

QCM n° 13

Un peu de calcul.

Échauffement n°1 Calculer les déterminants des matrices suivantes :

1) $\begin{pmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

QCM - cocher une case si la phrase qui suit est correcte.

Question n°1 Dans $\mathbb{R}_3[X]$, l'espace des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 3 , on considère les deux sous-espaces vectoriels :

$$E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] ; P(0) = P(1) = 0\} \text{ et } F = \{(P \in \mathbb{R}_3[X] ; P'(0) = P''(0) = 0)\},$$

où P' (resp. P'') est la dérivée première (resp. seconde) de P .

- ☐ $\dim E = 3$.
- ☐ $\dim F = 1$.
- ☐ $E + F = \mathbb{R}_3[X]$.
- ☐ E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Question n°2

- ☐ Si σ est un cycle, σ^2 est un cycle.
- ☐ Le produit de deux cycles à supports non disjoints est un cycle.
- ☐ Deux permutations à supports disjoints commutent.
- ☐ S_n contient $\binom{n}{2}$ transpositions.
- ☐ S_n contient $3 \binom{n}{3}$ 3-cycles.
- ☐ Une permutation de S_n qui admet un nombre d'orbites impair est de signature 1.

Question n°3

- ☐ $\det(a_i^{j-i})_{i,j \in \llbracket 1n \rrbracket} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$.
- ☐ $\det((-1)^{i+j} a_{ij}) = \det a_{ij}$.
- ☐ Pour $\sigma \in S_n$, $\det(\delta^{i,\sigma(j)}) = \varepsilon(\sigma)$.

Question n°4

- ☐ Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(A^\top \cdot A) \geq 0$.
- ☐ Il existe $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\det(A^2) = -1$.
- ☐ Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la fonction $t \mapsto \det(tA + I)$ est polynomiale de degré n .
- ☐ Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe au plus n scalaires $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $A - \lambda I$ soit non inversible.

Question n°5

- ☐ Une matrice nilpotente est de déterminant nul.
- ☐ Deux matrices semblables ont même déterminant.
- ☐ Deux matrices équivalentes ont même déterminant.

Question n°6

- ☐ Le déterminant d'une matrice à coefficients entiers est un entier.
- ☐ Le déterminant d'une matrice à coefficients entiers et positifs est un entier positif.
- ☐ Une matrice à coefficients entiers admet un inverse à coefficients entiers si et seulement si son déterminant est 1 ou -1 .
- ☐ Le pgcd des coefficients de la première ligne d'une matrice à coefficients entiers qui admet un inverse à coefficients entiers vaut 1.