



C6 : ANALYSE FRÉQUENTIELLE DES SYSTÈMES ASSERVIS

C6-2 - Analyse fréquentielle des systèmes asservis : modèles élémentaires

2 Avril 2019

Table des matières

I Lieux de transfert : diagrammes de Bode	1
1 Définition	1
II Construction des diagrammes de Bode élémentaires	2
1 Gain pur	2
2 Intégrateur	2
3 Premier ordre	6
4 Second ordre	8
a) Cas où $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels :	9
b) Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes :	10

Compétences

- **Modéliser :**
 - Identifier et caractériser les grandeurs physiques : caractéristiques fréquentielles
 - Systèmes linéaires continus et invariants
 - Signaux canoniques d'entrée : signaux sinusoïdaux
 - Schémas blocs, fonctions de transferts
- **Résoudre :** Procéder à la mise en oeuvre d'une démarche de résolution analytique
 - Réponse fréquentielle : systèmes du 1^{er} et 2^{ème} ordre, intégrateur.

I. Lieux de transfert : diagrammes de Bode

1 Définition



Définition 1 : Diagramme de Bode

Le **diagramme de Bode** permet de représenter l'état de la réponse fréquentielle en régime établi ($s(t) = G e_0 \sin(\omega t + \varphi)$) en fonction de la pulsation ω pour une fonction de transfert $H(p)$. Ce diagramme est composé :

- d'un diagramme de gain représentant le gain en décibel (G_{db}) en fonction de la pulsation ω :

$$G_{db} = 20 \log(G) = 20 \log(|H(j\omega)|); \quad (1)$$

- d'un diagramme de phase représentant la phase en degré (φ en $^\circ$) en fonction de la pulsation ω

$$\varphi = \arg(H(j\omega)). \quad (2)$$

Pour ces deux diagrammes, les abscisses (concernant ω) sont représentées en échelle logarithmique.



Remarque 1 :

Ainsi pour étudier la réponse d'un système avec pour fonction transfert $H(p)$, il suffit d'étudier le module et l'argument de l'expression $H(j\omega)$ qui est obtenu en remplaçant p par $j\omega$ dans $H(p)$



Propriété 1 : Addition des fonctions de transfert élémentaires

L'avantage du tracé en gain et en argument est que le produit de fonctions de transfert élémentaires se transforme en somme de gains et d'arguments élémentaires.

Pour la fonction de transfert de l'exemple de la suspension moto :

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log \left(\left| \frac{\frac{c}{k} j\omega + 1}{\frac{m}{k} (j\omega)^2 + \frac{c}{k} j\omega + 1} \right| \right) \\ &= 20 \log \left(\left| \frac{c}{k} j\omega + 1 \right| \right) - 20 \log \left(\left| \frac{m}{k} (j\omega)^2 + \frac{c}{k} j\omega + 1 \right| \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \arg(H(j\omega)) = \arg \left(\frac{\frac{c}{k} j\omega + 1}{\frac{m}{k} (j\omega)^2 + \frac{c}{k} j\omega + 1} \right) \\ &= \arg \left(\frac{c}{k} j\omega + 1 \right) - \arg \left(\frac{m}{k} (j\omega)^2 + \frac{c}{k} j\omega + 1 \right) \end{aligned}$$

On remarque donc que le gain et l'argument total sont respectivement la somme (ou la différence) de gains et d'arguments élémentaires de fonctions de transfert d'ordre 1 et 2. D'où la nécessité d'analyser d'un point de vue fréquentiel successivement chacune des fonctions de transfert élémentaires d'ordre 1 ou 2.

II. Construction des diagrammes de Bode élémentaires

1 Gain pur

Pour un gain pur la fonction de transfert s'écrit :

$$H(p) = K. \quad (3)$$

Ainsi en remplaçant p par $j\omega$, on obtient :

$$H(j\omega) = K.$$

Ainsi :

- $G_{dB} = 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log(K),$
- $\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg(K) = 0.$

On obtient donc le tracé donné sur la figure 1

2 Intégrateur

Pour un intégrateur pur la fonction de transfert s'écrit :

$$H(p) = \frac{K}{p}. \quad (4)$$

Ainsi en remplaçant p par $j\omega$, on obtient :

$$H(j\omega) = \frac{K}{j\omega}.$$

Ainsi :

- $G_{dB} = 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log(K) - 20 \log(\omega),$
- $\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg(K) - \arg(j\omega) = -90^\circ.$
- Sur le tracé semi-logarithmique du diagramme de gain, ceci correspond à une droite affine avec :
 - pour coefficient directeur $-20 \text{ dB par décade},$
 - et qui coupe l'axe des abscisse en $\omega = K.$
- Sur le tracé semi-logarithmique du diagramme de phase, ceci correspond à une droite horizontale passant par $\varphi = -90^\circ.$

