LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON
SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR
CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I.
ANNÉE 2018 - 2019

C8 : MODÉLISATION DES PERFORMANCES STATIQUES DES SYSTÈMES

C8-2 - Résolution d'un problème de statique des solides

28 Mai 2019

Table des matières

Compétences

- **Analyser** :
  - définir les frontières de l'analyse
  - Apprécier la pertinence et la validité des résultats : Grandeurs utilisées, unités, homogénéité, ordre de grandeur.
- **Modéliser** :
  - Identifier et caractériser les grandeurs physiques :
    - > Grandeurs d'entrée et de sortie d'un système isolé,
    - > nature et évolution des grandeurs.
  - **Résoudre** :
    - > Procéder à la mise en oeuvre d'une démarche de résolution analytique : principe fondamental de la statique.

I. Isolement d'un système dans un référentiel

1 Isolement

La première étape de l'étude statique d'un système consiste à **isoler** un ensemble ou système. On aura la possibilité d'isoler un ou plusieurs solides à la fois. Un fois l'isolement effectué, on pourra alors discerner l'extérieur et l'intérieur d'un système (E). On notera $(\overline{E})$ l'ensemble extérieur à (E).

2 Actions mécaniques extérieures et intérieures

Définition 1 :

- Les **actions mécaniques extérieures** correspondent à celles exercées par un quelconque composant externe $(\overline{E})$ sur (E).
- Les **actions mécaniques intérieurs** correspondent à celles exercées par un quelconque composant de (E) sur un autre composant de (E).

3 Référentiels

Avant d'appliquer le Principe Fondamental de la Statique, nous avons besoin de repérer l'ensemble (E) par rapport au temps et à l'espace. Pour cela, nous utilisons des référentiels. Un référentiel est l'association d'un repère spatial et d'une base de temps.

Définition 2 : *Référentiel galiléen*

Un **référentiel galiléen** est un couple repère $(R\left(0, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right))$ et base de temps (t), par rapport auquel le **Principe Fondamental de la Statique s'applique**.

Remarque 1 :

Pour la plupart des mécanismes étudiés en laboratoire à notre échelle de temps et de distance, on pourra considérer que le référentiel lié à la terre est une bonne approximation de référentiel galiléen.

II. Énoncé du Principe Fondamental de la Statique

1 Équilibre

Définition 3 :

Considérons un ensemble matériel (E). On dit que (E) est en équilibre si au cours du temps, chaque point de (E) conserve une position fixe par rapport à un repère R .

2 Principe Fondamental de la statique

Définition 4 :

Dans un référentiel R **galiléen**, si un ensemble matériel (E) est en équilibre par rapport à R, alors le torseur des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur (E) est nul :

$$\boxed{(E) \text{ à l'équilibre} \quad \Rightarrow \quad \sum \left\{ \mathcal{T}_{\left(\bar{E} \to E\right)} \right\} = \{0\}} \tag{1}$$

(où $(\bar{E})$ désigne l'extérieur de (E).)

3 Théorèmes généraux

a) Théorème de la résultante statique

Théorème 1 : ***de la résultante statique***

Pour tout ensemble matériel (E) en équilibre par rapport à un référentiel galiléen :

$$\boxed{\overrightarrow{R_{(\bar{E} \to E)}} = \overrightarrow{0}} \tag{2}$$

b) Théorème du moment statique

Théorème 2 : ***du moment statique***

Pour tout ensemble matériel (E) en équilibre par rapport à un référentiel galiléen :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_{A(\bar{E} \to E)}} = \overrightarrow{0} \ \forall A} \tag{3}$$

c) Théorème des actions réciproques

Théorème 3 : ***des actions réciproques***

Soient (E_1) et (E_2) deux sous-ensembles matériels de (E), en équilibre par rapport à un repère galiléen, et exerçant une action mécanique l'un sur l'autre. Alors :

$$\boxed{\left\{ \mathcal{T}_{(E_1 \to E_2)} \right\} = -\left\{ \mathcal{T}_{(E_2 \to E_1)} \right\}} \tag{4}$$

Attention :

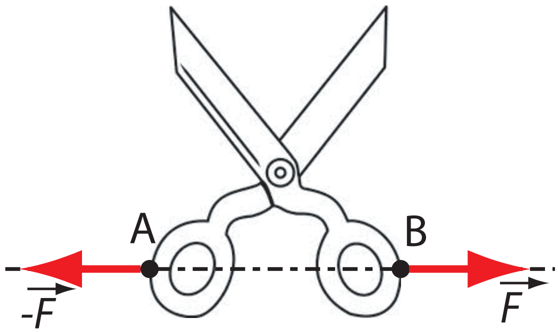
La réciproque du principe fondamental de la statique et des théorèmes généraux ne s'appliquent pas, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1 : *Paire de ciseaux*

