



LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON  
SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR  
CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I.  
ANNÉE 2020 - 2021

C1 : PERFORMANCES STATIQUES ET CINÉMATIQUES DES SYSTÈMES COMPOSÉS DE CHAÎNE DE SOLIDES

## TD 18 - Résolution d'un problème de statique des solides (C8-2)

1 Juin 2021

### Compétences

- **Analyser**; Définir les frontières de l'analyse : Frontière de l'étude Milieu extérieur
- **Analyser**; Caractériser des écarts : Identifier les écarts
- **Analyser**; Apprécier la pertinence et la validité des résultats : Quantification des écarts
- **Modéliser**; Identifier et caractériser les grandeurs physiques : Interprétation des écarts
- **Modéliser**; Proposer un modèle de connaissance et de comportement : Grandeurs utilisées : - unités du système international - homogénéité des grandeurs
- **Résoudre**; Procéder à la mise en œuvre d'une démarche de résolution analytique : Ordres de grandeur

### 1 Canne robotisée

#### Partie I - Présentation générale et analyse du cycle de marche

Une canne robotisée est un dispositif dédié à l'assistance de personnes âgées ou rencontrant des troubles de la marche. Une canne robotisée sans base mobile permet de réduire considérablement l'encombrement. ce sera l'objet de cette étude **tableau 1**.




Canne conventionnelle	Canne à base mobile stable composée de 3 roues	Prototype de canne robotisée étudié dans ce sujet
		

TABLE 1 – Évolution des dispositifs d'assistance à la locomotion de type canne

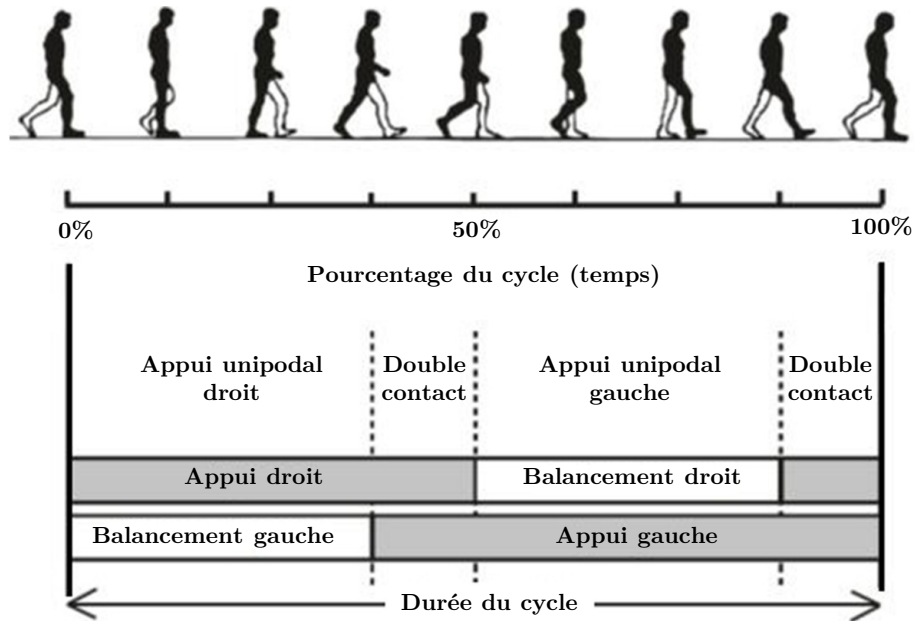


FIGURE 1 – Représentation du cycle de la marche adopté dans le cadre de notre étude