On obtient donc le tracé donné sur la figure 2

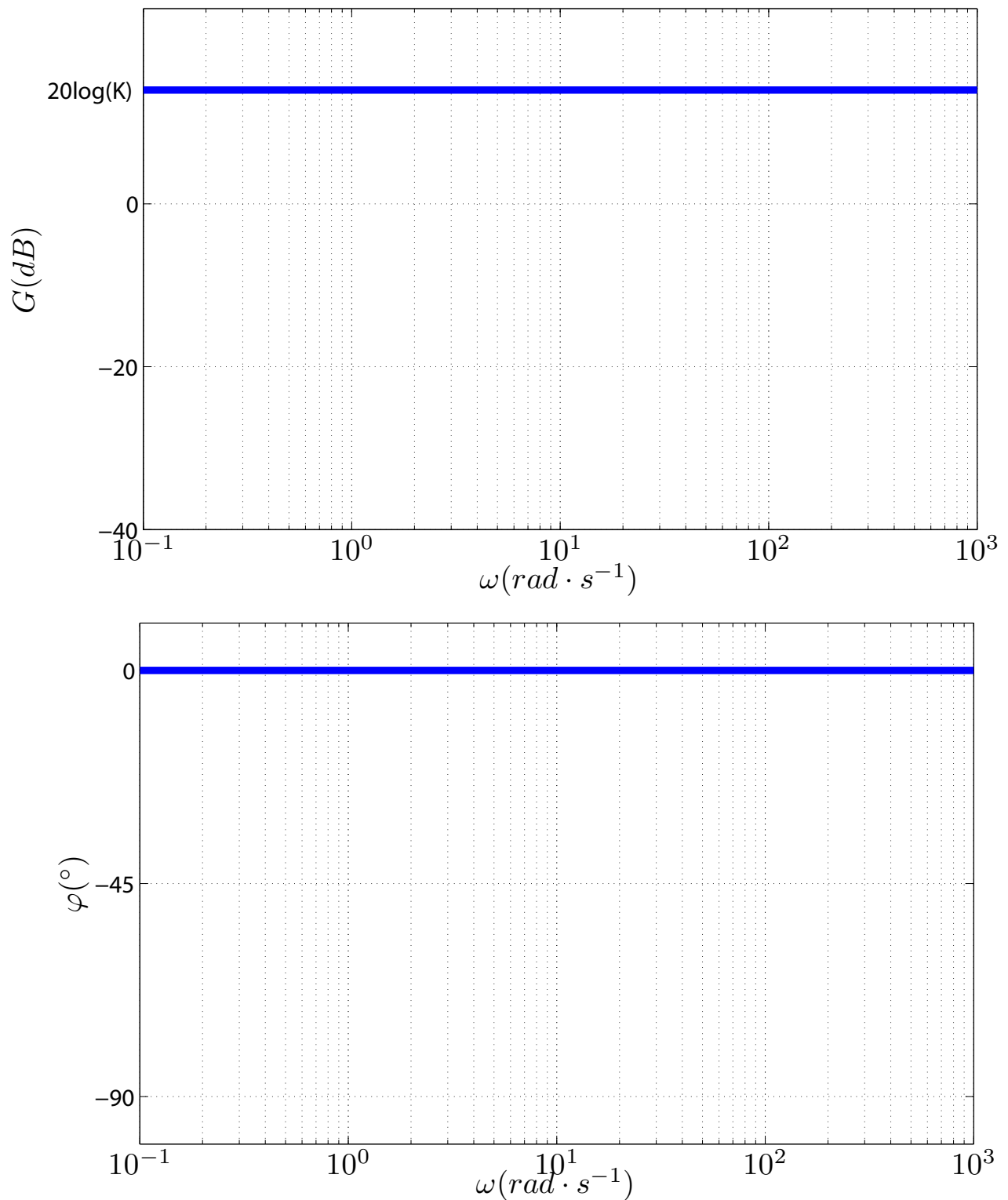


FIGURE 1 – Diagramme de Bode pour un gain pur

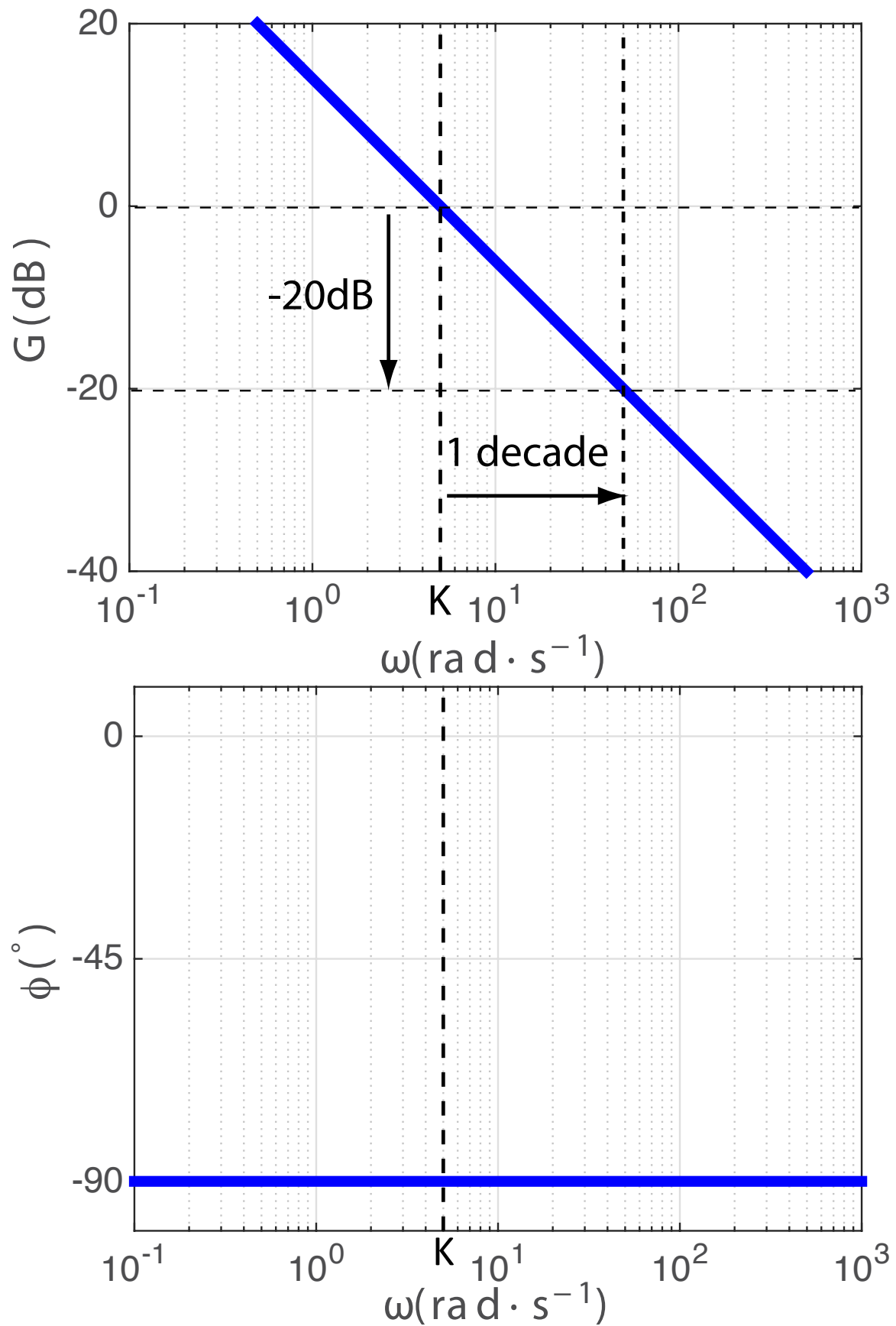


FIGURE 2 – Diagramme de Bode pour un intégrateur pur

3 Premier ordre

Nous rappelons que la fonction de transfert d'un système du premier ordre s'écrit sous la forme canonique :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}. \quad (5)$$

Ainsi en remplaçant p par $j\omega$, on obtient :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau j\omega}.$$

Pour tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert, il faut commencer par tracer le diagramme asymptotique, c'est à dire tracer les branches approximées de G_{dB} et φ lorsque :

1. $\omega \rightarrow 0$,
2. $\omega \rightarrow +\infty$.

• **Calcul du gain de $H(j\omega)$:**

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log \left(\left| \frac{K}{1 + \tau j\omega} \right| \right) = 20 \log \left(\frac{K}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \right) \\ &= 20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{1 + (\tau\omega)^2} \right). \end{aligned}$$

• **Tracé du diagramme asymptotique en gain :**

1. $\omega \rightarrow 0$:

$$20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{1 + (\tau\omega)^2} \right) \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 20 \log(K)$$

ce qui correspond à une droite horizontale situé à $20 \log(K)$

2. $\omega \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} 20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{1 + (\tau\omega)^2} \right) &\underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} 20 \log(K) - 20 \log \left([(\tau\omega)^2]^{1/2} \right) \\ &= 20 \log(K) - 20 \log(\tau\omega) = 20 \log(K) - 20 \log(\tau) - 20 \log(\omega) \end{aligned}$$

Ainsi l'équation du gain asymptotique \tilde{G}_{dB} est donnée par :

$$\tilde{G}_{dB} = 20 \log(K) + 20 \log \left(\frac{1}{\tau} \right) - 20 \log(\omega)$$

Sur le tracé semi-logarithmique, ceci correspond à une droite affine avec :

- pour coefficient directeur $-20 \text{ dB par décade}$,
- et qui coupe la droite horizontale ($20 \log(K)$) en $\omega = \frac{1}{\tau}$.

