Vademecum pour le futur taupin

26 janvier 2021

Ce document traite quelques points sur lesquels les nouveaux étudiants de sup ont régulièrement des lacunes en début d'année. Vous y trouverez plusieurs rappels de cours et de nombreux exercices d'applications. Tous portent sur le programme du secondaire, mais sont écrits du point de vue, avec le langage et le niveau de difficulté que vous trouverez en classes préparatoires. Vous pourrez utiliser ce vademecum comme support de révisions durant l'été, avant l'entrée en sup. Il pourra aussi accompagner le nouveau taupin en début d'année.

Ce texte ne se veut pas exhaustif, il ne comporte pas de preuve, et peu de définitions. Pour tout cela, il conviendra de consulter le cours de terminale.

Si vous travaillez dessus, votre attention doit porter sur trois points en particulier :

- votre rédaction doit être détaillée, et suivre au plus près les modèles proposés ;
- les calculs (et leurs vérifications) doivent être faits à la main, sans calculatrice ;
- les résultats de calculs doivent toujours être simplifiés au maximum (le plus souvent, on les développe ou on les factorise le plus possible).

1 Rédaction et raisonnement déductif.

Un raisonnement ou une démonstration mathématique est avant tout un texte... comme tous les autres. Il doit être articulé logiquement. On y trouve cependant souvent des parties «techniques», écrites (on pourrait aussi dire «codées») en langage mathématiques, comme des équations par exemple.

Il convient de respecter quelques conventions.

- Deux «phrases mathématiques» doivent être coordonnées. Le plus souvent, on utilisera le mot «donc», qui signifie une déduction. En écrivant «A donc B», on dit que B est vrai, car A l'est.
- Toutes les variables mathématiques doivent être introduites, le plus souvent par le mot «soit».

Exemple 1.0.1.
Montrer que si un nombre entier est pair, alors son carré est pair.

On rédige comme suit.

Soit n un nombre entier pair. Il existe un entier k tel que

$$n = 2k.$$

Ainsi,

$$n^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$$

est bien un nombre pair, car $2k^2$ est un entier.

On aurait aussi pu rédiger comme suit.

Soit $n \in \mathbb{Z}$ un entier pair. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = 2k.$$

Ainsi,

$$n^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$$

est bien un nombre pair, car $2k^2 \in \mathbb{Z}$.

Exercice 1.0.2.
Montrer que si un nombre entier est impair, alors son carré est impair.

Exercice 1.0.3.
En utilisant une identité remarquable, montrer que si deux nombres complexes ont même carré, alors ils sont égaux ou opposés.

Remarque 1.0.4.
Dans un travail mathématique, le symbole $\Leftrightarrow$ a un sens bien précis. Il convient pour l'instant de l'utiliser uniquement dans un contextes précis : placé entre deux équations ou inéquations, il signifie que ces dernières ont exactement les mêmes solutions. On passe d'une équation/inéquation à une autre équation/inéquation par des manipulations respectant l'ordre, c'est-à-dire en appliquant de part et d'autre une fonction strictement monotone (voir la partie 4 pour des rappels à ce sujet).

À la moindre hésitation, on préférera dresser des tableaux de signes/variations des fonctions mises en jeu.

2 Autour de la trigonométrie.

2.1 Cosinus et sinus.

Les valeurs suivantes doivent être connues sur le bout des doigts.

α	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$
0	1	0
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/2$	0	1
π	-1	0

Table 1 – Valeurs remarquables des sinus et cosinus.

Les formules d'addition sont à connaître.

Proposition 2.1.1.
Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).$$

On a de plus

$$\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1.$$

Exercice 2.1.2.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$. En utilisant les formules précédentes, et les propriétés usuelles du sinus et du cosinus, montrer les formules suivantes.

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$
$$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$$

$$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$$
$$\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$$

Exercice 2.1.3.
Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant les formules précédentes, et les propriétés usuelles du sinus et du cosinus, montrer les formules suivantes puis les illustrer sur le cercle trigonométrique.

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$
$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x)$$
$$\cos(x + \pi) = -\cos(x)$$
$$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$$

En s'aidant des symétries observables sur le cercle trigonométrique, traduites par les formules précédentes, vous devez savoir obtenir tous les angles remarquables du cercle trigonométrique.

Exercice 2.1.4.
Déterminer les valeurs suivantes.

1. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
2. $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$
3. $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$
4. $\sin\left(\frac{21\pi}{4}\right)$

Exercice 2.1.5.
En utilisant les formules d'addition, déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 2.1.6.
Calculer

$$1 + \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{3\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{3}.$$

Exercice 2.1.7.
Déterminer le cosinus et le sinus de chacun des réels suivants.

