Devoir surveillé n°7
Version n°2

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

Première partie :

On considère l'équation différentielle :

$$(1-x)^2\, y' = (2-x)\, y. \qquad (E)$$

On note I l'intervalle $]-\infty, 1[$ et l'on considère la fonction f définie sur I par

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}.$$

1) Déterminer une primitive A de la fonction a définie sur I par : $a(x) = \frac{2-x}{(1-x)^2}$.

2) Résoudre (E) sur I

3) Calculer le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 3.

Deuxième partie :

4) Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) \mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}$$

La démonstration permet d'exprimer $P_{n+1}(X)$ en fonction de $P_n(X)$, $P_n'(X)$ et X. Expliciter cette relation.

5) Préciser P_0, P_1, P_2 et P_3.

6) En dérivant n fois les deux membres de l'équation (E), prouver que pour tout entier positif n :

$$P_{n+1}(X) = \left[(2n+1)X + X^2\right] P_n(X) - n^2 X^2 P_{n-1}(X)$$

Troisième partie :

Le but de cette partie est d'établir quelques propriétés des nombres $a_n = f^{(n)}(0)$.

7) Pour tout entier positif n, exprimer a_{n+1} en fonction de n, a_n et a_{n-1}.

8) **a)** Préciser, sans nouveau calcul : a_0, a_1, a_2, a_3. En déduire a_4.

b) Préciser le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 4.

9) On désigne par (u_p) la suite définie pour tout entier naturel p par : $u_p = \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!}$.

a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{e} = u_p + \int_0^1 \mathrm{e}^{\,t} \frac{(1-t)^p}{p!}\, \mathrm{d}t.$$

b) En déduire que la suite (u_p) converge vers e.

Pour deux entiers naturels quelconques p et n, on pose :

$$S_p(n) = \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2}.$$

10) **a)** Exprimer $S_p(0)$ et $S_p(1)$ à l'aide de u_p et u_{p-1} pour $p \geqslant 1$.

b) Prouver que les suites $(S_p(0))_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_p(1))_{p\in\mathbb{N}}$ convergent et préciser leur limite en fonction de e.

11) Prouver que quels que soient les entiers p et n supérieurs ou égaux à 1 :

$$S_p(n+1) - (2n+2)\, S_p(n) + n^2 S_p(n-1) = S_{p-1}(n) - S_p(n)$$

12) En déduire que pour tout entier naturel n, la suite $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ converge.

13) Prouver que : $a_n = \lim\limits_{p\to+\infty} \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2} = \lim\limits_{p\to+\infty} n! \sum_{i=0}^{p} \binom{n+i}{n} \cdot \frac{1}{i!}$

— FIN —