

Feuille d'exercice n° 26 : **Espaces vectoriels euclidiens et préhilbertiens - indications**

**Exercice 5**

- 1) Faire le lien avec le produit scalaire usuel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- 2) C'est la question difficile. Si  $A$  est une matrice carrée dont les colonnes sont  $C_1, \dots, C_n$ , exprimez  $N(A)^2$  en fonction des  $\|C_i\|^2$  (avec  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^n$ ).  
Si  $X$  est un vecteur colonne et  $L_i$  une ligne de  $A$ , exprimez  $AX$  en fonction de  $\langle L_i, X \rangle$  (produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^n$ ).  
Et pour finir, si  $B$  est une autre matrice carrée de colonnes  $D_1, \dots, D_n$ , exprimez  $AB$  en fonction des  $AD_i$ .  
Et bien sûr : Cauchy-Schwarz !