

## Devoir à la maison n° 2

À rendre le 20 septembre

On étudie dans ce problème les fonctions

$$f : \left\{ \begin{array}{c} \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \\ t \end{array} \right. \begin{array}{l} \rightarrow \mathbb{R} \\ \mapsto \tan^2(t) \end{array},$$

$$g : x \mapsto \operatorname{Arcsin} \left( \sqrt{\frac{x}{1+x}} \right)$$

et

$$h : x \mapsto \operatorname{Arctan} \left( \sqrt{x} \right).$$

- 1) Déterminer le domaine de définition de  $g$  et de  $h$ .
- 2) Étudier les variations de  $f$ .
- 3) Déterminer les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de  $f$ .
- 4) Tracer la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé (faire figurer les tangentes ou asymptotes remarquables).
- 5) Montrer que quel que soit  $x \geq 0$ , il existe un unique  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  tel que  $x = f(t)$ .
- 6) Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . Exprimer le réel  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  tel que  $x = f(t)$  en fonction de  $x$  au moyen des fonctions usuelles.
- 7) Soit  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Montrer que  $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$ .
- 8) On considère  $x \geq 0$  et l'unique réel  $t$  correspondant obtenu à la question 6). Écrire  $g(x)$  en fonction de  $t$ , et simplifier cette expression. En déduire que les fonctions  $g$  et  $h$  sont égales sur l'intersection de leurs ensembles de définition.
- 9) Étudier les variations de  $h$ .
- 10) Déterminer les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de  $h$ .
- 11) Tracer la courbe représentative de  $h$  dans un repère orthonormé.

— FIN —