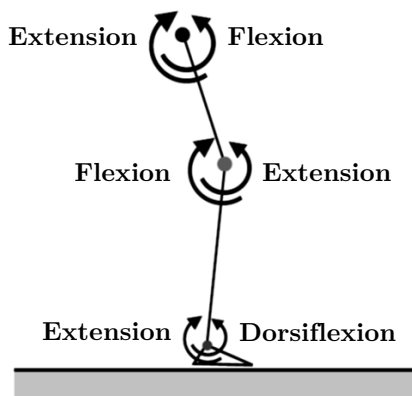


FIGURE 2 – Représentation des mouvements

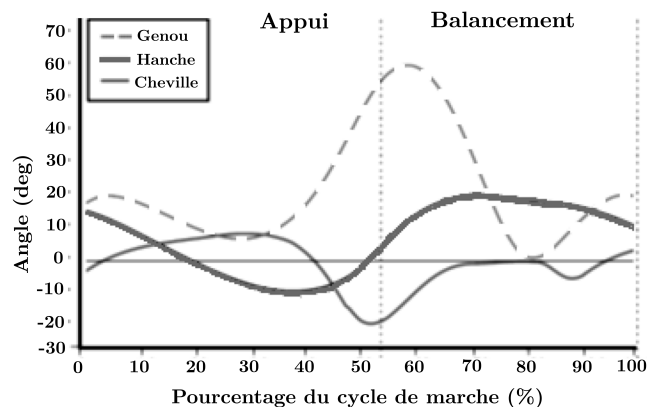


FIGURE 3 – Évolution des articulations de la jambe durant un cycle de marche normale

## Partie II - Modélisation et analyse de la commande lors de la phase d'appui

Cette étude permettra d'une part, de vérifier qu'il n'y aura pas glissement de la roue par rapport au sol lors de la phase d'appui et d'autre part, de comparer différents modèles de la structure asservie et de vérifier l'exigence 3.1.3 « Transmission des efforts du patient »

Dans cette étude, on se place en phase d'appui et on considère l'action mécanique en  $H$  du patient sur la canne immobile. Lors de cette phase, la vitesse de rotation de la roue  $\omega(t)$  est nulle mais le moteur de la roue exerce un couple de maintien non nul de manière à supporter l'action du patient dans les limites d'adhérence de la roue. La **figure 4** présente les notations retenues pour cette étude où  $\Delta \vec{F}_p$  est le support de la force  $\vec{F}_p$ .

Hypothèses de l'étude :

- modélisation plane dans le plan d'étude  $(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0)$ ;
- l'action de pesanteur sur la canne est négligée devant l'intensité des autres actions;
- l'action en  $H$  est modélisée par un glisseur de résultante  $F_p = 175 \text{ N}$  et de support  $(IH)$ ;
- la droite  $(IH)$  de vecteur directeur  $\vec{v}$  est le support de l'action  $\vec{F}_p$  appliquée en  $H$ . On note de plus  $\beta(t) = (\vec{j}_0, \vec{v})$ ;
- le contact entre la roue 1 et le sol 0 est considéré ponctuel en  $I$  (la résistance au roulement est négligée). Le facteur de frottement  $f$  du couple de matériau roue 1 / sol en béton 0 est noté  $f = \tan(\varphi) = 0,4$  où  $\varphi$  est l'angle de frottement.

