Fonction de répartition :

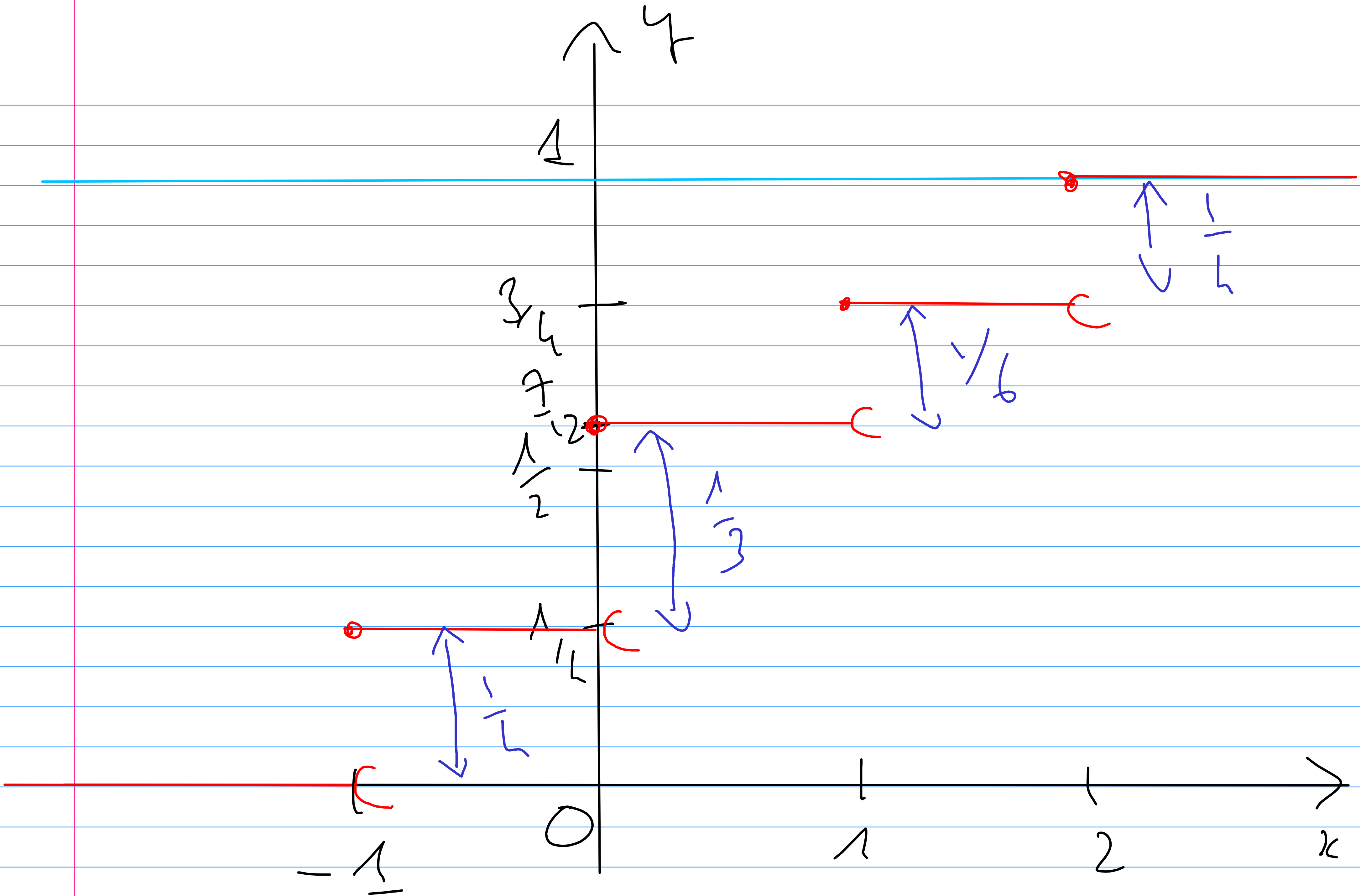
Déf : X v.a. réelle. On appelle fonction de répartition de X la fonction :

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto P(X \leq x).$$

UNIVERS FINI

Ex : $X(\Omega) = \{-1, 0, 1, 2\}$

a	-1	0	1	2
$P(X=a)$	$1/4$	$1/3$	$1/6$	$1/4$



y
1
3/4
7/12
1/2
1/4
1/4
1/3
1/6
1/4
−1
0
1
2
x

- Si : $\underline{x < -1}$: $P(X \leq x) = 0$

  car $(X \leq x) = \emptyset$

- Si : $\underline{x = -1}$:

  $(X \leq x) = (X = -1)$ car $X(\omega) = -1, 0, 1$ ou 2

  d'où $P(X \leq x) = P(X = -1) = 1/4$

- Si : $\underline{x \in [-1, 0[}$:

  $(X \leq x) = (X = -1)$

  $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X = -1) = \frac{1}{4}$

• <u>Si : $x \in [0, 1[$:</u>

$$(X \leq x) = (X = -1) \sqcup (X = 0)$$

dc $F_X(x) = P(X \leq x)$

$$= P(X = -1) + P(X = 0)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

• <u>Si : $x \in [1, 2[$:</u>

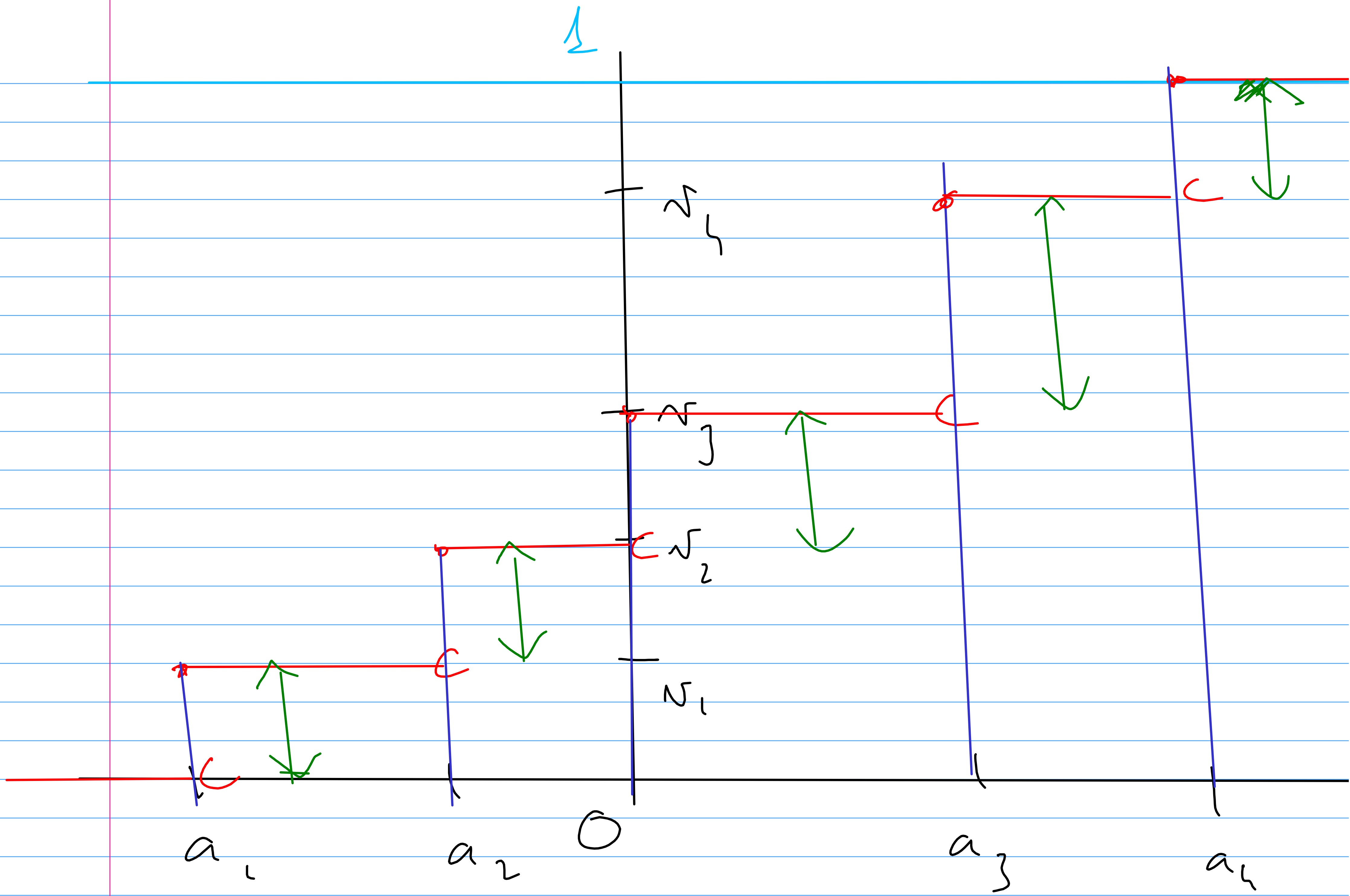
$$(X \leq x) = (X = -1) \sqcup (X = 0) \sqcup (X = 1)$$

