M3 BASES DE LA DYNAMIQUE NEWTONIENNE

Dynamique = prévision du mouvement des corps dans un environnement donné.
Jusqu'à présent nous avons défini comment la position et le mouvement d'une particule matérielle pouvait être défini.
Nous allons maintenant rechercher pourquoi cette particule a un tel mouvement.

I. Première loi de Newton

I.1. La masse

Si on s'intéresse à la mise en mouvement d'un corps, on se rend compte qu'une nouvelle quantité physique est nécessaire autre que la longueur ou le temps.
Une expérience simple permet de le mettre en évidence : il est plus facile de lancer une balle de tennis, et de lui communiquer une grande vitesse, que de lancer une boule de pétanque.
Cette propriété s'appelle l'inertie du système.
La grandeur introduite et fondamentale au niveau de la dynamique est la masse Inertielle.

Ainsi la grandeur qui mesure la capacité d'un corps à résister à la mise en mouvement est sa masse mesurée en kilogramme (kg). La masse est un scalaire d'autant plus grand que le corps est inerte. Cette grandeur est extensive et additive.

I.2. La quantité de mouvement

• Quantité de mouvement pour un point matériel
Référentiel : $\mathfrak{R}$
Système : M(m)
Mouvement : la particule est animée dans $\mathfrak{R}$ d'une vitesse $\vec{v}$
Le produit $\vec{p} = m\vec{v}$ est appelé quantité de mouvement de la particule dans $\mathfrak{R}$.
La quantité de mouvement comme la vitesse dépend du référentiel d'étude.

Unités : la norme et les composantes du la quantité de mouvement s'exprime en $kg.m.s^{-1}$

• Quantité de mouvement pour d'un système de points matériels
Référentiel : $\mathfrak{R}$
Système : $M_1(m_1)$ et $M_2(m_2)$
Mouvement : la particule M_1 est animée dans $\mathfrak{R}$ d'une vitesse $\vec{v_1}$
la particule M_2 est animée dans $\mathfrak{R}$ d'une vitesse $\vec{v_2}$

La quantité de mouvement du système dans $\mathfrak{R}$ est la somme des quantités de mouvement on parle de résultante cinétique :

$$\vec{p} = m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}$$

Remarque
On définit le barycentre G du système par la relation : $(m_1 + m_2)\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}$
Dérivons cette expression par rapport au temps : $(m_1 + m_2)\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = m_1\frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt} + m_2\frac{d\overrightarrow{OM_2}}{dt}$
Ainsi $(m_1 + m_2)\vec{v_G}$ $m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = M\vec{v_G}$

Ce résultat appliqué à deux particules peut être généralisé à N particules.

I.3. Notion de forces

On définit généralement les forces à partir de leurs effets observables.
Un premier effet observable des forces est la déformation des corps : si on exerce une force de pression sur une éponge celle-ci se déforme, si on tire sur les deux extrémités d'un élastique celui-ci s'allonge.
Un second effet est la modification d'état de repos ou de mouvement d'un corps. Le ballon sur lequel on frappe abandonne son état de repos. L'action de l'air sur la toile ralenti la chute du parachutiste.

En exerçant une force sur un mobile, on peut soit le mettre en mouvement, soit l'arrêter ou encore changer sa trajectoire.
La force est donc toute cause capable de modifier l'état de mouvement ou de repos d'un corps ou de le déformer.

La force est une grandeur vectorielle $\vec{F}$.
On postule de plus que la force $\vec{F}$ est invariante par tout changement de référentiel.
Additivité des forces : si $\overrightarrow{F_1}$ décrit l'action du système Σ_1 sur P et $\overrightarrow{F_2}$ décrit l'action du système Σ_2 sur P alors l'action simultanée de Σ_1 et Σ_2 sur P est décrite, dans les mêmes conditions par $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$.

I.4. Le principe d'inertie

I.4.1. Particule libre, isolée.

Il s'agit de points matériels qui n'exercent ni ne subissent d'interaction.
L'interaction entre deux systèmes décroît toujours pour tendre vers zéro lorsque la distance entre les deux systèmes tend vers l'infini.
Une particule libre est donc infiniment éloignée de toute matière.
Il s'agit donc d'un concept limite valable dans un certain domaine d'approximation.

I.4.2. Principe d'inertie.

Principe d'inertie : Dans un référentiel galiléen une particule libre est animée d'un mouvement rectiligne et uniforme.

Le principe d'inertie met en avant l'existence d'un type de référentiels particuliers : un référentiel Galiléen.
On appelle référentiel Galiléen, un référentiel dans lequel le principe d'inertie s'applique.

• Passage d'un référentiel Galiléen à un autre.
Soit $\Re_1$ un référentiel Galiléen associé à un solide S_1 d'origine O_1.
Soit $\Re_2$ un référentiel associé à un solide S_2 (d'origine O_2) en mouvement de translation rectiligne est uniforme par rapport à $\Re_1$.
Soit $\overrightarrow{v_{\Re 1}} = \overrightarrow{cst}$ la vitesse d'une particule isolée par rapport à $\Re_1$.
On a $\overrightarrow{v_{\Re 1}} = \dfrac{\overrightarrow{O_1M}}{dt} = \dfrac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt} + \dfrac{\overrightarrow{O_1M}}{dt} = \overrightarrow{v_{S_1/\Re_1}} + \overrightarrow{v_{\Re 2}} = \overrightarrow{cst}$
Ainsi la particule isolée a aussi un mouvement rectiligne et uniforme par rapport à $\Re_2$.

Les référentiels Galiléens sont en mouvement rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres.

• Exemples de référentiels
▪ Référentiel de Copernic : C'est un référentiel dont l'origine est le centre du système solaire et dont les axes sont dirigés vers des étoiles fixes. C'est le référentiel Galiléen dont le caractère n'a pas été remis en cause
▪ Référentiel héliocentrique : C'est un référentiel dont l'origine est le centre du Soleil et dont les axes sont dirigés vers des étoiles fixes. Il est considéré comme Galiléen tant qu'on peut négliger le mouvement orbital du soleil autour du centre la galaxie (durée estimée à 230 millions d'année)
▪ Référentiel géocentrique : C'est un référentiel dont l'origine est le centre de la Terre et dont les axes sont parallèles à ceux du référentiel héliocentrique. Il est considéré comme Galiléen tant qu'on peut négliger le mouvement orbital de la Terre d'une durée de 1 an.
▪ Référentiel terrestre : C'est un référentiel dont l'origine est le centre d'inertie de l'objet étudié. Ce référentiel n'est galiléen que dans les cas d'études de courte durée devant un jour pour pouvoir négliger le mouvement de la Terre autour de l'axe de ses pôles.

II. Deuxième loi de Newton

II.1. Principe fondamental de la dynamique

Référentiel $\mathfrak{R}$ Galiléen
Système : M
Forces : bilan des forces $\vec{F} = \Sigma \vec{F_i}$
Quantité de mouvement : $\vec{p} = m\vec{v}$

La particule n'étant pas isolée, on a vu par le principe d'inertie que son mouvement ne peut pas être rectiligne et uniforme donc $\vec{p} = m\vec{v} \neq \overrightarrow{Cst}$

• Enoncé de la deuxième loi de Newton : Principe fondamentale de la dynamique
Dans un référentiel Galiléen, la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement du système est égale à la somme des forces extérieures s'exerçant sur le système : $\frac{dm\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

• Cas d'un système à masse constante
La relation fondamentale de la dynamique s'écrit alors : $m\vec{a} = \vec{F}$

II.2. Particule isolée

Référentiel : Galiléen
Système : Particule libre P(m)
Forces : $\vec{F} = \vec{0}$
Relation : principe fondamental de la dynamique

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F} = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ $\vec{v} = \vec{v_0}$ vecteur constant
$\Rightarrow$ $\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0}t$
$\Rightarrow$ mouvement rectiligne si $\vec{v_0}$ est non nulle ou particule immobile si $\vec{v_0}$ est nulle.

On retrouve le principe d'inertie comme une conséquence du principe fondamental de la dynamique.

II.3. Notion d'équilibre

Un point est en équilibre dans un référentiel $\mathfrak{R}$ si sa vitesse reste indéfiniment nulle.

La statique : étude de l'équilibre.

M est en équilibre $\overset{\text{CNS}}{\Longrightarrow}$ $\sum \vec{F} = \vec{0}$

Remarque : il faudrait ajouter comportement régulier autour du point d'équilibre.

