XXX Fonctions de deux variables

31 août 2021

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa norme euclidienne canonique.

1 Fonctions numériques à deux variables

1.1 Petite topologie du plan

Définition 1.1.1 (boules)**.**
Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$.

On appelle *boule ouverte de centre a et de rayon r* l'ensemble

$$B(a,r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|a - x\| < r \right\}.$$

On appelle *boule fermée de centre a et de rayon r* l'ensemble

$$\overline{B}(a,r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|a - x\| \leqslant r \right\}.$$

On appelle *sphère de centre a et de rayon r* l'ensemble

$$\overline{S}(a,r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|a - x\| = r \right\}.$$

Remarque 1.1.2.
La boule fermée s'obtient en ajoutant à la boule ouverte la sphère qui la délimite.

Définition 1.1.3 (ouverts du plan)**.**
Une partie A du plan est dite *ouverte* si

$$\forall a \in A,\ \exists r > 0,\ B(a,r) \subset A.$$

Exemple 1.1.4 (exemples fondamentaux)**.**
Sont des parties ouvertes du plan : le plan, $\varnothing$, toute boule ouverte, un produit d'intervalles ouverts.

Proposition 1.1.5 (voir figure 1)**.**
Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ouvert, soit $(x_0, y_0) \in A$. Alors, il existe deux intervalles ouverts I et J tels que

— $x_0 \in I$;
— $y_0 \in J$;
— $I \times J \subset A$.

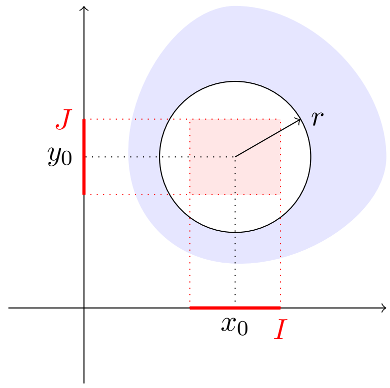

FIGURE 1 – Un ouvert A, contenant un disque, contenant un rectangle.

Démonstration.
Il existe $r > 0$ tel que le $B((x_0, y_0), r) \subset A$. En posant

$$I = \left] x_0 - \frac{r}{\sqrt{2}} ; x_0 + \frac{r}{\sqrt{2}} \right[$$
$$J = \left] y_0 - \frac{r}{\sqrt{2}} ; y_0 + \frac{r}{\sqrt{2}} \right[$$

on vérifie aisément que $I \times J \subset B((x_0, y_0), r)$, I et J étant bien des intervalles ouverts contenant respectivement x_0 et y_0. $\square$

1.2 Représentation d'une fonction de deux variables

Dans cette partie, on considère un ouvert A de $\mathbb{R}^2$ et une fonction $f : A \to \mathbb{R}$.

Rappel 1.2.1.
Le graphe de f est

$$\Gamma = \{ (a, f(a)) \mid a \in A \}.$$

Remarque 1.2.2.
Le graphe de f est formellement une partie de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, que l'on identifie à $\mathbb{R}^3$. On considère donc que le graphe de f est

$$\{ (x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in A \}.$$

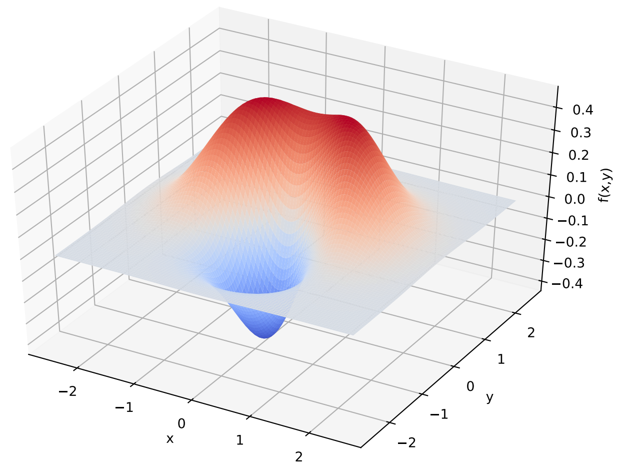

FIGURE 2 – Représentation de $f : (x, y) \mapsto (x^2 + y)e^{-(x^2+y^2)}$.

