XVI Fractions rationnelles

2 juillet 2020

Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Nous allons étudier un nouveau corps : $\mathbb{K}(X)$, qui est le corps des *fractions rationnelles*. Sa construction est hors-programme, mais on peut mentionner que l'on obtient $\mathbb{K}(X)$ à partir de $\mathbb{K}[X]$ de la même manière que l'on obtient $\mathbb{Q}$ à partir de $\mathbb{Z}$: on rajoute de nouveaux éléments qui seront les inverses pour la loi $\times$ de tous les éléments non nuls, c'est-à-dire que l'on introduit les éléments $\dfrac{1}{P}$, où $P \in \mathbb{K}[X] \backslash \{0\}$. Ainsi, $\mathbb{K}(X)$ est le corps contenant les fractions de polynômes.

1. Corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(X)$.

1.1. Définitions.

La construction de l'ensemble des fractions rationnelles étant hors-programme, on introduit celui-ci de façon axiomatique.

Définition 1.1.1.
Il existe un ensemble $\mathbb{K}(X)$ vérifiant :

(i) À tout couple $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $B \neq 0$, on peut associer un élément de $\mathbb{K}(X)$ noté $\dfrac{A}{B}$;

(ii) Réciproquement, tout élément de $\mathbb{K}(X)$ s'écrit $\dfrac{A}{B}$, avec $A, B \in \mathbb{K}[X]$, $B \neq 0$;

(iii) Si $A, B, C, D \in \mathbb{K}[X]$ tels que B et D soient non nuls, on a : $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D} \Leftrightarrow AD = BC$.

Cette définition permet de donner sans ambiguïté tous les éléments de $\mathbb{K}(X)$: ce n'est qu'une définition ensembliste.
Cet ensemble est appelé *l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans* $\mathbb{K}$.

L'écriture (ii) n'est pas unique !

Remarque 1.1.2.
Remarquons que cette définition dit notamment que pour toute fraction rationnelle $\dfrac{A}{B}$ et tout polynôme non nul C, les fractions rationnelles $\dfrac{AC}{BC}$ sont égales (en effet $AC \times B = A \times BC$).

Définition 1.1.3.
Soit $R \in \mathbb{K}(X)$, un couple $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $R = \dfrac{A}{B}$ est appelé *représentant* de la fraction rationnelle R.

Passons maintenant à des définitions algébriques.

Définition 1.1.4 (Lois sur $\mathbb{K}(X)$)**.**
On définit trois lois sur $\mathbb{K}(X)$, les deux premières sont des lois internes, la troisième est une loi externe.

Addition $+ : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}(X) \times \mathbb{K}(X) & \longrightarrow & \mathbb{K}(X) \\ \left(\dfrac{A}{B}, \dfrac{C}{D}\right) & \longmapsto & \dfrac{AD + BC}{BD} \end{array} \right.$

Produit $\times : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}(X) \times \mathbb{K}(X) & \longrightarrow & \mathbb{K}(X) \\ \left(\dfrac{A}{B}, \dfrac{C}{D}\right) & \longmapsto & \dfrac{AC}{BD} \end{array} \right.$

Multiplication par un scalaire
$\cdot : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{K}(X) & \longrightarrow & \mathbb{K}(X) \\ \left(\lambda, \dfrac{A}{B}\right) & \longmapsto & \dfrac{\lambda A}{B} \end{array} \right.$

Alors $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps.
De plus, tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ s'identifie à l'élément $\dfrac{P}{1}$ de $\mathbb{K}(X)$. Cette identification permet de considérer $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ comme un sous-anneau de $(\mathbb{K}(X), +, \times)$.
Le neutre de la loi $+$ et 0, celui de la loi $\times$ est 1. L'opposé de $\dfrac{A}{B}$ et $\dfrac{-A}{B}$, son inverse est $\dfrac{B}{A}$.

Remarque 1.1.5.
On verra bientôt que $(\mathbb{K}(X), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration.
Les définitions ci-dessus sont a priori ambiguës : par exemple lorsqu'on veut additionner deux fractions rationnelles R_1 et R_2, on dispose de plusieurs représentants pour R_1 et de plusieurs représentants pour R_2 (il y en a

même une infinité). Lesquels choisir pour appliquer la définition ? On peut en fait montrer que le résultat ne dépend pas du choix des représentants. En effet, considérons deux représentants $\frac{A_1}{B_1}$ et $\frac{C_1}{D_1}$ pour R_1 et deux représentants $\frac{A_2}{B_2}$ et $\frac{C_2}{D_2}$ pour R_2.

On a $A_iD_i = B_iC_i$ pour $i = 1, 2$. Montrons alors qu'on a $\frac{A_1B_2 + A_2B_1}{B_1B_2} = \frac{C_1D_2 + C_2D_1}{D_1D_2}$.

Il suffit de remarquer qu'on a successivement :

$$\begin{aligned}(A_1B_2 + A_2B_1)D_1D_2 &= (A_1D_1)B_2D_2 + (A_2D_2)B_1D_1\\ &= (B_1C_1)B_2D_2 + (B_2C_2)B_1D_1\\ &= (C_1D_2 + C_2D_1)B_1B_2\end{aligned}$$

On a aisément de même $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{C_1C_2}{D_1D_2}$ et $\frac{\lambda A_1}{B_1} = \frac{\lambda C_1}{D_1}$.

