C4 : Modélisation cinématiques des systèmes composés de chaines de solides
C4-4 : Cinématique du solide

Émilien DURIF

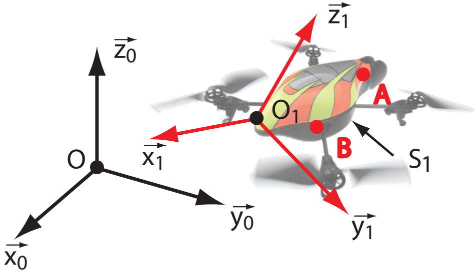
Lycée La Martinière Monplaisir Lyon
Classe de MPSI
18 Décembre 2018

Plan

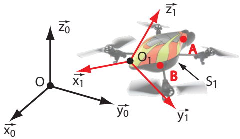
Plan

Cinématique du solide : torseur cinématique

$$\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) = \overrightarrow{\Omega}(S_1/R_0).$$



Cinématique du solide : torseur cinématique

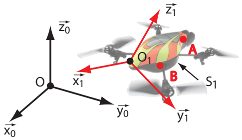


- $$\left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_{R_1} = \overrightarrow{0}.$$

- $$\left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega}(S_1/R_0) \wedge \overrightarrow{AB}.$$

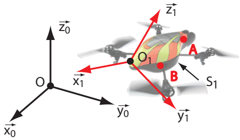
- $$\left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right]_{R_0} - \left[\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right]_{R_0}$$
$$= \overrightarrow{V}(B/R_0) - \overrightarrow{V}(A/R_0)$$

Cinématique du solide : torseur cinématique



- $$\left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_{R_1} = \overrightarrow{0}.$$
- $$\left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega}(S_1/R_0) \wedge \overrightarrow{AB}.$$
- $$\left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right]_{R_0} - \left[\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right]_{R_0} = \overrightarrow{V}(B/R_0) - \overrightarrow{V}(A/R_0)$$

Cinématique du solide : torseur cinématique



- $$\left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_{R_1} = \vec{0}.$$
- $$\left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_{R_1} + \vec{\Omega}(S_1/R_0) \wedge \overrightarrow{AB}.$$
- $$\left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right]_{R_0} - \left[\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right]_{R_0} = \vec{V}(B/R_0) - \vec{V}(A/R_0)$$

Cinématique du solide : torseur cinématique

Changement de point

- On obtient alors **la relation fondamentale de changement de point pour le champ cinématique** pour deux points A et B appartenant à un solide quelconque S :

$$\overrightarrow{V}(B/R_0) = \overrightarrow{V}(A/R_0) + \overrightarrow{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V}(A/R_0) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}(S/R_0).$$

- On peut étendre cette formule à **deux points quelconques** A **et** B (n'appartenant pas forcément à S) avec l'utilisation des vitesses d'entrainement :

$$\boxed{\overrightarrow{V}(B \in S/R_0) = \overrightarrow{V}(A \in S/R_0) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}(S/R_0).} \qquad (1)$$

- *On peut parfois appeler cette relation,* **la formule de Varignon**.

Remarque

On remarque alors que les vecteurs vitesses des points d'un solide indéformable vérifient la relation de changement de point du moment d'un torseur. Nous pouvons alors définir le torseur cinématiques.

Cinématique du solide : torseur cinématique

Changement de point

- On obtient alors **la relation fondamentale de changement de point pour le champ cinématique** pour deux points A et B appartenant à un solide quelconque S :

$$\overrightarrow{V}(B/R_0) = \overrightarrow{V}(A/R_0) + \overrightarrow{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V}(A/R_0) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}(S/R_0).$$

- On peut étendre cette formule à **deux points quelconques** A **et** B (n'appartenant pas forcément à S) avec l'utilisation des vitesses d'entrainement :

$$\boxed{\overrightarrow{V}(B \in S/R_0) = \overrightarrow{V}(A \in S/R_0) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}(S/R_0).} \qquad (1)$$

- *On peut parfois appeler cette relation,* **la formule de Varignon**.

Remarque

On remarque alors que les vecteurs vitesses des points d'un solide indéformable vérifient la relation de changement de point du moment d'un torseur. Nous pouvons alors définir le torseur cinématiques.

