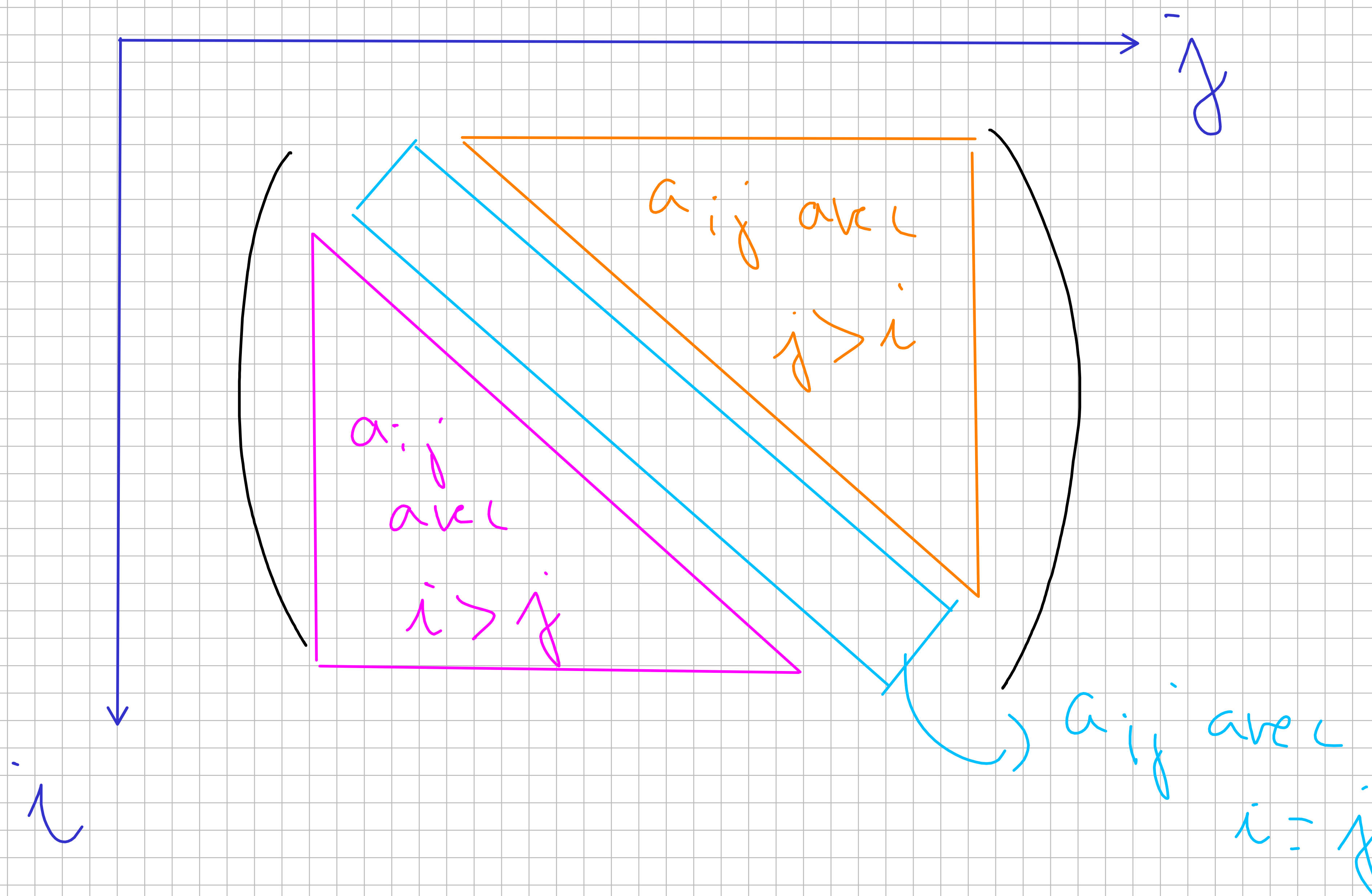
3.2 : Matrices triangulaires



Déf : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que A est triangulaire supérieure si $\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$

triang inf : $\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

Ex :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Notation (non officielle) :

$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est l'ens. des matrices triang sup.

$\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ — — — inf.

Rq : si $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, ${}^tA \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$

si $A \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$, ${}^tA \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

Théorème 3.2.2 : 1) $(\mathcal{T}_n^{\pm}, +, \cdot)$ est $\mathbb{K}$-ev. de dim $\frac{n(n+1)}{2}$.

2) $(\mathcal{T}_n^{\pm}, +, \times)$ est un anneau.

Démonstration :

1) • $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: facile.

