

# I Fonctions usuelles

12 juillet 2019

Dans tout ce chapitre,  $A$  désigne une partie de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction de  $A$  dans  $\mathbb{R}$ .

## 1 Rappels d'analyse.

On rappelle dans ce chapitre les notions fondamentales d'analyse réelle vues dans le secondaire.

### 1.1 Régularité de fonctions.

On rappelle succinctement ici les notions de continuité et de dérivabilité. Ces notions seront définies et travaillées en profondeur ultérieurement.

#### Définition 1.1.1 (Continuité).

Soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , soit  $a \in A$ . La fonction  $f$  est continue en  $a$  si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$ .

La fonction  $f$  est continue sur  $A$  si  $f$  est continue en tout point de  $A$ .

#### Définition 1.1.2 (Dérivabilité).

Soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , soit  $a \in A$ . La fonction  $f$  est dérivable en  $a$  si la quantité  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  admet une limite finie en  $a$ . Cette limite est notée  $f'(a)$ , i.e. si  $f$  est dérivable en  $a$ ,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a).$$

La fonction  $f$  est dérivable sur  $A$  si  $f$  est dérivable en tout point de  $A$ . La fonction  $f'$  est alors appelée *fonction dérivée* de  $f$  en  $a$ .

#### Remarque 1.1.3.

La quantité  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  est la pente de la corde à la courbe de  $f$  reliant les points d'abscisses  $a$  et  $x$ .

#### Remarque 1.1.4.

On peut aussi dériver des expressions avec le symbole  $\frac{d}{d[\text{variable}]}$ . On pourra par exemple écrire  $\frac{d}{dx}(x^{42}) = 42x^{41}$ , ou  $\frac{d}{dt}(3t^2 + 1515) = 6t$ .

On s'interdira absolument d'écrire un  $'$  sur une expression pour signifier sa dérivation. Ainsi,  $(\sin x)'$  ou  $(x^2 + x - 1)'$  sont incorrects, et on écrira  $\sin'(x)$  ou  $\frac{d}{dx}(x^2 + x - 1)$ .

#### Proposition 1.1.5.

Une fonction dérivable en un point est continue en ce point. Une fonction dérivable est donc continue.

#### Remarque 1.1.6.

Comme le montrent les exemples des fonctions « valeur absolue » et « racine carrée », la réciproque est fautive : il existe des fonctions continues, et non dérivables.

#### Proposition 1.1.7.

Soit  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables, soit  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

1. La fonction  $\lambda f + \mu g$  est dérivable et

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

2. La fonction  $fg$  est dérivable et

$$(fg)' = fg' + f'g.$$

#### Exemple 1.1.8.

$$\frac{d}{dx}(\cos(x) \sin(x)) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

### 1.2 Parité, imparité, périodicité.

#### Définition 1.2.1.

Soit  $A \subset \mathbb{R}$ , soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. On dit que  $f$  est *paire* si, pour tout  $x \in A$ ,

$$-x \in A \quad \text{et} \quad f(-x) = f(x).$$

2. On dit que  $f$  est *impaire* si, pour tout  $x \in A$ ,

$$-x \in A \quad \text{et} \quad f(-x) = -f(x).$$

**Remarque 1.2.2** (Réduction du domaine d'étude).

Il suffit d'étudier une fonction paire ou impaire sur  $\mathbb{R}_+ \cap A$  pour obtenir toutes les informations nécessaires sur cette fonction.



Une fonction n'est pas toujours paire ou impaire. Le contraire de « paire » n'est pas « impaire ».

**Exemple 1.2.3.**

Sur  $\mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^2$  est paire,  $x \mapsto x^3$  est impaire et  $x \mapsto x^2 + x$  n'est ni paire ni impaire.

**Exercice 1.2.4.**

Déterminer toutes les fonctions à la fois paires et impaires.

**Remarque 1.2.5.**

Une fonction impaire définie en 0 est forcément nulle en 0.

**Proposition 1.2.6.**

Soit  $A \subset \mathbb{R}$ , soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable.

1. Si  $f$  est paire, alors  $f'$  est impaire.
2. Si  $f$  est impaire, alors  $f'$  est paire.

**Démonstration.**

Dans le cas où  $f$  est impaire, on a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -f(-x)$ .

La fonction  $f$  est la fonction  $x \mapsto -f(-x)$  sont donc égales, et dérivables. Leurs dérivées sont donc égales. On dérive donc de part et d'autre : pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = -(-f'(-x)) = f'(-x)$ .

On procède de même dans le cas où  $f$  est paire.  $\square$

**Définition 1.2.7.**

Soit  $A \subset \mathbb{R}$ , soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , soit  $T > 0$ . On dit que  $f$  est  $T$ -périodique si, pour tout  $x \in A$ ,

$$x + T \in A \quad \text{et} \quad f(x + T) = f(x).$$

Dans ce cas  $T$  est appelé **UNE** période de  $f$ .

La fonction  $f$  est périodique s'il existe  $T > 0$  tel que  $f$  est  $T$ -périodique.

**Remarque 1.2.8** (Réduction du domaine d'étude).

Si  $f$  est  $T$ -périodique et si  $a \in A$ , il suffit d'étudier  $f$  sur  $A \cap [a, a + T]$  pour obtenir toutes les informations sur  $f$ .



Il n'y a jamais unicité de la période !

**Exemple 1.2.9.**

Les fonctions constantes,  $\cos$ ,  $\sin$ ,  $\tan$ ,  $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ ,  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont périodiques.

La fonction  $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ , qui vaut 1 sur  $\mathbb{Q}$  et 0 sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , est périodique. Tout rationnel strictement positif est une période pour cette fonction.

Toute fonction constante admet tout réel strictement positif comme période.

**Proposition 1.2.10.**

Soit  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $T > 0$  et soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable et  $T$ -périodique.

Alors,  $f'$  est  $T$ -périodique.

**Démonstration.**

Il suffit d'écrire que, pour tout  $x \in A$ ,  $f(x) = f(x + T)$ , puis de dériver de part et d'autre.  $\square$

**Exercice 1.2.11.**

Déterminer l'allure de la fonction  $f$  paire, 4-périodique et telle que pour tout  $x \in [0, 2]$ ,  $f(x) = x$  (cela s'écrit  $f|_{[0,2]} = \text{Id}_{[0,2]}$ ).

## 1.3 Monotonie.

**Définition 1.3.1** (Monotonie au sens large).

Soit  $A \subset \mathbb{R}$ , soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. On dit que  $f$  est *croissante* si, pour tout  $x, y \in A$ , :

$$x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y).$$

2. On dit que  $f$  est *décroissante* si, pour tout  $x, y \in A$ , :

$$x \geq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

3. On dit que  $f$  est *monotone* si elle croissante ou décroissante.

**Définition 1.3.2** (Monotonie stricte).

Soit  $A \subset \mathbb{R}$ , soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. On dit que  $f$  est *strictement croissante* si, pour tout  $x, y \in A$ , :

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

2. On dit que  $f$  est *strictement décroissante* si, pour tout  $x, y \in A$ , :

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

3. On dit que  $f$  est *strictement monotone* si elle strictement croissante ou strictement décroissante.



Une fonction n'est pas toujours croissante ou décroissante. Le contraire de croissant n'est pas décroissant.

**Exemple 1.3.3.**

La fonction carré n'est ni croissante, ni décroissante.

**Exercice 1.3.4.**

Déterminer toutes les fonctions qui sont à la fois croissantes et décroissantes.

**Remarque 1.3.5.**

Une fonction monotone strictement l'est bien entendu au sens large.

À chaque fois que l'on vous demande d'étudier la monotonie d'une fonction, on attend le résultat le plus précis possible. Si la fonction est croissante strictement mais que vous n'établissez que sa croissance, votre réponse ne pourra être considérée comme complète.

**Proposition 1.3.6** (Injectivité d'une fonction strictement croissante).

Soit  $A \subset \mathbb{R}$ , soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  strictement monotone. Alors, pour tout  $x, x' \in A$ , si  $x \neq x'$ , alors  $f(x) \neq f(x')$ . Ceci est équivalent à dire que, pour tout  $x, x' \in A$ , si  $f(x) = f(x')$ , alors  $x = x'$ .

Notamment, si  $y \in \mathbb{R}$ , il existe au plus un  $x \in A$  vérifiant  $y = f(x)$ .

**Démonstration.**

On traite le cas strictement croissant (le cas strictement décroissant se traite de la même manière, ou bien en étudiant  $-f$ ).

Soit  $x, x' \in A$  tels que  $x \neq x'$ . On a soit  $x < x'$ , dans ce cas  $f(x) < f(x')$  par croissance stricte de  $f$ , ou  $x > x'$ , dans ce cas  $f(x) > f(x')$ . Dans les deux cas,  $f(x) \neq f(x')$ .

On peut très bien en montrer la contraposée. Soit  $x, x' \in A$  tels que  $f(x) = f(x')$ . On ne peut pas avoir  $x < x'$  car sinon on aurait  $f(x) < f(x')$ , par croissance stricte de  $f$ , ni  $x > x'$  car sinon  $f(x) > f(x')$ . Ainsi  $x = x'$ .  $\square$

**Exemple 1.3.7.**

La fonction cosinus est strictement croissante sur  $[\pi, 3\pi/2]$ .

**1.4 Lecture de tableaux de variations.****Définition 1.4.1.**

Un intervalle est une partie « sans trou » de  $\mathbb{R}$  (plus formellement on appelle cela une partie *connexe*), i.e. c'est une partie  $I$  qui vérifie : pour tout  $x, y \in I$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$x \leq t \leq y \Rightarrow t \in I.$$

Le théorème suivant permet de relier le tableau de signes de la dérivée d'une fonction au tableau de variations de la fonction.

**Théorème 1.4.2.**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable.

1.  $f$  est croissante (resp. décroissante) si et seulement si  $f' \geq 0$  (resp.  $f' \leq 0$ ).
2. La fonction  $f$  est constante si et seulement si  $\forall x \in I, f'(x) = 0$ .

**Remarque 1.4.3.**

On déduit de ce théorème que deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.



Il est essentiel que  $I$  soit un intervalle pour que l'implication de la droite vers la gauche soit vraie (en revanche pour l'autre implication ce n'est pas nécessaire).

- Exercice 1.4.4.** 1. Trouver une application  $f$  non croissante dérivable sur son ensemble de définition, de dérivée positive.
2. Trouver une application  $g$  non constante dérivable sur son ensemble de définition, de dérivée nulle.
3. Trouver une application  $h$  dérivable non décroissante sur son ensemble de définition, de dérivée négative.

**Remarque 1.4.5.**

Nous avons aussi : si  $f'$  est strictement positive (resp. négative), alors  $f$  est strictement croissante (resp. décroissante).

Attention, la réciproque est fautive ! Par exemple, la fonction  $x \mapsto x^3$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , bien que sa dérivée s'annule en 0.

Le théorème suivant traduit les flèches continues tracées dans les tableaux de variations.