$$F_X(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

• **Si $x \geq 2$:** $(X \leq x) = (X=-1) \sqcup (X=0) \sqcup (X=1) \sqcup (X=2) = \Omega$

$$F_X(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{}$$

Réciproquement : voici 1 fonction de répartition.
Saurais-tu donner la loi de la v.a. associée ?


1
v_4
v_3
v_2
v_1
a_1
a_2
0
a_3
a_4

ici : $X : \Omega \longrightarrow \{a_1, a_2, 0, a_3, a_4\}$

et $P(Y = a_1) = v_1$

$P(Y = a_2) = (v_2 - v_1)$

$P(X = 0) = (v_3 - v_2)$

$P(X = a_3) = (v_4 - v_3)$

$P(X = a_4) = (1 - v_4)$

Prop : • F_X est $\nearrow$

• F_X est en escaliers

+ précisément :

Si $X(\Omega) = \{x_1 \dots x_n\}$ alors :

$\forall\ i \in [\![1, n-1]\!]$:

$$F_X\Big|_{[x_i, x_{i+1}[} = P(X < x_{i+1}) = P(X \leq x_i) = \sum_{k=1}^{i} P(X = x_k).$$

et $\forall x < x_1 : F_X(x) = 0$

$\forall x \geq x_n : F_X(x) = 1$

découle de ce qui précède, n'apporte rien.

- F_X est continue à droite en tout pt.
- F_X est continue à gauche sur $\mathbb{R} \setminus X(\Omega)$.
- $\lim\limits_{-\infty} F_X = 0$, $\lim\limits_{+\infty} F_X = 1$

↳ ils sont encore valables dans le cas d'1 nombre ∞.

2.3. Lois usuelles :

Ex : $X : \Omega \to \{1,2,3,4\}$

$$P(X=1) = P(X=2) = P(X=3) = \frac{1}{3}$$

$$P(X=4) = 0$$

$\tilde{X} = X_{|\{1,2,3\}}$: $P_{\tilde{X}}$ est la proba uniforme.

P_X n'est pas la proba :

$$P(X=4) \neq P(X=3)$$

Par abus, on dit qd même que P_X est la proba uniforme (sur $\{1,2,3\}$).

a) Loi uniforme :

Déf : E fini, $\neq \emptyset$. On dit que X, v.a. sur E, suit la loi uniforme sur E, notée $X \hookrightarrow \mathcal{U}(E)$ si P_X est la proba uniforme sur E, i.e. :

si $A \subset E$, $\quad P(X \in A) = \frac{\# A}{\# E}$.

Ex. 2.3.4 : On peut prendre comme univers image

$[\![1,n]\!]^2$. Alors :

si $(x,y) \in [\![1,n]\!]^2$ on a :

$$P(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ \dfrac{1}{\text{nb. de tirages possibles}} & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

tirage possible : $\mathcal{E} = \{ (x,y) \in [\![1.n]\!]^2, \ x \neq y \}$

le "vrai" univers image, c'est $\mathcal{E}$.

$$\# \mathcal{E} = \# [\![1.n]\!]^2 - \# \{ (x,x), \ x \in [\![1.n]\!] \}$$
$$= n^2 - n$$

dc : $P(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \notin \mathcal{E} \\ \dfrac{1}{\# \mathcal{E}} & \text{si } (x,y) \in \mathcal{E}. \end{cases}$

dc si X est le couple de n° tirés,

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{E}).$$

Rq : $\mathcal{E}$ est l'ens. des 2-arrangements de $[\![1, n]\!]$.

b- Loi de Bernoulli : Bernou~~l~~lli

Déf : Soit $p \in [0,1]$. On dit qu'1 v.a. X suit la loi de Bernoulli de

paramètre p si : $X : \Omega \longrightarrow \{0,1\}$
et $P(X=1) = p$ (et donc $P(X=0) = 1-p$).

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Rq : Si on sait juste que $X : \Omega \to \{0,1\}$,
alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(P(X=1))$.

