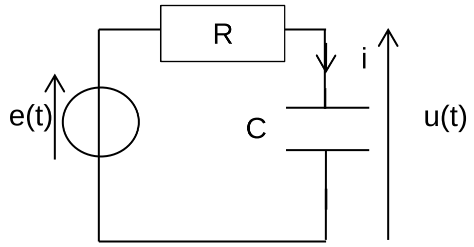
EL7 : FILTRAGE LINEAIRE

I. Réponse d'un système linéaire

I.1. Théorème de superposition



Un circuit linéaire correspond à la donnée d'équations (différentielles) linéaires.

- Mise en équation : $u_C + Ri = e(t)$

  or $i = C\frac{du_c}{dt}$

  d'où $u_c(t) + R\,C\frac{du_c}{dt} = u(t)$

- Linéarité :

  si à $e_1(t)$ correspond la solution $u_{c1}(t)$

  et si à $e_2(t)$ correspond la solution $u_{c2}(t)$

  alors à $\lambda e_1(t) + \beta e_2(t)$ correspond la solution $\lambda u_{c1}(t) + \beta u_{c2}(t)$

- Théorème de superposition : pour calculer la réponse à $\lambda e_1(t) + \beta e_2(t)$, il suffit de faire la même combinaison linéaire des solutions.

I.2. Réponse harmonique

- Si maintenant le circuit RC est alimenté par une tension sinusoïdale $e(t) = E\sqrt{2}.\cos(\omega t)$.

On peut alors utiliser les notations complexes.

On a calculé dans le chapitre précédant la fonction de transfert du système RC : $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1+jRC\omega} = \frac{\underline{U_c}}{\underline{E}}$

Ainsi l'expression complexe de la tension de sortie est :

$\underline{U_c} = \underline{H}(j\omega).\underline{E} = \frac{1}{1+jRC\omega}.E$

D'où en passant en grandeurs instantanées $u_c(t) = \frac{E\sqrt{2}}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}\cos(\omega t - \arctan(RC\omega))$

- Plus généralement, lorsque la tension d'entrée varie sinusoïdalement $e(t) = E\sqrt{2}.\cos(\omega t)$, le signal de sortie sera aussi sinusoïdal de même pulsation.

La fonction de transfert permettra de connaitre son amplitude et sa phase :

$u_s(t) = H(\omega)E\sqrt{2}\cos(\omega t + \mathrm{Arg}(\underline{H}(j\omega)))$.

I.3. Entrée combinaison linéaire de fonctions sinusoïdales

Exemple : $e(t) = E_1\sqrt{2}\cos\omega_1 t + E_2\sqrt{2}\cos\omega_2 t$

Pour le filtre RC on connaît les courbes de réponse (diagramme de Bode) du filtre. On utilise alors le principe de superposition.

$*$ réponse du filtre à $E_1\sqrt{2}\cos\omega_1 t$:

pour $\omega = \omega_1$: $H(\omega_1) = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega_1)^2}}$ et $\mathrm{Arg}(\underline{H}(j\omega_1)) = -\arctan(RC\omega_1)$

$\Rightarrow u_{s1}(t) = \frac{\sqrt{2}E_1}{\sqrt{1+(RC\omega_1)^2}}\cos(\omega_1 t - \arctan(RC\omega_1))$

$*$ réponse du filtre à $E_2\sqrt{2}\cos\omega_2 t$:

pour $\omega = \omega_2$: $H(\omega_2) = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega_2)^2}}$ et $\mathrm{Arg}(\underline{H}(j\omega_2)) = -\arctan(RC\omega_2)$

$\Rightarrow u_{s2}(t) = \frac{\sqrt{2}E_2}{\sqrt{1+(RC\omega_2)^2}}\cos(\omega_2 t - \arctan(RC\omega_2))$

Finalement la réponse à l'ensemble de la tension appliquée par le théorème de superposition est :

$$u_s(t) = u_{s1}(t) + u_{s2}(t) = \frac{\sqrt{2}E_1}{\sqrt{1+(RC\omega_1)^2}}\cos(\omega_1 t - \arctan(RC\omega_1)) + \frac{\sqrt{2}E_2}{\sqrt{1+(RC\omega_2)^2}}\cos(\omega_2 t - \arctan(RC\omega_2))$$

II. Représentation spectrale

II.1. Décomposition en série de Fourier

On a vu lors du chapitre sur les ondes qu'un signal périodique pouvait être décomposé en une somme de termes sinusoïdaux appelés série de Fourier.

Rappels :
Toute fonction périodique s(t), de fréquence f_0 peut être décomposée en une somme de fonctions sinusoïdales de fréquences nf_0.

