DS n° 05 : Fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom : Note :

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

Algèbre

Soit $G = (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \star)$ le groupe défini par $(x,y) \star (x',y') = (xx', x'y + y')$, noté multiplicativement.

$1_G =$ (1) $\qquad (x,y)^{-1} =$ (2)

G est-il commutatif (répondre Oui ou Non) ? (3)

Suites récurrentes

Une valeur approchée décimale de $\sqrt{5}$ à 10^{-3} près est . (4)

Soit la suite (u_n) telle que $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - 2u_{n+1} + 2u_n = 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_n =$. (5)

Soit la suite (v_n) telle que $v_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n - 1$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$v_n =$. (6)

Pour chacune de ces suites définies par récurrence, donner l'ensemble maximal auquel appartient le premier terme pour que la suite soit définie.

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n),$ $\qquad u_0 \in$ (7)

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \sqrt{1 - v_n},$ $\qquad v_0 \in$ (8)

Pour chacune de ces suites définies par récurrence, donner sa limite si elle existe, et écrire Div en cas de divergence sans limite.

$$u_0 = \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{2} \quad : \qquad u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \boxed{} \tag{9}$$

$$v_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \mathrm{e}^{v_n} - 1 \quad : \qquad v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \boxed{} \tag{10}$$

$$w_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = 1 - 2w_n \quad : \qquad w_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \boxed{} \tag{11}$$

$$z_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n - 2}{z_n + 1 + i} \quad : \qquad z_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \boxed{} \tag{12}$$

Donner un exemple de suite réelle divergente u pour laquelle il existe un unique réel ℓ tel que toutes les suites extraites convergentes de u convergent vers ℓ.

$$\boxed{} \tag{13}$$

Limites de fonctions.

Donner les limites suivantes (écrire **N'EXISTE PAS** si la limite n'existe pas).

$$\frac{x^2 \ln^3(x) - x \ln^5(x) + 1}{-x \ln(x) + 2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \boxed{} \tag{14}$$

$$\frac{\sin(2x^2 + x)}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} \boxed{} \tag{15}$$

$$\frac{\ln(x - \lfloor x \rfloor)}{x} \xrightarrow[x \to 0^-]{} \boxed{} \tag{16}$$

$$x^2 \left[\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right] \xrightarrow[x \to +\infty]{} \boxed{} \tag{17}$$

— FIN —