Th. de la base incomplète :

E de dim finie, $\mathcal{G} = \{g_1 \cdots g_n\}$ famille génératrice.

$\mathcal{L}$: famille libre.

On peut compléter $\mathcal{L}$ en 1 base de E en lui rajoutant des vect. de $\mathcal{G}$.

ALGO : • on regarde si Vect $\mathcal{L} = E$.

si oui : $\mathcal{L}$ est 1 fam. gén,

ĉ elle est libre c'est 1 base.

sinon : on regarde si $g_1 \notin \text{Vect } \mathcal{L}$:

si oui : on ajoute g_1 à $\mathcal{L}$,

et ĉ $g_1 \notin \text{Vect}$ (ancienne $\mathcal{L}$)

alors $\mathcal{L} \uplus \{g_1\}$ = nouvelle $\mathcal{L}$,

est encore libre

sinon : on passe à $g_2 \cdots g_n$

boucle

boucle

invariant : $\mathcal{L}$ est libre

à la fin : $\text{Vect } \mathcal{L} = E$.

① on peut arriver à $\text{Vect } \mathcal{L} = E$ avant d'avoir passé en revue tous les vect. de $\mathcal{G}$.

② On a passé en revue tous les vect. de $\mathcal{G}$, on a rajouté tous ceux qui n'étaient pas dans $\text{Vect } \mathcal{L}$: donc $g_1 \cdots g_n \in \text{Vect } \mathcal{L}$

Ie $\underbrace{\text{Vect } g}_{=E} \subset \text{Vect } \mathcal{L} \subset E$ Ie $\text{Vect } \mathcal{L} = E$.

Rigoureusement :

$i = 1$

TANT QUE $(\text{Vect } \mathcal{L} \neq E$ et $i \leq n)$:

  Si $g_i \notin \text{Vect } \mathcal{L}$:

    on pose $\mathcal{L} = \mathcal{L} \uplus \{g_i\}$

  $i = i + 1$

RENVOYER $\mathcal{L}$.

invariant : $\mathcal{L}$ est libre

et en entrée de boucle :

$\mathrm{Vect}(g_1 \dots g_{i-1}) \subset \mathrm{Vect}\,\mathcal{L}$

avant le TANT QUE (ie : initialisation de la réc)

- $\mathcal{L}$ est libre
- $\mathrm{Vect}(g_1, g_{i-1}) = \mathrm{Vect}(g_1, g_0) = \emptyset$

$\mathrm{Vect}\,\emptyset = \{0\} \subset \mathrm{Vect}\,\mathcal{L}$.

hérédité : on suppose que l'invariant est vérifié à l'entrée d'1 boucle, on montre qu'il est encore vérifié à la sortie de ce à tour de boucle.

- $\mathcal{L}$ est libre à l'entrée, et $\mathrm{Vect}(g_1 \dots g_{i-1}) \subset \mathrm{Vect}\,\mathcal{L}$

si $g_i \in \mathrm{Vect}\,\mathcal{L}$, on ne fait rien :

$\mathcal{L}$ est toujours libre

notons $j = i+1$, avec i la valeur de i en entrée

alors : $g_{j-1} \in \mathrm{Vect}\,\mathcal{L}$

et $\mathrm{Vect}(g_1 \dots g_{j-2}) \subset \mathrm{Vect}\,\mathcal{L}$

donc : $\mathrm{Vect}(g_1 \dots g_{j-2}, g_{j-1}) \subset \mathrm{Vect}\,\mathcal{L}$

de l'inv. en sortie est vérifié.

Donc à la fin ? de l'algo., on aura

ℓ liste et $\mathrm{Vect}(g_1 \ldots g_{i-1}) \subset \ell$

Variant : à chaque tour de boucle i croît

strictement, donc la condition $i \leq n$

dans le TANT QUE finira par ne plus

être vérifiée, et l'algo. s'arrêtera,

s'il ne s'est pas déjà arrêté à cause de la condition $\mathrm{Vect}\,\mathcal{L} \subsetneq E$.