**Théorème 1.4.6** (Théorème de la bijection).

Soit  $a < b$  deux réels, soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

1. Si  $f$  est strictement croissante, pour tout  $y \in [f(a), f(b)]$ , il existe un unique  $x \in [a, b]$  vérifiant  $y = f(x)$ . On dit que  $f$  réalise une bijection de  $[a, b]$  sur  $[f(a), f(b)]$ .
2. Si  $f$  est strictement décroissante, pour tout  $y \in [f(b), f(a)]$ , il existe un unique  $x \in [a, b]$  vérifiant  $y = f(x)$ . On dit que  $f$  réalise une bijection de  $[a, b]$  sur  $[f(b), f(a)]$ .

On a des résultats analogues avec un intervalle semi-ouvert ou ouvert (de la forme  $]a, b]$ ,  $[a, b[$  ou  $]a, b[$ ), même si  $a$  ou  $b$  valent  $\pm\infty$ , mais ces résultats font alors intervenir des limites.

**Démonstration.**

L'existence d'un tel  $x$  provient directement du théorème des valeurs intermédiaires :  $f$  est continue sur l'intervalle  $[a, b]$ ,  $y$  est entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , donc il existe  $x \in [a, b]$  tel que  $y = f(x)$ .

L'unicité provient de la monotonie stricte, par la proposition 1.3.6.  $\square$

**Exercice 1.4.7.**

Écrire le théorème 1.4.6 dans le cas où  $a = \mathbb{R}$  et  $b = +\infty$ .

Justifier, sans faire intervenir la notion de dérivée, que pour tout  $y \geq 0$ , il existe un unique  $x \geq 0$  vérifiant  $y = x^2$ .

**Exercice 1.4.8.**

Chercher un contre-exemple au théorème 1.4.6 pour chaque hypothèse que l'on enlève.

**Remarque 1.4.9.**

L'étude du signe d'une expression se fera systématiquement en la factorisant. Ensuite, si le signe de l'un des facteurs n'est pas évident, il conviendra d'étudier ce facteur (par une étude de fonctions).

**Exercice 1.4.10.**

Déterminer l'intervalle de définition de  $x \mapsto \frac{(x+1)^2}{e^x - 1}$  puis tracer son tableau de variations.

## 2 Effet d'une transformation sur le graphe.

Soit  $A \subset \mathbb{R}$ . On considère une application  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , dont on veut étudier les propriétés. Notamment, on peut vouloir représenter le graphe de cette fonction : c'est

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A \text{ et } y = f(x) \right\},$$

que l'on représente, lorsque c'est possible, par une « courbe ».

**Proposition 2.0.1.**

Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , on considère des graphes tracés dans le repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- Le graphe de la fonction  $x \mapsto f(x) + a$  s'obtient en translatant le graphe de  $f$  du vecteur  $a\vec{j}$  (voir la figure 1).
- Le graphe de la fonction  $x \mapsto f(x + a)$  s'obtient en translatant le graphe de  $f$  du vecteur  $-a\vec{i}$  (voir la figure 2).

- Le graphe de la fonction  $x \mapsto f(ax)$  s'obtient en dilatant le graphe de  $f$  suivant le vecteur  $\vec{i}$  et par le rapport  $\frac{1}{a}$  (voir la figure 3).
- Le graphe de la fonction  $x \mapsto af(x)$  s'obtient en dilatant le graphe de  $f$  suivant le vecteur  $\vec{j}$  et par le rapport  $a$  (voir la figure 4).
- Le graphe de la fonction  $x \mapsto f(-x)$  s'obtient en prenant le symétrique du graphe de  $f$  par rapport à l'axe  $O\vec{j}$  (voir la figure 5).
- Le graphe de la fonction  $x \mapsto -f(x)$  s'obtient en prenant le symétrique du graphe de  $f$  par rapport à l'axe  $O\vec{i}$  (voir la figure 6).
- Le graphe de la fonction  $x \mapsto -f(-x)$  s'obtient en prenant le symétrique du graphe de  $f$  par rapport au point  $O$  (voir la figure 7).

#### Démonstration.

On montre le premier cas, les autres sont similaires. Notons  $\Gamma$  le graphe de  $f$ ,  $\Gamma'$  celui de  $x \mapsto f(x) + a$ . Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , alors  $(x, y) \in \Gamma' \Leftrightarrow (x, y - a) \in \Gamma$ , ce qui est bien le résultat demandé.  $\square$

#### Remarque 2.0.2.

Le graphe de la fonction  $x \mapsto f(a - x)$  s'obtient donc

- soit en translatant le graphe de  $f$  du vecteur  $-a\vec{i}$  puis en prenant le symétrique par rapport à  $O\vec{j}$  ;
- soit en prenant le symétrique du graphe de  $f$  par rapport à  $O\vec{j}$  puis en le translatant par le vecteur  $a\vec{i}$ .

- Proposition 2.0.3.**
1. Le graphe d'une fonction paire présente une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
  2. Le graphe d'une fonction impaire présente une symétrie par rapport à l'origine.
  3. Le graphe d'une fonction  $T$ -périodique présente un motif de longueur  $T$  se répétant (plus formellement, il est invariant par la translation de vecteur  $T\vec{i}$ ).

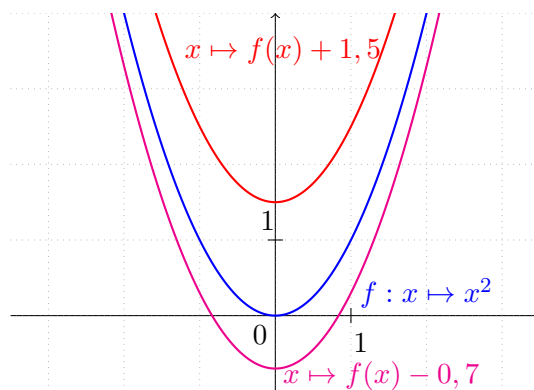


FIGURE 1 – Translation verticale du graphe.

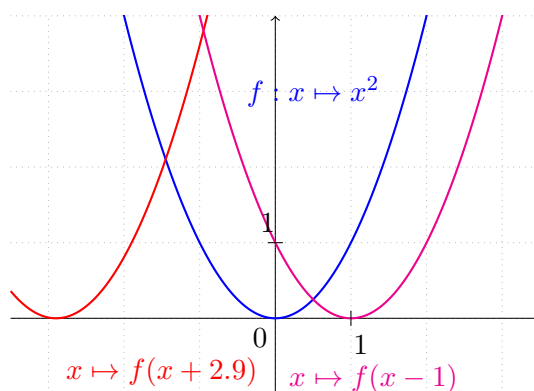


FIGURE 2 – Translation horizontale du graphe.

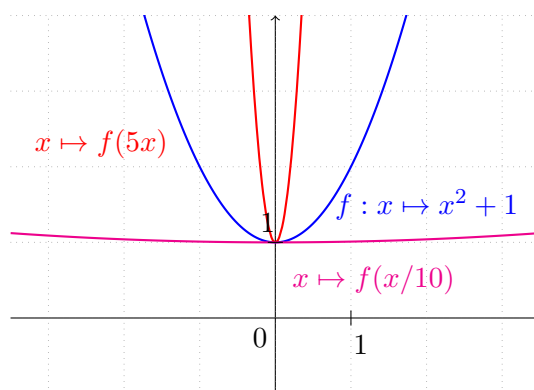


FIGURE 3 – Dilatation horizontale du graphe.

#### Exercice 2.0.4.

Quelle symétrie la courbe d'une fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow$

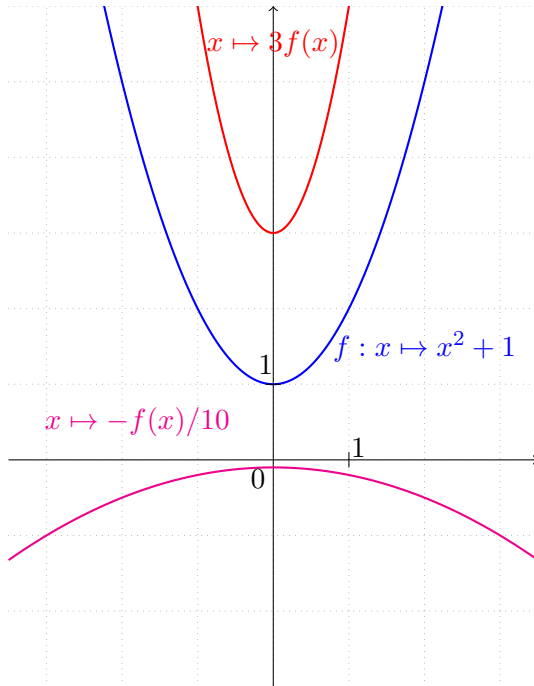


FIGURE 4 – Dilatation verticale du graphe.

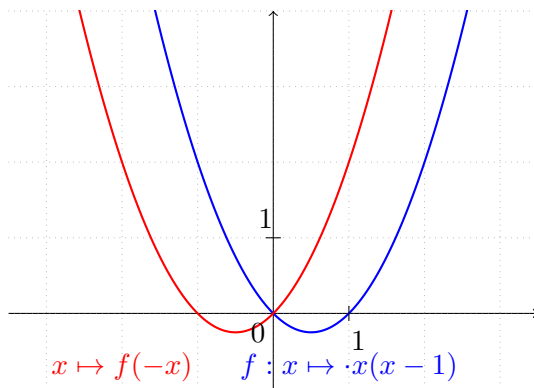


FIGURE 5 – Symétrie du graphe par rapport à l'axe vertical.

$\mathbb{R}$  vérifiant, pour un  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R} f(a-x) = f(x)$  présente-t-elle ?

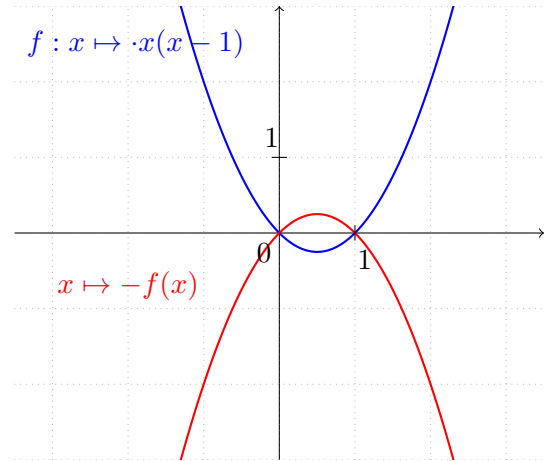


FIGURE 6 – Symétrie du graphe par rapport à l'axe horizontal.

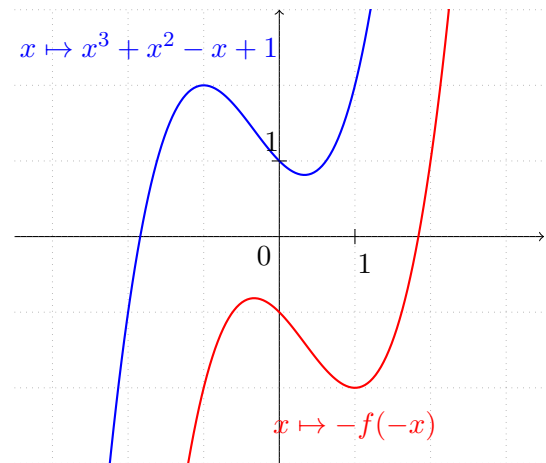


FIGURE 7 – Symétrie du graphe par rapport à l'origine.