1. $a = \frac{213\pi}{4}$
2. $b = \frac{2132\pi}{3}$
3. $c = -\frac{1285\pi}{2}$
4. $d = \frac{687\pi}{6}$

Exercice 2.1.8.
Calculer $\sin\alpha$ sachant que $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ et que $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Exercice 2.1.9.
Simplifier

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos(5\pi-x)+\sin^2(\pi+x) + \sin^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right).$$

Exercice 2.1.10.
Simplifier $\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)$.

Exercice 2.1.11.
Tracer la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \dfrac{\sin x+|\sin x|}{2}$.

Exercice 2.1.12.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$2\cos^2 x-5\cos x+2=0.$$

Exercice 2.1.13.
Soit x un réel. Développer $\cos(4x)$ en l'exprimant comme un polynôme en $\cos(x)$.

2.2 Calculs sur les complexes.

Il convient de s'entraîner suffisamment pour pouvoir calculer efficacement sur des nombres complexes simples.

Exercice 2.2.1.
Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

1. $(3+i)(4-5i)+7-2i$
2. $\dfrac{-5+3i}{1+i}+\dfrac{3+i}{1-i}$
3. $\dfrac{3+i}{1+i\sqrt{2}}+\dfrac{3-5i}{2-i}$
4. $(1+i)^3+(1-i)^3$

Exercice 2.2.2.
Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants.

1. $\sqrt{7}-i\sqrt{7}$
2. $5+5i\sqrt{3}$.
3. $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{i}{4}$

3 Factorisation.

3.1 Conjugaison de radicaux.

Proposition 3.1.1.
Si $a>0$ et $b>0$,

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Exercice 3.1.2.
Rendre entiers les dénominateurs des fractions suivantes.

1. $A=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
2. $B=\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2}}$.
3. $C=\dfrac{6}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

Exercice 3.1.3.
Simplifier les nombres suivants.

1. $A=\sqrt{(\sqrt{3}-3)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}+3)^2}$
2. $B=\sqrt{\dfrac{1}{(2-\sqrt{5})^2}}-\sqrt{\dfrac{1}{(2+\sqrt{5})^2}}$

Exercice 3.1.4.
Soit a et b deux réels non nuls et de même signe.

Calculer la valeur de l'expression $\dfrac{a}{x}+\dfrac{x}{b}+2\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ pour $x=\sqrt{ab}$.

Exercice 3.1.5.
Calculer $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$ pour $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{3}{4}}-\sqrt{\dfrac{4}{3}}\right)$.

3.2 Expressions polynomiales.

Les identités remarquables sont à repérer à chaque fois qu'elles apparaissent, et fournissent des factorisations souvent précieuses.

Exercice 3.2.1.
Factoriser ou simplifier les expressions suivantes.

1. $x^2 - 8$
2. $x^4 - 9$

Exercice 3.2.2.
Développer le plus simplement possible l'expression suivante.

$$\left[x^2 + (2+\sqrt{2})x + 1 + \sqrt{2}\right] \times \left[x^2 + (2-\sqrt{2})x + 1 - \sqrt{2}\right]$$

Exercice 3.2.3.
Développer le plus simplement possible l'expression suivante.

$$(x^2-1)(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)$$

Proposition 3.2.4.
Lorsqu'une fonction polynomiale de degré n :

$$P : x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

a une racine $\alpha \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire que $P(\alpha) = 0$, alors il existe une fonction polynomiale Q de degré $n-1$ telle quelque, pour tout nombre x,

$$P(x) = (x-\alpha)Q(x).$$

Il arrive souvent de devoir factoriser des fonctions polynomiales, on commencera systématiquement par rechercher des racines évidentes (souvent parmis 0, 1, -1, i, $-i$, 2, -2). L'utilisation du discriminant est longue et n'est disponible que pour les équations de degré 2, on l'évitera donc autant que possible.

Pour les trinômes du second degré, on utilise très souvent le développement suivant.

Proposition 3.2.5.
Pour tout nombres α, β, x,

$$(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta.$$

1. Si l'on connait $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$, on connait donc un trinôme du second degré dont α et β sont exactement les racines.
2. Si l'on connait une racine d'un trinôme du second degré, on obtient immédiatement l'autre racine sans calcul.