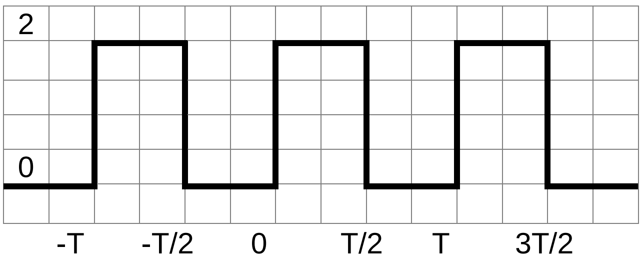
La fonction s(t) peut alors s'écrire :
$s(t) = S_0 + S_1 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_1) + S_2 \cos(4\pi f_0 t + \varphi_2) + S_3 \cos(6\pi f_0 t + \varphi_3) + \ldots + S_n \cos(2n\pi f_0 t + \varphi_n)\ldots$

avec S_0 = valeur moyenne du signal ou composante continue.
S_1 = amplitude du l'harmonique 1
S_2 = amplitude de l'harmonique 2
S_3 = amplitude de l'harmonique 3
……………………………………………
S_n = amplitude de l'harmonique n

La fonction sinusoïdale de même fréquence que la fonction périodique s(t) (harmonique de rang 1) est appelée **fondamental.**
Les autres fonctions, de fréquences multiples, sont appelées les **harmoniques** de la fonction s(t).

II.2. Exemple le signal carré.

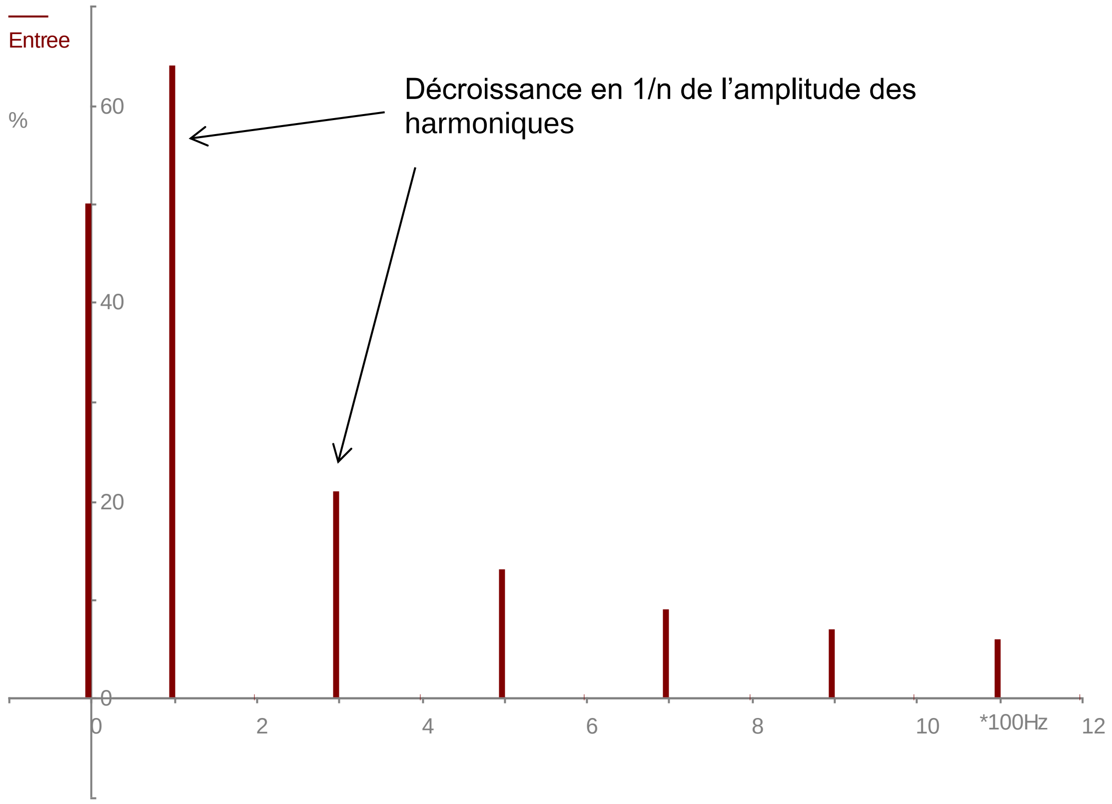
Le signal créneau e(t) d'amplitude 2V de période $T = 2\pi/\omega = 10$ms évoluant de 0 à 2V, sa valeur moyenne est donc 1V



Ce signal admet un développement en série de Fourier :
$e(t) = 1 + \frac{4}{\pi}\sin(\omega t) + \frac{4}{3\pi}\sin(3\omega t) + \frac{4}{5\pi}\sin(5\omega t) + \ldots$

On reconnait dans cette décomposition :
→ La valeur moyenne de e(t) : 1V
→ le fondamental, de même période $T = 2\pi/\omega$ que le signal e(t) : $\frac{4}{\pi}\sin(\omega t)$
→ l'harmonique de rang 3, de période T/3 : $\frac{4}{3\pi}\sin(3\omega t)$
→ l'harmonique de rang n impaire, de période T/n : $\frac{4}{n\pi}\sin(n\omega t)$

On a ainsi le spectre de e(t) :



(Feuille excel pour la représentation)

III. Filtrage linéaire d'un signal non sinusoïdal

III.1. Méthodologie

Si on cherche la réponse d'un filtre à un signal périodique quelconque e(t) avec $T_q = 2\pi/\omega_q$, on adopte la démarche suivante :

① On décompose le signal d'entrée en série de Fourier :

$$e(t) = e_0 + \Sigma E_k \cos(k\omega_q t + \varphi_k)$$

② On détermine la réponse s_k à chacun des termes e_k grâce à la fonction de transfert du filtre :

$$s_k(t)= |\underline{H}(jk\omega)|\, E_k \cos(k\omega_q t + \varphi_k + \arg(\underline{H}(jk\omega)))$$