### 3 Composée de fonctions, réciproque.

#### 3.1 Rappels de dérivation.

On rappelle les formules de dérivation usuelles vues dans le secondaire.

##### **Théorème 3.1.1.**

Soit  $A \subset \mathbb{R}$  et  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable.

1. Soit  $n$  un entier strictement positif. La fonction  $x \mapsto u^n(x)$  est dérivable sur  $A$  et, pour tout  $x \in A$ ,

$$\frac{d}{dx}(u^n(x)) = nu'(x)u^{n-1}(x).$$

2. Soit  $n$  un entier strictement négatif. Si  $u$  ne s'annule pas, la fonction  $x \mapsto u^n(x)$  est dérivable sur  $A$  et, pour tout  $x \in A$ ,

$$\frac{d}{dx}(u^n(x)) = nu'(x)u^{n-1}(x).$$

3. Si  $u$  est strictement positive, la fonction  $x \mapsto \sqrt{u(x)}$  est dérivable sur  $A$  et, pour tout  $x \in A$ ,

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{u(x)}) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

4. La fonction  $x \mapsto \exp(u(x))$  est dérivable sur  $A$  et, pour tout  $x \in A$ ,

$$\frac{d}{dx}(\exp(u(x))) = u'(x) \exp(u(x)).$$

5. Si  $u$  est strictement positive, la fonction  $x \mapsto \ln(u(x))$  est dérivable sur  $A$  et, pour tout  $x \in A$ ,

$$\frac{d}{dx}(\ln(u(x))) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

### 3.2 Composée de deux fonctions.

Dans le théorème 3.1.1, on a dérivé des fonctions construites sur le même modèle : on applique d'abord  $u$  sur  $x$ , puis on applique une seconde fonction (puissance, racine carrée, exponentielle, logarithme) sur  $u(x)$ . On dit que l'on a *composé* la fonction  $u$  par la seconde fonction. En voici une définition plus formelle.

#### Définition 3.2.1.

Soit  $A, B \subset \mathbb{R}$ , soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ .

Si, pour tout  $x \in A$ ,  $f(x) \in B$ , alors on peut construire la fonction *composée* de  $f$  par  $g$  :

$$g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto g(f(x))$$

On pourra, pour s'aider, se rappeler du schéma de la figure 8.

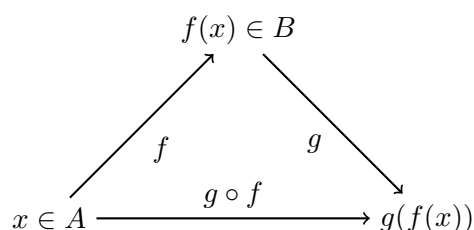


FIGURE 8 – Diagramme de composition de fonctions.

#### Exemple 3.2.2.

On peut donc écrire, sous réserve de validité,

$$(\exp \circ u)' = u' \times \exp \circ u \quad \text{et} \quad (\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}.$$

#### Remarque 3.2.3.

Pour déterminer le domaine de définition d'une composée  $g \circ f$ , il convient de déterminer dans l'ordre :

1. le domaine de définition de  $f$ , noté ici  $\mathcal{D}_f$  ;
2. puis le domaine de définition de  $g$ , noté ici  $\mathcal{D}_g$  ;
3. enfin, déterminer l'ensemble des  $x \in \mathcal{D}_f$  pour lesquels  $f(x) \in \mathcal{D}_g$ .

En particulier, il est impossible de conclure sans avoir étudié l'ensemble d'arrivée de  $f$  !

#### Exercice 3.2.4.

Déterminer le domaine de définition de

$$x \mapsto \sqrt{x - 2 - \frac{2}{x - 3}}.$$



### 3.3 Propriétés d'une composée.

On met en rapport les résultats de dérivation du théorème 3.1.1 et les dérivées usuelles :

- si  $n \in \mathbb{Z}$ , sur  $\mathbb{R}^*$ ,  $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$  ;
- sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  ;
- $\exp' = \exp$  ;
- sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$ .

Cela se généralise comme suit.

#### Théorème 3.3.1.

Soit  $A, B \subset \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $g \circ f$  soit définie.

1. Si  $f$  et  $g$  sont continues, alors  $g \circ f$  est continue sur  $A$ .
2. Si  $f$  et  $g$  sont dérivables, alors  $g \circ f$  est dérivable sur  $A$  et

$$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f.$$

#### Démonstration.

Cela sera démontré ultérieurement.  $\square$

#### Remarque 3.3.2.

On retrouve ainsi toutes les formules énoncées dans le théorème 3.1.1.

#### Exercice 3.3.3.

Dériver les expressions suivantes :

1.  $\sin(3x^2 + 2)$  ;
2.  $\sqrt{1 + \ln(\cos(t))}$ .

#### Remarque 3.3.4.

Sous réserve de définition, on a donc de manière générale

$$\frac{d}{dx}(f(ax + b)) = af'(ax + b).$$

#### Proposition 3.3.5.

Soit  $A, B \subset \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $g \circ f$  soit définie.

1. Si  $f$  est paire,  $g \circ f$  est paire.

2. Si  $f$  est impaire et  $g$  est paire,  $g \circ f$  est paire.

3. Si  $f$  et  $g$  sont impaires,  $g \circ f$  est impaire.

#### Démonstration.

Soit  $x \in A$ . Si  $f$  est paire,

$$g \circ f(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = g \circ f(x).$$

Si  $f$  est impaire et  $g$  paire,

$$g \circ f(-x) = g(f(-x)) = g(-f(x)) = g(f(x)) = g \circ f(x).$$

Si  $f$  et  $g$  sont impaires,

$$g \circ f(-x) = g(f(-x)) = g(-f(x)) = -g(f(x)) = -g \circ f(x).$$

$\square$

#### Proposition 3.3.6.

Soit  $A, B \subset \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  tels que  $g \circ f$  soit définie.

1. Si  $f$  et  $g$  sont de même monotonie,  $g \circ f$  est croissante.
2. Si  $f$  et  $g$  sont de monotonies opposées,  $g \circ f$  est décroissante.

On a les mêmes résultats dans les cas de monotonie stricte.

#### Démonstration.

On traite le cas où  $f$  est croissante et  $g$  décroissante. Les autres sont semblables.

Soit  $x, y \in A$ , supposons que  $x \leq y$ . Par croissance de  $f$ , on a  $f(x) \leq f(y)$  puis, par décroissance de  $g$ , on a  $g(f(x)) \geq g(f(y))$ . Ainsi,  $g \circ f$  est décroissante.  $\square$

#### Exercice 3.3.7.

Déterminer sans calculs le sens de variations de la fonction

$$x \mapsto \ln(1 + e^{-2x}).$$

### 3.4 Cas des bijections.

#### Définition 3.4.1.

Soit  $E \subset \mathbb{R}$ . On définit la fonction *identité* sur  $E$  comme

$$\begin{aligned} \text{Id}_E : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

On définit maintenant la réciproque d'une fonction dans le cadre restreint du théorème de la bijection. Nous étendrons cette notion ultérieurement.

### Définition 3.4.2.

Soit  $a < b$  deux réels,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et strictement monotone. Soit  $x$  entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe donc un unique  $t \in [a, b]$  tel que  $x = f(t)$ . On note ce réel  $t = f^{-1}(x)$ .

La fonction  $f^{-1}$  est appelée *réciproque* de  $f$ .

On a des résultats analogues avec un intervalle semi-ouvert ou ouvert (de la forme  $]a, b]$ ,  $[a, b[$  ou  $]a, b[$ ), même si  $a$  ou  $b$  valent  $\pm\infty$ , mais ces résultats font alors intervenir des limites.

### Proposition 3.4.3.

Soit  $a < b$  deux réels,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et strictement croissante. On a alors

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$$

et on a les propriétés suivantes :

1.  $f \circ f^{-1} = \text{Id}_{[f(a), f(b)]}$  ;
2.  $f^{-1} \circ f = \text{Id}_{[a, b]}$ .

Dans le cas où  $f$  est strictement décroissante, on a les mêmes résultats en remplaçant  $[f(a), f(b)]$  par  $[f(b), f(a)]$ .

On a des résultats analogues avec un intervalle semi-ouvert ou ouvert (de la forme  $]a, b]$ ,  $[a, b[$  ou  $]a, b[$ ), même si  $a$  ou  $b$  valent  $\pm\infty$ , mais ces résultats font alors intervenir des limites.

### Démonstration.

Le domaine de définition de  $f^{-1}$  et son image sont évidents, par la définition de  $f^{-1}$ .

1. Soit  $x \in [f(a), f(b)]$ . Posons  $t = f^{-1}(x)$ . Par définition,  $f(t) = x$ , donc  $f(f^{-1}(x)) = x$ , d'où le résultat.
2. Soit  $t \in [a, b]$ , posons  $x = f(t)$ . Par croissance stricte de  $f$ , il y a unicité du réel  $u \in [a, b]$  vérifiant  $x = f(u)$ , donc par définition  $t = f^{-1}(x)$ . On a donc  $t = f^{-1}(f(t))$ , d'où le résultat.  $\square$

### Proposition 3.4.4.

Soit  $a < b$  deux réels,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et strictement monotone. Alors, le graphe de  $f^{-1}$  est le symétrique du graphe de  $f$  par rapport à la droite d'équation  $y = x$  (aussi appelée *première bissectrice du plan*).

### Démonstration.

Soit  $x \in [a, b]$ , soit  $y$  entre  $f(a)$  et  $f(b)$ . On a alors  $y = f(x)$  si et seulement si  $x = f^{-1}(y)$ . Ainsi, le point de coordonnées  $(x, y)$  appartient au graphe de  $f$  si et seulement si celui de coordonnées  $(y, x)$  appartient au graphe de  $f^{-1}$ . Or, l'application qui échange les coordonnées est la symétrie par rapport à la première bissectrice du plan, d'où le résultat.  $\square$

Le résultat suivant permet notamment d'obtenir le tableau de variations de la réciproque d'une fonction.

### Théorème 3.4.5.

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue et strictement monotone.

1. La fonction  $f^{-1}$  est strictement monotone, de même monotonie que  $f$ .
2. La fonction  $f^{-1}$  est continue.
3. Si  $f$  dérivable et si  $f'$  ne s'annule pas, alors  $f^{-1}$  est aussi dérivable et  $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ .

### Démonstration.

On ne démontre que le premier point, dans le cas où  $f$  est strictement décroissante. Soit  $x, y$  des images par la fonction  $f$ , posons  $a = f^{-1}(x)$  et  $b = f^{-1}(y)$ , de sorte que  $a, b \in I$ ,  $x = f(a)$  et  $y = f(b)$ .

