}^tB.{}^tA$ vaut : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \beta_{ik} \alpha_{kj}$

$$\text{ie : } \sum_{k=1}^{p} b_{ki} \, a_{jk}$$

donc : $${}^t(AB) = {}^tB \, {}^tA .$$

4) Si A est inversible :

$$A.A^{-1} = I_n$$

dc : $${}^t(A.A^{-1}) = {}^tI_n = I_n$$

dc : ${}^tA \cdot {}^t(A^{-1}) = I_n$

dc ${}^tA$ est inversible et :

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}).$$

Rq : La transposition transforme des résultats sur les colonnes en résultats sur les lignes (et inversement).

Ex : Nous savons qu'une matrice carrée est inversible ssi ses col. forment une base.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

A est inv. ssi ${}^tA$ est inv.

ssi les vect. col. de ${}^tA$ forment une base

ssi les "vect. lignes" de A forment une base.

<u>Ex</u> : $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & e^{\pi} & \arctan \frac{\pi}{8} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$L_3 = 2L_2$: A n'est pas inversible.