Ainsi, le graphe de f se représente comme une « nappe » au dessus de la partie A, $f(x, y)$ désignant l'altitude du point d'abscisse x et d'ordonnée y (voir figure 2).

1.3 Continuité

Dans cette partie, on considère un ouvert A de $\mathbb{R}^2$ et une fonction $f : A \to \mathbb{R}$.

Définition 1.3.1.
Soit $a \in A$, la fonction f est continue en a si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A,\\ \|x - a\| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

La fonction f est continue sur A si elle est continue en tout point a de A.

Proposition 1.3.2 (opérations)**.**
Soit $f, g : A \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur A.

1. Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + \mu g$ est continue sur A.
2. Les fonctions fg, $|f|$, $\min(f, g)$ et $\max(f, g)$ sont continues sur A.

Démonstration.
C'est la même chose que pour les fonctions réelles. □

Proposition 1.3.3 (composition à gauche)**.**
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur A, soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.

Alors, $\varphi \circ f$ est continue sur A.

Démonstration.
C'est la même chose que pour les fonctions réelles. □

Proposition 1.3.4 (composition à droite)**.**
Soit A, B deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continues sur A, soit $u, v : B \to \mathbb{R}$ continues telles que $u(B) \times v(B) \subset A$.

Alors, $(x, y) \mapsto f(u(x, y), v(x, y))$ est continue sur B.

Démonstration.
C'est la même chose que pour les fonctions réelles. □

Lemme 1.3.5 (continuité des projections)**.**
Les fonctions $\pi_1 : (x, y) \mapsto x$ et $\pi_2 : (x, y) \mapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Démonstration.
Il suffit de voir que pour tout $a, b \in \mathbb{R}^2$ et pour $i \in \{1, 2\}$,

$$|\pi_i(a) - \pi_i(b)| = |\pi_i(a - b)| \leqslant \|a - b\|.$$

□

Définition 1.3.6.
On appelle *fonction polynomiale de deux variables* toute fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ combinaison linéaire des fonctions de la forme

$$(x, y) \mapsto x^p y^q,$$

pour $p, q \in \mathbb{N}$.

Proposition 1.3.7.
Toute fonction polynomiale de deux variables est continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.
Il suffit d'utiliser le résultat du lemme 1.3.5, puis la stabilité de l'ensemble des fonctions continues par combinaison linéaire et produit. □

2 Introduction au calcul différentiel

Dans cette partie on considère U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et f une application de U dans $\mathbb{R}$.

2.1 Dérivées partielles

Définition 2.1.1.
On dit que la fonction f est dérivable en un point (x_0, y_0) par rapport à sa première variable si la fonction partielle $f_1 : x \mapsto f(x, y_0)$ est dérivable en x_0. On note alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_1'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

La fonction f est dite dérivable par rapport à sa première variable sur U si elle l'est en tout point de U.

De même, On dit que la fonction f est dérivable en un point (x_0, y_0) par rapport à sa deuxième variable si la fonction partielle $f_2 : y \mapsto f(x_0, y)$ est dérivable en y_0. On note alors

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_2'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

La fonction f est dite dérivable par rapport à sa deuxième variable sur U si elle l'est en tout point de U.

Remarque 2.1.2.
Le lemme 1.1.5 assure la validité de cette définition, vu le caractère ouvert de U.

Remarque 2.1.3.
La notation $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ signifie la dérivation par rapport à la *première* variable de la fonction f, et est parfois notée $D_1 f$, ou $\partial_1 f$, *idem* pour la dérivation par rapport à la seconde variable.

Si l'on a noté une fonction $f : (u, v) \mapsto [...]$, on pourra bien entendu écrire $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ pour signifier la dérivation par rapport à la première variable de f, *idem* pour la dérivation par rapport à la seconde variable.

On évitera absolument de considérer une fonction $f : (y, x) \mapsto [...]$.

On pourra aussi utiliser le symbole $\dfrac{\partial}{\partial \heartsuit}$ pour signifier la dérivation partielle d'une expression par rapport à la variable $\heartsuit$, toutes les autres variables étant considérées comme fixées.