Cinématique du solide : torseur cinématique

Changement de point

- On obtient alors **la relation fondamentale de changement de point pour le champ cinématique** pour deux points A et B appartenant à un solide quelconque S :

$$\overrightarrow{V}(B/R_0) = \overrightarrow{V}(A/R_0) + \overrightarrow{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V}(A/R_0) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}(S/R_0).$$

- On peut étendre cette formule à **deux points quelconques** A **et** B (n'appartenant pas forcément à S) avec l'utilisation des vitesses d'entrainement :

$$\boxed{\overrightarrow{V}(B \in S/R_0) = \overrightarrow{V}(A \in S/R_0) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}(S/R_0).} \qquad (1)$$

- *On peut parfois appeler cette relation,* **la formule de Varignon***.*

Remarque

On remarque alors que les vecteurs vitesses des points d'un solide indéformable vérifient la relation de changement de point du moment d'un torseur. Nous pouvons alors définir le torseur cinématiques.

Cinématique du solide : torseur cinématique

Torseur cinématique

On définit le torseur cinématique du mouvement d'un solide indéformable S par rapport à un repère R_0, le torseur qui a pour résultante, le vecteur de rotation instantané $\vec{\Omega}(S/R_0)$ et pour moment la vitesse en un point donné A, dans le mouvement de S par rapport à R_0, $\overrightarrow{V_{(A\in S/R_0)}}$. On le note alors :

$$\boxed{\left\{\mathscr{V}_{(S/R_0)}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{(S/R_0)}}\\ \overrightarrow{V_{(A\in S/R_0)}} = \vec{V}_A(S/R_0)\end{array}\right\}} \tag{2}$$

Torseur

Un torseur est un outil mathématique qui présente deux composantes vectorielles :

- Une résultante qui est indépendante du point où on l'exprime et que l'on note $\vec{R} = \overrightarrow{\Omega_{(S/R_0)}}$.
- Un moment qui dépend du point où on l'exprime par la formule fondamental de changement de point et que l'on note $\vec{M}_A(\vec{R}) = \overrightarrow{V_{(A\in S/R_0)}} = \vec{V}_A(S/R_0)$.

Cinématique du solide : torseur cinématique

Torseur cinématique

On définit le torseur cinématique du mouvement d'un solide indéformable S par rapport à un repère R_0, le torseur qui a pour résultante, le vecteur de rotation instantané $\overrightarrow{\Omega}(S/R_0)$ et pour moment la vitesse en un point donné A, dans le mouvement de S par rapport à R_0, $\overrightarrow{V_{(A\in S/R_0)}}$. On le note alors :

$$\boxed{\left\{\mathscr{V}_{(S/R_0)}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{(S/R_0)}} \\ \overrightarrow{V_{(A\in S/R_0)}} = \overrightarrow{V}_A(S/R_0)\end{array}\right\}} \qquad (2)$$

Torseur

Un torseur est un outil mathématique qui présente deux composantes vectorielles :

- Une résultante qui est **indépendante** du point où on l'exprime et que l'on note $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{\Omega_{(S/R_0)}}$.
- Un moment qui **dépend du point** où on l'exprime par la **formule fondamental de changement de point** et que l'on note $\overrightarrow{M}_A(\overrightarrow{R}) = \overrightarrow{V_{(A\in S/R_0)}} = \overrightarrow{V}_A(S/R_0)$.

Cinématique du solide : torseur cinématique

Torseur cinématique

On définit le torseur cinématique du mouvement d'un solide indéformable S par rapport à un repère R_0, le torseur qui a pour résultante, le vecteur de rotation instantané $\overrightarrow{\Omega}(S/R_0)$ et pour moment la vitesse en un point donné A, dans le mouvement de S par rapport à R_0, $\overrightarrow{V_{(A\in S/R_0)}}$. On le note alors :

$$\boxed{\left\{\mathscr{V}_{(S/R_0)}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{(S/R_0)}} \\ \overrightarrow{V_{(A\in S/R_0)}} = \overrightarrow{V}_A(S/R_0) \end{array}\right\}} \tag{2}$$

Torseur

Un torseur est un outil mathématique qui présente deux composantes vectorielles :

- Une résultante qui est **indépendante** du point où on l'exprime et que l'on note $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{\Omega_{(S/R_0)}}$.
- Un moment qui **dépend du point** où on l'exprime par la **formule fondamental de changement de point** et que l'on note $\overrightarrow{M}_A(\overrightarrow{R}) = \overrightarrow{V_{(A\in S/R_0)}} = \overrightarrow{V}_A(S/R_0)$.