Soit l'ensemble (E) composé d'une paire de ciseaux soumis à deux forces $\overrightarrow{F}$ et $-\overrightarrow{F}$. La somme des 2 actions mécaniques s'annule car :

1. $\overrightarrow{R_{(\bar{E}\to E)}} = \overrightarrow{F} - \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$,
2. $\overrightarrow{\mathcal{M}_{A(\bar{E}\to E)}} = \overrightarrow{AA} \wedge (-\overrightarrow{F}) + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

Or dans cette configuration les ciseaux s'ouvrent. Cet exemple montre bien que si le P.F.S est vérifié, le système n'est pas forcément en équilibre.

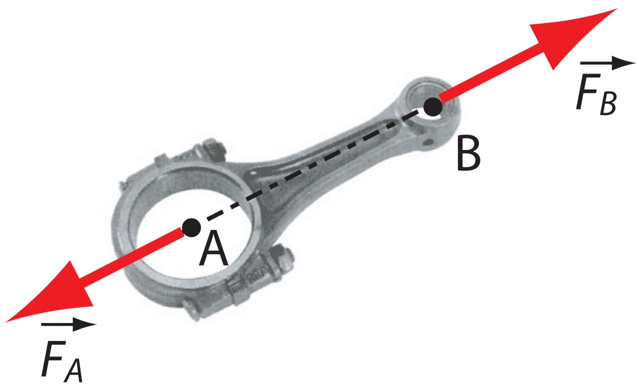


III. Méthodologie de résolution

1 Cas particuliers de résolutions simples

Propriété 1 : *Solide soumis à deux glisseurs*

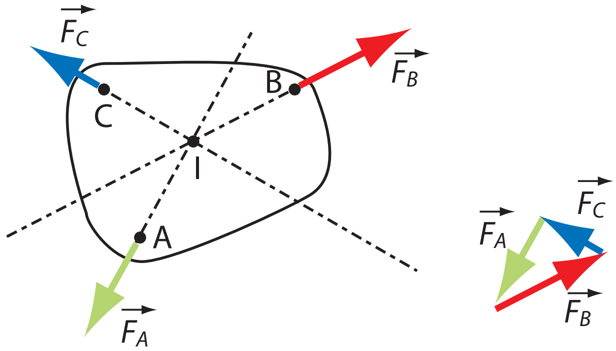
Soit un solide (E) soumis à deux glisseurs, alors la résultante des deux efforts associés à ces deux actions mécaniques sont directement opposées.
Sur la figure ci-dessous : $\overrightarrow{F_A} = -\overrightarrow{F_B}$



Propriété 2 : *Solide soumis à trois glisseurs*

Soit un solide (E) soumis à trois glisseurs, alors les efforts associés aux trois actions mécaniques ont leurs :

- trois directions concourantes ;
- vecteurs associés formant le triangle des efforts.



2 Méthodologie générale d'un problème de statique.

On considérera dans cette partie des ensembles (E) correspondant à des systèmes mécaniques composés de plusieurs solides (N_S solides) liés entre eux par des liaisons mécaniques. L'objectif d'une résolution statique est pour la plupart du temps de calculer les actions mécaniques au niveau des liaisons dans le but de les dimensionner et/ou de vérifier leur tenue vis-à-vis d'une sollicitation extérieure.

La démarche pour résoudre un problème de statique doit être rigoureusement respectée pour éviter toute erreur d'interprétation physique.

1. Isolement d'un système (E) dans un référentiel galiléen.
2. Construction du graphe de structure du système considéré.
3. Ordonnancement des isolements : on commencera par isoler les solides soumis à 2 actions mécaniques de type glisseur, puis les solides soumis à 3, etc...
4. Bilan des Actions mécaniques Extérieures pour chaque isolement.

Remarque 2 :

Parfois il peut s'avérer intéressant d'isoler des groupements de solides.

3 Résolution analytique

- La résolution analytique consiste à déterminer les expressions littérales des torseurs au niveau des liaisons mécaniques d'un système.
- Pour chaque isolement, on exprime les torseurs des actions mécaniques extérieures en un même point judicieusement choisi.
- L'écriture du P.F.S donne 6 équations pour un problème 3D et 3 équations pour un problème plan.
- Le regroupement de toutes les équations aboutit à un système linéaire d'équations de dimension :
  - $3 \cdot N_S$ pour un problème plan ;
  - $6 \cdot N_S$ pour un problème tridimensionnel.
- On s'attachera bien à vérifier l'homogénéité des expressions littérales ainsi que leur cohérence lorsque cela sera possible.