Exemple 2.1.4.
Avec $f : (x, y) \mapsto x^2 \mathrm{e}^{-x+y^2}$, définie sur $\mathbb{R}^2$, on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (2x - x^2)\mathrm{e}^{-x+y^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^2 y \mathrm{e}^{-x+y^2}.$$

Remarque 2.1.5 ().
Une fonction de deux variables peut être dérivable par rapport à chacune de ses deux variables, sans pour autant être continue.

Par exemple, la fonction définie par

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad x = y = 0 \end{cases}$$

admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$, mais n'est pas continue.

La dérivabilité par rapport à chacune des variables est élémentaire, la non continuité en 0 découle par exemple du fait que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x, x) = \frac{1}{2}.$$

Il suffit ensuite prendre x suffisamment petit pour nier la continuité de f.

2.2 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition 2.2.1.
La fonction f est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur U si f est dérivable par rapport à ses deux variables sur U et si les deux fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur U.

Proposition 2.2.2.
Toute fonction polynomiale de deux variables est de classe $\mathscr{C}^1$.

Démonstration.
Une fonction polynomiale de deux variables est dérivable par rapport à chacune de ses variables, et ses dérivées partielles sont polynomiales, donc continues. $\square$

Définition 2.2.3 (notation o)**.**
Soit $f, g : U \to \mathbb{R}$, soit $a \in U$.

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a s'il existe une fonction $\varepsilon : U \to \mathbb{R}$ continue en a et vérifiant $\varepsilon(a) = 0$ telle que, pour tout $(x, y) \in U$,

$$f(x, y) = g(x, y)\varepsilon(x, y).$$

On note ceci

$$f(x, y) \underset{(x,y)\to a}{=} o(g(x, y)).$$

Théorème 2.2.4 (DL à l'ordre 1)**.**
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, soit $(x_0, y_0) \in U$. Alors

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &\underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0, y_0) \\ &+ h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(\|(h, k)\|). \end{aligned}$$

Démonstration (hors-programme)**.**
Pour alléger les notations, on note $a = (x_0, y_0)$.

On définit $\varepsilon : U \to \mathbb{R}$ par $\varepsilon(0, 0) = 0$ et si $(h, k) \neq (0, 0)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(h, k) = \frac{1}{\|(h, k)\|}\big(f(a + (h, k)) - f(a) - \\ h\frac{\partial f}{\partial x}(a) - k\frac{\partial f}{\partial y}(a)\big) \end{aligned}$$

On montre que la fonction ε est continue en $(0, 0)$. Considérons $\eta > 0$.

Soit I et J deux intervalles ouverts vérifiant $I \times J \subset U$, $x_0 \in I$ et $y_0 \in J$. Il existe notamment $\alpha_0 > 0$ tel que, pour tout $u \in U$, si $\|a - u\| \leqslant \alpha$, alors $u \in I \times J$.

Pour $u = (h, k)$ suffisamment petit, on a

$$\begin{aligned} \Delta &= \left|f(a + u) - f(a) - h\frac{\partial f}{\partial x}(a) - k\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right| \\ &= \Big|f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - h\frac{\partial f}{\partial x}(a) \\ &\qquad + f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - k\frac{\partial f}{\partial y}(a)\Big| \\ &\leqslant \underbrace{\left|f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - h\frac{\partial f}{\partial x}(a)\right|}_{\Delta_1} \\ &\qquad + \underbrace{\left|f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - k\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right|}_{\Delta_2} \end{aligned}$$

Comme $f(\cdot, y_0 + k)$ est dérivable sur I, par le théorème des accroissements finis, il existe t_1 entre x_0 et $x_0 + h$ vérifiant

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) = h\frac{\partial f}{\partial x}(t_1, y_0 + k).$$

On a donc

$$\Delta_1 = |h|\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t_1, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right|.$$

Comme $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $a = (x_0, y_0)$, il existe $\alpha_1 > 0$ tel que pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, si $\|(h, k)\| \leqslant \alpha_1$, alors

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t_1, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right| \leqslant \eta,$$

ce qui donne $|\Delta_1| \leqslant \eta\,\|(h, k)\|$.

On procède de même pour Δ_2, et il existe donc $\alpha_2 > 0$ tel que pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, si $\|(h, k)\| \leqslant \alpha_2$, alors $|\Delta_1| \leqslant \eta\,\|(h, k)\|$.