Supposons que  $x < y$ . Si  $a \leq b$ , alors, par décroissance de  $f$ ,  $f(a) \geq f(b)$ , i.e.  $x \geq y$  : c'est impossible. Ainsi,  $f^{-1}(x) > f^{-1}(y)$ , donc  $f^{-1}$  est strictement décroissante.  $\square$

### Remarque 3.4.6.

Une fois que l'on sait que  $f^{-1}$  est dérivable, la dernière formule peut se retrouver en dérivant  $f \circ f^{-1} = \text{Id}$ , ce qui donne :

$$(f^{-1})' \times f' \circ f^{-1} = 1.$$

**Remarque 3.4.7.**

Avec quelques considérations de limites, le théorème précédent permet de relier les tableaux de variations d'une fonction et de sa réciproque (voir figure 9 dans le cas où  $f$  est strictement décroissante).

|             |                   |     |
|-------------|-------------------|-----|
| $x$         | $a$               | $b$ |
| $f(x)$      | $c \rightarrow d$ |     |
| $x$         | $d$               | $c$ |
| $f^{-1}(x)$ | $b \rightarrow a$ |     |

FIGURE 9 – Tableaux de variations d'une fonction et de sa réciproque.

**Remarque 3.4.8.**

Plus précisément, si  $f'(x) = 0$ , alors  $f^{-1}$  ne sera pas dérivable en  $y = f(x)$ .

En effet, le graphe de  $f$  possède une tangente horizontale au point de coordonnées  $(x, y)$ , donc par symétrie celui de  $f^{-1}$  possède une tangente verticale au point de coordonnées  $(y, x)$ .

**Exemple 3.4.9.**

On peut observer tous ces résultats sur les fonctions carré et racine carrée (voir figure 10).

La fonction carré est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$  (mais pas sur  $\mathbb{R}$ ), est continue,  $0^2 = 0$  et  $x^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ . Ainsi, la fonction carré réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+$  sur  $\mathbb{R}_+$ . On appelle sa réciproque la fonction *racine carrée*, notée  $\sqrt{\cdot}$  : si  $x \geq 0$ ,  $\sqrt{x}$  est l'unique réel  $t \geq 0$  vérifiant  $t^2 = x$ . La fonction racine carrée est donc strictement croissante et  $\sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ .

On a, pour tout  $x \geq 0$ ,  $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$ , qui s'annule exactement en 0. La fonction racine carrée est donc dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , mais pas en 0, et pour tout  $x > 0$ ,

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

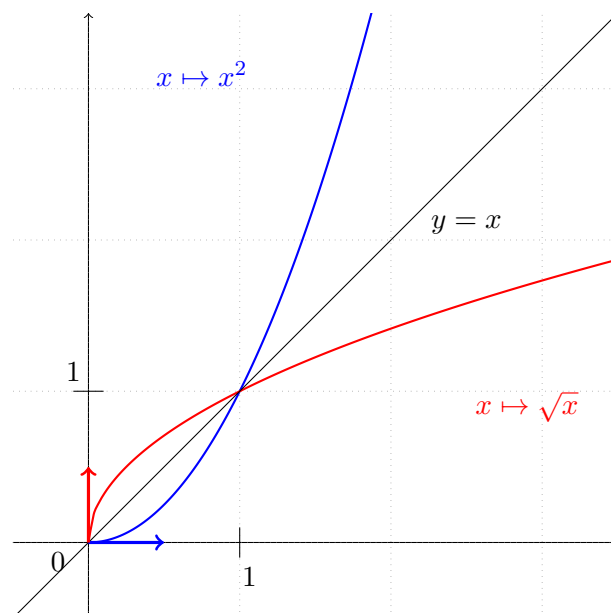


FIGURE 10 – Fonctions carré et racine carrée.

## 4 Fonction valeur absolue

**Définition 4.0.1.**

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On appelle *valeur absolue* de  $x$  le réel  $|x| = \sqrt{x^2}$ . Il vaut  $x$  si  $x \geq 0$  et  $-x$  sinon (voir la figure 11).

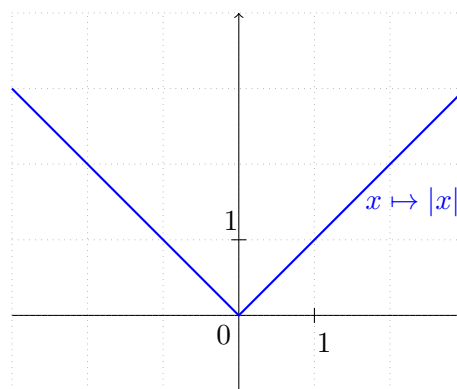


FIGURE 11 – Fonction valeur absolue.

**Proposition 4.0.2.**

C'est une fonction paire, continue sur  $\mathbb{R}$  et dérivable sur  $\mathbb{R}_-^*$  et  $\mathbb{R}_+^*$ , mais pas en 0. Si  $x > 0$ , on a  $\frac{d}{dx}(|x|) = 1$  et si  $x < 0$ ,  $\frac{d}{dx}(|x|) = -1$ .

**Remarque 4.0.3.**

Pour tout réel  $x$ ,  $|x| \geq 0$ , et  $|x| = 0$  si et seulement si  $x = 0$ .

**Remarque 4.0.4.**

Pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ .

**Théorème 4.0.5.**

Soit  $x, y \in \mathbb{R}$ . Alors,  $|x| \leq y$  si et seulement si  $-y \leq x \leq y$ .

**Démonstration.**

Il suffit de discuter selon les signes de  $x$  et de  $y$ . □

**Proposition 4.0.6** (Inégalité triangulaire).

Pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

De plus,  $|x + y| = |x| + |y|$  si et seulement si  $x$  et  $y$  sont de même signe.

**Démonstration.**

On retrouvera ce résultat pour les nombres complexes, car la valeur absolue et le module complexe coïncident sur  $\mathbb{R}$ . On peut tout de même en donner une démonstration élémentaire :

$$\begin{aligned} (|x| + |y|)^2 - |x + y|^2 &= (|x| + |y|)^2 - (x + y)^2 \\ &= 2(|xy| - xy) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

donc  $|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$ . On conclut par positivité de  $|x + y|$  et de  $|x| + |y|$ .

Il y a égalité si et seulement si  $|xy| = xy$ , ce qui est équivalent à  $xy \geq 0$ , ce qui est bien équivalent à «  $x$  et  $y$  sont de même signe ». □

**Remarque 4.0.7** (Interprétation en terme de distance).

Si  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $|x - y|$  est la distance entre  $x$  et  $y$ . On peut alors écrire, avec  $(x, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2$ , les intervalles

$$\begin{aligned} [x - \varepsilon, x + \varepsilon] &= \{ y \in \mathbb{R} \mid |y - x| \leq \varepsilon \}, \\ ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ &= \{ y \in \mathbb{R} \mid |y - x| < \varepsilon \}. \end{aligned}$$

## 5 Fonctions puissances entières, polynomiales et rationnelles

### 5.1 Fonctions puissances entières

**Définition 5.1.1.**

Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . On appelle  $x$  *puissance  $n$*  le réel  $x \times \dots \times x$  ( $n$  fois), noté  $x^n$ .

Par convention  $x^0 = 1$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , même 0.

Si  $n$  est un entier strictement négatif, et si  $x \neq 0$ , on pose  $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$ .

**Remarque 5.1.2.**

Cela peut se définir rigoureusement par récurrence.

**Proposition 5.1.3.**

Soit  $m, n \in \mathbb{Z}$ , de manière générale :

$$\begin{aligned} x^{m+n} &= x^m x^n, \\ x^{mn} &= (x^m)^n, \\ (xy)^n &= x^n y^n, \\ \frac{x^n}{y^n} &= \left( \frac{x}{y} \right)^n. \end{aligned}$$

De plus,  $x \mapsto x^n$  a la même parité que  $n$ . C'est une fonction continue, dérivable, de dérivée  $x \mapsto nx^{n-1}$ .

Les allures des courbes dans tous les cas ( $n$  pair, impair, positif, négatif) sont données dans les figures 12 et 13.

**Proposition 5.1.4** (Comparaisons de puissances).

Soit  $x \in ]0, 1]$ , alors

$$0 < x^4 \leq x^3 \leq x^2 \leq x \leq 1 \leq 1/x \leq 1/x^2 \dots$$

Plus formellement, la suite  $(x^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est décroissante (strictement si  $0 < x < 1$ ).

Soit  $x \in [1, +\infty[$ , la suite  $(x^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est croissante (strictement si  $x > 1$ ).

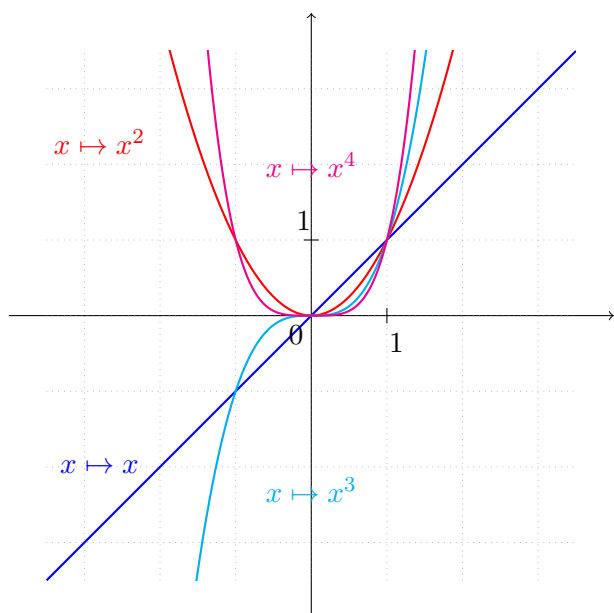


FIGURE 12 – Quelques fonctions puissance, exposants positifs.

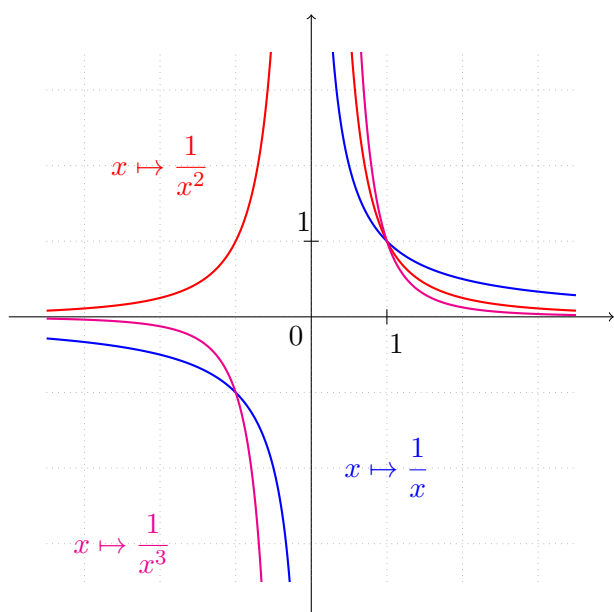


FIGURE 13 – Quelques fonctions puissance, exposants négatifs.

## 5.2 Fonctions polynomiales et rationnelles

### Définition 5.2.1.

On appelle fonction polynomiale toute fonction de la forme

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \underbrace{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}_{\sum_{k=0}^n a_k x^k}$$

où  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  et où  $a_n \neq 0$ .

Dans ce cas,  $n$  est appelé le degré de  $f$ ,  $a_n$  est le coefficient dominant (ou de plus haut degré) de  $f$  et  $a_0$  est le coefficient constant de  $f$ . Le terme  $a_nx^n$  est le monôme dominant de  $f$ .