III. Troisième loi de Newton

III.1. Le principe

Soient A et B deux points matériels en interaction :
$\overrightarrow{F_{A/B}}$ Force exercée par A sur B
$\overrightarrow{F_{B/A}}$ Force exercée par B sur A
Le principe de l'action et de la réaction : $\overrightarrow{F_{A/B}} = -\overrightarrow{F_{B/A}}$

S'il s'agit bien de points matériels, $\overrightarrow{F_{A/B}}$ et $\overrightarrow{F_{B/A}}$ sont de plus portés par la même droite.
Du fait de l'invariance des forces en mécanique Newtonienne, cette relation est valable dans tous les référentiels.

III.2. Conservation de la quantité de mouvement.

Système : A (m_A) B (m_B) soumises à leur seule interaction ⇒ {A,B} est isolé.
Référentiel : Galiléen
Loi : principe fondamental de la dynamique

$$\frac{d\vec{p_A}}{dt} = \vec{F}_{B/A} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{p_B}}{dt} = \vec{F}_{A/B} \Rightarrow \frac{d(\vec{p_A}+\vec{p_B})}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p_A} + \vec{p_B} = \vec{Cst}$$

La quantité de mouvement d'un système isolé se conserve.

IV. Classification des forces

La force $\vec{F}$ est grandeur vectorielle cause du mouvement.
Actuellement l'ensemble des interactions peut être décrit par 4 grandes familles.

Interaction	Particules concernées	Portée	Principale manifestation
Forte	Quarks et dérivés	$\approx 10^{-15}$ m = 1 fm	Cohésion des noyaux
Faible	Constituants des noyaux	$\approx 10^{-18}$ m	Radioactivité β
Electromagnétique	Particules chargées	Infinie	Existence des atomes Réactions chimiques
Gravitationnelle	Particules massiques	Infinie	Existences et trajectoires des astres, des planètes.

IV.1. Interaction à distance

Ces forces s'appliquent sans qu'il y ait de contact entre le milieu extérieur et le système

IV.1.1. Interaction gravitationnelle.

→ Toujours attractive.
→ Existe entre toutes les particules (attraction universelle) $\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{e_r}$ $G = 6.67\ 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$

Le champ gravitationnel.

→ M_0 (m_0) particule source placée en O
M (m) est soumise à une force $\vec{F} = -G\frac{mm_0}{r^2}\vec{e_r} = m\vec{A}$
⇒ $\vec{A} = -G\frac{m_0}{r^2}\vec{e_r}$ champ créé par M_o en M.
→ Si M_0 est la terre on retrouve le poids $\vec{P}=m\vec{g}$ avec $\vec{g} = -G\frac{M_T}{R_T^2}\vec{e_r}$ le champ de gravitation terrestre.

$R_T = 6.37\ 10^6$ m
$M_T = 5.97\ 10^{24}$ kg ⇒ $g = 9.81\ m.s^{-2}$
$G = 6.67\ 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$

IV.1.2. Interaction électromagnétique.

Seulement dans le cas de particules chargées.
→ Une distribution de charges en mouvement crée dans son voisinage un champ électromagnétique $(\vec{B}, \vec{E})$.
→ Une charge q placée dans ce champ, et animée d'une vitesse $\vec{v}$, est soumise à une force dite de Lorentz : $\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B})$

→ Elles sont responsables de phénomènes aussi variés que :
- les liaisons chimiques
- la structure organisée de la matière (rigidité, élasticité des solides)
- les forces de contact (frottement), viscosité des liquides
- les ondes électromagnétiques
- ...

Remarques : les forces d'interaction gravitationnelle et électromagnétique s'exercent en même temps :
- à l'échelle planétaire, la matière est globalement neutre, les forces de gravitation sont prépondérantes.
- à l'échelle microscopique, c'est l'inverse.

IV.2. Forces de contact

IV.2.1. Forces de liaison.

→ Particule accrochée à un fil. Si le fil est tendu, il s'exerce sur M une force de tension colinéaire au fil de M vers O.

→ Particule accrochée à un ressort élastique : $\vec{T}=-kx\vec{e_x}$.

IV.2.2. Forces de contact.

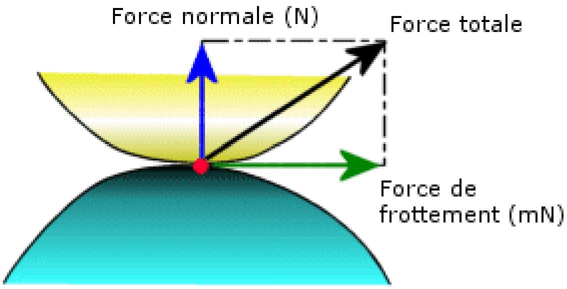
→ Forces de frottement fluide : frottements particule / molécules du fluide.
Elles s'opposent toujours au mouvement, la forme la plus simple étant :$\vec{F}= -h\vec{v}$.

→ Forces de contact solide-solide.

• Une particule est soumise à une liaison lorsqu'elle est destinée à se déplacer sur une courbe ou surface. Cela se traduit par :

→ des relations supplémentaires entre les variables d'espace;

→ des forces exercées par le support sur la particule: réaction du support : $\vec{R}= \underbrace{\vec{R_N}}_{\text{Normale}} + \underbrace{\vec{R_T}}_{\text{Tangentielle}}$

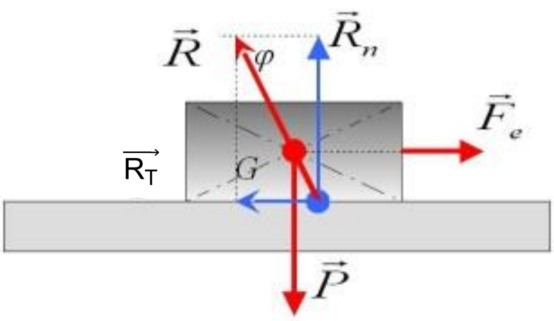


• Frottement :

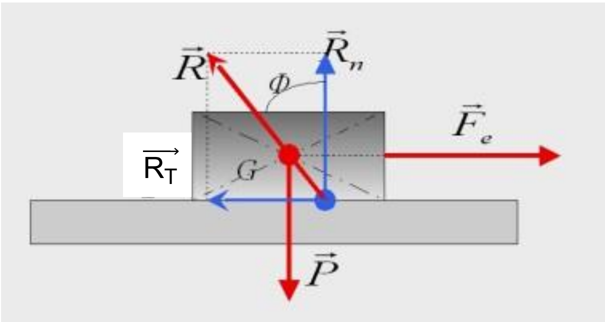
On définit le coefficient de frottement k: (caractéristique des solides mis en jeu) $k \geq \frac{\|\vec{R_T}\|}{\|\vec{R_N}\|}$

→ En cas de glissement, et si les solides sont en mouvement relatif, l'égalité est réalisée, et la force $\vec{R_T}$ est opposée à la vitesse. Soit : $\vec{R_T} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ et $\vec{R_T}.\vec{v} \leq 0$

→ En cas d'équilibre, l'égalité peut ne pas être réalisée, et la force $\vec{R_T}$ peut avoir n'importe quelle orientation dans le plan de contact.

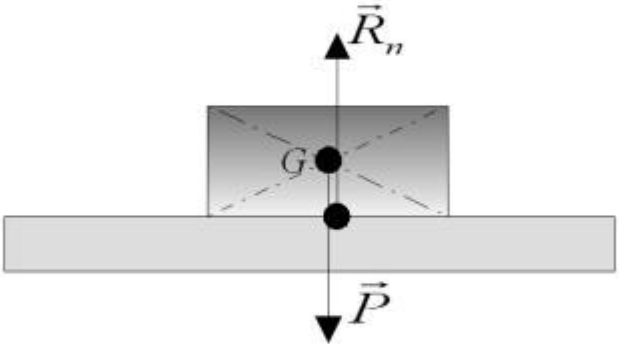


La force extérieure n'est pas suffisante pour permettre le mouvement



La force extérieure est suffisante pour permettre le mouvement, les frottements s'opposent au déplacement.