**Q 1 : Tracer le graphe de structure traduisant le modèle proposé.**

**Q 2 : À partir d'un isolement à préciser et d'un théorème à énoncer, justifier le support de l'action de contact en**

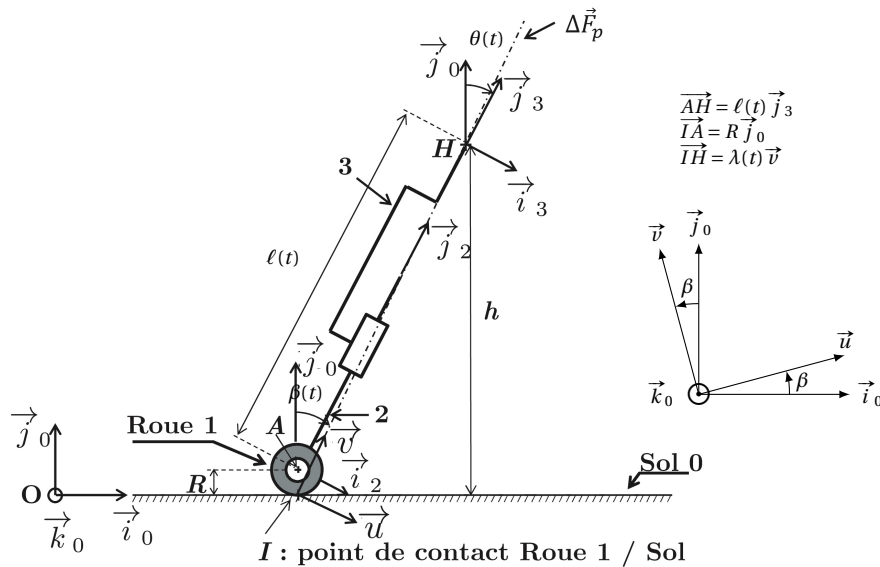


FIGURE 4 – Modélisation et paramétrage du prototype de canne robotisée

***I* et de l'action en  $H$ . Pour cette question, l'écriture des torseurs associés aux actions mécaniques n'est pas demandée.**

**Q 3 : Quelle doit être la condition entre l'angle  $\beta(t)$  et l'angle de frottement  $\varphi$  pour que l'équilibre de la canne soit assuré? Cet équilibre est-il remis en question si l'intensité de l'action  $\vec{F}_p$  du patient en  $H$  évolue (augmente ou diminue)? Justifier votre réponse et préciser le nom donné à ce type d'équilibre.**

Dans la suite, on se propose de déterminer par une étude géométrique la relation entre  $\beta(t)$ , les données dimensionnelles  $R$  et  $h$  et l'angle  $\theta(t)$ . Pour cela, on introduit la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}_0)$  et on note  $\lambda(t)$  la distance  $IH$ , telle que  $\overrightarrow{IH} = \lambda(t) \vec{v}$ .

**Q 4 :** En développant une fermeture vectorielle en projection dans la base  $\mathcal{B}_0$ , donner deux équations algébriques. En déduire la relation entre  $\beta(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $\ell(t)$  et  $R$ .

La relation précédente et à l'aide d'une autre fermeture géométrique on peut obtenir l'expression suivante :

$$\tan(\beta(t)) = \frac{(h-R)}{h} \cdot \tan(\theta(t)).$$

**Q 5 : Relever sur la figure 3, page 2 la valeur maximale d'inclinaison de la canne lors de la phase d'appui (on rappelle que la canne suit le mouvement de la hanche du patient) et en déduire la valeur minimale du facteur de frottement assurant l'équilibre. Conclure sur l'utilisation du prototype de canne sur un sol de type béton.**

Pour la suite, on se place à la limite de l'adhérence :

$$\beta = \varphi = \arctan(0, 4).$$

On note  $C_R$  le couple de maintien au niveau de la roue en sortie de la chaîne d'énergie de la roue.

On donne donc  $\{T_{red \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -C_R \cdot \vec{k}_0 \end{array} \right\}_A$ .

La roue 1, de diamètre  $D = 0,1$  m, est en liaison pivot sans frottement en  $A$  avec la canne inférieure 2.

Le bilan des actions mécaniques est partiellement représenté sur la **figure 5**.

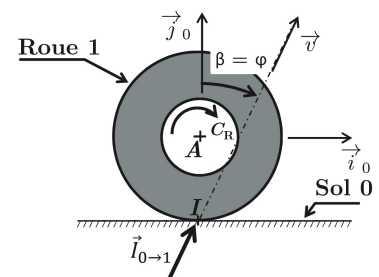


FIGURE 5 – Bilan partiel des actions mécaniques exercées sur la roue 1

**Q 6 : Isoler la roue 1 et, à partir d'un théorème à préciser, déterminer l'expression puis la valeur numérique du couple en sortie du réducteur  $C_R$ , permettant d'assurer l'équilibre de la canne.**

Quel que soit le résultat trouvé précédemment, on donne  $C_R = 5 \text{ Nm}$ . On précise :