③ On applique le théorème de superposition :

$$s(t) = \Sigma\, s_k(t) + s_0$$

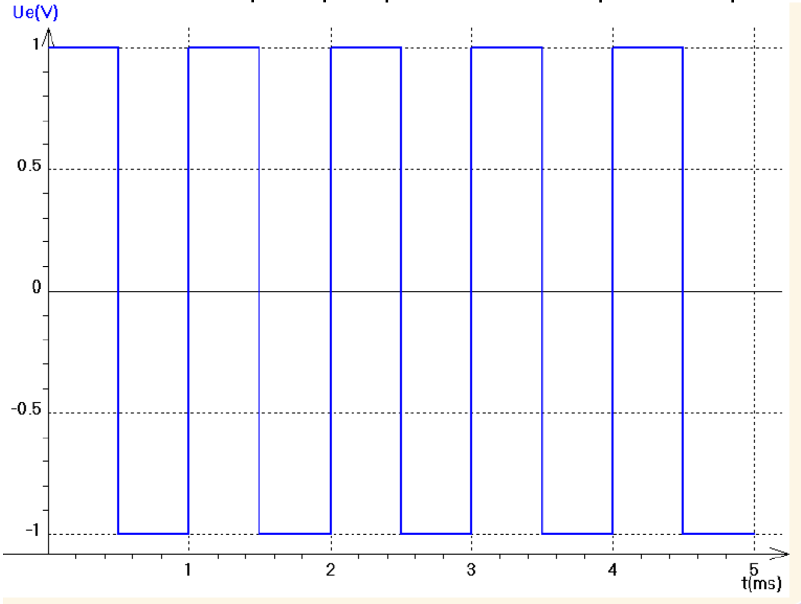
III.2. Filtre passe-bas

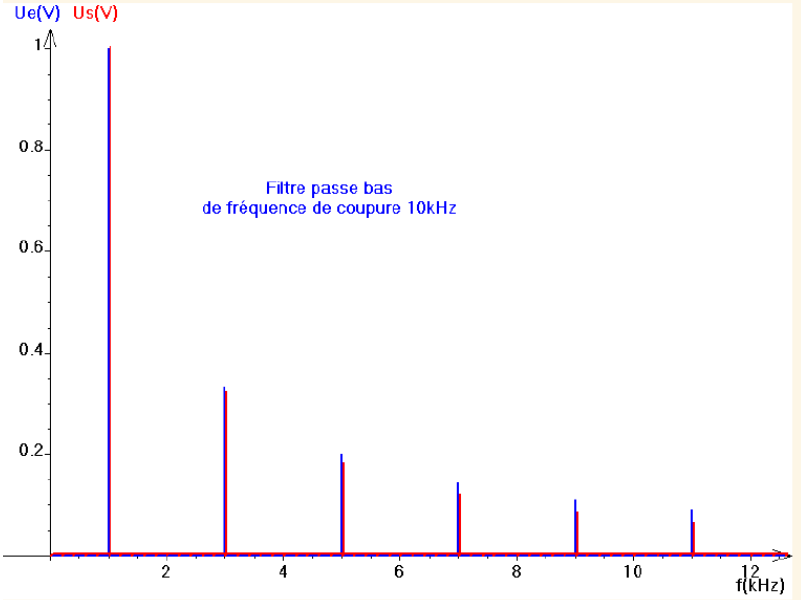
Soit la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$

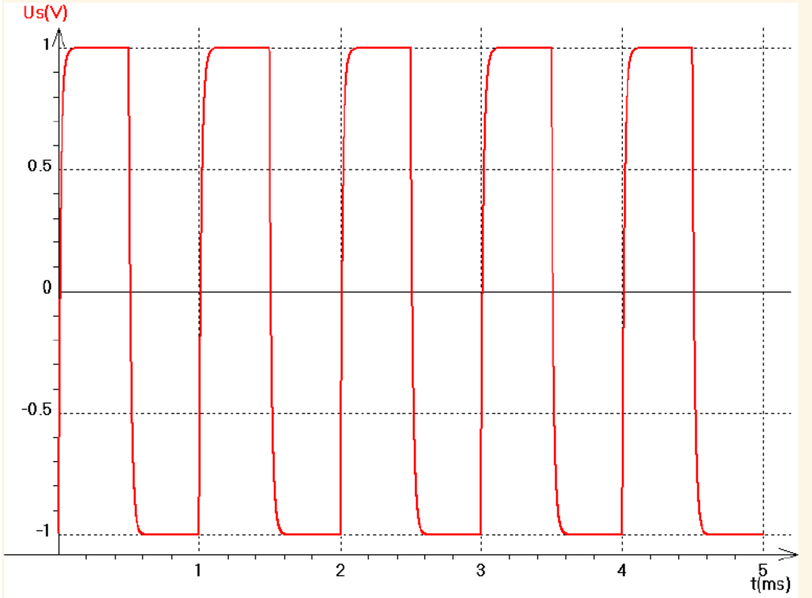
Pour fixer les idées on regarde la réponse d'un filtre passe-bas à un signal carré.
La réponse va dépendre de la valeur de la période $T = 2\pi/\omega$ du signal par rapport à la valeur de la pulsation caractéristique du filtre ω_0
Il faut noter que la valeur moyenne de e(t) a une pulsation nulle, elle est rejetée à l'infini à gauche de l'échelle logarithmique.