On procède de même (mais plus simplement) pour le produit et la multiplication scalaire. □

1.2. Fonctions rationnelles.

Définition 1.2.1.
Soit $R \in \mathbb{K}(X)$. On appelle *forme irréductible* de R toute écriture de R de la forme $R = \frac{P}{Q}$ avec $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P \wedge Q = 1$.

Exemple 1.2.2.
$\frac{X^2 - 1}{X(X-1)}$ n'est pas irréductible, mais $\frac{X+1}{X}$ l'est.

Remarque 1.2.3.
Il existe une infinité de formes irréductibles : ainsi $\frac{1}{X}$, $\frac{2}{2X}$ et $\frac{3}{3X}$ sont trois formes irréductibles d'une même fraction rationnelle.

Cependant, si $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$ sont deux formes irréductibles d'une même fraction rationelle, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ vérifiant $C = \lambda A$ et $D = \lambda B$. (en effet, on a alors $AD = BC$ donc $D|BC$ or D et C sont premiers entre eux, donc D divise B ; de même $B|AD$ donc $B|D$, B et D sont donc associés, il existe donc λ non nul vérifiant $D = \lambda B$, donc $\lambda AB = BC$, or $B \neq 0$ donc $C = \lambda A$).

Définition 1.2.4.
Soient $R \in \mathbb{K}(X)$ et $\frac{A}{B}$ ***une*** forme irréductible de R. Alors si $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont les fonctions polynômiales associées à A et B, on appelle *fonction rationnelle associée à R* la fonction $\tilde{R}$: $\begin{array}{ccc}\mathbb{K}\setminus\mathscr{A} & \to & \mathbb{K}\\ x & \mapsto & \frac{\tilde{A}(x)}{\tilde{B}(x)}\end{array}$, où $\mathscr{A}$ est l'ensemble des racines de B.

Remarque 1.2.5.
1. Ce problème du domaine de définition explique pourquoi l'on travaille avec des formes irréductibles : avec une forme réductible, le domaine de définition serait encore plus restreint (et en tout cas différent, donc pas très pratique), car le dénominateur aurait encore plus de racines. Par exemple, pour $R = 1$ si l'on écrit $R = \frac{X}{X}$, la fonction rationnelle associée ne serait pas définie en 0, ce qui est idiot pour une fonction constante.
2. La remarque 1.2.3 permet de conclure que $\tilde{R}$ ne dépend pas de la forme irréductible choisie.

Proposition 1.2.6.
Soient R_1, R_2 deux fractions rationnelles. Alors $R_1 = R_2 \Leftrightarrow \tilde{R}_1 = \tilde{R}_2$.

Démonstration.
Le sens direct découle des propriétés de l'égalité en mathématiques.

Étudions le sens indirect : on note $R_1 = \frac{P}{Q}$ et $R_2 = \frac{A}{B}$, deux formes irréductibles. Alors les fonctions $\frac{\tilde{P}}{\tilde{Q}}$ et $\frac{\tilde{A}}{\tilde{B}}$ coïncident sur leur ensemble de définition D, d'où $\tilde{P}\tilde{B}$ et $\tilde{A}\tilde{Q}$, qui sont deux fonctions polynomiales, coïncident sur D, qui est infini. Donc les polynômes sous-jacents sont égaux, i.e. $PB = AQ$. Donc on a $R_1 = R_2$. □

1.3. Dérivées, degrés et pôles.

Définition 1.3.1.
Soit $R = \frac{A}{B}$. On appelle *dérivéee* de R la fraction rationnelle $\frac{A'B - B'A}{B^2}$. Cette fraction rationnelle ne dépend pas du choix de A et de B, et est donc bien définie.
On a alors les propriétés suivantes, pour $R_1, R_2 \in \mathbb{K}(X)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

(i) $(R_1 + \lambda R_2)' = R_1' + \lambda R_2'$

(ii) $(R_1 \times R_2)' = R_1' R_2 + R_1 R_2'$

(iii) si $R_2 \neq 0$, $\left(\frac{R_1}{R_2}\right)' = \frac{R_1' R_2 - R_1 R_2'}{R_2^2}$.

Démonstration. — Montrons que R' ne dépend pas du choix de A et B : si $R = \frac{P}{Q} = \frac{A}{B}$, avec $\frac{A}{B}$ irréductible. Alors $PB = AQ$, donc $A|PB$ et, avec le lemme de Gauss, $A|P$, d'où il existe $C \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = AC$, et par suite $Q = BC$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}\left(\frac{P}{Q}\right)' &= \frac{P'Q - Q'P}{Q^2} \\ &= \frac{(A'C + AC')BC - (B'C + BC')AC}{B^2C^2} \\ &= \frac{C^2(A'B - AB')}{C^2B^2} \\ &= \frac{A'B - AB'}{B^2} \\ &= \left(\frac{A}{B}\right)'.\end{aligned}$$

— Il suffit de remplacer les expressions par leurs définitions et d'un simple calcul pour vérifier les propriétés énoncées.

□

Remarque 1.3.2.
La dérivation sur $\mathbb{K}(X)$ prolonge celle sur $\mathbb{K}[X]$.

