Devoir surveillé n°3

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Calculer les racines carrées de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.

II. Une équation différentielle.

On considère l'équation différentielle

$$y'' + \frac{2y'}{\operatorname{th}(x)} + y = 0. \qquad (\mathscr{E})$$

1) *Question préliminaire.* Justifier que $\dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

2) Sur quel ensemble E peut-on chercher à résoudre $(\mathscr{E})$? Écrire cet ensemble comme une union d'intervalles ouverts.

3) Soit $y : E \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation $(\mathscr{E})$. On pose alors

$$z : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y'(x) + \dfrac{y(x)}{\operatorname{th}(x)} \end{array}.$$

a) Montrer que z est solution de l'équation différentielle linéaire :

$$z' + \frac{z}{\operatorname{th}(x)} = 0. \qquad (\mathscr{F})$$

b) Résoudre l'équation $(\mathscr{F})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Résoudre l'équation $(\mathscr{F})$ sur $\mathbb{R}_-^*$.
Indication : on essaiera de chercher un argument rigoureux évitant de dupliquer les arguments donnés pour résoudre la question précédente.

d) En déduire qu'il existe $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in E$,

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{ax+b}{\operatorname{sh}(x)} & \text{si} \quad x > 0 \\ \dfrac{a'x+b'}{\operatorname{sh}(x)} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}.$$

e) Réciproquement, montrer que toutes les fonctions de cette forme sont bien solution de $(\mathscr{E})$.

4) Parmi les solutions de $(\mathscr{E})$, lesquelles admettent-elles une limite finie en 0 ? Le cas échéant, laquelle ?

III. Une équation imaginaire.

1) Résultats préliminaires :

a) Soit Z, un complexe non nul. Prouver l'équivalence

$$\left(Z+\frac{1}{Z} \text{ est un réel}\right) \Leftrightarrow (Z \text{ est un réel ou } |Z|=1)\,.$$

b) On considère la fonction (réelle) f définie par $f : x \mapsto x+\frac{1}{x}$. Préciser son domaine de définition et y étudier ses variations. En conclure que la quantité $\left|x+\frac{1}{x}\right|$ possède, pour $x \in \mathbb{R}^*$, un minimum que l'on calculera.

Dans la suite de l'exercice, a et b désignent deux nombres complexes non nuls et (E) désigne l'équation

$$z^2-2az+b=0.$$

On note z_1 et z_2 les racines complexes (éventuellement égales) de (E).

2) Une condition nécessaire et suffisante pour que $|z_1|=|z_2|$:

a) Rappeler et démontrer les liens existants entre les quantités z_1+z_2 et z_1z_2, et les coefficients a et b.

b) On suppose que $|z_1|=|z_2|$. Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle puis en déduire la forme exponentielle de $\frac{a^2}{b}$.

c) Conclure que, si $|z_1|=|z_2|$, alors la quantité $\frac{a^2}{b}$ est réelle et appartient à l'intervalle $]0,1]$.

d) Montrer que, si la quantité $\frac{a^2}{b}$ est réelle, alors avec $Z=\frac{z_1}{z_2}$, la quantité $Z+\frac{1}{Z}$ existe et est réelle.

e) En conclure que, si $\frac{a^2}{b} \in]0,1]$, alors $|z_1|=|z_2|$.

3) Une condition nécessaire et suffisante pour que $\arg(z_1)=\arg(z_2)\ [2\pi]$:

a) Démontrer l'inégalité suivante, appelée inégalité arithmético-géométrique

$$\forall x,y \in \mathbb{R}_+^*,\ \sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}.$$

b) On suppose que $\arg(z_1)=\arg(z_2)\ [2\pi]$. Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle puis en déduire la forme exponentielle de $\frac{b}{a^2}$.

c) Montrer que, si $\arg(z_1)=\arg(z_2)\ [2\pi]$, alors la quantité $\frac{b}{a^2}$ est réelle et appartient à l'intervalle $]0,1]$.

d) Montrer réciproquement que si $\frac{b}{a^2} \in]0,1]$, alors $\arg(z_1)=\arg(z_2)\ [2\pi]$.

— FIN —