• **Pulsation de coupure :**



Définition 2 : Pulsation de coupure

La pulsation de coupure ω_c se définit comme la valeur de ω telle que :

$$|H(j\omega_c)| = \frac{|H(j\omega)|_0}{\sqrt{2}}. \quad (6)$$

où $|H(j\omega)|_0$ est le module de la fonction de transfert $H(j\omega)$ lorsque ω tend vers 0.

On trouve que le gain de coupure :

$$G_{dB}(\omega_c) = 20 \log(K) - 20 \log(\sqrt{2}) \simeq 20 \log(K) - 3 \text{ dB} \quad (7)$$

Pour un premier ordre, $\omega_c = \frac{1}{\tau}$.

- **Calcul de la phase de $H(j\omega)$:**

$$\begin{aligned}\varphi &= \arg\left(\frac{K}{1 + \tau j\omega}\right) = \arg(K) - \arg(1 + \tau j\omega) \\ &= 0 - \arctan(\tau\omega) \\ &= -\arctan(\tau\omega)\end{aligned}$$

- **Tracé du diagramme asymptotique en phase :**

1. $\omega \rightarrow 0$:

$$\varphi = \arg(K) - \arg(1 + \tau j\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$$

2. $\omega \rightarrow +\infty$:

$$\varphi = \arg(K) - \arg(1 + \tau j\omega) \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} -\arg(\tau j\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} -\frac{\pi}{2}$$