Cinématique du solide : torseur cinématique

Torseur cinématique

On définit le torseur cinématique du mouvement d'un solide indéformable S par rapport à un repère R_0, le torseur qui a pour résultante, le vecteur de rotation instantané $\overrightarrow{\Omega}(S/R_0)$ et pour moment la vitesse en un point donné A, dans le mouvement de S par rapport à R_0, $\overrightarrow{V_{(A\in S/R_0)}}$. On le note alors :

$$\boxed{\left\{\mathscr{V}_{(S/R_0)}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{(S/R_0)}} \\ \overrightarrow{V_{(A\in S/R_0)}} = \overrightarrow{V}_A(S/R_0) \end{array}\right\}} \quad (2)$$

Torseur

Un torseur est un outil mathématique qui présente deux composantes vectorielles :

- Une résultante qui est **indépendante** du point où on l'exprime et que l'on note $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{\Omega_{(S/R_0)}}$.
- Un moment qui **dépend du point** où on l'exprime par la **formule fondamental de changement de point** et que l'on note $\overrightarrow{M}_A(\overrightarrow{R}) = \overrightarrow{V_{(A\in S/R_0)}} = \overrightarrow{V}_A(S/R_0)$.

Cinématique du solide : torseur cinématique

Remarque

Le point A est lié au solide S. Deux cas peuvent se présenter.

- Lorsque le point appartient physiquement au solide (S), il est lié à tout instant à ce solide. On peut alors calculer sa vitesse avec le vecteur vitesse ou par dérivation vectorielle. On parlera alors de **point matériel**.
- Lorsque le point considéré est lié uniquement au solide à l'instant t où on calcule son vecteur vitesse, on ne peut calculer sa vitesse qu'en utilisant la loi de composition des vitesses. On parlera alors de **point géométrique**.

Cinématique du solide : torseur cinématique

Remarque

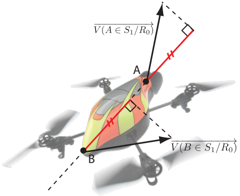
Le point A est lié au solide S. Deux cas peuvent se présenter.

- Lorsque le point appartient physiquement au solide (S), il est lié à tout instant à ce solide. On peut alors calculer sa vitesse avec le vecteur vitesse ou par dérivation vectorielle. On parlera alors de **point matériel**.
- Lorsque le point considéré est lié uniquement au solide à l'instant t où on calcule son vecteur vitesse, on ne peut calculer sa vitesse qu'en utilisant la loi de composition des vitesses. On parlera alors de **point géométrique**.

Cinématique du solide : torseur cinématique

Equiprojectivité

$$\boxed{\overrightarrow{V_{(A\in S_1/R_0)}} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_{(B\in S_1/R_0)}} \cdot \overrightarrow{AB}} \qquad (3)$$



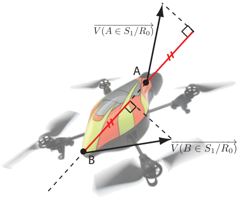
Remarque

Utile pour les problèmes de **cinématique graphique**.

Cinématique du solide : torseur cinématique

Equiprojectivité

$$\boxed{\overrightarrow{V_{(A\in S_1/R_0)}} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_{(B\in S_1/R_0)}} \cdot \overrightarrow{AB}} \quad (3)$$



Remarque

Utile pour les problèmes de **cinématique graphique**.