• Absence de frottement : la réaction est normale au support k=0.
On dit que la liaison est parfaite ou sans frottement. Dans ce cas : $\overrightarrow{R_T} = \vec{0}$ soit $\vec{R} = \overrightarrow{R_N}$



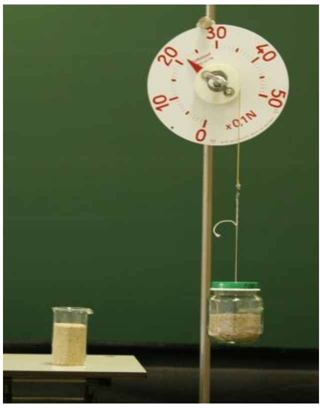
• On distingue : → Liaison unilatérale: la particule a la possibilité de quitter le support. Il y a contact tant que $\vec{R}.\vec{n} = \overrightarrow{R_N} > 0$, et la trajectoire est fixée par le support.
($\vec{n}$ désigne le vecteur unitaire de la normale à la surface de contact)
→ Liaison bilatérale : la particule n'a pas la possibilité de quitter son support.
(Elle évolue par exemple entre deux surfaces voisines, ou encore il peut s'agir d'un petit anneau enfilé sur une tige).

IV.2.3. Action exercée par un fluide : La poussée d'Archimède

Expérience (académie de Créteil)
• Petit pot rempli de sable masse m= 301.6 g volume V = 180 ml

Le bilan des forces appliquées sur le pot n'est pas le même dans l'air et dans la solution colorée. Ainsi dans le deuxième cas il y a une force supplémentaire. Elle est dirigée vers le haut.

• En reprend l'expérience en retirant du sable m = 221g V = 180 ml

Bilan :
Norme de la force supplémentaire pour le pot de 301.6g : 3-1.3 = 1.7 N
Norme de la force supplémentaire pour le pot de 221.0g : 2.2-0.5 =1.7N

Conclusion cette force ne dépend pas de la masse.

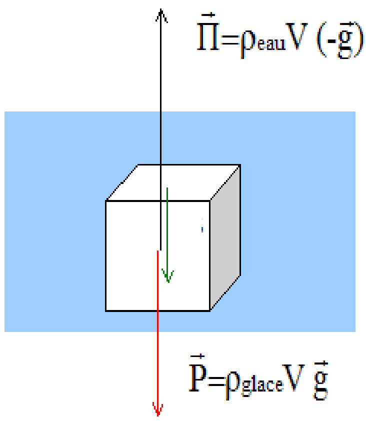
- On remplace le petit pot par des masses marquées de 300g


Norme de la force supplémentaire pour le pot de 301.6g : 3-1.3 = 1.7 N
Norme de la force supplémentaire pour les masses marquées : 3-2.6 =0.4N
Conclusion cette force dépend du volume immergé

<u>La poussée d'Archimède</u>

Un système immergé totalement ou partiellement dans un fluide est soumis à des forces de pression exercées par ce fluide dont la résultante est une force de poussée appelée poussée d'Archimède Π dont les caractéristiques sont :
Point d'application : centre d'inertie du fluide déplacé
Direction : verticale
Sens : vers le haut
Intensité : Π = poids du volume de fluide déplacé = $\rho_{fluide} \times V_{immergé} \times g$

$$\vec{\Pi} = -\rho_{fluide} V_{immergé} \vec{g}$$



Exemple : Le thermomètre de Galilée

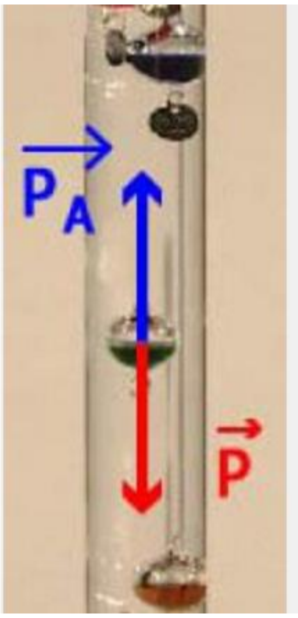
Le thermomètre de Galilée, inventé par Galilée il y a 350 ans, est constitué par une colonne remplie par un liquide transparent (en général une huile minérale) contenant des boules en verre soufflé de volume identique mais lestées par un médaillon métallique sur lequel est gravé une valeur de température.

Ce thermomètre de Galilée fonctionne suivant un principe très simple:

- Lorsque le poids réel d'un corps plongé dans un fluide est supérieur à la poussée d'Archimède, il aura tendance à couler tandis que si le poids de ce corps est inférieur à la poussée d'Archimède, il aura tendance à remonter.
- Le facteur qui détermine si une ampoule va remonter ou couler est sa densité par rapport à la densité du liquide dans lequel elle est plongée. Leur volume étant constant mais pas leur masse, leur densité est également différente.

Le fluide contenu dans le tube est un mélange d'hydrocarbures tandis que les boules de verre sont remplies d'eau ou d'alcool coloré.
L'hydrocarbure, comme tout fluide, a une densité qui varie en fonction de la température – la petite poche d'air en haut du thermomètre permettant justement au liquide de se dilater ou, à l'inverse, de se contracter.
Les ampoules de verre en revanche, ayant un volume fixe, auront de fait une densité qui le sera également.
Du coup, lorsque le liquide contenu dans le cylindre subit des changements de température, sa densité se modifie – les ampoules, placées suivant une échelle de températures, vont alors se déplacer verticalement suivant leurs poids.





V. Résoudre un problème de mécanique

Référentiel de base : $\Re$ le solide de référence, vérifier son caractère galiléen

Système : Définir le système, vérifier que l'on peut l'assimilé à un point matériel

Forces : Faire un inventaire précis et complet de l'ensemble des forces appliquées au système et intervenant. Indiquer s'il y a lieu leurs caractéristiques (ex : réaction normale si absence de frottement)

Schéma : On y indiquera les forces ainsi que la base de projection. Il servira justement à choisi cette base.

Loi Relation fondamentale de la dynamique (pour l'instant seule méthode à disposition)
ou Théorème du moment cinétique
ou Intégrale première du mouvement.

Repère : Il est choisi en fonction de ce que l'on veut trouver, soit un axe caractéristique du mouvement, soit celui qui annule la réaction normale si on n'a pas besoin d'information sur elle, soit les trois axes du repère choisi si on veut l'ensemble des lois horaires ou les expressions de certaines forces.

Projections : On projette la loi sur l'axe ou les trois axes

Résolution : Intégration des équations pour obtenir les lois horaires il faudra alors introduire les conditions initiales.
Inversement trouver l'expression d'une force à l'aide des lois horaires.

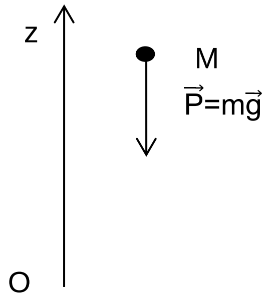
VI. Chute libre dans le champ de pesanteur

VI.1. Chute libre dans le vide

Référentiel : $\Re_T$ Terrestre considéré comme Galiléen.
Système : Le projectile ponctuel de masse m.
Forces appliquées : Le poids $\vec{P}=m\vec{g}$
Loi : Relation fondamentale de la dynamique : $m\vec{a} = m\vec{g}$
Repère de projection : Les coordonnées cartésiennes : l'axe Oz selon le champ de pesanteur.

• Conditions initiales : A t = 0 — M_0 est sur l'axe z à la hauteur h
La vitesse $\vec{V_0} = \vec{0}$

Schéma :



Projection sur Oz : $\ddot{z} = -g$

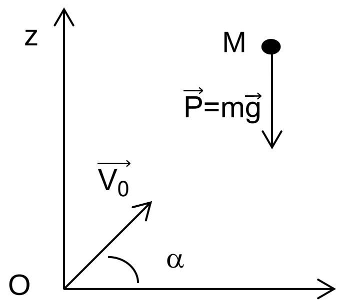
Résolution : $\dot{z} = -gt \Rightarrow z = -\frac{1}{2}gt^2 + h$

Durée de chute : à la fin du mouvement z = 0 $\Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Vitesse en fin de mouvement : $v_z = -g\tau = -\sqrt{2hg}$

• Conditions initiales : A t = 0 M_0 coïncide avec le point O
La vitesse $\vec{V_0}$ fait un angle α avec l'axe Ox.

