Devoir à la maison n° 20

À rendre le 8 juin

I. Un exercice classique.

Montrer que $N : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \sqrt{f^2(0) + f'(0)^2 + \int_0^1 (f'')^2} \end{array} \right.$ est une norme préhilbertienne.

II. Maximum d'une forme linéaire sur une boule.

On considère l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}_1[X]$ constitué des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 1.
On munit E du produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ défini par

$$\forall P, Q \in E,\ (P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

La norme associée à $(\cdot \mid \cdot)$ sera notée $\|\cdot\|$.

1) Montrer qu'il existe un unique $P_0 \in E$ tel que pour tout $P \in E$, $(P \mid P_0) = P(0)$.
Expliciter ce polynôme.

2) On désigne par S l'ensemble des polynômes P de E tels que $\|P\| = 1$, et on se propose de déterminer la valeur maximale prise par $P(0)$ lorsque P décrit S en utilisant successivement deux méthodes différentes.

a) **Première méthode :**
On pose $P_1 = 1$.

- **i)** Que vaut $\|P_1\|$?
- **ii)** En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, déterminer un polynôme P_2 de E tel que (P_1, P_2) soit une base orthonormale de E.
- **iii)** Montrer que les éléments de S sont exactement les polynômes de la forme $\cos(\theta)P_1 + \sin(\theta)P_2$, où θ décrit $\mathbb{R}$.
- **iv)** Si $P = \cos(\theta)P_1 + \sin(\theta)P_2$, déterminer deux réels λ et θ_0 indépendants de θ et tels que $P(0) = \lambda\cos(\theta - \theta_0)$ pour tout réel θ.
- **v)** En déduire la valeur maximale prise par $P(0)$ lorsque P décrit S.

b) **Seconde méthode :**

- **i)** En utilisant le résultat obtenu en **1)**, montrer que : $\forall P \in S,\ P(0) \leqslant \|P_0\|$.
- **ii)** Déterminer un polynôme P de S tel que $P(0) = \|P_0\|$.
- **iii)** Retrouver ainsi d'une seconde manière la valeur maximale prise par $P(0)$ lorsque P décrit S.

— **FIN** —