Trois cas se présentent :

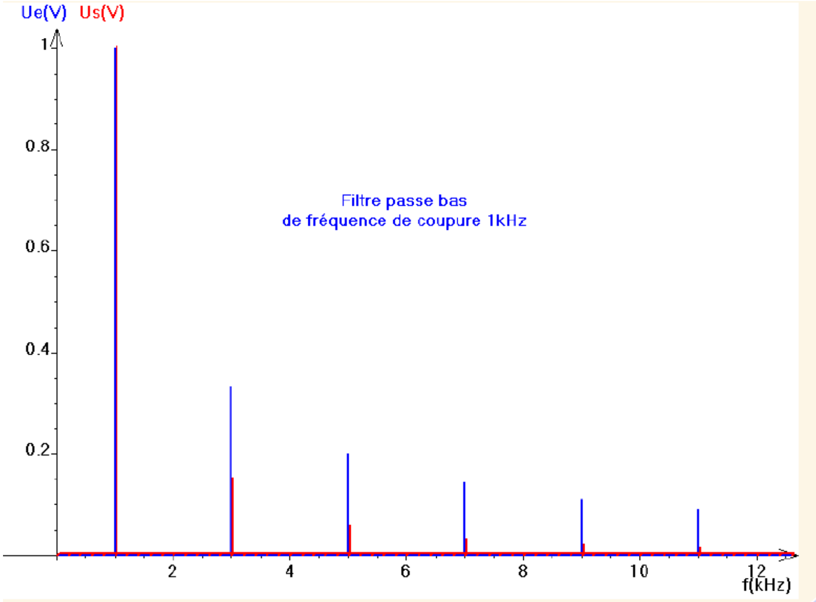
• $\omega= 2\pi/T<<\omega_0$ le spectre du signal carré est entièrement contenu dans la zone passante du filtre. Le signal de sortie sera très ressemblant au signal d'entrée. Plus $\omega= 2\pi/T$ est faible devant ω_0 et plus le nombre d'harmoniques qui « passent » est important et plus le signal de sortie tend vers un signal carré.