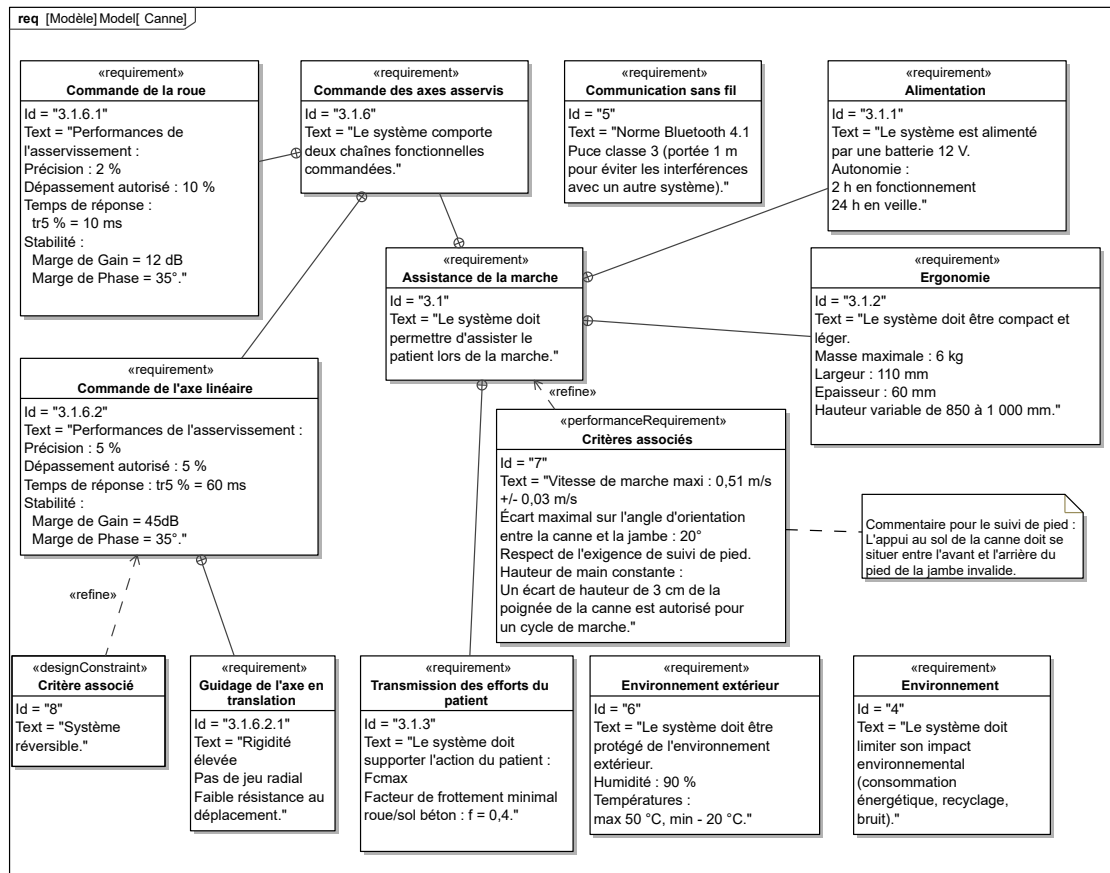
- le couple nominal du moteur :  $C_m = 0,279 N \cdot m$ ;
- le rapport de réduction de la transmission :  $r = 1/30$ ;
- le rendement de l'ensemble est  $\eta_{trans} = 0,9$ ;
- En régime permanent par conservation des puissance, on obtient la relation suivantes :

$$\eta_{trans} = \frac{C_R \cdot \omega_R}{C_m \cdot \omega_m}$$

**Q 7 : Justifier la dernière relation donnée et valider le choix du moteur.**

## ANNEXE

### Document 1 - Diagramme partiel des exigences



## 2 Étude d'un hayon de voiture

### a) Présentation du problème

On étudie ici Le système **PCS** (Power Closure System), conçu par Valéo, qui est un système d'ouverture et de fermeture automatique de hayon de coffre automobile.

Le cahier des charge est résumé avec le diagramme d'exigence suivant (figure 6) :

L'ouverture ou la fermeture du hayon est assurée par deux vérins électriques prenant directement la place des vérins à air comprimé que l'on peut trouver sur une porte de coffre classique. Le mouvement du hayon par rapport à la caisse du véhicule est permis grâce à une liaison pivot entre le corps de la voiture et le hayon sur la partie supérieure et des liaisons rotules avec les vérins.