Cinématique du solide : torseur cinématique

Axe central

- - Un **point central** d'un torseur est un point où le moment résultant a même direction que la résultante générale.
  - L'**axe central** d'un torseur est la droite constituée par l'ensemble des points centraux. Il a même direction que la résultante du torseur. L'axe central n'existe que si la résultante du torseur n'est pas nulle.
- Supposons un torseur défini en un point A du mouvement de S_1/R_0 :

$$\left\{\mathscr{V}_{(S_1/R_0)}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}}\\ \overrightarrow{V_{(A\in S_1/R_0)}}\end{array}\right\}$$

- La projection du point A sur l'axe central H est obtenu par la relation suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}} \wedge \overrightarrow{V_{(A\in S_1/R_0)}}}{\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}}^2}} \quad (4)$$

Cinématique du solide : torseur cinématique

Axe central

- - Un **point central** d'un torseur est un point où le moment résultant a même direction que la résultante générale.
  - L'**axe central** d'un torseur est la droite constituée par l'ensemble des points centraux. Il a même direction que la résultante du torseur. L'axe central n'existe que si la résultante du torseur n'est pas nulle.
- Supposons un torseur défini en un point A du mouvement de S_1/R_0 :

$$\left\{\mathscr{V}_{(S_1/R_0)}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}} \\ \overrightarrow{V_{(A\in S_1/R_0)}}\end{array}\right\}_A$$

- La projection du point A sur l'axe central H est obtenu par la relation suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}} \wedge \overrightarrow{V_{(A\in S_1/R_0)}}}{\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}}^2}} \qquad (4)$$

Cinématique du solide : torseur cinématique

Axe central

- - Un **point central** d'un torseur est un point où le moment résultant a même direction que la résultante générale.
  - L'**axe central** d'un torseur est la droite constituée par l'ensemble des points centraux. Il a même direction que la résultante du torseur. L'axe central n'existe que si la résultante du torseur n'est pas nulle.
- Supposons un torseur défini en un point A du mouvement de S_1/R_0 :

$$\left\{\mathcal{V}_{(S_1/R_0)}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}}\\ \overrightarrow{V_{(A\in S_1/R_0)}}\end{array}\right\}$$

- La projection du point A sur l'axe central H est obtenu par la relation suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}} \wedge \overrightarrow{V_{(A\in S_1/R_0)}}}{\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}}^2}} \qquad (4)$$

Cinématique du solide : torseur cinématique

Axe central

-
    - Un **point central** d'un torseur est un point où le moment résultant a même direction que la résultante générale.
    - L'**axe central** d'un torseur est la droite constituée par l'ensemble des points centraux. Il a même direction que la résultante du torseur. L'axe central n'existe que si la résultante du torseur n'est pas nulle.
- Supposons un torseur défini en un point A du mouvement de S_1/R_0 :

$$\left\{\mathscr{V}_{(S_1/R_0)}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}}\\ \overrightarrow{V_{(A\in S_1/R_0)}}\end{array}\right\}$$

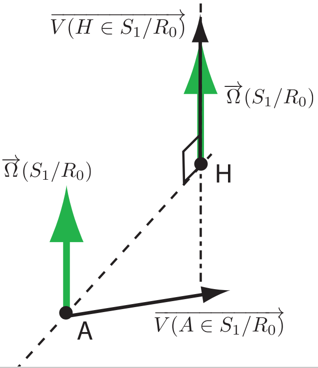
- La projection du point A sur l'axe central H est obtenu par la relation suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}} \wedge \overrightarrow{V_{(A\in S_1/R_0)}}}{\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}}^2}} \qquad (4)$$

Cinématique du solide : torseur cinématique

Axe central

$$\boxed{\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}} \wedge \overrightarrow{V_{(A \in S_1/R_0)}}}{\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}}^2}}$$



Cinématique du solide : composition des champs cinématiques

[

Composition des champs cinématiques] On peut décomposer un champ cinématique à l'aide des torseurs en effectuant une relation de Chasles par des solides successifs. Soit S_1, S_2, $\cdots$ S_n un ensemble de solides indéformables :

$$\boxed{\left\{\mathscr{V}_{(S_n/S_0)}\right\} = \left\{\mathscr{V}_{(S_n/S_{n-1})}\right\} + \left\{\mathscr{V}_{(S_{n-1}/S_{n-2})}\right\} + \cdots \left\{\mathscr{V}_{(S_1/S_0)}\right\}} \tag{5}$$