Ainsi, pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, si $\|(h, k)\| \leqslant \min(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, alors $|\varepsilon(h, k)| \leqslant 2\eta$, ce qui est bien le résultat demandé. $\square$

Remarque 2.2.5 (plan tangent)**.**
Sous les mêmes hypothèses,

$$z - f(x_0, y_0) = (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

est l'équation d'un plan, appelé *plan tangent* au graphe de f en (x_0, y_0).

Corollaire 2.2.6.
Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, alors f est continue.

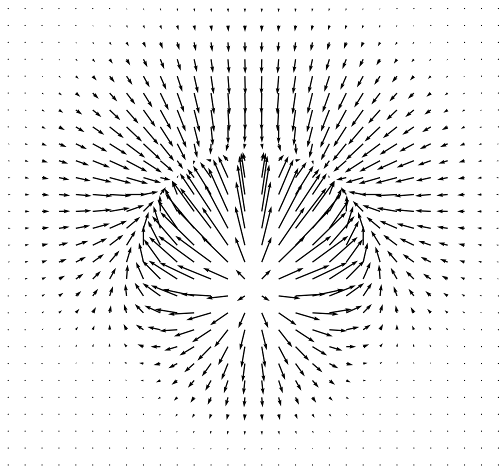

FIGURE 3 – Champ de vecteurs de ∇f, pour $f : (x,y) \mapsto (x^2+y)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

Définition 2.2.7 (gradient).
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, soit $(x_0,y_0) \in U$. On définit le *gradient* de f en (x_0,y_0) comme le vecteur

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right).$$

Remarque 2.2.8.
Le théorème 2.2.4 s'écrit alors ainsi, avec $a = (x_0,y_0)$:

$$f(a+u) \underset{u\to(0,0)}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), u\rangle + o(\|u\|).$$

Exemple 2.2.9.
Le champ de vecteur de l'exemple du début du chapitre est tracé dans la figure 3.

2.3 Dérivées directionnelles

Définition 2.3.1 (dérivée selon un vecteur).
Soit $a \in U$, soit $v \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, soit $f : U \to \mathbb{R}$. La fonction f est dite *dérivable selon le vecteur v en a* si la fonction $t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0.

La dérivée de cette fonction en 0 est alors appelée *dérivée* de f selon v en a, et est notée $D_v f(a)$:

$$D_v f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

Remarque 2.3.2.
En notant (e_1,e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a sous réserve d'existence :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = D_{e_1} f(a),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = D_{e_2} f(a).$$

Remarque 2.3.3.
Si $\|v\| = 1$, $D_v f(a)$ est la pente de la droite tangente au graphe de f en a et dirigée par v.

Théorème 2.3.4.
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ en $a \in U$, alors f admet des dérivées selon tous les vecteurs en a, et pour tout $v \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$:

$$D_v f(a) = \langle \nabla f(a), v\rangle.$$

Remarque 2.3.5.
On a donc pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ non nuls :

$$D_{(h,k)} f(a) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

Démonstration.
Notons $v = (h,k)$ et $a = (x_0,y_0)$, soit $t \neq 0$. Par le théorème de développement limité à l'ordre 1 de f, qui est de classe $\mathscr{C}^1$,

$$f(a+tv) = f(a) + th\frac{\partial f}{\partial x}(a) + tk\frac{\partial f}{\partial y}(a) + o(\|tv\|)$$

Il existe donc une fonction ε continue en $(0,0)$ et vérifiant $\varepsilon(0,0) = 0$ telle que, pour tous tels a, v, t,

$$f(a+tv) = f(a) + th\frac{\partial f}{\partial x}(a) + tk\frac{\partial f}{\partial y}(a) + |t|\,\|v\|\,\varepsilon(|t|\,\|v\|),$$

ce que l'on écrit

$$f(a+tv) = f(a) + th\frac{\partial f}{\partial x}(a) + tk\frac{\partial f}{\partial y}(a) + o(t).$$

Ainsi, $t \mapsto f(a+tv)$ admet un DL à l'ordre 1 en 0, donc est dérivable en 0, et immédiatement

$$D_v f(a) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

□

Remarque 2.3.6.
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\nabla f(a)$ est la direction selon laquelle croît/décroît le plus vite, c'est-à-dire la direction de pente la plus forte.

