# 2 - Orthogonalité et théorème de Pythagore

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev, muni d'1 p.s. $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et $\| \cdot \|$ la norme associée.

<u>Déf</u> : Soit $x, y \in E$.

- $x$ est dit <u>unitaire</u> ou <u>normé</u> si $\|x\| = 1$.
- $x$ et $y$ sont <u>orthogonaux</u> si $\langle x | y \rangle = 0$.

  On note alors : $x \perp y$.

<u>Rq</u> : • le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de $E$.

- Soit $x \in E$ tq : $\forall y \in E$, $x \perp y$.

en particulier : $x \perp x$ donc : $\langle x | x \rangle = 0$

donc : $\|x\| = 0$ et donc $x = 0$.

- Si $x \in E \setminus \{0\}$, $\frac{x}{\|x\|}$ est unitaire :

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \left| \frac{1}{\|x\|} \right| \times \|x\| = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1.$$

de même : $-\frac{x}{\|x\|}$ est unitaire.

Ces 2 vecteurs sont les seuls vecteurs unitaires colinéaires à $x$.

- Sur $\mathbb{R}^2$ : $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$

donc $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ pour le p.s. usuel.

Si nous définissons :

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 x_2 + 4 y_1 y_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1$$

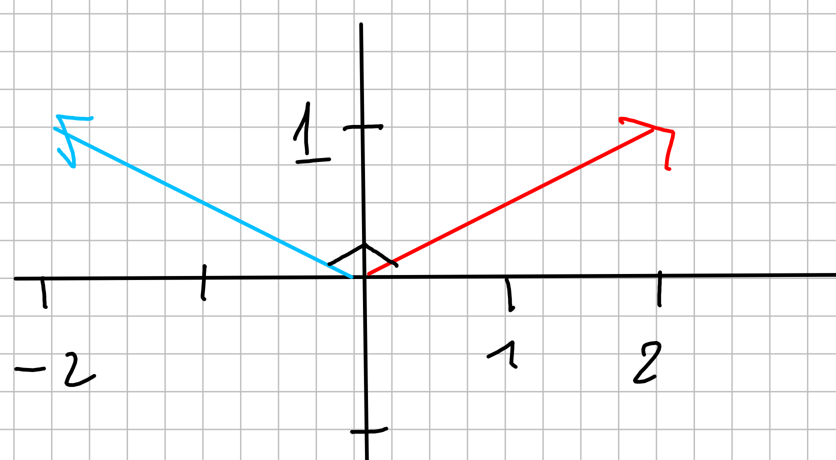
Alors : $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle = 12 - 48 - 8 + 18$

$= -26 \neq 0.$

Mais : $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -4 + 4 + 2 - 2$

$= 0$

donc : $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$



**Def** : Soit $x_1 \dots x_p \in E$, la famille $(x_1 \dots x_p)$ est dite orthogonale si :

$$\forall i, j \in [\![1, p]\!], \quad i \neq j \Rightarrow x_i \perp x_j .$$

**Ex** : • $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$w = u \wedge v = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 1 & 0 & c \end{pmatrix} = a \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

La famille $(u, v, w)$ est orthogonale.

- Soit $E = \mathcal{C}([0,2\pi], \mathbb{R})$

$\forall n \in \mathbb{N}$ : $f_n : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \cos(nx)$.

le p.s. considéré est le p.s usuel : $\langle f | g \rangle = \int_0^{2\pi} fg$.

Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est 1 famille $\perp$ de $E$.