Il en découle une décomposition en :

- Vecteur rotation instantané :

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega}(S_n/S_0) = \overrightarrow{\Omega}(S_n/S_{n-1}) + \overrightarrow{\Omega}(S_{n-1}/S_{n-2}) + \cdots \overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0)} \tag{6}$$

- Vecteur vitesse en un même point quelconque A :

$$\boxed{\overrightarrow{V}(A \in S_n/S_0) = \overrightarrow{V}(A \in S_n/S_{n-1}) + \overrightarrow{V}(A \in S_{n-1}/S_{n-2}) + \cdots \overrightarrow{V}(A \in S_1/S_0)} \tag{7}$$

Cinématique du solide : champ d'accélération

Champ d'accélération

Le relation de changement de point entre A et B pour un champ d'accélération d'un solide S_1 par rapport à un repère R_0 est donnée par :

$$\overrightarrow{a}(B/R_0) = \overrightarrow{a}(A/R_0) + \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\Omega}(S_1/R_0)\right]_{R_0} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Omega}(S_1/R_0) \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}(S_1/R_0) \wedge \overrightarrow{AB}\right).$$

Attention

Un champ d'accélération n'est pas un champ de moment, c'est à dire qu'il ne vérifie pas les propriétés d'équiprojectivité et il ne peut pas être décrit par un torseur.

Cinématique du solide : champ d'accélération

Champ d'accélération

Le relation de changement de point entre A et B pour un champ d'accélération d'un solide S_1 par rapport à un repère R_0 est donnée par :

$$\overrightarrow{a}(B/R_0) = \overrightarrow{a}(A/R_0) + \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\Omega}(S_1/R_0)\right]_{R_0} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Omega}(S_1/R_0) \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}(S_1/R_0) \wedge \overrightarrow{AB}\right).$$

Attention

Un champ d'accélération n'est pas un champ de moment, c'est à dire qu'il ne vérifie pas les propriétés d'équiprojectivité et il ne peut pas être décrit par un torseur.

Plan

Mouvements particuliers des solides : mouvement de translation

Mouvement de translation

Un solide S_1 est en mouvement de **translation** par rapport à R_0 si l'ensemble des points de S_1 ont la même vitesse à l'instant t par rapport à R_0.
Le vecteur de rotation instantané associé à ce torseur est nul : $\overrightarrow{\Omega(S_1/R_0)} = \overrightarrow{0}$. Il s'agit donc d'un **torseur couple** qui est indépendant du point où on l'exprime :

$$\boxed{\left\{\mathscr{V}_{(S_1/R_0)}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ \overrightarrow{V_{(A\in S_1/R_0)}}\end{array}\right\} = {}_B\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ \overrightarrow{V_{(B\in S_1/R_0)}}\end{array}\right\}} \tag{8}$$

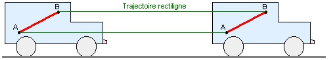
Mouvements particuliers des solides : mouvement de translation

translation rectiligne

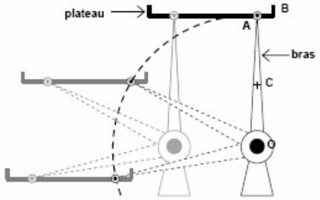
Un mouvement de translation de S_1 par rapport à R_0 est dit de **translation rectiligne** si la trajectoire de tous les points de S_1 par rapport à R_0 est une **droite**. Dans ce cas $\overrightarrow{V_{(A \in S_1/R_0)}}$ a pour direction la trajectoire du point A.

Mouvement de translation circulaire

Un mouvement de S_1 par rapport à R_0 est dit de **translation circulaire** si la trajectoire de tous les points de S_1 sont des **cercles**.



Translation rectiligne



Translation circulaire

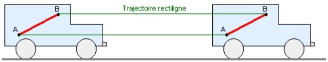
Mouvements particuliers des solides : mouvement de translation

translation rectiligne

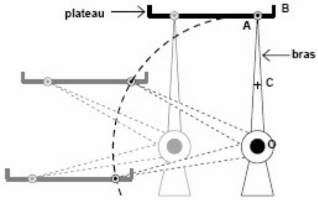
Un mouvement de translation de S_1 par rapport à R_0 est dit de **translation rectiligne** si la trajectoire de tous les points de S_1 par rapport à R_0 est une **droite**. Dans ce cas $\overrightarrow{V_{(A\in S_1/R_0)}}$ a pour direction la trajectoire du point A.

