

Feuille d'exercice n° 02 : **Sommes et calculs**

Exercice 1 Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$. Quelles sont les expressions toujours égales entre elles ?

$$1) \sum_{k=1}^n a_k b_k, \sum_{k=1}^n a_{n+1-k} b_{n+1-k}, \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 - \sum_{k=1}^n (a_k - b_k)^2 \right)$$

$$2) \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k \right), \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{p=1}^n b_p \right), \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^n (a_k b_p), \sum_{k=1}^n \left(a_k \sum_{p=1}^n b_p \right), \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

Exercice 2 () Montrer que pour toute famille $(z_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{C}^n$, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^n z_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n z_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} z_i z_j.$$

Quel résultat bien connu cette formule généralise-t-elle ?

Exercice 3 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$.

Exercice 4 () Donner une expression simplifiée des quantités suivantes.

$$1) \sum_{1 \leq i, j \leq n} i \cdot j \quad 2) \sum_{1 \leq i, j \leq n} i + j \quad 3) \sum_{1 \leq i, j \leq n} i - j \quad 4) \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$$

Même question en remplaçant $\sum_{1 \leq i, j \leq n}$ par $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n}$ puis par $\sum_{1 \leq i < j \leq n}$.

Exercice 5 En considérant $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$, calculer les sommes $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}$ et $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1}$, où $\lfloor \cdot \rfloor$ est la fonction « partie entière ».

Remarque : ces sommes sont souvent notées $\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$ et $\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$.

Exercice 6 ()


1) Soit $k \in \mathbb{N}$. Écrire $(1+k)^4 - k^4$ sous la forme d'un polynôme de degré 3 en k .

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. En s'inspirant de la démonstration du cours donnant la valeur de $\sum_{k=0}^n k^2$, calculer la

valeur de $\sum_{k=0}^n k^3$ (on donnera cette valeur sous la forme la plus factorisée possible).

Exercice 7 () Écrire avec des factorielles les quantités suivantes.

- 1) $\prod_{k=n}^m k$ pour $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ t.q. $n \leq m$.
- 2) $\prod_{k=1}^p n - p + k$ pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ t.q. $p \leq n$.
- 3) $\prod_{k=1}^p \frac{n - p + k}{k}$ pour $n \geq 2$ et $1 \leq p \leq n - 1$.
- 4) $\prod_{k=1}^n \frac{2k + 1}{2k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8 ()

- 1) Soit z un nombre complexe différent de 1, calculer $\sum_{k=0}^n z^k$.
- 2) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k i^{k-1} = \frac{i - n i^n - (n+1) i^{(n+1)}}{2}$
- 3) En déduire les valeurs des deux sommes $S_1 = 1 - 3 + 5 - 7 + \dots + (-1)^p(2p+1)$ et $S_2 = 2 - 4 + 6 - 8 + \dots + (-1)^{(p+1)}2p$.


Exercice 9 Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la fonction $x \mapsto (1+x)^n$, calculer les quantités suivantes.

- 1) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$
- 2) $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$
- 3) $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$

Exercice 10 () Effectuer les produit de matrices suivants.


- 1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
- 3) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$

Exercice 11 Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Calculer $A^n(\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.


Exercice 12 () Soit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{C}$. On considère la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 1) Calculer M^2, M^3, M^4 et M^5 .
- 2) Pouvez-vous calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$? Et pour tout $n \in \mathbb{Z}$?

Exercice 13 () Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, que l'on écrit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$.


- 1) Montrer que $A^2 - (a_{1,1} + a_{2,2})A + (a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1})I = 0$.
- 2) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible.

Exercice 14 () Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$, où I_3 est la matrice identité 3×3 .
- 2) En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 15 Soit $a, b \in \mathbb{C}$.

- 1) Trouver les matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- 2) De même avec $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Exercice 16 () Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$.

- 1) Calculer B^2, B^3 en déduire la valeur de B^n pour tout entier naturel n .
- 2) Développer $(B + I_3)^n$ par la formule du binôme et simplifier.
- 3) En déduire A^n pour tout entier naturel n .
- 4) La relation précédente est-elle aussi valable pour les entiers n négatifs ?

Exercice 17 () Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Résoudre les systèmes suivants.

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ -x + 2y - 3z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases}$$

Exercice 18 () Mettre sous forme matricielle et résoudre les systèmes suivants.

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} \sqrt{3}x + y = 2x \\ x - \sqrt{3}y = 2y \end{cases} & 4) & \begin{cases} 2x + y + z + t = 1 \\ x + 2y + 3z + 4t = 2 \\ 3x - y - 3z + 2t = 5 \\ 5y + 9z - t = -6 \end{cases} \\ 2) & \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 3x - y - 2z = 0 \\ x + y - z = -2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases} & 5) & \begin{cases} x - y + z + t = 5 \\ 2x + 3y + 4z + 5t = 8 \\ 3x + y - z + t = 7 \end{cases} \\ 3) & \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y + 2z - 3t = 2 \\ 2x + 4z + 4t = 3 \\ 2x + 2y + 3z + 8t = 2 \\ 5x + 3y + 9z + 19t = 6 \end{cases} & 6) & \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 19 Soit a un nombre réel. On étudie le système linéaire suivant.

$$\mathcal{S}_a : \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ 2x - y + az = 1 \end{cases}$$

- 1) En fonction des valeurs du paramètre a , déterminer si le système \mathcal{S}_a peut :
 - a) n'admettre aucune solution ;
 - b) admettre exactement une solution ;
 - c) admettre une infinité de solutions.
- 2) Résoudre le système \mathcal{S}_a lorsque celui-ci admet une (des) solution(s).

Exercice 20 Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels λ, a, b, c, d le système suivant.

$$(S) \begin{cases} (1+\lambda)x + y + z + t = a \\ x + (1+\lambda)y + z + t = b \\ x + y + (1+\lambda)z + t = c \\ x + y + z + (1+\lambda)t = d \end{cases}$$

