

Devoir à la maison n° 4

À rendre le 7 octobre

Les questions 2 et 3 sont indépendantes.

- 1) a) Représenter la fonction Arctan sur son ensemble de définition.
b) Montrer que $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(1/x) = \pi/2$ pour tout $x > 0$. Que vaut cette expression pour $x < 0$?
c) Justifier l'existence et donner la valeur de la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan}(x)}{x}$
- 2) Soit $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$. On pose $\theta = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)$.
a) Montrer que $-\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.
b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur x et y pour que $\theta = \frac{\pi}{2}$.
c) Montrer : $\theta < \frac{\pi}{2} \iff xy < 1$.
d) Calculer, lorsque c'est possible $\tan \theta$.
En déduire, suivant les valeurs de $x > 0$ et y réel, θ en fonction de $\text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$.
e) A l'aide de $x = p+1$ et $y = -p$, déterminer la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de :

$$S_n = \sum_{p=0}^n \text{Arctan}\left(\frac{1}{p^2 + p + 1}\right)$$

- 3) Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}\right)$$

- a) Déterminer l'ensemble de définition de f .
b) Montrer que l'on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $[0, \pi[$. Préciser les transformations géométriques nécessaires pour obtenir toute la courbe de f .
c) On cherche à simplifier f par deux méthodes différentes :
i) **Première méthode :**
Redémontrer les formules qui expriment $\cos^2 t$ et $\sin^2 t$ en fonction de l'angle $2t$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
En déduire une expression simplifiée de f sur $[0, \pi[$.
ii) **Seconde méthode :**
Préciser l'ensemble sur lequel f est dérivable et calculer f' sur cet ensemble.
En déduire f sur $[0, \pi[$.
d) Donner une représentation graphique de f sur son ensemble de définition.

— FIN —