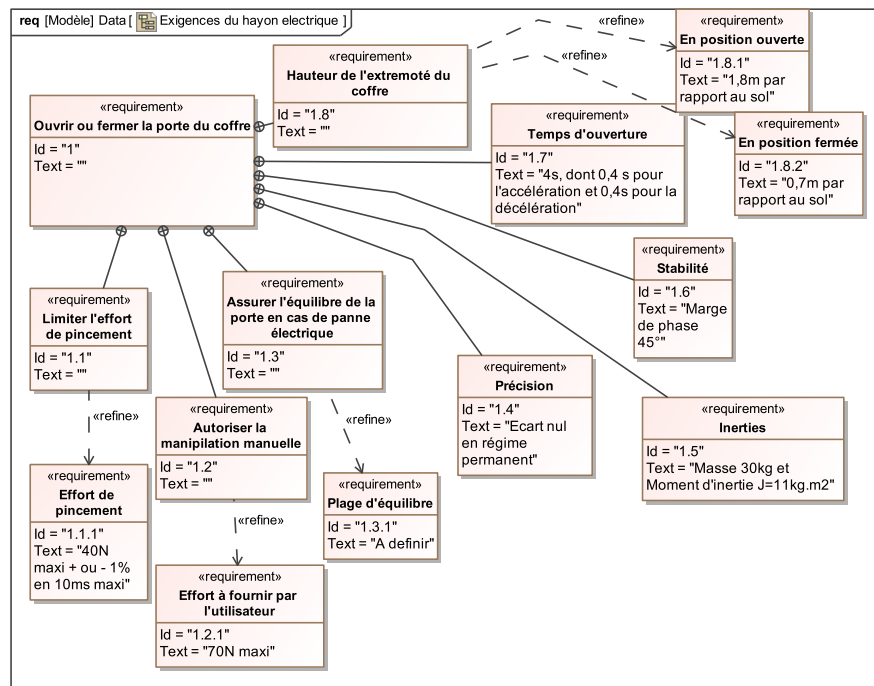


FIGURE 6 – Diagramme d'exigences du système de fermeture de hayon électrique en phase d'utilisation courante



FIGURE 7 – Description d'un hayon

Exigences	Qualification	Critère	Niveau
1	Ouvrir ou fermer la porte de coffre	Hauteur de l'extrémité du coffre en position ouverte	1,80m par rapport au sol
		Hauteur de l'extrémité du coffre en position fermée	0,70m par rapport au sol
		Temps d'ouverture ou fermeture	4s au total dans lesquelles on distingue : 0,4 s pour l'accélération et 0,4 s pour la décélération
		Éléments d'inertie de la porte de coffre	Masse : 30 kg. Moment d'inertie autour de son axe de rotation par rapport au bâti de la voiture : $J = 11 \text{ kg.m}^2$
		Stabilité	Marge de phase de 45°
		Précision	Écart en régime permanent nul vis-à-vis d'une consigne d'angle sous forme d'un échelon
1.3	Assurer l'équilibre de la porte de coffre en cas de panne des vérins électriques	Plage d'équilibre	A définir
1.2	Permettre la manipulation manuelle de la porte de coffre par l'utilisateur en cas de panne moteur	Effort à fournir par l'utilisateur	70N maximum
1.1	Limiter l'effort de pincement de la porte de coffre sur un obstacle	Effort de pincement	40N maximum $\pm 1\%$ en 10ms maxi

TABLE 2 – Caractérisation des exigences

## b) Objectif



## Objectif 1 :

L'objectif est de déterminer les caractéristiques du vérin permettant de garantir l'équilibre du hayon en cas de coupure d'énergie : exigence 1.3. Il faudra alors définir la plage d'équilibre.

## c) Description et paramétrage

On modélise le système par un système plan. Le système étant symétrique, les deux vérins sont ramenés dans le plan d'évolution de la porte de coffre et leur action mécanique s'exerçant sur la porte de coffre est supposée identique.

