Informatique tronc commun
Devoir n° 3 – Partie rédigée

17 mars 2018

Durée : 60 minutes, documents interdits.

Vous écrirez les fonctions demandées dans le langage `Python` (version 3) et rendrez sur papier votre composition.

Vous rédigerez soigneusement la ou les fonctions `Python` que vous devrez écrire, sans oublier les indentations, chaînes de documentation et commentaires nécessaires.

On numérotera chaque ligne de chaque bloc de code `Python`.

Lorsque vous écrivez une fonction `Python`, on ne vous demande pas de vérifier que les arguments donnés sont corrects. Cependant, il sera apprécié d'indiquer les préconditions vérifiées par ces arguments dans la chaîne de documentation de la fonction.

Les fonctions `Python` permettant de faire un calcul sur les listes (ex : `max`, `sum`, *etc.*) ne sont pas autorisées, hormis la fonction `len`.

I. Autour de la dynamique gravitationnelle

I.1. Présentation

Modéliser les interactions physiques entre un grand nombre de constituants mène à l'écriture de systèmes différentiels pour lesquels, en dehors de quelques situations particulières, il n'existe aucune solution analytique. Les problèmes de dynamique gravitationnelle et de dynamique moléculaire en sont deux exemples. Afin d'analyser le comportement temporel de tels systèmes, l'informatique peut apporter une aide substantielle en permettant leur simulation numérique. L'objet de ce sujet est l'étude de solutions algorithmiques en vue de simuler une dynamique gravitationnelle afin, par exemple, de prédire une éclipse ou le passage d'une comète.

I.2. Quelques fonctions utilitaires

Q1 Donner la valeur des expressions python suivantes :

— $[1, 2, 3] + [4, 5, 6]$

— $2 * [1, 2, 3]$

Q2 Écrire une fonction python *smul* à deux paramètres, un nombre et une liste de nombres, qui multiple chaque élément de la liste par le nombre et renvoie une deuxième liste sans modifier la première. Par exemple, *smul(2, [1, 2, 3])* renvera *[2, 4, 6]*.

Q3 Déterminer la complexité de cet algorithme en fonction de la taille de la liste.

II. Étude de schémas numériques

Soient y une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et t_{min} et t_{max} deux réels tels que $t_{min} < t_{max}$. On note I l'intervalle $[t_{min}, t_{max}]$. On s'intéresse à une équation différentielle du second ordre de la forme :

$$\forall t \in I \qquad y''(t) = f(y(t)), \tag{1}$$

où f est une fonction donnée, continue sur $\mathbb{R}$. De nombreux systèmes physiques peuvent être décrits par une équation de ce type.

On suppose connues les valeurs $y_0 = y(t_{min})$ et $z_0 = y'(t_{min})$.

II.1. Mise en forme du problème

Pour résoudre numériquement l'équation différentielle (1), on introduit la fonction $z : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in I, z(t) = y'(t). \tag{2}$$

On considère l'équation :

$$Y' = F(Y, t) \tag{3}$$

Q4 Pour quelle variable Y et quelle fonction F, l'équation (1) peut se mettre sous la forme de l'équation (3) ?

Soit n un entier strictement supérieur à 1 et $J_n = [\![0, n-1]\!]$. On pose $h = \dfrac{t_{max} - t_{min}}{n-1}$ et $\forall i \in J_n$, $t_i = t_{min} + i \cdot h$. On peut montrer que, pour tout entier $i \in [\![0, n-2]\!]$,

$$Y(t_{i+1}) = Y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} Y'(t)dt \tag{4}$$

La suite du problème exploite les notations introduites dans cette partie et présente deux méthodes numériques dans lesquelles l'intégrale précédente est remplacée par une valeur approchée.

II.2. Schéma d'Euler explicite

Dans le schéma d'Euler explicite, chaque terme sous le signe intégrale est remplacé par sa valeur prise en la borne inférieure.

Q5 Ecrire une fonction $euler(F, tmin, tmax, Y_0, n)$ qui renvoie deux listes de nombres correspondant aux valeurs associées aux suites $(y_i)_{i\in J_n}$, $(z_i)_{i\in J_n}$ ainsi que la liste du temps $(t_i)_{i\in J_n}$.

Pour illustrer cette méthode, on considère l'équation différentielle,

$$\forall t \in I, \quad y''(t) = -\omega^2 y(t) \tag{5}$$

dans laquelle ω est un nombre réel.

Q6 Expliciter la fonction F et la fonction f qui permettront de mettre en oeuvre ce problème.

La mise en oeuvre de la méthode d'Euler explicite génère le résultat graphique donné figure 1. Dans un système d'unités adapté, les calculs ont été menés en prenant $y_0 = 3$, $z_0 = 0$, $t_{min} = 0$, $t_{max} = 3$, $\omega = 2\pi$ et $n = 100$.

