

## Devoir à la maison n° 20

À rendre le 3 juin

### Un exercice

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice de rang 1.

- 1) Montrer que  $A^2 = \text{tr}(A)A$ .
- 2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $A$  pour que  $A + I_n$  soit inversible. Le cas échéant, déterminer  $(A + I_n)^{-1}$ .

### Étude d'un endomorphisme

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique  $(e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

On note  $\text{Id}$  l'endomorphisme identité de  $\mathbb{R}^3$ .

On appelle « polynôme annulateur de  $f$  » un polynôme  $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$  vérifiant

$$P(f) = a_0\text{Id} + a_1f + \dots + a_nf^n = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}.$$

- 1)
  - a) Calculer  $A^2$  et  $A^3$ , puis déterminer un polynôme annulateur de  $f$ .
  - b) Soit  $P$  un polynôme annulateur de  $f$ , soit  $\lambda$  un nombre réel. Montrer que, s'il existe un vecteur colonne  $X$  non nul vérifiant  $AX = \lambda X$ , alors  $P(\lambda) = 0$ .
  - c) Déterminer tous les nombres réels  $\lambda$  tels que  $f - \lambda\text{Id}$  n'est pas injective. On donnera, pour chacun de ces  $\lambda$ ,  $\text{Ker}(f - \lambda\text{Id})$ .
  - d) Existe-t-il une base dans laquelle la matrice de  $f$  serait diagonale?
- 2) Trouver une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $f$  est

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 3)
  - a) Montrer que  $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f^2 \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$ .

- b)** On veut montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme  $g$  de  $\mathbb{R}^3$  vérifiant :  $g^2 = f$ . On suppose pour cela qu'un tel endomorphisme existe.  
Établir que  $\text{Ker } f^2$  est stable par  $g$  puis montrer que la matrice de  $g$  dans la base  $\mathcal{B}$  est de la forme :

$$G = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}.$$

En utilisant la matrice de  $f$  dans cette même base, trouver une contradiction et conclure.

**4) Étude d'un cas plus général.**

On note  $\text{Id}$  l'endomorphisme identité de  $\mathbb{R}^n$  (où  $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1) et on désigne par  $\alpha$  un réel non nul.

- a)** On considère un endomorphisme  $h$  de  $\mathbb{R}^n$  et on suppose que :  $h^n = \alpha h^{n-1}$ .  
Montrer que :

$$\mathbb{R}^n = \text{Ker } h^{n-1} \oplus \text{Ker}(h - \alpha \text{Id}).$$

- b)** Montrer réciproquement que, si un endomorphisme  $h$  de  $\mathbb{R}^n$  est tel que  $\mathbb{R}^n = \text{Ker } h^{n-1} \oplus \text{Ker}(h - \alpha \text{Id})$ , alors on a :  $h^n = \alpha h^{n-1}$ .

— FIN —