

Feuille d'exercice n° 24 : **Matrices - indications**

Exercice 1 Écrivez la formule du produit.

Exercice 2 Pour une solution élémentaire, testez l'égalité sur des matrices élémentaires. Pour une solution avec des applications linéaires, vous pouvez utiliser le résultat de l'exercice n°6 de la feuille n°19.

Exercice 3

- 1) Testez sur une matrice X bien choisie ou interprétez cela avec des applications linéaires.
- 2) En supposant que A n'est pas inversible, prenez $X \in \text{Ker } A$ et écrivez les lignes du produit XA . Une ligne en particulier peut vous servir.
- 3) Quel est le rang d'une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ vérifiant $M^2 = 0$? Écrivez ce que cela veut dire.

Exercice 4 Exercice élémentaire, il suffit d'écrire les définitions et de calculer.

Exercice 5 Première question déjà vue et très classique, à savoir faire : montrez la liberté de cette famille en revenant à la définition. La deuxième partie est élémentaire.

Exercice 6 Exercice élémentaire, donnez un nom aux coefficients de A et choisissez un ordre pour la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 7 Revoyez le cours sur les projecteurs et les symétries : quels sont les éléments caractéristiques de ces objets ?

Exercice 8 Exercice élémentaire, il suffit d'écrire les définitions et de calculer. Vous pouvez utiliser la représentation matricielle pour calculer plus simplement, mais rappelez-vous bien que l'on manipule des polynômes.

Exercice 9 Exercice élémentaire, il suffit d'écrire les définitions et de calculer.

Exercice 10 Exercice à bien comprendre, bien que les calculs soient un peu fastidieux. Pour le 1), vous pouvez procéder par analyse-synthèse : que doivent vérifier $\varphi(I)$, $\varphi(J)$ et $\varphi(K)$?

Exercice 11 Exercice élémentaire, il suffit d'écrire les définitions et de calculer.

Exercice 12 Exercice élémentaire, il suffit d'écrire les définitions et de calculer.

Exercice 13 Exercice élémentaire, il suffit d'écrire les définitions et de calculer.
Les deux derniers calculs sont plus difficiles, toutefois.

Exercice 14 Exercice élémentaire, il suffit d'écrire les définitions et de calculer.

Exercice 15 Exercice élémentaire, il suffit d'écrire les définitions et de calculer.

Exercice 16 Il suffit d'écrire les définitions et de calculer.

Essayez de retarder au plus les opérations sur les lignes sur lesquelles vous devez discuter sur la valeur du paramètre.

Exercice 17 Il suffit d'écrire les définitions et de calculer.

Les deux premiers calculs sont élémentaires. Sans être difficiles, les deux suivants demandent plus de doigté.

Exercice 18 Lisez l'indication donnée par l'énoncé ! L'expression $X^2 + X$ peut se factoriser.

Exercice 19 Essayez de retarder au plus les opérations sur les lignes sur lesquelles vous devez discuter sur la valeur du paramètre.

Exercice 20 Exercice très proche du **10**, pas très difficile mais aux calculs un peu fastidieux.

Pour le **3)** : si (u, v, w) est la base trouvée à la question **2)**, si $X_0 = \lambda u + \mu v + \nu w$, que vaut $\lambda + \mu + \nu$? La convergence s'entend comme pour les complexes : coordonnée par coordonnée. Les règles de manipulations sont les mêmes que pour les suites complexes.