Devoir à la maison n° 9

À rendre le 11 janvier

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

Première partie.

1) En étudiant sa monotonie, montrer que (u_n) possède une limite.

2) On introduit la fonction $f\ :\ \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - x^2 \end{array}\right.$.

- **a)** Montrer que $[0,1]$ est stable par f.
- **b)** Quels sont les points fixes de f ?

3)
- **a)** On suppose que $a < 0$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
- **b)** On suppose que $a > 1$. Déduire du signe de u_1 la limite de (u_n).
- **c)** On suppose que $a \in [0,1]$. Montrer que (u_n) est alors convergente et donner sa limite.

Deuxième partie.

On suppose à présent que $a \in]0,1[$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = nu_n \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

4)
- **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
- **b)** En déduire que (v_n) est croissante .
- **c)** Montrer alors que (v_n) est convergente et que sa limite ℓ appartient à l'intervalle $[0,1]$.

5)
- **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geqslant \dfrac{u_1}{n}$.
- **b)** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_{2n} - S_n \geqslant \dfrac{u_1}{2}$.

c) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2^n} \geqslant (n+1)\dfrac{u_1}{2}$.

d) Montrer enfin que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

6) **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_{n+1} - v_n \geqslant u_n\left((1-\ell) - u_n\right)$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_{n+1} \geqslant (1-\ell)\, S_n + u_{n+1}$.

c) Montrer enfin que $\ell = 1$.

— FIN —