### Proposition 5.2.2.

Toute fonction polynomiale est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

De plus, avec les notations précédentes,  $f(x)$  et  $a_nx^n$  ont même limite en  $\pm\infty$ .

### Démonstration.

On factorise  $a_nx^n$  :

$$f(x) = a_nx^n \left( \frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1 \right) \\ = a_nx^n \left( 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_nx^{n-k}} \right).$$

Il suffit de voir que, si  $0 \leq k \leq n-1$ ,

$$\frac{a_k}{a_nx^{n-k}} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0.$$

□

### Définition 5.2.3.

On appelle *fonction rationnelle* toute fonction de la forme  $f : x \mapsto \frac{g(x)}{h(x)}$  où  $g$  et  $h$  sont des fonctions polynomiales. Si  $a_nx^n$  et  $b_mx^m$  sont les monômes dominants de  $g$  et  $h$ , alors  $f(x)$  et  $\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$  ont même limite en  $\pm\infty$ .

**Remarque 5.2.4.**

L'ensemble de définition d'une telle fonction est au moins inclus dans l'ensemble des réels sur lesquels  $h$  ne s'annule pas. Nous l'étudierons précisément dans le chapitre dédié aux fractions rationnelles. Sur cet ensemble, toute fraction rationnelle est continue et dérivable.

## 6 Fonctions exponentielles, logarithmes et puissances quelconques

### 6.1 Exponentielle et logarithme

**Définition 6.1.1.**

On appelle *logarithme népérien* la primitive, notée  $\ln$ , de  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  valant 0 en 1.

**Proposition 6.1.2.**

La fonction  $\ln$  est continue, dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , strictement croissante (donc injective) et bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$ .

Si  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , on a  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ .

**Démonstration.**

Les outils pour cela seront vus plus tard, mais il suffit de dire que c'est la primitive d'une fonction continue et positive.  $\square$

**Définition 6.1.3.**

On appelle fonction *exponentielle* notée  $\exp$  la réciproque de  $\ln$ . On a donc  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ .

**Proposition 6.1.4.**

La fonction  $\exp$  est continue, dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et égale à sa dérivée.

**Démonstration.**

Utiliser les propriétés de la réciproque.  $\square$

- Graphes : voir la figure 14.

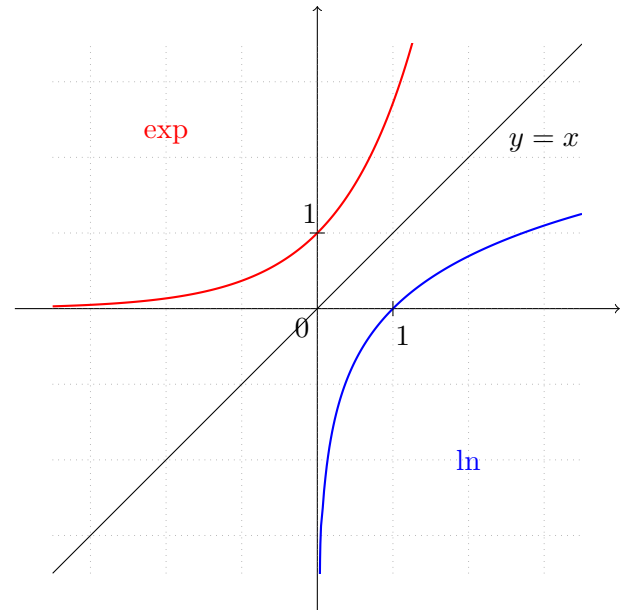


FIGURE 14 – Logarithme et exponentielle.

**Proposition 6.1.5.**

L'exponentielle est partout strictement positive, elle est strictement croissante et bijective de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Démonstration.**

Utiliser les propriétés de la réciproque.  $\square$

**Proposition 6.1.6.**

Pour tout  $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ .

Pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$ .

**Démonstration.**

Soit  $y \in \mathbb{R}_+^*$ , étudions  $f_y : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \ln(xy)$ . C'est une fonction dérivable, comme composée de fonctions dérivables, et si  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $f_y'(x) = y \left( \frac{1}{xy} \right) = \frac{1}{x}$ . Ainsi,  $f_y$  est

une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{x}$ , donc diffère de  $\ln$  d'une constante. Avec  $x = 1$ , on obtient cette constante : pour tout  $x > 0$ , on a bien  $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ .

L'autre identité s'en déduit en observant que  $\exp$  est la réciproque de  $\ln$  :

$$\begin{aligned} \ln(\exp(x) \exp(y)) &= \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) \\ &= x + y. \end{aligned}$$

Par définition de l'exponentielle,  $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ .  $\square$

**Exemple 6.1.7.**

En particulier,  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ ,  $\ln(1/x) = -\ln x$  et  $\ln(x^n) = n \ln x$ .

**Remarque 6.1.8.**

On définit  $e = \exp(1)$ , dont une valeur approchée à  $10^{-3}$  près est 2,718.

**Remarque 6.1.9.**

Les dérivées de l'exponentielle en 0 et du logarithme en 1 donnent les limites suivantes, fort utiles :

$$\frac{\exp(x) - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1, \quad \frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

## 6.2 Exponentielle de base quelconque

**Définition 6.2.1.**

Soient  $x \in \mathbb{R}_+^*$  et  $a \in \mathbb{R}$ . On appelle «  $x$  puissance  $a$  » (ou exponentielle de base  $x$ ), noté  $x^a$ , le réel  $x^a = \exp(a \ln x)$ .



$x^a$  n'est qu'une notation pour  $\exp(a \ln x)$ .



$x^a$  n'est pas défini avec  $x \leq 0$ , avec cette définition.

**Remarque 6.2.2.**

- Si  $a \in \mathbb{N}$ , cette définition coïncide avec la définition donnée précédemment.
- On a alors pour tout  $x > 0$ ,  $\exp(x) = e^x$ . La notation  $e^x$  est alors utilisée pour tout  $x \in \mathbb{R}$  pour désigner  $\exp(x)$ .
- Cas particuliers :
  1.  $a \in \mathbb{N}$  :  $x^a$  défini sur  $\mathbb{R}$ .
  2.  $a \in \mathbb{Z}$  :  $x^a$  défini sur  $\mathbb{R}^*$ .
  3.  $a \in \mathbb{R}^+$  : prolongeable en 0 par continuité.

4.  $a = \frac{1}{q} \in \mathbb{Q}$ ,  $q > 0$  : définie sur  $\mathbb{R}_+$ , donc prolongeable en zéro, comme réciproque de la fonction  $x \mapsto x^q$ . Et même prolongeable sur  $\mathbb{R}$  si  $q$  impair.

- Pour traiter un exercice avec des puissances quelconques, il faut quasiment toujours repasser par l'écriture exponentielle.

**Proposition 6.2.3.**

Soit  $x, x' \in \mathbb{R}_+^*$  et  $y, y' \in \mathbb{R}$ , on a :

1.  $(xx')^y = x^y \cdot x'^y$ .
2.  $x^{y+y'} = x^y \cdot x^{y'}$ .
3.  $x^{(yy')} = (x^y)^{y'}$ .
4.  $x^{-y} = \frac{1}{x^y} = \left(\frac{1}{x}\right)^y$ .

**Démonstration.**

Revenir à la définition via l'exponentielle.  $\square$

- On peut dériver  $x^a$  en utilisant directement sa définition. On remarquera notamment que

$$\frac{d}{dx}(x^a) \neq \frac{d}{da}(x^a).$$



On n'utilisera jamais le symbole  $'$  pour dériver une expression, mais plutôt  $\frac{d}{d\heartsuit}$ , où  $\heartsuit$  est la variable par rapport à laquelle on dérive l'expression (les autres étant fixées).

**Exemple 6.2.4.**

Que veut dire  $(x^y)'$  ?

**Proposition 6.2.5.**

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On note  $f_a : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ .  

$$x \mapsto x^a$$

1. La fonction  $f_a$  est continue, dérivable et  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $f'_a(x) = ax^{a-1}$ .
2. Si  $a \neq 0$ ,  $f_a$  est bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Sa réciproque est  $f_{1/a}$ .
3. Soit  $a < a'$  : si  $x > 1$ ,  $x^a < x^{a'}$ , si  $x \in ]0, 1[$ ,  $x^a > x^{a'}$ .

- Démonstration.** 1. Il suffit de dériver dans la définition.
2. Il suffit de vérifier que  $(x^a)^{1/a} = (x^{1/a})^a = x$ .
3. Il suffit de discuter suivant le signe de  $\ln(x)$ .

□

- Graphes : voir la figure 15.

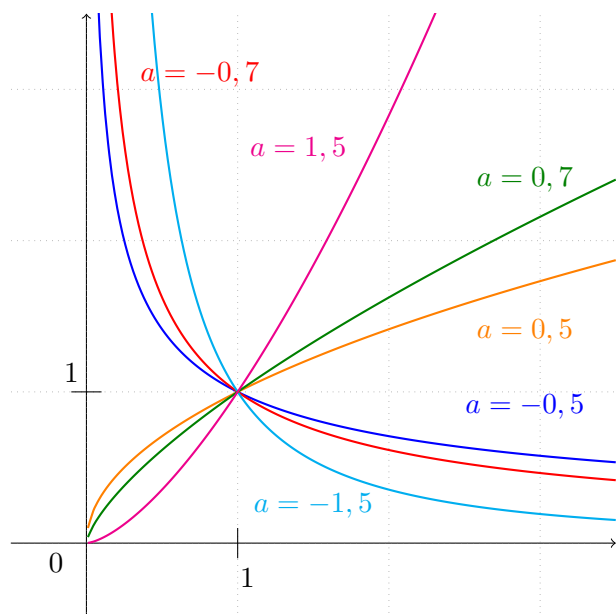


FIGURE 15 – Quelques fonctions de la forme  $x \mapsto x^a$ .

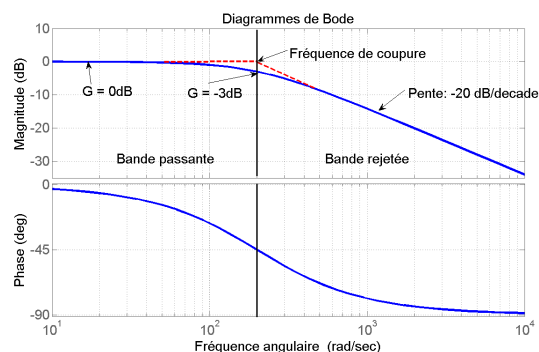
**Définition 6.2.6** (Logarithme de base  $a$ ).

Soit  $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ . La fonction « puissance en base  $a$  »,  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*, x \mapsto a^x$ , est bijective. Sa réciproque est le logarithme de base  $a$

$$\log_a : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)}. \end{cases}$$

**Remarque 6.2.7.** 1. Cas particuliers utiles :  $\log_{10}$  et  $\log_2$ . Ils donnent le nombre de chiffres dans l'écriture d'un entier en base 10 ou 2 : si  $10^{p-1} \leq n < 10^p$ , alors  $n$  s'écrit avec  $p$  chiffres en base 10 et  $\lfloor \log_{10} n \rfloor = p - 1$ .