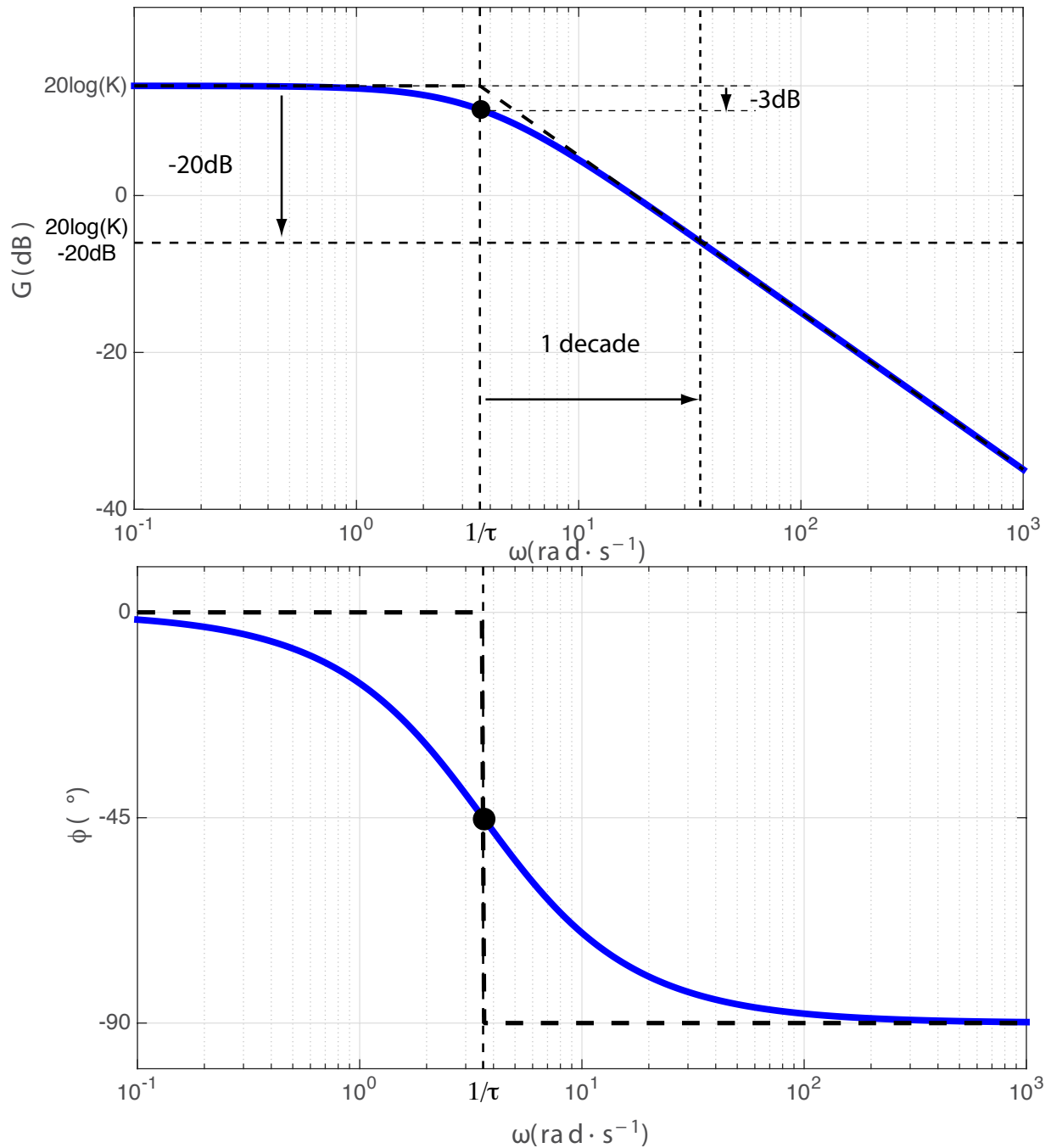


FIGURE 3 – Diagramme de Bode pour une fonction de transfert d'ordre 1

4 Second ordre

Nous rappelons que la fonction de transfert d'un système du second ordre s'écrit sous la forme canonique :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \quad (8)$$

Ainsi, en remplaçant p par $j\omega$, on obtient :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}}$$

Le dénominateur peut alors s'écrire de différentes manières selon si :

1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta > 0$: 2 pôles réels.
2. $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes.

Réalisons donc le tracé du diagramme de Bode suivant ces deux cas :

a) Cas où $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels :

Les deux pôles réels sont donc :

$$\begin{cases} p_1 &= \omega_0 \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \\ p_2 &= \omega_0 \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \end{cases}$$

La fonction de transfert s'écrit donc :

$$H(j\omega) = \frac{K}{(1 + j T_1 \omega)(1 + j T_2 \omega)}$$

avec :

$$\begin{cases} T_1 &= -\frac{1}{p_1} \\ T_2 &= -\frac{1}{p_2} \end{cases}$$

On peut alors calculer le gain :

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log(|1 + j T_1 \omega|) - 20 \log(|1 + j T_2 \omega|)$$

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log(\sqrt{1 + (T_1 \omega)^2}) - 20 \log(\sqrt{1 + (T_2 \omega)^2})$$

Pour la phase, on obtient :

$$\varphi = \arg(K) - \arg(1 + j T_1 \omega) - \arg(1 + j T_2 \omega)$$

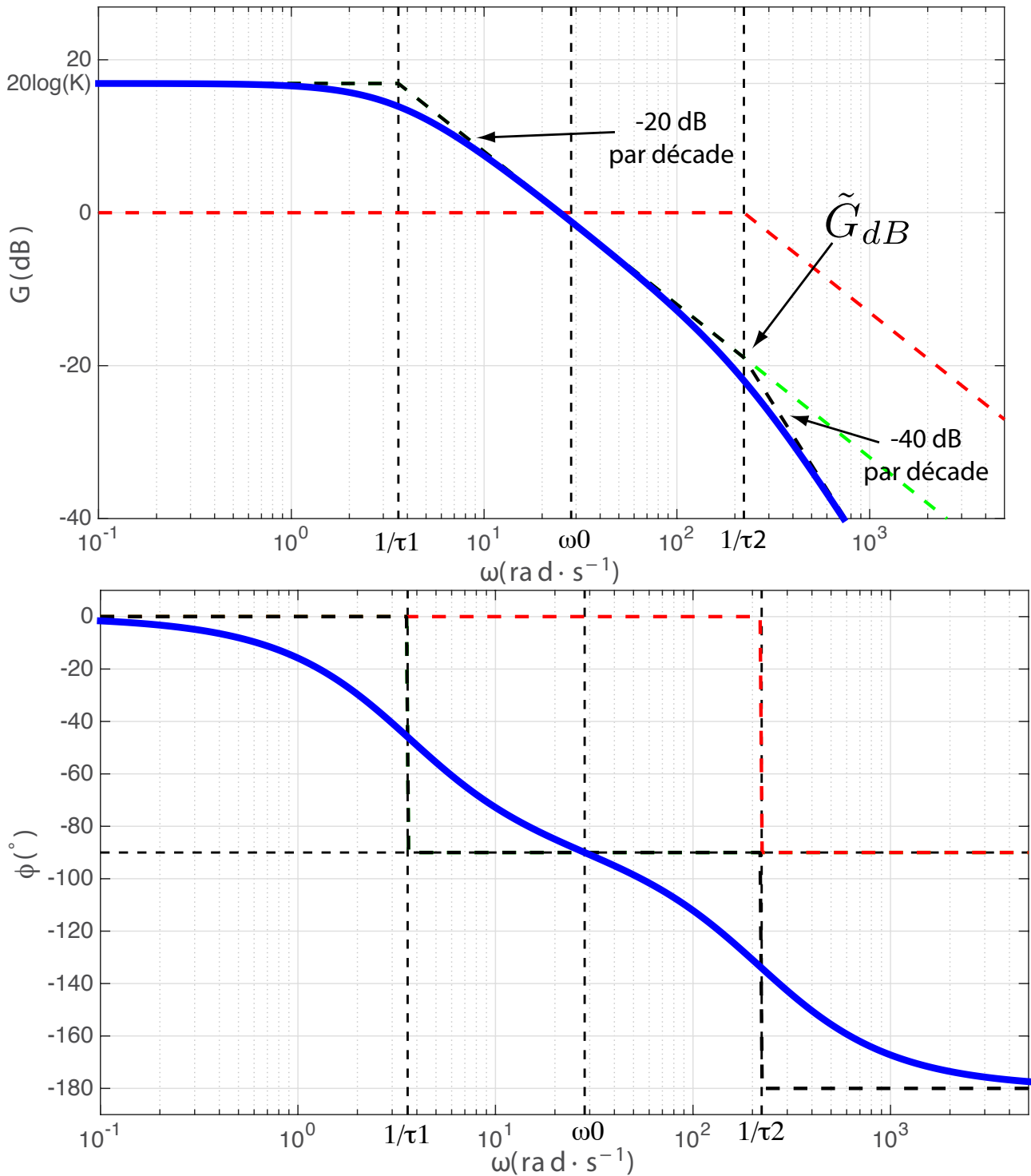
On remarque donc que :