Mouvement de translation circulaire

Un mouvement de S_1 par rapport à R_0 est dit de **translation circulaire** si la trajectoire de tous les points de S_1 sont des **cercles**.



Translation rectiligne



Translation circulaire

Mouvements particuliers des solides : mouvement de rotation

Mouvement de rotation

- Un solide S_1 est en **mouvement de rotation** par rapport à R_0 autour d'un axe $(A, \overrightarrow{u})$ si tous les points appartenant à l'axe $(A, \overrightarrow{u})$ ont une vitesse nulle par rapport à R_0.
- Le vecteur de rotation instantané ($\overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0)$) est alors colinéaire à la direction $\overrightarrow{u}$:

$$\overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0) \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$

$$\boxed{\left\{\mathscr{V}_{(S_1/R_0)}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0) \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}} \qquad (9)$$

$$\forall A \in \overrightarrow{u}.$$

- Ce torseur est alors "**un glisseur**" car il existe des points pour lesquels le moment du torseur cinématique est nul.
- Ces points appartiennent à l'axe de rotation qui est **l'axe central du torseur cinématique associé**.

Mouvements particuliers des solides : mouvement de rotation

Mouvement de rotation

- Un solide S_1 est en **mouvement de rotation** par rapport à R_0 autour d'un axe $(A, \overrightarrow{u})$ si tous les points appartenant à l'axe $(A, \overrightarrow{u})$ ont une vitesse nulle par rapport à R_0.
- Le vecteur de rotation instantané $(\overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0))$ est alors colinéaire à la direction $\overrightarrow{u}$:

$$\overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0) \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$

$$\boxed{\left\{\mathscr{V}_{(S_1/R_0)}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0)\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}} \tag{9}$$

$$\forall A \in \overrightarrow{u}.$$

- Ce torseur est alors "**un glisseur**" car il existe des points pour lesquels le moment du torseur cinématique est nul.
- Ces points appartiennent à l'axe de rotation qui est **l'axe central du torseur cinématique associé**.

Mouvements particuliers des solides : mouvement de rotation

Mouvement de rotation

- Un solide S_1 est en **mouvement de rotation** par rapport à R_0 autour d'un axe $(A, \overrightarrow{u})$ si tous les points appartenant à l'axe $(A, \overrightarrow{u})$ ont une vitesse nulle par rapport à R_0.
- Le vecteur de rotation instantané $(\overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0))$ est alors colinéaire à la direction $\overrightarrow{u}$:

$$\overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0) \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$

$$\boxed{\left\{\mathscr{V}_{(S_1/R_0)}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0) \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}} \tag{9}$$

$$\forall A \in \overrightarrow{u}.$$

- Ce torseur est alors "**un glisseur**" car il existe des points pour lesquels le moment du torseur cinématique est nul.
- Ces points appartiennent à l'axe de rotation qui est **l'axe central du torseur cinématique associé**.

Mouvements particuliers des solides : mouvement de rotation

Mouvement de rotation

- Un solide S_1 est en **mouvement de rotation** par rapport à R_0 autour d'un axe $(A, \overrightarrow{u})$ si tous les points appartenant à l'axe $(A, \overrightarrow{u})$ ont une vitesse nulle par rapport à R_0.
- Le vecteur de rotation instantané $(\overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0))$ est alors colinéaire à la direction $\overrightarrow{u}$:

$$\overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0) \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$

$$\boxed{\left\{\mathscr{V}_{(S_1/R_0)}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0) \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}} \qquad (9)$$

$$\forall A \in \overrightarrow{u}.$$

- Ce torseur est alors "**un glisseur**" car il existe des points pour lesquels le moment du torseur cinématique est nul.
- Ces points appartiennent à l'axe de rotation qui est **l'axe central du torseur cinématique associé**.

