Feuille d'exercice n° 22 : **EV de dimension finie - correction**

Exercice 1

1) On a une famille de $5 > \dim(\mathbb{R}^4)$ vecteurs de $\mathbb{R}^4$, donc $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ est liée.

v_1 et v_2 sont deux vecteurs non colinéaires, donc (v_1, v_2) est libre.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, en considérant le système $av_1 + bv_2 = v_3$, en considérant la première ligne on obtient $a = 1$, et avec la deuxième ligne $b = -1$. Les autres lignes sont incompatibles. Ainsi, la famille (v_1, v_2, v_3) est libre.

De même, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, on voit que le système $av_1 + bv_2 + cv_3 = v_4$ n'a pas de solution. Ainsi, la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est libre.

C'est une famille libre de $4 = \dim(\mathbb{R}^4)$ vecteurs de $\mathbb{R}^4$, (v_1, v_2, v_3, v_4) est donc une base de $\mathbb{R}^4$.

Notamment, comme sur-famille d'une famille génératrice, $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ engendre $\mathbb{R}^5$.

2) On a une famille de $3 < \dim(\mathbb{R}^4)$ vecteurs de $\mathbb{R}^4$, donc (v_1, v_2, v_3) n'est pas génératrice.

v_1 et v_2 sont deux vecteurs non colinéaires, donc (v_1, v_2) est libre.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, en considérant le système $av_1 + bv_2 = v_3$, en considérant la première ligne on obtient $a = 3$, et avec la deuxième ligne $b = -2$. Les autres lignes sont incompatibles. Ainsi, la famille (v_1, v_2, v_3) est libre.

On observe (après résolution de système) que $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ n'est pas combinaison linéaire de (v_1, v_2, v_3), donc (v_1, v_2, v_3, e_1) est une famille libre $4 = \dim(\mathbb{R}^4)$ vecteurs de $\mathbb{R}^4$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$.

3) On a une famille de $4 = \dim(\mathbb{R}^4)$ vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

v_1 et v_2 sont deux vecteurs non colinéaires, donc (v_1, v_2) est libre.

Comme dans l'exercice précédent, on observe que $v_4 = 3v_1 - 2v_1$. De même, $v_3 = 2v_1 - 3v_2$. Ainsi, (v_1, v_2, v_3, v_4) est liée. D'après la première remarque, ce n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$.

Avec $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ et $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, on observe que e_1 n'est pas combinaison linéaire de (v_1, v_2) et que e_2 n'est pas combinaison linéaire de (v_1, v_2, e_1). Ainsi, (v_1, v_2, e_1, e_2) est une famille libre, elle comporte $4 = \dim(\mathbb{R}^4)$ vecteurs de $\mathbb{R}^4$, donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2

1) Comme $P \mapsto P(0)$ et $P \mapsto P'$ sont linéaires, φ est linéaire. De plus, on sait que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ et tout $a \in \mathbb{K}$, il existe un unique $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(0) = a$ et $Q' = P$ (pour le redémontrer, écrivez P puis Q sous forme développée-réduite). Ainsi, φ est bijective, donc est bien un isomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

2) Supposons que $\mathbb{K}[X]$ soit de dimension finie, notée d. Alors $\mathbb{K}[X]$ serait isomorphe à $\mathbb{K} \times \mathbb{K}[X]$, qui est de dimension $d + 1$. On aurait $d = d + 1$, ce qui est impossible.

Exercice 3

1) Soit $x, y, z, a, b \in \mathbb{R}$. On écrit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 3a + 2b \\ y & = & a + b \\ z & = & 2a + 3b \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x - 3y & = & -b \\ y & = & a + b \\ -2y + z & = & b \end{array} \right. \quad L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2,\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x - 3y & = & -b \\ y & = & a + b \\ x - 5y + z & = & 0 \end{array} \right. \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

Ce système (en a, b) admet une solution si et seulement si la dernière ligne est vérifiée.
Une équation cartésienne de F est donc $x - 5y + z = 0$.

2) Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$. On observe que $(x, y, z) \in G$ si et seulement si (x, y, z) est colinéaire à $(1, 2, 3)$, donc si et seulement si $y = 2x$ et $z = 3x$.
Une représentation cartésienne de G est donc le système $2x - y = 0, 3x - z = 0$.

3) Soit $x, y, z, t, a, b, c \in \mathbb{R}$. On écrit comme dans la première question le système (en a, b, c) :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce système (en a, b, c) admet une solution si et seulement si la dernière ligne est vérifiée.
Une équation cartésienne de H est donc $t = 0$.