Exemple 3.2.6.
Factoriser l'expression polynomiale

$$P(x) = x^3 - 10x^2 + 23x - 14.$$

On remarque que 1 est racine évidente ($P(1) = 1 - 10 + 23 - 14 = 0$), il existe donc des nombres a_0, a_1, a_2 tels que, pour tout nombre x,

$$P(x) = (x-1)(a_2x^2 + a_1x + a_0).$$

En considérant le terme de plus haut degré de P et le terme constant, on obtient immédiatement $a_2 = 1$ et $a_0 = 14$. En considérant le terme de degré 2 de P, on obtient (en développant par exemple) : $-a_2 + a_1 = -10$, donc $a_1 = -9$.

On vérifie en développant pour obtenir le terme de degré 1 de P : $-a_1 + a_0 = 23$, ce qui est exact.

On a donc, pour tout nombre x,

$$P(x) = (x-1)(x^2 - 9x + 14).$$

On remarque que 2 est racine évidente du trinôme $x^2 - 9x + 14$, que l'on factorise donc immédiatement en $(x-2)(x-7)$.

Exercice 3.2.7.
Factoriser les expressions suivantes sans jamais écrire de discriminant.

1. $x^4 + 2x^3 - 13x^2 + 10x$
2. $x^3 - 3x^2 + x - 3$
3. $x^3 - 5x^2 - 22x - 16$
4. $x^3 - x^2 - 7x + 7$
5. $x^4 - 4$

Exercice 3.2.8.
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes sans jamais écrire de discriminant.

1. $3x^2 - 7x = 0$
2. $5x^2 + 11 = 0$
3. $5x^2 - 7 = 0$

4. $(x-\sqrt{2})^2 = 2$
5. $x^2 - 2x + 3 = 0$

Exercice 3.2.9.
Résoudre dans $\mathbb{R}$, en discutant suivant le paramètre $m \in \mathbb{R}$, l'équation

$$5x^2 + 2x + m - 3 = 0.$$

Exercice 3.2.10.
Résoudre dans $\mathbb{R}$, en discutant suivant le paramètre $m \in \mathbb{R}$, l'équation

$$(m-3)x^2 - 2mx + m + 1 = 0.$$

3.3 Tableaux de signes.

Savoir dresser efficacement un tableau de signes est un savoir-faire important.

Remarque 3.3.1.
Dans un tableau de signes, on étudie le signe *strict*.

Le tableau de signes de base est celui d'une fonction strictement monotone (voir partie 4), avec un point d'annulation.

Proposition 3.3.2.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $\alpha \in I$ vérifiant $f(\alpha) = 0$.

1. Si f est strictement croissante, le tableau de variations de f sur I s'écrit comme suit.

x		α	
$f(x)$	$-$	0	$+$

2. Si f est strictement décroissante, le tableau de variations de f sur I s'écrit comme suit.

x		α	
$f(x)$	$+$	0	$-$

Un cas particulier à connaître sur le bout des doigts est celui des fonctions affines.

Corollaire 3.3.3.
Soit a, b deux réels, avec $a \neq 0$. Soit $f : x \mapsto ax+b$.

1. Si $a > 0$, la tableau de signes de f est

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$-\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

2. Si $a < 0$, la tableau de signes de f est

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$-\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

Enfin, on compose les tableaux de signes par la règle des signes.

La méthode universelle pour étudier le signe d'une expression est donc la suivante :

1. on détermine l'ensemble de définition de l'expression, s'il n'est pas donné ;
2. on commence par factoriser le plus possible l'expression ;
3. on réalise une étude de fonction pour chaque facteur dont le tableau de signes n'est pas donné par les règles précédentes.

Il convient de suivre systématiquement ce programme

Exemple 3.3.4.
Dresser le tableau de signes de

$$f : x \mapsto -\mathrm{e}^{x}(x-1) + \mathrm{e}^{2x}(x-1) - \mathrm{e}^{x+2} + e^2.$$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= -\mathrm{e}^{x}(x-1) + \mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{x}(x-1) - \mathrm{e}^{2}(\mathrm{e}^{x}-1) \\ &= \mathrm{e}^{x}(x-1)(\mathrm{e}^{x}-1) - \mathrm{e}^{2}(\mathrm{e}^{x}-1) \\ \\ &= (\mathrm{e}^{x}-1)\Big((x-1)\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2}\Big). \end{aligned}$$

On définit sur $\mathbb{R}$

$$g : x \mapsto (x-1)\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2}.$$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, si $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{x} + (x-1)\mathrm{e}^{x} \\ &= x\mathrm{e}^{x}. \end{aligned}$$

Comme $x\mathrm{e}^{x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$, et comme

$$g(x) = (x-1)\mathrm{e}^{x-1}\mathrm{e} - \mathrm{e}^{2},$$

on a $g(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\mathrm{e}^{2}$. On a aussi $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

On peut donc dresser le tableau de variations de g.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\mathrm{e}^{2}$	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{2} - \mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi, g est strictement négative sur $\mathbb{R}_-$.