Définition 1.3.3 (Degré)**.**
Soit $R = \frac{A}{B}$, avec $A, B \in \mathbb{K}[X]$, $B \neq 0$. On appelle *degré* de R, noté $\deg R$, la quantité $\deg R = \deg A - \deg B$. Si $A \neq 0$, il s'agit d'un entier relatif. Sinon, $\deg R = -\infty$. Cette définition ne dépend là encore pas du représentant choisi.

Démonstration.
Si $F = \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, alors $AD = BC$, donc $\deg(AD) = \deg(BC)$, soit $\deg(A) + \deg(D) = \deg(B) + \deg(C)$. On obtient donc $\deg(A) - \deg(B) = \deg(C) - \deg(D)$. □

Remarque 1.3.4.
Le degré sur $\mathbb{K}(X)$ prolonge celui sur $\mathbb{K}[X]$.

Remarque 1.3.5.
La fraction rationnelle nulle est la seule à ne pas avoir pour degré un entier.

Exemple 1.3.6.

$$\begin{aligned}\deg\left(\frac{X^4}{X(X-1)}\right) &= 4 - 2 = 2 \\ \deg\left(\frac{X(X^2+5)}{X^3(X^2+X-2)}\right) &= 3 - 5 = -2 \\ \deg\left(\frac{X^2(X+1)}{X^3 - 2X + 3}\right) &= 3 - 3 = 0\end{aligned}$$

On voit là qu'une fraction rationnelle de degré nul n'est pas forcément constante.

Proposition 1.3.7.
Soient $R_1, R_2 \in \mathbb{K}(X)$.

(i) $\deg(R_1 + R_2) \leqslant \max(\deg R_1, \deg R_2)$

(ii) $\deg(R_1 R_2) = \deg R_1 + \deg R_2$

(iii) Si $R_2 \neq 0$, $\deg \frac{R_1}{R_2} = \deg R_1 - \deg R_2$.

(iv) Si $\deg R_1 \neq 0$, alors $\deg R_1' = \deg R_1 - 1$.

(v) Si $R_1 \neq 0$, alors $\deg R_1' < \deg R_1$.

Démonstration.
On note $R_1 = \frac{P}{Q}$ et $R_2 = \frac{A}{B}$.

(i) On a : $R_1 + R_2 = \dfrac{PB + AQ}{QB}$. Donc

$$\begin{aligned}
&\deg(R_1 + R_2)\\
&= \deg(PB + AQ) - \deg(QB)\\
&\leqslant \max(\deg(PB), \deg(AQ)) - \deg Q - \deg B\\
&\leqslant \max(\deg P + \deg B, \deg A + \deg Q) - \deg Q - \deg B\\
&\leqslant \max(\deg P + \deg B - \deg Q - \deg B,\\
&\qquad \deg A + \deg Q - \deg Q - \deg B)\\
&\leqslant \max(\deg P - \deg Q, \deg A - \deg B)\\
&\leqslant \max(\deg(P/Q), \deg A/B)\\
&\leqslant \max(\deg(R_1), \deg(R_2)).
\end{aligned}$$

(ii) Simple calcul.

(iii) Idem.

(iv) On note $d = \deg P$, $e = \deg Q$, p le coefficient dominant de P et q celui de Q.
• Si $e = 0$, alors R_1 est un polynôme et le résultat est alors connu.
• Si $d = 0$ et $e \neq 0$, alors $\deg R_1 = -e$ et $R_1' = -p\dfrac{Q'}{Q^2}$, dont le degré est $e - 1 - 2e = -e - 1 = \deg R_1 - 1$.
• Si $d \neq 0$ et $e \neq 0$, alors on a $R_1' = \dfrac{P'Q - Q'P}{Q^2}$, donc $\deg P'Q = \deg PQ' = \deg P + \deg Q - 1 = d + e - 1$. Le coefficient de degré $d + e - 1$ de $P'Q - Q'P$ est $dpq - epq = (d - e)pq \neq 0$ car $d - e = \deg R_1 \neq 0$, donc $\deg R_1' = d + e - 1 - \deg(Q^2) = d + e - 1 - 2e = d - e - 1 = \deg R_1 - 1$.

(v) En reprenant le calcul précédent : $\deg(R_1') \leqslant \max(\deg(P'Q), \deg(PQ')) - 2\deg(Q) < d + e - 2d$.

□

si $\deg R = 0$, on peut juste dire $\deg R' < \deg R - 1$, car avec les notations de la démonstration on a $e = d$.

Exemple 1.3.8.
• si $R = 1$, $\deg R' = -\infty$.
• si $R = \dfrac{1}{X}$, $R' = -\dfrac{1}{X^2}$ donc $\deg R' = \deg R - 1$.
• si $R = \dfrac{X}{X+1} = 1 - \dfrac{1}{X+1}$, $R' = \dfrac{1}{(X+1)^2}$, donc $\deg R' = \deg R - 2$.
• De manière générale, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $R = \dfrac{X^n}{X^n + 1}$, alors $\deg R' = \deg R - (n + 1)$.

1.4. Zéros et pôles.

Définition 1.4.1.
Soit $R = \dfrac{A}{B}$, irréductible.

1. Toute racine de A est appelée *racine* ou *zéro* de R. Si elle est de multiplicité m dans A, on dira aussi qu'elle est de multiplicité m dans R.
2. Toute racine de B est appelée *pôle* de R. Si elle est de multiplicité m dans B, on dira aussi qu'elle est de multiplicité m dans R.