Mouvements particuliers des solides : mouvement de transaltion/rotation hélicoïdale

Mouvement de translation/rotation hélicoïdale

- Un mouvement de **translation/rotation hélicoïdale** est la superposition d'un mouvement de rotation autour d'un axe $\left(A, \overrightarrow{u}\right)$ et de translation suivant la direction $\overrightarrow{u}$.
- Ces deux mouvement sont liés par le paramètre p qui représente le **pas hélicoïdal** et s'exprime en $m.rad^{-1}$.
- Le torseur cinématique associé à ce mouvement pour un solide S_1 par rapport à R_0 est donné par :

$$\boxed{\left\{\mathcal{V}_{(S_1/R_0)}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0) = \Omega \cdot \overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{V_{(A\in S_1/R_0)}} = p\Omega \cdot \overrightarrow{u} \end{array}\right\}} \quad (10)$$

Mouvements particuliers des solides : mouvement de transaltion/rotation hélicoïdale

Mouvement de translation/rotation hélicoïdale

- Un mouvement de **translation/rotation hélicoïdale** est la superposition d'un mouvement de rotation autour d'un axe $(A, \overrightarrow{u})$ et de translation suivant la direction $\overrightarrow{u}$.
- Ces deux mouvement sont liés par le paramètre p qui représente le **pas hélicoïdal** et s'exprime en $m.rad^{-1}$.
- Le torseur cinématique associé à ce mouvement pour un solide S_1 par rapport à R_0 est donné par :

$$\boxed{\left\{\mathcal{V}_{(S_1/R_0)}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0) = \Omega \cdot \overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{V_{(A\in S_1/R_0)}} = p\Omega \cdot \overrightarrow{u} \end{array}\right\}} \quad (10)$$

Mouvements particuliers des solides : mouvement de transaltion/rotation hélicoïdale

Mouvement de translation/rotation hélicoïdale

- Un mouvement de **translation/rotation hélicoïdale** est la superposition d'un mouvement de rotation autour d'un axe $\left(A, \overrightarrow{u}\right)$ et de translation suivant la direction $\overrightarrow{u}$.
- Ces deux mouvement sont liés par le paramètre p qui représente le **pas hélicoïdal** et s'exprime en $m.rad^{-1}$.
- Le torseur cinématique associé à ce mouvement pour un solide S_1 par rapport à R_0 est donné par :

$$\boxed{\left\{\mathscr{V}_{(S_1/R_0)}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0) = \Omega \cdot \overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{V_{(A\in S_1/R_0)}} = p\Omega \cdot \overrightarrow{u} \end{array}\right\}} \qquad (10)$$

Mouvements particuliers des solides : mouvement plan

Soit un solide S_1, de repère lié R_1, en mouvement dans un repère R_0.

Mouvement plan

On dit que S_1 a un **mouvement plan** dans R_0 si chaque point $M \in S_1$ se déplace parallèlement à un plan P_0 lié à R_0. Autrement dit, si $\overrightarrow{n}$ est la normale à P_0, alors :

$$\overrightarrow{V_{(M \in S_1/R_0)}} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \qquad \forall M \in S_1$$

Remarque

Dans le cas d'un mouvement plan (par exemple dans le plan $\left(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}\right)$, le torseur cinématique de S_1 par rapport à R_0 se ramène à :

$$\left\{\mathscr{V}_{(S_1/R_0)}\right\} = \underset{\forall M}{\left\{\begin{array}{cc} 0 & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega_z & 0 \end{array}\right\}_{R_0}}$$

On remarquera ainsi que $\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}} \perp \overrightarrow{V_{(M \in S_1/R_0)}}$, et donc que ce torseur est un glisseur.

Mouvements particuliers des solides : mouvement plan

Soit un solide S_1, de repère lié R_1 , en mouvement dans un repère R_0 .

