Devoir facultatif n° 8

Dans tout le problème, on confondra un polynôme à coefficients réels avec la fonction polynomiale définie dans $\mathbb{R}$ qui lui est associée.

A). Irrationalité de e^r

Dans cette partie, on *admet* que pour tout entier naturel n, il existe des polynômes A_n et B_n à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et de degré inférieur ou égal à n tels que l'application

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A_n(x) + B_n(x)\mathrm{e}^x \end{array}$$

vérifie :

$$\begin{array}{ll} \forall k \in [\![0, n]\!] & f_n^{(k)}(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} & f_n^{(n+1)}(x) = x^n \mathrm{e}^x \end{array}$$

1) Calculer des polynômes A_n et B_n satisfaisant aux conditions pour n égal à 1 ou 2.

2) **a)** Calculer, à l'aide de la formule de Leibniz, la dérivée $n+1$ ème de la fonction $x \mapsto x^{2n+1}\mathrm{e}^x/(n+1)!$.
Montrer que le coefficient de $x^n \mathrm{e}^x$ est un entier à préciser.

b) Montrer :

$$\forall x > 0 \qquad 0 < f_n(x) < \frac{x^{2n+1}\mathrm{e}^x}{(n+1)!}$$

(on pourra utiliser des tableaux de variations et des dérivations successives)

3) Soit r un rationnel non nul. On suppose que e^r est rationnel. Montrer qu'il existe alors deux entiers naturels m et q non nuls tels que $q\mathrm{e}^m$ soit entier.

4) Montrer qu'alors pour tout entier n, on a $qf_n(m) \in \mathbb{Z}$.

5) En déduire une contradiction et conclure.

B). Généralisation de la formule du binôme.

Pour tout couple $(m, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, on définit des nombres $c_{m,k}$ par les relations

$$\begin{array}{ll} \forall m \in \mathbb{Z} & c_{m,0} = 1 \\ \forall k \geqslant 1 & c_{0,k} = 0 \\ \forall k \geqslant 1 & c_{m,k} = c_{m-1,k} + c_{m-1,k-1} \end{array}$$

1) Former le tableau des $c_{m,k}$ avec m comme numéro de la ligne et k comme numéro de la colonne pour m entre -4 et $+4$ et k entre 0 et 4.
Formulez des remarques intéressantes relativement à ces coefficients.

2) On considère un anneau A dont le neutre additif est noté 0_A et le neutre multiplicatif (élément unité) est noté i. Cet anneau A contient un élément d (dit *nilpotent*) pour lequel il existe un entier $n \geqslant 1$ vérifiant $d^{n+1} = 0_A$.

a) Calculer

$$\left(\sum_{k=0}^{n} c_{-1,k} d^k\right)(i+d)$$

En déduire que $i + d$ est un élément inversible de A.

b) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on a

$$(i+d)^m = \sum_{k=0}^{n} c_{m,k} d^k$$

C). Existence de A_n et B_n.

On désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels et dont le degré est inférieur ou égal à n. On considère l'anneau des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$. On rappelle que, dans cet anneau, la loi multiplicative est la composition $\circ$ des endomorphismes. L'unité est l'application linéaire identité notée ici i :

$$i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P \end{array}$$

L'élément nilpotent considéré est la dérivation notée ici d :

$$d : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$

1) Montrer que $i + d$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Pour tout entier n on pose $B_n = (i+d)^{-(n+1)}(X^n)$ et

$$\beta_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & B_n(x)\mathrm{e}^{x} \end{array}$$

a) Préciser, à l'aide d'une puissance de $i + d$ la dérivée m ième de β_n pour un entier naturel m quelconque. Que se passe-t-il pour $m = n + 1$?

b) Pour $m \in [\![0, n]\!]$, montrer qu'on a $\beta_n^{(m)}(0)/m! \in \mathbb{Z}$. Conclure.

— FIN —