Devoir surveillé n°5
Version n°2

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Étude d'une suite définie par récurrence.

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n^2 + u_n.$$

1) Déterminer la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser, le cas échéant, sa limite.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose,

$$v_n = \frac{1}{2^n}\ln u_n.$$

a) Prouver que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

b) En déduire que pour tous $n, k \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant v_{n+k+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

c) En déduire la convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers un réel, que l'on choisit d'écrire comme un logarithme, *i.e.* $\ln\alpha$ avec $\alpha > 0$.

3) **a)** Déterminer un encadrement de $\ln\alpha - v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \leqslant \alpha^{2^n} \leqslant u_n + 1.$$

c) Comparer α et 1.

d) En déduire la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{\alpha^{2^n}}$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $\delta_n = \alpha^{2^n} - u_n$.

a) Montrer que la suite $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\delta_n = \frac{1}{2} + \frac{\delta_{n+1} + \delta_n^2 - \delta_n}{2} \alpha^{-2^n}.$$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta_n < 1$.

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left\lfloor \alpha^{2^n} \right\rfloor$.

d) Montrer enfin que la suite $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

II. Le théorème de Šarkovskiĭ

Dans tout le problème, I est un segment de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point, et f est une fonction continue de I dans I.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on note la n^{e} itérée de f :

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

On conviendra au besoin que $f^0 = \mathrm{Id}_I$.

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Un point $x \in I$ est dit *n-périodique* si $f^n(x) = x$ et $f^p(x) \neq x$ pour tout entier p tel que $1 \leqslant p < n$; l'entier n s'appelle la période de x. Un point $x \in I$ est *périodique* s'il est n-périodique pour un entier $n \geqslant 1$.

L'objectif de ce problème est de démontrer une version faible du Théorème de Šarkovskiĭ (1964) :

Théorème : *Soient I un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ une fonction continue. S'il existe un point de période 3, alors il existe un point de période n pour tout $n \geqslant 1$.*

1) Montrer que f admet un point fixe dans I.

2) Soit J un segment non vide inclus dans I. Soit K un segment non vide inclus dans $f(J)$. On se propose de montrer qu'il existe un segment L inclus dans J tel que $K = f(L)$.

a) On suppose K réduit à un point. Montrer l'existence de L.

b) On suppose désormais $K = [\alpha, \beta]$, avec $\alpha < \beta$. Montrer l'existence de a, b dans J tels que $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$. Par symétrie, on suppose $a < b$.

Le lecteur consciencieux vérifiera chez lui que le raisonnement est équivalent si $b < a$.

c) Soit $A = \{x \in [a, b] \mid f(x) = \beta\}$. Justifier l'existence de $v = \min A$.

d) Soit $B = \{x \in [a, v] \mid f(x) = \alpha\}$. Justifier l'existence de $u = \max B$. En déduire l'existence de L.

3) Soit K un segment non vide inclus dans I tel que $K \subset f(K)$. Montrer que f admet un point fixe dans K.

Indication : on pourra étudier étudier $g : x \mapsto f(x) - x$ sur K.

Soient I_1, I_2 deux segments inclus dans I. On dit que I_1 f-recouvre I_2 et on note $I_1 \to I_2$ si $f(I_1) \supset I_2$. On note $I_1 \to I_2 \to I_3$ si $f(I_1) \supset I_2$ et $f(I_2) \supset I_3$, et ainsi de suite...

4) On suppose qu'il existe $n+1$ segments non vides $I_0, I_1, \ldots, I_n$ inclus dans I tels que, pour tout $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $I_k \to I_{k+1}$. Montrer qu'il existe une suite $(J_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ de n segments non vides tels que :
— pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $J_k \subset I_k$ et $f(J_k) = J_{k+1}$;
— $f(J_{n-1}) = I_n$.
Si $x_0 \in J_0$, que peut-on dire de $f^k(x_0)$ où $0 \leqslant k \leqslant n-1$?

5) On suppose qu'il existe un point 3-périodique x. On introduit les réels $x_0 = \min\{x, f(x), f^2(x)\}$, $x_1 = f(x_0)$ et $x_2 = f(x_1)$. À l'aide de x_0, x_1, x_2, déterminer deux segments S_1 et S_2 inclus dans I ayant un seul point commun tels que $S_1 \to S_1$ et $S_1 \to S_2 \to S_1$. En déduire qu'il existe un point fixe et un point 2-périodique.

Indication : on pourra distinguer $x_1 < x_2$ et $x_2 < x_1$.

6) On suppose toujours que x est un point 3-périodique. Montrer qu'il existe un point n-périodique pour tout entier $n \geqslant 1$.

Indication : on cherchera une suite de la forme $S_1 \to S_2 \to S_2 \to \cdots \to S_2 \to S_1$.

7) Montrer que l'application $f : [0,1] \to [0,1]$ donnée par $f(x) = 4x(1-x)$ admet des points de période n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Indication : on pourra utiliser les points particuliers $0, 1/2, 3/4, 1$.

Pour conclure, énonçons le théorème de Šarkovskiĭ : l'ordre de Šarkovskiĭ sur $\mathbb{N}^*$ est l'ordre total $\succ$ défini comme suit :

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ 9 \succ \cdots \succ 2 \times 3 \succ 2 \times 5 \succ 2 \times 7 \succ 2 \times 9 \succ \cdots$$

$$\cdots \succ 2^n{\times}3 \succ 2^n{\times}5 \succ \cdots \succ 2^{n+1}{\times}3 \succ 2^{n+1}{\times}5 \succ \cdots \succ 2^n \succ 2^{n-1} \succ \cdots 4 \succ 2 \succ 1.$$

Théorème : *Soit I un segment et $f : I \to I$ une application continue ayant un point n-périodique. Alors il existe un point p-périodique pour tout entier p tel que $n \succ p$.*

8) Écrire un programme `ordre(a,b)` en PYTHON qui prend en argument deux entiers $\texttt{a}, \texttt{b} \in \mathbb{N}^*$ et qui renvoie le booléen `True` si $a \succ b$ et `False` sinon

— FIN —