Nom : Correcteur : Note :

Démontrer le résultat suivant (théorème de changement de variable). Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $(a, b) \in I^2$, $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, avec $\varphi(I) \subset J$. Alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) \, \mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) \, \mathrm{d}t.$$

Soit l'équation différentielle $(\mathscr{F}) : 2y'' + 2\sqrt{2}y' + y = 0$. Donner l'ensemble des solutions complexes de $(\mathscr{F})$ définies sur $\mathbb{R}$.

Déterminer une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation $y' - \dfrac{y}{2x} = \sqrt{x}\ln(x)$, en utilisant la méthode de la variation de la constante.
Indication : une solution homogène est $x \mapsto \sqrt{x}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Rappeler la définition de « racine n^{e} de l'unité » et donner l'ensemble des racines n^{es} de l'unité.
Expliciter l'ensemble des racines quatrièmes de l'unité.