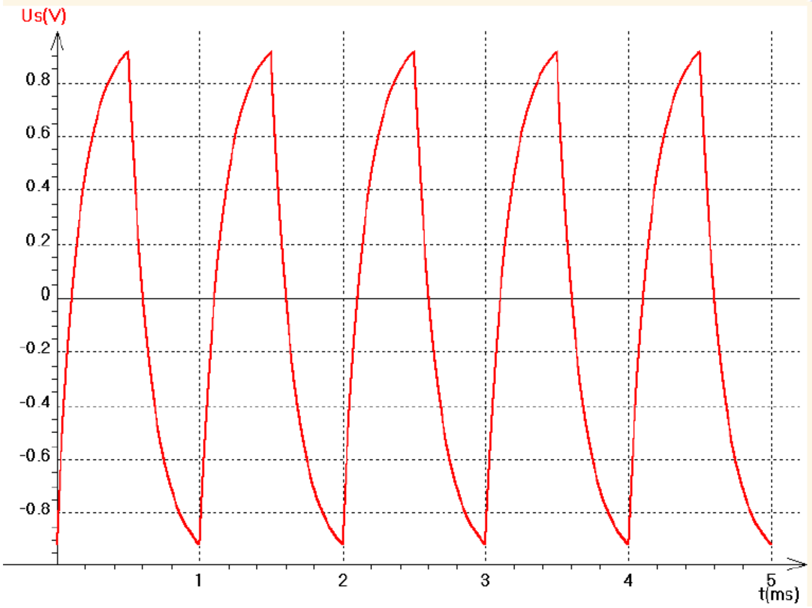




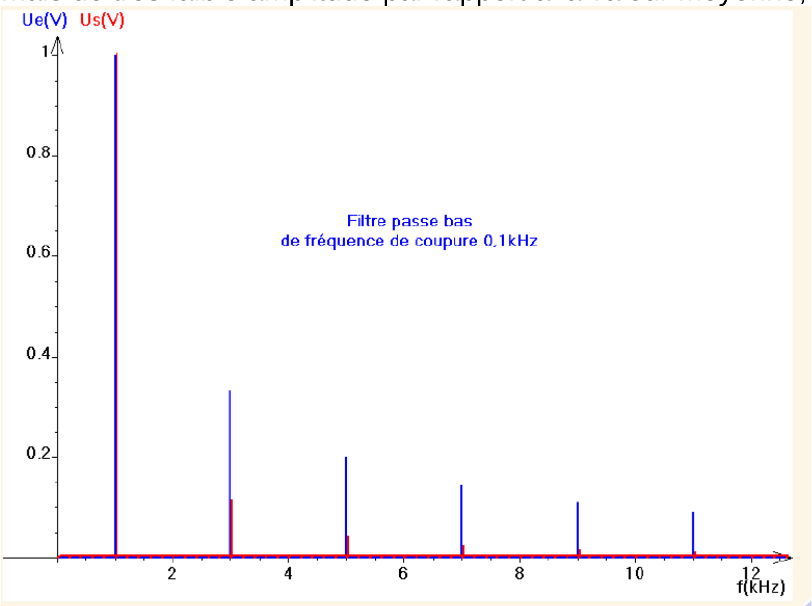


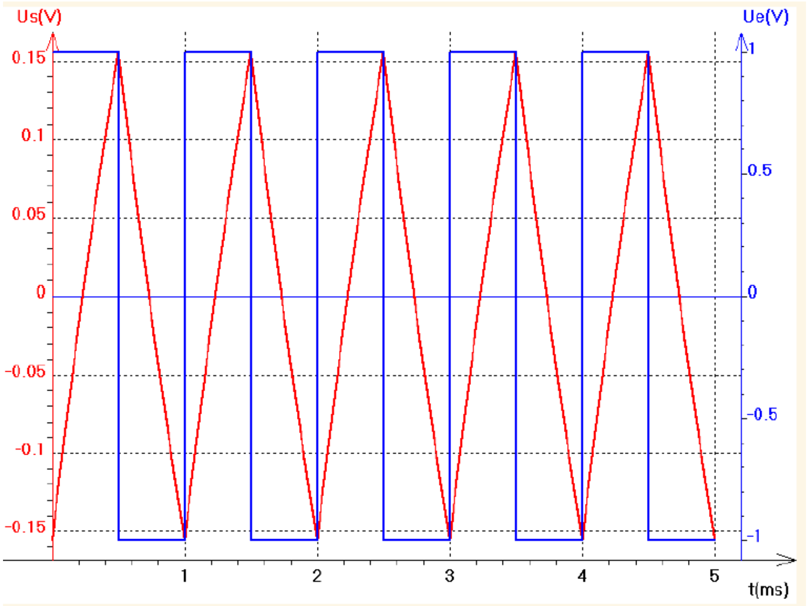
• $\omega = 2\pi/T \approx \omega_0$ c'est une zone de transition une partie seule du signal d'entrée est filtrée.





• $\omega = 2\pi/T >> \omega_0$ à part la valeur moyenne, le spectre du signal carré est entièrement contenue dans la zone à -20dB/déca du filtre où le signal est intégré. On observe une triangularisation du signal de sorti, mais de très faible amplitude par rapport à la valeur moyenne, on réalise ainsi un moyenneur.