- Le repère  $(B, \vec{x}_t, \vec{y}_t, \vec{z}_0)$  est lié à la terre et au bâti  $S_0$  lié au châssis de la voiture (véhicule à l'arrêt).
  - $\vec{y}_t$  est un vecteur unitaire vertical tel que l'accélération de la pesanteur s'écrit  $\vec{g} = -g \vec{y}_t$ , avec  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .
  - $\vec{x}_t$  est un vecteur unitaire horizontal (voir figure 8).
- La liaison pivot entre la structure du véhicule et la porte de coffre est d'axe  $(B, \vec{z}_0)$ .
- Le repère  $(B, \vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{z}_0)$  est lié à la porte de coffre  $S_1$ .
- Le repère  $(A, \vec{x}_v, \vec{y}_v, \vec{z}_0)$  est lié au corps du vérin  $S_3$  et à la tige du vérin  $S_2$ .
- La sortie de tige par rapport au corps du vérin se fait dans la direction du vecteur  $\vec{x}_v$ . Dans une première approche on considèrera que la liaison entre la tige du vérin  $S_2$  et le corps du vérin  $S_3$  est une liaison pivot glissant de direction  $(C, \vec{x}_v)$ .
- Les liaisons entre la tige du vérin et le bâti d'une part, et entre le corps du vérin et la porte de coffre d'autre part, sont des liaisons rotules de centres respectifs A et C.
- Le point D représente l'extrémité de la porte du coffre. La hauteur du point D par rapport au sol suivant la verticale est de 0,7 m en position coffre fermé et de 1,8 m en position coffre ouvert.
- Le centre d'inertie du coffre ( $S_1$ ) est situé en G tel que  $\vec{BG} = \lambda \vec{x}_p$  avec  $\lambda = 0,6 \text{ m}$ .
- On note  $M$  la masse du hayon  $S_1$ .
- On ne considère que le poids de  $S_1$  comme étant non négligeable.
- $\vec{AB} = -a \vec{x}_0 + b \vec{y}_0$ ;  $\vec{AC} = L \vec{x}_v$ ;  $\vec{BC} = c \vec{x}_p$ ;  $\vec{BD} = d \vec{x}_p$ , avec  $a = 0,55 \text{ m}$ ;  $b = 0,14 \text{ m}$ ;  $c = 0,14 \text{ m}$  et  $d = 1 \text{ m}$ .
- L'angle formé entre  $\vec{x}_0$  et l'horizontal  $\vec{x}_t$  est  $\theta_0 = 42^\circ$ .
- $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_p)$ ;  $\beta = 42^\circ = (\vec{x}_0, \vec{x}_t)$  et  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_v)$ ;
- $\vec{z}_0 = \vec{z}_t = \vec{z}_v = \vec{z}_p$

