1 - Distances et normes

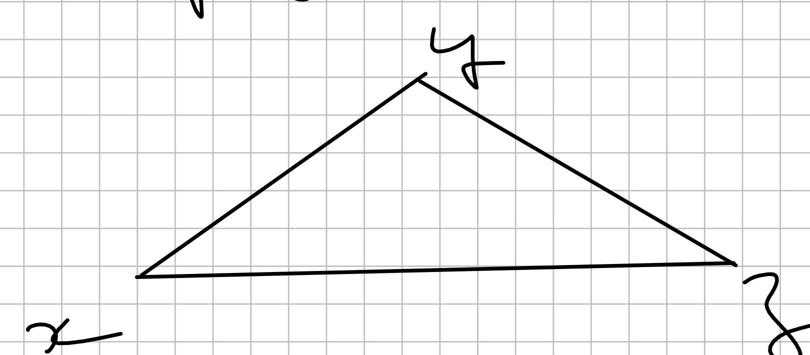
Déf : E un ensemble. On appelle distance sur E toute application $d : E^2 \to \mathbb{R}$ tq :

(i) $\forall x, y \in E,\ d(x,y) \geq 0$

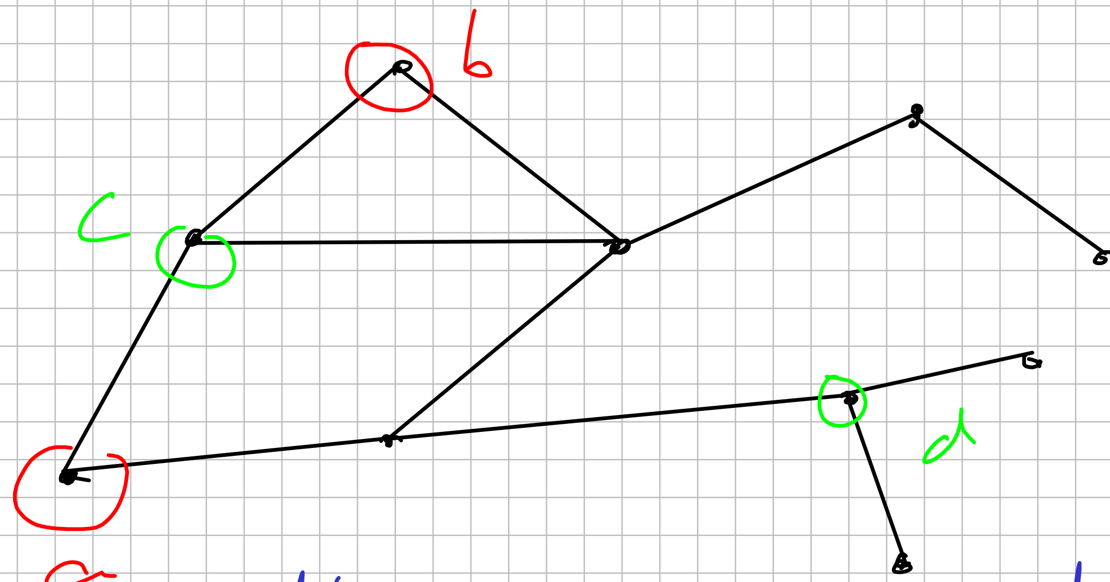
(ii) $\forall x, y \in E,\ d(x,y) = 0$ ssi $x = y$

(iii) inégalité triangulaire :

$$\forall x, y, z \in E : \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$



Ex : • $d\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) = \sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$.

• 

$d(a,b)=2$ $d(c,d)=3$.

Def : Soit E un $\mathbb{R}$-ev. On appelle norme sur E toute application N de E ds $\mathbb{R}$ tq :

(i) $\forall x \in E$, $N(x) \geq 0$

(ii) $\forall x \in E$, $N(x) = 0$ ssi $x = 0$

(iii) inégalité triangulaire :

$\forall x, y \in E$, $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

(iv) homogénéité : $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$N(\lambda x) = |\lambda| \cdot N(x).$$

<u>Ex</u> : • norme usuelle de $\mathbb{R}^2$:

$$N\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

• Soit $E = \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$: si $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E$:

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

R : si <u>$p=2$</u> : $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Si $p>1$: pour démontrer que $\|\cdot\|_p$ est 1 norme, utiliser la concavité de ln, inégalité de Hölder, inégalité de Minkowsky.

Si $p=1$: $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

mq. il s'agit d'une norme :

(i) $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_1 \geq 0$: évident

(ii) si $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_1 = 0$,

alors : $\sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0$

donc : $\forall i$, $|x_i| = 0$, donc $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$

La réciproque est évidente.