De plus, g et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $g(0) < 0$ et $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, par le théorème de la bijection, g s'annule une fois exactement sur $\mathbb{R}_+$, et on a la solution évidente $g(2) = 0$.

La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{x} - 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0.

On peut donc dresser le tableau de signes de f.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$\mathrm{e}^{x} - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 3.3.5.
Dresser le tableau de signes des expressions suivantes.

1. $x^3 - x^2 - 5x + 5$
2. $x^4 - 6x^3 - 6x^2 - 6x - 7$
3. $\ln(x)^2 - \ln(x) - 6$

3.4 Logarithme et exponentielle.

Proposition 3.4.1. 1. Pour tout a et b dans $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^{a} \times \mathrm{e}^{b}$ et $\mathrm{e}^{-a} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{a}}$.

2. Pour tout a et b dans $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{a} = \mathrm{e}^{b} \Leftrightarrow a = b$.
3. Pour tout a et b dans $]0;+\infty[$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ et $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
4. Pour tout a et b dans $]0;+\infty[$, $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$.

Remarque 3.4.2.
La fonction logarithme n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$. À chaque fois que l'on étudie une équation ou inéquation faisant intervenir le logarithme, il convient d'étudier en amont le domaine de validité de cette équation, en étudiant le signe de chaque argument de chaque logarithme.

Exercice 3.4.3.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\ln[(x-4)(3x-5)] = \ln(10).$$

Exercice 3.4.4.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\ln(x-4) + \ln(3x-5) = \ln(10).$$

Exercice 3.4.5.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\ln(x+1) + \ln(x+5) = \ln(96).$$

Exercice 3.4.6.
Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système

$$\begin{cases} x + y^2 & = 29 \\ \ln x + 2\ln y & = 2\ln(10) \end{cases}.$$

Exercice 3.4.7.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\mathrm{e}^{2x-1} - \sqrt{\mathrm{e}^{2x+2}} - 2\mathrm{e}^{3} = 0.$$

Exercice 3.4.8.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\mathrm{e}^{x} + 10\mathrm{e}^{-2x} = 4 + 7\mathrm{e}^{-x}.$$

Exercice 3.4.9.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x+2} - \mathrm{e}^{2-x} + 1 < 0.$$

4 Autour de la monotonie.

4.1 Définition et utilisation naïve.

Définition 4.1.1 (Sens de variations)**.**
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$.

1. La fonction f est croissante sur A si, pour tout x, y dans A :
$$\text{si } x \leqslant y, \text{ alors } f(x) \leqslant f(y).$$
2. La fonction f est strictement croissante sur A si, pour tout x, y dans A :
$$\text{si } x < y, \text{ alors } f(x) < f(y).$$
3. La fonction f est décroissante sur A si, pour tout x, y dans A :
$$\text{si } x \leqslant y, \text{ alors } f(x) \geqslant f(y).$$
4. La fonction f est strictement décroissante sur A si, pour tout x, y dans A :
$$\text{si } x < y, \text{ alors } f(x) > f(y).$$

Une fonction est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Exemple 4.1.2. — La fonction racine carrée ($\sqrt{\cdot}$) est strictement croissante, donc croissante.
— La fonction partie entière ($\lfloor \cdot \rfloor$) est croissante, mais pas strictement.
— La fonction carré ($x \mapsto x^2$) n'est pas monotone : elle n'est ni croissante, ni décroissante. Elle est cependant croissante strictement sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante strictement sur $\mathbb{R}_-$.
— La fonction inverse ($x \mapsto \dfrac{1}{x}$) n'est pas monotone : elle n'est ni croissante, ni décroissante. Elle est cependant décroissante strictement sur $\mathbb{R}_+$ ainsi que sur $\mathbb{R}_-$.

Exercice 4.1.3.
Déterminer les ensembles de définition puis les sens de variations des fonctions suivantes (ou dire si elles ne sont pas monotones).

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^3}$
2. $g : x \mapsto \sqrt{1+x^5}$
3. $h : x \mapsto \mathrm{e}^{-2x^3+5}$
4. $\varphi : x \mapsto \left(\sqrt{x+2}+1\right)^2$
5. $\chi : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}$
6. $\psi : x \mapsto \ln |x|$

Remarque 4.1.4.
En appliquant une fonction strictement monotone sur une inéquation, on obtient une inéquation équivalente (en renversant les inégalités si la fonction est strictement décroissante).

