Devoir à la maison n° 12

À rendre le 02 février

I. Règle de L'Hôpital

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

1) Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a, b]$.

2) Montrer qu'il existe un nombre réel $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Indication : on pourra considérer l'application $h : x \mapsto f(x) - pg(x)$, où $p = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

3) De la même manière, montrer que pour tout $y \in]a, b[$, il existe un élément $c(y) \in]y, b[$ tel que

$$\frac{f(y) - f(b)}{g(y) - g(b)} = \frac{f'(c(y))}{g'(c(y))}.$$

4) On suppose que $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[\substack{x \to b \\ x < b}]{} \ell$, où ℓ est un nombre réel. Montrer que

$$\frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} \xrightarrow[\substack{x \to b \\ x < b}]{} \ell.$$

Ce résultat est connu sous le nom de « Règle de l'Hôpital ».

5) *Application :* Calculer la limite à gauche en 1 de $x \mapsto \dfrac{\mathrm{Arccos} x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

II. Factorisation d'un polynôme

Soit le polynôme $P = X^6 - 5X^4 + 8X^3 - 9X^2 + aX + b$, où a et b sont, pour l'instant, deux réels indéterminés.

1) Déterminer a et b pour que 1 soit racine multiple de P.

Désormais a et b auront ces valeurs.

2) Quel est alors l'ordre de multiplicité k de 1 comme racine de P ?

3) Vérifier ce résultat en effectuant la division euclidienne de P par $(X - 1)^k$ pour les valeurs a et b trouvées. Préciser la valeur du quotient Q.

4) En déduire les factorisations de Q puis de P en produit d'irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ puis sur $\mathbb{C}[X]$.

5) Montrer, successivement mais sans calcul, que $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ et $P^{(3)}$ possède chacun au moins une racine réelle dans l'intervalle ouvert $]-3, 1[$.

— **FIN** —