Devoir surveillé n°10
Version 1

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Trigonalisation d'un endomorphisme.

Soit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, que l'on identifiera à l'espace des vecteurs colonne $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$, sa base canonique.
On considère l'endomorphisme suivant de E

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & + & 2y & + & 2z \\ & & 2y & + & z \\ -x & + & 2y & + & 2z \end{pmatrix}.$$

On note Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$, et I_3 la matrice unité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1) On appelle M la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme f : $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f)$.

a) Expliciter cette matrice M.

b) Vérifier que M est une matrice de rang trois. Que peut-on en déduire concernant l'endomorphisme f ?

2) On définit le polynôme caractéristique P associé à la matrice M par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \det(x\mathrm{I}_3 - M).$$

a) Calculer ce polynôme P.

b) Prouver alors qu'il existe exactement deux réels λ tels que la matrice $\lambda\mathrm{I}_3 - M$ n'est pas inversible. On notera ces deux valeurs λ_1 et λ_2 avec la condition $\lambda_1 < \lambda_2$.

c) Déterminer les rangs des matrices $\lambda_1\mathrm{I}_3 - M$ et $\lambda_2\mathrm{I}_3 - M$.

d) En déduire que les noyaux $\mathrm{Ker}(\lambda_1\mathrm{Id} - f)$ et $\mathrm{Ker}(\lambda_2\mathrm{Id} - f)$ sont des droites vectorielles de E. Justifier qu'elles sont en somme directe. Sont-elles supplémentaires dans E ?

e) Chercher, si c'est possible, un vecteur de $\mathrm{Ker}(\lambda_1\mathrm{Id} - f)$ sous la forme

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \star \\ \star \end{pmatrix}.$$

f) Chercher, si c'est possible, un vecteur de $\mathrm{Ker}(\lambda_2\mathrm{Id} - f)$ sous la forme

$$b_2 = \begin{pmatrix} \star \\ 1 \\ \star \end{pmatrix}.$$

3) **a)** Montrer qu'il existe une infinité de vecteurs b_3 vérifiant $f(b_3) = b_2 + 2b_3$: donner une description paramétrique de ces vecteurs.

b) Montrer que, parmi ces vecteurs, il y en a un, et un seul, de la forme

$$b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ \star \\ \star \end{pmatrix}.$$

Dorénavant, b_3 désigne ce vecteur particulier.

c) Vérifier que la famille $\mathscr{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de E.

4) On appelle T la matrice de l'endomorphisme f relativement à la base $\mathscr{B}$: $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

a) Montrer que T est une matrice triangulaire supérieure.

b) On note Q la matrice de passage de la base $\mathscr{C}$ vers la base $\mathscr{B}$. Exhiber Q.

c) Q est-elle une matrice inversible ? Le cas échéant, calculer son inverse Q^{-1} (on précisera, sur la copie, la méthode employée et le détail des calculs).

d) Quelle relation y-a-t'il entre les matrices M, T et Q ?

5) **a)** Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ il existe un réel α_n tel que

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix},$$

et exprimer α_n en fonction de n.

b) Donner la relation de récurrence satisfaite par la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$.

6) Déduire, de ce qui précède l'expression de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II. Les restes des restes.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels. Si la série numérique de terme général u_n converge, on dit qu'elle converge à l'ordre 1 et l'on note alors $(R_{1,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Si à nouveau la série de terme général $R_{1,n}$ converge, on dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre 2, et l'on note $(R_{2,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k}.$$

Plus généralement, pour tout entier $p \geqslant 2$, si la série de terme général $R_{p-1,n}$ converge, on dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre p et l'on note alors $(R_{p,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série :

$$R_{p,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p-1,k}.$$

On peut noter : pour tout $n \in \mathbb{N}, R_{0,n} = u_n$.

Le but de cet exercice est d'étudier, sur certains exemples, l'ordre de la convergence de la série de terme général u_n.

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.

a) Rappeler la condition nécessaire est suffisante sous laquelle $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge. On se place désormais sous cette condition.

b) Pour tout entier $k \geqslant 2$, justifier que :

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$

c) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

d) En déduire que :

$$R_{1,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

e) Sous quelle condition nécessaire et suffisante sur α, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge-t-elle à l'ordre 2 ?

2) On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \dfrac{1}{n^n}$.

a) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

b) Montrer que, pour tout $k \geqslant 3, u_k \leqslant \dfrac{1}{3^k}$, puis en déduire que, pour tout $n \geqslant 2$:

$$0 \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{2.3^n}.$$

c) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre 2, et que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant R_{2,n} \leqslant \frac{1}{4.3^n}$$

d) Montrer que, pour tout $p \geqslant 1$, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$$

e) La série $\sum_{n\geqslant 1} R_{n,n}$ converge-t-elle ?

3) On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

a) Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0.$$

b) Soit $N\in\mathbb{N}$. En remarquant que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{k+1}=\displaystyle\int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t$, montrer que :

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

c) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge et que, pour tout $n\geqslant 0$:

$$R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

d) Montrer par récurrence que, pour tout entier $p\geqslant 1$, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n\geqslant 0$:

$$R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p}\,\mathrm{d}t.$$

— **FIN** —