2. Propriétés fondamentales :  $\log_{10}(10^x) = x$  et  $10^{\log_{10} x} = x$ .
3. Lien avec les diagrammes de Bode en SI pour représenter une fonction de transfert d'un système électrique (électronique ?). Échelle  $\log/\text{dB}$ , où  $\text{dB} = 20 \log_{10}$  (autrement dit, 20dB d'augmentation signifie multiplication par 10 du signal) :



### 6.3 Racines énièmes.

**Définition 6.3.1.**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $x \mapsto x^n$  est continue.

- Si  $n$  est pair,  $x \mapsto x^n$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$  et réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Sa réciproque sur  $\mathbb{R}_+$  est appelée « racine  $n^e$  », notée  $\sqrt[n]{\cdot}$ .
- Si  $n$  est impair,  $x \mapsto x^n$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ . Sa réciproque sur  $\mathbb{R}$  est appelée « racine  $n^e$  », notée  $\sqrt[n]{\cdot}$ .

**Démonstration.**

Il suffit de montrer la croissance stricte. Cela peut se faire en dérivant, ou bien en factorisant  $x^n - y^n$  (la formule sera vue bientôt).

Notamment, pour  $n = 2$ ,  $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$  donne directement la croissance stricte de  $x \mapsto x^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . □

**Exemple 6.3.2.**

$(-2)^3 = -8$ , donc  $-2 = \sqrt[3]{-8}$ , et  $(\sqrt{3})^4 = (-\sqrt{3})^4 = 9$ , donc  $\sqrt[4]{9} = \sqrt{3}$ .

**Proposition 6.3.3.**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x > 0$ , alors  $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ .



**Démonstration.**

On a bien  $x^{1/n} > 0$  et, d'après les règles de manipulation des puissances,  $(x^{1/n})^n = (x^n)^{1/n} = x$ .  $\square$

**6.4 Croissances comparées****Exercice 6.4.1.**

Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}_+$ ,  $\exp(x) \geq 1 + x + x^2/2$ . En déduire la limite de  $\exp(x)/x$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ .

**Proposition 6.4.2** (Croissances comparées des exponentielles, puissances et logarithmes).

Soient  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ . Alors :

1. l'exponentielle l'emporte sur les puissances :

$$\frac{e^{bx}}{x^a} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty ;$$

2. les puissances l'emportent sur les logarithmes :

$$x^a \cdot |\ln x|^b \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad \frac{x^a}{(\ln x)^b} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty ;$$

3. l'exponentielle l'emporte sur les logarithmes (repasser par les deux premiers points).

**Démonstration.** 1. On utilise le résultat de l'exercice 6.4.1, en factorisant

$$\frac{e^{bx}}{x^a} = \left( \frac{e^{bx/a}}{x} \right)^a = \left( \frac{b}{a} \right)^a \cdot \left( \frac{e^{bx/a}}{bx/a} \right)^a.$$

2. En composant la limite de l'exercice 6.4.1 par  $\ln(x)$ , on a directement  $\frac{x}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ . Puis, en composant par  $\frac{1}{x}$ , on obtient  $x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ .

Ensuite, on factorise

$$\frac{x^a}{(\ln x)^b} = \left( \frac{x^{a/b}}{\ln x} \right)^b = \left( \frac{a}{b} \right)^b \left( \frac{x^{a/b}}{\ln(x^{a/b})} \right)^b.$$

On obtient l'autre limite par composition.

3. Repasser par les deux premiers points.  $\square$

**Exercice 6.4.3.**

Déterminer la limite de la suite de terme général

$$\frac{3^n - n^2 + \ln^2(n)}{n^e + \sqrt{e^n} - 2\ln(n)}$$

**7 Fonctions circulaires.**

Le formulaire trigonométrique est à savoir *par cœur*. Si ce n'est pas le cas : apprenez-le !

**7.1 Sinus, cosinus.**

Les définitions géométriques du sinus et du cosinus (*c.f.* formulaire) ne sont pas satisfaisantes. Cependant, vous n'en pourrez donner de définition satisfaisante qu'en spé (par ce que vous appellerez une série entière). On se contente donc ici de rappeler quelques propriétés élémentaires.

**Proposition 7.1.1.**

Les fonctions sinus ( $\sin$ ) et cosinus ( $\cos$ ) sont définies sur  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodiques et dérivables.

La fonction cosinus est paire et  $\cos' = -\sin$ .

La fonction sinus est impaire et  $\sin' = \cos$ .

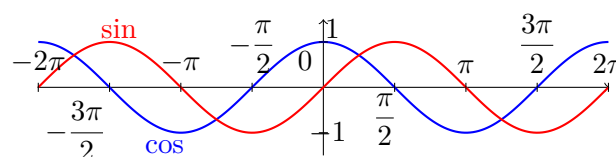


FIGURE 16 – Fonctions cos et sin.

**Proposition 7.1.2** (Formules d'addition).

Pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),$$

$$\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a).$$

Notamment, pour tout réel  $x$ ,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x),$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x).$$

**Proposition 7.1.3.**

On a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

**Remarque 7.1.4.**

Les dérivées du sinus et du cosinus en 0 donnent les limites suivantes, fort utiles :

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{x} &\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1, \\ \frac{\cos(x) - 1}{x} &\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

**7.2 Tangente.**

La tangente a été définie au collège, en tant que rapport de longueurs dans un triangle rectangle. Notamment, dans un triangle  $ABC$  rectangle en  $B$  (les angles étant considérés comme non orientés) :

$$\tan(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{AC} \div \frac{AB}{AC} = \frac{\sin(\widehat{BAC})}{\cos(\widehat{BAC})}.$$

Cela se généralise bien entendu comme suit.

**Définition 7.2.1** (Fonction tangente).

Notons  $A$  l'ensemble des réels congrus à  $\frac{\pi}{2}$  modulo  $\pi$  :

$$\begin{aligned} A &= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \\ &= \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

On appelle alors *fonction tangente*, notée  $\tan$ , la fonction :

$$\begin{aligned} \tan : \mathbb{R} \setminus A &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{\sin t}{\cos t} \end{aligned}$$

**Démonstration.**

Pour s'assurer de la bonne définition de la tangente, il convient d'observer que le cosinus s'annule exactement sur  $A$ .  $\square$

**Remarque 7.2.2.**

On peut définir de la même manière la fonction *cotangente* :

Posons

$$B = \{ x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \ x = k\pi \} = k\mathbb{Z}.$$

On appelle alors *fonction cotangente*, notée  $\cotan$ , la fonction :

$$\begin{aligned} \cotan : \mathbb{R} \setminus B &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{\cos t}{\sin t} \end{aligned}$$



La fonction cotangente n'est pas égale à  $\frac{1}{\tan}$ . Pourquoi ?

**Proposition 7.2.3.**

La fonction tangente est dérivable et  $\pi$ -périodique. De plus,

$$\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2.$$

Le graphe de la fonction est donné dans la figure 17.

**Démonstration.**

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables, et le cosinus s'annule exactement sur  $A$ , d'où la dérivabilité de la tangente.

On a aussi, par les formules d'addition par exemple, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$  et  $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ , d'où la périodicité.

Enfin, par la formule de dérivation d'un quotient,

$$\tan' = \frac{\sin^2 + \cos^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2.$$

$\square$

**Proposition 7.2.4** (Formule d'addition).

Pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$  pour lesquels  $\tan(a + b)$  est définie et  $\tan(a)\tan(b) \neq 1$ , alors

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

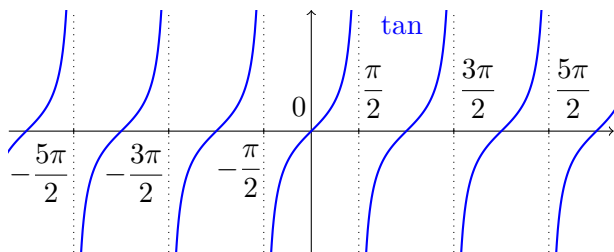


FIGURE 17 – Fonction tan.

**Démonstration.**

On factorise :

$$\begin{aligned}
 \tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} \\
 &= \frac{\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)} \\
 &= \frac{\cos(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)} \times \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.
 \end{aligned}$$

□

**Remarque 7.2.5.**

La dérivée de la tangente 0 donnent la limite suivante, fort utile :

$$\frac{\tan(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

## 8 Fonctions circulaires réciproques

### 8.1 Arccos et Arcsin



La fonction cosinus n'est pas bijective : pour tout  $x \in [-1, 1]$ , il n'existe pas un unique  $t \in \mathbb{R}$  vérifiant  $x = \cos(t)$ .

**Définition 8.1.1** (Arc cosinus).

Pour tout  $x \in [-1, 1]$ , il existe un unique  $t \in [0, \pi]$  tel que  $x = \cos(t)$ . On dit que ce  $t$  est l'arc cosinus de  $x$  (noté  $t = \text{Arccos}(x)$ ).

Plus formellement : la fonction cosinus est bijective de  $[0, \pi]$  sur  $[-1, 1]$ . Sa fonction réciproque est appelée arc cosinus et noté Arccos.

**Démonstration.**

La fonction cosinus est continue, strictement décroissante sur  $[0, \pi]$ ,  $\cos(0) = 1$  et  $\cos(\pi) = -1$ . On conclut par le théorème de la bijection. □

**Proposition 8.1.2.**

La fonction arc cosinus est strictement décroissante, continue sur  $[-1, 1]$ , dérivable sur  $] -1, 1[$ , de dérivée  $x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , c'est-à-dire que pour tout  $x \in ] -1, 1[$ ,

$$\text{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Son graphe est représenté sur la figure 18.

**Démonstration.**

Tout découle du tableau de variations du cosinus et des théorèmes généraux précédents.

Comme  $\cos'(0) = 0$  et  $\cos'(\pi) = 0$ , Arccos n'est pas dérivable en  $\cos(0) = 1$  et en  $\cos(\pi) = -1$ . La dérivée du cosinus ne s'annule pas sur  $]0, \pi[$ , donc Arccos est dérivable sur  $] -1, 1[$ . Ensuite, si  $-1 < x < 1$ ,

$$\text{Arccos}'(x) = \frac{1}{\cos'(\text{Arccos } x)} = \frac{-1}{\sin(\text{Arccos } x)}.$$

Il suffit d'utiliser le résultat du théorème 8.1.6 pour obtenir  $\sin(\text{Arccos } x) = \sqrt{1-x^2}$ . □

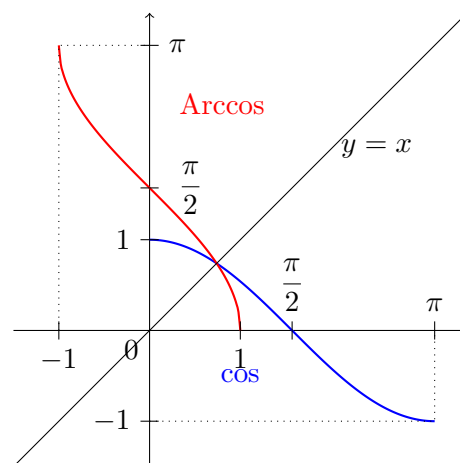


FIGURE 18 – Fonctions cos et Arccos.