Schéma :



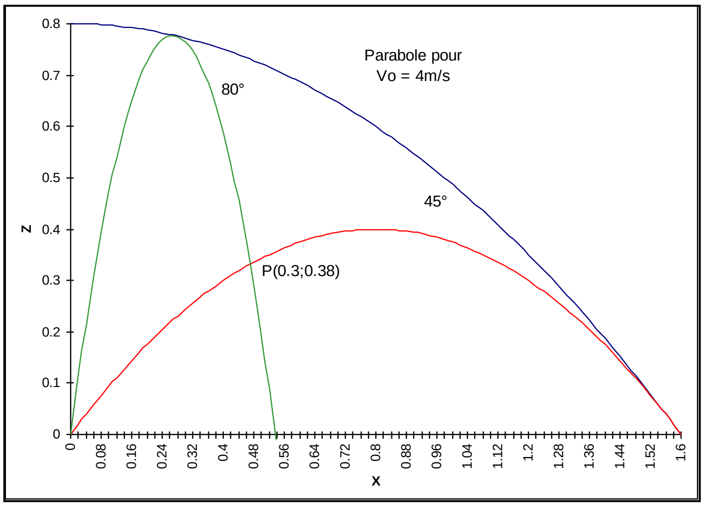
Résolution : $\vec{a}=\begin{cases}\ddot{x}=0\\ \ddot{y}=0\\ \ddot{z}=-g\end{cases} \Rightarrow \vec{v}=\begin{cases}\dot{x}=v_0\cos\alpha\\ \dot{y}=0\\ \dot{z}=-gt+v_0\sin\alpha\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM}=\begin{cases}x=v_0\cos\alpha.\,t\\ y=0\\ z=-\frac{1}{2}gt^2+v_0\sin\alpha.\,t\end{cases}$ avec les conditions initiales

Equation du mouvement : La trajectoire est plane, elle est dans la plan ($\vec{g}$, $\vec{v_0}$) = (xOz).
En éliminant le temps entre les deux équations x(t) et z(t) on obtient l'équation de la trajectoire dans le plan xOz : $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \Rightarrow z = -\frac{1}{2}\frac{g}{(v_0 \cos\alpha)^2} x^2 + \tan\alpha .x$

Altitude maximale : $z_m = (V_0 \sin\alpha)^2 / 2g$
Portée du projectile : C'est le point de chute z = 0
$x_m = 2(V_0 \cos\alpha)^2 \tan\alpha / g = V_0^2 \sin 2\alpha / g$
$t_m = 2V_0 \sin\alpha / g$

Parabole de sécurité :
Le projectile peut-il atteindre un point P(X, Z) avec une vitesse initiale donnée?
Quel angle de tir faut-il choisir?
Si M atteint P il faut que les coordonnées de P vérifient l'équation de la trajectoire de M.
On pose $u = \tan\beta$ d'où $1/ (\cos\beta)^2 = 1+ u^2$.
D'où $Z = -½gX^2(1+ u^2) / V_0^2 + Xu$
D'où $-½gX^2 u^2 / V_0^2 + Xu - -½gX^2 / V_0^2 - Z = 0$
D'où $u^2 - \frac{2V_0^2}{gX}u + (1 + \frac{2V_0^2}{gX^2}Z) = 0$ équation en u

Cette équation a 2, 1 ou aucune solution selon le signe de $\Delta = \frac{4V_0^4}{g^2X^2} - 4(1 + \frac{2V_0^2}{gX^2}Z)$.
→ $\Delta > 0$ ou $Z < V_0^2 / 2g - gX^2 / 2V_0^2$ deux solutions possibles, soit deux angles de tir si le point P est à l'intérieur de la parabole de sûreté d'équation $Z = V_0^2 / 2g - gX^2 / 2V_0^2$.
→ $\Delta = 0$ ou $Z = V_0^2 / 2g - gX^2 / 2V_0^2$ une solution possible, soit un seul angle de tir pour un point P situé sur la parabole de sûreté.
→ $\Delta < 0$ ou $Z > V_0^2 / 2g - gX^2 / 2V_0^2$ le point P est hors d'atteinte.



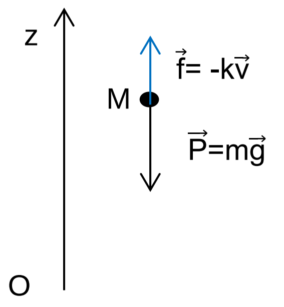
VI.2. Chute libre avec frottements fluides

VI.2.1. $\vec{f} = -k\vec{v}$

Référentiel : $\Re_T$ Terrestre considéré comme galiléen.
Système : Projectile ponctuel de masse m.
Forces appliquées : Le poids : $\vec{P} = m\vec{g}$
Résistance de l'air : $\vec{f} = -k\vec{v}$
Loi : Relation fondamentale de la dynamique : $m\vec{a} = m\vec{g} - k\vec{v}$
Repère de projection : Les coordonnées cartésiennes : l'axe Oz selon le champ de pesanteur.

Conditions initiales : A t = 0 M_0 est sur l'axe z à la hauteur h
La vitesse $\vec{V_0} = \vec{0}$

Schéma :



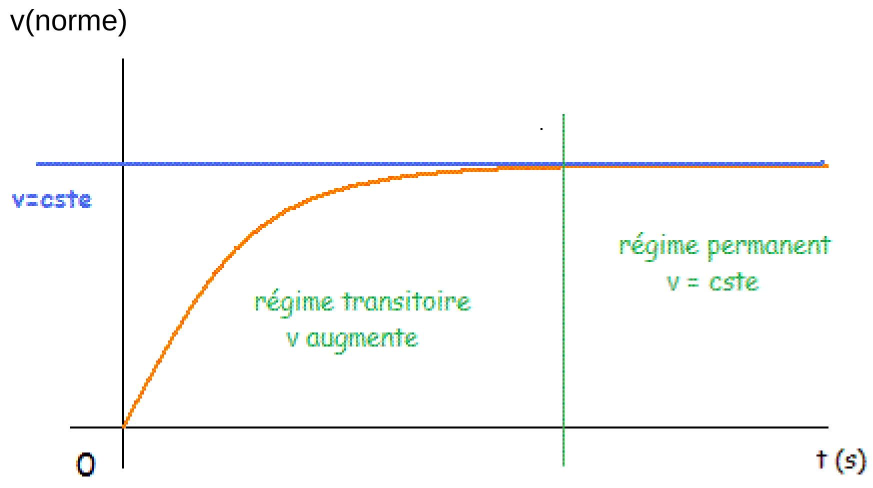
Projection sur Oz : $ma = -mg - kv \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = -g$

Analyse du mouvement :
La particule est soumise à deux forces le poids dirigé vers le bas, dans le même sens que le mouvement et la force de frottement qui s'oppose au mouvement et proportionnelle à la vitesse.
Au début la vitesse est nulle, la particule chute de plus en plus vite mais alors la force de frottement va augmenter jusqu'au moment où elle va compenser la force motrice ici le poids.
On atteindra alors une vitesse limite : $kv_L = mg$ soit $v_L = \frac{m}{k}g$ en norme, la vitesse étant dirigée vers le bas.
Le mouvement sera alors rectiligne et uniforme.

On peut alors écrire l'équation sous la forme : $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = -g \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = -\frac{m}{k}g\frac{k}{m} = -\frac{k}{m}v_L$

On obtient alors une équation de la forme : $\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v = -\frac{1}{\tau} v_L$

Résolution :
On a vu que la forme générale de la solution s'écrit $v(t) = \lambda \exp(-\frac{1}{\tau} t) - v_L$
Condition initiale : $v(0) = \lambda - v_L = 0$
D'où $v(t) = -v_L(1-\exp(-\frac{1}{\tau} t))$



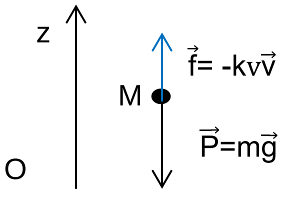
Equation du mouvement :
$\frac{dz}{dt} = -v_L + v_L\exp(-\frac{1}{\tau} t) \Rightarrow z(t) = -v_Lt - \tau v_L\exp(-\frac{1}{\tau} t) + \alpha$
Condition initiale : $z(0) = -\tau v_L + \alpha = h$
D'où $z(t) = -v_Lt + \tau v_L(1-\exp(-\frac{1}{\tau} t)) + h$

VI.2.1. $\vec{f} = -kv\vec{v}$

Référentiel : $\Re_T$ Terrestre considéré comme galiléen.
Système : Projectile ponctuel de masse m.
Forces appliquées : Le poids : $\vec{P} = m\vec{g}$
Résistance de l'air : $\vec{f} = -kv\vec{v}$
Loi : Relation fondamentale de la dynamique : $m\vec{a} = m\vec{g} - kv\vec{v}$
Repère de projection : Les coordonnées cartésiennes : l'axe Oz selon le champ de pesanteur.