• $\mathcal{B}$: si $i \leq j$: $E_{ij} \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$

donc : $\mathrm{Vect}(E_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n} \subset \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$

Réciproquement : si $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$,

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$$

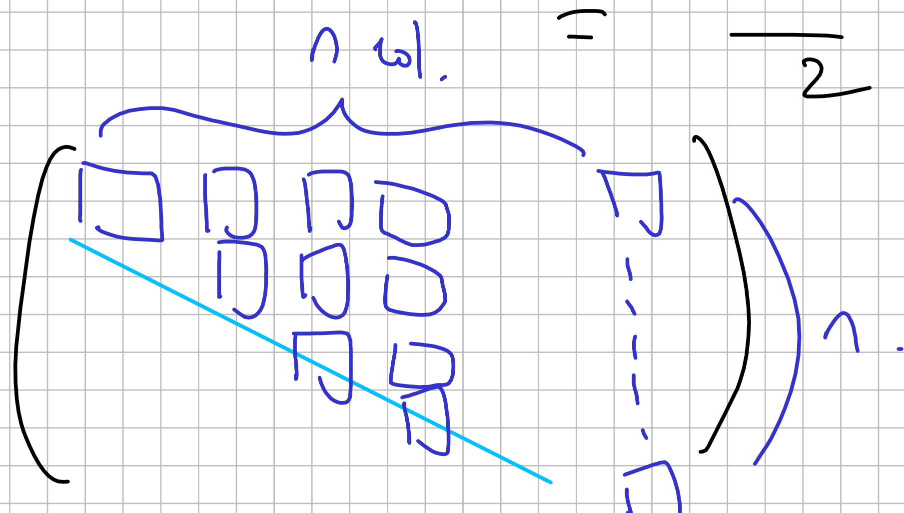
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{ij} E_{ij} \quad \text{car : } i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

$$\in \mathrm{Vect}(E_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$$

dc : $T_n^+(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(E_{ij})_{1 \le i \le j \le n}$

$(E_{ij})_{1 \le i \le j \le n}$ est libre dc :

$$\dim T_n^+(\mathbb{K}) = \# \{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \ i \le j\}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} 1 = \sum_{j=1}^{n} j$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}.$$



2) $0 \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $I_n \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

Stabilité par produit :

Si $A, B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$:

Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$, $i > j$.

le coeff. de $A \times B$ de coord (i, j) vaut :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{a_{ik}}_{=0} b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik} \underbrace{b_{kj}}_{=0}$$

Si $i > k$: $a_{ik} = 0$

Si $i \leq k$: alors : $j < k$ car $j < i$

donc : $b_{kj} = 0$

donc : $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = 0$

et AB est triang. sup.

$\square$

Rq : Si $i = j$, le coeff i, i de $A \times B$ vaut :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^{i-1} \overbrace{a_{ik}}^{=0} b_{ki} + a_{ii} b_{ii} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} \overbrace{b_{ki}}^{=0}$$

$= a_{ii} b_{ii}$.

les coeffs. diag. de $A \cdot B$ sont les produits des coeffs. diag de A et de B :

ex :

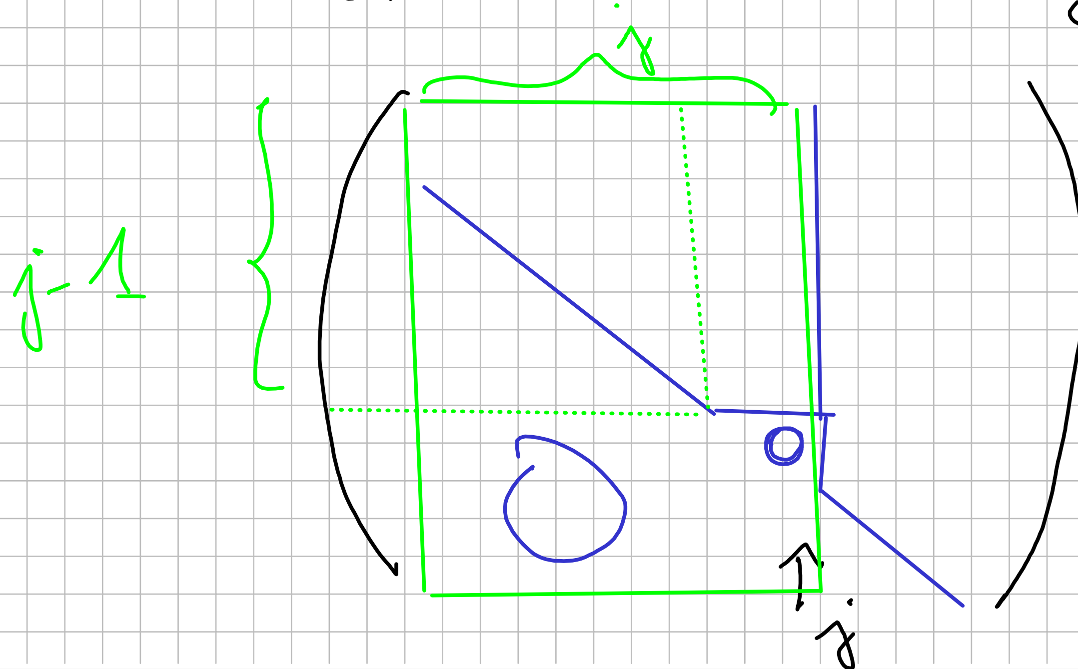
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & ? & ? \\ 0 & 0 & ? \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Théorème 3.2.4 : Une matrice triang. est inversible ssi elle n'a pas de zéro sur sa diagonale.

