Devoir à la maison n° 1

À rendre le 9 septembre

Pour un réel a, on considère la fonction f_a, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_a : x \mapsto (a-x)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

On note $\mathscr{C}_a$ la courbe représentative de f_a.

1) Justifier que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, f_a est dérivable, et exprimer f_a'.

2) Soit $a \in \mathbb{R}$, dresser le tableau des variations de f_a.

3) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux uniques réels $x_-(a)$ et $x_+(a)$ en lesquels f_a atteint respectivement un minimum et un maximum, dont on note les valeurs $y_-(a)$ et $y_+(a)$.

4) Justifier que pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$x_+(a) < a < x_-(a).$$

En déduire la limite de x_+ lorsque a tend vers $-\infty$, ainsi que la limite de x_- lorsque a tend vers $+\infty$.

5) Pour $a \in \mathbb{R}$, tracer dans un repère l'allure de $\mathscr{C}_a$, en faisant apparaître tous les éléments étudiés précédemment. On fera notamment apparaître toutes les tangentes horizontales.

6) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a < b$. Comparer f_a et f_b, en déduire les positions relatives de $\mathscr{C}_a$ et $\mathscr{C}_b$.

7) Déterminer l'expression de $x_+(a)$ et de $x_-(a)$ en fonction de $a \in \mathbb{R}$ et dresser les tableaux des variations de x_+ et de x_-.

8) Simplifier les expressions de $x_+(a) + x_-(a)$ et de $x_+(a)x_-(a)$, en fonction de a.

9) On note $\mathscr{C}_-$ l'ensemble des points du plan de la forme $(x_-(a), y_-(a))$, et $\mathscr{C}_+$ l'ensemble des points du plans de la forme $(x_+(a), y_+(a))$:

$$\mathscr{C}_- = \{ (x_-(a), y_-(a)) \mid a \in \mathbb{R} \} \text{ et } \mathscr{C}_+ = \{ (x_+(a), y_+(a)) \mid a \in \mathbb{R} \}.$$

Montrer que $\mathscr{C}_-$ et $\mathscr{C}_+$ sont les deux branches de la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction g, que l'on déterminera.

10) Dresser le tableau des variations de g.

11) Sans étude de fonction supplémentaire, déterminer pour un réel a la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_a$.

12) Pour deux réels a, b vérifiant $a < b$, tracer dans un même repère les allures des courbes $\mathscr{C}_a$, $\mathscr{C}_b$ et $\mathscr{C}$, en faisant apparaître tous les éléments étudiés précédemment. On fera notamment apparaître toutes les tangentes horizontales.

— FIN —