La fonction sinus n'est pas bijective : pour tout  $x \in [-1, 1]$ , il n'existe pas un unique  $t \in \mathbb{R}$  vérifiant  $x = \sin(t)$ .

**Définition 8.1.3** (Arc sinus).

Pour tout  $x \in [-1, 1]$ , il existe un unique  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  tel que  $x = \sin(t)$ . On dit que ce  $t$  est l'arc sinus de  $x$  (noté  $t = \text{Arcsin}(x)$ ).

Plus formellement : la fonction sinus est bijective de  $[-\pi/2, \pi/2]$  sur  $[-1, 1]$ . Sa fonction réciproque est appelée arc sinus et noté  $\text{Arcsin}$ .

**Démonstration.**

La fonction sinus est continue, strictement croissante sur  $[0, \pi]$ ,  $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ . On conclut par le théorème de la bijection.  $\square$

**Proposition 8.1.4.**

La fonction arc sinus est strictement croissante, impaire, continue sur  $[-1, 1]$ , dérivable sur  $] -1, 1[$ , de dérivée  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , c'est-à-dire que pour tout  $x \in ] -1, 1[$ ,

$$\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Son graphe est représenté sur la figure 19.

**Démonstration.**

C'est la même chose que pour l'arc cosinus.

Pour l'imparité, si  $x \in [-1, 1]$ , posons  $t = \text{Arcsin}(x)$ , donc  $t \in [-\pi/2, \pi/2]$  et  $\sin(t) = x$ . Par imparité du sinus,  $\sin(-t) = -x$ , et  $-t \in [-\pi/2, \pi/2]$ , donc par définition  $-t = \text{Arcsin}(-x)$ . On vient de montrer que  $\text{Arcsin}(-x) = -\text{Arcsin}(x)$ .  $\square$

**Exercice 8.1.5.**

Déterminer les arc cosinus et arc sinus des valeurs usuelles :  $0, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\pm 1$ .

**Théorème 8.1.6.**

Pour tout  $x \in [-1, 1]$ ,

$$\begin{aligned}\sin(\text{Arccos } x) &= \cos(\text{Arcsin } x) \\ &= \sqrt{1-x^2}.\end{aligned}$$

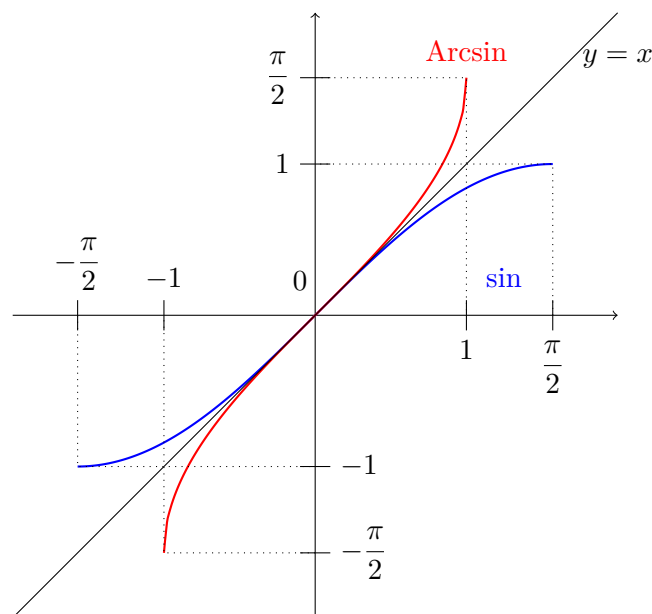


FIGURE 19 – Fonctions sin et Arcsin.

**Démonstration.**

On a  $\cos \circ \text{Arccos} = \text{Id}_{[-1,1]}$ , c'est-à-dire que, par définition, pour tout  $x \in [-1, 1]$ ,  $\cos(\text{Arccos } x) = x$ .

Ainsi, si  $x \in [-1, 1]$ , on a

$$\sin^2(\text{Arccos } x) = 1 - \cos^2(\text{Arccos } x) = 1 - x^2.$$

Pour finir, on remarque que le sinus est positif sur  $[0, \pi]$ , or la fonction  $\text{Arccos}$  prend ses valeurs dans  $[0, \pi]$ , donc  $\sin(\text{Arccos } x) \geq 0$ .  $\square$



$\text{Arccos} \circ \cos \neq \text{Id}_{\mathbb{R}}$ , on a juste que pour tout  $x \in [0, \pi]$ ,  $\text{Arccos}(\cos(x)) = x$ .

**Exemple 8.1.7.**

$\cos\left(\frac{17\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)$ , or  $0 \leq \frac{3\pi}{7} \leq \pi$ , donc

$$\begin{aligned}\text{Arccos}\left(\cos \frac{17\pi}{7}\right) &= \frac{3\pi}{7} \\ &\neq \frac{17\pi}{7}.\end{aligned}$$

**Exemple 8.1.8** (Très classique).

On cherche à résoudre l'équation  $\text{Arcsin } x = \text{Arccos } \frac{4}{5}$ , d'inconnue  $x \in [-1, 1]$ .

Soit  $x$  solution, on a  $\frac{4}{5} > 0$ , donc  $\text{Arccos } \frac{4}{5} \in [0, \pi/2]$ , donc on doit avoir  $\text{Arcsin } x \in [0, \pi/2]$ , et

donc  $x \geq 0$ . Toute solution est donc positive, on peut restreindre l'étude à  $[0, 1]$ .

Soit  $x \in [0, 1]$ . Comme  $\text{Arcsin } x, \text{Arccos } \frac{4}{5} \in [-\pi/2, \pi/2]$ , par bijectivité du sinus sur cet intervalle, on a  $\text{Arcsin } x = \text{Arccos } \frac{4}{5}$  si et seulement si  $\sin \text{Arcsin } x = \sin \text{Arccos } \frac{4}{5}$ . Or, si  $0 \leq x \leq 1$ ,  $\sin(\text{Arcsin } x) = x$  et  $\sin \text{Arccos } \frac{4}{5} = \sqrt{1 - (4/5)^2} = \frac{3}{5}$ . On a donc comme unique solution :  $\frac{3}{5}$ .



Toujours faire attention aux signes des objets, et aux ensembles auxquels ils appartiennent.

### Proposition 8.1.9.

Pour tout  $x \in [-1, 1]$ , on a  $\text{Arcsin } x + \text{Arccos } x = \pi/2$ .

#### Démonstration.

Notons  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \text{Arcsin } x + \text{Arccos } x$ . Il suffit de montrer que  $f$  est constante sur  $[-1, 1]$ , de valeur  $\pi/2$ . Pour cela on peut vérifier les trois points suivants :

1.  $f$  est constante sur  $] -1, 1[$ . En effet,  $f$  est dérivable sur  $] -1, 1[$  et d'après ce qui précède sa dérivée est nulle. Notons  $C$  sa valeur sur  $] -1, 1[$ .
2.  $f$  est constante sur  $[-1, 1]$ . En effet, on a  $\forall x \in ] -1, 1[$   $f(x) = C$ , donc  $f$  admet une limite à droite en  $-1$  et  $f(x) \xrightarrow[x > -1]{x \rightarrow -1} C$ . Or  $f$  est continue en  $-1$  car  $\text{Arcsin}$  et  $\text{Arccos}$  le sont. Donc  $f(x) \xrightarrow[x > -1]{x \rightarrow -1} f(-1)$ .

Donc  $f(-1) = C$ .

De même  $f(1) = C$ .

On a donc  $\forall x \in [-1, 1]$   $f(x) = C$ .

3. La valeur de  $f$  sur  $[-1, 1]$  est  $\pi/2$ . En effet, en  $0$ ,  $f$  vaut  $\text{Arcsin } 0 + \text{Arccos } 0$ , qui est égal à  $0 + \pi/2$ .

□

## 8.2 Arctangente



La fonction tangente n'est pas bijective : pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il n'existe pas un unique  $t \in \mathbb{R}$  vérifiant  $x = \tan(t)$ .

### Définition 8.2.1 (Arc tangente).

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe un unique  $t \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  tel que  $x = \tan(t)$ . On dit que ce  $t$  est l'arc tangente de  $x$  (noté  $t = \text{Arctan}(x)$ ).

Plus formellement, la fonction tangente est bijective de  $] -\pi/2, \pi/2[$  sur  $\mathbb{R}$ . Sa fonction réciproque est appelée arctangente et noté  $\text{Arctan}$  (parfois  $\text{atan}$ ).

### Proposition 8.2.2.

La fonction arc tangente est continue sur  $\mathbb{R}$ , dérivable sur  $\mathbb{R}$  de dérivée  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ , impaire et strictement croissante. Son graphe est donné figure 20 (noter les asymptotes).

#### Démonstration.

Tout découle du tableau de variations de la tangente et des théorèmes généraux précédents.

On a  $\tan' = 1 + \tan^2$ , donc pour tout  $x \in ]-\pi/2, \pi/2[$ ,  $\tan'(x) \geq 1$ . La dérivée de la tangente ne s'annule pas sur  $] -\pi/2, \pi/2[$ , donc  $\text{Arctan}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Ensuite, si  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{\tan'(\text{Arctan } x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\text{Arctan } x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

L'imparité s'obtient comme pour l'arc sinus. □

### Proposition 8.2.3.

À nouveau, remarquer que  $\tan \circ \text{Arctan} = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ , mais pas  $\text{Arctan} \circ \tan$  : ce n'est l'identité que sur  $] -\pi/2, \pi/2[$ .

### Exemple 8.2.4.

Résoudre l'équation  $\text{Arctan}(2x) + \text{Arctan}(3x) = \frac{\pi}{4}$  (E).

**Analyse** Soit  $x$  une solution de l'équation. On a nécessairement

$$\tan(\text{Arctan}(2x) + \text{Arctan}(3x)) = \tan \pi/4$$

On en déduit que

$$\frac{\tan(\text{Arctan}(2x)) + \tan(\text{Arctan}(3x))}{1 - \tan(\text{Arctan}(2x)) \cdot \tan(\text{Arctan}(3x))} = 1,$$

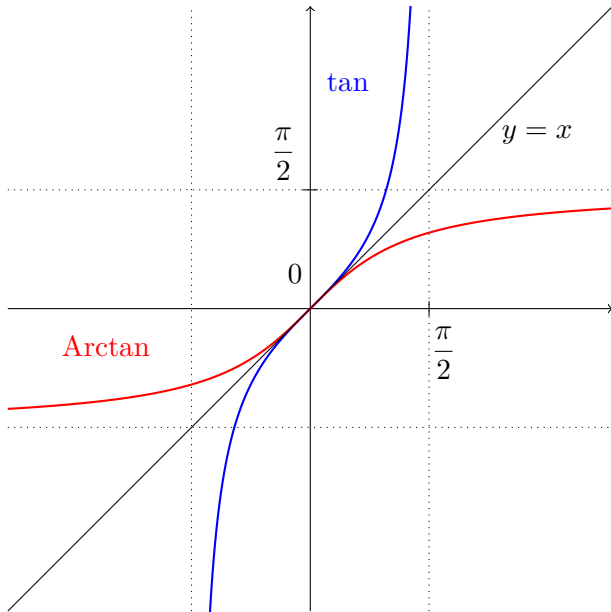


FIGURE 20 – Fonctions tan et Arctan.

donc

$$\frac{2x + 3x}{1 - 2x \cdot 3x} = 1,$$

ainsi

$$5x = 1 - 6x^2,$$

que l'on factorise en

$$(x + 1)(6x - 1) = 0.$$

Ainsi,  $x = -1$  ou  $x = \frac{-1}{6}$ .