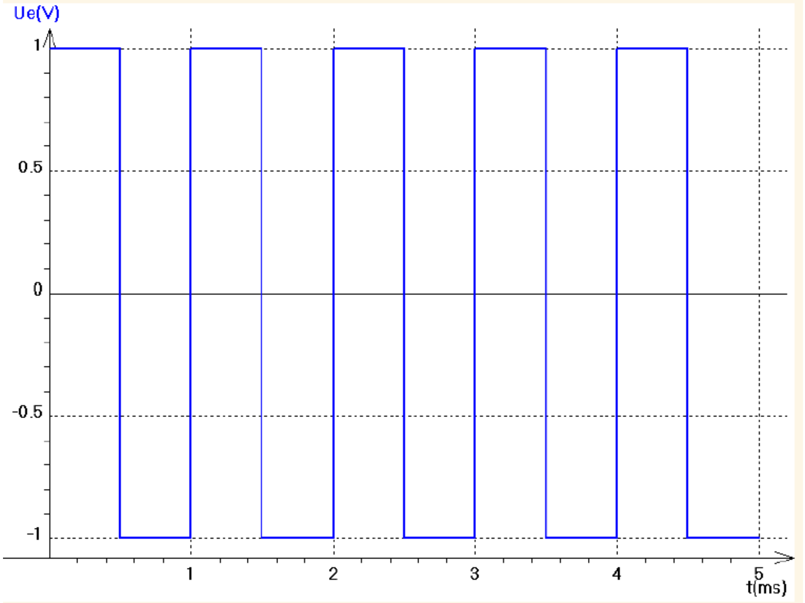


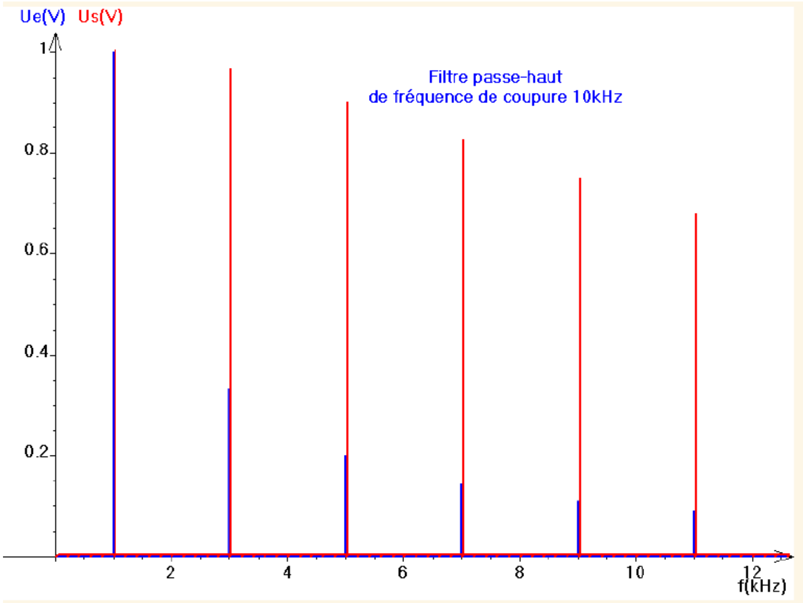
III.3. Filtre passe-haut

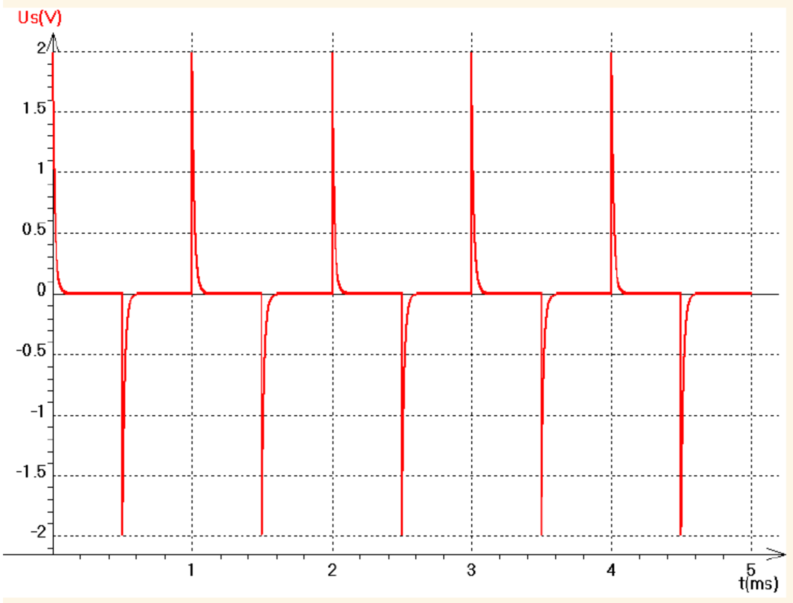
Soit la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$

Pour fixer les idées on regarde la réponse d'un filtre passe-haut à un signal carré.
La réponse va dépendre de la valeur de la période $T = 2\pi/\omega$ du signal par rapport à la valeur de la pulsation caractéristique du filtre ω_0
Il faut noter que la valeur moyenne de e(t) a une pulsation nulle, elle est rejetée à l'infini à gauche de l'échelle logarithmique, elle sera maintenant complétement éliminée.

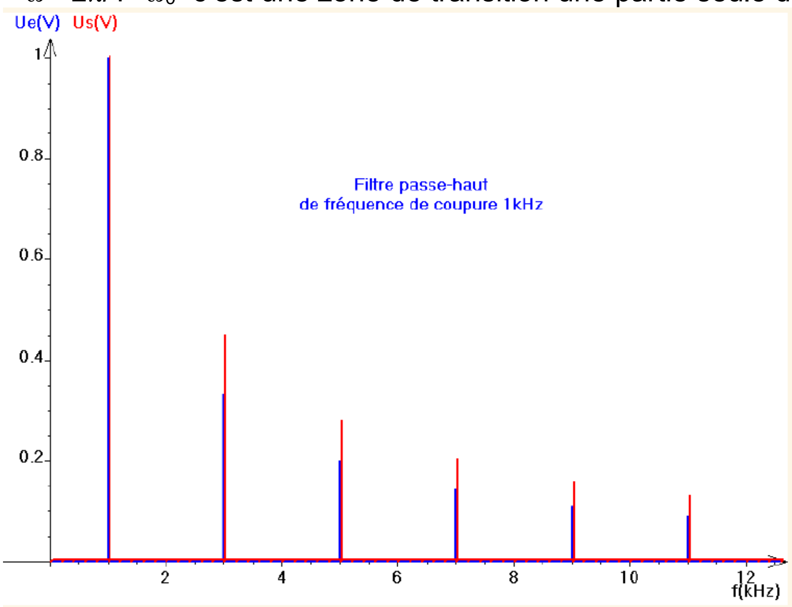
Trois cas se présentent :
• $\omega = 2\pi/T << \omega_0$ le spectre du signal carré est entièrement contenue dans la zone à +20dB/déca. On observe un signal de sortie qui présente de brusques variations.