Proposition 4.1.5.
Si a, b sont deux réels, $x \mapsto ax + b$ est strictement croissante si $a > 0$ et strictement décroissante si $a < 0$.

Remarque 4.1.6.
C'est équivalent aux règles de manipulations d'inégalités : on peut multiplier une inégalité par un nombre strictement positif sans en changer de sens, *etc.*

Remarque 4.1.7.
Pour mettre au carré ou passer à l'inverse d'une inéquation, il convient donc au préalable de comparer les membres de l'inéquation à 0.

Exercice 4.1.8.
Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\dfrac{2x-1}{4} < \dfrac{4-3x}{5} - \dfrac{3-x}{10}$
2. $\dfrac{x^2-4x+3}{3-2x} \leqslant 1 - x$
3. $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x-2} \leqslant \dfrac{3}{x-3}$

Exercice 4.1.9.
Résoudre la double inéquation

$$-1 < \frac{2-3x}{x+3} < 1.$$

Exercice 4.1.10.
Résoudre suivant le paramètre $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ l'inéquation d'inconnue x :

$$\frac{x-m}{m-1} > 2 - x.$$

On a souvent besoin de comparer des radicaux (racines carrées). Cela se fait systématiquement en passant les objets au carré, après avoir comparé leurs signes.

Exemple 4.1.11.
Comparer $1+\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

Ces deux nombres sont positifs. On a

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^2 &= 1+2\sqrt{2}+2 \\ &= 3+2\sqrt{2} \\ &> \sqrt{3}^2\end{aligned}$$

Par croissance stricte de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$,

$$1+\sqrt{2} > \sqrt{3}.$$

Remarque 4.1.12.
On retiendra les encadrements suivants :

$$2 < \mathrm{e} < 3 \quad \text{et} \quad 3 < \pi < 4.$$

Exercice 4.1.13.
Comparer les paires de nombres suivants.

1. $3+\sqrt{7}$ et $\sqrt{29}$
2. $\dfrac{5+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$ et $\sqrt{5}$
3. $\sqrt{2}+\sqrt{11}$ et $\sqrt{5}+\sqrt{7}$
4. e^{-1} et $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
5. $\dfrac{\pi^2}{6}$ et $\dfrac{3}{2}$

4.2 Lien avec le signe de la dérivée.

Proposition 4.2.1.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. Si f' est positive, f est croissante.
2. Si f' est négative, f est décroissante.
3. Si f' est strictement positive, f est strictement croissante.
4. Si f' est strictement négative, f est strictement décroissante.

Remarque 4.2.2.
L'hypothèse primordiale est que I est un intervalle. Par exemple, la fonction inverse écrite ci-après est dérivable, de dérivée strictement négative mais n'est pas décroissante.

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x}\end{array}$$

4.3 Formules de dérivation.

On tachera de bien séparer les deux écritures suivantes.

— La dérivée d'une fonction f est notée f', c'est une fonction.

— On dérive une expression par rapport à une variable x en mettant devant le symbole $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. On obtient ainsi une expression.

Exemple 4.3.1.
On peut écrire $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) = 2x$ mais pas $(x^2)'$.

Avec $f : x \mapsto x^2$, on peut considérer la fonction f'. On a bien, pour tout réel x, $f'(x) = 2x$.

Exercice 4.3.2.
Dériver les expressions suivantes (les autres variables que la variable de dérivation sont supposées être fixées).

1. $3a^2b + 5b$ par rapport à b.
2. $\sin^2(ab) + a\cos(b)$ par rapport à a.
3. $\exp(2xy) + \ln(x+y)$ par rapport à y.
4. $5t^2\exp(t+x) - 2tx$ par rapport à t.

Proposition 4.3.3 (Dérivées usuelles.)**.**
Les dérivées des fonctions suivantes sont à savoir sur le bout des doigts.

1. Si $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = nx^{n-1}$.
2. Si n est un entier inférieur ou égal à -2, $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = nx^{n-1}$.
3. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ est $\exp' = \exp$.
4. La fonction logarithme (népérien) est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x) = \dfrac{1}{x}$.
5. La fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|x| = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \text{si} & x > 0 \\ -1 & \text{si} & x < 0 \end{array} \right. .$$
6. La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin' = \cos$.
7. La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ est $\cos' = -\sin$.

Proposition 4.3.4 (Règles de dérivation.)**.**
Soit I une partie de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions dérivables sur I.

