Feuille d'exercice n° 21 : **Dénombrement – Exercices supplémentaires**

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini de cardinal n. Dénombrer les objets suivants :

1) L'ensemble des relations sur E.

2) L'ensemble des relations réflexives sur E.

3) L'ensemble des relations symétriques sur E.

4) L'ensemble des relations antisymétriques sur E.

5) L'ensemble des relations réflexives et symétriques sur E.

6) L'ensemble des relations réflexives et anti-symétriques sur E.

Exercice 2 Soit A une partie d'un ensemble E à n éléments. On pose $p = \mathrm{Card} A$.

1) Combien y a-t-il de parties X de E contenant A ?

2) Combien y a-t-il de parties X de E à $m \in \{p, \dots, n\}$ éléments contenant A ?

3) Combien y a-t-il de couples (X, Y) de parties de E tels que $X \cap Y = A$?

Exercice 3 Soit E un ensemble à $n \in \mathbb{N}^*$ éléments.

1) Calculer $\displaystyle\sum_{X \subset E} \mathrm{Card}(X)$.

2) Calculer $\displaystyle\sum_{X, Y \subset E} \mathrm{Card}(X \cap Y)$.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre de triplets $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ solutions de l'équation $x + y + z = n$.

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre de triplets $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ solutions de l'équation $x + y + z = n$ avec les conditions $x \leqslant y + z$, $y \leqslant z + x$ et $z \leqslant x + y$.

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![0, n]\!]$, soit E un ensemble fini de cardinal n et A une partie de E de cardinal p.

Soit $k \in \mathbb{N}$.

1) Combien y a-t-il de parties de E à k éléments contenant un et un seul élément de A ?

2) Combien y a-t-il de parties de E à k éléments contenant au moins un élément de A ?

Exercice 7 Soit E un ensemble à $n \in \mathbb{N}^*$ éléments. Dénombrer les ensembles suivants.

1) $F = \{ (A, B) \in \mathscr{P}(E)^2 \mid A \cup B = E \text{ et } A \cap B = \varnothing \}$

2) Si $A \subset E$ est fixée et possède p éléments, $G_A = \{ B \subset E \mid A \cup B = E \}$.

3) $F = \{ (A, B) \in \mathscr{P}(E)^2 \mid A \cup B = E \}$

Exercice 8 Soit n, p deux entiers naturels non nuls, soit $a_1, \dots, a_p$ des entiers naturels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_i = n$.

Dénombre l'ensemble des applications de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$ telles que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, i ait exactement a_i antécédents.

Exercice 9 Montrer que tout anneau fini, commutatif et intègre est un corps.