Exercice 4

1) On a une famille de $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ vecteurs dans $\mathbb{R}_n[X]$. Il suffit donc de montrer que cette famille est libre. s
Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0$. Supposons que les λ_k ne sont pas tous nuls, on peut donc considérer le plus grand entier m tel que $\lambda_m \neq 0$. On aurait alors $P_m = -\frac{1}{\lambda_m} \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k P_k \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$.
Ceci contredit le fait que $\deg(P_m) = m$.
Ainsi, $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

2) On montre que cette famille est libre et engendre $\mathbb{R}[X]$.
Soit $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de scalaires à support fini telle que $\sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i P_i = 0$. Comme cette suite est à support fini, elle est nulle à partir d'un rang $n \in \mathbb{N}$. On peut donc écrire $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = 0$. Par la question précédente, si $0 \leqslant i \leqslant n$, $\lambda_i = 0$. Ainsi, $\forall i \in \mathbb{N}$, $\lambda_i = 0$, donc $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est libre.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, notons $n = \max(0, \deg(P))$. On a alors par la question précédente $P \in \mathbb{R}[X] = \mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_n) \subset \mathrm{Vect}(P_i, i \in \mathbb{N})$. Ainsi, $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ engendre $\mathbb{R}[X]$.
Ainsi, $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5

Par la formule de Taylor, cette famille est génératrice, avec coordonnée sur $(X - a)^i$ égale à $\frac{P^{(i)}(a)}{i!}$ et cette famille est libre car les polynômes sont de degrés distincts 2 à 2.

Exercice 6 On peut prendre $(1, Q, X^2, P)$.

Ces polynômes sont de degrés distincts deux à deux, donc forment une famille libre. C'est une famille libre de $4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$ vecteurs de $\mathbb{R}_3[X]$, donc c'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 7

1) v_1 et v_2 sont deux vecteurs non colinéaires, donc forment une famille libre. En résolvant le système $v_3 = av_1 + bv_2$, qui n'a pas de solution, on obtient que la famille (v_1, v_2, v_3) est libre.
On observe ensuite que $v_4 = 3v_1 + 2v_2$ et $v_5 = -3v_1 + v_2$. Ainsi, (v_1, v_2, v_3) est une base de F.

2) Comme F est de dimension 3 et $\mathbb{R}^4$ de dimension 4, il suffit de compléter (v_1, v_2, v_3) avec un vecteur pour former une base de $\mathbb{R}^4$. On voit par exemple que $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ convient ($e_1 \notin F$).
Ainsi, $\mathrm{Vect}(e_1)$ est un supplémentaire de F.

Exercice 8

1) On a toujours $\dim f(F) \leqslant \dim F$: en effet, si l'on considère $h = f|_F^{\mathrm{Im}\,F} : F \to \mathrm{Im}\,F$ et qu'on lui applique le théorème du rang, nous avons : $\dim F = \dim \mathrm{Ker}\, h + \mathrm{rg}\, h = \dim \mathrm{Ker}\, h + \dim h(F) = \dim \mathrm{Ker}\, h + f(F) \geqslant f(F)$. De plus, par hypothèse, $F \subset f(F)$ donc $\dim F \leqslant f(F)$. Par conséquent $\dim f(F) = \dim F$.

2) Reprenons la relation précédente : $\dim F = \dim \mathrm{Ker}\, h + \dim f(F)$. Si f est injective, par restriction h aussi. Donc $\dim F = \dim f(F)$.
Autre méthode : de manière générale, si $\mathscr{B}$ est une base de F, alors $f(\mathscr{B})$ est une famille génératrice de $f(F)$. Mais ici, comme f est injective, c'est aussi une famille libre, donc c'est une base de $f(F)$. Puisque $\mathrm{Card}\,\mathscr{B} = \mathrm{Card}\, f(\mathscr{B})$, alors $\dim F = \dim f(F)$.

Exercice 9 • Si l'on a **1)**, par le théorème du rang on a aussi $\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\, f^2$. Or l'inclusion $\mathrm{Im}\, f^2 \subset \mathrm{Im}\, f$ est toujours vérifiée, d'où l'égalité $\mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Im}\, f$, et l'on a **2)**.
• Si l'on a **2)**, on a de même **1)**.
• Si l'on a **1)** et **2)**, soit $x \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f$. Alors on écrit $x = f(y)$. Donc $0 = f(x) = f^2(y)$. Ainsi $y \in \mathrm{Ker}\, f^2$, mais puisque $\mathrm{Ker}\, f^2 = \mathrm{Ker}\, f$, alors $y \in \mathrm{Ker}\, f$ et donc $x = f(y) = 0$. Cela assure que $E = \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f$. Mais avec le théorème du rang, $\dim E = \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f$, et donc on a **3)**.
• Si l'on a **3)**, soit $x \in \mathrm{Ker}\, f^2$, alors $f(f(x)) = 0$ donc $f(x) \in \mathrm{Ker}\, f$. Mais bien sûr $f(x) \in \mathrm{Im}\, f$, donc $f(x) \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\}$. Ainsi $f(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}\, f$, ce qui donne $\mathrm{Ker}\, f^2 \subset \mathrm{Ker}\, f$. Comme l'inclusion $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f^2$ est toujours vérifiée, on a bien **1)**.