1. Soit λ et μ deux réels. La fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable et
$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$
2. La fonction fg est dérivable et
$$(fg)' = f'g + fg'.$$
3. Si g ne s'annule pas, $\dfrac{1}{g}$ est dérivable et
$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$
4. Si $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto f(x)^n$ est dérivable et, pour tout $x \in I$,
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)^n) = f'(x) \times n f(x)^{n-1}.$$
5. La fonction $x \mapsto \exp(f(x))$ est dérivable et, pour tout $x \in I$,
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\exp(f(x))) = f'(x) \times \exp(f(x)).$$
6. La fonction $x \mapsto \sin(f(x))$ est dérivable et, pour tout $x \in I$,
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin(f(x))) = f'(x) \times \cos(f(x)).$$
7. La fonction $x \mapsto \cos(f(x))$ est dérivable et, pour tout $x \in I$,
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos(f(x))) = -f'(x) \times \sin(f(x)).$$
8. Si f est strictement positive, la fonction $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ est dérivable et, pour tout $x \in I$,
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{f(x)}\right) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$$
9. Si f est strictement positive, la fonction $x \mapsto \ln(f(x))$ est dérivable et, pour tout $x \in I$,
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln(f(x))) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Exercice 4.3.5.
À partir des règles précédentes, retrouver la règle permettant de dériver le quotient $\dfrac{f}{g}$.

Exemple 4.3.6.
On veut dériver par rapport à la variable x l'expression
$$\frac{x^3 \mathrm{e}^x}{1 + \ln^2(x)}.$$
On peut commencer par remarquer que cette expression est définie pour tout x pour lequel $\ln(x)$ est défini, donc sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.

Si $x > 0$, on commence par calculer les dérivées du numérateur et du dénominateur :
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^3 \mathrm{e}^x\right) = 3x^2 \mathrm{e}^x + x^3 \mathrm{e}^x = (3x^2 + x^3)\mathrm{e}^x$$

et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(1+\ln^2(x)\Big) = 2\ln'(x)\ln(x) = 2\frac{\ln(x)}{x}.$$

On peut ensuite dériver cette expression comme le produit

$$x^3\mathrm{e}^{\,x} \times \frac{1}{1+\ln^2(x)},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^3\mathrm{e}^{\,x}}{1+\ln^2(x)}\right)\\
=&\frac{(3x^2+x^3)\mathrm{e}^{\,x}}{1+\ln^2(x)} - 2\frac{\ln(x)}{x}\frac{x^3\mathrm{e}^{\,x}}{(1+\ln^2(x))^2}\\
=&\frac{x(3x^2+x^3)(1+\ln^2(x))\mathrm{e}^{\,x} - 2\ln(x)x^3\mathrm{e}^{\,x}}{x(1+\ln^2(x))^2}\\
=&\frac{\Big((3+x)(1+\ln^2(x)) - 2\ln(x)\Big)x^3\mathrm{e}^{\,x}}{x(1+\ln^2(x))^2}.
\end{aligned}$$

Exercice 4.3.7.
Dériver les expressions suivantes par rapport à la variable x.

1. $\dfrac{\sin^3(x)\ln(x)}{1+2\mathrm{e}^{\,x}}$
2. $\exp\left(3\sin(x)+\sqrt{x}\right)$
3. $\sqrt{1+\dfrac{3+2x}{1+\mathrm{e}^{\,x}}}$
4. $\ln\left(\cos(\mathrm{e}^{\,x})\right)$

Proposition 4.3.8.
Les limites suivantes sont obtenues en les considérant comme taux d'accroissement de fonctions usuelles.

1. $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1.$
2. $\dfrac{\mathrm{e}^{\,x}-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1.$
3. $\dfrac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1.$

Exercice 4.3.9.
Déterminer l'existence et la valeur de chacune des limites suivantes lorsque x tend vers 0.

1. $\dfrac{\ln(1+2x)}{3x}$
2. $\dfrac{\mathrm{e}^{\,2x}-1}{\sqrt{x}}$
3. $\dfrac{\sin^3(x+\sqrt{x})}{x\sqrt{x}}$

4.4 Inégalités classiques.

Pour établir une inégalité, on pensera toujours à considérer la différence des deux membres et mener l'étude de cette fonction. Le plus souvent, cela passe par l'établissement d'un tableau de variations.

Exercice 4.4.1.
Montrer que pour tout $x > -1$,

$$\ln(1+x) \leqslant x.$$

Quand y a-t-il égalité ? Représenter graphiquement cette inéquation en faisant apparaître une tangente à la courbe de $x \mapsto \ln(1+x)$.