(iii) $$\left\|\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}\right\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|$$

$$\underset{i.-t.}{\leq} \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|$$

$$\leq \left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right\|_1 + \left\|\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right\|_1 .$$

(iv) $$\left\|\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}\right\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda| . |x_i|$$

$$= |\lambda| \left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right\|_1 .$$

Rq : On a si : $x_1 \dots x_n \in \mathbb{R}$:

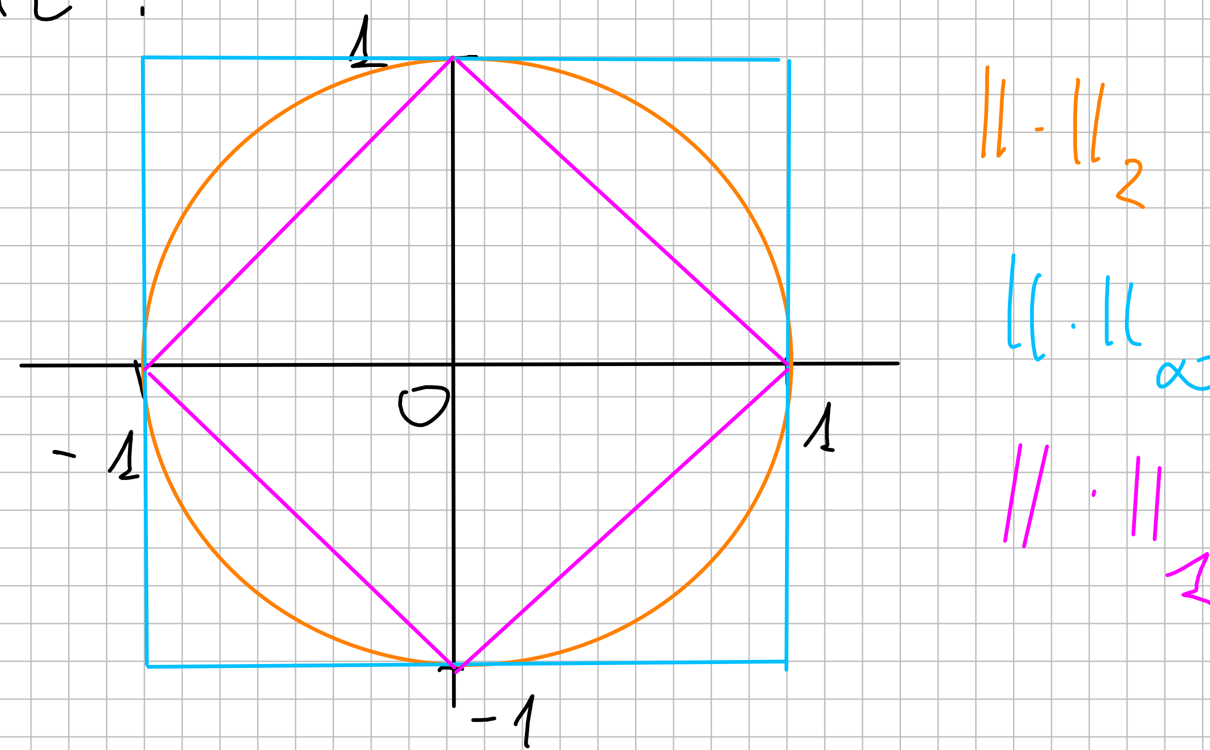
$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \xrightarrow[p \to +\infty]{} \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$$

On appellera donc norme ∞ la norme suivante :

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|.$$

Def : Si N est une norme sur E, on appelle sphère unité l'ens $\{x \in E,\ N(x) = 1\}$

Ex : $E = \mathbb{R}^2$.



Prop : Soit E un $\mathbb{R}$-ev et N une norme sur E.

Si : $d : \quad E^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$(x,y) \longmapsto N(x-y)$$

Alors d est 1 distance, dite associée à N.

<u>Déf</u> : Soit E un $\mathbb{R}$-ev, muni d'1 p.s. $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Si : $N : \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{\langle x | x \rangle} \end{array}$

Alors N est une norme, dite norme <u>associée</u> au p.s.

<u>Dém</u> : (i) $\forall x \in E$, $\langle x | x \rangle \geq 0$

donc $N(x) \geq 0$

(ii) $x = 0 \iff \langle x | x \rangle = 0 \iff N(x) = 0$

(iii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E$.

$$N(\lambda x) = \sqrt{\langle \lambda x | \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x | x \rangle}$$

$$= \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{\langle x | x \rangle}$$

$$= |\lambda| \cdot N(x).$$

(iii) + tard avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Ex : de $\mathbb{R}^2$: • p.s. usuel : $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ac + bd$.

• norme associée : $\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} = \sqrt{a^2+b^2}$

c'est la norme euclidienne usuelle, c'est $\|\cdot\|_2$.

• distance associée : $d\big((a,b),(c,d)\big) = N\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right)$

$= \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$: c'est la distance usuelle.

Rq : • toutes les distances ne sont pas associées à une norme.

• toutes les normes ne sont pas associées à des p.s.