Feuille d'exercice n° 07 : **Notion d'application**

Exercice 1 Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$ et $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ y & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y = 0 \\ y-1 & \text{si} \quad y \geq 1 \end{cases} \end{array}$.

1) Préciser l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité éventuelle de f et g.

2) Préciser $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 2 Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + 1 - \dfrac{1}{x-1} \end{array}$.

1) f est-elle injective ? surjective ?

2) Déterminer une partie E telle que $g : \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + 1 - \dfrac{1}{x-1} \end{array}$ soit bijective et expliciter la réciproque.

Exercice 3 Soit E un ensemble.

1) Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a

$$\mathbb{1}_{(A \cap B)} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B, \tag{1}$$

$$\mathbb{1}_{(A^c)} = 1 - \mathbb{1}_A, \tag{2}$$

$$\mathbb{1}_{(A \cup B)} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B. \tag{3}$$

2) Montrer que l'application $\mathbb{1} : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \to & \{\,0, 1\,\}^E \\ A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$ est bijective.

Exercice 4 Soit E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Établir les implications suivantes.

1) $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective

2) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective

3) $g \circ f$ injective et f surjective $\Rightarrow$ g injective

4) $g \circ f$ surjective et g injective $\Rightarrow$ f surjective

Exercice 5 Soient E, E', F, F' quatre ensembles, $u : E' \to E$, $v : F \to F'$ deux applications. On définit l'application $\varphi : \begin{array}{rcl} F^E & \to & F'^{E'} \\ f & \mapsto & v \circ f \circ u \end{array}$.

1) Vérifier que φ est bien définie.

2) Montrer que si v est injective et u surjective alors φ est injective.

3) Montrer que si v est surjective et u injective alors φ est surjective.

Remarque : cette dernière question est sensiblement plus difficile que les deux premières.

Exercice 6 Soit E un ensemble et A, B deux parties fixées de E. Soit $\varphi\ :\ \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B). \end{cases}$

1) Qu'est-ce que $\varphi(\varnothing)$? $\varphi(\overline{A \cup B})$?

2) À quelle condition sur A et B, φ est-elle injective ?

3) Est-ce que le couple $(\varnothing, B)$ possède un antécédent par φ ?

4) À quelle condition sur A et B, φ est-elle surjective ?

Exercice 7 ( ) **– Factorisation d'une application –**

1) Soit $f\ :\ F \to E$ et $g\ :\ G \to E$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h\ :\ G \to F$ telle que $g = f \circ h$ si et seulement si : $g(G) \subset f(F)$.
À quelle condition h est-elle unique ?

2) Soit $f\ :\ E \to F$ et $g\ :\ E \to G$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h\ :\ F \to G$ telle que $g = h \circ f$ si et seulement si : $\forall\ x, y \in E,\ \big(f(x) = f(y) \Rightarrow g(x) = g(y)\big)$.
À quelle condition h est-elle unique ?

Exercice 8 ( ) Démontrer le théorème de Cantor : « Soit E un ensemble, il n'existe pas de surjection de E dans $\mathscr{P}(E)$ ».

Indication : avec φ une application de E dans $\mathscr{P}(E)$, on pourra s'intéresser à la partie

$$A = \{x \in E \mid x \notin \varphi(x)\}.$$

Exercice 9 ( ) Soit E, I deux ensemble, $f : E \to I$ une application surjective. On pose, pour tout $i \in I$, $A_i = f^{-1}(\{i\})$.

Montrer que les A_i sont non vides, deux à deux disjoints, de réunion égale à E. (On dit que les A_i forment une *partition* de E.)

Exercice 10 ( ) Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

1) **a)** Montrer que, pour toute partie A de E, $A \subset f^{-1}(f(A))$.

b) Montrer que f est injective si et seulement si, pour toute partie A de E, $f^{-1}(f(A)) = A$.

2) **a)** Montrer que, pour toute partie B de F, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

b) Montrer que f est surjective si et seulement si, pour toute partie B de F, $f(f^{-1}(B)) = B$.

Exercice 11 ( ) Soient E, F deux ensembles, soit $f\ :\ E \to F$. Montrer que f est injective si et seulement si :

$$\forall A, A' \in \mathscr{P}(E),\ f(A \cap A') = f(A) \cap f(A').$$

Exercice 12 **– Parties saturées pour la relation d'équivalence associée à f –**

Soit $f : E \to F$ une application, et $\mathscr{S} = \{ X \subset E \mid f^{-1}(f(X)) = X \}$.

1) Pour $A \subset E$, montrer que $f^{-1}(f(A)) \in \mathscr{S}$.

2) Montrer que $\mathscr{S}$ est stable par intersection et réunion.

3) Soient $X \in \mathscr{S}$ et $A \subset E$ tels que $X \cap A = \varnothing$. Montrer que $X \cap f^{-1}(f(A)) = \varnothing$.

4) Soient X et $Y \in \mathscr{S}$. Montrer que $\overline{X}$ et $Y \setminus X$ appartiennent à $\mathscr{S}$.

5) Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{S} & \to & \mathscr{P}(f(E)) \\ A & \mapsto & f(A) \end{array}$ est une bijection.