Devoir à la maison n° 15

À rendre le 22 mars

Les fonctions considérées ici sont toutes réelles.

1) Résoudre sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle

$$\cos(t)z''(t) - 2\sin(t)z'(t) - \cos(t)z(t) = 0. \qquad (\mathscr{E})$$

Indication : on pourra réaliser le changement de fonction inconnue : $\varphi(t) = \cos(t) \cdot z(t)$.

2) Résoudre sur $J =]-1, 1[$ l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y''(x) - 3xy'(x) - y(x) = 0. \qquad (\mathscr{F})$$

Indication : on pourra réaliser le changement de variable : $x = \sin t$.

3) *On répondra à ces questions sans utiliser la question précédente.*
Soit f une solution sur J de l'équation $(\mathscr{F})$.

a) Justifier que f est infiniment dérivable.

b) Observer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in J, \quad (1 - x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n + 3)xf^{(n+1)}(x) - (n + 1)^2 f^{(n)}(x) = 0.$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = f^{(n)}(0)$. Former une relation liant a_{n+2} et a_n.

d) Exprimer a_{2p+1} et a_{2p} en fonction respectivement de a_1 et a_0, et à l'aide notamment de nombres factoriels.

4) Déterminer les développements limités suivants.

a) Le DL en 0 à l'ordre de $2n + 1$ de $x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

b) Le DL en 0 à l'ordre de $2n$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

c) Le DL en 0 à l'ordre de $2n + 1$ de $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$.

5) En déterminant le coefficient de x^{2n+1} dans le produit des deux derniers développements limités, obtenir la formule

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k + 1} \binom{2k}{k} \binom{2(n - k)}{n - k} = \frac{16^n}{(n + 1)\dbinom{2n + 1}{n}}.$$

— **FIN** —