Devoir surveillé n° 04 - Remarques

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 40 points, ramené sur 5 points.
- Problèmes : toutes les questions sur 4 points, total sur 116 points, ramené sur 15 points.

Statistiques descriptives.

	Calculs	Problème	Note finale
Note maximale	38	77	18
Note minimale	6	5	$5,5$
Moyenne	$\approx 26,89$	$\approx 36,17$	$\approx 10,89$
Écart-type	$\approx 6,30$	$\approx 18,17$	$\approx 3,36$

Remarques générales.

Certains élèves n'ont pas encadré tous leur résultats : ça a fait très mal, mais vous aviez été très largement prévenus.

A). Un exercice vu en TD.

La première question a été globalement bien traitée, la deuxième beaucoup moins. Vous êtes nombreux à penser au renversement d'indice, mais le point crucial souvent négligé était de montrer que $\dfrac{kp}{q} \notin \mathbb{Z}$.

B). Une équation de Mordell.

Vous n'avez pas assez utilisé les congruences et les résultats du cours. Vous avez trop souvent introduit des « k ».
Des exemples

1.a) Pour montrer que si a est pair, alors a^2 aussi, comparez :
- il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k$, donc $a^2 = 4k^2$, donc a^2 est pair.
- $a \equiv 1$ [2] donc $a^2 \equiv 1^2$ [2] donc a^2 est pair.

2.b) Comparez :
- il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que $y - 4 = dk$ et $y + 4 = dk'$ donc $8 = y + 4 - (y - 4) = d(k' - k)$ donc $d|8$. De plus si d est pair, alors il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $d = 2l$ donc $y + 4 = 2lk'$ donc $y + 4$ est pair. Or y est impair donc il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $y = 2m + 1$, donc $y + 4 = 2m + 5$, qui est impair : c'est absurde donc d est impair.
- $d|y - 4$ et $d|y + 4$ or $8 = (y + 4) - (y - 4)$ donc par combinaison linéaire, $d|8$.
De plus, $y \equiv 1$ [2] et $4 \equiv 0$ [2] donc $y + 4 \equiv 1$ [2]. Si d est pair, $2|d$ donc par transitivité, $2|y + 4$ ce qui est absurde, donc d est impair.

2.e) Comparez :

- a et b sont impairs, donc il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que $a = 2k+1$ et $b = 2k'+1$. Donc $a-b = 2(k-k')$ et est donc pair. Et $a^2+ab+b^2 = 4k^2+4k+1+4kk'+1+2k+2k'+4k'^2+4k'+1 = 1+2(2k^2+2k'^2+2kk'+k+k'+1)$ et est donc impair.
- $a \equiv 1$ [2] et $b \equiv 1$ [2] donc $a-b \equiv 1-1$ [2] donc $a-b$ est pair, et $a^2+ab+b^2 \equiv 1^2+1\times 1+1^2$ [2] $\equiv 1[2]$.

Évitez également les racines et les fractions en arithmétique, ça a un petit côté choquant : on ne se place que dans le monde des entiers.
Ainsi, si n est un cube parfait, on évitera d'écrire « soit $a = \sqrt[3]{n}$ » mais on écrira plutôt « soit $a \in \mathbb{Z}$ tel que $a^3 = n$ ».
De même, si $8|n$, on évitera d'écrire « soit $a = \dfrac{n}{8}$ » mais on écrira plutôt « soit $a \in \mathbb{Z}$ tel que $8a = n$ ».

1.b) La décomposition en facteurs premiers (au pluriel!!) était à peu près inévitable, et ce genre de question est toujours délicat à rédiger. Les facteurs premiers et les exposants ont souvent été mal quantifiés.

2.a) La question 1.a) suffisait à elle seule pour répondre. Trop souvent vous n'avez pas vu que y impair $\Longrightarrow y^2$ impair résultait de cette question par contraposition, et vous l'avez (re)montré, même ceux qui avaient traité la première question!

2.c) 1 n'est pas le seul diviseur impair de 8! Il y a aussi -1.

2.f) Idem : pour conclure que $a = b+8$ il fallait d'abord montrer que $a > b$, sinon $a = b-8$ était aussi possible.

2.g) Beaucoup de confusions entre $\varnothing$ et $\{\varnothing\}$: ce n'est pas la même chose, le second ensemble n'est pas vide.

C). Fonctions sup-continues.

Il fallait au moins connaître le théorème de la borne supérieure (féminin!!) pour traiter ce problème. Je suis abasourdi par le nombre d'élèves qui arrivent à écrire « $A \subset \mathbb{R}$ donc A a un sup ». Dans $\bar{\mathbb{R}}$ pourquoi pas, mais ce n'est jamais cela que l'on fait par défaut, donc c'est à vous de préciser que vous prenez ce sup dans $\bar{\mathbb{R}}$ (ce qui était hors-sujet ici de toute façon). De manière générale, les problèmes avec des ensembles demandent de la rigueur, et de connaître les méthodes et définitions de base. Après on déroule, souvent sans originalité.

1) Il fallait déjà commencer par introduire A. Moi je ne sais pas mais quand je lis l'énoncé je ne vois nulle part « soit $A \subset E$ ».
Il fallait ensuite vérifier que A avait un sup (donc était non vide et majoré), idem pour $f(A)$, et que $\sup A \in E$ pour que $f(\sup A)$ existe.

2.a) Une égalité se montre par équivalences ou par double inclusion, beaucoup l'ont (déjà) oublié.

2.b) Avant d'utiliser un résultat, on vérifie les hypothèses. Ici, il fallait vérifier que l'on avait bien $f(A) \neq \varnothing$.

3) Beaucoup de « $f(A) \leqslant f(\sup A)$ » : un ensemble pourrait donc être plus petit qu'un réel?? Non ...

4) Beaucoup d'exemples où la fonction ne va pas de E dans E ou n'est pas croissante : lisez l'énoncé!!

5) Il faut montrer $\forall x, y \in E$, $x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$, pas autre chose : comment oublier la définition de fonction croissante??

6) Encore le théorème de la borne inférieure.

8) Il fallait déjà commencer par montrer que $\mathrm{Fix}(f)$ avait un plus petit élément.