

Devoir à la maison n° 22

À rendre le 14 juin

Soient $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^q b_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, deux polynômes non nuls, avec $p = \deg P$ et $q = \deg Q$. On considère :

- $D = P \wedge Q$, $d = \deg D$, $P = DP_1$ et $Q = DQ_1$;
- $E = \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ et $F = \mathbb{C}_{p+q-1}[X]$;
- $\varphi : \begin{cases} E & \rightarrow F \\ (A, B) & \mapsto PA + QB \end{cases}$;

$$\bullet \text{ Res}(P, Q) = \begin{vmatrix} a_0 & & & & b_0 & & & & \\ a_1 & \ddots & & & b_1 & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & a_0 & b_{q-1} & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & a_1 & b_q & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_0 & \\ a_p & & & \vdots & \ddots & \ddots & & b_1 & \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \\ & & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \\ & & & a_p & & & & b_q \end{vmatrix}.$$

Les q premières colonnes de $\text{Res}(P, Q)$ représentent les coefficients de P , les p dernières ceux de Q . Les positions non remplies correspondent à des zéros, et on a donné ici l'écriture pour $p > q$.

$\text{Res}(P, Q)$ est un déterminant $(p+q) \times (p+q)$ appelé *résultant* de P et Q .

Par exemple, si $P = 1 + 2X + 3X^2$ et $Q = 4 + 5X + 6X^2 + 7X^3$,

$$\text{Res}(P, Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

Première partie : résultant et polynômes premiers entre eux.

- 1) a) Déterminer une relation entre $\text{Res}(P, Q)$ et $\text{Res}(Q, P)$.
b) On suppose que $p > 0$. Calculer $\text{Res}(P, 1)$.
c) Calculer $\text{Res}(\lambda P, Q)$ et $\text{Res}(P, \lambda Q)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

- 2) a) Montrer que φ est linéaire. Quelles sont les dimensions de E et de F ? Que peut-on en déduire quant à φ ?
- b) Montrer que φ est bijective si et seulement si $D = 1$.
- 3) On considère $\mathcal{B} = ((1, 0), (X, 0), \dots, (X^{q-1}, 0), (0, 1), (0, X), \dots, (0, X^{p-1}))$ la base canonique de E et $\mathcal{B}' = (1, X, \dots, X^{p+q-1})$ la base canonique de F .
- a) Écrire la matrice M de φ dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' .
- b) Montrer que $\text{Res}(P, Q) \neq 0 \Leftrightarrow D = 1$.

Deuxième partie : étude plus poussée.

4) Soit $a \in \mathbb{C}$.

- a) Soit $f_a : \begin{cases} F & \rightarrow F \\ R & \mapsto R \circ (X + a) \end{cases}$. Calculer $\det f_a$.
- b) Calculer de même $\det g_a$ avec $g_a : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ (A, B) & \mapsto (A \circ (X + a), B \circ (X + a)) \end{cases}$.
- c) En étudiant $f_{-a} \circ \varphi \circ g_a$, montrer que $\text{Res}(P, Q) = \text{Res}(P \circ (X - a), Q \circ (X - a))$.
- 5) a) Montrer que $\text{Res}(XP, Q) = (-1)^q Q(0) \text{Res}(P, Q)$.
- b) Montrer que $\forall a \in \mathbb{C}, \text{Res}((X - a)P, Q) = (-1)^q Q(a) \text{Res}(P, Q)$.
- c) En déduire que $\text{Res}(P, Q) = (-1)^{pq} (a_p)^q (b_q)^p \prod_{k=1}^p \prod_{\ell=1}^q (\alpha_k - \beta_\ell)$ où $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont les racines complexes de P et β_1, \dots, β_q celles de Q .
- 6) a) Déterminer $\text{Ker } \varphi$.
- b) Vérifier que $\dim(\text{Ker } \varphi) = d$.
- c) Montrer que $\text{Im } \varphi = \{ R \in \mathbb{C}[X] \mid \deg R \leq p + q - 1 \text{ et } D \mid R \}$.

Troisième partie : applications.

- 7) **Racine multiple** : Soit $P = X^3 + aX + b$, avec $a, b \in \mathbb{C}$. Donner une CNS sur a et b pour que P admette une racine multiple.
- 8) **Nombre algébrique** : En utilisant les polynômes $P(X) = X^2 - 3$ et $Q_y(X) = (y - X)^2 - 7$, déterminer un polynôme à coefficients entiers de degré 4 ayant comme racine $\sqrt{3} + \sqrt{7}$. Quelles sont les autres racines de ce polynôme?

— FIN —