Devoir surveillé n°4

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Calculer $A^n(\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

II. Limites supérieure et inférieure d'une suite d'ensembles.

On considère un ensemble non vide E et une suite $(X_n)_{n\in N}$ de parties de E. On définit respectivement la *limite inf* et la *limite sup* de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\liminf(X_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{p\geqslant n} X_p \right) \qquad \text{et} \qquad \limsup(X_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{p\geqslant n} X_p \right).$$

1) Dans cette question, on considère que $E = \mathbb{R}$. Déterminer pour chacune des suites (X_n) suivantes les ensembles $\bigcap_{p\geqslant n} X_p$, $\bigcup_{p\geqslant n} X_p$ (pour un $n \in \mathbb{N}$ quelconque), puis les ensembles $\liminf X_n$ et $\limsup X_n$.

- **a)** $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = [\![0, n]\!]$
- **b)** $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = [n, +\infty[$
- **c)** $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = \{(-1)^n\}$

2) Soit un élément $x \in E$. Traduire à l'aide de quantificateurs $x \in \liminf(X_n)$. Expliquer par une phrase « en français » la signification de cette propriété. Faire de même pour $x \in \limsup X_n$.

3) Dans cette question, on montre que :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n \subset \liminf X_n \subset \limsup X_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

- **a)** Montrer que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n \subset \liminf X_n$.
- **b)** Montrer que $\liminf X_n \subset \limsup X_n$.
- **c)** Montrer que $\displaystyle\limsup X_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

4) On considère deux suites $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de E. Démontrer les relations suivantes.

- **a)** $\liminf(X_n \cap Y_n) = \liminf(X_n) \cap \liminf(Y_n)$
- **b)** $\limsup(X_n \cap Y_n) \subset \limsup(X_n) \cap \limsup(Y_n)$

c) $\limsup(X_n) \cup \limsup(Y_n) = \limsup(X_n \cup Y_n)$

5) A-t-on toujours
$$\limsup(X_n \cap Y_n) = \limsup(X_n) \cap \limsup(Y_n),$$
pour deux suites $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de E ?

6) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties de E croissante pour l'inclusion, c'est-à-dire
$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n \subset X_{n+1}.$$
Déterminer $\limsup(X_n)$ et $\liminf(X_n)$.

III. Une construction du logarithme.

L'objectif de ce problème est de construire la fonction « logarithme en base a ». On s'abstiendra donc d'utiliser tout objet découlant du logarithme (exponentielle, puissances non entières *etc.*). On pourra bien entendu utiliser la propriété de la borne supérieure et toutes celles en découlant, ainsi que les propriétés élémentaires des suites réelles.

On se fixe, dans tout ce problème, un nombre réel $a > 1$. L'objectif de ce problème est de montrer qu'il existe une unique fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ vérifiant
$$f \text{ est croissante}, \quad f(a) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ f(xy) = f(x) + f(y).$$
Pour chaque $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose
$$A_x = \left\{ \frac{m}{n} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}^*,\ a^m \leqslant x^n \right\}.$$

I - Questions préliminaires.

1) Montrer que la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est strictement croissante.

2) Montrer l'inégalité de Bernoulli :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

3) Que peut-on dire concernant la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$?

4) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un entier $p \in \mathbb{Z}$ vérifiant $a^p \leqslant z \leqslant a^{p+1}$.

5) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, A_x possède une borne supérieure.

II - Analyse : unicité de la fonction solution.

Soit donc $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ croissante, vérifiant $f(a) = 1$ et $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ f(xy) = f(x) + f(y)$.

6) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $f(x^p) = pf(x)$.

7) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $p \in \mathbb{Z}$, $f(x^p) = pf(x)$.

Indication : on pourra commencer par calculer $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

8) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que :
$$\frac{m}{n} \in A_x \quad \text{et} \quad \frac{m}{n} \leqslant f(x) \leqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{n}.$$

9) En déduire que $f(x) = \sup(A_x)$.

III - Synthèse : construction de la fonction solution.

On pose donc

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sup(A_x) \end{array}$$

et l'on cherche à montrer que f est bien solution de notre problème.

10) Déterminer A_a et en déduire la valeur de $f(a)$.

11) Montrer que, si $z > 1$, alors $f(z) > 0$.

12) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $|f(xy) - f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{2}{n}$.

Indication : on pourra considérer m, m' tels que $\dfrac{m}{n} \in A_x$ et $\dfrac{m'}{n} \in A_y$.

13) En déduire que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $f(xy) = f(x) + f(y)$. Montrer de plus que f est strictement croissante.

— FIN —