

Feuille d'exercice n° 23 : Probabilités – Correction

**Exercice 1** Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilité fini modélisant le lancer successif de  $n \in \mathbb{N}$  dés. Si  $1 \leq i \leq n$ , on note  $S_i$  l'événement «on obtient un 6 au  $i^{\text{e}}$  lancer».

On modélise : les événements  $S_1, \dots, S_n$  sont mutuellement indépendants et tous de probabilité  $\frac{1}{6}$ .

L'événement «on obtient au moins un 6 lors des  $n$  lancers» est  $S_1 \cup \dots \cup S_n$ . Par indépendance mutuelle des  $S_i$ , sa probabilité est

$$P(S_1 \cup \dots \cup S_n) = 1 - P(\overline{S_1 \cup \dots \cup S_n}) = 1 - P(\bar{S}_1 \cap \dots \cap \bar{S}_n) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

On pourrait résoudre l'inéquation  $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq \frac{1}{2}$  sur  $\mathbb{R}$  mais le résultat n'est pas explicite. Observons simplement que cette probabilité croît strictement en fonction de  $n$  et que

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216} > \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} < \frac{1}{2}.$$

Ainsi, il est nécessaire et suffisant de lancer au moins 4 dés pour obtenir au moins un 6 avec probabilité supérieur ou égale à  $\frac{1}{2}$ .

**Exercice 2** On sait qu'il existe une telle probabilité si et seulement si

—  $\forall k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, ak + b \geq 0$  ;

—  $\sum_{k=1}^{2n} (ak + b) = 1$  ;

—  $\sum_{k=1}^n (ak + b) = \frac{1}{4}$ .

Or

$$\sum_{k=1}^n (ak + b) = a \sum_{k=1}^n k + b \sum_{k=1}^n 1 = a \frac{n(n+1)}{2} + bn.$$

De même,

$$\sum_{k=1}^{2n} (ak + b) = an(2n+1) + 2bn.$$

On commence donc par résoudre en  $a, b$  le système

$$\begin{aligned} \begin{cases} a \frac{n(n+1)}{2} + bn &= \frac{1}{4} \\ an(2n+1) + 2bn &= 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2n(n+1)a + 4nb &= 1 \\ n(2n+1)a + 2nb &= 1 \end{cases} \\ &\stackrel{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -2n^2a &= -1 \\ an(2n+1) + 2bn &= 1 \end{cases} \\ &\stackrel{L_2 \leftarrow 2nL_2 + (2n+1)L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -2n^2a &= -1 \\ 4n^2b &= -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a &= \frac{1}{2n^2} \\ b &= \frac{-1}{4n^2} \end{cases} \end{aligned}$$

Remarquons que si  $1 \leq k \leq 2n$ ,

$$\frac{k}{2n^2} - \frac{1}{4n^2} = \frac{2k-1}{4n^2} \geq 0.$$

Ainsi, il existe bien une telle probabilité si et seulement si  $a = \frac{1}{2n^2}$  et  $b = -\frac{1}{4n^2}$ .

**Exercice 3** On suppose bien entendu qu'il existe un e.p.f.  $(\Omega, P)$  modélisant cette expérience. On note  $T$  l'événement « un trésor est placé » et, si  $1 \leq i \leq n$ ,  $C_i$  l'événement « le coffre  $n^\circ i$  contient le trésor ».

On modélise l'énoncé comme suit (voir tout de suite la remarque à la fin de l'exercice) :

—  $P(T) = p$  ;

— si  $1 \leq i \leq n$ ,  $P_T(C_i) = \frac{1}{n}$  et  $P_{\bar{T}}(C_i) = 0$  ;

— si  $1 \leq i \neq j \leq n$ ,  $P_T(C_i \cap C_j) = 0$ .

1) Comme  $(T, \bar{T})$  est un s.c.e, par la formule des probabilités totales,

$$P(C_i) = P(T)P_T(C_i) + P(\bar{T})P_{\bar{T}}(C_i) = \frac{p}{n}.$$

2) On veut déterminer

$$P_{\bar{C}_1 \cap \dots \cap \bar{C}_{n-1}}(C_n) = \frac{P(\bar{C}_1 \cap \dots \cap \bar{C}_{n-1} \cap C_n)}{P(\bar{C}_1 \cap \dots \cap \bar{C}_{n-1})}.$$

Tout d'abord,

$$P(\bar{C}_1 \cap \dots \cap \bar{C}_{n-1}) = 1 - P(C_1 \cup \dots \cup C_{n-1}).$$

par la formule des probabilités totales,

$$P(C_1 \cup \dots \cup C_{n-1}) = P(T)P_T(C_1 \cup \dots \cup C_{n-1}) + P(\bar{T})P_{\bar{T}}(C_1 \cup \dots \cup C_{n-1}).$$

Comme pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $P_{\bar{T}}(C_i) = 0$ , on a par la formule du crible :

$$P_{\bar{T}}(C_1 \cup \dots \cup C_{n-1}) = 0.$$

De plus, comme pour tout  $1 \leq i \neq j \leq n$ ,  $P_T(C_i \cap C_j) = 0$ , on a par la formule du crible :

$$P_T(C_1 \cup \dots \cup C_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} P_T(C_i) = \frac{n-1}{n}.$$

On obtient donc

$$P(\bar{C}_1 \cap \dots \cap \bar{C}_{n-1}) = 1 - p \frac{n-1}{n}.$$

De même,

$$P(\bar{C}_1 \cap \dots \cap \bar{C}_{n-1} \cap C_n) = P(T)P_T(\bar{C}_1 \cap \dots \cap \bar{C}_{n-1} \cap C_n) + P(\bar{T})P_{\bar{T}}(\bar{C}_1 \cap \dots \cap \bar{C}_{n-1} \cap C_n).$$

