LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I.

ANNÉE 2018 - 2019

C6 : ANALYSE FRÉQUENTIELLE DES SYSTÈMES ASSERVIS

C6-1 - Introduction à l'analyse fréquentielle des systèmes asservis

26 Mars 2019

Table des matières

I Définition de l'analyse fréquentielle 1

II Intérêts de l'étude fréquentielle 2

III Définition du support du cours 3

IV Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique 4

Compétences

- **Modéliser** :
  - Identifier et caractériser les grandeurs physiques : caractéristiques fréquentielles
  - Systèmes linéaires continus et invariants
  - Signaux canoniques d'entrée : signaux sinusoïdaux
  - Schémas blocs, fonctions de transferts
- **Résoudre :** Procéder à la mise en oeuvre d'une démarche de résolution analytique
  - Réponse fréquentielle ;

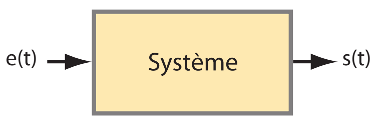
I. Définition de l'analyse fréquentielle

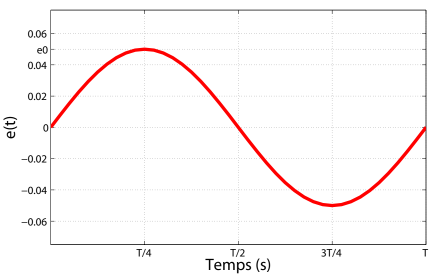
Définition 1 : ***Analyse fréquentielle ou harmonique***

L'analyse fréquentielle d'un système linéaire, continu et invariant consiste à étudier la réponse ($s(t)$) vis à vis d'une entrée ($e(t)$) de type harmonique ou sinusoïdale :

$$\boxed{e(t) = e_0\ \sin(\omega\ t) = e_0\ \sin(2\pi f\ t)} \quad (1)$$

Ce signal est caractérisé par :
- sa **fréquence** f,
- ou sa **pulsation** $\omega = 2\pi f$,
- son **amplitude** e_0.





II. Intérêts de l'étude fréquentielle

Définition 2 : *Décomposition en série de Fourier*

Tout signal **périodique** se décompose en une **somme de signaux harmoniques** (*e.g.* sinusoïdale). Par exemple un signal périodique et impaire de fréquence f peut se décomposer de la façon suivante :

$$\boxed{e(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cdot sin(2\pi\ k\ f\ t)} \tag{2}$$

où les coefficients a_k représente les différentes amplitudes des fonctions harmonique constituant la décomposition.

Remarque 1 :

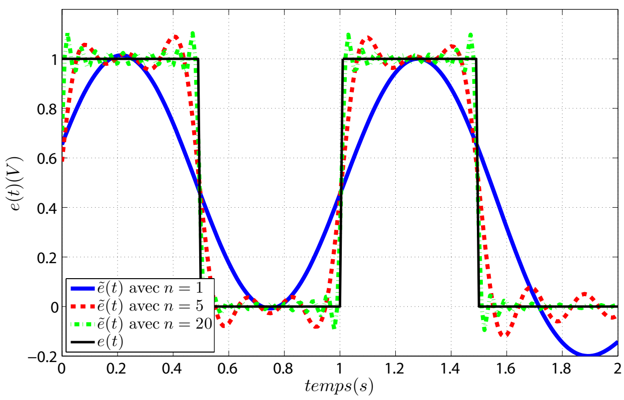
Dans la pratique, pour reconstituer un signal, on peut effectuer une **décomposition finie** en série de Fourier ($\tilde{e}(t)$) en prenant n termes :

$$\boxed{\tilde{e}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot sin(2\pi\ k\ f\ t)} \tag{3}$$

La précision de la décomposition sera alors d'autant plus fidèle au signal de départ que le nombre de termes (n) sera grand.

Exemple 1 : *Reconstitution d'un signal carré périodique*

Prenons l'exemple d'un signal de tension ($e(t)$) de type créneau d'une période $T = 1/f$ égale à 1 s et d'amplitude égale à $1V$. On peut effectuer une décomposition finie $\tilde{e}(t)$ (équation 3) avec différentes valeurs de n (*e.g.* $\{1, 5, 20\}$). La figure suivante compare la "richesse" des différentes décompositions finies en série de Fourier de $e(t)$. On remarque bien que plus n est grand plus le signal reconstitué ($\tilde{e}(t)$) se rapproche du signal initial ($e(t)$).



Propriété 1 : *Étude d'un signal quelconque*

Pour étudier la réponse d'un système vis-à-vis d'un signal quelconque, il faudra alors être capable de caractériser **la réponse fréquentielle** sur une plage de fréquence (f) ou de pulsation (ω) étendue. On peut également choisir cette méthode d'analyse pour vérifier le comportement d'un système vis à vis d'une entrée harmonique caractérisée par différentes valeurs de fréquence (f) ou de pulsation (ω).

