Devoir à la maison n° 7

À rendre le 26 novembre

I. Un exercice sur les ensembles

Soient A, B et C trois ensembles. Montrer que :

$$A \cap B = A \cap C \iff A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}.$$

II. Un exercice sur les applications

Soit E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application et G un troisième ensemble, ayant au moins deux éléments. On construit deux nouvelles applications :

$$f_* : \left\{ \begin{array}{ccc} E^G & \to & F^G \\ \varphi & \mapsto & f \circ \varphi \end{array} \right. \text{ et } f^* : \left\{ \begin{array}{ccc} G^F & \to & G^E \\ \varphi & \mapsto & \varphi \circ f \end{array} \right. .$$

Montrer les équivalences suivantes :

$$f \text{ est injective } \iff f_* \text{ est injective } \iff f^* \text{ est surjective.}$$

III. Un théorème de point fixe

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application croissante. On veut montrer que f possède un point fixe, *i.e.* qu'il existe $t \in [0,1]$ tel que $f(t) = t$.

1) On note $T = \{x \in [0,1] \mid f(x) \leqslant x\}$.

- **a)** Montrer que T possède une borne inférieure, notée t.
- **b)** Montrer que $f(T) \subset T$.
- **c)** Montrer que $f(t)$ minore T.
- **d)** Déduire de tout ceci que $f(t) = t$.

2) Ce résultat est-il toujours vrai :

- **a)** pour $f :]0,1] \to]0,1]$ croissante ?
- **b)** pour $f : [0,1[\to [0,1[$ croissante ?

— FIN —