Comme  $\bar{C}_1 \cap \dots \cap \bar{C}_{n-1} \cap C_n \subset C_n$  et comme  $P_{\bar{T}}(C_n) = 0$ , on a

$$P_{\bar{T}}(\bar{C}_1 \cap \dots \cap \bar{C}_{n-1} \cap C_n) = 0.$$

Remarquons que

$$P_T(C_n) = P_T(C_n \cap (C_1 \cup \dots \cup C_{n-1})) + P_T(C_n \cap \overline{(C_1 \cup \dots \cup C_{n-1})})$$

Or

$$P_T(C_n \cap (C_1 \cup \dots \cup C_{n-1})) = P_T((C_n \cap C_1) \cup \dots \cup (C_n \cap C_{n-1})).$$

Comme pour tout  $1 \leq i \leq n-1$ ,  $P_T(C_n \cap C_i) = 0$ , on a immédiatement

$$P_T(C_n \cap (C_1 \cup \dots \cup C_{n-1})) = 0.$$

Ainsi,

$$P_T(\bar{C}_1 \cap \dots \cap \bar{C}_{n-1} \cap C_n) = P_T(C_n \cap \overline{(C_1 \cup \dots \cup C_{n-1})}) = P_T(C_n) = \frac{1}{n}$$

On obtient donc

$$P_{\bar{C}_1 \cap \dots \cap \bar{C}_{n-1}}(C_n) = \frac{\frac{p}{n}}{1 - p \frac{n-1}{n}} \frac{p}{p + n(1-p)}.$$

*Remarque* : il est plus naturel pour un étudiant « débutant » en probas de modéliser l'énoncé par  $T = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_n$ . C'est tout à fait raisonnable... mais abusif quand on travaille dans les règles de l'art en probabilités. En effet, on s'abstient le plus possible de mettre des hypothèses sur l'univers manipulé : toute la modélisation se fait sur des probabilités (souvent, sur des lois de variables aléatoires et sur des données de conditionnement et/ou d'indépendance). Avec l'hypothèse  $T = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_n$ , les calculs se mènent bien plus aisément !

*Remarque* : Si on écrit la réponse comme  $\frac{\frac{p}{n}}{1 - p + \frac{p}{n}}$ , on l'interprète bien comme le rapport entre

- la fréquence des expériences où le trésor est placé dans le coffre  $n^{\circ} n$  ;
- la fréquence des expériences où le trésor est placé dans le coffre  $n^{\circ} n$  ou n'est pas placé du tout.

**Exercice 4** Soit  $(\Omega, P)$  un e.p.f. modélisant cette expérience. On considère les deux événements suivants :

- $T$  : «on tire un dé pipé» ;
- $S$  : «on lance un six».

On modélise l'énoncé comme suit :

- $P(T) = p$  ;
- $P_T(S) = \frac{1}{2}$  ;
- $P_{\bar{T}}(S) = \frac{1}{6}$ .

Nous voulons déterminer  $P_S(T)$ . Par la formule de Bayes :

$$P_S(T) = P_T(S) \frac{P(T)}{P(S)} = \frac{p}{2P(S)}.$$

Comme  $(T, \bar{T})$  est un s.c.e, on peut utiliser dessus la formule des probabilités totales :

$$P(S) = P(T)P_T(S) + P(\bar{T})P_{\bar{T}}(S) = \frac{p}{2} + \frac{1-p}{6}.$$

On obtient donc

$$P_S(T) = \frac{p}{2} \times \frac{1}{\frac{p}{2} + \frac{1-p}{6}} = \frac{3p}{2p+1}.$$

**Exercice 5** Soit  $(\Omega, P)$  un e.p.f. modélisant cette expérience. On définit pour chaque  $1 \leq k \leq N$  l'événement  $S_k$  : «on tire un six au  $k^{\text{e}}$  lancer».

On modélise l'énoncé comme suit :  $(S_1, \dots, S_N)$  est une famille d'événement mutuellement indépendants et tous de probabilité  $\frac{1}{6}$ .

Remarquons que le joueur 1 ne joue qu'aux tours impairs et le joueur 2 ne joue qu'aux tours pairs.

Si  $1 \leq k \leq N$ , l'événement «le joueur qui joue au tour  $k$  gagne à ce tour» est  $G_k = \bar{S}_1 \cap \dots \cap \bar{S}_{k-1} \cap S_k$ . Sa probabilité, par indépendance mutuelle des  $S_i$ , est

$$P(G_k) = P(\bar{S}_1) \dots P(\bar{S}_{k-1})P(S_k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}.$$

Remarquons aussi que si  $1 \leq k < \ell \leq N$ , alors  $G_\ell \subset \bar{S}_k$  et  $G_k \subset S_k$ , donc les événements  $G_k$  sont deux à deux disjoints.

Enfin, en notant  $p = \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor$  (i.e.  $N = 2p+1$  ou  $N = 2p+2$ ), le joueur 1 joue aux tours 1 à  $2p+1$

et avec  $q = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$  (i.e.  $N = 2q$  ou  $N = 2q+1$ ), alors le joueur 2 joue aux tours 2 à  $2q$ .