Toutes les équivalences voulues sont bien démontrées.

Exercice 10 Appliquons l'inégalité de Grassmann à l'égalité $\mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g = E$: $\dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Im}\, g \geqslant \dim E$, soit $\mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g \geqslant n$.
De la même manière, $\dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, g \geqslant n$.
Sommons ces deux inégalités :

$$\mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g + \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, g \geqslant 2n.$$

Or par le théorème du rang, $\mathrm{rg}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f = n$, $\mathrm{rg}\, g + \dim \mathrm{Ker}\, g = n$, ce qui, dans l'inégalité précédente donne $2n \geqslant 2n$. Ainsi, si l'une des deux premières inégalités est stricte, nous avons $2n > 2n$, ce qui est absurde.
Donc $\mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g = n = \dim E$ et $\dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, g = n = \dim E$, et donc les sommes $\mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g = E$ et $\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}\, g = E$ sont directes.

Exercice 11

1) Démontrons d'abord que $\mathrm{Im}(u + v) \subset \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v$. Soit $y \in \mathrm{Im}(u + v)$ Il existe alors $x \in E$ tel que $y = (u + v)(x) = u(x) + v(x)$, qui appartient bien à $\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v$.
Remarque : attention, l'inclusion réciproque est fausse ! Essayez de le démontrer, et remarquez à quel endroit vous êtes bloqués. Cherchez un contre-exemple.
Il suffit alors de passer à la dimension dans cette inclusion, en appliquant l'inégalité de Grassmann : $\mathrm{rg}(u + v) \leqslant \dim(\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v) \leqslant \mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v$.
Reremarque : cette inégalité est simple à mémoriser, elle est du type « inégalité triangulaire ».

2) L'inégalité demandée est encore du type « inégalité triangulaire » : c'est l'analogue de l'inégalité de gauche de $||a| - |b|| \leqslant |a+b| \leqslant |a| + |b|$ (pour $a, b \in \mathbb{C}$ par exemple), celle de droite ayant été démontrée à la première question. Or pour des complexes, nous savons démontrer l'inégalité de gauche en utilisant celle de droite. Appliquons ici la même méthode :
remarquons que $u = (u+v) + (-v)$, et appliquons le résultat de la première question : $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}((u+v)+(-v)) \leqslant \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg}(-v)$. Il suffit alors de remarquer $\operatorname{Im}(-v) = \operatorname{Im}(v)$ (exercice facile laissé au lecteur, qui doit quand même s'assurer qu'il sait le faire !). Donc $\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v \leqslant \operatorname{rg}(u+v)$.
En écrivant de même que $v = (u+v) + (-u)$, nous avons $\operatorname{rg} v - \operatorname{rg} u \leqslant \operatorname{rg}(u+v)$.
Ces deux dernière inégalités donnent bien $|\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leqslant \operatorname{rg}(u+v)$.

Exercice 12 Par commodité, posons $E_{-1} = E_{n+1} = \{0\}$, $f_{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \{0\} & \to & E_1 \\ 0 & \mapsto & 0 \end{array} \right.$ et $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} E_n & \to & \{0\} \\ x & \mapsto & 0 \end{array} \right.$. Nous remarquons alors que nous avons aussi $\operatorname{Im} f_{j-1} = \operatorname{Ker} f_j$ pour $j = 0$, puisque f_0 est injective, donc $\operatorname{Im} f_{-1} = \{0\} = \operatorname{Ker} f_0$. Et nous l'avons aussi pour $j = n+1$ puisque f_{n-1} est surjective, donc $\operatorname{Im} f_{n-1} = E_n = \operatorname{Ker} f_n$.
Soit $j \in [\![0, n]\!]$. Par le théorème du rang, $\alpha_j = \operatorname{rg} f_j + \operatorname{rg} f_{j-1}$, donc par sommation télescopique :