IV. Exemple de résolution d'un problème de statique

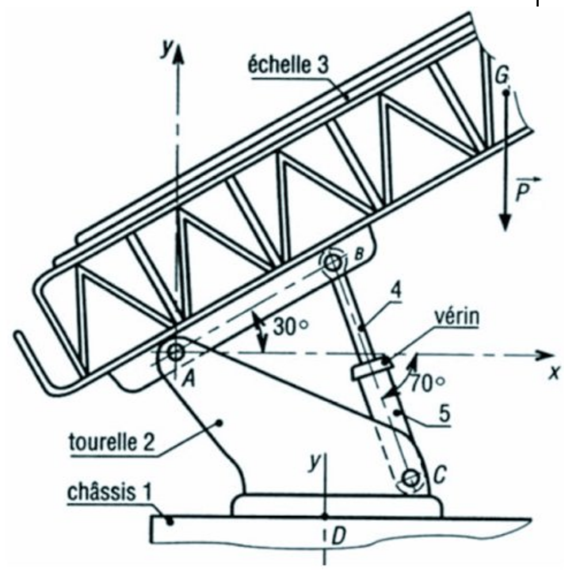
1 Présentation du problème

Exemple 2 : *Modélisation d'une échelle de pompier*

On souhaite dimensionner l'actionneur d'une échelle de pompier : vérin hydraulique. L'inclinaison dans le plan $\left(A, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right)$ (figure suivante) est actionnée par un vérin hydraulique de section utile S_v. Nous nous proposons de déterminer la loi d'entrée-sortie "en effort" de ce système.

- Entrée : Pression p dans le vérin;
- Sortie : Charge $\overrightarrow{P} = -P \cdot \overrightarrow{y}$ à orienter;

Les actions mécanique dues à la pesanteur sont à négliger devant les autres actions mécaniques.
Dans cet exemple on se propose de résoudre le problème de statique dans la configuration présentée ci-dessous. On repère la position d'un point I par ses coordonnées $(x_I,\ y_I)$ respectives dans le plan $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right)$ par rapport au point A. (ie pour B, x_B et y_B).

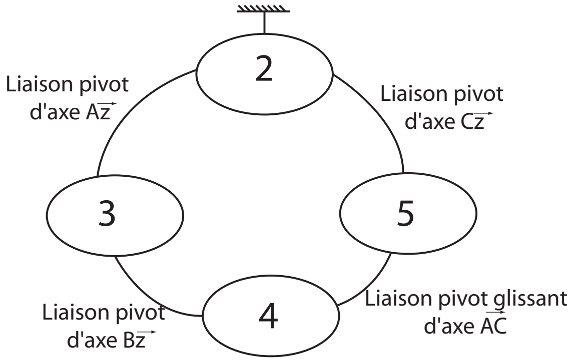


2 Résolution analytique

Réponses aux différentes questions

Détermination de la loi d'entrée sortie en effort (p en fonction de P)

1. On traduit l'équilibre du système ($\{3+4+5\}$) dans un référentiel galiléen $R\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$.
2. Graphe de structure :



3. Ordonnancement des isolements : solide $\Sigma = \{4+5\}$ puis 3, puis 4.
4. Bilan des actions mécaniques pour chaque isolement :
   - **On isole Σ : Bilan des Actions Mécaniques Extérieures :**

$$\left\{\mathscr{T}_{(3\to\Sigma)}\right\} = \underset{B}{\left\{\begin{array}{c} X_{34}\overrightarrow{x} + Y_{34}\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}}$$

$$\left\{\mathscr{T}_{(2\to\Sigma)}\right\} = \underset{C}{\left\{\begin{array}{c} X_{25}\overrightarrow{x} + Y_{25}\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}}$$

$$= \underset{C}{\left\{\begin{array}{c} X_{25}\overrightarrow{x} + Y_{25}\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}_{B(0\to2)}} = \overrightarrow{BC}\wedge\left(X_{25}\overrightarrow{x} + Y_{25}\overrightarrow{y}\right) \end{array}\right\}}$$

$$\overrightarrow{\mathscr{M}_{B(2\to5)}} = \left[\left(x_C - x_B\right)\overrightarrow{x} + \left(y_C - y_B\right)\overrightarrow{y}\right]\wedge\left(X_{25}\overrightarrow{x} + Y_{25}\overrightarrow{y}\right)$$
$$= \left[\left(x_C - x_B\right)Y_{25} - \left(y_C - y_B\right)X_{25}\right]\overrightarrow{z}.$$