Rq : Ω univers fini, proba P.
$A \subset \Omega$.
fonction indicatrice de A :
$$\mathbb{1}_A = \chi_A = \left\{ \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \{0,1\} \\ x \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } x \notin A \\ 1 \text{ si } x \in A \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$\mathbb{1}_A$ est 1 v.a. à valeurs dans $\{0,1\}$.

$$P(\mathbb{1}_A = 1) = P\left(\mathbb{1}_A^{\leftarrow}(\{1\})\right)$$
$$= P(\{x \in \Omega,\ \mathbb{1}_A(x) = 1\})$$
$$= P(\{x \in \Omega,\ x \in A\})$$
$$= P(A)$$

donc $\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathcal{B}(P(A))$.

Ex. 2.3.7 : $X(\Omega) = \{a_1 \dots a_n\} \subset \mathbb{R}$

$\forall i \in [\![1, n]\!] : \quad p_i = P(X = a_i)$.

Soit $X_i : \Omega \longrightarrow \{0, 1\}$

$x \longmapsto \mathbb{1}_{(X = a_i)}$

ie : $X_i : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } X(x) = a_i \\ 0 & \text{si } X(x) \neq a_i \end{cases}$

Posons $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i \times X_i$.

soit $x \in \Omega$. On note $a_j = X(x)$.

$$Y(\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i \times X_i(\omega)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \times \delta_{ij} \quad \left(\begin{array}{l} = 0 \text{ si } X(\omega) = a_j \neq a_i \\ = 1 \text{ si } X(\omega) = a_j = a_i \end{array} \right)$$

$$= a_j .$$

$$= X(\omega)$$

dc $Y = X$.

Or chaque X_i suit 1 loi de Bernoulli.

le paramètre de X_i est $P(X_i = 1)$

$$P(X_i = 1) = P(X = a_i)$$
$$= p_i$$

Le $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p_i)$.

c) Loi <u>binomiale</u> :

<u>Déf</u> : Soit X v.a. réelle. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$.
On dit que X suit la loi binomiale de paramètres n et p, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$
si X est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$, et :
$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{1-k}.$$

__Rq__ : Cette loi est licite :

$\forall k \in [\![0,n]\!] : \quad \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \geqslant 0$

et : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$= (p + (1-p))^n$

$= 1^n = 1$

__Rq__ : Cette loi est suivie par la v.a. suivante : On met en place 1 exp

qui mène à 1 succès ou 1 échec.
La probabilité de succès est p.
On répète n fois cette exp, à chaque fois la probabilité de succès p (le résultat d'1 exp. ne dépend pas des autres résultats, toutes les exp se font ds les m̂ conditions).