Exercice 4.4.2.
Montrer que pour tout réel x,

$$\mathrm{e}^{\,x} \geqslant 1+x.$$

Quand y a-t-il égalité ? Représenter graphiquement cette inéquation en faisant apparaître une tangente à la courbe de $x \mapsto \mathrm{e}^{\,x}$.

Exercice 4.4.3.
Déterminer le domaine de validité de l'inéquation suivante :

$$\mathrm{e}^{\,x} \geqslant 1+x+\frac{x^2}{2}.$$

Exercice 4.4.4.
Généraliser les deux exercices précédents.

5 L'analyse, c'est l'encadrement.

5.1 Valeur absolue.

Définition 5.1.1.
Si x est un réel, on définit la *valeur absolue* de x par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}.$$

Proposition 5.1.2.
Pour tout réel x, on a $|x| = \sqrt{x^2}$.

Pour tout réel x et tout réel a, on a l'équivalence suivante :

$$|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a.$$

Exercice 5.1.3.
Montrer les deux propriétés précédentes en partant de la définition de valeur absolue donnée ici.

Exemple 5.1.4.
On résout sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$|x| - |x-1| = 5 - 2x. \qquad (\mathscr{E})$$

Si $x < 0$, alors $x - 1 < 0$ et donc $|x| = -x$ et $|x-1| = -(x-1) = 1 - x$. L'équation $(\mathscr{E})$ s'écrit donc $-1 = 5 - 2x$, qui a pour solution $x = 3$, mais $3 \notin]-\infty, 0[$.

Si $0 \leqslant x < 1$, alors $x - 1 < 0$, donc $|x| = x$ et $|x-1| = 1 - x$. L'équation $(\mathscr{E})$ s'écrit donc $2x - 1 = 5 - 2x$, qui a pour solution $x = 1$, mais $1 \notin [0, 1[$.

Si $x \geqslant 1$, alors $x - 1 \geqslant 0$, donc $|x| = x$ et $|x-1| = x - 1$. L'équation $(\mathscr{E})$ s'écrit donc $1 = 5 - 2x$, qui a pour solution $x = 2$, et $2 \geqslant 1$.

On vérifie que 2 est bien solution de $(\mathscr{E})$.

L'équation $(\mathscr{E})$ a donc une seule solution : 2.

Exercice 5.1.5.
Simplifier l'expression $|x+1| - |x-1|$ suivant différents intervalles.

Exercice 5.1.6.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$4x^2 + |5x| = 0.$$

Exercice 5.1.7.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$x^2 - 3x - 15 = |4x - 5|.$$

Exercice 5.1.8.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$\left|x - \frac{5}{4}\right| < \frac{9}{2}.$$

Exercice 5.1.9.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$|x - 2| \geqslant 7.$$

Exercice 5.1.10.
Tracer la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto -1 + |x+1| - 2|x| + |x-1|.$$

Exercice 5.1.11.
Tracer la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto |x-1| - 2\big||x| - 2\big|.$$

5.2 Limites

On énonce ici les résultats pour les limites de suites. Ceux pour les fonctions sont semblables.

Proposition 5.2.1 (Arguments d'encadrement)**.**
Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles.

1. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et, pour tout entier n, $u_n \leqslant v_n$, alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
2. Si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ et, pour tout entier n, $u_n \leqslant v_n$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
3. S'il existe un réel ℓ tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, alors $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Proposition 5.2.2 (Limite monotone)**.**
Soit (u_n) une suite réelle croissante.

1. Si (u_n) est majorée, alors (u_n) converge (vers un réel).
2. Si (u_n) n'est pas majorée, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Proposition 5.2.3.
Soit $q \in \mathbb{R}$. Et (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme non nul.

1. Si $|q| < 1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. Si $q \leqslant -1$, alors (u_n) diverge sans limite.
3. Si $q > 1$, alors, en fonction du signe de u_0, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
4. Si $q = 1$, (u_n) est constante.

Proposition 5.2.4.
Pour étudier la limite d'un quotient de fonctions polynomiales, il suffit de factoriser le numérateur et le dénominateur par le terme de plus haut degré (on dit aussi : dominant).

Exercice 5.2.5.
Déterminer les limites des expressions suivantes lorsque x tend vers $+\infty$.

1. $\dfrac{x^3 - 5x^2 + 1}{-3x^3 + 2}$
2. $\dfrac{5x^4 + 3x + 1}{8x^7 + 3x^2 - 4}$
3. $\dfrac{5x^2 + 3 + \dfrac{1}{2x}}{8x^3 + 3x - \dfrac{2}{x^2}}$

Proposition 5.2.6 (Limites usuelles)**.**
On donne les limites suivantes.