Conditions initiales : A t = 0 M_0 est sur l'axe z à la hauteur h
La vitesse $\overrightarrow{V_0} = \vec{0}$

Schéma :



Projection sur Oz : ma = -mg – kv² $\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v^2 = -g$

Analyse du mouvement :
Par un même raisonnement que précédemment on trouve que la particule va avoir une vitesse limite.
On atteindra alors une vitesse limite : $kv_L^2 = mg$ soit $v_L = \sqrt{\frac{m}{k}g}$ en norme, la vitesse étant dirigée vers le bas.
Le mouvement sera alors rectiligne et uniforme.

Résolution : $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v^2 = -g$
En étudiant la norme de la vitesse, c'est-à-dire en prenant un axe orienté vers le bas on obtient :

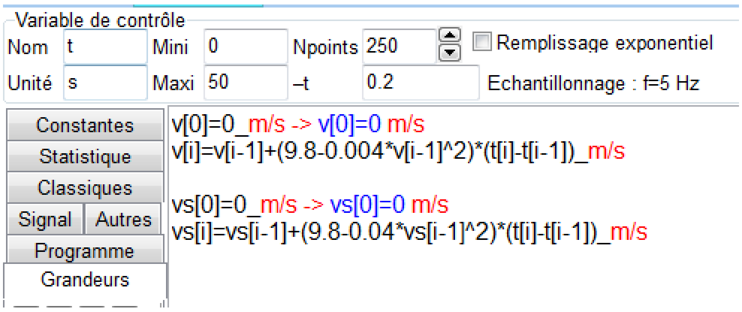
$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v^2 = g$$

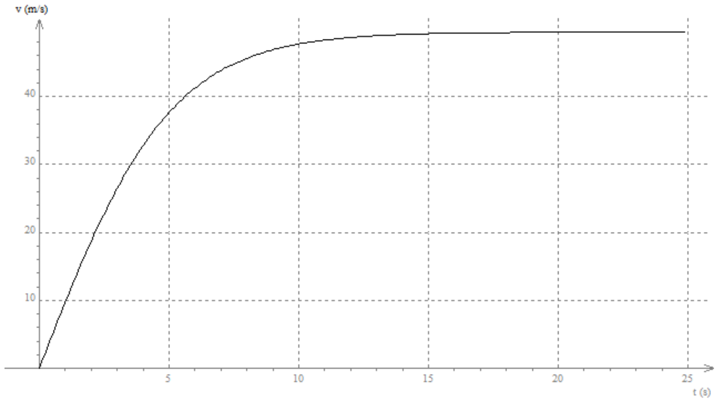
On utilise la méthode d'Euler :
A condition de choisir δt suffisamment petit, on peut écrire que l'on a $\frac{\delta v}{\delta t} = -\frac{k}{m}v^2 + g$
Avec δv la variation de la valeur de la vitesse pendant δt.
On connait alors k/m et g (éventuellement une mesure de la vitesse limite peut nous permettre d'accéder à k) on peut alors de proche en proche calculer les différentes valeurs de v au cours du temps :

- → A l'instant initial $v = v_0 = 0$
- → On choisit une valeur de δt assez petite, le pas du calcul ou l'incrémentation
- → A la date $t_1 = t_0 + \delta t$ la vitesse est alors devenue $v_1 = v_0 + (g - \frac{k}{m}v_0^2)\,\delta t$
- → A la date $t_2 = t_1 + \delta t$ la vitesse est alors devenue $v_2 = v_1 + (g - \frac{k}{m}v_1^2)\,\delta t$
- → ….

En répétant le calcul, on pourra connaitre les valeurs de la vitesse aux différentes dates et on pourra ainsi obtenir la représentation graphique de v en fonction du temps.

Exemple
Une bille de 700 g atteint une vitesse limite de 49 m/s.
Déterminer les coefficients de l'équation différentielle et tracer la courbe v=f(t) par régréssi.
On a $v_L = \sqrt{\frac{m}{k}g} \Rightarrow \frac{k}{m} = 4\ 10^{-3}$ kg/m
On a donc la relation : $v(i) = v(i-1) + (9.8 - 4\ 10^{-3}v(i-1)^2)(t(i-1)-t(i))$





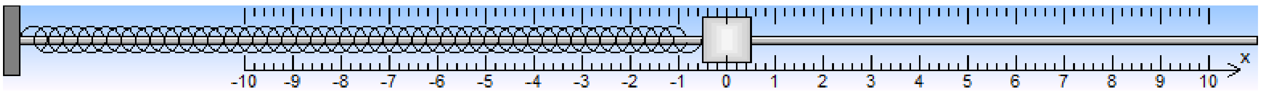
VII. Système oscillant

VII.1. Le ressort uniaxe

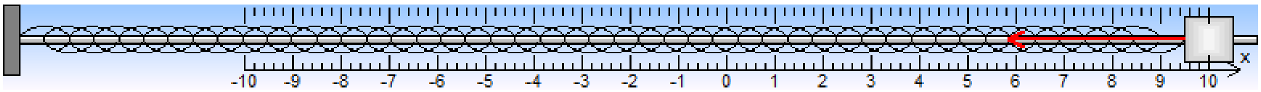
VII.1.1. Présentation

• <u>Description du dispositif</u>
Un dispositif solide ressort est constitué d'un ressort dont une extrémité est fixe, l'autre étant reliée à un solide. Les spires du ressort ne sont jamais jointives pendant les oscillations et sa masse est toujours faible devant celle du solide.

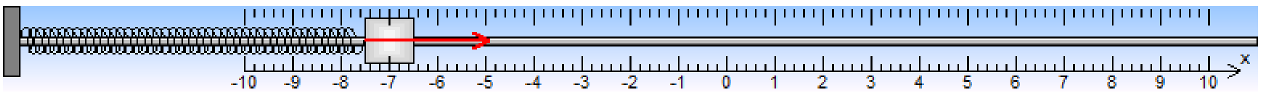
• <u>Expression de la force</u> Au repos



Etirement

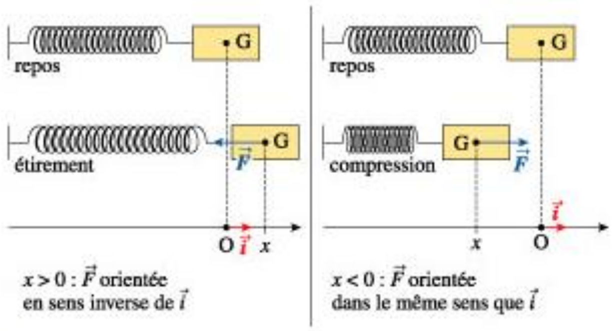


Contraction



Dans l'expérience on se rend compte que le ressort exerce sur le point M une force de rappel de direction l'axe du ressort, de sens inverse au déplacement et de valeur proportionnelle au déplacement.

Pour un problème à une dimension ces propriétés se traduise par la relation : $F = -kx$
Avec :
- x l'allongement algébrique du ressort (position de M repéré par rapport à sa position d'équilibre)
- k la constante de raideur du ressort (en N/m)
- F la force de rappel (en N)



Force de rappel.

Remarque : si l'origine n'est pas choisie à la position d'équilibre de M, ici à la longueur à vide du ressort la force s'écrit : $F = -k(x-L_0)$ où L_0 est la longueur à vide du ressort.

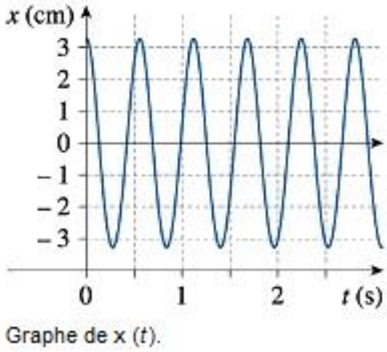
VII.1.2. Mise en équation et solution

Référentiel : $\Re$ Galiléen
Système : M(m)
Force appliquée : la force de rappel du ressort $\vec{F} = -kx\vec{e_x}$

Loi : la relation fondamentale de la dynamique selon l'axe Ox : $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$

Ainsi l'équation de l'oscillateur harmonique est de la forme : $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$

La solution mathématique de l'équation est de la forme :
$x(t) = X_m\cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$



Graphe de x (t).