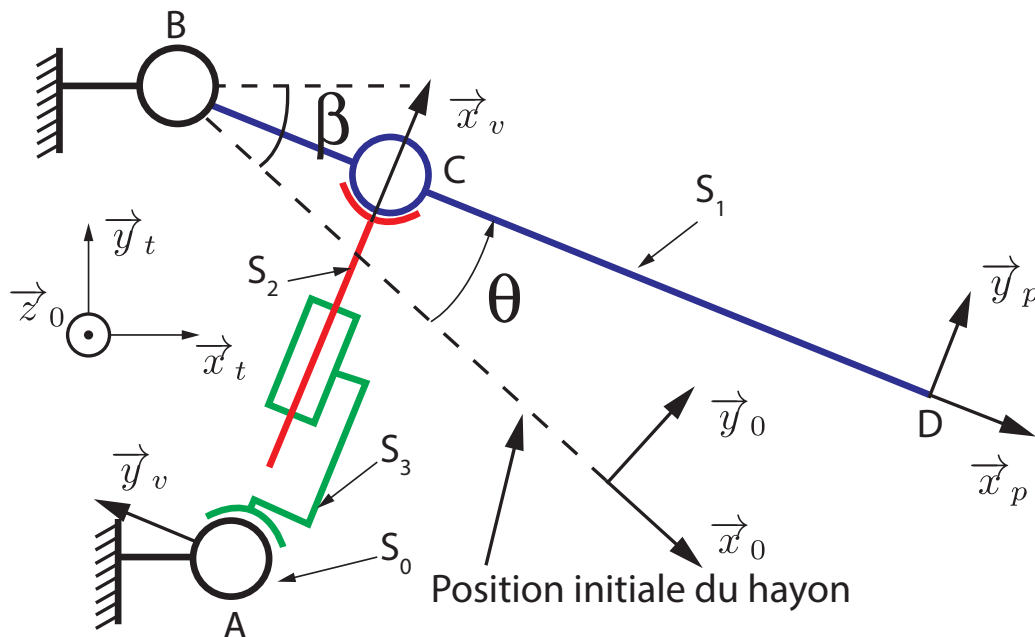


FIGURE 8 – Paramétrage du problème



## d) Dimensionnement de l'actionneur

**Q 8 : Déterminer l'angle d'ouverture maximal.**

**Q 9 : Par l'écriture de la fermeture géométrique dans le triangle ABC, déterminer la longueur du vérin  $L$  en fonction de l'angle d'ouverture du coffre  $\theta$ .**

**Q 10 : Déterminer les valeurs extrêmes de  $\theta$ , ainsi que la course du vérin.**

Les vérins utilisés sont constitués d'un moteur à courant continu, d'un réducteur à engrenage, d'une vis à billes et d'un ressort (figure 9). Le cahier des charges impose que la porte soit en équilibre sur une large plage d'ouverture en cas de panne moteur. C'est pourquoi il faut déterminer la raideur et la longueur à vide des ressorts qui assurent cette fonction dans les vérins électriques.

**Objectif 2 :**

Cette étude préalable doit permettre de donner une relation entre l'effort que doit exercer le vérin sur le hayon et le poids du hayon.

**Q 11 : Construire le graphe de structure du problème.**

**Q 12 : Proposer un ordonnancement des isoléments permettant de répondre à l'objectif de cette partie.**

**Q 13 : Dans un premier temps montrer alors que l'action mécanique de  $S_2 \rightarrow S_3$  peut-être modélisable par un glisseur dont la résultante est portée par  $\vec{x}_v$ . On notera sa norme  $F_v$ . On supposera ce résultat pour la suite.**

**Q 14 : Déterminer l'effort  $F_v$  exercé par chacun des vérins sur la porte de coffre en fonction de  $\theta$ ,  $\alpha$  et des constantes du problème : on suivra rigoureusement la méthodologie vue dans le cours.**

L'étude géométrique a permis de montrer que la relation entre  $\theta$  et  $\alpha$  s'écrit :

$$\tan \alpha = \frac{b + c \sin \theta}{-a + \cos \theta}$$

On déduit de la question précédente le tracé de l'évolution de l'effort  $F$  nécessaire au maintien en équilibre du coffre en fonction de la longueur  $L$  du vérin (figure 10).

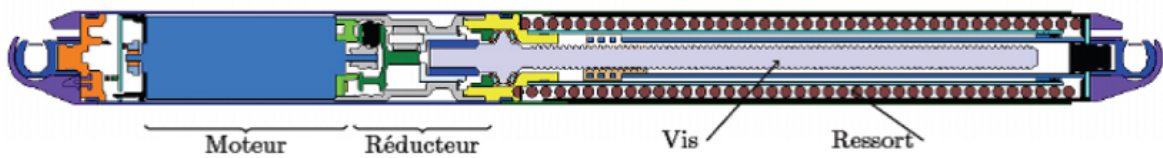


Figure 9 – Descriptif du vérin utilisé

FIGURE 9 – Descriptif du vérin utilisé

On affine la modélisation du vérin en modélisant la liaison entre la tige du vérin et le corps du vérin par une liaison hélicoïdale. On choisit d'utiliser un ressort précontraint au sein du vérin (voir figure 9) de manière à assister l'ouverture du coffre et à assurer l'équilibre du coffre sur une plage de fonctionnement maximale. La résultante de l'action du ressort sur  $S_2$  se note  $\vec{F}_{Ressort \rightarrow S_2} \cdot \vec{x}_v = -k \cdot (L - L_0)$ . On estime que les forces de frottement maximales au sein du vérin (essentiellement dues à la friction dans la vis avec la liaison hélicoïdale) sont de l'ordre de  $F_{frot} = 100N$  et s'opposent au mouvement éventuel de  $S_2/S_3$ . La figure 10 représente la force que doit exercer le vérin sur la porte de coffre pour assurer l'équilibre de cette dernière en fonction de la longueur du vérin. Les courbes en pointillés représentent la force du vérin ( $F_v$ )  $\pm 100N$ .