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \alpha_j = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j (\operatorname{rg} f_j + \operatorname{rg} f_{j-1}) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \operatorname{rg} f_j - (-1)^{j-1} \operatorname{rg} f_{j-1} = (-1)^n \operatorname{rg} f_n - \operatorname{rg} f_{-1} = 0 - 0 = 0.$$

Exercice 13 Commençons par remarquer que pour tout polynôme P, $\deg P'' \leqslant \deg P' \leqslant \deg P$. Ainsi, si $\deg P \leqslant n$, $\deg(P + P' + P'') \leqslant \deg P \leqslant n$: f est donc bien une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même. L'application $P \mapsto P'$ étant linéaire, par composition $P \mapsto P''$ aussi, et donc par combinaison linéaire, f est linéaire.

1) Soit $P \in \operatorname{Ker} f$. Alors $P + P' + P'' = 0$. Si P n'est pas nul, alors $\deg P'' \leqslant \deg P' < \deg P$. Nous savons alors que dans ces conditions, $\deg(P + P' + P'') = \deg P$, car si $\deg P = n$, P comporte un terme de degré n, mais pas P' ni P''. Le monôme dominant de P est donc celui de $P + P' + P''$.
Donc ici, si $\deg P \geqslant 0$, $\deg(P + P' + P'') \geqslant 0$ ce qui est absurde car $P + P' + P'' = 0$. Ainsi $P = 0$ et $\operatorname{Ker} f = \{0\}$: f est injective.
Puisque f est un endomorhisme en dimension finie, son injectivité implique sa bijectivité.

2) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Notons n le degré de Q (si $Q \neq 0$). $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, donc, f étant bijective, Q admet un antécédent par f, i..e $\exists P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P + P' + P'' = Q$. Ceci prouve que Q admet un antécédent par φ. Or φ est clairement linéaire et injective (mêmes raisons que f), donc φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 14 $\Leftarrow$: avec le théorème du rang, $\dim E = \operatorname{rg} f + \dim \operatorname{Ker} f = 2 \operatorname{Im} f$.
$\Rightarrow$: si $n = 2p$, soit $(e_1, \cdots, e_{2p})$ une base de E. Rappelons que pour tout choix d'une famille $(f_1, \cdots, f_{2p})$ de vecteurs de E, il existe un unique $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que pour tout $i \in [\![1, 2p]\!]$, $f(e_i) = f_i$.
Considérons ici la famille $(f_1, \cdots, f_{2p}) = (e_{p+1}, e_{p+2}, \cdots, e_{2p}, 0, 0, \cdots, 0)$, où pour tout i de 1 à p, $f_i = e_{i+p}$, et pour tout $i \geqslant p+1$, $f_i = 0$.
On considère alors l'endomorphisme f tel que pour tout $1 \leqslant i \leqslant 2p$, $f(e_i) = f_i$.
Alors $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), \cdots, f(e_n)) = \operatorname{Vect}(e_{p+1}, e_{p+2}, \cdots, e_{2p}, 0, 0, \cdots, 0) = \operatorname{Vect}(e_{p+1}, e_{p+2}, \cdots, e_{2p})$.
En particulier, cette famille étant libre, $\operatorname{rg} f = p$.
Mais aussi, pour tout $i \geqslant p+1$, $e_i \in \operatorname{Ker} f$, donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_{p+1}, e_{p+2}, \cdots, e_{2p}) \subset \operatorname{Ker} f$. Or avec le théorème de rang, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \operatorname{rg} f = p = \operatorname{rg} f$: $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont inclus l'un dans l'autre et ont même dimension, donc ils sont égaux.

Exercice 15

1) **Condition nécessaire :** Supposons qu'il existe $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\operatorname{Ker} u = F$ et $\operatorname{Im} u = G$. Avec $n = \dim E$, par le théorème du rang $\dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u = \dim E$, donc $\dim E = \dim F + \dim G$ est une conditon nécessaire.

Condition sufisante : Réciproquement, en posant $p = \dim F$, $q = \dim G$, supposons que $p+q = n$. Nous allons construire u convenable en la définissant sur une base judicieusement choisie de E.
Soit $(f_1, \cdots, f_p)$ une base de F, que l'on complète par $(f_{p+1}, \cdots, f_{p+q})$ en une base de E : cette base servira de base « de départ » pour u.
Soit $(g_1, \cdots, g_q)$ une base de G, on considère la famille « à l'arrivée » $(0, \cdots, 0, g_1, \cdots, g_q)$, dont les p premiers vecteures sont nuls. Notons cette famille $(k_1, \cdots, k_n)$.
On sait alors qu'il existe un unique endomorpisme u tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u(f_i) = k_i$.
Alors : $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(f_1), \cdots, u(f_n)) = \operatorname{Vect}(0, \cdots, 0, g_1, \cdots, g_q) = \operatorname{Vect}(g_1, \cdots, g_q) = G$.
En particulier, $\operatorname{rg} u = \dim G = q$.
Or pour tout i de 1 à p, $f_i \in \operatorname{Ker} u$ donc $F = \operatorname{Vect}(f_1, \cdots, f_p) \subset \operatorname{Ker} u$. Or avec le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} u = \dim E - \operatorname{rg} u = n - q = p = \dim F$. Donc $F = \operatorname{Ker} u$: la condition était bien suffisante.