- le gain de cette fonction de transfert est la somme d'un gain pur et de deux gains du premier ordre ;
- la phase de cette fonction de transfert est la somme d'une phase d'un gain pur et de deux phases du premier ordre.

Pour réaliser le tracé du diagramme asymptotique, on trace successivement chaque diagramme asymptotique élémentaire.

- Le diagramme de Bode asymptotique en gain possède alors 3 branches :
 - Une première branche horizontale constante à $20 \log(K)$.
 - Une deuxième branche pour ω compris entre $\frac{1}{T_1}$ et $\frac{1}{T_2}$ avec une pente de $-20dB$ par décade.
 - Une deuxième branche pour ω supérieur $\frac{1}{T_2}$ avec une pente de $-40dB$ par décade.
- Le diagramme de Bode asymptotique en phase possède alors 3 branches :
 - Une première branche horizontale constante à 0° pour $\omega \leq \frac{1}{T_1}$.
 - Une première branche horizontale constante à -90° pour $\frac{1}{T_1} \leq \omega \leq \frac{1}{T_2}$.
 - Une première branche horizontale constante à -180° pour $\omega \geq \frac{1}{T_2}$.

On peut alors tracer les diagrammes de Bode sur la figure 4.

FIGURE 4 – Diagramme de Bode pour une fonction de transfert du second ordre (cas 1, $\xi \geq 1$)**b) Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes :**

Dans ce cas, le module de la fonction de transfert $H(j\omega)$ s'écrit :

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\omega\right)^2}}$$

Pour tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert, il faut commencer par tracer le diagramme asymptotique, c'est à dire tracer les branches approximées de G_{dB} et φ lorsque :

1. $\omega \rightarrow 0$,
2. $\omega \rightarrow +\infty$.

• **Tracé du diagramme asymptotique en gain :**

1. $\omega \rightarrow 0$:

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0} \omega\right)^2} \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 20 \log(K)$$

ce qui correspond à une droite horizontale située à $20 \log(K)$

2. $\omega \rightarrow +\infty$:

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0} \omega\right)^2} \right) \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} 20 \log(K) - 40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Ainsi l'équation du gain asymptotique \tilde{G}_{dB} en $+\infty$ est donnée par :

$$\tilde{G}_{dB} = 20 \log(K) + 40 \log(\omega_0) - 40 \log(\omega)$$

Sur le tracé semi-logarithmique, ceci correspond à une droite affine avec :

- pour coefficient directeur $-40 \text{ dB par décade}$.
- les deux branches asymptotiques se coupent en $\omega = \omega_0$.

• **Tracé du diagramme asymptotique en phase :**

$$\varphi = \arg(K) - \arg\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0} j \omega\right)\right)$$

1. $\omega \rightarrow 0$:

$$\varphi \underset{\omega \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$$

ce qui correspond à une droite horizontale situé à 0°

2. $\omega \rightarrow +\infty$:

$$\varphi \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} -\arg\left(-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right).$$

Ce qui correspond à l'opposé de l'argument d'un réel pur à partie réelle négative, donc :

$$\varphi \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\rightarrow} -\pi = -180^\circ.$$

• **Existence d'une résonance**



Définition 3 : Pulsation de résonance

La **pulsation de résonance** est définie comme la pulsation correspondant au maximum du gain.

