Devoir surveillé n° 5
– Version 1 –
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la limite en $+\infty$ de $x \mapsto x^\alpha \ \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^\beta}\right)$.

II. Une suite définie par récurrence.

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} \end{array}.$$

On considère aussi la suite u définie par récurrence de la manière suivante :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

1) **a)** Dresser le tableau de variations de f, limites comprises.

b) Vérifier que la suite u est bien définie et à valeurs strictement positives.

2) À la fin de l'exécution de chacun de ces scripts, `n` a pour valeur 5 à gauche et 6 à droite.

```
from math import exp
u = 1
n = 0
while u > 10**-5 :
    u = exp(-u) / u
    n = n+1
```

```
from math import exp
u = 1
n = 0
while u < 10**5 :
    u = exp(-u) / u
    n = n+1
```

Que peut-on en déduire quant aux valeurs de u_5 et u_6 ? Que peut-on conjecturer ?

3) **a)** Étudier les variations de la fonction

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-x} - x^2 \end{array}.$$

b) En déduire que, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution, que l'on notera dorénavant α.

c) Montrer que $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < \alpha < 1$.

4) **a)** Montrer que $u_2 > u_0$ et que $u_1 < u_3$.

b) En déduire les sens de variations des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

5) On considère la fonction

$$h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} (f \circ f)(x) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}.$$

a) Expliciter $h(x)$ pour tout $x > 0$ et vérifier que h est continue en 0 (*i.e.* que $h(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$).

b) Résoudre sur $\mathbb{R}_+$ l'équation $h(x) = x$.

c) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$

d) Est-ce que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge ? Déterminer sa limite.

e) Est-ce que la suite u converge ? Admet-elle une limite ?

III. Équation de Pell-Fermat.

On appelle équation de Pell-Fermat toute équation de la forme $x^2 - dy^2 = 1$ où les inconnues x et y sont des entiers, et où $d \in \mathbb{N}$ n'est pas un carré parfait. Nous allons résoudre cette équation pour $d = 7$. Cette méthode pourrait se généraliser à n'importe quelle valeur de d.

On appelle *endomorphisme d'anneaux* toute application φ entre deux anneaux A_1 et A_2, qui est un morphisme de groupes pour la loi $+$, un morphisme entre magmas pour la loi $\times$, c'est-à-dire : $\forall x, y \in A_1$, $\varphi(x \times y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$, et tel que $\varphi(1_{A_1}) = 1_{A_2}$.

On note $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ l'ensemble $\left\{ a + b\sqrt{7} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

1) Montrer que $\left(\mathbb{Z}[\sqrt{7}], +, \times\right)$ est un anneau.

2) **a)** Montrer que $\sqrt{7}$ est irrationnel.

b) Montrer

$$\forall x \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}] \quad \exists!(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \quad x = a + b\sqrt{7}$$

L'élément $a - b\sqrt{7}$ de $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ est appelé *conjugué* de x et noté $\overline{x}$ (ne pas le confondre avec le conjugué complexe !).

c) On considère l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\sqrt{7}] & \to & \mathbb{Z}[\sqrt{7}] \\ x & \mapsto & \overline{x} \end{array}$. Montrer que φ est un endomorphisme d'anneaux.

3) Pour tout $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, on pose $N(x) = x\overline{x}$. Ce réel est appelé *norme* de x.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, $N(x) \in \mathbb{Z}$.

b) Montrer que pour tout $x, x' \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, $N(xx') = N(x)N(x')$.

c) Soit $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$. Montrer que x est inversible si et seulement si $N(x) = \pm 1$.

d) On pose $G = \left\{ x \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}] \;\middle|\; N(x) = 1 \right\}$. Montrer que $(G, \times)$ est un groupe.

e) Expliquer en quoi la détermination des éléments de G est équivalente à la détermination des solutions entières de l'équation $x^2 - 7y^2 = 1$.

4) Soit $x \in G \cap]1, +\infty[$. On note $x = a + b\sqrt{7}$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$.

a) Calculer $x + \overline{x}$ et en déduire que $a > 0$.

b) Montrer que $x^2 = 1 + 2bx\sqrt{7}$ et en déduire que $b > 0$.

c) Montrer que $b \geqslant 3$ et $a \geqslant 8$.

d) En déduire que $G \cap]1, +\infty[$ contient un plus petit élément $x_0 = a_0 + b_0\sqrt{7}$ pour l'ordre naturel sur $\mathbb{R}$.

e) Montrer qu'il existe un entier naturel n tel que $x_0^n \leqslant x < x_0^{n+1}$.

f) En déduire que $x = x_0^n$.

g) Montrer finalement que $G = \{ \pm x_0^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$.

5) En déduire toutes les solutions de l'équation $x^2 - 7y^2 = 1$.

— FIN —