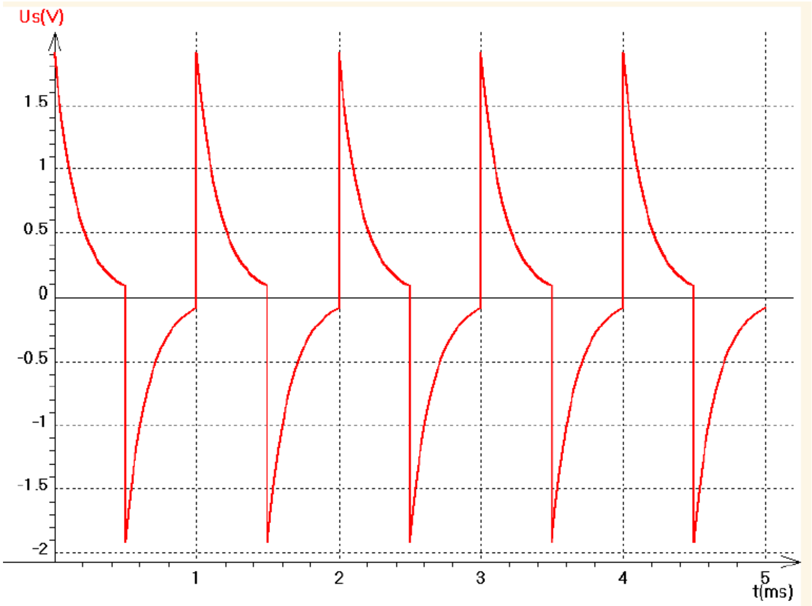




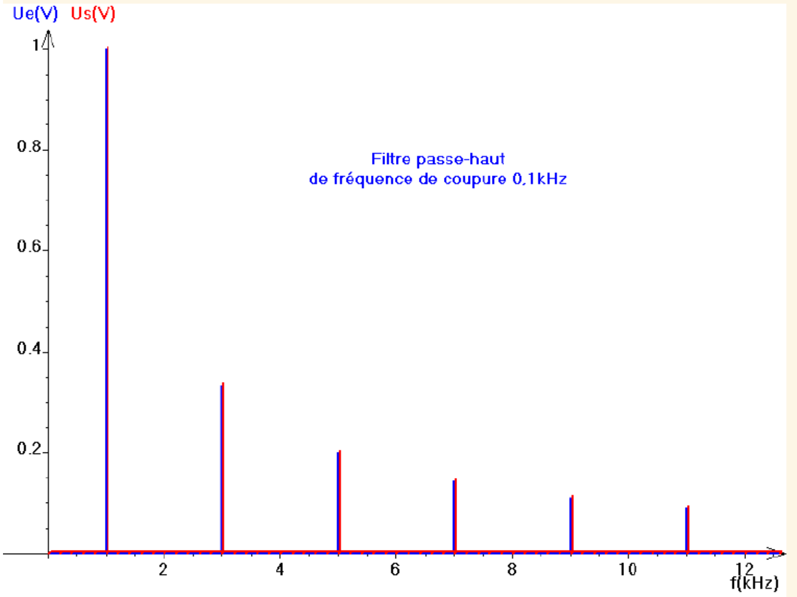


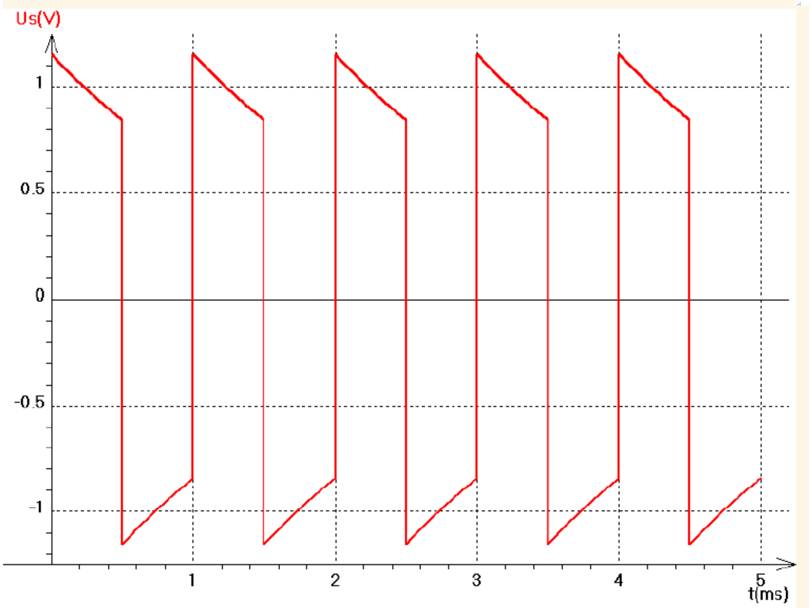
• $\omega = 2\pi/T \approx \omega_0$ c'est une zone de transition une partie seule du signal d'entrée est filtrée.