2.4 Composition, règle de la chaîne

Théorème 2.4.1 (règle de la chaîne)**.**
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $x, y : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que $x(I) \times y(I) \subset U$.

Alors, $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x(t),y(t))) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)) \\ + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t)).\end{aligned}$$

Démonstration.
Soit $t_0 \in O$. Notons $a = (x(t_0), y(t_0))$. Pour $t \in I$, on note aussi $\varphi(t) = (x(t), y(t))$.

Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, on peut appliquer le théorème de développement limité à l'ordre 1. Il existe donc une fonction ε continue en 0, vérifiant $\varepsilon(0,0) = 0$ et telle que pour tout $u = (h, k)$ tel que $a + u \in U$:

$$f(a+u) = f(a) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a) + \|u\|\,\varepsilon(\|u\|).$$

On a donc pour $t \in I$:

$$\begin{aligned}f(\varphi(t)) = f(a) + (x(t) - x(t_0))\frac{\partial f}{\partial x}(a) \\ + (y(t) - y(t_0))\frac{\partial f}{\partial y}(a) + \|\varphi(t) - a\|\,\varepsilon(\|\varphi(t) - a\|).\end{aligned}$$

Comme x et y sont dérivables, on peut écrire des développements limités à l'ordre 1. Il existe donc deux fonctions ε_1 et ε_2 de limite nulle en 0 telles que, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned}x(t) - x(t_0) &= (t - t_0)x'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon_1(t),\\ y(t) - y(t_0) &= (t - t_0)y'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon_2(t).\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}f(\varphi(t)) = f(a) + (t - t_0)\left(x'(t_0)\frac{\partial f}{\partial x}(a) + y'(t_0)\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right) \\ + R(t),\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}R(t) = (t - t_0)\left(\varepsilon_1(t)\frac{\partial f}{\partial x}(a) + \varepsilon_2(t)\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right) \\ + \|\varphi(t) - a\|\,\varepsilon(\|\varphi(t) - a\|).\end{aligned}$$

Il suffit de montrer que $R(t) = o(t - t_0)$. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont bornées au voisinage de 1, et comme ε_1 et ε_2 tendent vers 0, on peut écrire que

$$\varepsilon_1(t)\frac{\partial f}{\partial x}(a) + \varepsilon_2(t)\frac{\partial f}{\partial y}(a) = o(1).$$

De plus, comme φ est dérivable$a$, en généralisant les notations de Landau,

$$\begin{aligned}\|\varphi(t) - a\| &= |t - t_0|\left\|\frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}\right\|\\ &= |t - t_0| \times O(1)\\ &= O(t - t_0)\end{aligned}$$

Par composition, on a $\varepsilon(\|\varphi(t) - a\|) = o(1)$, ce qui permet de conclure. □

Remarque 2.4.2.
Sous les mêmes hypothèses, notons $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$. Cette fonction γ est appelée *arc de classe* $\mathscr{C}^1$. La règle de la chaîne donne la dérivée de f suivant l'arc γ, et peut s'écrire comme suit :

$$(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle.$$

Définition 2.4.3.
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Si $z \in \mathbb{R}$, on appelle *ligne de niveau de f d'altitude z* la partie

$$\{\, a \in \mathbb{R}^2 \mid f(a) = z \,\}.$$

Exemple 2.4.4.
On a tracé dans la figure 4 les lignes de niveau correspondant à la fonction tracée dans la figure 2.

Exemple 2.4.5.
Vous trouverez dans la figure 5 un exemple de carte IGN, faisant figurer les lignes de niveau du terrain. Avec un peu d'habitude, on arrive très bien à se représenter le terrain !

