

Ex. 15: $p - q$ proj. ss: $p \circ q = q \circ p = q$.

$$(p \text{ proj. ss: } p^2 = p)$$

(\Leftarrow) sup. que $p \circ q = q \circ p = q$.

$$\begin{aligned}(p - q)^2 &= (p - q) \circ (p - q) = p \circ p - q \circ p - p \circ q + q \circ q \\ &= p - \underbrace{q \circ p}_q - \underbrace{p \circ q}_q + q \\ &= p - q\end{aligned}$$

dc $p - q$ est 1 projecteur.

(\Rightarrow) sup. que $p - q$ est 1 projecteur. Dc: $(p - q)^2 = p - q$

dc avec le calcul précédent: $p \circ q + q \circ p = 2q$. (#)

- On compose (#) à gauche et à droite par q :

$$q \circ p \circ q \circ q + q \circ q \circ p \circ q = 2 q \circ q \circ q$$

ie: $q \circ p \circ q + q \circ p \circ q = 2q$ dc $2 p \circ q \circ p = 2q$

dc: $p \circ q \circ p = q$. (1)

- On compose (#) à droite par p :

$$p \circ q \circ p + q \circ p \circ p = 2 q \circ p \text{ ie: } p \circ q \circ p + q \circ p = 2 q \circ p$$

ie: $p \circ q \circ p = q \circ p$ avec (1): $q = q \circ p$ (2)

avec (#): $p \circ q = 2q - q \circ p \stackrel{(2)}{=} q$ (3)

(2) et (3): c.q.f.d.