Feuille d'entraînement n° 4, semaine du 4 au 7 mai
Probabiltés

Ces exercices sont totalement facultatifs. Ils sont plutôt simples, et peu originaux, pour vous permettre de réviser le cours, et voir si vous êtes capables de résoudre des exercices d'application (presque) directe du cours.

Exercice 1 Une puce peut se déplacer sur trois cases C_1, C_2, C_3.
À l'instant $t = 0$, elle est sur la case C_1. À l'instant n :

— si la puce est sur C_1, elle peut passer, à l'instant $n+1$, sur C_2 ou C_3 de manière équiprobable ;
— si la puce est sur C_2, elle peut passer, à l'instant $n+1$, sur C_1 ou C_3 de manière équiprobable ;
— si elle est sur C_3, elle reste sur C_3.

On définit les événements

— A_n : la puce est sur C_1 à l'instant n,
— B_n : la puce est sur C_2 à l'instant n,
— C_n : la puce est sur C_3 à l'instant n

et l'on note
$$a_n = P(A_n),\ b_n = P(B_n),\ c_n = P(C_n)$$

1) Écrire les relations entre $a_{n+1},\ b_{n+1},\ c_{n+1}$ et a_n, b_n, c_n.

2) Trouver une relation entre c_{n+2}, c_{n+1} et c_n. En déduire c_n en fonction de n.

3) Calculer la probabilité que la puce finisse sur la case C_3.

Exercice 2 Lorsqu'un plombier intervient sur un radiateur, il y a une probabilité $\alpha \in [0,1]$ qu'après son intervention sur ce radiateur, une fuite se déclare et que le plombier doive de nouveau intervenir le lendemain. Un plombier intervient un jour J sur un nombre n fixé de radiateurs.

Quelle est la probabilité qu'il doive revenir encore au jour $J + k$?

Pour le radiateur n° i, on pourra noter X_i la variable aléatoire indiquant combien de jours le plombier doit revenir après le jour J pour que ce radiateur soit réparé.

Exercice 3 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule dans l'urne, on relève son numéro, noté k, puis on la replace dans l'urne en ajoutant également k autres boules, toutes numérotées k. On tire une nouvelle fois dans l'urne. On note X_1 le numéro de la boule du premier tirage, et X_2 le numéro de la boule du second tirage.

1) Donner la loi de probabilité de X_1 et son espérance.

2) Quelle est la loi de probabilité de X_2 ? Vérifier que $\sum_{k=1}^{n} P(X_2 = k) = 1$.

Exercice 4 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue dans cette urne deux tirages avec remise.

On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au plus petit (resp. au plus grand) numéro obtenu.

1) Déterminer la loi du couple (X, Y).

2) En déduire la loi marginale de X et la loi marginale de Y.

3) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 5 Une grenouille monte les marches d'un escalier en sautant :

— ou bien une seule marche, avec la probabilité p.

— ou bien deux marches, avec la probabilité $1-p$.

On note X_n le nombre de marches franchies après n sauts. On note Y_n le nombre de fois où la grenouille a sauté une seule marche.

1) Déterminer la loi de Y_n . Exprimer X_n en fonction de Y_n . En déduire la loi de X_n et son espérance.

2) On note Z_n le nombre de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser la n-ième marche. Exprimer, pour $n \geq 1$ et $k \geq 1$, la probabilité $P[Z_n = k]$ en fonction des probabilités des événements $[Z_{n-1} = k-1]$ et $[Z_{n-2} = k-1]$. En déduire que :

$$\mathbb{E}(Z_n) = p\mathbb{E}(Z_{n-1}) + (1-p)\mathbb{E}(Z_{n-2}) + 1.$$

3) Comment déterminer a pour que la suite de terme général $u_n = \mathbb{E}(Z_n) - na$ soit récurrente linéaire d'ordre 2 ?

4) Calculer alors l'espérance de Z_n . Donner un équivalent de $\mathbb{E}(Z_n)$ quand n tend vers l'infini, et interpréter.

Exercice 6 Soit k un entier non nul. On dispose d'un dés à n faces numérotées de 1 à n qu'on lance un certain nombre de fois. On note X_k la variable aléatoire égale à la somme des k premiers lancés. On note Y_k le minimum des premiers lancés.

1) Montrer, par récurrence par exemple, l'égalité :

$$\forall n \geqslant p, \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

2) Préciser les valeurs prises par X_k.

3) Soit $i \in X_{k+1}(\Omega)$ Montrer : $P(X_{k+1} = i) = \sum_{j=i-n}^{i-1} \frac{1}{n} P(X_k = j)$

4) En déduire $P(X_k = i) = \frac{\binom{i-1}{k-1}}{n^k}$ pour $k \leqslant i \leqslant k+n-1$.

5) Calculer espérance et variance de X_k

6) Loi, espérance et variance de Y_k.