III. Définition du support du cours

Exemple 2 : *Suspension de véhicule*

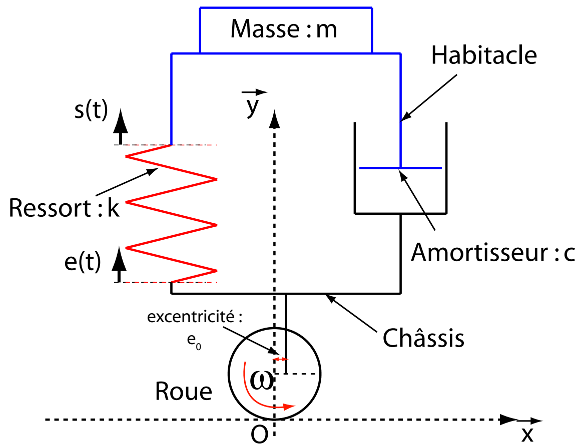
On modélise une suspension d'un véhicule par un ressort de raideur k et un amortisseur de coefficient d'amortissement c, montés en parallèles. On ramène le poids du véhicule à une masse globale m. Dans un premier temps, nous prendrons comme valeurs numériques des différents paramètres :

- $m = 100 kg$,
- $c = 1,13 kN \cdot s \cdot m^{-1}$,
- $k = 80 kN.m^{-1}$.

On note respectivement $e(t)$ et $s(t)$ les déplacements verticaux (suivant $\overrightarrow{y}$) du châssis et de l'habitacle par rapport à la position d'équilibre du système. La rotation constante de la roue avec une vitesse angulaire ω entraîne un déplacement horizontal du véhicule à vitesse constante selon la direction $-\overrightarrow{x}$. Ainsi le repère $R_0\left(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right)$ peut être supposé comme galiléen. L'axe de la roue est légèrement excentrée par rapport à son centre. Ceci provoque donc un déplacement du châssis en fonction de la vitesse de rotation de la roue ω.

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t).$$

On se propose de modéliser la réponse en déplacement vertical (suivant $\overrightarrow{y}$) de l'habitacle ($s(t)$) en fonction de la pulsation ω.



Le Principe Fondamental de la Dynamique en résultante suivant la direction $\overrightarrow{y}$ appliqué à l'habitacle par rapport au repère R_0 donne l'équation différentielle suivante :

$$-c\left(\frac{d(s(t)-e(t))}{dt}\right) - k(s(t)-e(t)) = m\frac{d^2 s(t)}{dt^2}.$$

La fonction de transfert du système $H(p) = S(p)/E(p)$ est égale à (forme canonique) :

$$H(p) = \frac{c\,p+k}{m\,p^2+c\,p+k} = \frac{\frac{c}{k}\,p+1}{\frac{m}{k}\,p^2+\frac{c}{k}\,p+1} = \frac{\tau\,p+1}{\frac{p^2}{\omega_0^2}+\frac{2\,\xi}{\omega_0}\,p+1}$$

Avec $\tau = 2\,\xi/\omega_0$.

IV. Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

La transformée de Laplace de l'entrée harmonique ($e(t)$ équation 1) est donnée par :

$$E(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2}$$

Dans le domaine de Laplace la sortie $S(p)$ du système soumis à une entrée harmonique s'écrit :

$$S(p) = H(p)E(p) = H(p)\frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2} = \left(\frac{\frac{c}{k}\,p+1}{\frac{m}{k}\,p^2 + \frac{c}{k}\,p+1}\right)\left(\frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2}\right)$$

On obtient alors avec une transformée de Laplace inverse : ,

$$S(t) = e_0\left[\frac{G}{2\,j}\left(-e^{-j(\varphi+\omega\,t)} + e^{j(\varphi+\omega\,t)}\right) + e^{a\,t}\,Q(t)\right] = e_0\left[G\,\sin(\omega\,t+\varphi) + e^{a\,t}\,Q(t)\right]$$

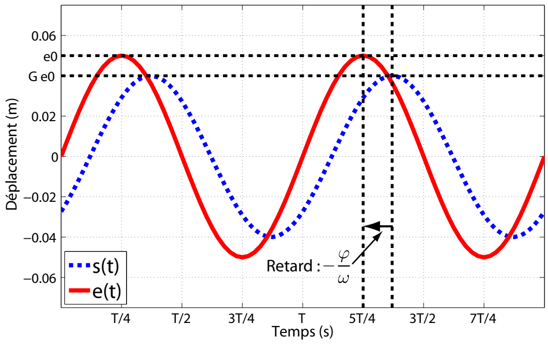
Or, on rappelle que $a < 0$ (ici $a = -\frac{c}{2m}$) et donc $e^{a\,t}\,Q(t)$ tend vers 0 en $+\infty$. Cette partie s'annule donc une fois que le régime est permanent ou établi et représente le **régime transitoire**.

Définition 3 : ***Réponse fréquentielle en régime permanent***

Ainsi, en **régime établi** ou permanent la sortie $s(t)$ est égale à :

$$\boxed{s(t) = s_0\,\sin\left(\omega\,t+\varphi\right) = G\,e_0\,\sin(\omega\,t+\varphi)} \quad (4)$$

- $G = \frac{s_0}{e_0} = |H(j\,\omega)|$ caractérise le **gain** (c'est à dire le facteur d'amplitude du sinus),
- $\varphi = arg(H(j\,\omega))$ est le **déphasage** (c'est à dire l'avance ou le retard du sinus).



Remarque 2 : ***Cas général***

Dans le cas général d'un système linéaire continu invariant, sous les hypothèses de **stabilité** et avec des **conditions initiales nulles** le résultat précédent est encore valable.

Conclusion :

L'étude fréquentielle d'un système linéaire continu et invariant revient à étudier le gain fréquentielle G, ainsi que la phase φ de la fonction de transfert $H(p)$ en fonction de la pulsation ω ou de la fréquence f.
On utilisera pour cela des outils des outils graphiques appelés **"lieux de transfert"**.