Devoir facultatif n° 11

— Matrices nilpotentes —

Soit E un $\mathbb{R}$-ev. de dimension $n > 0$, rapporté à une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on notera φ_A l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est A.

Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$.
Dans ce cas *l'indice* de A est le plus petit entier p tel que $A^p = 0$.

$$\text{On note :} \begin{cases} \mathscr{N} &= \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ nilpotentes}\}, \\ \mathscr{T} &= \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ triangulaires supérieures}\}, \\ \mathscr{U} &= \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tq } A - I \in \mathscr{N}\}, \quad \text{où } I \text{ désigne la matrice identité d'ordre } n, \\ E_k &= \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k), \qquad (1 \leqslant k \leqslant n), \\ E_0 &= \{0\} \end{cases} .$$

1) **a)** Montrer qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathscr{T}$ si et seulement si pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, E_k est stable par φ_A.

b) Montrer que $\mathscr{T}$ est un sous-ev et un sous-anneau de $\mathscr{M}_n(R)$.

c) Soit $A \in \mathscr{T}$. Montrer que $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, $\varphi_A(E_k) = E_k$.

d) On note $A = (a_{ij})$. Montrer que la condition précédente équivaut à : $\forall i$, $a_{ii} \neq 0$.

e) Montrer que si $A \in \mathscr{T} \cap \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $A^{-1} \in \mathscr{T}$.

2) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{T}$ dont les coefficients diagonaux a_{ii} sont tous nuls.

a) Montrer que A est nilpotente d'indice inférieur ou égal à n.

b) Montrer que l'indice de A est exactement n si et seulement si les coefficients $a_{i,i+1}$, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, sont tous non nuls.

3) Soit $A \in \mathscr{N}$.

a) Soit $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que PAP^{-1} est nilpotente de même indice que A.

b) En étudiant $\mathrm{Im}\,\varphi_A$, montrer qu'il existe une base $(u_1, \dots, u_n)$ de E dans laquelle la matrice de φ_A a sa dernière ligne nulle.

c) Par récurrence sur n, montrer alors qu'il existe une base $(v_1, \dots, v_n)$ de E dans laquelle la matrice de φ_A est triangulaire supérieure à diagonale nulle.

d) Que peut-on en déduire pour l'indice de A ?

e) Pour $n = 2$, trouver une matrice nilpotente non triangulaire.

4) Soient $A, B \in \mathscr{N}$ telles que $AB = BA$.

a) Montrer que $A + B \in \mathscr{N}$.

b) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, que vaut $(A + \lambda B)^n$?

c) Montrer que si p et q sont deux entiers naturels tels que $p + q \geqslant n$, alors $A^p B^q = 0$.

5) Pour $A \in \mathscr{N}$, on pose $\exp(A) = I + A + \dfrac{1}{2!}A^2 + \ldots + \dfrac{1}{(n-1)!}A^{n-1}$.

a) Montrer que $\exp(A) \in \mathscr{U}$.

b) Soient $A, B \in \mathscr{N}$ telles que $AB = BA$. Montrer que $\exp(A+B) = \exp(A) \times \exp(B)$.

c) En déduire que $\exp(A)$ est inversible.

6) On suppose ici que $n \geqslant 2$, et on considère les polynômes :

$$\begin{cases} P &= 1 + X + \dfrac{X^2}{2!} + \ldots + \dfrac{X^{n-1}}{(n-1)!} \\ Q &= X - \dfrac{X^2}{2} + \ldots + \dfrac{(-1)^n X^{n-1}}{(n-1)} \end{cases}.$$

On rappelle que l'on appelle *valuation* d'un polynôme Π l'entier $v \in \mathbb{N}$ tel que $X^v | \Pi$ et $X^{v+1} \nmid \Pi$.

a) Montrer que la valuation de $P(Q(X)) - (1 + X)$ est supérieure ou égale à n (on pourra utiliser des développements limités).

b) Soit $A \in \mathscr{U}$ telle que $A = I + N$ avec $N \in \mathscr{N}$. Montrer que $P(Q(N)) = A$.

c) En s'inspirant des calculs précédents, simplifier $Q(P(N) - I)$ pour $N \in \mathscr{N}$.

7) **a)** Prouver que l'application exp est une bijection de $\mathscr{N}$ sur $\mathscr{U}$.

b) Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, l'application $A \mapsto A^k$ est une bijection de $\mathscr{U}$ sur $\mathscr{U}$.

— **FIN** —