1) L'événement «le joueur 1 gagne» est  $J_1^N = \bigcup_{k=0}^p G_{2k+1}$ . On a une union disjointe, donc sa probabilité est

$$P(J_1^N) = \sum_{k=0}^p P(G_{2k+1}) = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^p \left(\frac{5}{6}\right)^{2k} = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^p \left(\frac{25}{36}\right)^k.$$

On reconnaît bien entendu une sommation géométrique et

$$P(J_1^N) = \frac{1}{6} \frac{1 - \left(\frac{25}{36}\right)^{p+1}}{1 - \frac{25}{36}} = \frac{1}{11} \left(6 - 6\left(\frac{25}{36}\right)^{p+1}\right).$$

L'événement «le joueur 2 gagne» est  $J_2^N = \bigcup_{k=1}^q G_{2k}$ . On a une union disjointe, donc sa probabilité est

$$P(J_2^N) = \sum_{k=1}^q P(G_{2k}) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^q \left(\frac{5}{6}\right)^{2k-1} = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^q \left(\frac{25}{36}\right)^k = \frac{5}{36} \sum_{k=0}^{q-1} \left(\frac{25}{36}\right)^k.$$

On reconnaît bien entendu une sommation géométrique et

$$P(J_2^N) = \frac{5}{36} \frac{1 - \left(\frac{25}{36}\right)^q}{1 - \frac{25}{36}} = \frac{1}{11} \left(5 - 5\left(\frac{25}{36}\right)^q\right).$$

- 2) L'événement «personne ne gagne» est  $E^N = \bar{S}_1 \cap \dots \cap \bar{S}_N$ . On peut aussi remarquer que c'est  $\overline{J_1^N \cup J_2^N}$ , le montrer par le calcul est quelque peu fastidieux. Par indépendance mutuelle des  $S_i$ , sa probabilité est

$$P(E^N) = \left(\frac{5}{6}\right)^N.$$

- 3) On a immédiatement

$$\begin{aligned} & \text{— } P(J_1^N) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{6}{11} ; \\ & \text{— } P(J_2^N) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{5}{11} ; \\ & \text{— } P(E^N) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

*Remarque* : l'année prochaine, vous serez en mesure de modéliser une infinité de tirages (c'est-à-dire que l'on attend que le jeu s'arrête). Vous interpréterez ces limite respectivement comme suit :

- le joueur 1 gagne avec probabilité  $\frac{6}{11}$  ;
- le joueur 2 gagne avec probabilité  $\frac{5}{11}$  ;
- le jeu s'arrête avec probabilité 1 (*i.e.* presque sûrement).

**Exercice 6** Soit  $(\Omega, P)$  un e.p.f. modélisant cette expérience. Si  $1 \leq i \leq N$ , on note  $S_i$  l'événement «on lance un six au  $i^e$  lancé» et  $B$  l'événement «on tire une boule blanche». On modélise l'expérience comme suit :

- les événements  $S_1, \dots, S_N$  sont mutuellement indépendants et tous de probabilité  $\frac{1}{6}$  ;
- pour chaque  $1 \leq i \leq n$ ,  $P_{\bar{S}_1 \cap \dots \cap \bar{S}_{i-1} \cap S_i}(B^N) = \frac{1}{i}$ .

Pour la dernière probabilité, on pourra le justifier que l'événement

$$T_i = \bar{S}_1 \cap \dots \cap \bar{S}_{i-1} \cap S_i$$

est l'événement «on tire le premier six au  $i^e$  lancer» et en disant que, si  $T_i$  est réalisé, alors on a rajouté  $i - 1$  boules rouges à l'urne, qui contient donc  $i$  boules dont une seule blanche.

Remarquons que si  $1 \leq k < \ell \leq N$ , alors  $T_k \subset S_k$  et  $T_\ell \subset \bar{S}_k$ , donc les  $T_i$  sont deux à deux disjoints. On peut aussi montrer que

$$\bigcup_{i=1}^N T_i = \bigcup_{i=1}^n S_i.$$

On peut le faire (de manière quelque peu délicate) par le calcul, ou bien le montrer par double inclusion. Pour l'inclusion de droite à gauche, il suffit d'introduire le plus petit  $k$  tel que  $\omega \in S_k$ .

Ainsi, avec  $J^N = \overline{\bigcup_{i=1}^N S_i} = \bigcap_{i=1}^N \bar{S}_i$  (c'est l'événement : «on ne tire jamais de six»),  $(T_1, \dots, T_N, J)$  est un système complet d'événements.

*Remarque* : comme souvent, la modélisation est plus aisée en introduisant des variables aléatoires. On peut par exemple prendre  $T$  la variable aléatoire qui vaut  $i$  si le premier six est tiré au  $i^e$  lancer et 0 si aucun six n'est tiré.

- 1) L'événement «s'arrêter au bout de  $N$  lancers au plus» est  $\bigcup_{i=1}^N S_i = \bar{J}^N$ , sa probabilité est, par indépendance mutuelle des  $S_i$ ,

$$P(\bar{J}^N) = 1 - P(J) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^N \bar{S}_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^N P(S_i) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^N.$$

- 2) On veut déterminer

$$P(B^N \cap \bar{J}^N) = P\left(\bigcup_{i=1}^N (B^N \cap T_i)\right).$$

Comme les  $T_i$  sont deux à deux disjoints, les  $B^N \cap T_i$  le sont aussi. On a donc (on utilise ensuite la formule des probabilités composées) :

$$P(B^N \cap \bar{J}) = \sum_{i=1}^N P(B^N \cap T_i) = \sum_{i=1}^N P(T_i)P_{T_i}(B^N).$$

Or si  $1 \leq i \leq N$ , par indépendance mutuelle de  $S_1, \dots, S_N$ ,

$$P(T_i) = \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \frac{1}{6}.$$

On a donc, par un décalage d'indice,

$$P(B^N \cap \bar{J}^N) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^N \frac{1}{i} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}$$

- 3) On a donc, par un décalage d'indice,

$$P(B^N \cap \bar{J}^N) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^N \frac{1}{i} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{i+1} \left(\frac{5}{6}\right)^i = \frac{1}{5} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{i+1} \left(\frac{5}{6}\right)^{i+1}$$

Si  $0 \leq i \leq N-1$ , on a

$$\frac{1}{i+1} \left(\frac{5}{6}\right)^{i+1} = \left[ \frac{q^{i+1}}{i+1} \right]_{q=0}^{5/6} = \int_0^{5/6} q^i dq.$$

