

Feuille d'exercice n° 21 : **Dénombrement - correction**

Exercice 1

- 1) a) Si $m \in \mathbb{R}$ est tel que $\mathcal{D}_{m,p} \cap \mathcal{M}$ est de cardinal ≥ 2 , alors m est la pente d'une droite passant par 2 points de \mathcal{M} , il y en a au plus 999×1000 .
- b) Au minimum : 0 si tous les points sont alignés verticalement. Il n'y a bien qu'une droite qui passe par au moins deux de ces points, et cette droite n'a pas de pente.
Maximum : prendre les (k, e^k) , si une droite $\mathcal{D}_{m,p}$ contient trois points de \mathcal{M} : (a, e^a) , (b, e^b) et (c, e^c) avec $a < b < c$, alors $\frac{e^c - e^a}{e^b - e^a} = \frac{c - a}{b - a}$ ce qui donne une équation polynomiale à coefficients entiers annulant e : c'est absurde.
- 2) Il suffit de prendre un m_0 qui n'est pas dans l'ensemble de 1)a), ce qui est possible car cet ensemble est fini et \mathbb{R} ne l'est pas.
- 3) Il y a donc exactement $p_1 < \dots < p_{1000}$ pentes telles que $\text{Card}(\mathcal{D}_{m_0,p} \cap \mathcal{M}) = 1$. Il suffit de prendre $p = \frac{p_{500} + p_{501}}{2}$. Notons M_k le point sur la droite de pente p_k . Alors M_1, \dots, M_{500} sont en dessous de la droite $\mathcal{D}_{m_0,p}$ et M_{501}, \dots, M_{1000} sont au dessus.

Exercice 2 Avec V l'ensemble des voyelles et C celui des consonnes, c'est

$$\text{Card}([V \times C \times V \times C \times V] \sqcup [C \times V \times C \times V \times C]) = 6^3 \times 20^2 + 6^2 \times 20^3 = 374\,400.$$

Exercice 3 On le montre par récurrence sur n .

Pour $n = 1$, on écrit juste $\text{Card}(A_1) = \text{Card}(A_1)$. Pour $n = 2$, c'est la formule vue en cours.

Soit $n \geq 3$, supposons que la formule est vraie pour n ensembles. Notons $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ et $B = A \cap A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap A_{n+1})$. On a alors

$$\begin{aligned} \text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \text{Card}(A \cup A_{n+1}) \\ &= \text{Card}(A) + \text{Card}(A_{n+1}) - \text{Card}(A \cap A_{n+1}) \\ &= \text{Card}(A) + \text{Card}(A_{n+1}) - \text{Card}(B) \end{aligned}$$

Or, par récurrence,

$$\begin{aligned} \text{Card}(A) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \subset [1,n], \text{Card}(I)=k} \text{Card}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{I \subset [1,n+1], \text{Card}(I)=k, n+1 \notin I} \text{Card}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \end{aligned}$$

La somme porte bien sur toutes les parties de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ ne contenant pas $n+1$.

$$\begin{aligned} \text{Card}(B) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Card}(I)=k} \text{Card} \left(\bigcap_{i \in I} A_i \cap A_{n+1} \right) \\ \text{Card}(B) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Card}(I)=k} \text{Card} \left(A_{n+1} \cap \bigcap_{i \in I} A_i \right) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+2-1} \sum_{I \subset \llbracket 1, n+1 \rrbracket, \text{Card}(I)=k+1, n+1 \in I} \text{Card} \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \\ &= - \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{I \subset \llbracket 1, n+1 \rrbracket, \text{Card}(I)=k, n+1 \in I} \text{Card} \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right). \end{aligned}$$

La somme porte bien sur toutes les parties de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ contenant $n+1$, sauf $\{n+1\}$.

Enfin, on peut écrire observer que le terme $\text{Card}(A_{n+1})$ correspond au cas où $I = \{n+1\}$, qui est le seul qui n'apparaît pas dans les sommes précédentes.

On obtient donc bien

$$\text{Card} \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \right) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{I \subset \llbracket 1, n+1 \rrbracket, \text{Card}(I)=k} \text{Card} \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right).$$

On a donc bien établi la formule du crible pour $n+1$ ensembles, d'où le résultat par récurrence.

Exercice 4 \mathbb{Z} est infini, S_E non, donc l'application $k \mapsto \sigma^k$ n'est pas injective. Il existe $k \neq \ell$ tels que $\sigma^k = \sigma^\ell$. On peut supposer que $k < \ell$, donc $\sigma^{\ell-k} = \text{Id}_E$.

Exercice 5 Il y a correspondance bijective entre ces applications strictement croissantes et le nombre de parties à n éléments dans $\llbracket 1; p \rrbracket$.

En effet, si $\varphi : \llbracket 1; n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1; p \rrbracket$ est strictement croissante, alors φ est injective donc $\text{Im } \varphi$ est une partie à n éléments de $\llbracket 1; p \rrbracket$. Remarquons de plus que si deux applications strictement croissantes φ et ψ de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans $\llbracket 1; p \rrbracket$ ont la même image A , alors elles sont égales. En effet, $\varphi(1) = \psi(1) = \min(A)$, etc..

Réciproquement, si A une partie à n éléments de $\llbracket 1; p \rrbracket$, alors on peut ordonner A par ordre croissant : $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Il suffit alors de poser, pour chaque $1 \leq i \leq n$, $\varphi(i) = x_i$. Alors, on a $\varphi : \llbracket 1; n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1; p \rrbracket$ et φ est strictement croissante, par construction.

Il y a donc $\binom{p}{n}$ applications strictement croissantes de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans $\llbracket 1; p \rrbracket$.

Exercice 6 En triant E par ordre croissant, il y a une correspondance bijective entre les relations d'ordre totales sur E et les permutations de E .

Il y en a donc $\text{Card } E!$.

Exercice 7 Un triangle est caractérisé par la donnée de trois droites non parallèles. Donc il y en a $\binom{n}{3}$.

Exercice 8

- 1) Il y en a autant que de parties de $E \setminus X$, or $\text{Card}(E \setminus X) = n - p$. Il y en a donc 2^{n-p} .
- 2) Soit $0 \leq p \leq n$ fixé, il y a $\binom{n}{p}$ parties X de cardinal p , donc il y a $2^{n-p} \binom{n}{p}$ couples de parties (X, Y) disjointes donc X est de cardinal p . Puis on fait varier p . Il y en a donc

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 2^{n-p} = (1+2)^n = 3^n.$$