Devoir facultatif n° 9

Inégalité de Wirtinger :

Question préliminaire

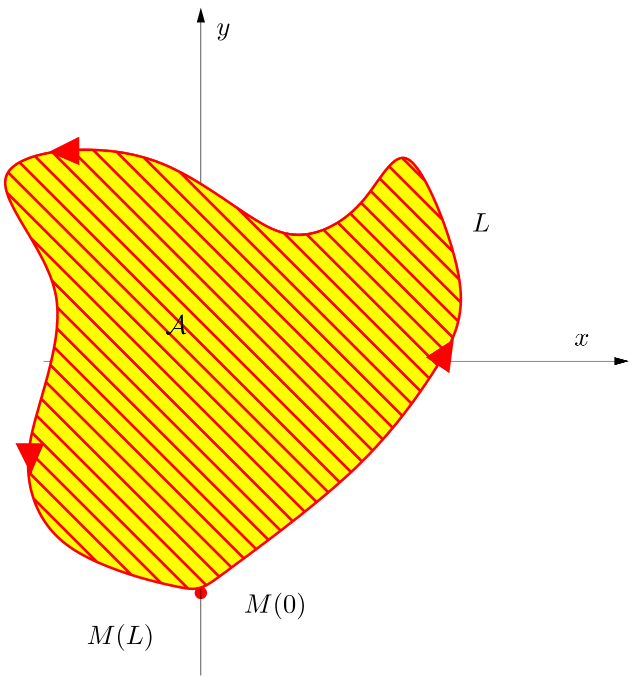

Figure 1 – Inégalité isopérimétrique $\mathcal{A} \leqslant \dfrac{L^2}{4\pi}$

Soit ψ une fonction continue, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.
Montrer que, pour tous les réels a, les intégrales

$$\int_a^{a+2\pi} \psi(t)\,\mathrm{d}t$$

sont égales.
On définit le nombre *valeur moyenne* de ψ (noté $\overline{\psi}$) par :

$$\overline{\psi} = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} \psi(t)\,\mathrm{d}t$$

pour un a quelconque.
L'objet de ce problème est de démontrer *l'inégalité de Wirtinger*.

$$\int_0^{2\pi} (f(t) - \overline{f})^2\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} f'^2(t)\,\mathrm{d}t$$

pour *certaines* fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et 2π-périodique.
L'inégalité de Wirtinger permet de démontrer l'inégalité isopérimétrique.

Partie I.

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ à valeurs réelles. Soit a et b deux réels tels que

$$a < b \leqslant a + \pi \qquad\qquad f(a) = f(b) = 0$$

Soit φ la fonction définie dans $]a, b[$ par :

$$\forall t \in]a, b[: \ \varphi(t) = f(t) \operatorname{cotan}(t - a)$$

1) Montrer que l'on peut toujours prolonger φ par continuité en une fonction définie dans $[a, b]$. Préciser, suivant les cas, les valeurs de $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.
Dans toute la suite, φ désignera la fonction continue prolongée dans $[a, b]$. Il est clair que φ est dérivable et à dérivée continue dans l'ouvert. En revanche, la question de la dérivabilité en a et b n'est pas abordée.

2) Soit u et v deux réels tels que $a < u < v < b$.
Montrer que l'accroissement de $f\varphi$ entre u et v est égal à

$$\int_u^v f'^2(t)\,\mathrm{d}t - \int_u^v f^2(t)\,\mathrm{d}t - \int_u^v \left(\varphi(t) - f'(t)\right)^2\,\mathrm{d}t$$

La relation

$$0 = \int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b \left(\varphi(t) - f'(t)\right)^2\,\mathrm{d}t$$

est-elle valide ?

3) Montrer que

$$\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t$$

4) On suppose que l'inégalité du **3)** est une égalité.

- **a)** Montrer que $f'(t) = \varphi(t)$ pour tous les $t \in [a, b]$.
- **b)** Montrer qu'il existe un réel λ tel que $f(t) = \lambda \sin(t - a)$ pour tous les t dans $[a, b]$.

Partie II.

1) Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ telle que la distance entre deux zéros consécutifs de f soit inférieure ou égale à π. Montrer que

$$\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t$$

lorsque a et b sont deux zéros de f vérifiant $a < b$.

2) Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. Pour tout $\lambda > 0$, on définit f_λ par :

$$\forall t \in \mathbb{R} : f_\lambda(t) = f(\frac{t}{\lambda})$$

a) Exprimer $\int_{\lambda a}^{\lambda b} f_\lambda^2(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{\lambda a}^{\lambda b} {f_\lambda}'^2(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de $\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que la proposition suivante est fausse.
Pour toute fonction f de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ prenant la valeur 0 en a et b, on a :

$$\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Partie III.

Soit n un entier naturel non nul fixé. On définit dans $\mathbb{R}$ les fonctions $c_0, c_1, \cdots, c_n$ et $s_1, \cdots, s_n$ par :

$$\begin{array}{llll} c_0(t) = 1, & c_1(t) = \cos(t), & \cdots & c_n(t) = \cos(nt) \\ & s_1(t) = \sin(t), & \cdots & s_n(t) = \sin(nt) \end{array}$$

1) Pour $i \in \{0, \cdots, n\}$ et $j \in \{1, \cdots, n\}$, calculer $\int_0^{2\pi} c_i(t)c_j(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_0^{2\pi} c_i(t)s_j(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_0^{2\pi} s_i(t)s_j(t)\,\mathrm{d}t$ en séparant bien les divers cas.

2) Soit $\mathcal{T} = \mathrm{Vect}(c_0, \cdots, c_n, s_1, \cdots, s_n)$ et $f \in \mathcal{T}$. Que vaut $\overline{f}$? Démontrer

$$\int_0^{2\pi} (f(t) - \overline{f})^2\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} f'^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Partie IV. Inégalité isopérimétrique

Dans cette partie, on pourra utiliser (pour tous réels u et w)

$$uw \leqslant \frac{1}{2}(u^2 + w^2)$$

On pourra aussi utiliser des changements de paramètres très simples.

1) Démontrer l'inégalité indiquée au dessus.

2) Ici M est une courbe paramétrée normale de classe $\mathcal{C}^1([0, L])$ à valeurs dans un plan. La courbe est donc de longueur L. Un repère est fixé, les fonctions coordonnées sont notées x et y. On pose $U = x \circ M$ et $V = y \circ M$. Ce sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1([0, L])$ à valeurs réelles. On suppose (voir Fig. 2)

$$U(0) = U(L) = 0$$

On note $\mathcal{A}$ l'aire définie par le support de la courbe et l'axe des y. Montrer que

$$\mathcal{A} \leqslant \frac{L^2}{2\pi}$$

Étudier le cas d'égalité.

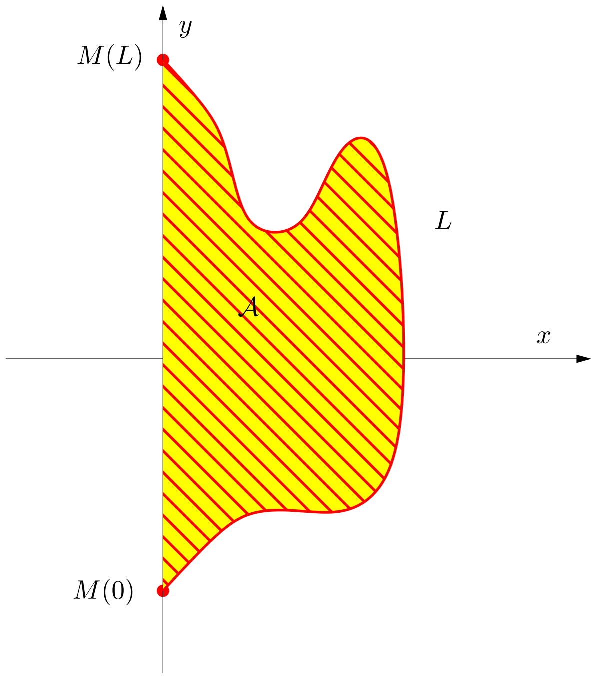

FIGURE 2 – Inégalité $\mathcal{A} \leqslant \dfrac{L^2}{2\pi}$

3) Ici M est une courbe paramétrée normale, définie dans $\mathbb{R}$, périodique de plus petite période L (voir Fig. 1). La longueur du support est donc L. Les fonctions U et V sont définies comme au dessus. On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la portion de plan délimité par la courbe. On suppose que l'application

$$t \to U(\frac{L}{2\pi}t)$$

est dans l'espace $\mathcal{T}$ définie en partie III. Montrer l'inégalité isopérimétrique

$$\mathcal{A} \leqslant \frac{L^2}{4\pi}$$

— FIN —