On a donc

$$P(B^N \cap \bar{J}^N) = \frac{1}{5} \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^{5/6} q^i dq = \frac{1}{5} \int_0^{5/6} \sum_{i=0}^{N-1} q^i dq.$$

On reconnaît bien entendu une sommation géométrique (de raison différente de 1) et on a donc

$$P(B^N \cap \bar{J}^N) = \frac{1}{5} \int_0^{5/6} \frac{1-q^N}{1-q} dq = \frac{1}{5} \int_0^{5/6} \frac{1}{1-q} dq - \frac{1}{5} \int_0^{5/6} \frac{q^N}{1-q} dq$$

Or

$$\int_0^{5/6} \frac{1}{1-q} dq = [-\ln(1-q)]_{q=0}^{5/6} = \ln(6).$$

De plus, si  $0 \leq q \leq \frac{5}{6}$ , alors  $1-q \geq \frac{1}{6} > 0$  et  $0 \leq q^N \leq \left(\frac{5}{6}\right)^N$ . On a donc, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \int_0^{5/6} \frac{q^N}{1-q} dq \leq 6 \int_0^{5/6} \left(\frac{5}{6}\right)^N dq \leq 5 \left(\frac{5}{6}\right)^N.$$

Par encadrement, on a donc

$$\int_0^{5/6} \frac{q^N}{1-q} dq \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

et donc

$$P(B^N \cap \bar{J}^N) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\ln(6)}{5}.$$

*Remarque* : l'année prochaine, vous pourrez modéliser directement le fait de procéder à une infinité de lancers de dés. Vous interpréterez alors comme suit les résultats obtenus ici :

- le jeu s'arrête presque sûrement ;
- la probabilité de tirer une boule blanche est égale à  $\frac{\ln(6)}{5}$ .

**Exercice 7** Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini modélisant cette expérience. On note  $QF$  l'événement «obtenir une quinte-flush» et  $T$  l'événement «l'adversaire a triché».

On montre aisément qu'en tirant 5 cartes sans remise dans un jeu de 52 cartes, la main tirée suit une loi uniforme sur les 5-arrangements de ces 52 cartes.

En effet, si on note  $(C_1, \dots, C_5)$  les 5 cartes tirées et  $(c_1, \dots, c_5)$  5 cartes distinctes deux à deux, on a par modélisation

$$P(C_1 = c_1) = \frac{1}{52},$$

puis par la formule des probabilités composées et par modélisation,

$$P(C_1 = c_1, C_2 = c_2) = P(C_1 = c_1)P_{C_1=c_1}(C_2 = c_2) = \frac{1}{52} \times \frac{1}{51} = \frac{1}{52 \times 51}.$$

De même, par récurrence (ou par la formule des probabilités composées généralisée) :

$$\begin{aligned} P(C_1 = c_1, C_2 = c_2, C_3 = c_3, C_4 = c_4, C_5 = c_5) &= P(C_1 = c_1)P_{C_1=c_1}(C_2 = c_2)P_{[C_1=c_1] \cap [C_2=c_2]}(C_3 = c_3) \\ &\quad \times P_{[C_1=c_1] \cap [C_2=c_2] \cap [C_3=c_3]}(C_4 = c_4)P_{[C_1=c_1] \cap [C_2=c_2] \cap [C_3=c_3] \cap [C_4=c_4]}(C_5 = c_5) \\ &= \frac{1}{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}. \end{aligned}$$

Il suffit ensuite de voir qu'une main tirée  $\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$  correspond à 5! quintuplets, qui ont toutes même probabilités.

- 1) Comme la main tirée suit une loi uniforme, il suffit de dénombrer le nombre de quintes flush. Il y a  $\binom{52}{5}$  mains distinctes.

Il y a 40 quintes flush possibles : pour chacune des 4 couleurs, il y a la quinte-flush commençant par 1, 2... 10. Alors

$$P(QF) = \frac{40}{\binom{52}{5}} = \frac{40 * 120}{52 * 51 * 50 * 49 * 48} = \frac{1}{64\,974} \approx 1.5 * 10^{-5}.$$

- 2) Notons  $p_1$  la probabilité trouvée précédemment. On modélise l'énoncé par :  $P_T(QF) = \frac{9}{10}$ ,  $P_{\bar{T}}(QF) = p_1$  et  $P(T) = \frac{9}{10}$ . On a Par la formule de Bayes et la formule des probabilités totales sur le sce  $(T, \bar{T})$  :

$$P_{QF}(T) = P_T(QF) \frac{P(T)}{P(QF)} = \frac{P(T)P_T(QF)}{P(T)P_T(QF) + P(\bar{T})P_{\bar{T}}(QF)}.$$

Il suffit ensuite de réaliser l'application numérique

**Exercice 8** Cet exercice est à la limite du programme et n'est pas si simple à modéliser. Considérons un espace probabilisé fini  $(\Omega, P)$  modélisant l'expérience jusqu'à la génération  $n+1$ , i.e. avec lequel on pourra calculer  $u_0, \dots, u_n$ .

- 1) L'événement «il n'y a plus de descendance à la génération 1» est l'événement «la fleur originelle n'a pas de descendant» et est donc de probabilité  $u_0 = 1 - p$ .
- 2) On considère les deux descendants de la première fleur. Notons  $O$  l'événement «la fleur originelle a deux descendantes», qui est donc de probabilité  $p$ . Notons  $F_1^n$  l'événement «la première descendante de la fleur originelle n'a plus de descendance à la  $n + 1^e$  génération» (*idem* pour  $F_2^n$ ).

On modélise comme suit :  $P(\bar{O} \cap (F_1^n \cup F_2^n)) = 0$  ; conditionnellement à  $O$ ,  $F_1^n$  et  $F_2^n$  sont indépendantes et de probabilité  $u_{n-1}$ . Notons aussi  $E_n$  l'événement «la descendance est éteinte à la génération  $n$ ».

