

Feuille d'exercice n° 17 : **Espaces vectoriels**

Exercice 1 (✎) Dire si les objets suivants sont des espaces vectoriels.

- 1) L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et vérifiant $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
- 2) L'ensemble des fonctions réelles impaires, définies sur \mathbb{R} .
- 3) L'ensemble des fonctions f définies sur $[a, b]$, continues et vérifiant $f(a) = 7f(b) + \int_a^b t^3 f(t) dt$.
- 4) L'ensemble des fonctions f de classe \mathcal{C}^2 vérifiant $f'' + \omega^2 f = 0$.
- 5) L'ensemble des primitives de la fonction $x \mapsto xe^x$ sur \mathbb{R} .
- 6) L'ensemble des nombres complexes d'argument $\pi/4 + k\pi$, pour $k \in \mathbb{Z}$.
- 7) L'ensemble des points (x, y) de \mathbb{R}^2 , vérifiant $\sin(x + y) = 0$.
- 8) L'ensemble des vecteurs de \mathbb{R}^3 orthogonaux au vecteur $(-1, 3, -2)$.

Exercice 2 (✎) Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. On pose $F = E^2$. Pour tout couple $((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ d'éléments de F , on pose $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, et tout $(x, y) \in F$, on note $\lambda \cdot (x, y) = (ax - by, bx + ay)$, où $a = \operatorname{Re} \lambda$ et $b = \operatorname{Im} \lambda$.

Montrer que $(F, +, \cdot)$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel (appelé le complexifié du \mathbb{R} -espace vectoriel E).

Exercice 3 (🚲)

- 1) Soit les vecteurs $v_1 = (1 - i, i)$, $v_2 = (2, -1 + i)$ et $v_3 = (1 + i, i)$. Le vecteur v_1 est-il combinaison linéaire de v_2 et v_3 dans \mathbb{C}^2 , considéré comme \mathbb{C} -espace vectoriel ? comme \mathbb{R} -espace vectoriel ?
- 2) Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $x \mapsto \sin(3x)$ est-elle combinaison linéaire des deux fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \sin(2x)$? Généraliser.

Exercice 4 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Montrer que $F \cup G = F + G \Leftrightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 5 (✎) Montrer que, dans $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{C})$, $F = \left\{ f \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{C}) \mid \int_{-1}^1 f(t) dt = 0 \right\}$ et $G = \{ f \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{C}) \mid f \text{ constante} \}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Exercice 6 (✎) Dans \mathbb{R}^4 , on considère F d'équation $x - 2y + z + t = 0$, G d'équation $2x - y + 3t = 0$ et

$$H = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

F et G sont-ils des sous-espaces vectoriels supplémentaires ? Même question pour F et H , puis pour G et H .

Exercice 7 (🚲) Soit $F = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) + f(1) = 0 \}$.

- 1) Montrer que F est un espace vectoriel.
- 2) Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 8 Soient F, G, F', G' des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E , tels que $F \cap G = F' \cap G'$.

Montrer que $(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F$.

Exercice 9 Soit \mathcal{V} et \mathcal{W} deux sous-espaces affines **disjoints** d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E . On note V et W leurs directions respectives. Soit $a \in \mathcal{V}$ et $b \in \mathcal{W}$. On pose $U = V + W$, $\mathcal{V}' = a + U$ et $\mathcal{W}' = b + U$. Montrer que \mathcal{V}' et \mathcal{W}' sont deux sous-espaces affines disjoints, de même direction et contenant respectivement \mathcal{V} et \mathcal{W} .