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (9)$$

Ainsi la résonance existe uniquement si $\xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

**Définition 4 : Facteur de résonance**

On appelle le **facteur de résonance** ou **coefficient de surtension** la grandeur Q définie par :

$$Q = \frac{|H(j\omega)|_{\max}}{\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)|} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}. \quad (10)$$

On peut alors tracer les diagrammes de Bode sur la figure 5 pour différentes valeurs de ξ .

**Démonstration 1 : Facteur de résonance**

$|H(j\omega)|_{\max}$ est obtenu lorsque $\omega = \omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$.

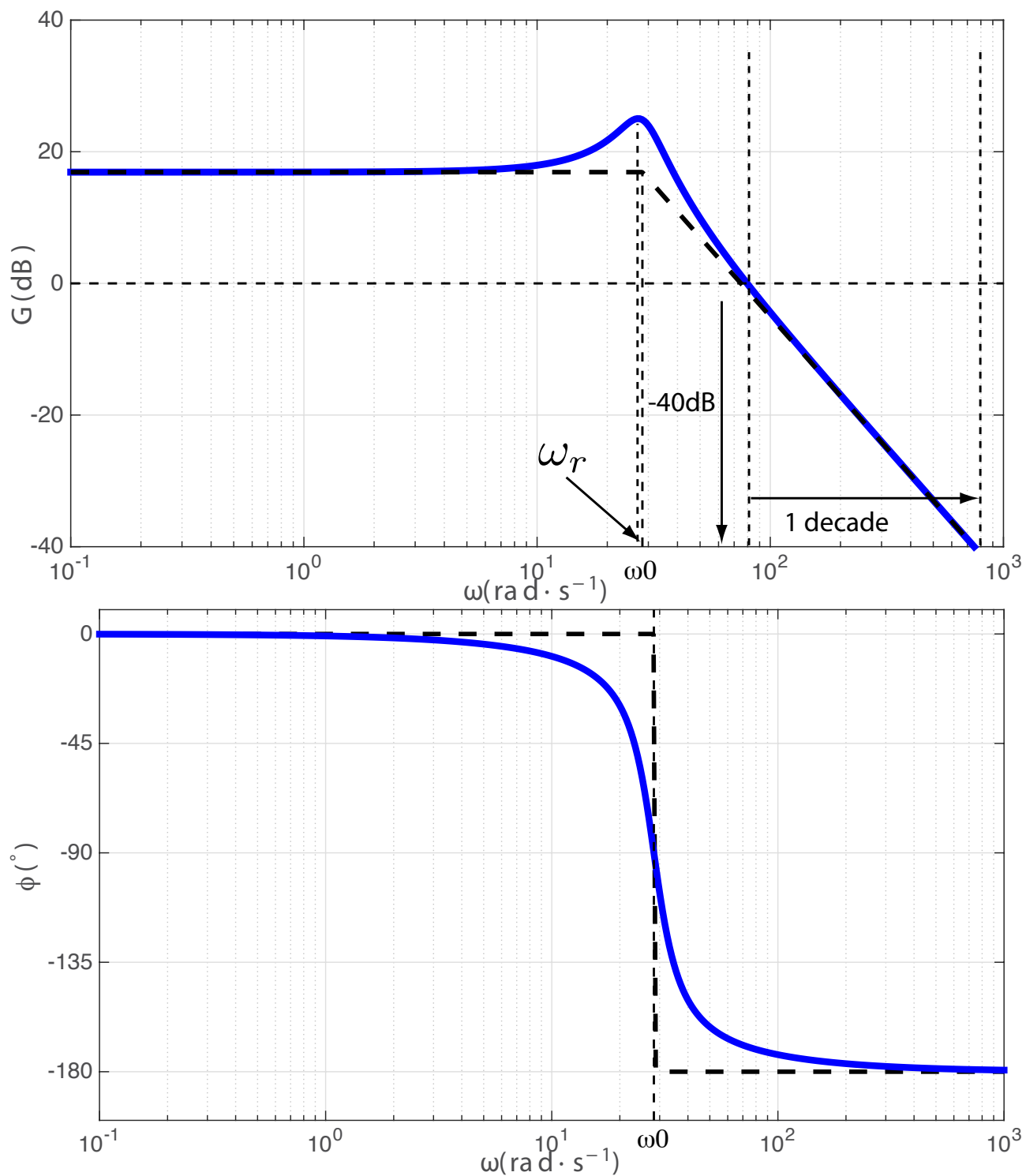
On obtient alors,

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|_{\max} &= \frac{K}{\sqrt{\left(1 - (1 - 2\xi^2) \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0} \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}\right)^2}} \\ &= \frac{K}{\sqrt{(1 - 1 + 2\xi^2)^2 + (2\xi\sqrt{1 - 2\xi^2})^2}} = \frac{K}{\sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2(1 - 2\xi^2)}} = \frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \end{aligned}$$