On peut alors utiliser la formule des probabilités totales sur le sce  $(O, \bar{O})$  :

$$\begin{aligned} u_n &= P(E_n) \\ &= P(\bar{O})P_{\bar{O}}(E_n) + P(O)P_O(E_n) \\ &= P(\bar{O}) \times 1 + P(O)P_O(F_1^n \cup F_2^n) \\ &= 1 - p + pu_{n-1}^2 P_O(F_1^n)P_O(F_2^n) \\ &= 1 - p + pu_{n-1}^2. \end{aligned}$$

- 3) On pourrait étudier la suite  $(u_n)$  comme vu dans le cours sur les suites. La modélisation probabiliste nous autorise ici à accepter deux propriétés :

- $(u_n)$  est à valeurs dans  $[0, 1]$  ;
- $(u_n)$  est croissante.

Pour le deuxième point, il suffit en effet de dire que s'il n'y a pas de descendance à la génération  $n + 1$ , il n'y en a pas non plus à la génération  $n + 2$ . Il est toutefois difficile de justifier rigoureusement avec les outils de votre programme.

On peut aussi remarquer que l'on peut poser  $u_{-1} = 0$  : on a bien  $u_0 = 1 - p = 1 - p + pu_{-1}^2$ .

Ainsi, la suite  $(u_n)$  converge. Comme  $f : x \mapsto (1 - p) + px^2$  est continue sur  $[0, 1]$  (et prend ses valeurs dans  $[0, 1]$ ),  $(u_n)$  converge vers un point fixe de  $f$ .

Si  $x \in [0, 1]$ , on résout donc l'équation

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow 1 - p + px^2 = x \\ &\Leftrightarrow px^2 - x + 1 - p = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)(px + p - 1) = 0. \end{aligned}$$

Cette équation a donc deux solutions sur  $\mathbb{R}$  : 1 et  $\frac{1-p}{p}$ . Remarquons que

$$\frac{1-p}{p} \leq 1 \Leftrightarrow 1 - p \leq p \Leftrightarrow p \geq \frac{1}{2}.$$

Comme  $u_{-1} = 0$ ,  $(u_n)$  converge vers le plus petit point fixe de  $f$  supérieur ou égal à 0. Ainsi,

- si  $p > \frac{1}{2}$ ,  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1-p}{p} < 1$  ;
- si  $p \leq \frac{1}{2}$ ,  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

L'année prochaine, vous pourrez interpréter ces résultats comme suit :

- si  $p > \frac{1}{2}$ , la probabilité qu'il y ait extinction est de  $\frac{1-p}{p} < 1$  ;
- si  $p \leq \frac{1}{2}$ , il y a presque-sûrement extinction.

On remarque que ces résultats sont assez intuitifs, sauf pour le cas  $p = \frac{1}{2}$  :

- si  $p > \frac{1}{2}$ , chaque fleur a en moyenne strictement plus de 1 descendant ;
- si  $p < \frac{1}{2}$ , chaque fleur a en moyenne strictement moins de 1 descendant.

**Exercice 9** C'est une simple réécriture de ce que l'on appelle le «paradoxe de Monty Hall» (nous vous laissons faire vos propres recherches là dessus, internet regorge de ressources).

On note  $P$  : «on avait choisi la bonne porte au début»,  $G$  : «gagner (aller au paradis)». On utilise à chaque fois la formule des probabilités totales sur le s.c.e.  $(P, \bar{P})$ . s

1) Dans la stratégie où l'on ne change pas :

$$P(G) = P_P(G)P(P) + P_{\bar{P}}(G)P(\bar{P}) = 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Ou mieux :  $P = G$

Dans la stratégie où l'on change (c'est forcément 1 moins la première) :

$$P(G) = P_P(G)P(P) + P_{\bar{P}}(G)P(\bar{P}) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Ou mieux :  $P = \bar{G}$ .

2) Il faut considérer que si Saint-Pierre ouvre la porte du paradis, on doit quand même choisir une des deux portes restantes. On note  $E$  : Saint Pierre a ouvert une porte vers l'enfer.  $E$  et  $P$  ne sont pas (forcément) indépendants. On a

$$P(E) = P_P(E)P(P) + P_{\bar{P}}(E)P(\bar{P}) = 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Dans la stratégie où l'on ne change pas :

$$P_E(G) = P_E(P) = P_P(E) \times \frac{P(P)}{P(E)} = 1 \times \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Dans la stratégie où l'on change (c'est forcément 1 moins la première) :

$$P_E(G) = P_E(\bar{P}) = P_{\bar{P}}(E) \times \frac{P(\bar{P})}{P(E)} = \frac{1}{2} \times \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.$$

3) Si Satan le propose, c'est que la bonne porte a été choisie, il faut la garder !

4) On note  $S$  : Satan propose de changer.  $S$  et  $P$  ne sont pas (forcément) indépendants. On a

$$P(S) = P_P(S)P(P) + P_{\bar{P}}(S)P(\bar{P}) = \frac{p_2 + 2p_1}{3}.$$

Dans la stratégie où l'on ne change pas :

$$P_S(G) = P_S(P) = P_P(S) \frac{P(P)}{P(S)} = p_2 \times \frac{\frac{1}{3}}{\frac{p_2 + 2p_1}{3}} = \frac{p_2}{p_2 + 2p_1}.$$

Dans la stratégie où l'on change (c'est forcément 1 moins la première) :

$$P_S(G) = P_S(\bar{P}) = P_{\bar{P}}(S) \frac{P(\bar{P})}{P(S)} = p_1 \times \frac{\frac{2}{3}}{\frac{p_2 + 2p_1}{3}} = \frac{2p_1}{p_2 + 2p_1}.$$