• T_0 est la **période du mouvement**, elle s'exprime en unité de temps (s)
Déterminons l'expression de la période en fonction des caractéristiques du dispositif :

$x(t) = X_m\cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$

$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{2\pi}{T_0} X_m\sin(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$

$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -(\frac{2\pi}{T_0})^2 X_m\cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$

On reporte ce résultat dans l'équation différentielle : $-(\frac{2\pi}{T_0})^2 X_m\cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi) = -\frac{k}{m} X_m\cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$

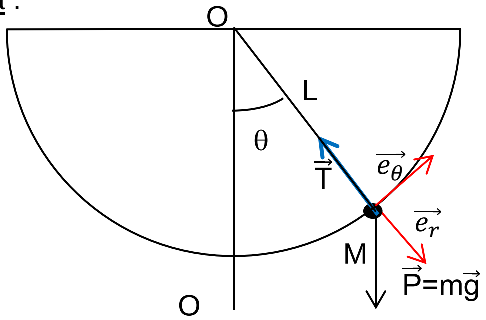
Par identification $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ ou encore la pulsation $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Remarque : si l'origine n'est pas choisie à la longueur à vide du ressort l'équation devient $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}(x-L_0)$
et la solution s'écrit alors $x(t) = X_m\cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi) + L_0$.

VII.2. Le pendule simple

VII.2.1. Mise en équation

Référentiel : $\Re_T$ Terrestre considéré comme galiléen.
Système : Particule M de masse m.
Forces appliquées : Le poids : $\vec{P}=m\vec{g}$
Tension du fil : $\vec{T}$
Loi : Relation fondamentale de la dynamique : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$
Schéma :



Repère de projection : Les coordonnées polaires, le plan polaire correspondant au plan du mouvement.

<u>Conditions initiales</u> : A t = 0 $\theta = \theta_0$
La vitesse $\overrightarrow{V_0} = \vec{0}$

<u>Projections</u> : On utilise les résultats du mouvement circulaire pour exprimer l'accélération.
Sur $\overrightarrow{e_r}$: $-mL\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T$
Sur $\overrightarrow{e_\theta}$: $mL\ddot{\theta} = -\ mg\sin\theta$

La première équation permettra de connaitre si besoin l'expression de la tension du fil.
La deuxième permet d'obtenir l'équation du mouvement

<u>Résolution</u> : $\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\sin\theta$
On pose $\omega_0 = \sqrt{g/L}$
On obtient $\ddot{\theta} = -\ \omega_0^2 \sin\theta$
Cette équation n'est pas linéaire on ne peut donc pas la résoudre simplement.

VII.2.2. Cas de mouvement de faibles amplitudes

Si θ reste petit on peut assimiler $\sin\theta$ à θ et linéariser ainsi l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} = -\ \omega_0^2\ \theta$$

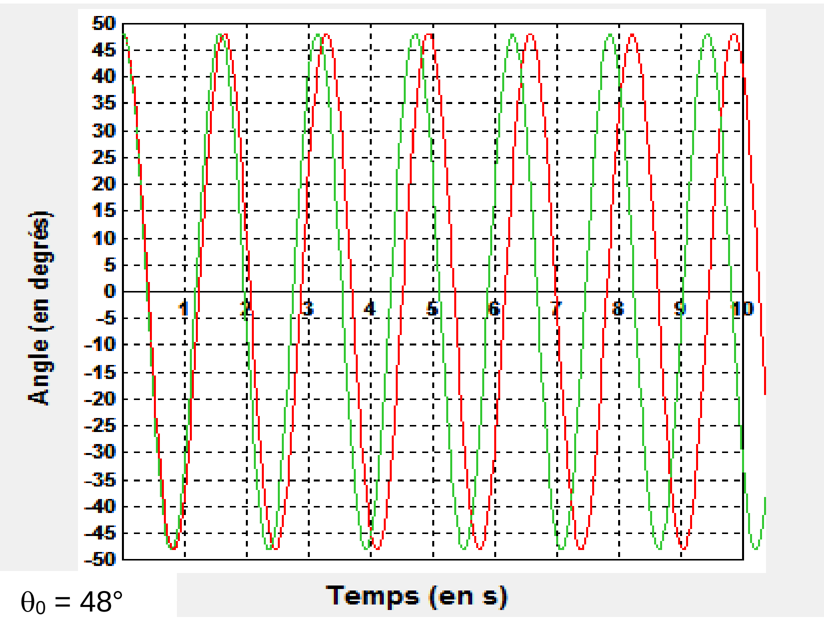
La variable θ vérifie alors l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique :

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

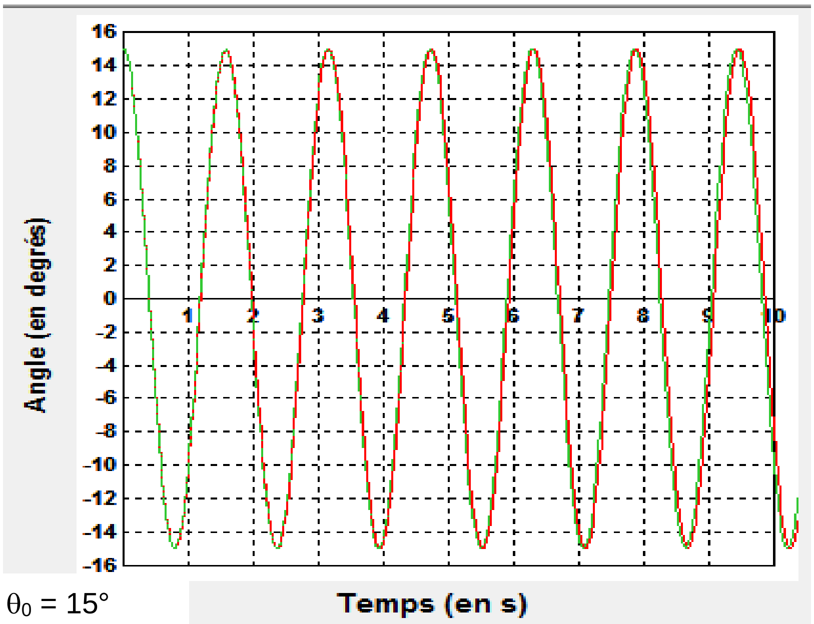
<u>Conditions initiales</u> : A t = 0 $\theta = \theta_0 = A$
La vitesse $\overrightarrow{V_0} = \vec{0} \Rightarrow \dot{\theta}_0 = 0 = \omega_0 B$

Ainsi $A = \theta_0$ et $B = 0$
D'où $\theta = \theta_0\cos(\omega_0 t)$
$\theta(t)$ présente des oscillations sinusoïdales de pulsation ω_0 et de période $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$

En pratique l'approximation des petits angles reste valable avec une précision de 1% si θ reste inférieur à 0,4 rad soit environ 25°



$\theta_0 = 48°$



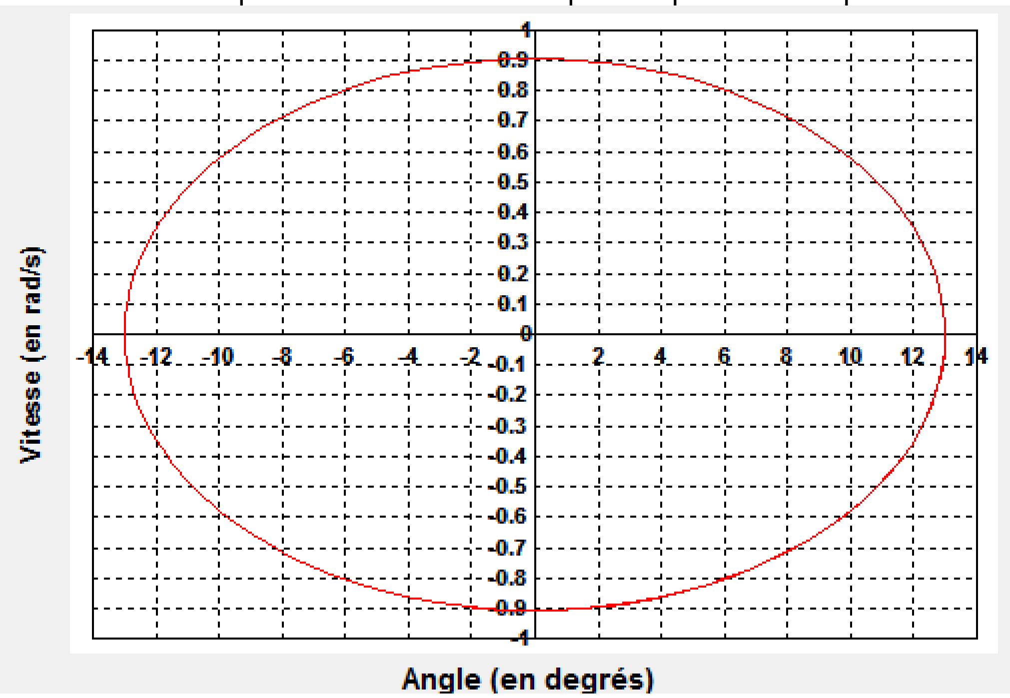
$\theta_0 = 15°$

VII.2.3. Portrait de phase

On s'intéresse au portrait de phase du pendule simple dans le cas de petits angles
On a donc $\theta = \theta_0\cos(\omega_0 t)$ et $\dot{\theta} = -\theta_0\omega_0\sin(\omega_0 t)$