De plus on peut calculer $\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)|$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)| = K.$$

On peut alors tracer différentes allures de diagrammes de Bode pour différentes valeurs de ξ (figure 6)

FIGURE 5 – Diagramme de Bode pour une fonction de transfert du second ordre (cas 2, $\xi < 1$)

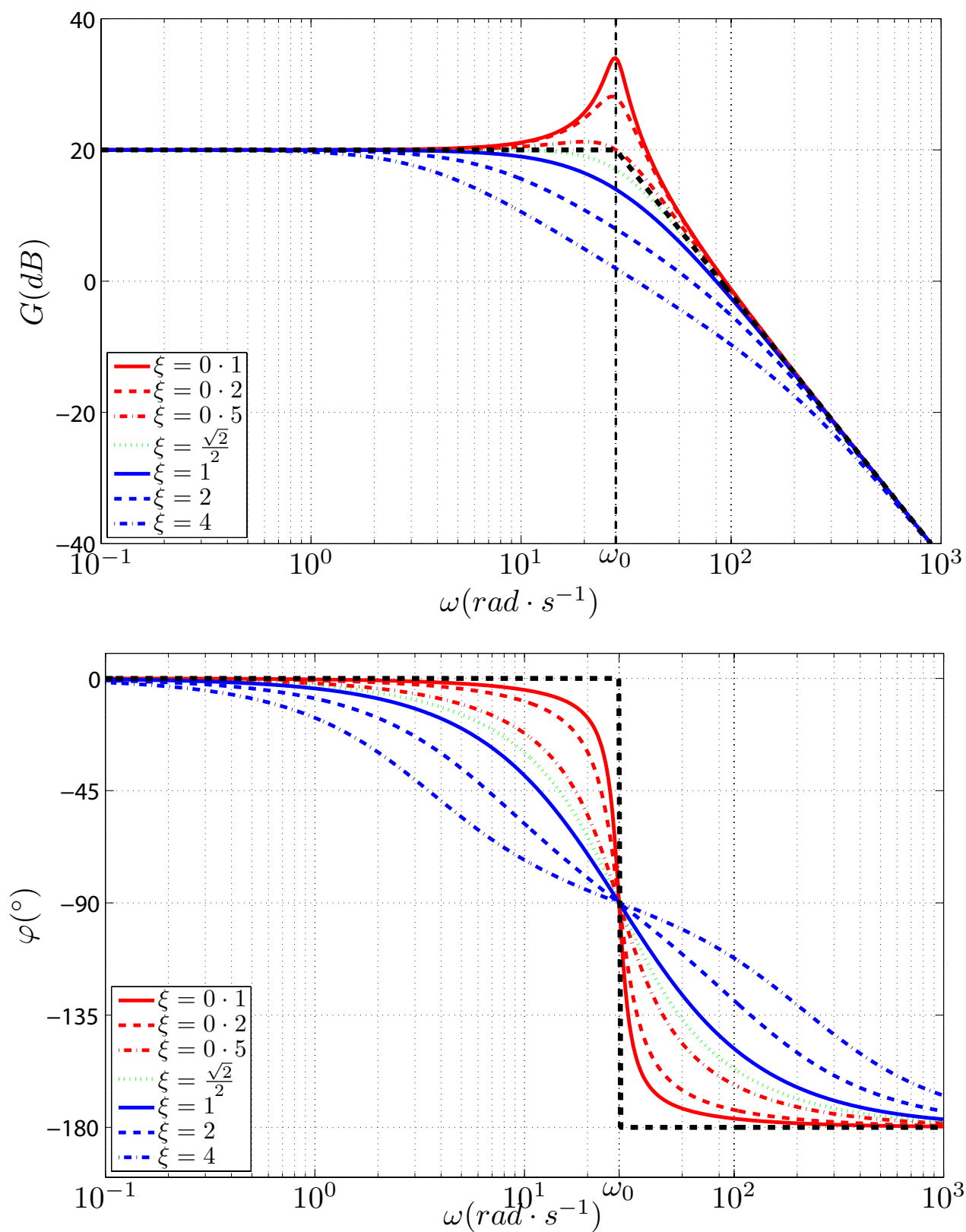


FIGURE 6 – Diagrammes de Bode pour une fonction de transfert du second ordre (cas 1 et 2)