## Exercice 10

1) Pour calculer la probabilité de tirer une permutation : utiliser la formule des probabilités composées.



$$2) \quad B = \bigcap_{k=1}^n \overline{A_k}.$$

$$3) \quad \overline{B} = \bigcup_{k=1}^n A_k, \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} \text{Card}(\overline{B}) &= \text{Card}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (n-k)! \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)! \\ &= n! \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \end{aligned}$$

donc

$$P(\overline{B}) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$$

donc

$$P(B) = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \rightarrow \frac{1}{e}.$$

$$4) \quad \text{Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange} : \left| P(B) - \frac{1}{e} \right| \leq \frac{1}{40!}.$$

**Exercice 11** On note  $Y_n$  le déplacement à l'instant  $n$ .  $Y_n$  suit la loi uniforme sur  $-1, 1$  et  $(Y_1, \dots, Y_n)$  sont mutuellement indépendantes.

On a  $X_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ , donc  $EX_n = 0$  et  $V(X_n) = nV(X_1) = n$ .

On pouvait aussi poser  $Y'_n = \frac{1}{2}(Y_n + 1)$  qui vaut 1 si  $Y_n = 1$  et 0 si  $Y_n = -1$ . Ainsi,  $Y'_n$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$  et  $Y'_1, \dots, Y'_n$  sont mutuellement indépendantes. Avec  $X'_n = \sum_{k=1}^n Y'_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ , on a donc  $X_n = 2X'_n - n$  et l'on retrouve les résultats précédents.

Enfin, soit  $-n \leq k \leq n$ . On a donc avec  $p = \frac{k+n}{2}$

$$P(X_n = k) = P(X'_n = \frac{k+n}{2}) = \begin{cases} \binom{n}{p} \frac{1}{2^n} & \text{si } k+n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

## Exercice 12

1) On a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X] &= \sum_{k=1}^n kP(X = k) \\
 &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^k 1 \right) P(X = k) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n P(X = k) \\
 &= \sum_{i=1}^n P(X \geq i) \\
 &= \sum_{k=1}^n P(X \geq k).
 \end{aligned}$$

2) Notons  $J_1, \dots, J_N$  les  $N$  numéros tirés. On suppose que  $J_1, \dots, J_N$  sont mutuellement indépendantes et suivent chacune la loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Alors  $X$  est à valeurs dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et, si  $1 \leq k \leq n$ , par indépendance mutuelle des  $J_i$ ,

$$P(X \leq k) = P\left(\bigcap_{i=1}^N [J_i \leq k]\right) = \prod_{i=1}^N P(J_i \leq k) = \left(\frac{k}{n}\right)^N.$$

Remarquons que cette formule est valide pour  $k = 0$ . Ainsi,

$$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1) = \left(\frac{k}{n}\right)^N - \left(\frac{k-1}{n}\right)^N.$$

3) En utilisant la première question :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X] &= \sum_{k=1}^n P(X \geq k) \\
 &= \sum_{k=1}^n 1 - P(X \leq k-1) \\
 &= n - \sum_{k=1}^n P(X \leq k-1) \\
 &= n - \sum_{k=0}^{n-1} P(X \leq k) \\
 &= n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^N.
 \end{aligned}$$

4) On reconnaît une somme de Riemann. Comme  $x \mapsto x^N$  est continue sur  $[0, 1]$ , par le théorème de convergence des sommes de Riemann,

$$\frac{\mathbb{E}(X)}{n} = 1 - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^N \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \int_0^1 t^N dt = 1 - \frac{1}{N+1} = \frac{N}{N+1}.$$

Ainsi,  $\mathbb{E}[X] \underset{n \rightarrow +\infty, N \text{ fixé}}{\sim} \frac{nN}{N+1}.$

5) On a immédiatement  $\mathbb{E}(X) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty, n \text{ fixé}} n.$

C'est intuitif : plus on se donne d'urnes dans lesquelles piocher, plus le plus grand numéro tiré sera proche du maximum possible  $n$ .

**Exercice 13** On note  $N$  la variable aléatoire modélisant le numéro tiré :  $N$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

Si  $1 \leq i \leq n$ , conditionnellement à  $[N = i]$ ,  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $i$  et  $\frac{1}{6}$ .

Par la formule des probabilités totales, si  $1 \leq k \leq n$ ,

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{i=1}^n P(N = i) P_{N=i}(X = k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=k}^n P_{N=i}(X = k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{i-k}. \end{aligned}$$

Ensuite (on contourne l'absence de la formule de l'espérance totale),

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^n k P(X = k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{i-k} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underbrace{\sum_{k=1}^i k \binom{i}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{i-k}}_{(*)}. \end{aligned}$$

Dans la somme (\*), on reconnaît l'espérance d'une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres  $i$  et  $\frac{1}{6}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i}{6} \\ &= \frac{1}{6n} \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n+1}{12}. \end{aligned}$$

On fait de même pour calculer  $E(X^2)$  et l'on obtient la variance.

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^n k^2 P(X = k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} k^2 \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{i-k} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underbrace{\sum_{k=1}^i k^2 \binom{i}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{i-k}}_{(*)}. \end{aligned}$$

Dans la somme (\*), on reconnaît l'espérance du carré d'une variable aléatoire  $Y_i$  de loi binomiale de paramètres  $i$  et  $\frac{1}{6}$ , qui vaut

$$E[Y_i^2] = V(Y_i) + E[Y_i]^2 = \frac{5i}{36} + \frac{i^2}{36}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{5i + i^2}{36} \\
 &= \frac{1}{36n} \left( \frac{5n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\
 &= \frac{1}{36} \times \frac{15(n+1) + (n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= \frac{1}{36} \times \frac{(n+1)(2n+16)}{6} \\
 &= \frac{(n+1)(n+8)}{108}.
 \end{aligned}$$

On a finalement

$$V(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{(n+1)(n+8)}{108} - \frac{(n+1)^2}{144} = \frac{n+1}{36} \times \left( \frac{n+8}{3} - \frac{n+1}{4} \right) = \frac{(n+1)(n+29)}{432}.$$

### Exercice 14

1) a)  $\llbracket 1; N \rrbracket$ .

b)  $P(T_n = 1) = N \times \frac{1}{N^n}$ .

