Devoir surveillé n°4

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Soient a et b deux réels. Montrer que :

1) $a \leqslant b \Rightarrow \lfloor a \rfloor \leqslant \lfloor b \rfloor$;

2) $\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leqslant \lfloor a+b \rfloor \leqslant \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 1$.

II. Une fonction de $\mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$. On définit la fonction $f : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$ de la manière suivante : si $X \subset \mathbb{R}$, alors $f(X) = (X \cap A) \cup B$.

1) Soit X, Y deux parties de $\mathbb{R}$.

- **a)** Montrer que $X \subset Y \Leftrightarrow X \cap Y = X$.
- **b)** Montrer que $X \subset Y \Leftrightarrow X \cup Y = Y$.

2)
- **a)** Dans cette question, on suppose que $A = \varnothing$. Calculer $f(X)$ pour tout $X \subset \mathbb{R}$.
- **b)** Dans cette question, on suppose que $B = \mathbb{R}$. Calculer $f(X)$ pour tout $X \subset \mathbb{R}$.
- **c)** Que remarque-t-on dans les deux cas précédents ?

3) Calculer, dans le cas général, $f(\varnothing)$, $f(A)$, $f(B)$ et $f(\mathbb{R})$.

4) Montrer que la fonction f est croissante, au sens de l'inclusion, *i.e.* que pour toutes parties X, Y de $\mathbb{R}$ si $X \subset Y$ alors $f(X) \subset f(Y)$.

5) Soit Y une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes.

- (i) Y admet un antécédent dans $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ par f.
- (ii) $B \subset Y \subset A \cup B$.
- (iii) $f(Y) = Y$.

6)
- **a)** Résoudre l'équation $f(X) = A$, d'inconnue $X \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$.
- **b)** Résoudre l'équation $f(X) = B$, d'inconnue $X \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

7)
- **a)** Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit constante.
- **b)** Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit surjective.
- **c)** Montrer que cette dernière condition est aussi nécessaire et suffisante pour que f soit injective.

8) **a)** Que peut-on dire de $f \circ f$?

b) Soit E un ensemble quelconque, soit $g : E \to E$ *idempotente*, *i.e.* vérifiant $g \circ g = g$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) La fonction g est injective.

(ii) La fonction g est surjective.

(iii) On a $g = \mathrm{Id}_E$.

III. Distance à un ensemble.

Dans ce problème, on travaille indifféremment avec la distance entre deux nombres réels (la valeur absolue) et la distance entre deux nombres complexes (le module). On considère donc que $E = \mathbb{R}$ ou $E = \mathbb{C}$.

Pour une partie A non vide de E et un élément x de E, on définit la *distance de x à A* comme

$$d(x, A) = \inf \{|x - a| \ ; \ a \in A\} .$$

L'objet de ce problème est d'étudier cette notion sur quelques exemples puis d'en dégager quelques propriétés.

1) Question de cours : Soit $B \subset \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Rappeler une condition nécessaire et suffisante sous laquelle B admet une borne inférieure. Sous cette condition, montrer que $y = \inf(B)$ si et seulement si

$$\forall b \in B, \ y \leqslant b \ \text{ et } \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists b \in B, \ b < y + \varepsilon.$$

2) Montrer que la borne inférieure apparaissant dans la définition de $d(x, A)$ est bien définie.

3) Exemples réels. Dans cette partie, $E = \mathbb{R}$.

a) On prend $A = \{0\}$. Déterminer $d(x, A)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) On prend $A = [-1, 1]$. Déterminer $d(x, A)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) On prend $A = \mathbb{Q}$. Déterminer $d(x, A)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4) Exemples complexes : *on choisira soigneusement la forme sous laquelle on exprime les nombres complexes manipulés*. Dans cette partie, $E = \mathbb{C}$.

a) On prend $A = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ (demi-plan de Poincaré). Déterminer $d(x, A)$ pour tout $x \in \mathbb{C}$.

b) On prend $A = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| \leqslant 1\}$ (disque unité). Déterminer $d(x, A)$ pour tout $x \in \mathbb{C}$.

5) Soit $A \subset E$ non vide et $x \in E$. Quelle relation y a-t-il entre les propositions «$x \in A$» et «$d(x, A) = 0$» ?

6) Soit $A \subset B \subset E$ non vides. Montrer que pour tout $x \in E$, $d(x, B) \leqslant d(x, A)$.

7) Soit $A \subset E$ non vide, soit $x, y \in E$. Montrer que $|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant |x - y|$.

8) Dans le cas où $E = \mathbb{R}$ et pour $A \subset E$ non vide, en déduire que la fonction $x \mapsto d(x, A)$ est continue.

— **FIN** —