3.1 (fin) et 3.2 (début) - formule de changement de base et orientation

Formule de changement de base pour le déterminant

Ex: $\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (e_1, e_2)$

$\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = (f_1, f_2)$

$X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$X_1 = 3e_1 + e_2 = 7f_1 - 2f_2$

$X_2 = e_1 + e_2 = 3f_1 - f_2$

$$\det_{\mathcal{B}_1}(X_1, X_2) = 3 \times 1 - 1 \times 1 = 2$$

$$\det_{\mathcal{B}_2}(X_1, X_2) = 7 \times (-1) - (-2) \times 3$$
$$= -1$$

Th. 3.1.7 : (i) Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

Soit $\mathcal{F}$ 1 famille de vecteurs de E, tq. $\# \mathcal{F} = \dim E$.

Alors : $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{F})$.

Démo : rappel : si $f \in A_n(E)$, $f = f(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}$

Or $\det_{\mathcal{B}} \in A_n(E)$ donc : $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' \times \det_{\mathcal{B}'}$.

il reste à appliquer cette égalité à $\mathcal{F}$.

Th. 3.1.7 (ii) Soit $\mathcal{B}$ 1 base de E et $\mathcal{F}$ 1 famille de E. ($\# \mathcal{F} = \dim E$).

$\mathcal{F}$ est une base de E ssi $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{F} \neq 0$

et si c'est le cas :

$$\det_{\mathcal{B}} \mathcal{F} = \frac{1}{\det_{\mathcal{F}} \mathcal{B}} .$$

Dém :

- Si $\mathcal{F}$ n'est pas 1 base, elle est liée car $\# \mathcal{F} = \dim E$.

  alors, $\det_{\mathcal{B}} \in \mathcal{A}_n(E)$ donc $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = 0$

- si $\mathcal{F}$ est 1 base :

  alors : $\det_{\mathcal{F}} \mathcal{F} = 1$

  avec (i) : $1 = \det_{\mathcal{F}} \mathcal{F} = \det_{\mathcal{F}} \mathcal{B} \times \det_{\mathcal{B}} \mathcal{F}$

Ex : $\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = (e_1, e_2)$

$\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}\right) = (f_1, f_2)$

$X_1 = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\det_{\mathcal{B}_1}(X_1, X_2) = 2$

$\det_{\mathcal{B}_2}(X_1, X_2) = -1$

Vérifions que : $\det_{\mathcal{B}_1}(X_1, X_2) = \det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) \times \det_{\mathcal{B}_2}(X_1, X_2)$

$f_1 = e_1 - e_2 \; ; \; f_2 = 2e_1 - 4e_2$

donc : $\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) = 1 \times (-4) - (-1) \times 2$

$= -2$

Or : $2 = (-2) \times (-1)$: ☺ .

3.2 : Orientation d'1 evEde dim finie :

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ 2 bases :

$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$ donc : $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' < 0$

ou $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' > 0$.

Déf : Nous dirons que $\mathcal{B} \mathcal{R} \mathcal{B}'$

si : $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$.

Prop : $\mathcal{R}$ est 1 relation d'équivalence.

Démo :

- $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1 > 0$, $\mathcal{B} \mathcal{R} \mathcal{B}$

- Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ tq. $\mathcal{B} \mathcal{R} \mathcal{B}'$.

$$\det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B} = \frac{1}{\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'} > 0$$

et : $\mathcal{B}' \mathcal{R} \mathcal{B}$.

- Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ tq. $\begin{cases} \mathcal{B} \mathcal{R} \mathcal{B}' & (1) \\ \mathcal{B}' \mathcal{R} \mathcal{B}'' & (2) \end{cases}$

$$\det_{\mathcal{B}} (\mathcal{B}'') = \underbrace{\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'}_{>0} \times \underbrace{\det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B}''}_{>0}$$

$$> 0$$

et $\mathcal{B} \mathcal{R} \mathcal{B}''$.

Prop : $\mathcal{R}$ a 2 classes d'équivalence.

Rappel : la cl. d'éq. de $\mathcal{B}$
est l'ens. $\{\mathcal{B}' \text{ base } \mid \det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' > 0\}$

Dém : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ 1 base.

- la classe de $\mathcal{B}$ est une 1ère cl. d'éq.
- $\mathcal{B}' = (-e_1, e_2, \dots, e_n)$.

$$\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' = \det_{\mathcal{B}} (-e_1, e_2 \dots e_n)$$
$$= -\det_{\mathcal{B}} (e_1, e_2 \dots e_n)$$
$$= -\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B} = -1 < 0$$

dc $\mathcal{B}' \notin$ cl. éq. de $\mathcal{B}$,

dc : $cl(\mathcal{B}') \neq cl(\mathcal{B})$.

Il y a au moins 2 cl. d'éq.

- Soit $\mathcal{B}''$ tq. $\mathcal{B}'' \not{\mathcal{R}}\, \mathcal{B}$.

$$\underbrace{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'')}_{<0} = \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')}_{<0} \times \underbrace{\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'')}_{>0}$$

dc : $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'') > 0$, dc : $\mathcal{B}'' \mathcal{R} \mathcal{B}'$.

il y a dc au + 2 cl. éq.

<u>Déf</u> : "Orienter" E, c'est choisir une base de référence $\mathcal{B}$.

Si $\mathcal{B}'$ est 1 base :

- soit $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' > 0$: $\mathcal{B}'$ a la même orientation que $\mathcal{B}$.
- soit $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' < 0$: $\mathcal{B}'$ a 1 orientation inverse de celle de $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}$ est par convention <u>directe</u>.

Si $\mathcal{B}' \mathcal{R} \mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ est aussi directe

Si $\mathcal{B}' \not\mathcal{R} \mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ est indirecte.

Ex : Si $\mathcal{C}$, la base canonique, est directe :

soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right)$

alors : $\det_{\mathcal{C}} \mathcal{B}_1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 > 0$

dc $\mathcal{B}_1$ est directe.