$P(T_n = n) = 0$  si  $n > N$ . Sinon,

$$P(T_n = n) = P(T_n = n \cap T_{n-1} = n-1) = P(T_n = n | T_{n-1} = n-1) P(T_{n-1} = n-1) = \frac{N - (n-1)}{N} P(T_{n-1} = n-1)$$

et par récurrence,  $P(T_n = n) = \frac{(N-1)!}{(N-n)!} \cdot \frac{1}{N^{n-1}}$ .

Pour  $P(T_n = 2)$ , le faire par dénombrement : choisir 2 nombres distincts puis les positions des deux nombres. On trouve  $P(T_n = 2) = \binom{N}{2} \cdot (2^n - 2)$ .

2) Appliquer la formule des probabilités totales en conditionnant par rapport à  $T_n$ . On trouve  $P(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N} P(T_n = k) + \frac{N - (k-1)}{N} P(T_n = k-1)$ .

3) a) Injecter dans la relation précédente.

b)  $E(T_n) = Q'_n(1)$ , et dériver la relation précédente. On trouve  $E(T_{n+1}) = 1 + (1 - \frac{1}{N})E(T_n)$ . C'est une suite arithmético-géométrique. Avec  $E(T_1) = 1$ , on arrive à  $E(T_n) - N = (1 - \frac{1}{N})^{n-1}(1 - N) = -N(1 - \frac{1}{N})^n$ , donc  $E(T_n) = N(1 - (1 - \frac{1}{N})^n)$ .

c)  $\frac{E(T_N)}{N} = 1 - (1 - \frac{1}{N})^N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{e}$ .

### Exercice 15

1)  $(X, Y)$  est à valeurs dans  $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ .  $X$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

Pour  $1 \leq k, i \leq k$ , par la formule des probabilités composées,

$$P(X = k, Y = i) = P_{X=k}(Y = i) P(X = k) = \frac{1}{n} P_{X=k}(Y = i)$$

On modélise directement :

<p>— si <math>i &gt; k</math>, <math>P(X = k, Y = i) = 0</math> ;</p> <p>— si <math>i \leq k</math>, <math>P(X = k, Y = i) = \frac{1}{nk}</math>.</p>
---

- 2)  $Y$  est à valeurs dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Soit  $1 \leq i \leq n$ .  $(X = k)_{1 \leq k \leq n}$  est un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales,

$$P(Y = i) = \sum_{k=1}^n P_{X=k}(Y = i)P(X = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=i}^n \frac{1}{k}.$$

**Exercice 16** Une première réponse : on sait que l'on peut construire un e.p.f.  $(\Omega', P')$  sur lequel on peut définir des v.a.  $X_1, \dots, X_{n+m}$  i.i.d. suivant chacune la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .

Avec  $X' = X_1 + \dots + X_n$  et  $Y' = X_{n+1} + \dots + X_{n+m}$ , alors  $X'$  et  $Y'$  sont indépendantes,  $X' \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$  et  $Y' \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ . Ainsi,  $(X, Y)$  et  $(X', Y')$  ont les mêmes lois jointes (les détailler, au besoin, si vous n'êtes pas convaincus). Comme la loi de  $X + Y$  ne dépend que de la loi jointe de  $(X, Y)$ , alors  $X + Y$  et  $X' + Y'$  ont la même loi. Or  $X' + Y' = X_1 + \dots + X_{n+m} \hookrightarrow \mathcal{B}(n + m, p)$ . Ainsi,  $X + Y$  suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .

On peut aussi le retrouver par le calcul.  $X + Y$  est à valeurs dans  $\llbracket 0, n + m \rrbracket$ . Comme  $[X = 0], \dots, [X = n]$  forme un système complet d'événements, par la formule des probabilités totales, si  $0 \leq k \leq n + m$ ,

$$P(X + Y = k) = \sum_{\ell=0}^n P(X = \ell)P_{X=\ell}(X + Y = k) = \sum_{\ell=0}^n P(X = \ell)P_{X=\ell}(Y = k - \ell).$$

Par indépendance de  $X$  et de  $Y$ , on obtient donc

$$\begin{aligned} P(X + Y = k) &= \sum_{\ell=0}^n P(X = \ell)P(Y = k - \ell) \\ &= \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} p^\ell (1-p)^{n-\ell} \binom{m}{k-\ell} p^{k-\ell} (1-p)^{m-k+\ell} \\ &= p^k (1-p)^k \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} \binom{m}{k-\ell}. \end{aligned}$$

Par la form de Chu-Vandermonde, on a bien

$$P(X + Y = k) = \binom{n+m}{k} p^k (1-p)^k,$$

donc  $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n + m, p)$ .

**Exercice 17**

- 1) Par linéarité de l'espérance,  $E[\mu_n] = m$ , par indépendance mutuelle des  $X_i$ ,  $V(\mu_n) = \frac{\sigma^2}{n}$ .
- 2) Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev sur  $\mu_n$ , avec  $\epsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n\alpha}}$  on obtient  $I_X = [\mu_n - \epsilon, \mu_n + \epsilon]$ .
- 3) Majorer  $\sigma^2$  par  $\frac{1}{4}$ , on obtient  $\epsilon \leq \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}$ .

