## Feuille d'exercice n° 18 : Fractions rationnelles

**Exercice 1** Donner une CNS sur  $f \in \mathbb{C}(X)$  pour qu'il existe  $g \in \mathbb{C}(X)$  tel que f = g'.

**Exercice 2** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que la décomposition en éléments simples de  $\frac{1}{X^n - 1}$  est

$$\frac{1}{X^n-1} = \frac{1}{n} \sum_{\omega \in \mathbb{T}_n} \frac{\omega}{X-\omega}.$$

**Exercice 3** ( Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \ge 2$  et  $p \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . On pose pour  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ,  $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ . Mettre sous forme irréductible  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k^p}{X - \omega_k}$ .

**Exercice 4** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme scindé à racines simples notées  $x_1, \ldots, x_n$ .

- 1) Former la décomposition en éléments simples de  $\frac{P''}{P}$ .
- 2) En déduire que  $\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0.$

Exercice 5 ( ) Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes.

1) 
$$\frac{X^3 - 3X^2 + X - 4}{X - 1}$$

**4)** 
$$\frac{X}{(X+i)^2}$$

7) 
$$\frac{X^5 + X + 1}{X^6 - 1}$$

**2**) 
$$\frac{X}{X^2-4}$$

$$5) \ \frac{X^5 + X + 1}{X^4 - 1}$$

8) 
$$\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$$

3) 
$$\frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2}$$

6) 
$$\frac{X^5 + X^4 + 1}{(X-1)^3(X+1)^2}$$

9) 
$$\frac{X^7+3}{(X^2+X+2)^3}$$

Indication : pour la dernière fraction, on pourra procéder par divisions euclidiennes successives.

Exercice 6 ( ) Calculer une primitive pour chacune des fonctions rationnelles suivantes.

$$1) \int^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$$

3) 
$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^3 - 7t + 6}$$

$$5) \int^x \frac{t^3 + 2t + 1}{t^3 - 3t + 2} \, \mathrm{d}t$$

2) 
$$\int_{-\infty}^{x} \frac{t}{t^4 + 16} dt$$

**4)** 
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4t^2}{t^4 - 1} dt$$

$$6) \int^x \frac{-2t^2 + 6t + 7}{t^4 + 5t^2 + 4} \, \mathrm{d}t$$

## Exercice 7 (🔄)

1) Montrer, que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un unique polynôme  $P_n \in \mathbb{R}[X]$  de degré n tel que

$$X^n + \frac{1}{X^n} = P_n \left( X + \frac{1}{X} \right).$$

On factorisera  $P_n$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .

2) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , décomposer  $\frac{1}{P_n}$  en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$ .

**Exercice 8** ( $\nearrow$ ) Définition : le barycentre des points  $z_1, \ldots, z_m$  affectés des poids  $p_1, \ldots, p_m$ , si  $\sum_{i=1}^m p_i \neq 0$ , est le point

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{m} p_i} \sum_{i=1}^{m} p_i z_i.$$

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- 1) Décomposer  $\frac{P'}{P}$  en éléments simples.
- 2) En déduire que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P c'est-à-dire que toute racine de P' s'écrit comme barycentre à poids positifs des racines de P.