   - **On isole 3 : Bilan des Actions Mécaniques Extérieures :**

$$\left\{\mathscr{T}_{(\Sigma\to3)}\right\} = -\left\{\mathscr{T}_{(3\to\Sigma)}\right\} = \underset{B}{\left\{\begin{array}{c} -X_{34}\overrightarrow{x} - Y_{34}\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}}$$

$$= \underset{A}{\left\{\begin{array}{c} -X_{34}\overrightarrow{x} - Y_{34}\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}_{A(\Sigma\to3)}} = \overrightarrow{AB}\wedge\left(-X_{34}\overrightarrow{x} - Y_{34}\overrightarrow{y}\right) \end{array}\right\}}$$

$$\overrightarrow{\mathscr{M}_{A(\Sigma\to3)}} = \left[x_B\overrightarrow{x} + y_B\overrightarrow{y}\right]\wedge\left[-X_{34}\overrightarrow{x} - Y_{34}\overrightarrow{y}\right] = \left[y_B X_{34} - x_B Y_{34}\right]\overrightarrow{z}$$

$$\left\{\mathscr{T}_{(2\to3)}\right\} = \underset{A}{\left\{\begin{array}{c} X_{23}\overrightarrow{x} + Y_{23}\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}}$$

$$\left\{\mathscr{T}_{(P\to3)}\right\} = \underset{G}{\left\{\begin{array}{c} -P\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}} = \underset{A}{\left\{\begin{array}{c} -P\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}_{A(P\to3)}} = \overrightarrow{AG}\wedge\left(-P\overrightarrow{y}\right) \end{array}\right\}}$$

$$\overrightarrow{\mathscr{M}_{A(P\to3)}} = \left[x_G\overrightarrow{x} + y_G\overrightarrow{y}\right]\wedge\left(-P\overrightarrow{y}\right) = -x_G P\overrightarrow{z}.$$

Réponses aux différentes questions

On écrit alors le PFS pour les deux isolements :

$$\left\{\begin{array}{l}\sum\left\{\mathscr{T}_{\left(\overline{\Sigma}\rightarrow\Sigma\right)}\right\}=\{0\}\\ \\ \sum\left\{\mathscr{T}_{\left(\overline{3}\rightarrow 3\right)}\right\}=\{0\}\end{array}\right.$$

En écrivant le théorème de la résultante suivant $\overrightarrow{x}$ et suivant $\overrightarrow{y}$ et le théorème du moment suivant $\overrightarrow{z}$ pour les isolement 1 et 2, on obtient le système linéaire de 6 équations à 6 inconnues suivant.

$$\begin{array}{c}\text{(1)Résultante en}\overrightarrow{x}\text{pour }\Sigma\\ \text{(2)Résultante en}\overrightarrow{y}\text{pour }\Sigma\\ \text{(3)Moment en}B\,\overrightarrow{z}\text{pour }\Sigma\\ \text{(4)Résultante en}\overrightarrow{x}\text{pour 3}\\ \text{(5)Résultante en}\overrightarrow{y}\text{pour 3}\\ \text{(6)Moment en}A\,\overrightarrow{z}\text{pour 3}\end{array}=\left\{\begin{array}{c}X_{25}+X_{34}=0\\ Y_{25}+Y_{34}=0\\ \left(x_C-x_B\right)\;Y_{25}-\left(y_C-y_B\right)X_{25}=0\\ X_{23}-X_{34}=0\\ Y_{23}-Y_{34}-P=0\\ y_B\;X_{34}-x_B\;Y_{34}-x_G\;P=0\end{array}\right.$$

En combinant (1), (2) et (3)

$$\boxed{Y_{34}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=-\tan 70^\circ\;X_{34}.}$$

En injectant dans l'équation (6),

$$X_{34}\;\left(y_B+x_B\;\tan 70^\circ\right)=x_G\;P.$$

D'où,

$$X_{34}=\frac{x_G\;P}{y_B+x_B\;\tan 70^\circ}.$$

On en déduit alors :

$$\boxed{\|\overrightarrow{F}_{3\rightarrow 4}\|=\sqrt{X_{34}^2+Y_{34}^2}=\frac{x_G\;P}{y_B+x_B\;\tan 70^\circ}\sqrt{1+\tan^2 70^\circ}}$$

En isolant la tige du vérin et en faisant un Théorème de la résultante statique selon la direction $\overrightarrow{BC}$, on obtient :

$$p\cdot S_v=\|\overrightarrow{F}_{3\rightarrow 4}\|$$

d'où,

$$\boxed{p=\frac{x_G\;P}{S_v\left(y_B+x_B\;\tan 70^\circ\right)}\sqrt{1+\tan^2 70^\circ}}$$