Soit $n, m \in \mathbb{N}$ tq. $n \neq m$.

$$\langle f_n | f_m \rangle = \int_0^{2\pi} \cos(nx) \times \cos(mx)\, dx$$

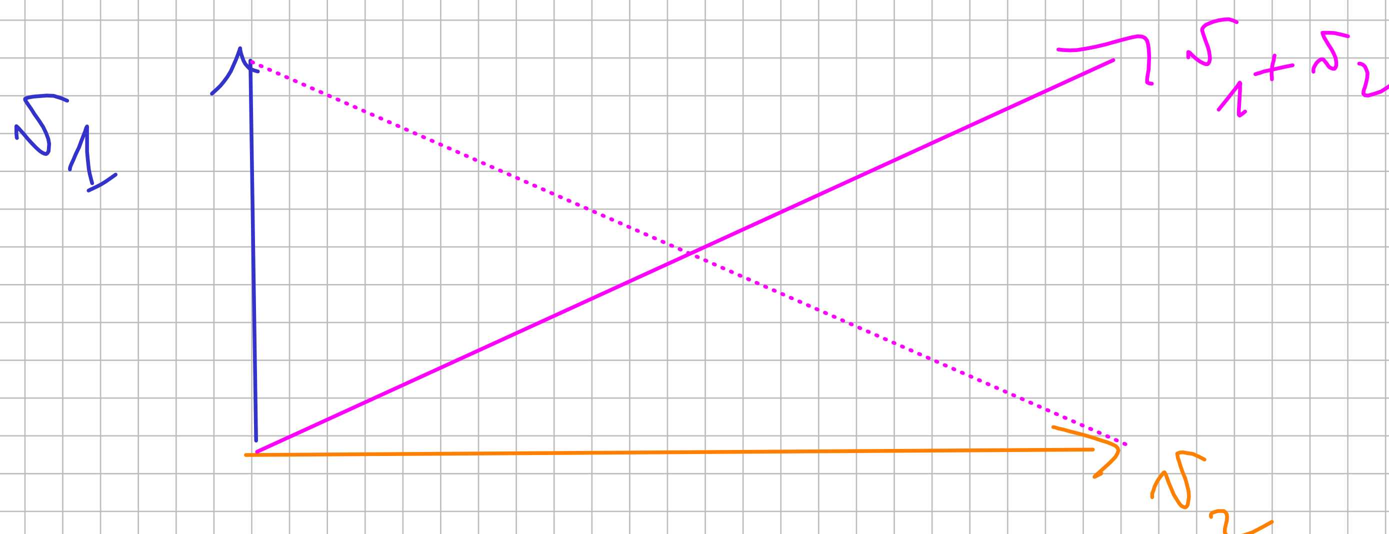
$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((\underbrace{n+m}_{\in \mathbb{N}^*})x) + \cos((\underbrace{n-m}_{\in \mathbb{Z}^*})x)\, dx$$

$$= 0.$$

**Th. de Pythagore :** Soit $v_1 \dots v_n \in E$,

tq. $(v_1, \dots, v_n)$ est orthogonale.

Alors : $$\left\| \sum_{k=1}^{n} v_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|v_k\|^2 .$$




**Dém :** $$\left\langle \sum_{k=1}^{n} v_k \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} v_j \right\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\langle v_k \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} v_j \right\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle v_k | v_j \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \langle v_k | v_k \rangle \qquad (\text{car si } j \neq k,\ \langle v_k | v_j \rangle = 0)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \| v_k \|^2 .$$

<u>Prop:</u> Une famille $\perp$ ne comportant pas le vecteur nul, est libre.

<u>Démo:</u> Soit $(x_1 \dots x_n)$ une famille $\perp$,

tq. $\forall i,\ x_i \neq 0$.

Soit $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ tq. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$

alors : $0 = \langle x_1 \mid \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i}_{=0} \rangle$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x_1 \mid x_i \rangle$$

$$= \lambda_1 \underbrace{\|x_1\|^2}_{\neq 0} \qquad (\text{car si } i \neq 1, \langle x_i \mid x_1 \rangle = 0)$$

donc $\lambda_1 = 0$.

De même : $\forall i, \lambda_i = 0$.

Cor : Si $E$ est de dim finie $n$, et si $(x_1 \dots x_n)$ est $\perp$ ne contenant pas le vect nul, alors cette famille est 1 base.