**Exercice 18**

- 1) Par indépendance mutuelle des  $X_i$ ,  $\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(\prod_{k=1}^n X_k) = \mathbb{E}(X_1)^n = (p - (1-p))^n = (2p-1)^n$   
Comme  $Y_n$  est à valeurs dans  $\{-1, 1\}$ ,  $Y_n^2 = 1$ , donc  $\mathbb{E}(Y_n^2) = 1$  et  $V(Y_n) = 1 - (2p-1)^{2n}$
- 2) a) Loi de  $Y_2$  : on utilise la FPT sur le sce  $[X_1 = 1], [X_1 = -1]$  :

$$\begin{aligned} P(Y_2 = 1) &= P(X_1 = 1)P_{X_1=1}(X_1 X_2 = 1) + P(X_1 = -1)P_{X_1=-1}(X_1 X_2 = 1) \\ &= P(X_1 = 1)P_{X_1=1}(X_2 = 1) + P(X_1 = -1)P_{X_1=-1}(X_2 = 1) \\ &= P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) + P(X_1 = -1)P(X_2 = 1) \text{ car } X_1, X_2 \text{ ind.} \\ &= p^2 + (p-1)^2 = 2p^2 - 2p + 1. \end{aligned}$$

Ainsi,  $P(Y_2 = -1) = 1 - P(Y_2 = 1) = 2p - 2p^2 = 2p(1 - p)$ .

Loi de  $Y_3$  : on utilise la FPT sur le sce  $[Y_2 = 1], [Y_2 = -1]$  :

$$\begin{aligned} P(Y_3 = 1) &= P(Y_2 = 1)P_{Y_2=1}(Y_1 X_3 = 1) + P(Y_2 = -1)P_{Y_2=-1}(Y_1 X_3 = 1) \\ &= P(Y_2 = 1)P_{Y_2=1}(X_3 = 1) + P(Y_2 = -1)P_{Y_2=-1}(X_3 = -1) \\ &= P(Y_2 = 1)P(X_3 = 1) + P(Y_2 = -1)P(X_3 = -1) \text{ car } Y_2, X_3 \text{ ind.} \\ &= p(2p^2 - 2p + 1) + 2p(1 - p)^2 = 4p^3 - 6p^2 + 3p \end{aligned}$$

Ainsi,  $P(Y_3 = -1) = 3p^2(1 - p) + (1 - p)^3$

b) De la même manière, en utilisant la FPT sur le sce  $[Y_n = 1], [Y_n = -1]$  :

$$P(Y_{n+1} = 1) = pp_n + (1 - p)(1 - p_n) = 1 - p + (2p - 1)p_n.$$

C'est une relation de récurrence arithmético-géométrique, de raison  $2p - 1 \neq 1$ . On résout l'équation  $a = 1 - p + a(2p - 1)a \iff a = 1/2$ .

D'où pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$p_n = 1/2 + (2p - 1)^{n-1}(y_1 - 1/2) = 1/2 + (2p - 1)^{n-1}(p - 1/2) = \frac{1}{2}(1 + (2p - 1)^n)$$

3) a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On calcule

$$P(Y_n = 1, Y_{n+1} = 1) = P(Y_n = 1, X_{n+1} = 1) = p((1 + (2p - 1)^n)/2)$$

et

$$P(Y_n = 1)P(Y_{n+1} = 1) = ((1 + (2p - 1)^n)/2)((1 + (2p - 1)^{n+1})/2)$$

Ainsi,  $Y_n$  et  $Y_{n+1}$  sont indépendantes pour tout  $n \in \mathbb{N}$  si et seulement si pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $1 + (2p - 1)^n = 0$  ou  $p = (1 + (2p - 1)^{n+1})/2$ . Le premier cas équivaut à  $(2p - 1) = -1$  et  $n$  impair, soit  $n$  impair et  $p = 0$ . Le deuxième cas équivaut à  $(2p - 1)^{n+1} = 2p - 1$  soit  $p = 1/2$  ; ou  $(2p - 1)^n = 1$ , soit  $p = 0$  et  $n$  pair ou  $p = 1$ .

Ainsi,  $Y_n$  et  $Y_{n+1}$  sont indépendantes pour tout  $n \in \mathbb{N}$  si et seulement si  $p = \frac{1}{2}$  ou  $p = 1$  ou  $p = 0$ .

b) On reprend le calcul précédent, mais à  $n$  fixé. Ainsi,  $Y_n$  et  $Y_{n+1}$  sont indépendantes si et seulement si :  $1 + (2p - 1)^n = 0$  ou  $p = (1 + (2p - 1)^{n+1})/2$ .  
— le premier cas équivaut à  $(2p - 1) = -1$  et  $n$  impair, soit  $n$  impair et  $p = 0$  ;  
— le deuxième cas équivaut à  $(2p - 1)^{n+1} = 2p - 1$ , c'est-à-dire  $p = 1/2$  ou  $(2p - 1)^n = 1$ , c'est-à-dire  $(p = 0 \text{ et } n \text{ pair})$  ou  $p = 1$ .

Ainsi,  $Y_n$  et  $Y_{n+1}$  sont indépendantes si et seulement si  $p = \frac{1}{2}$  ou  $p = 1$  ou  $p = 0$ .

4)  $Cov(Y_n Y_{n+m}) = E(Y_n Y_{n+m}) - \mathbb{E}(Y_n)\mathbb{E}(Y_{n+m})$

$$\mathbb{E}(Y_n) = (2p - 1)^n \text{ et } \mathbb{E}(Y_{n+m}) = (2p - 1)^{n+m}$$

$$\mathbb{E}(Y_n Y_{n+m}) = \mathbb{E}(Y_n^2 \prod_{k=n+1}^{n+m} X_k) = (2p - 1)^m$$

$$\text{Donc } Cov(Y_n Y_{n+m}) = (2p - 1)^m(1 - (2p - 1)^{2n})$$