On utilise les expressions *pôle ou racine simple ou double* quand la multiplicité vaut 1 ou 2.

À nouveau, la multiplicité n'est bien définie que si la fraction est irréductible : 1 n'a pas la même multiplicité dans les dénominateurs de $\dfrac{X(X-1)}{(X-1)^2}$ et $\dfrac{X}{X-1}$. De plus 1 n'est pas racine de ces fractions rationnelles, car 1 n'est pas racine de la forme irréductible.
En allant encore plus loin, soit $R = \dfrac{A}{B}$ une fraction rationnelle. Alors $R = \dfrac{A(X-\lambda)^n}{B(X-\lambda)^n}$, et ce pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$. Donc, si on oubliait l'hypothèse « forme irréductible », on pourrait montrer que tout scalaire est racine et pôle de toute fraction rationnelle, avec n'importe quelle multiplicité.

Remarque 1.4.2.
On pourra, si besoin, considérer la convention suivante : un scalaire est racine (resp. pôle) de multiplicité zéro de $R = A/B$ s'il n'est pas racine de A (resp. B).

2. Étude locale d'une fraction rationnelle.

2.1. Partie entière.

Théorème 2.1.1.
Soit $R \in \mathbb{K}(X)$ Alors il existe un unique couple $(E, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tel que $\deg Q < 0$ et $R = E + Q$. Le polynôme E est appelé la *partie entière* de R.

Démonstration.
On note $R = \dfrac{A}{B}$.

Existence On effectue la division euclidienne de A par B, qui donne $A = EB + T$, avec $\deg T < \deg B$. Ainsi $R = \dfrac{EB+T}{B} = E + Q$, avec $Q = \dfrac{T}{B}$: on a bien $\deg Q < 0$.

Unicité Soient (E, Q) et (D, U) deux couples convenables. Alors $E + Q = D + U$, soit $E - D = U - Q$. Si $E - D \neq 0$, on a $\deg(E - D) \geqslant 0$. Or $\deg(U - Q) \leqslant \max(\deg Q, \deg U) < 0$. Ceci est contradictoire, donc $E - D = 0$, i.e. $E = D$. Il s'ensuit que $Q = U$.

□

Exemple 2.1.2.
Après division euclidienne, on obtient $\dfrac{X^6 + X^3 + X^2 - 1}{X^2 + 3} = X^4 - 3X^2 + X + 10 + \dfrac{-3X - 31}{X^2 + 3}$, et ainsi la partie entière de $\dfrac{X^6 + X^3 + X^2 - 1}{X^2 + 3}$ est $X^4 - 3X^2 + X + 10$.

2.2. Partie polaire associée à un pôle.

Définition 2.2.1.
Soit $m \in \mathbb{N}$, $R \in \mathbb{K}(X)$, et λ un pôle de R de multiplicité m. Alors il existe une unique famille $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}$ et une unique fraction rationnelle S n'ayant pas λ pour pôle vérifiant

$$R = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{(X - \lambda)^k} + S.$$

La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{(X - \lambda)^k}$ est appelée *partie polaire de R associée au pôle λ.*

De plus :

1. le coefficient a_m est non nul ;
2. les autres pôles de R sont exactement les pôles de S, avec la même multiplicité.

Démonstration.
Hors-programme. □

Exemple 2.2.2.
Par exemple, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ uniques tels que

$$\frac{X+1}{(X-1)^3(X-2)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{(X-1)^3} + \frac{P}{(X-2)^2}.$$

2.3. Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

Théorème 2.3.1 (Décomposition dans $\mathbb{C}(X)$)**.**
Soit $R \in \mathbb{C}(X)$. Alors R est la somme de sa partie entière et de ses parties polaires. Cette décomposition s'appelle la *décomposition en éléments simples de R.*

Plus précisément : si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les pôles de R, de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_n$, alors il existe une unique famille d'éléments de $\mathbb{C}$ $a_{1,1}, \dots, a_{1,m_1}, \dots, a_{n,1}, \dots, a_{n,m_n}$ (le premier indice représentant le pôle et le second indice allant de 1 à la multiplicité de ce pôle), vérifiant

$$R = E + \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m_k} \frac{a_{k,j}}{(X - \lambda_k)^j} \right)$$

où E est la partie entière de R.

Démonstration.
Hors programme. □

Exemple 2.3.2.
$\dfrac{X^5 + X^2 - 3}{(X-1)^3(X-2)^2}$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$1 + \frac{a_1}{X-1} + \frac{a_2}{(X-1)^2} + \frac{a_3}{(X-1)^3} + \frac{b_1}{X-2} + \frac{b_2}{(X-2)^2}$$

2.4. Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Dans $\mathbb{R}(X)$, le dénominateur d'une fraction rationnelle n'est pas nécessairement scindé ce qui complique la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles. Nous commençons par donner un énoncé valable à la fois dans $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$ et nous verrons ensuite ce qu'il donne dans le cas particulier de $\mathbb{C}(X)$.

Théorème 2.4.1 (Décomposition dans $\mathbb{K}(X)$)**.**
Soit $R \in \mathbb{K}(X)$. R s'écrit sous forme irréductible $\frac{P}{Q}$ avec Q unitaire. Le polynôme Q s'écrit alors sous la forme $H_1^{n_1} \dots H_p^{n_p}$ où $H_1, \dots, H_p$ sont des polynômes irréductibles unitaires distincts et n_1, …, n_p des naturels non nuls.

