DS n°8 : Fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom : Note :

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

Algèbre linéaire

Soit $p \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ la projection par rapport à $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y=z\}$ et parallèlement à $\mathrm{Vect}(1,1,1)$. Alors

$$p : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \boxed{} \tag{1}$$

Soit l'endomorphisme $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -3x + 6y - 2z \\ -2x + 5y - 2z \\ -2x + 6y - 3z \end{pmatrix} \end{array}$. Alors

$$f \text{ est un / une } \boxed{} \tag{2}$$

$$\text{sur / par rapport à } \mathrm{Vect}\left(\boxed{} \right) \tag{3}$$

$$\text{parallèlement à } \mathrm{Vect}\left(\boxed{} \right). \tag{4}$$

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ $\varphi : P \mapsto XP(0) - XP' + P$.

Ainsi, le rang de φ est $\quad \mathrm{rg}\,\varphi = \boxed{}$ (5)

et un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est $\quad \mathrm{Vect}\left(\boxed{} \right)$ (6)

Intégration

Calculer l'intégrale suivante.

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}} = \boxed{} \qquad (7)$$

Donner une primitive de Arcsin :

$$\boxed{} . \qquad (8)$$

Indiquer la limite des suites de termes généraux suivants.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{} \qquad (9)$$

$$\frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^{n} \left(n^2+k^2\right)^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{} \qquad (10)$$

Dénombrement

La belote se joue à 4 joueurs, avec un paquet de 32 cartes de quatre couleurs différentes (cœurs, carreaux, piques, trèfles). Chaque couleur contient huit cartes (sept, huit, neuf, dix, valet, dame, roi, as). Une main est la donnée de l'ensemble des huit cartes distribuées à un joueur.
Combien de mains existe-il en tout (ne pas simplifier le résultat) ?

$$\boxed{} \qquad (11)$$

Combien de mains comportent au moins 6 cartes de la même couleur (simplifier le résultat) ?

$$\boxed{} \qquad (12)$$

Soit E un ensemble contenant $n \in \mathbb{N}^*$ éléments. Combien y a-t-il d'applications f de E dans $\mathbb{N}$ telles que $\mathrm{Im}(f) = \{0,1\}$?

$$\boxed{} \qquad (13)$$

Dans une urne, on dispose n boules blanches (numérotées de 1 à n) et n boules noires (numérotées aussi de 1 à n). Combien y a-t-il de possibilités de les tirer toutes (sans remise), sans que deux boules de même couleur ne se succèdent ?

$$\boxed{} \qquad (14)$$

— FIN —