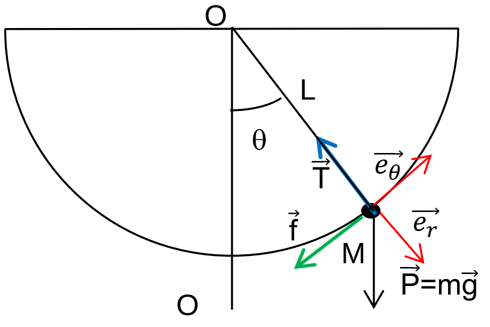
Il faut trouver pour établir le portrait de phase une relation entre θ et $\dot{\theta}$
Eliminons le temps dans les relations ci-dessus :

$\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t) = 1$
$\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0\theta_0}\right)^2 = 1$
On reconnait l'équation d'un cercle de centre O et de rayon 1 dans un plan de phase adimensionné $\left(\frac{\theta}{\theta_0}, \frac{\dot{\theta}}{\omega_0\theta_0}\right)$.
On encore une ellipse de centre O dans un plan de phase classique.



VII.2.4. Pendule simple amorti

Référentiel : $\Re_T$ Terrestre considéré comme galiléen.
Système : Particule M de masse m.
Forces appliquées : Le poids : $\vec{P}=m\vec{g}$
Tension du fil : $\vec{T}$
Frottement : $\vec{f}= -k\vec{v}$
Loi : Relation fondamentale de la dynamique : $m\vec{a} = m\vec{g} +\vec{T}-k\vec{v}$
Schéma :



Repère de projection : Les coordonnées polaires, le plan polaire correspondant au plan du mouvement.

Conditions initiales : A t = 0 $\theta = \theta_0$
La vitesse $\vec{V_0} = \vec{0}$

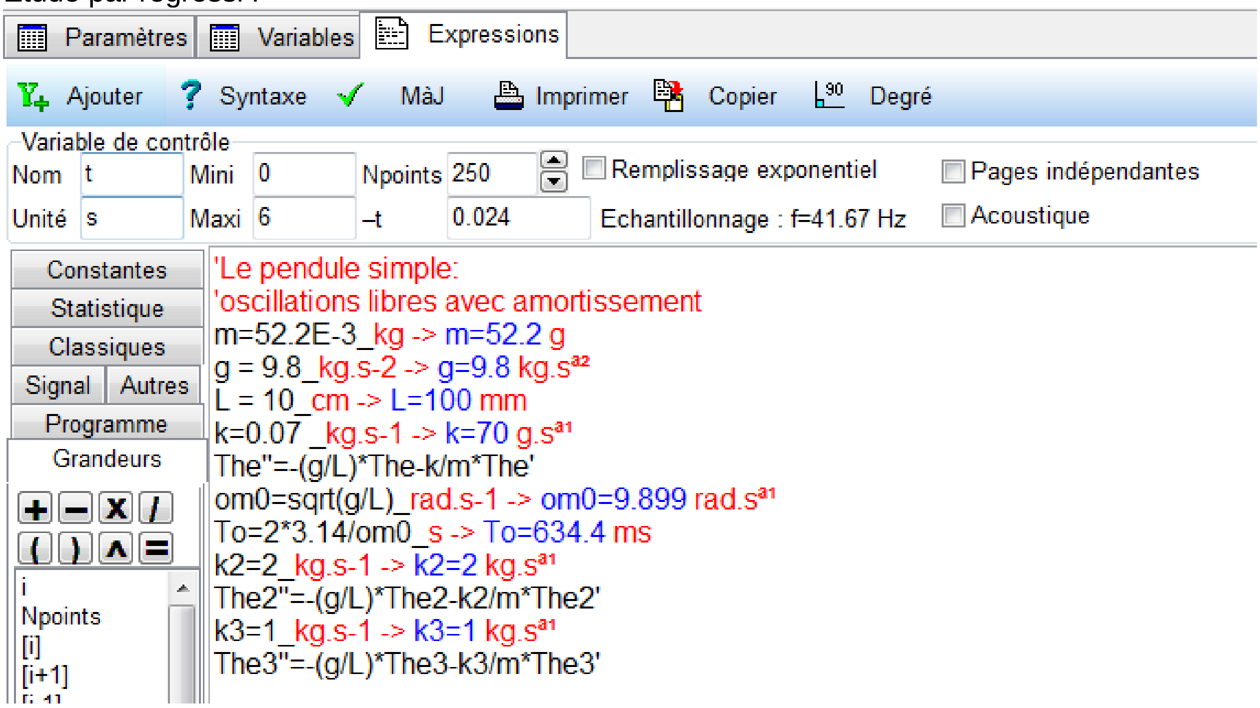
Projections : On utilise les résultats du mouvement circulaire pour exprimer l'accélération ainsi que la vitesse.
Sur $\vec{e_\theta}$: $mL\ddot{\theta} = - mg\sin\theta - kL\dot{\theta}$

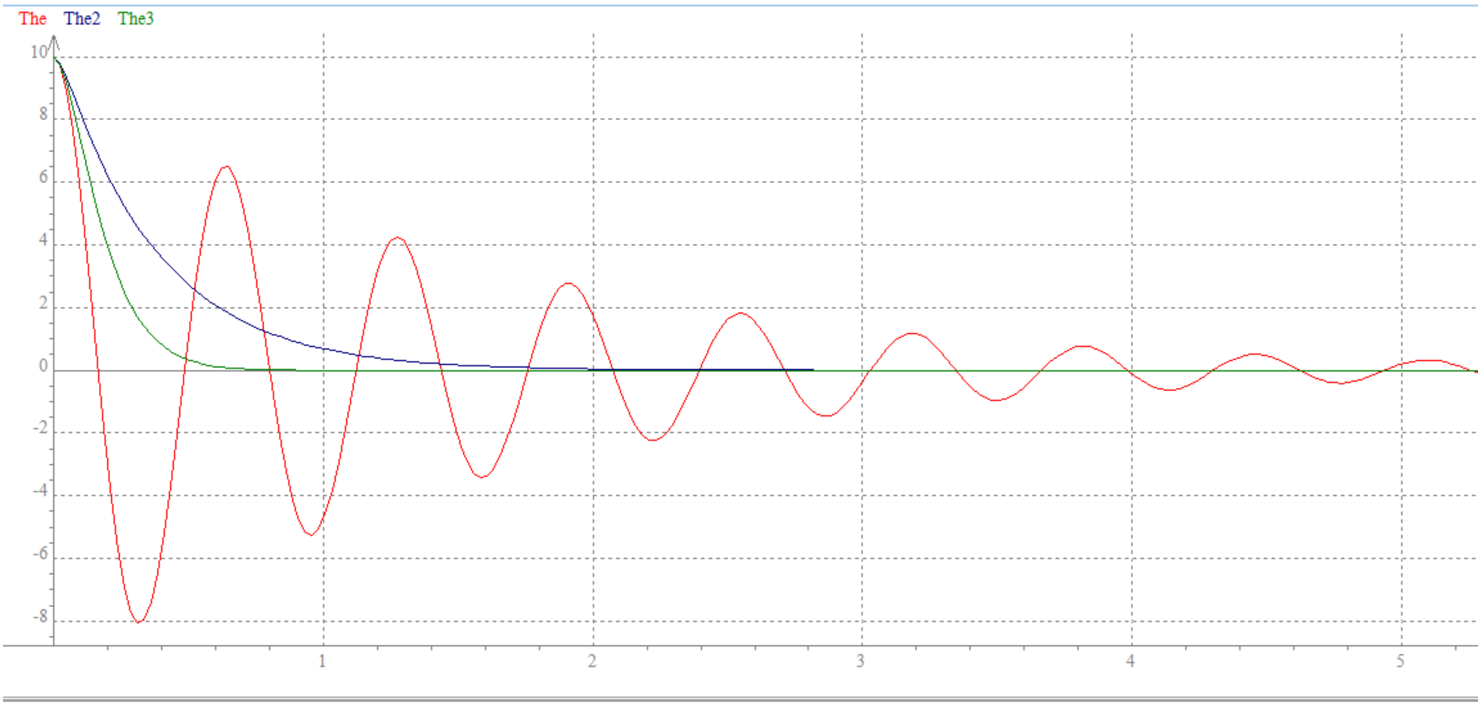
On pose $\omega_0 = \sqrt{g/L}$
On obtient $\ddot{\theta} = - \omega_0^2 \sin\theta - \frac{k}{m}\dot{\theta}$