Alors R se décompose de façon unique sous la forme

$$R = E + F_1 + \dots F_p$$

où E est un polynôme et pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, F_k s'écrit sous la forme $\sum_{j=1}^{n_k} \frac{J_{k,j}}{H_k^j}$, où pour tout $j \in [\![1, n_k]\!]$, on a $\deg J_{k,j} < \deg H_k$. Cette décomposition s'appelle la *décomposition en éléments simples de R dans $\mathbb{K}(X)$.*

De plus E est nécessairement la partie entière de R.

Démonstration.
Hors programme. □

Remarque 2.4.2.
1. Dans $\mathbb{C}(X)$, les irréductibles sont de degré 1 et les $J_{k,j}$ sont donc tous des polynômes constants : on retrouve l'énoncé donné spécifiquement pour $\mathbb{C}(X)$.
2. Dans $\mathbb{R}(X)$, les irréductibles sont de degré 1 ou 2, d'où l'énoncé qui suit.

Théorème 2.4.3 (Décomposition dans $\mathbb{R}(X)$)**.**
Soit $R \in \mathbb{R}(X)$. R s'écrit sous forme irréductible $\frac{P}{Q}$ avec Q unitaire. Le polynôme Q s'écrit alors sous la forme $\prod_{i=1}^{q}(X - \lambda_i)^{m_i} \times \prod_{i=1}^{p} H_i^{n_i}$, où λ_1, …, λ_q sont les racines (deux à deux distinctes) de Q et H_1, …, H_p sont des polynômes de degré deux sans racines réelles.

Alors R se décompose de façon unique sous la forme

$$R = E + \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{a_{k,j}}{(X - \lambda_k)^j} + \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_j} \frac{b_{k,j}X + c_{k,j}}{H_k^j}$$

où E est un polynôme et tous les $a_{k,j}$, les $b_{k,j}$ et les $c_{k,j}$ sont des réels.

Cette décomposition s'appelle la *décomposition en éléments simples de R dans $\mathbb{R}(X)$.*

De plus E est nécessairement la partie entière de R.

2.5. Quelques méthodes de calcul.

L'objectif est d'obtenir le plus rapidement possible la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle, bien entendu sans faire d'erreurs de calculs. Il est donc *fortement conseillé* de suivre les méthodes suivantes, en essayant d'utiliser les méthodes les plus appropriées dans le contexte.

Enfin, si vous en avez le temps, pensez bien à vérifier vos calculs, par exemple en recomposant la fraction rationnelle.

a. Avant même de commencer.

Pour décomposer une fraction rationnelle F, on commence par l'écrire sous forme $E + R$ où $\deg R < 0$ et E est sa partie entière.

Toutes les méthodes ci-dessous s'appliquent à la fraction rationnelle R *qui est de degré strictement négatif.*

b. Simplification par symétrie, parité et imparité.

Il convient à chaque fois de simplifier au maximum le problème posé en réduisant le nombre de coefficients à chercher. Pour cela, on exploite les symétries repérées dans la fraction rationnelle.

Traitons un exemple : la fraction rationnelle

$$R = \frac{1}{(X-1)^2(X+1)^2}$$

est paire, car $R(-X) = R(X)$. Mais on sait qu'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$R = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{(X+1)^2}.$$

Et donc

$$R(-X) = -\frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} - \frac{c}{X-1} + \frac{d}{(X-1)^2}.$$

Par unicité des coefficients de la décomposition en éléments simples, on en déduit que $a = -c$ et $b = d$: le calcul de a et b suffit donc (deux coefficients au lieu de quatre !).

On a la même chose avec les fractions rationnelles impaires.

On pourra aussi exploiter d'autres types de symétries. En voici un exemple : $F = \frac{1}{X(X-1)}$. Les pôles (0 et 1) sont « symétriques » par rapport à $\frac{1}{2}$, ce qui se voit par $F(X) = F(1-X)$. Si l'on écrit $F = \frac{\alpha}{X} + \frac{\beta}{X-1}$, on obtient alors $F(1-X) = \frac{-\beta}{X} + \frac{-\alpha}{X-1}$, ce qui donne $\alpha = -\beta$.

c. Simplification par conjugaison de fractions rationnelles réelles.

Soit $R \in \mathbb{R}(X)$, et soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ un pôle complexe non réel de R, de multiplicité m. Alors $\overline{\lambda}$ est aussi un pôle de R de multiplicité m. On a donc :

$$R = \frac{a_1}{X-\lambda} + \frac{a_2}{(X-\lambda)^2} + \ldots + \frac{a_m}{(X-\lambda)^m} + \frac{b_1}{X-\overline{\lambda}} + \frac{b_2}{(X-\overline{\lambda})^2} + \ldots + \frac{b_m}{(X-\overline{\lambda})^m} + G,$$

où G n'admet ni λ ni $\overline{\lambda}$ pour pôle. Mais on a $\overline{R} = R$, et donc

$$\overline{R} = \frac{\overline{a_1}}{X-\overline{\lambda}} + \frac{\overline{a_2}}{(X-\overline{\lambda})^2} + \ldots + \frac{\overline{a_m}}{(X-\overline{\lambda})^m} + \frac{\overline{b_1}}{X-\lambda} + \frac{\overline{b_2}}{(X-\lambda)^2} + \ldots + \frac{\overline{b_m}}{(X-\lambda)^m} + \overline{G}.$$

Par unicité des coefficients on obtient donc : $a_1 = \overline{b}_1, \ldots, a_m = \overline{b}_m$ et $G = \overline{G}$ (*i.e.* $G \in \mathbb{R}(X)$). Là encore, cela permet de réduire le nombre de coefficients à calculer.

d. Méthode de base.

