

## Notion d'application - un exercice supplémentaire

### Exercice 1 – Parties saturées pour la relation d'équivalence associée à $f$ –

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application, et  $\mathcal{S} = \{ X \subset E \mid f^{\leftarrow}(f(X)) = X \}$ .

- 1) Pour  $A \subset E$ , montrer que  $f^{\leftarrow}(f(A)) \in \mathcal{S}$ .
- 2) Montrer que  $\mathcal{S}$  est stable par intersection et réunion.
- 3) Soient  $X \in \mathcal{S}$  et  $A \subset E$  tels que  $X \cap A = \emptyset$ . Montrer que  $X \cap f^{\leftarrow}(f(A)) = \emptyset$ .
- 4) Soient  $X$  et  $Y \in \mathcal{S}$ . Montrer que  $\overline{X}$  et  $Y \setminus X$  appartiennent à  $\mathcal{S}$ .
- 5) Montrer que l'application  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{P}(f(E))$  est une bijection.  
$$A \mapsto f(A)$$