Or,  $\text{Arctan}(-2) + \text{Arctan}(-3) < 0$ , donc  $-1$  ne peut pas être solution de (E). Donc il existe au plus une solution :  $\frac{1}{6}$

**Synthèse** Posons  $x = \frac{1}{6}$  et montrons que  $x$  est solution de (E).

Posons  $v = \tan(\text{Arctan}(2x) + \text{Arctan}(3x))$ . On a

$$\begin{aligned} v &= \frac{\tan(\text{Arctan}(2x)) + \tan(\text{Arctan}(3x))}{1 - \tan(\text{Arctan}(2x)) \cdot \tan(\text{Arctan}(3x))} \\ &= \frac{1/3 + 1/2}{1 - 1/3 \times 1/2} \\ &= \frac{5/6}{5/6} = 1 \end{aligned}$$

On a donc

$$\tan(\text{Arctan}(2x) + \text{Arctan}(3x)) = \tan \pi/4 \quad (1)$$

De plus,  $\text{Arctan}(1/3) + \text{Arctan}(1/2) \geq 0$ . En outre, l'application Arctan étant strictement croissante, on a  $\text{Arctan}(1/3) < \text{Arctan}(1/2) < \text{Arctan}(1)$ , or  $\text{Arctan}(1) = \pi/4$ , donc on a  $\text{Arctan}(1/3) + \text{Arctan}(1/2) < \pi/2$ . Donc on a

$$\text{Arctan}(2x) + \text{Arctan}(3x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[ \quad (2)$$

Or la restriction de tan à  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$  est strictement croissante, donc d'après (1) et (2), on a  $\text{Arctan}(2x) + \text{Arctan}(3x) = \frac{\pi}{4}$ ,  $1/6$  est donc solution de (E).

**Conclusion** L'équation (E) admet une unique solution :  $1/6$ .

#### Exercice 8.2.5.

Étudier la fonction

$$f : x \mapsto \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right).$$

### 8.3 Coordonnées polaires

Soit  $(x, y)$  un couple de coordonnées cartésiennes d'un point  $M$  du plan. On veut un couple de coordonnées polaires de  $M$ . On cherche un tel couple sous la forme  $(r, \theta)$  avec  $r \geq 0$  et  $\theta \in ]-\pi, \pi[$ . On a  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . On doit avoir  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ , donc  $\cos \theta = x/r$  et  $\sin \theta = y/r$  (on écarte le cas  $r = 0$ , on dit par convention que toutes les  $(0, \theta)$  conviennent).

On distingue deux cas :

**Premier cas**  $y \geq 0$ , donc  $M$  appartient au demi-plan supérieur, donc  $\theta \in [0, \pi]$  et donc  $\theta = \text{Arccos}(x/r)$ .

**Second cas**  $y < 0$ , alors  $\theta \in ]-\pi, 0[$ , donc  $-\theta \in ]0, \pi[$ , donc  $-\theta = \text{Arccos}(x/r)$ , d'où  $\theta = -\text{Arccos}(x/r)$ .

**Remarque 8.3.1.**

On aurait aussi pu utiliser  $\text{Arcsin}$  en distinguant les cas  $x \geq 0$  ( $\theta = \text{Arcsin}(y/r)$ ) et  $x < 0$  ( $\theta = \pi - \text{Arcsin}(y/r)$ ).

**Exemple 8.3.2.**

Un couple de coordonnées polaires de  $(4, -3)$  est  $(5, -\text{Arccos} \frac{4}{5})$ .

**Remarque 8.3.3.**

Trouver le module et un argument d'un nombre complexe est le même problème que de déterminer un couple de coordonnées polaires d'un point du plan. Il se résout avec les mêmes méthodes.

## 9 Fonctions hyperboliques

### 9.1 ch, sh et th

**Définition 9.1.1.**

On appelle :

1. *Sinus hyperbolique* et on note sh l'application

$$\begin{aligned} \text{sh} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

2. *Cosinus hyperbolique* et on note ch l'application

$$\begin{aligned} \text{ch} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

**Proposition 9.1.2.** 1. La fonction ch est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée est sh. De plus, ch est paire.

2. La fonction sh est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée est ch. De plus, sh est impaire.
3. Les graphes de ch et sh sont donnés dans la figure 22.
4.  $\text{ch} + \text{sh} = \exp$ .
5.  $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$ .

**Démonstration.** 1. On calcule  $\text{ch}'$ , et  $\text{ch}(-x)$ .

2. Idem.
3. On dresse le tableau de variations de signes / variations suivant (voir figure 21), en partant du fait que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\text{ch}(x) > 0$ . On rajoute :

|                |           |     |           |
|----------------|-----------|-----|-----------|
| $x$            | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $\text{ch}(x)$ | +         |     |           |
| $\text{sh}(x)$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $\text{sh}(x)$ | -         | 0   | +         |
| $\text{ch}(x)$ | $+\infty$ | $1$ | $+\infty$ |

FIGURE 21 – Variations de ch et de sh.

$\text{ch}(x) - \text{sh}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ , donc les graphes de ch et de sh sont asymptotiques l'un de l'autre.

4. Simple calcul.
5. On factorise, en utilisant la parité de ch et l'imparité de sh et le résultat précédent : pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) &= (\text{ch}(x) + \text{sh}(x))(\text{ch}(x) - \text{sh}(x)) \\ &= (\text{ch}(x) + \text{sh}(x))(\text{ch}(-x) + \text{sh}(-x)) \\ &= \exp(x) \exp(-x) \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

**Remarque 9.1.3.**

On a l'inégalité suivante : pour tout  $u \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$u + \frac{1}{u} \geq 2,$$

avec égalité si et seulement si  $u = 1$ . Cela permet de retrouver que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\text{ch}(x) \geq 1$ .

**Exercice 9.1.4.**

Démontrer l'inégalité précédente de deux manières différentes.

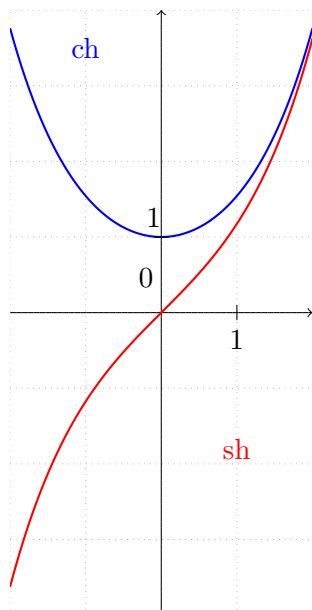


FIGURE 22 – Fonctions ch et sh.

**Définition 9.1.5.**

On appelle *Tangente hyperbolique* et on note  $\text{th} = \frac{\text{sh}}{\text{ch}}$ , soit l'application

$$\begin{aligned} \text{th} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \end{aligned}$$

**Proposition 9.1.6.**

La fonction  $\text{th}$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\text{th}' = 1 - \text{th}^2 = \frac{1}{\text{ch}^2}.$$

De plus,  $\text{th}$  est impaire et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $-1 < \text{th}(x) < 1$ . Voir son graphe figure 23.

**Démonstration.**

Par le calcul de  $\text{ch} - \text{sh}$ , on obtient que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$-\text{ch}(x) < \text{sh}(x) < \text{ch}(x)$$

et  $\text{ch}(x) > 0$ , donc  $\text{th}$  est bien définie et à valeurs dans  $] -1, 1[$ . En tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas,  $\text{th}$

est dérivable. On dérive  $\text{th}$  facilement. Les limites de  $\text{th}$  s'obtiennent aisément : on notera les deux asymptotes horizontales à son graphe.  $\square$

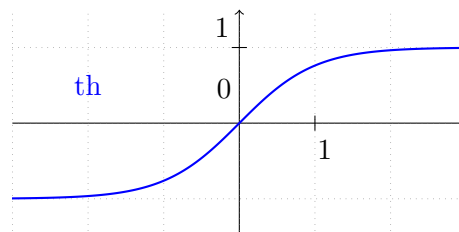


FIGURE 23 – Fonction th.

**Remarque 9.1.7.**

Pourquoi fonctions «hyperboliques» et «circulaires» ? Car  $x^2 + y^2 = 1$  est l'équation du cercle trigonométrique  $\mathcal{C}$ , donc  $(x, y) \in \mathcal{C}$  ssi  $\exists t \in \mathbb{R} \quad x = \cos t$  et  $y = \sin t$ .

De même,  $x^2 - y^2 = 1$  est l'équation de l'hyperbole équilatère  $\mathcal{H}$  d'asymptotes  $x = \pm y$ . Donc  $(x, y) \in \mathcal{H}$  ssi  $\exists t \in \mathbb{R} \quad x = \text{ch } t$  et  $y = \text{sh } t$ .

**Remarque 9.1.8.**

Toutes les formules de trigonométrie circulaire ont une analogue hyperbolique. Par exemple :

$$\begin{aligned} \text{ch}(a + b) &= \text{ch } a \text{ch } b + \text{sh } a \text{sh } b, \\ \text{sh}(a + b) &= \text{sh } a \text{ch } b + \text{ch } a \text{sh } b. \end{aligned}$$

Ces formules ne sont pas à connaître.

**Remarque 9.1.9.**

Les dérivées du sinus et du cosinus hyperboliques en 0 donnent les limites suivantes, fort utiles :

$$\begin{aligned} \frac{\text{sh}(x)}{x} &\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1, \\ \frac{\text{ch}(x) - 1}{x} &\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

On a remarqué que  $\text{ch}$  est paire,  $\text{sh}$  est impaire et  $\exp = \text{ch} + \text{sh}$ . Cela se généralise comme suit.



**Définition 9.1.10.**

Soit  $A \subset \mathbb{R}$  et  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Supposons que  $A$  est centré ( $\forall x \in A, -x \in A$ ). Alors, il existe deux uniques fonctions  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  et  $h : A \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

- $g$  est paire ;
- $h$  est impaire ;
- $f = g + h$ .

On dit que  $g$  est la *partie paire* de  $f$  et  $h$  sa *partie impaire*.

**Démonstration.**

On raisonne par analyse-synthèse.

**Analyse** : On suppose que l'on a  $g$  et  $h$  qui conviennent et l'on essaie d'obtenir des informations dessus. *Indice* : si  $x \in A$ , calculer  $f(x) + f(-x)$ .

On a en fait montré l'unicité de  $g$  et de  $h$ .

**Synthèse** : On vérifie que les fonctions trouvées dans la phase d'analyse conviennent.

On a alors montré l'existence de  $g$  et de  $h$ . □

**Exemple 9.1.11.**

Les fonctions cosinus et sinus hyperboliques, sont les parties paires et impaires de la fonction exponentielle.

**9.2 Fonctions hyperboliques inverses**

Elles sont hors-programme. :(

Mais vous pouvez très bien les retrouver, ainsi que leurs propriétés, en tant qu'exercice ! :)