Soit $R = \frac{A}{B}$ avec $\deg R < 0$ à décomposer, avec A et B deux polynômes non nuls, B étant de la forme $C \times (X-\lambda)^n$ où λ n'est pas racine de C.

R s'écrit $\sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{(X-\lambda)^k} + S$. On peut trouver le coefficient a_m (et seulement celui-là !) en multipliant R par $(X-\lambda)^m$ et en évaluant le résultat en λ.

En effet, on a

$$\begin{aligned}
\frac{A}{C} &= (X-\lambda)^m R \\
&= \sum_{k=1}^{m} a_k (X-\lambda)^{m-k} + (X-\lambda)^m S \\
&= \sum_{h=0}^{m-1} a_{m-h} (X-\lambda)^h + (X-\lambda)^m S \\
&= a_m + \sum_{h=1}^{m-1} a_{m-h} (X-\lambda)^h + (X-\lambda)^m S
\end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{A(\lambda)}{C(\lambda)} = a_m + 0$$

On a donc trouvé a_m :

$$a_m = \frac{A(\lambda)}{C(\lambda)}$$

On calcule alors $T = R - \frac{a_m}{(X-\lambda)^m}$, et on continue en cherchant à décomposer T.

Remarque 2.5.1.
On a la garantie que, soit λ n'est pas pôle de T (c'est le cas si $m = 1$ ou si les coefficients a_1, …, a_{m-1} sont tous nuls), soit λ est pôle pour T de multiplicité strictement plus petite que m. En itérant l'algorithme on va donc terminer la décomposition pour la partie polaire associée à λ. On peut s'intéresser ensuite à un autre pôle, soit en partant de la dernière fraction obtenue, soit en repartant de la fraction initiale.

Remarque 2.5.2 (Cas d'un pôle simple)**.**
Dans le cas où $m = 1$, on a

$$a_1 = \frac{A(\lambda)}{C(\lambda)}$$

Si on ne connaît pas C mais juste B, plutôt que factoriser B par $X - \lambda$, on peut remarquer $B' = C'(X - \lambda) + C$, donc $B'(\lambda) = C(\lambda)$, donc

$$a_1 = \frac{A(\lambda)}{B'(\lambda)}$$

Il est souvent plus simple dans des exercices abstraits de calculer B', plutôt que de décomposer B en $C \times (X - \lambda)$, d'où l'intérêt de cette remarque.

Exemple 2.5.3.
Si

$$R = \frac{X^2 - X - 2}{4X^{10} - X^8 + 6X^3 - 9X^2 + 3X - 3} = \frac{A}{B}.$$

On remarque que $B(1) = 0$, mais

$$\begin{aligned} B'(1) &= (40X^9 - 8X^7 + 18X^2 - 18X + 3)(1) \\ &= 35 \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

donc 1 est pôle simple de R. Or

$$\frac{A(1)}{B'(1)} = \frac{-2}{35},$$

donc $R = -\dfrac{2/35}{X-1} + S$, et S n'a pas 1 pour pôle.

Remarque 2.5.4.
La méthode de base est **celle à privilégier** car elle fonctionne dans tous les cas et est souvent la plus rapide. Mais on peut la conjuguer ponctuellement à d'autres méthodes pour accélérer les calculs.

e. Résidus.

Soit λ un pôle de R : on appelle *résidu* de R en λ le coefficient du terme $\dfrac{1}{X - \lambda}$. C'est en pratique le terme de la partie polaire associée à λ le plus compliqué à calculer, car c'est le dernier terme que l'on peut calculer avec la méthode de base. On note ce résidu $\text{Res}(R, \lambda)$, et on note R_λ la partie polaire de R associée au pôle λ.

Alors, quelle que soit la multiplicité de λ, on a :

$$xR_\lambda(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \text{Res}(R, \lambda).$$

En sommant cette relation sur tous les pôles de R, on obtient, dans le cas où $\lim\limits_{x\to+\infty} xR(x)$ est finie (*i.e.* $\deg R \leqslant -1$) :

$$R(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{\lambda \text{ pôle de } R} \text{Res}(R, \lambda)$$

Ainsi, si $\deg R \leqslant -2$, on a

$$\sum_{\lambda \text{ pôle de } R} \text{Res}(R, \lambda) = 0.$$

Par exemple, si

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{(X-1)^2(X+1)} \\ &= \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+1}, \end{aligned}$$

on a $c = \dfrac{1}{(-1-1)^2} = \dfrac{1}{4}$, et $b = \dfrac{1}{(1+1)} = \dfrac{1}{2}$. Mais $xR(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, donc $a + c = 0$, et ainsi $a = -\dfrac{1}{4}$.

f. Un exemple.