2) Une base de F est $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, que l'on compléte en la base de $\mathbb{R}^3$ $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, notée (f_1, f_2, f_3). Posons $g_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cherchons l'expression de l'endomorpisme u tel que $u(f_1) = u(f_2) = 0$ et $u(f_3) = g_1$.
Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Décomposons-le dans la base (f_1, f_2, f_3). Une résolution de système linéaire sans surprise donne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = zf_1 + (y+z)f_2 + (x+y+z)f_3$. Ainsi $u\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = zu(f_1) + (y+z)u(f_2) + (x+y+z)u(f_3) = (x+y+z)g_1$.

Une application u telle que $\operatorname{Ker} u = F$ et $\operatorname{Im} u = G$ est donc u : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & (x+y+z)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$.

Exercice 16 • Soit $n \in \mathbb{N}$ et $y \in \operatorname{Im} f^{n+1}$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f^{n+1}(x) = f^n(f(x))$, donc $y \in \operatorname{Im} f^n$. Ainsi $\operatorname{Im} f^{n+1} \subset \operatorname{Im} f^n$ donc $\operatorname{rg} f^{n+1} \leqslant \operatorname{rg} f^n$, et la suite $(\operatorname{rg}(f^n))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

• Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{rg} f^{n_0} = \operatorname{rg} f^{n_0+1}$. Posons l'hypothèse de récurrence suivante : pour tout $k \in \mathbb{N}$, (H_k) : « $\operatorname{rg} f^{n_0} = \operatorname{rg} f^{n_0+k}$ ».
(H_0) est évidemment vraie, et (H_1) l'est par hypothèse.
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que (H_k) est vraie. Nous savons déjà que $\operatorname{Im} f^{n_0+k+1} \subset \operatorname{Im} f^{n_0+k} \subset \operatorname{Im} f^{n_0}$. Mais avec (H_k), la dernière inclusion assure que, par égalité de leur dimension, $\operatorname{Im} f^{n_0+k} = \operatorname{Im} f^{n_0}$. Montrons que $\operatorname{Im} f^{n_0+k+1} \supset \operatorname{Im} f^{n_0+k} \subset \operatorname{Im} f^{n_0}$.
Soit $y \in \operatorname{Im} f^{n_0+k}$. Alors il existe $x \in E$ tel $y = f^{n_0+k}(x) = f^k(f^{n_0}(x))$. Alors $f^{n_0}(x) \in \operatorname{Im} f^{n_0}$. Mais comme $\operatorname{rg} f^{n_0} = \operatorname{rg} f^{n_0+1}$, par le même raisonnement que précédemment nous avons aussi $\operatorname{Im} f^{n_0} = \operatorname{Im} f^{n_0+1}$. Donc $f^{n_0}(x) \in \operatorname{Im} f^{n_0+1}$, et il existe $t \in E$ tel que $f^{n_0}(x) = f^{n_0+1}(t)$, et donc $y \in \operatorname{Im} f^{n_0+k+1}(t)$. Ainsi, par double inclusion, $\operatorname{Im} f^{n_0+k+1} = \operatorname{Im} f^{n_0+k} = \operatorname{Im} f^{n_0}$, et en passant aux dimensions, (H_{k+1}) est vraie.

• Supposons maintenant que la suite $(\operatorname{rg}(f^n))_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante du rang 0 jusqu'au rang $n+1$: $n = \operatorname{rg} f^0 > \operatorname{rg} f > \cdots > \operatorname{rg} f^{n+1}$. Alors $0 = n - (n+1) \geqslant \operatorname{rg} f^{n+1}$, ce qui est absurde. Il existe donc $p \leqslant n$ tel que $\operatorname{rg} f^p = \operatorname{rg} f^{p+1}$. Avec le paragraphe précédent, nous avons donc le résultat voulu : $\operatorname{rg} f^n = \operatorname{rg} f^{n+1}$.