Mouvement plan

On dit que S_1 a un **mouvement plan** dans R_0 si chaque point $M \in S_1$ se déplace parallèlement à un plan P_0 lié à R_0 . Autrement dit, si $\overrightarrow{n}$ est la normale à P_0, alors :

$$\overrightarrow{V_{(M \in S_1/R_0)}} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \qquad \forall M \in S_1$$

Remarque

Dans le cas d'un mouvement plan (par exemple dans le plan $(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})$, le torseur cinématique de S_1 par rapport à R_0 se ramène à :

$$\left\{\mathscr{V}_{(S_1/R_0)}\right\} = {}_{\forall M}\left\{\begin{array}{cc} 0 & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega_z & 0 \end{array}\right\}_{R_0}$$

On remarquera ainsi que $\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}} \perp \overrightarrow{V_{(M \in S_1/R_0)}}$, et donc que ce torseur est un glisseur.

Mouvements particuliers des solides : mouvement plan (C.I.R.)

Centre instantané de rotation (C.I.R.)

On appelle "**centre instantané de rotation**" (noté familièrement "**C.I.R.**") le point d'intersection entre l'axe central (Δ) et le plan du mouvement.
On désignera par "I_{10}" le CIR du mouvement de S_1 par rapport à R_0 .

Remarque

Pendant un instant Δt infiniment bref, le centre instantané de rotation représente le point autour duquel S_1 a un mouvement de rotation. Cependant, à l'instant suivant, il peut avoir changé de position.

Mouvements particuliers des solides : mouvement plan (C.I.R.)

Centre instantané de rotation (C.I.R.)

On appelle "**centre instantané de rotation**" (noté familièrement "**C.I.R.**") le point d'intersection entre l'axe central (Δ) et le plan du mouvement.
On désignera par "I_{10}" le CIR du mouvement de S_1 par rapport à R_0 .

Remarque

Pendant un instant Δt infiniment bref, le centre instantané de rotation représente le point autour duquel S_1 a un mouvement de rotation. Cependant, à l'instant suivant, il peut avoir changé de position.

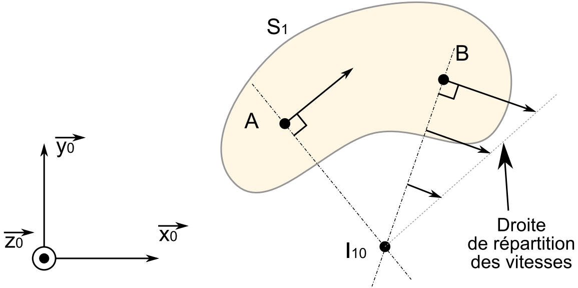
Mouvements particuliers des solides : mouvement plan (C.I.R.)

Propriétés

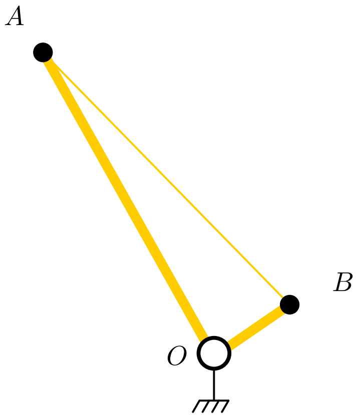
- Soit S_1, un solide en mouvement dans un repère R_0 , et ayant pour CIR "I_{10}". Alors, pour tout $P \in S_1$, on a :

$$\overrightarrow{V_{(P\in S_1/R_0)}} \cdot \overrightarrow{PI_{10}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{V_{(P\in S_1/R_0)}} \perp \overrightarrow{PI_{10}} \tag{11}$$

- La norme des vecteurs vitesse est proportionnelle à la distance au CIR.
- On en déduit que la vitesse sur le CIR est nulle.



Mouvements particuliers des solides : mouvement plan (C.I.R.)



Mouvements particuliers des solides : mouvement plan (C.I.R.)

theoreme des trois plans glissants

Soit trois solides S_1, S_2 et S_3 en mouvement les uns par rapport aux autres. Soient I_{21}, I_{32} et I_{13} les CIR associés. Alors : **I_{21}, I_{23} et I_{13} sont alignés**.

Mouvements particuliers des solides : cas des mouvements de translation

cas des mouvements de translation

Lorsque le mouvement relatif des deux solides est un translation, le CIR **n'existe pas**. Cependant, on peut considérer qu'il est comme rejeté à l'infini, perpendiculairement à la direction de la translation.