

Devoir surveillé n°3

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Une équation différentielle.

L'objectif de ce problème est de déterminer toutes les fonctions f deux fois dérivables sur \mathbb{R} telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(-x) = x + \cos(x). \quad (\mathcal{E})$$

I – Questions préliminaires :

- 1) Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle :

$$y'' + y = \cos(x). \quad (\mathcal{E}_1)$$

- 2) Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle :

$$y'' - y = x. \quad (\mathcal{E}_2)$$

II – Analyse :

Soit f une solution de (\mathcal{E}) . On considère les fonctions g et h définies sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

- 3) Que peut-on dire de la parité de g et de h ? Exprimer f en fonction de g et h .
- 4)
 - a) Établir que la fonction g est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle (\mathcal{E}_1) .
 - b) En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \alpha \cos x + \frac{1}{2}x \sin(x)$.
- 5)
 - a) Établir que la fonction h est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle (\mathcal{E}_2) .
 - b) En déduire qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \beta \operatorname{sh} x - x$.
- 6) Déduire des questions précédentes la forme nécessaire de la fonction f .

III – Synthèse :

- 7) Vérifier réciproquement que toutes les fonctions f obtenues précédemment sont bien solutions de l'équation (\mathcal{E}) et donner l'ensemble des solutions de (\mathcal{E}) .

II. Étude d'une homographie.

Dans tout le problème, on confondra le complexe z et le point du plan d'affixe z .
 a, b, c, d étant quatre complexes deux à deux distincts, on définit le birapport :

$$B(a, b, c, d) = \frac{a - c}{a - d} \times \frac{b - d}{b - c}.$$

Préliminaire : lien entre le birapport et la cocyclicité.

On rappelle le théorème de l'angle au centre :

« Soit A, B et C trois points deux à deux distincts et \mathcal{C} un cercle de centre Ω , passant par A et B . Le point C est sur \mathcal{C} si et seulement si $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) = 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) [2\pi]$ ».

Soit a, b, c, d quatre nombres complexes, représentant respectivement les points A, B, C et D du plan. On montre dans cette partie que le birapport de ces quatre points est réel si et seulement si ces points sont alignés ou cocycliques (*i.e.*, appartiennent à un même cercle).

- 1)
 - a) Exprimer l'argument de $B(a, b, c, d)$ comme une différence d'angle faisant intervenir les points A, B, C, D .
 - b) Montrer que si A, B, C et D sont alignés, alors $\arg(B(a, b, c, d)) = 0[\pi]$.
 - c) Montrer que si A, B, C et D sont cocycliques, alors $\arg(B(a, b, c, d)) = 0[\pi]$.
 - d) Que peut-on donc conclure ?
- 2) Réciproquement, supposons que $B(a, b, c, d) \in \mathbb{R}$.
 - a) Que peut-on dire si A, C et D sont alignés ?
 - b) Sinon, montrer que A, B, C et D sont cocycliques.

Partie principale : étude d'une homographie.

On pose $E = \mathbb{C} \setminus \{i, 1\}$. On définit $f : E \rightarrow E$ par :

$$z \mapsto \frac{z+i}{z-i}$$

Si A est un ensemble, on note $f(A)$ l'image directe de A par f . C'est l'ensemble des images des éléments de A par f , soit $\{f(z) \mid z \in A\}$.

- 3)
 - a) Montrer : $\forall z \in E, f(z) \in E$.
 - b) Montrer que pour tout élément z' de E , il existe un unique $z \in E$ vérifiant $z' = f(z)$. Exprimer alors ce z en fonction de z' . On dit alors que f est bijective et l'on vient de trouver l'expression de sa réciproque.
 - c) Calculer $(f \circ f)(z)$ et en déduire que $f \circ f \circ f = Id_E$.
- 4)
 - a) Démontrer que $f(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{U} \cap E$, où \mathbb{U} est le cercle unité de \mathbb{C} .

- b) Soient $P = \{z \in E \mid \operatorname{Im}(z) < 0\}$ et $D = \{z \in E \mid |z| < 1\}$. Démontrer que $f(P) = D$.
- 5) Soient a, b, c, d quatre éléments distincts de E et a', b', c', d' leurs images par f .
- a) Montrer : $\frac{a' - c'}{a' - d'} = \frac{a - c}{a - d} \times \frac{d - i}{c - i}$.
- b) En déduire : $B(a', b', c', d') = B(a, b, c, d)$.
- c) Que peut-on en déduire si a, b, c, d sont cocycliques ou alignés ?
- d) Montrer que a, c, d sont alignés si et seulement si $a', 1, c', d'$ sont cocycliques ou alignés.
- 6) a) Déterminer les complexes de E tels que $f(z) = z$.
On trouvera deux solutions distinctes que l'on notera α et β avec $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$.
- b) Vérifier : $\frac{\beta - i}{\alpha - i} = j^2$ avec $j = \exp(\frac{2i\pi}{3})$.
- c) Soient $z \in E \setminus \{\alpha, \beta\}$ et $z' = f(z)$.
Montrer : $z' \neq \alpha, z' \neq \beta$.
Etablir $\frac{z' - \alpha}{z' - \beta} = j^2 \frac{z - \alpha}{z - \beta}$.

7) Construction géométrique de l'image d'un point

On note Δ la médiatrice de $[\alpha, \beta]$.

- a) Montrer que $f(\Delta \cap E) = \Delta \cap E$.
Indication : utiliser le résultat de la question précédente.
- b) Montrer que Δ est la droite passant par 1 et i .
- c) Montrer que $\forall z \in E, z \in \Delta \iff f(z) \in \Delta$.
- d) Soit $z \in \Delta \cap E$ et $z' = f(z)$.
Montrer que $(\overrightarrow{z\alpha}, \overrightarrow{zi}) = (\overrightarrow{z'i}, \overrightarrow{z'\beta}) [2\pi]$ et $(\overrightarrow{z'\alpha}, \overrightarrow{z'i}) = (\overrightarrow{z'i}, \overrightarrow{z'\beta}) [2\pi]$.
En déduire que les mesures des angles orientés entre les droites $((\alpha z), (\alpha z'))$ et $((\beta z), (\beta z'))$ valent respectivement $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$ (modulo π).
- e) Soit $z \in E$ tel que α, z, β ne soient pas alignés.
Alors les droites (αz) et (βz) coupent Δ en deux points distincts a, b de E .
Expliquer comment construire géométriquement $a' = f(a)$ et $b' = f(b)$ puis $z' = f(z)$.
Indication : on pourra utiliser le résultat de la question 5)d).
Réaliser cette construction pour $z = \frac{1}{2}$ (unité 5cm).

— FIN —