1. $\dfrac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
2. $\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$
3. $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

Exercice 5.2.7.
Déterminer les limites des expressions suivantes lorsque x tend vers $+\infty$.

1. $\dfrac{5x^2 - 2 + \ln^3(x)}{3x^2 + \ln(x)}$
2. $\dfrac{\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{x} - x}{5x^4 + x + 1}$
3. $\dfrac{\mathrm{e}^{x} + x + \mathrm{e}^{-x}}{3x + 2\mathrm{e}^{-x}}$
4. $\dfrac{\mathrm{e}^{2x} + 3x + \ln^4(x)}{(\mathrm{e}^{x})^2 - \ln(x)}$

6 Fractions.

Il convient de s'entraîner régulièrement au calcul fractionnel (à la main). L'idée est toujours de multiplier le numérateur et le dénominateur d'une fraction par un même nombre pour obtenir une fraction simplifiée.

Exemple 6.0.1.
Avec a, b, c, d des réels non nuls tels que les fractions suivantes sont bien définies :

$$\frac{1}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}} = \frac{1}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}} \times \frac{ab}{ab} = \frac{ab}{b + a}$$

et

$$\frac{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d}} = \frac{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d}} \times \frac{abcd}{abcd} = \frac{bcd + acd}{abd + abc}$$

Exercice 6.0.2.
Écrire sous forme fractionnaire les nombres suivants.

1. $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}$.
2. $\dfrac{7}{5} - \dfrac{17}{12} + \dfrac{4}{15}$.

3. À vous de multiplier ce type d'exercice.

Exercice 6.0.3.
Soit a, b et c trois réels non nuls. Simplifier

$$A = \frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2) + \frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2) + \frac{c+a}{ca}(c^2+a^2-b^2).$$

Exercice 6.0.4.
Résoudre l'équation

$$\frac{2x+3}{2x+1} - \frac{2x+5}{2x+7} = 1 - \frac{6x^2+9x-9}{(2x+1)(2x+7)}.$$

Exercice 6.0.5.
Pour quelles valeurs du réel x l'expression suivante est-elle définie ?

$$\frac{-3x^3+10x^2-11x+4}{(5+x)(4-3x)+(3x-4)(x-4)}$$

Simplifier alors cette fraction.

Exercice 6.0.6.
Pour quelles valeurs du réel x l'expression suivante est-elle définie ?

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{2x}{1-x^2}$$

Écrire alors cette somme en une seule fraction simplifiée.

Exercice 6.0.7.
Pour quelles valeurs du réel x l'expression suivante est-elle définie ?

$$\frac{x^2-1}{(x+1)^2}$$

Simplifier alors cette fraction.

Exercice 6.0.8.
Pour quelles valeurs du réel x l'expression suivante est-elle définie ?

$$\frac{\frac{x+1}{x^2-1} + \frac{x-1}{x^2+1}}{\frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x-1}{x^2-1}}$$

Simplifier alors cette fraction.

Exercice 6.0.9.
Pour quelles valeurs du réel x l'expression suivante est-elle définie ?

$$\frac{(2x+3)^2-(x+2)^2}{2x^2+2x+10(x+1)}$$

Simplifier alors cette fraction.

Exercice 6.0.10.
Pour quelles valeurs du réel x l'expression suivante est-elle définie ?

$$\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} - \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$$

Simplifier alors cette fraction.

Exercice 6.0.11.
Soit a et b des réels strictement positifs.

Pour quelles valeurs du réel x l'expression suivante est-elle définie ?

$$\frac{x-a}{ax} + \frac{a-b}{ab} + \frac{b-x}{xb}$$

Simplifier alors cette fraction.

Exercice 6.0.12.
Soit a et b des réels strictement positifs.

Pour quelles valeurs du réel x l'expression suivante est-elle définie ?

$$\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{x}{ab}\right)(x+a+b)}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{ab}-\frac{x^2}{a^2b^2}}$$

Simplifier alors cette fraction.

Exercice 6.0.13.
Pour quelles valeurs du réel x l'expression suivante est-elle définie ?

$$\frac{2x+3}{2(2x-3)} + \frac{12x}{9-4x^2} + \frac{3-2x}{4x+6}$$

Calculer alors cette somme.

Exercice 6.0.14.
Pour quelles valeurs du réel x l'expression suivante est-elle définie ?

$$\frac{2x^2+2x}{x^2+2x+1}+\frac{2x+2}{x^2-1}+\frac{4x^3+4x}{1-x^4}$$

Calculer alors cette somme.