Exercice 2.5.5.
Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$:

$$R = \frac{2X}{X^5 - 7X^4 + 16X^3 - 16X^2 + 15X - 9}.$$

Les méthodes suivants sont souvent peu efficaces (pour les deux premières) ou hors de votre portée pour l'instant (pour la troisième).

g. Évaluation en un point différent d'un pôle.

Si nous avons n coefficients à calculer, on peut écrire l'égalité entre la fraction rationnelle et sa décomposition (aux coefficients inconnus) et évaluer les deux membres de cette égalité en n points deux à deux distincts qui ne sont pas des pôles. On obtient alors n équations à n inconnues qui permettent de calculer les n coefficients voulus.

Cette méthode est surtout efficace quand il ne reste qu'un (ou deux) coefficients à calculer, qui ne sont pas des coefficients associés à des pôles simples, sinon la méthode de base est plus rapide.

Par exemple, décomposons

$$\frac{X-2}{(X+1)(X+2)^3}$$

sous la forme

$$\frac{a}{X+1}+\frac{b}{(X+2)^3}+\frac{c}{(X+2)^2}+\frac{d}{X+2}.$$

La méthode de base nous donne immédiatement $a=-3$ et $b=4$. Par ailleurs, la méthode des résidus nous donne $a+d=0$, donc $d=3$.

En évaluant alors, par exemple en 2, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{-3}{2+1}+\frac{4}{(2+2)^3}+\frac{c}{(2+2)^2}+\frac{3}{2+2} \\ &= \frac{-3}{16}+\frac{c}{16} \end{aligned}$$

d'où $c=3$.

On aurait bien sûr pu évaluer en un autre point, par exemple, en évaluant en -3, on obtient :

$$\frac{-5}{2}=\frac{-3}{-2}+\frac{4}{-1}+\frac{c}{1}+\frac{3}{-1}$$

d'où $c=3$.

h. Identification.

C'est la méthode la plus naïve, mais elle doit vraiment être réservée au cas où la fraction rationnelle a au plus deux ou trois pôles avec multiplicité, sinon elle est trop lourde.

Par exemple on sait qu'il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $\dfrac{1}{X(X+1)}=\dfrac{a}{X}+\dfrac{b}{X+1}$. Or $\dfrac{a}{X}+\dfrac{b}{X+1}=\dfrac{(a+b)X+a}{X(X+1)}$, donc on doit avoir $a+b=0$ et $a=1$, soit $a=1$ et $b=-1$.

i. Développements limités.

Prenons l'exemple d'une fraction rationnelle R admettant un pôle double.

Alors $R=\dfrac{a}{X-\lambda}+\dfrac{b}{(X-\lambda)^2}+G$, où G est une fraction rationnelle n'admettant pas λ pour pôle.

Pour h au voisinage épointé de 0, on a donc :

$$h^2R(\lambda+h)=b+ah+h^2G(\lambda+h)$$

Or G n'a pas pour pôle λ, donc G est bornée au voisinage de λ.

Donc $h^2R(\lambda+h)$ admet le développement limité $b+ah+o(h)$ pour h au de 0. Les développements limités étant uniques (sous réserve d'existence), il suffit de calculer le développement limité de $h^2R(\lambda+h)$ pour obtenir a et b.

Cette méthode s'applique aussi très bien à des pôles de multiplicité supérieure à 2, quitte à développer assez loin.

Par exemple posons

$$R=\frac{3X-1}{(X-1)^2(X^2+1)}$$

et cherchons la partie polaire de R associée à 1. Pour h au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned} h^2R(1+h) &= \frac{3(h+1)-1}{(h+1)^2+1} \\ &= \frac{3h+2}{2+2h+h^2} \\ &= \frac{1}{2}.\frac{3h+2}{1+h+h^2/2} \\ &= \frac{1}{2}(3h+2)(1-h+o(h)) \\ &= \frac{1}{2}(3h+2-2h+o(h)) \\ &= 1+h/2+o(h) \end{aligned}$$

donc la partie polaire associée à 1 est

$$\frac{1}{2(X-1)}+\frac{1}{(X-1)^2}.$$

2.6. Décomposition de P'/P.

Proposition 2.6.1.
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul. Alors, en notant $a_1, \ldots, a_n$ les n racines distinctes de P et $r_1, \ldots, r_n$ leurs ordres respectifs, on a

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{X - a_k}.$$

Démonstration.
Remarquons tout d'abord que $\frac{P'}{P}$ est de degré strictement négatif, donc sa partie entière est nulle.

Les seuls pôles possibles pour $\frac{P'}{P}$ sont les racines de P. Soit a une racine de P ; notons r sa multiplicité. Alors P s'écrit $(X-a)^r A$ où A est un polynôme dont a n'est pas racine. Alors on a

$$\begin{aligned}\frac{P'}{P} &= \frac{r(X-a)^{r-1}A + (X-a)^r A'}{(X-a)^r A} \\ &= \frac{r}{X-a} + \frac{A'}{A}\end{aligned}$$

et a n'est pas un pôle de $\frac{A'}{A}$. Donc $\frac{r}{X-a}$ est la partie polaire de $\frac{P'}{P}$ associée au pôle a (a est donc un pôle simple).