L'algo termine.

Qd il s'arrête, soit il s'arrête à cause

de $\mathrm{Vect}\,\mathcal{L} = E$, et $\mathcal{L}$ est libre c'est 1

base.

Soit il s'arrête à cause de $i = n+1$,

et alors $\mathrm{Vect}(g_1 \cdots g_n) \subset \mathrm{Vect}\,\mathcal{L}$

ie $E \subset \mathrm{Vect}\,\mathcal{L} \subset E$

donc $\mathrm{Vect}\,\mathcal{L} = E$, et comme $\mathcal{L}$ est libre, c'est 1 base.

<u>Ex (indispensable) :</u>

$E = \mathbb{R}^4$.

$$\mathcal{L} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right). \quad F = \mathrm{Vect}\,\mathcal{L}$$

- Mq. $\mathcal{L}$ est libre
- Compléter $\mathcal{L}$ en 1 base de $\mathbb{R}^4$.

$\cdot\ F = \operatorname{Vect} \mathcal{L} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

$C_2 + C_3$

$$= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$4C_1 - C_2 \qquad C_2 \leftarrow C_1$

↳ pas $\mathcal{L}$!

cette famille est échelonnée, donc elle est libre, or elle est génératrice de F donc c'est 1 base de F

On anticipe : on utilise 1.4.9 :

F a 1 base de 3 vect.

et $\mathcal{L}$ est génératrice de F et elle a 3 vect,
donc elle est libre.
[on verra ça en 1.4.5]

• On voit maintenant très facilement que

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

est échelonnée, donc elle est libre.

dc si $\mathcal{B} = \left(\overbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}^{e_1}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right)$

$\mathcal{B}$ est 1 base de $\mathbb{R}^4$.

On applique l'algo. de th. de la base incomplète.

- $\mathcal{L}$ est libre
- $e_1 \notin \mathrm{Vect}\,\mathcal{L}$ car $\left(e_1, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\6\\-7\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}}_{=\mathcal{L}'}\right)$

est échelonnée donc libre.

dc on rajoute e_1 à $\mathcal{L}$: on appelle $\mathcal{L}'$ le résultat.

• On revient au début de (a), vidéo :

$$\mathrm{Vect}\, \mathcal{L}' = \mathbb{R}^4 \ ?$$

$$\mathrm{Vect}\, \mathcal{L}' = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \mathbb{R}^4.$$

Fin de l'algo :

$\mathcal{L}'$ est 1 base de $\mathbb{R}^n$: on a complété

$\mathcal{L}$ en 1 base de $\mathbb{R}^n$, en lui

ajoutant des $(n-1)$ vect.

de la base canonique.

Rq : [... cette partie est superflue

avec 1.4.9 : $\mathcal{L}'$ est libre et a n vect

donc c'est 1 base de $\mathbb{R}^n$.

Ex. 1.3.5 : $\mathcal{L} = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right).$

On a : $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{\mathcal{L}}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right)$

est échelonnée, donc elle est libre, donc avec 1.4.9, c'est 1 base de $\mathbb{R}^4$.

Cor : Tt ev E de dim finie admet 1 base.

Dém : • Si $E = \{0\}$, $\emptyset$ est 1 base de E.

• Si $E \neq \{0\}$, $\emptyset$ est 1 famille libre de E

(si le vide vous enlaidit, il existe $x \neq 0$ ds E, donc $\{x\}$ est 1 famille libre).

On peut compléter cette famille libre en 1 base de E. donc on a trouvé 1 base de E !

Cor : De toute famille génératrice on peut extraire 1 base.

Dem : $(f_1 \ldots f_n)$ 1 famille génératrice.

$\emptyset$ est 1 famille libre donc on peut le compléter en 1 base en lui rajoutant des vect de $(f_1 \ldots f_n)$.

La base ainsi obtenue est constituée de vect du $\emptyset$ et de $(f_1 \ldots f_n)$, donc elle ne contient que des vect de $(f_1 \ldots f_n)$: c'est ce que l'on cherchait !