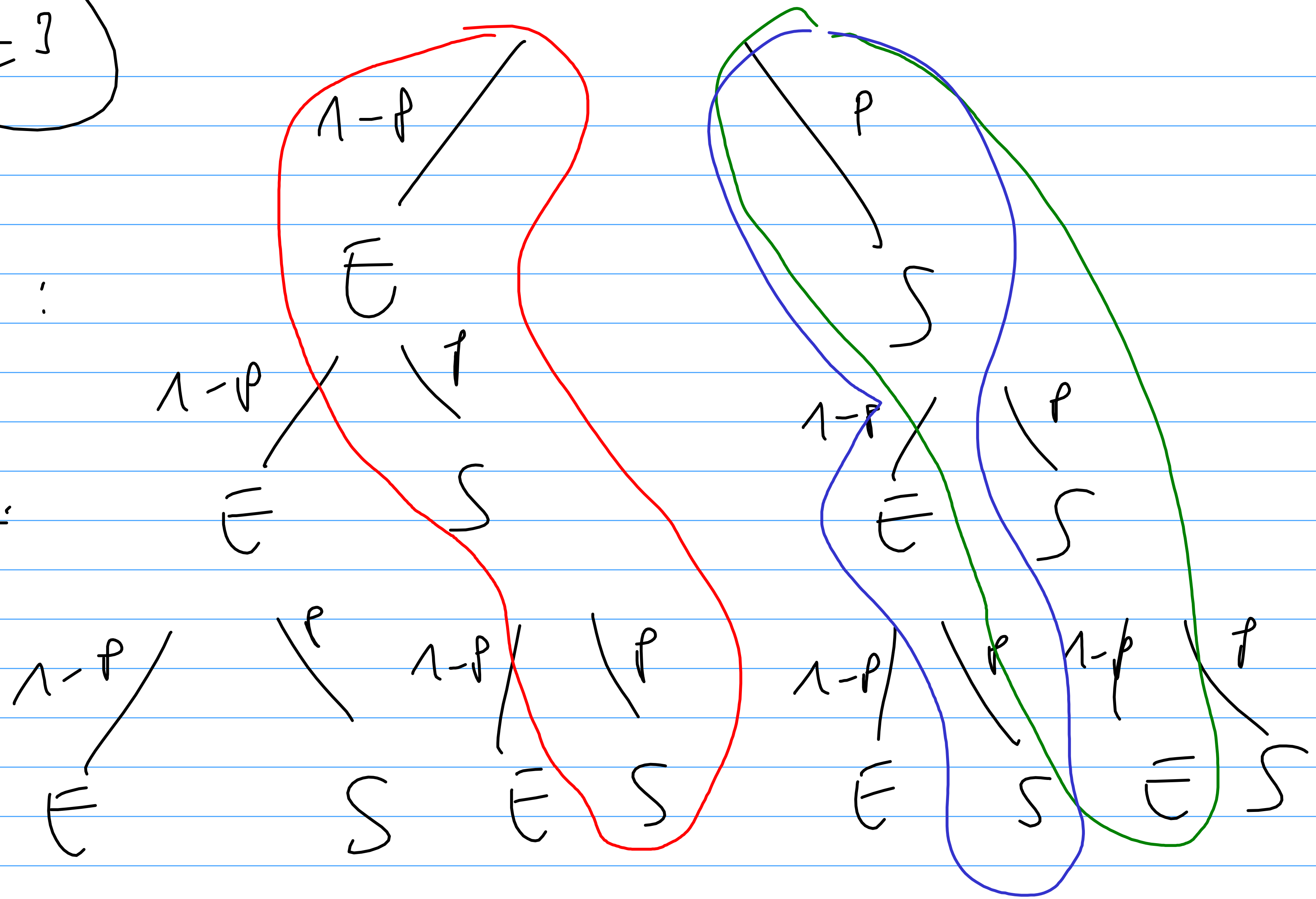
On note X la v.a. qui compte le nb. de succès. Pr n exp. on a bien : X à valeurs ds $[\![0, n]\!]$.

$n = 3$

exp. 1 :

exp. 2 :

exp. 3 :



$(1-p) \times p \times p$ $\quad$ $(1-p)\,p^2$ $\quad$ $(1-p)\,p^2$

$X = 2$ $\quad$ $P(X=2) = \binom{3}{2} p^2 (1-p)^{3-2}$

Ex.2.3.10 : ici, X : le gain.

Y : le nb. de piles.

On lance 4 fois la pièce, la probabilité d'obtenir pile vaut $\frac{1}{2}$, donc :

$$Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(4, \frac{1}{2}\right).$$

donc $\forall k \in [\![0,4]\!]$,

$$P(Y=k) = \binom{4}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-k} = \binom{4}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}$$

X est à valeurs dans : $\{-1, 0, 9\}$

$$(X=-1) = (Y \leq 2)$$

$$(X=0) = (Y=3)$$

$$(X=9) = (Y=4)$$

donc : $P(X=-1) = P(Y=0) + P(Y=1)$
$+ P(Y=2)$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2^4}\left(1+4+6\right) = \frac{11}{16}$$

$$P(X=0) = P(Y=3)$$

$$= \binom{4}{3} \times \frac{1}{2^4} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=9) = P(Y=4) = \frac{1}{16}$$

<u>2.4</u> : <u>Couples</u> : Ω, P -

X et Y 2 v.a. sur Ω

$$X(\Omega) = \{x_1 \dots x_N\}$$

$$Y(\Omega) = \{y_1 \dots y_p\}.$$

$$X : \Omega \to X(\Omega)$$

$$Y : \Omega \to Y(\Omega)$$

Soit $f : \Omega \longrightarrow X(\Omega) \times Y(\Omega)$

$$\omega \longmapsto (X(\omega), Y(\omega))$$

Alors f est notée (X, Y)

⚠ (X, Y) est 1 couple de fonctions, donc ce n'est pas une fonction ... SAUF EN PROBAS

1 couple de v.a. est 1 v.a !!

$\forall \omega \in \Omega, \quad (X, Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$.