$\frac{P'}{P}$ étant la somme de sa partie entière et de ses parties polaires, on en déduit le résultat. □

Proposition 2.6.2.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non nul. Alors P s'écrit

$$\lambda \prod_{k=1}^{n} H_k^{p_k},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ et où les H_k, pour $k = 1, \ldots, n$ sont des polynômes irréductibles deux à deux distincts et $p_1, \ldots, p_k$ sont des entiers naturels non nuls.

Alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k H_k'}{H_k}.$$

Cet énoncé est une simple généralisation de l'énoncé précédent. Il est en fait vrai dans $\mathbb{R}(X)$ comme dans $\mathbb{C}(X)$.

Démonstration.
Remarquons tout d'abord que $\frac{P'}{P}$ est de degré strictement négatif, donc sa partie entière est nulle.

Les seuls facteurs irréductibles du dénominateur de P sont les H_k, pour $k = 1, \ldots, n$, donc ce sont les seuls à considérer pour décomposer P.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Alors P s'écrit $H_k^{p_k} A_k$, où A_k est un polynôme dont H_k n'est pas un facteur. Alors on a

$$\begin{aligned}\frac{P'}{P} &= \frac{p_k H_k' H_k^{p_k-1} A_k + H_k^{p_k} A_k'}{H_k^{p_k} A_k} \\ &= \frac{p_k H_k'}{H_k} + \frac{A_k'}{A_k}\end{aligned}$$

et H_k n'est pas un facteur de A_k. Donc $\frac{p_k H_k'}{H_k}$ est la partie de la décomposition de $\frac{P'}{P}$ associée au facteur H_k.

$\frac{P'}{P}$ étant la somme de sa partie entière et des parties associées aux facteurs irréductibles du dénominateur, on en déduit le résultat. □

3. Application au calcul intégral.

On va voir ici comment la décomposition en éléments simples permet de calculer $\displaystyle\int^x R(t)\,\mathrm{d}t$, où $R \in \mathbb{K}(X)$.

3.1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

C'est le cas le plus simple. On commence par décomposer R en éléments simples. Il suffit alors de savoir intégrer les polynômes ainsi que toute fonction de la forme $t \mapsto \dfrac{1}{(t-\lambda)^k}$, avec $k \in \mathbb{N}^*$. Traitons différents cas :

Si $k = 1$ on sépare alors la partie réelle et la partie imaginaire de $\dfrac{1}{(t-\lambda)^k}$, puis on intègre. Si on note $\lambda = \alpha + i\beta$, cela donne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{t-\lambda} &= \frac{t-\alpha+i\beta}{(t-\alpha)^2+\beta^2} \\ &= \frac{t-\alpha}{(t-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{i\beta}{(t-\alpha)^2+\beta^2}.\end{aligned}$$

Or

$$\int^x \frac{t-\alpha}{(t-\alpha)^2+\beta^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)$$

et $$\int^x \frac{\beta}{(t-\alpha)^2+\beta^2}\,\mathrm{d}t = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right).$$

Si $k > 1$ alors

$$\int^x \frac{1}{(t-\lambda)^k}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{k-1} \times \frac{1}{(x-\lambda)^{k-1}}.$$

3.2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Il s'agit de savoir intégrer d'une part les $\dfrac{1}{(t-\lambda)^k}$, ce qu'on sait déjà faire et d'autre part les termes de la forme $t \mapsto \dfrac{at+b}{(t^2+\beta t+\gamma)^n}$ où a, b, β et γ sont des constantes réelles, où n est un naturel non nul et où le polynôme $X^2+\beta X+\gamma$ n'admet pas de racine réelle.

On se limitera au cas où $n = 1$. Pour gérer les autres cas, on peut décomposer R en éléments simple dans $\mathbb{C}(X)$ et calculer l'intégrale par les méthodes données ci-dessus.

En posant $\Delta = \beta^2 - 4\gamma$, on a donc $\Delta < 0$.

On écrit alors

$$\frac{at+b}{t^2+\beta t+\gamma} = \frac{a}{2}\frac{2t+\beta}{t^2+\beta t+\gamma} + \frac{b-\frac{a\beta}{2}}{t^2+\beta t+\gamma}.$$

Le premier terme est un rapport de la forme u'/u :

$$\int^x \frac{a}{2}\frac{2t+\beta}{t^2+\beta t+\gamma}\,\mathrm{d}t = \frac{a}{2}\ln|x^2+\beta x+\gamma|$$

et la valeur absolue s'enlève sans problème car $X^2+\beta X+\gamma$ étant irréductible, il n'a pas de racine et est donc de signe constant.

Le second terme se réécrit quant à lui

$$\frac{b-\frac{a\beta}{2}}{t^2+\beta t+\gamma} = \frac{b-\frac{a\beta}{2}}{(t+\beta/2)^2+(\gamma-\beta^2/4)}.$$

Or, comme $\Delta < 0$,

$$\gamma - \beta^2/4 = -\Delta/4 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}\right)^2.$$

En posant alors $\theta = \dfrac{1}{2}\sqrt{-\Delta}$, on a $\theta > 0$ et

$$\int^x \frac{b-\frac{a\beta}{2}}{(t+\beta/2)^2+\theta^2}\,\mathrm{d}t = \frac{b-\frac{a\beta}{2}}{\theta}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+\beta/2}{\theta}\right)$$

Remarque 3.2.1.
Ces formules ne sont en aucun cas à apprendre par cœur, mais il convient de savoir mener ces calculs sur des exemples concrets.