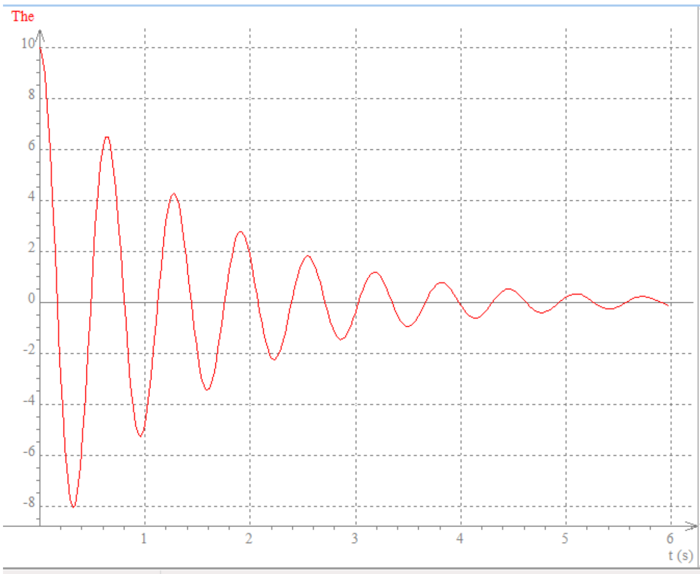
Dans le cas de petits angles on retrouve l'équation de l'oscillateur amorti :

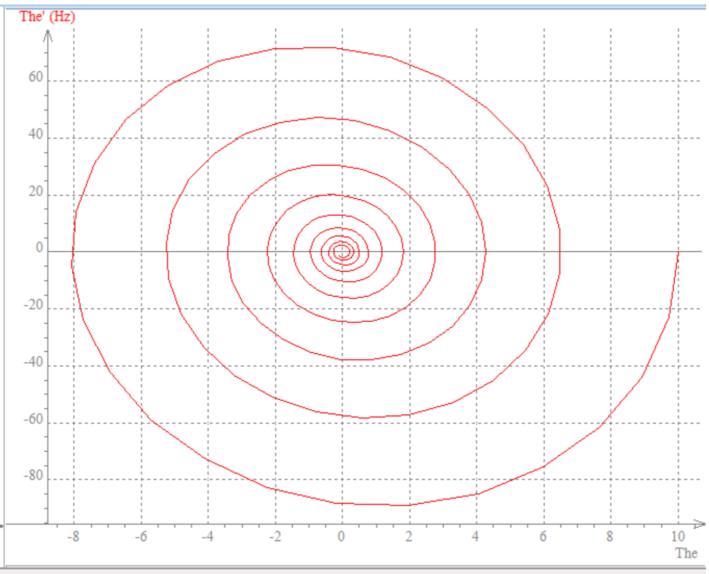
$$\ddot{\theta} + \frac{k}{m}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

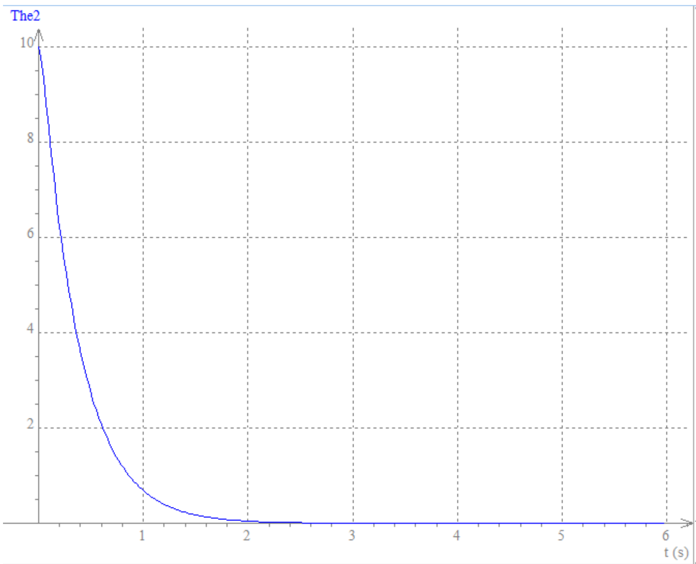
Etude par régressi :

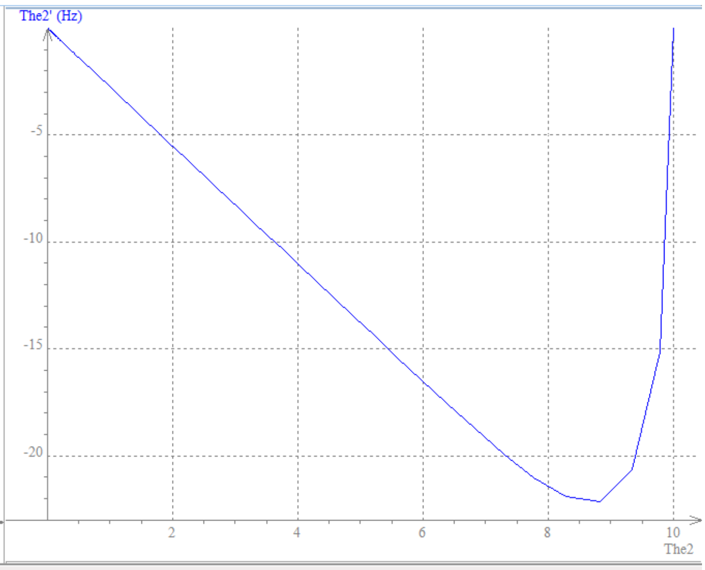



The
The2
The3
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
1
2
3
4
5


The
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
1
2
3
4
5
6
t (s)


The' (Hz)
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
The


The2
10
8
6
4
2
1
2
3
4
5
6
t (s)


The2' (Hz)
-5
-10
-15
-20
2
4
6
8
10
The2

M3 BASES DE LA DYNAMIQUE NEWTONIENNE

I. Première loi de Newton 1
I.1. La masse 1
I.2. La quantité de mouvement 1
I.3. Notion de forces 1
I.4. Le principe d'inertie 2
I.4.1. Particule libre, isolée. 2
I.4.2. Principe d'inertie. 2
II. Deuxième loi de Newton 3
II.1. Principe fondamental de la dynamique 3
II.2. Particule isolée 3
II.3. Notion d'équilibre 3
III. Troisième loi de Newton 3
III.1. Le principe 3
III.2. Conservation de la quantité de mouvement. 4
IV. Classification des forces 4
IV.1. Interaction à distance 4
IV.1.1. Interaction gravitationnelle. 4
IV.1.2. Interaction électromagnétique. 4
IV.2. Forces de contact 5
IV.2.1. Forces de liaison. 5
IV.2.2. Forces de contact. 5
IV.2.3. Action exercée par un fluide : La poussée d'Archimède 6
V. Résoudre un problème de mécanique 8
VI. Chute libre dans le champ de pesanteur 9
VI.1. Chute libre dans le vide 9
VI.2. Chute libre avec frottements fluides 10
VI.2.1. f= -kv 10
VI.2.1. f= -kvv 12
VII. Système oscillant 13
VII.1. Le ressort uniaxe 13
VII.1.1. Présentation. 13
VII.1.2. Mise en équation et solution 14
VII.2. Le pendule simple 14
VII.2.1. Mise en équation 14
VII.2.2. Cas de mouvement de faibles amplitudes 15
VII.2.3. Portrait de phase 16
VII.2.4. Pendule simple amorti 17