Devoir à la maison n° 05

À rendre le 19 octobre

I. Dénombrabilité de $\mathbb{Z}$ et des $\mathbb{N}^p$

On se propose dans ce problème de montrer qu'il y a « autant d'éléments » dans $\mathbb{N}$ que dans $\mathbb{Z}$, et même mieux : « autant d'éléments » dans $\mathbb{N}$ que dans $\mathbb{N}^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que $\mathbb{Z}$ ainsi que les $\mathbb{N}^p$ sont *dénombrables.*

On rappelle que deux ensembles « ont le même nombre d'éléments » s'il existe une bijection entre ces deux ensembles.

On pourra utiliser sans démonstration le fait qu'un entier est pair ou impair, mais ne peut être pair et impair simultanément.

1) *Questions préliminaires.*

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $k, \ell \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2^k(2\ell + 1)$.

b) Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$, de tels entiers k, ℓ sont uniques. On dit alors que 2^k est la plus grande puissance de 2 divisant n.

2) On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & \dfrac{(-1)^n}{4} \times (2n + 1 - (-1)^n) \end{array} \right.$. On veut montrer que f est une bijection.

a) Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $f(2k)$, et pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $f(2k - 1)$.

b) En déduire un antécédent de $p \in \mathbb{Z}$ par f, en distinguant les cas p positif ou négatif.

c) En déduire une fonction $\tilde{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ telle que $\tilde{f} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ et $f \circ \tilde{f} = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$.

d) Conclure.

3) On veut montrer que l'application $g : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (m, n) & \mapsto & 2^m(2n + 1) - 1 \end{array} \right.$ est une bijection.

a) Montrer que g est injective.

b) Montrer que g est surjective.

4) On souhaite montrer par récurrence l'existence d'une bijection de $\mathbb{N}^p$ sur $\mathbb{N}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Le cas $p = 1$ est immédiat ; le cas $p = 2$ vient d'être traité. On suppose donc que pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$, il existe une bijection φ_p de $\mathbb{N}^p$ sur $\mathbb{N}$. On définit alors une application $\varphi_{p+1} : \mathbb{N}^{p+1} \to \mathbb{N}$ de la façon suivante :

$$\forall (n_1, n_2, \ldots, n_{p+1}) \in \mathbb{N}^{p+1},\ \varphi_{p+1}(n_1, n_2, \ldots, n_{p+1}) = g\left(\varphi_p(n_1, n_2, \ldots, n_p), n_{p+1}\right).$$

Montrer que φ_{p+1} est une bijection de $\mathbb{N}^{p+1}$ sur $\mathbb{N}$.

II. Une étude de fonction

Étudier (ensemble de définition, ensemble de dérivabilité, dérivée, tableau de variation, courbe représentative) la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{Arccos}\left(\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)$, et en donner une expression plus simple.

— FIN —