DS n° 09 : Fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom : Note :

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

Algèbre linéaire.

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} 2 & m & 1 \\ m+1 & 1 & 2m \\ m+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\{ m \in \mathbb{R} \mid \mathrm{rg}(M) = 2 \} =$ (1)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Alors

${}^t A =$ (2) $A^{-1} =$ (3)

Donner une matrice L triangulaire inférieure et une matrice U triangulaire supérieure telles que $A = LU$.

$L =$ (4) $U =$ (5)

Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\mathscr{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ une base de $\mathbb{R}^2$, $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{C}' = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x - 2y \\ 2x + y \\ x + y \end{pmatrix} \end{array} \right.$. Déterminer les matrices suivantes.

$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) =$ (6) $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}}(f) =$ (7)

$$P_{\mathscr{C}'}^{\mathscr{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}'}(\mathscr{C}) = \boxed{} \quad (8) \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f) = \boxed{} \quad (9)$$

Une relation entre les trois matrices précédentes ($\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}}(f)$, $P_{\mathscr{C}'}^{\mathscr{C}}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$) est

$$\boxed{} \quad (10)$$

Probabilités.

Une urne contient des boules numérotées de 1 à n. Pour chaque $1 \leqslant i \leqslant n$, on y a placé i boules portant le numéro i. On tire une boule, on note X son numéro, et I l'ensemble des valeurs prises par X. Soit $i \in I$.

$$I = \boxed{} \quad (11) \qquad E(X) = \boxed{} \quad (13)$$

$$P(X = i) = \boxed{} \quad (12) \qquad V(X) = \boxed{} \quad (14)$$

Un joueur lance une infinité de fois une pièce, qui fait pile avec probabilité a. Il marque à chaque fois un point s'il fait pile et deux points s'il fait face. Si $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la probabilité qu'il marque n points exactement à un moment du jeu.Déterminer les probabilités suivantes.

$$p_1 = \boxed{} \quad (15) \qquad p_2 = \boxed{} \quad (16)$$

Une relation de récurrence entre p_{n+1}, p_{n-1} et p_n est

$$\boxed{} \quad (17)$$

Une expression de p_n en fonction de n et a est

$$p_n = \boxed{} \quad (18)$$

— FIN —