Démonstration :

($\Rightarrow$) Soit $A \in T_n^+(\mathbb{K})$ inversible, et supposons que dans la colonne j, il y a un 0 sur la diagonale.



Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$.

Notons $v_1 \dots v_n \in \mathbb{K}^n$ tq.

$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1 \dots v_n)$.

$\forall k$, $v_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i$

donc si $k \leq j$: les a_{ik} sont nuls

lorsque $i \geq j$.

donc : si $k \leq j$: $v_k \in \mathrm{Vect}(e_1 \dots e_{j-1})$.

$(v_1, \dots, v_j)$ est 1 famille de $\mathrm{Vect}(e_1, \dots e_{j-1})$:

elle est liée, donc : $(v_1, \dots, v_n)$

est liée, donc A n'est pas inversible.

($\Leftarrow$) Soit $A \in T_n^+(\mathbb{K})$ sans 0 sur la diag.

Les vect. col. de A forment 1 famille échelonnée ; ils forment donc 1 base de $\mathbb{K}^n$, dc A est inversible.

Lemme 3.2.5 : Soit $\mathcal{C} = (e_1 \dots e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. $\forall k \in [\![1,n]\!] : E_k = \mathrm{Vect}(e_1 \dots e_k)$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ tq. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = A$.

$A \in T_n^+(\mathbb{K})$ ssi $\forall k \in [\![1,n]\!], u(E_k) \subset E_k$.

Démonstration :

$$A = \begin{array}{c} k\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right. \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\qquad}^{k} & \\ \hline 0 & \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow e_1 \\ \vdots \\ \leftarrow e_k \\ \leftarrow e_{k+1} \\ \vdots \\ \leftarrow e_n \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \dots & \uparrow \\ u(e_1) & & u(e_k) \end{array}$$

$$\forall j \in [\![1, k]\!] : u(e_j) \in \mathrm{Vect}(e_1 \dots e_k)$$
$$\in E_k$$

donc $u(E_k) \subset E_k$.

$$\Big(\quad u(E_k) = u(\mathrm{Vect}(e_1 \dots e_k))$$
$$= \mathrm{Vect}(\underbrace{u(e_1) \dots u(e_k)}_{\in E_k}) \subset E_k \quad \Big)$$

$(\Rightarrow)$ Soit $A \in T_n^+(\mathbb{K})$.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

$$u(e_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, e_i \quad \text{car } A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} a_{ik}\, e_i$$

$$\in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k).$$

$$\in E_k.$$

$$\text{dc : } u(E_k) = \mathrm{Vect}\big(\underbrace{\overset{\in E_1 \subset E_k}{u(e_1)} \dots u(e_k)}_{\in E_k}\big)$$

$$\subset E_k.$$

($\Leftarrow$) Soit A tq. $\forall k$, $u(E_k) \subset E_k$.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

$u(e_k) \in E_k = \mathrm{Vect}(e_1 \dots e_k)$

donc : il existe $x_1 \dots x_k \in \mathbb{K}$

tq. $u(e_k) = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i$ (1)

Mais, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, donc :

$$u(e_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i \qquad (2)$$

par identification de (1) et (2) :

$\forall i \leq k : x_i = a_{ik}$; $\forall i > k : a_{ik} = 0$

dc $A \in T_n^+$.

Théorème 3.2.7 : Si $A \in T_n^+(\mathbb{K}) \cap GL_n(\mathbb{K})$,

Alors $A^{-1} \in T_n^+(\mathbb{K}) \cap GL_n(\mathbb{K})$.

Démonstration : $\mathcal{B}$: base canonique de $\mathbb{K}^n$

u : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A$

$E_k = \mathrm{Vect}(e_1 \dots e_k)$.

Mq. $\forall k$, $u^{-1}(E_k) \subset E_k$.

Nous savons : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u^{-1}) = A^{-1}$.

or : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $u(E_k) \subset E_k$,

de : $E_k \subset u^{-1}(E_k)$.

dc : $\dim E_k \leq \dim u^{-1}(E_k)$

par le th. du rang :

$$\dim u^{-1}(E_k) \leq \dim E_k$$

donc : $\dim u^{-1}(E_k) = \dim E_k$

alors : $u^{-1}(E_k) = E_k$

$\subset E_k$.

dc $A^{-1} \in T_n^+(\mathbb{K})$.

Rq : Si $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap GL_n(\mathbb{K})$:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec : $\forall i,\ \lambda_i \neq 0$

alors : $$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_i} \end{pmatrix}$$