Rq : En pratique, on n'utilise pas cette démo.
On cherche 1 vect de la famille qui est c.l. des autres, on l'enlève et on réitère.

Rq : En g^{al}, on ne peut même pas extraire 1 base d'1 famille gén, on peut construire 1 base à partir de la famille génératrice quitte à modifier les vect.

<u>Ex</u>: ds $\mathbb{R}^3$, $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}+7\\+8\\+15\end{pmatrix}\right)$

Donner 1 base de F.

$$F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\15\end{pmatrix}\right)$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\18\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\-6\\36\end{pmatrix}}_{=2\times C_2}\right)$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\6\end{pmatrix}\right)$$

La dernière famille est échelonnée, donc c'est 1 base de F.

1.4 : Existence de la dimension :

Soit E 1 ev. de dim finie.

Il admet au moins 1 base.

Et toutes ses bases ont le même cardinal : ce cardinal commun est appelé

<u>dim E</u>

~~Rq~~ : Si : $E = \{0\}$ $E = \mathrm{Vect}\,\emptyset$

et on pose $\dim E = 0$ $(= \#\emptyset)$.

Si E n'est pas nul, ttes base de E a au moins 1 élt donc

$\dim E \in \mathbb{N}^*$.

<u>1.4.6</u> : facile avec le th. fondamental :

Si $n > \dim E$,

ttes famille de n vect est liée

dc par contraposition :

1 Une famille libre a au plus $\dim E$ vect.

Soit $\mathcal{F}$ 1 famille génératrice.

E a 1 base $\mathcal{B}$, et $\mathcal{B}$ a $\dim E$ vect.

dc avec 1 : $\# \hat{\mathcal{F}} \geq \dim E$

On a :

2 Une famille génératrice a au moins $\dim E$ vect.

~~Prop. 1.4.7 : supprimée. C'est inutile.~~

~~1.4.8~~

Prop. 1.4.9 : Soit E de dim finie n.

Soit F 1 famille de n vect.

(1) S : F est libre, c'est 1 base.

(2) S : F est génératrice, c'est 1 base.

Bq : Pr mq. 1 famille $\mathcal{G}$ est 1 base de E, on a maintenant 3 méthodes :

(a) Mq. $\mathcal{G}$ est libre et génératrice

(b) Mq $\mathcal{G}$ est libre et $\#\mathcal{G} = \dim E$

famille

eV

(c) Mq. $\mathcal{G}$ est génératrice et $\#\mathcal{G} = \dim E$

quand : tt le temps : a est synthétisé de b et c

$\#\mathcal{G} = \dim E$: ultra-facile, il suffit de compter !

En général : on préfère rq. $\mathcal{G}$ est libre plutôt que génératrice

donc on préfère b.

Dém : 1 Soit $\mathcal{F}$ libre tq. $\#\mathcal{F} = \dim E = n$

Soit $x \in E$. Supposons que $x \notin \mathrm{Vect}\,\mathcal{F}$

alors $\mathcal{F} \cup \{x\}$ est encore libre,

mais elle a $n+1$ vect : ABSURDE car

toute famille libre a au + n vect.

donc $\forall x \in E$, $x \in \mathrm{Vect}\,\mathcal{F}$

donc $E \subset \mathrm{Vect}\,\mathcal{F} \subset E$ donc $E = \mathrm{Vect}\,\mathcal{F}$

donc $\mathcal{F}$ est génératrice, donc c'est 1 base.

(2) si $\mathcal{F}$ est génératrice et $\#\mathcal{F} = \dim E$

Supposons que $\mathcal{F}$ est liée : On peut donc la mi

ôter 1 vect, et la famille reste génératrice,
on obtient de 1 famille génératrice de n-1
vecteurs ∴ ABSURDE car
tte famille génératrice a au – n vect.

Lisez 1.7.

1.7.4 est utile pour 1 démo future
mais inutile en g^{al}.
Ne vous embêtez pas trop avec.