**Q 15 : Considérer l'ensemble vérin composé de deux sous-ensembles :**

- $S_3$  : Moteur + vis+ réducteur + corps du vérin
- $S_2$  : Ecrou (tige de vérin)

et tracer le graph de structure.

**Q 16 : Isoler  $S_2$  et en utilisant le théorème adéquat, déterminer la relation entre  $F$ ,  $F_{frot}$ ,  $k$  (raideur du ressort) et  $\Delta L = L - L_0$  (allongement du ressort).**

**Q 17 : Déterminer la raideur  $k$  du ressort et sa longueur à vide  $L_0$  de manière à obtenir une situation d'équilibre sur la plus grande plage de fonctionnement. Préciser votre démarche.**



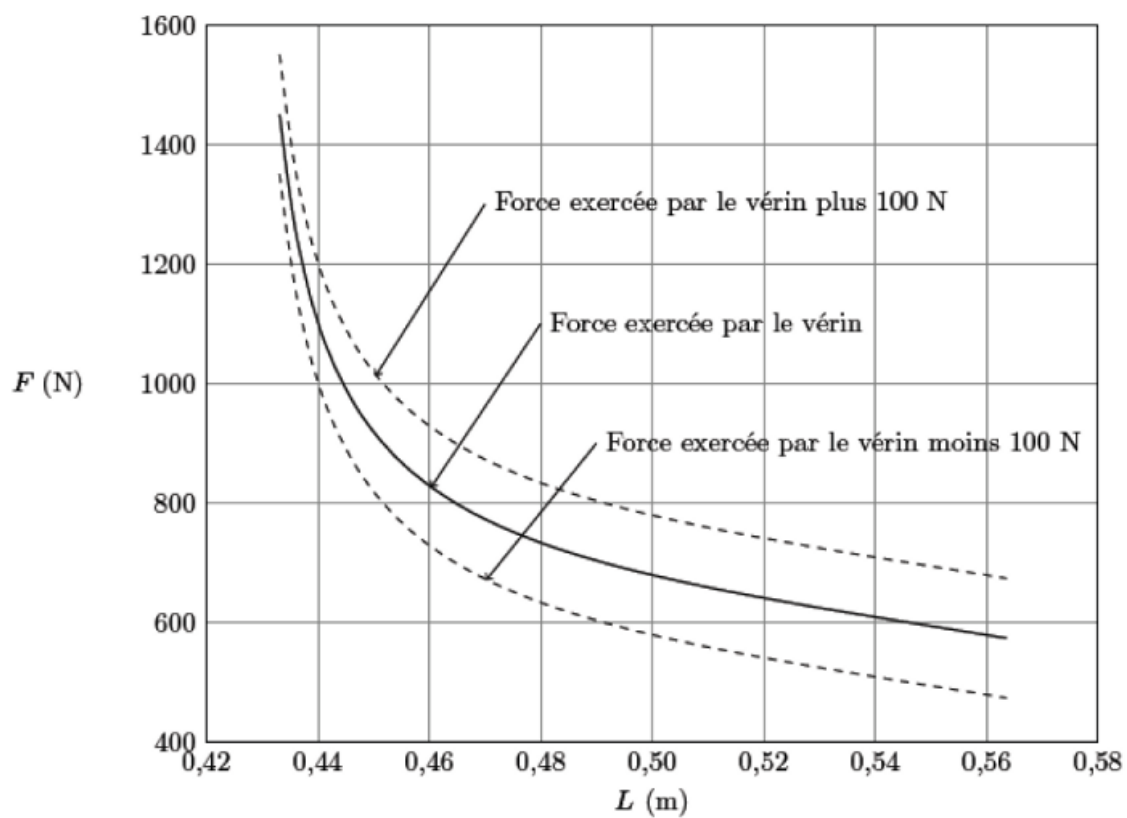


Figure 6 Effort de chacun des deux vérins sur la porte de coffre pour assurer l'équilibre en fonction de la longueur du vérin

FIGURE 10 – Effort de chacun des deux vérins sur la porte de coffre pour assurer l'équilibre en fonction de la longueur du vérin