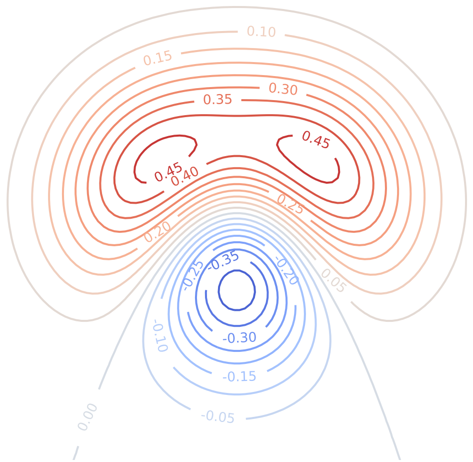

FIGURE 4 – Lignes de niveau de $f : (x,y) \mapsto (x^2+y)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

Remarque 2.4.6.
La ligne de niveau d'altitude z est donc $f^{-1}(\{z\})$.

Proposition 2.4.7.
Soit $f : U \to \mathbb{R}$, soit $\gamma : I \to U$ un arc de classe $\mathscr{C}^1$ tel que $\gamma(I)$ est inclu dans une ligne de niveau de f.

Alors, pour tout $t \in I$, $\nabla f(\gamma(t))$ est orthogonal à $\gamma'(t)$.

Démonstration.
Immédiat, étant donné que pour tout $t \in I$: $(f \circ \gamma)'(t) = 0$. □

Remarque 2.4.8.
La propriété précédente est souvent résumée sous la locution « le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau de f ». En effet, $\gamma'(t)$ dirige la droite tangente à l'arc γ au point $\gamma(t)$ (voir figure 6).

Le théorème des fonctions implicites (hors programme) permet de montrer que, sous certaines hypothèses, les lignes de niveau d'une fonction forment des arcs de classe $\mathscr{C}^1$.

Théorème 2.4.9.
Soit U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, soit $\varphi, \psi : V \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que $\varphi(V) \times \psi(V) \subset U$.

Soit

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \end{array} \right. .$$

Alors, g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V et pour tout $(u,v) \in V$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v), \psi(u,v))\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v), \psi(u,v))\frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v), \psi(u,v))\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v), \psi(u,v))\frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v) \end{aligned}$$

Remarque 2.4.10 (à la physicienne)**.**
Les formules précédentes sont quelque peu difficiles à retenir. En notant x la fonction φ et y la fonction ψ, en notant $t = (u,v)$ et $a(t) = (x(t), y(t))$, on a alors

$$\frac{\partial (f \circ a)}{\partial u}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(a(t))\frac{\partial x}{\partial u}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(a(t))\frac{\partial y}{\partial u}(t),$$

ce que l'on peut (abusivement) écrire

$$\frac{\partial (f \circ a)}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

2.5 Recherche d'extrema

Définition 2.5.1 (extremum global)**.**
Soit $a \in U$.

1. On dit que a est le lieu d'un *maximum global* de f si $\forall u \in U$, $f(u) \leqslant f(a)$.
2. On dit que a est le lieu d'un *minimum global* de f si $\forall u \in U$, $f(u) \geqslant f(a)$.
3. On dit que a est le lieu d'un *extremum global* de f si c'est le lieu d'un minimum ou d'un maximum global de f.

