Feuille d'exercice n° 22 : **EV de dimension finie - indications**

Exercice 1 Pour chaque famille, commencer par déterminer si elle est libre, au besoin supprimer les vecteurs combinaison linéaire des autres.

Exercice 2 1) C'est une question de primitivation de polynôme.

Exercice 3 C'est exactement le même travail que lorsque l'on vous demande de déterminer une représentation cartésienne de l'image d'une application linéaide de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

Pour déterminer une équation cartésienne de $\text{Vect}(u, v)$, on prend un vecteur (x, y, z) et on commence à résoudre en x, y, z le système $(x, y, z) = au + bv$, où $a, b \in \mathbb{R}$. s

Exercice 4 1) Commencer par compter le nombre de vecteurs. Entre montrer la liberté de la famille et son caractère générateur, l'un des deux est un peu plus simple que l'autre.

Exercice 5 1) Commencer par compter le nombre de vecteurs. N'utilisez pas l'exercice précédent, tout est ici donné par le cours sur les polynômes.

Exercice 6 C'est une situation vue en cours.

Exercice 7 C'est la même chose que dans l'exercice 1.

Exercice 8 Pensez à utiliser les deux outils fondamentaux du cours : la comparaison des dimensions et le théorème du rang.

Exercice 9 Commencez par revoir l'exercice 4 de la feuille n°19.

Exercice 10 Pensez à utiliser le théorème du rang et la formule de Grassmann.

Exercice 11 1) $\text{Im}(u + v) \subset ...$

2) C'est une inégalité triangulaire, qui se démontre comme telle.

Exercice 12 Pour simplifier la rédaction, n'hésitez pas à poser des ev. E_{-1} et E_n, ainsi que des applications linéaires f_{-1} et f_n *ad hoc*.

Exercice 13 1) C'est un cadre vu en cours.

2) Il convient de trouver comment utiliser le 1).

Exercice 14 Pensez (toujours) à utiliser le cours. Vous pouvez vous inspirer des exemples de l'exercice 3 de la feuille n°19.

Exercice 15 1) Le plus simple est de construire l'endomorphisme sur une base bien choisie.

Exercice 16 Voici quelques questions supplémentaires pour vous guider :

1) Montrer que la suite $(\text{rg}(f^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2) Montrer que s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\text{rg}\, f^{n_0} = \text{rg}\, f^{n_0+1}$, alors pour tout $k \geqslant n_0$, $\text{rg}(f^k) = \text{rg}(f^{n_0})$.

Exercice 17 Vu en cours.

Exercice 18 1) C'est élémentaire en utilisant la formule de Grassmann.

2) Partez de la définition d'hyperplan donnée dans le poly de cours.

Exercice 19 Le résultat est donné par le cours sur les polynômes.

Exercice 20 C'est élémentaire.