DS n°2 : Fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom : $\boxed{}$ Note : $\boxed{}$

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

Logique.

$$\neg\Big(\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x \leqslant y) \Rightarrow y^2 \geqslant 2\Big) \equiv \boxed{} \tag{1}$$

Sommes et produits.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer (on donnera une forme simplifiée et factorisée) :

$$\sum_{i=-1}^{4}\sum_{j=0}^{5} ij = \boxed{} \tag{2}$$

$$\sum_{0\leqslant j\leqslant i\leqslant n} 2^i = \boxed{} \tag{3}$$

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \max(i,j) = \boxed{} \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \boxed{} \tag{5}$$

$$\prod_{i=2}^{15} \frac{2i^2}{i^2+2i+1} = \boxed{} \tag{6}$$

$$\sum_{k=3}^{6} \frac{3^k}{2^{k-1}} = \boxed{} \tag{7}$$

Nombres complexes.

Soit $z' = \mathrm{e}^{i3\pi/4} + \mathrm{e}^{-i\pi/3}$. Alors :

$$|z| = \boxed{} \tag{8}$$

$$\arg(z) = \boxed{} \tag{9}$$

Mettre sous forme algébrique : $\dfrac{2-5i}{3+i} = \boxed{}$ (10)

Mettre sous forme trigonométrique (on pourra commencer par calculer le carré du nombre étudié) :

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} + i\sqrt{2+\sqrt{3}} = \boxed{} \tag{11}$$

Matrices et systèmes.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Avec $B = A - \mathrm{I}_3$, calculer :

$$A^{42} = \boxed{} \qquad (12)$$

Soit $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Alors

$$C^2 = \boxed{} \qquad (13) \qquad\qquad C^{-1} = \boxed{} \qquad (14)$$

Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver trois réels a, b et c tels que $D^3 + aD^2 + bD + c\mathrm{I}_3 = 0$:

$$a = \boxed{} \ ; \quad b = \boxed{} \ ; \quad c = \boxed{} \ . \qquad (15)$$

En déduire

$$D^{-1} = \boxed{} \qquad (16)$$

Donner les ensembles de solutions des systèmes réels suivants.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 2 \\ -x & + & y & - & z & = & -1 \end{array} \right. : \boxed{} \qquad (17)$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & - & 2y & & & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \end{array} \right. : \boxed{} \qquad (18)$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} -x & & & - & 2z & + & t & = & 4 \\ -4x & + & 2y & - & 3z & + & 3t & = & 13 \\ 3x & - & y & & & + & t & = & 0 \\ 3x & & & - & z & + & 4t & = & 9 \end{array} \right. : \boxed{} \qquad (19)$$

— FIN —