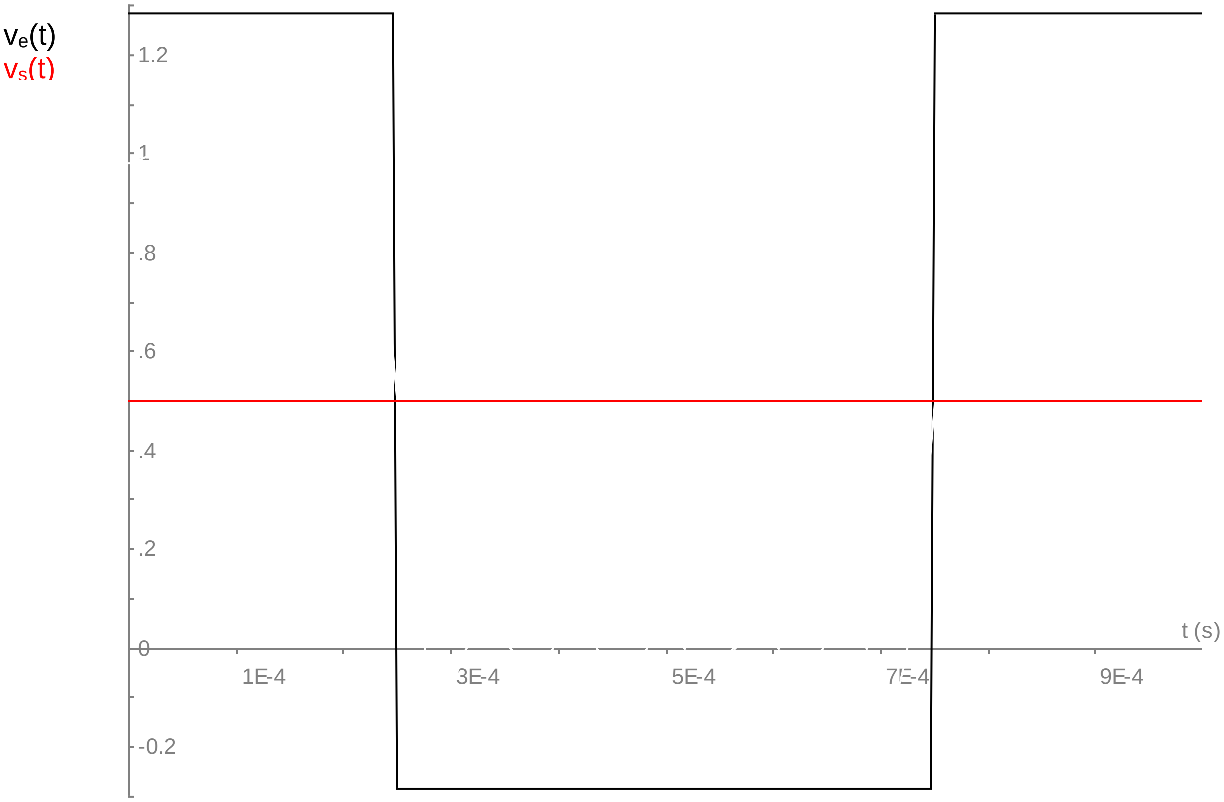
• $\omega = 2\pi/T >> \omega_0$ le spectre du signal carré est entièrement contenue dans la zone passante du filtre. Le signal de sortie sera différent du signal d'entrée car il n'y a plus la valeur moyenne.

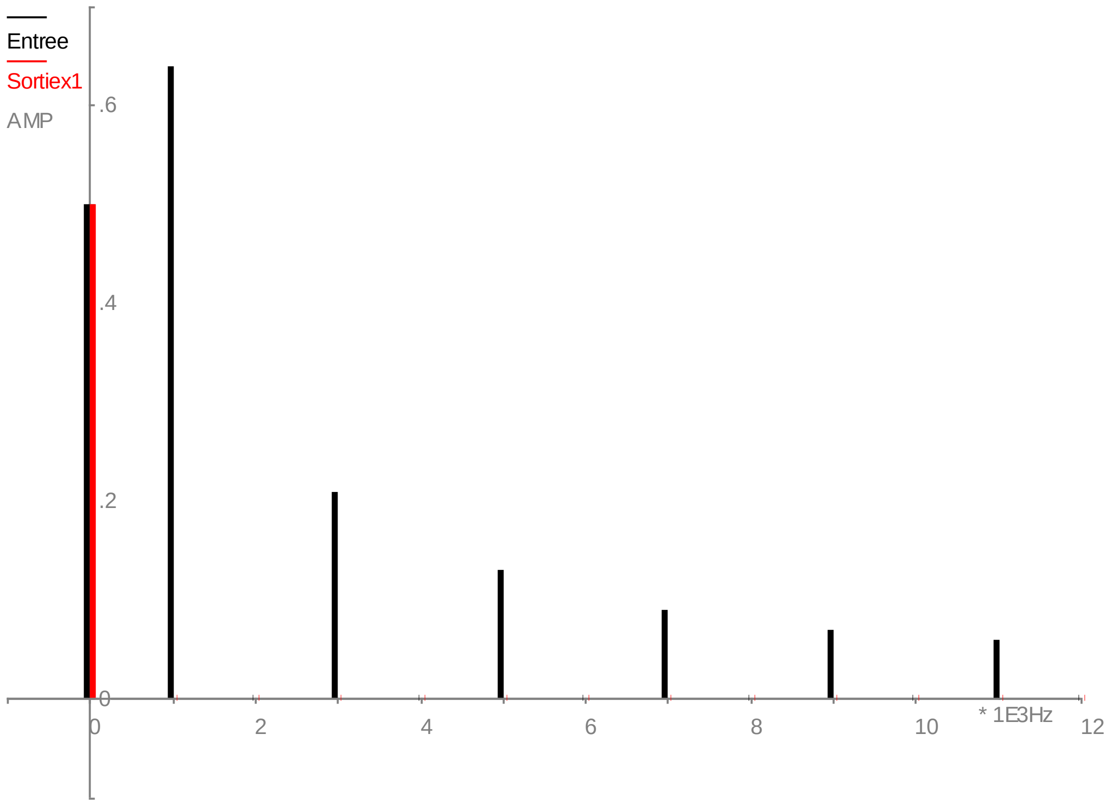




III.4. Réalisation d'un moyenneur

Soit un signal périodique dont on cherche la valeur moyenne. On sait que la valeur moyenne correspond à la valeur de la tension quand la fréquence est nulle. Pour la mesurer, on utilise un filtre passe-bas de fréquence de coupure extrêmement basse : il ne va laisser passer que les signaux continus.
Exemple $v_e(t)$ est un signal carré de fréquence 1kHz d'amplitude 0.8 V et de composante continue 0.5V.
On regarde la réponse d'un filtre passe-bas de fréquence de coupure 1Hz.





EL7 : FILTRAGE LINEAIRE