

Feuille d'exercice n° 03 : Quelques fondamentaux


Exercice 1 Soit P, Q deux propositions. La proposition $(P \wedge Q \implies (\neg P) \vee Q)$ est-elle nécessairement vraie ?

Exercice 2 Soit la propriété suivante : $P(z) : \ll |z - 1| \leq 3 \implies |z - 5| \geq 1 \gg$.


- 1) Quel est l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z)$ soit vraie ? A-t-on : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z)$ vraie ?
- 2) Mêmes questions en remplaçant $|z - 5| \geq 1$ par $|z - 5| > 1$, puis par $|z - 5| \geq 2$.

Exercice 3 Dans chacun des cas suivants, comprendre le sens des deux phrases proposées et déterminer leur valeur de vérité :

- 1) $\forall n \in \mathbb{N} \exists N \in \mathbb{N} n \leq N$ et $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n \leq N$.
- 2) $\forall y \in \mathbb{R}_+^* \exists x \in \mathbb{R} y = e^x$ et $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}_+^*, y = e^x$.
- 3) Soit f une fonction réelle définie sur \mathbb{R} .
 $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} y = f(x)$ et $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} y = f(x)$.

Exercice 4 () Écrire la négation des assertions suivantes où P, Q, R, S sont des propositions.

- 1) $P \implies Q$
- 2) P et non Q
- 3) P et $(Q$ et $R)$
- 4) P ou $(Q$ et $R)$
- 5) $(P$ et $Q) \implies (R \implies S)$

Exercice 5 () Soit f une fonction réelle définie sur \mathbb{R} . Quelle est la négation des propositions suivantes ?

- 1) $\exists M \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$
- 2) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 1$ ou $f(x) \leq -1$
- 3) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0 \implies x \geq 0$
- 4) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y \leq f(x) \leq 2x + y$
- 5) $\forall x \in \mathbb{R}, (\exists y \in \mathbb{R}, f(x) \geq y) \implies x \leq 0$


Exercice 6 Soient les quatre assertions suivantes :

- (a) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$; (c) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$;
(b) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$; (d) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x$.


- 1) Les assertions (a), (b), (c) et (d) sont-elles vraies ou fausses ?
- 2) Donner la négation de chacune.

Exercice 7 Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\Leftrightarrow, \Leftarrow, \Rightarrow$.

- 1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 4 \dots\dots x = 2$
- 2) $\forall z \in \mathbb{C} \quad z = \bar{z} \dots\dots z \in \mathbb{R}$
- 3) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x = \pi \dots\dots e^{2ix} = 1$

Exercice 8 () Soit f une fonction réelle définie sur \mathbb{R} . Écrire au moyen de quantificateurs les propositions suivantes :

- | | |
|------------------------|---|
| 1) f est croissante. | 3) f s'annule au plus une fois. |
| 2) f est périodique. | 4) f prend au moins une fois la valeur 1. |

Exercice 9 () Écrire avec des quantificateurs les assertions suivantes, où u désigne une suite réelle et f désigne une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

- | | |
|------------------------------------|--------------------------------------|
| 1) La suite u est majorée. | 3) La fonction f n'est pas paire. |
| 2) La suite u n'est pas majorée. | 4) La fonction f n'est pas bornée. |

Exercice 10 En quoi le raisonnement suivant est-il faux ?

Soit $\mathcal{P}(n)$: « n crayons de couleurs sont tous de la même couleur ».

- $\mathcal{P}(1)$ est vraie car un crayon de couleur est de la même couleur que lui-même.
- Supposons $\mathcal{P}(n)$. Soit $n + 1$ crayons. On en retire 1. Les n crayons restants sont de la même couleur par hypothèse de récurrence.
Reposons ce crayon et retirons-en un autre ; les n nouveaux crayons sont à nouveau de la même couleur. Le premier crayon retiré était donc bien de la même couleur que les n autres. La proposition est donc vraie au rang $n + 1$.
- On a donc démontré que tous les crayons en nombre infini dénombrable sont de la même couleur.

Exercice 11 Dans un match de rugby, une équipe peut marquer 3 points (pénalité ou drop), 5 points (essai non transformé) ou 7 points (essai transformé). Quel est l'ensemble des scores possibles ?

Exercice 12 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite (on admet qu'elle existe et que la relation suivante permet bien de la définir) vérifiant : $u_0 \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n \leq 2^n$.