__Rappel__ : $\left((X = x)\right)_{x \in X(\Omega)}$ est 1 syst. cplet

d'év. de Ω.

__ici__ : (X, Y) est 1 va. dc :

$$\left(\left(\left(X,Y\right)=a\right)\right)_{a\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$$ est 1 syst. cplet.

$$X(\Omega)\times Y(\Omega)=\left\{(x,y)\ ,\ x\in X(\Omega), y\in Y(\Omega)\right\}$$

$$=\left\{(x_i,y_j)\ ,\ i\in[\![1,N]\!], j\in[\![1,p]\!]\right\}$$

d.c. $\left(\left[(X,Y)=(x_i,y_j)\right]\right)_{\substack{i\in[\![1,N]\!]\\ j\in[\![1,p]\!]}}$ est 1 syst. cplet.

Notation : l'év. $[(X,Y) = (x_i, y_j)]$

est l'év. $[X = x_i] \cap [Y = y_j]$

il est en gal noté :

$$[X = x_i, Y = y_j].$$

OC : $\left([X = x_i, Y = y_j] \right)_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq p}}$ est 1 syst. complet

Ex : 2.4.5 : On lance 1 dé 6 et 1 pièce.

X : le résultat de la pièce.

Y : le résultat du dé

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{p, f\})$$

$$Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 6]\!])$$

$$Z : (X, Y) : \Omega \longrightarrow \{p, f\} \times [\![1, 6]\!]$$

Le syst. complet de 2.4.2 sur et ce est :

$$\left([X = x, Y = j]\right)_{\substack{x \in \{p, f\} \\ 1 \leq j \leq 6}}$$

ie : $\big([X=p, Y=1], [X=p, Y=2] \ldots [X=p, Y=6],$
$[X=f, Y=1], \ldots, [X=f, Y=6] \big).$

<u>Déf</u> : On appelle loi conjointe de X et Y la loi de la v.a. (X, Y).

ie : $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$:

$$P_{X,Y}(x, y) = P([X=x, Y=y]).$$

<u>Ex.2.4.5</u> : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{p, f\})$

et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1,6 \rrbracket)$.

Mais les 2 résultats st indépendants,

dc les év. $[X=x]$ et $[Y=y]$ st indép. dc :

$$P([X=x, Y=y]) = P([X=x] \cap [Y=y])$$

$$= P(X=x) \times P(Y=y)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

Or : $\#(\{P,F\} \times \llbracket 1,6 \rrbracket) = 12$

Ex : $(X, Y) \hookrightarrow \mathcal{U}(\{P, F\} \times [\![1, 6]\!])$.

<u>Déf</u> : Si (X, Y) est 1 couple de v.a.,
la loi de X s'appelle $1^{\text{ère}}$ loi marginale de (X, Y)
la loi de Y est la $2^{\text{ème}}$ loi marginale.

<u>Qu</u> : Si on a la loi de X et celle de Y,
peut-on trouver la loi de (X, Y) ?

Réciproq$^{\text{t}}$?

ie :

Les lois marginales donnent-elles celle du couple ?

(réciproq^t : la loi du couple donne-t-elle les lois marginales ?

2 : sans op.
20 : oui
15 : non

NON

? : sans op
18 : oui
16 : non

OUI

Prop. 2.4.8 : Soit $x \in X(\Omega)$

$P(X=x)$?

On sait que $\left((Y=y)\right)_{y \in Y(\Omega)}$ est 1 syst. cplet.

donc :
$$P(X=x) \underset{\text{tot.}}{=} \sum_{y \in Y(\Omega)} P\left((X=x) \cap (Y=y)\right)$$

$$= \sum_{y \in Y(\Omega)} \underbrace{P([X=x, Y=y])}_{\text{connu si on connaît } P_{X,Y}}$$

$$= \sum_{y \in Y(\Omega)} P_{X,Y}(x,y)$$

idem pr Y :

$$P(Y=y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P_{X,Y}(x,y).$$

<u>Ex: 2.4.9</u> : (X, X) , (X, Y)

$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,6]\!])$, $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,6]\!])$

Si on pouvait trouver la loi d'1 couple à partir des lois marginales, X et Y ayant la même loi, (X, X) et (X, Y) auraient la même loi.

or : $$P((X, X) = (1, 2)) = 0$$

$$\parallel$$

$$P(X=1, X=2)$$

mais $$P(X=1, Y=2) = \frac{1}{36} \neq 0.$$