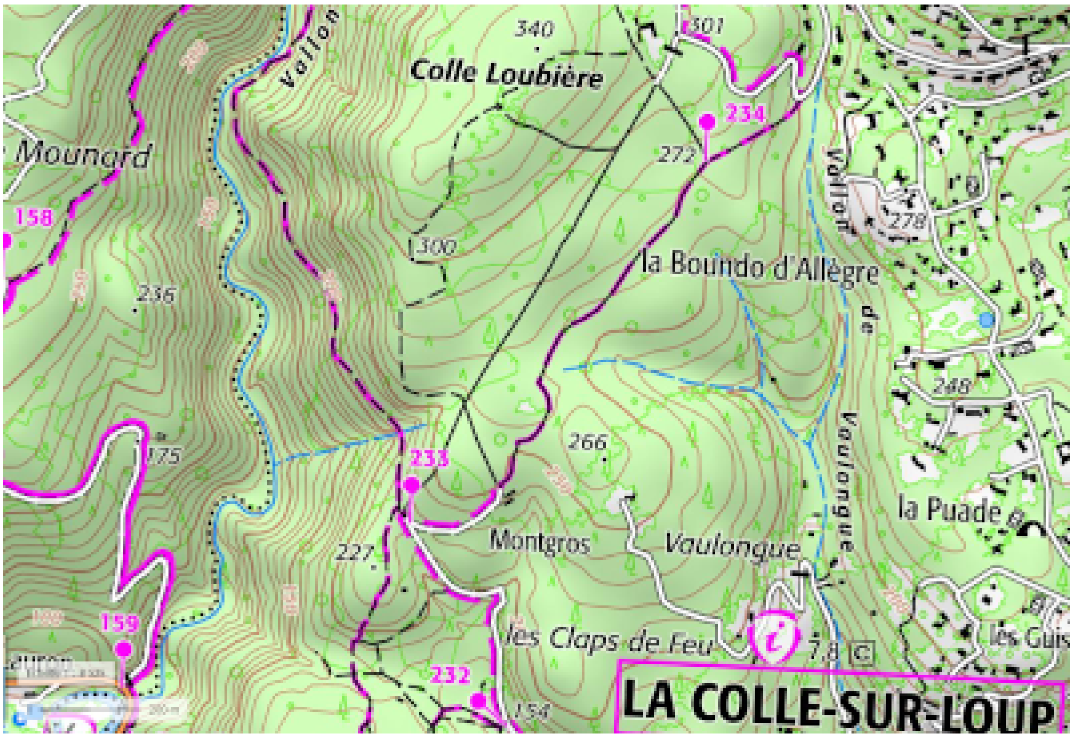

FIGURE 5 – Exemple de carte IGN (source : géoportail).

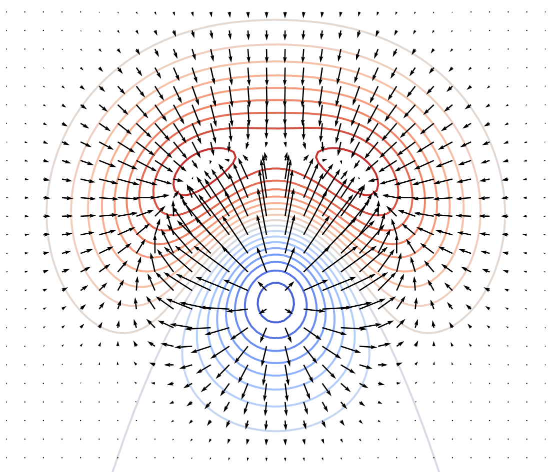

FIGURE 6 – Champ de vecteurs de ∇f, et lignes de niveau de f.

Remarque 2.5.2.
On dit aussi que f admet un maximum global en a (*idem* pour minimum et extremum).

Définition 2.5.3 (extremum local)**.**
Soit $a \in U$.

1. On dit que a est le lieu d'un *maximum local* de f s'il existe $r > 0$ tel que
$$\forall u \in U,\ \|a-u\| \leqslant r \to f(u) \leqslant f(a).$$
2. On dit que a est le lieu d'un *minimum local* de f s'il existe $r > 0$ tel que
$$\forall u \in U,\ \|a-u\| \leqslant r \to f(u) \geqslant f(a).$$
3. On dit que a est le lieu d'un *extremum local* de f si c'est le lieu d'un minimum ou d'un maximum local de f.

Remarque 2.5.4.
On dit aussi que f admet un maximum local en a (*idem* pour minimum et extremum).

Remarque 2.5.5.
Tout extremum global est aussi un extremum local, la réciproque étant bien évidemment fausse.

Définition 2.5.6 (point critique)**.**
Soit $f : U \to \mathbb{R}$, un *point critique* de f est un point $a \in U$ vérifiant

$$\nabla f(a) = (0, 0).$$

Théorème 2.5.7 (condition du premier ordre)**.**
Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, soit $a \in U$.

Si f admet un extremum local en a, alors a est un point critique de f.

Démonstration.
Notons $a = (x_0, y_0)$. Les deux fonctions partielles de f en a admettent chacune un extremum local en x_0/y_0, intérieur à leur ensemble de définition. Elles y admettent donc chacune un point critique, donc les dérivées partielles de f sont nulles en a, d'où le résultat. $\square$

Remarque 2.5.8.
Il est ici primordial que U soit un ouvert.

Ce théorème ne donne qu'une condition *nécessaire* pour qu'un point soit un extremum local (et *a fortiori* global) d'une fonction.