Q7 Écrire la suite d'instructions permettant à partir de la fonction F et après avoir défini la fonction *euler* de la mettre en oeuvre et produire le tracé de la figure 1.

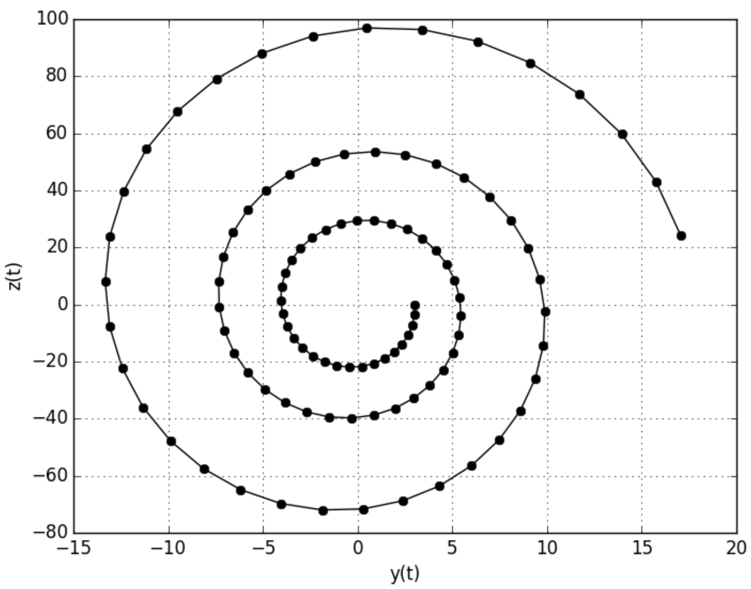

FIGURE 1 – Portrait de phase avec la méthode d'Euler

II.3. Schéma de Verlet

Le physicien français Loup Verlet a proposé en 1967 un schéma numérique d'intégration d'une équation de la forme (1) dans lequel, en notant $f_i = f(y_i)$ et $f_{i+1} = f(y_{i+1})$, les relations de récurrence s'écrivent, pour tout entier $i \in [\![0, n-2]\!]$:

$$y_{i+1} = y_i + hz_i + \frac{h^2}{2} f_i \qquad \text{et} \qquad z_{i+1} = z_i + \frac{h}{2}\left(f_i + f_{i+1}\right). \tag{6}$$

Q8 Écrire une fonction $verlet(f, tmin, tmax, Y_0, n)$ qui renvoie deux listes de nombres correspondant aux valeurs associées aux suites $(y_i)_{i \in J_n}$ et $(z_i)_{i \in J_n}$, ainsi que la liste du temps $(t_i)_{i \in J_n}$.

On reprend l'exemple de l'oscillateur harmonique défini par l'équation (5) et on compare les résultats obtenus à l'aide des schémas d'Euler et de Verlet.

Q9 Écrire la suite d'instructions permettant à partir de la fonction f et après avoir défini la fonction *verlet* de la mettre en oeuvre et produire le tracé de la figure 2.

II.4. Comparaison qualitative des schémas numériques.

On rappelle l'expression de l'énergie pour un tel oscillateur :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(y')^2 + \frac{\omega^2}{2} y^2.$$

Q10 Conclure sur la stabilité des deux schémas numériques.

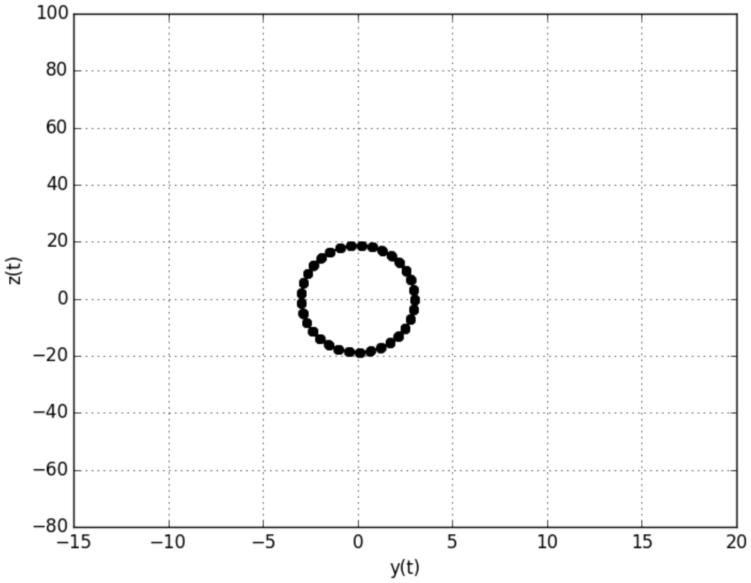

FIGURE 2 – Portrait de phase avec la méthode de Verlet