Devoir surveillé n°6
Version n°2
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice (barème : 12 points).

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infiniment dérivable et non identiquement nulle. On suppose qu'il existe $a < b$ tels que pour tout $x \notin [a, b]$, $f(x) = 0$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_{n,0} < a_{n,1} < \cdots < a_{n,n}$ tels que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $f^{(n)}(a_{n,i-1})f^{(n)}(a_{n,i}) < 0$.

II. Le théorème de Mason.

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul, on note :

- $\rho(P)$ l'ensemble des racines complexes de P, *i.e.* $\rho(P) = \{ z \in \mathbb{C} \mid P(z) = 0 \}$;
- $n_0(P)$ le nombre de racines complexes distinctes de P, *i.e.* $n_0(P) = \operatorname{Card} \rho(P)$;
- $N(P)$ le *radical* de P, *i.e.* $N(P) = \prod_{\alpha \in \rho(P)} (X - \alpha)$. Par convention, si P est constant, $N(P) = 1$.

Partie I - Questions préliminaires.

Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ non nuls.

1) Comparer $n_0(P)$ et $\deg(P)$ et montrer que $n_0(P) = \deg(N(P))$.

2) Montrer que $n_0(PQ) \leqslant n_0(P) + n_0(Q)$.

3) Si P et Q sont premiers entre eux, montrer que $n_0(PQ) = n_0(P) + n_0(Q)$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $n_0(P^n)$, $N(P^n)$ et $\deg(P^n)$ en fonction de $n_0(P)$, $N(P)$, $\deg(P)$ et de n.

Partie II - Théorème de Mason.

On démontre ici un résultat découvert par Stothers en 1981, puis (indépendamment, et plus simplement) par Mason en 1984. Une preuve différente de celle proposée ici en a été donnée par Snyder en 2000. Voici l'énoncé de ce théorème.

Théorème de Mason. Soit $P, Q, R \in \mathbb{C}[X]$ non tous constants et premiers entre eux dans leur ensemble, tels que $P + Q = R$. Alors

$$\max(\deg P; \deg Q; \deg R) \leqslant n_0(PQR) - 1.$$

On définit l'opération de dérivation logarithmique de fractions rationnelles par

$$L : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{C}(X) \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C}(X) \\ f & \longmapsto & \dfrac{f'}{f} \end{array} \right. .$$

Soit donc $P, Q, R \in \mathbb{C}[X]$ trois polynômes non tous constants, premiers entre eux dans leur ensemble et vérifiant

$$P + Q = R.$$

On pose

$$f = \frac{P}{R} \quad \text{et} \quad g = \frac{Q}{R}.$$

On rappelle enfin qu'il existe des entiers naturels p, q, r, des nombres complexes $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, $\beta_1, \ldots, \beta_q, \gamma_1, \ldots, \gamma_r$ distincts deux à deux, des entiers naturels non nuls $\ell_1, \ldots, \ell_p, m_1, \ldots, m_q$, $n_1, \ldots, n_r$ et $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}^*$ tels que

$$\begin{aligned} P &= \lambda \prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)^{\ell_i}, \\ Q &= \mu \prod_{i=1}^{q} (X - \beta_i)^{m_i}, \\ R &= \nu \prod_{i=1}^{r} (X - \gamma_i)^{n_i}. \end{aligned}$$

5) Montrer que P, Q, R sont premiers entre eux deux à deux.

6) Montrer que $L(f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{\ell_i}{X - \alpha_i} - \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{X - \gamma_i}$.

7) Calculer $fL(f) + gL(g)$.
En déduire que

$$\frac{Q}{P} = -\frac{L(f)}{L(g)} = -\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{\ell_i}{X - \alpha_i} - \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{X - \gamma_i}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{q} \frac{m_i}{X - \beta_i} - \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{X - \gamma_i}}.$$

8) Que vaut $N(PQR)$?

9) Montrer que $N(PQR)L(f)$ est un polynôme. Que dire de son degré ?

10) Montrer que Q divise $N(PQR)L(f)$.

11) En déduire une majoration de $\deg(Q)$, puis conclure.

12) Ce résultat est-il toujours vrai si P, Q, R ne sont pas premiers entre eux ?

Partie III - Application : version polynomiale du grand théorème de Fermat.

On cherche à montrer le résultat suivant.

Théorème de Fermat polynomial. Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 3, alors l'équation $P^n + Q^n = R^n$ n'admet aucune solution parmi les triplets de polynômes à coefficients entiers relatifs non constants.

On raisonne par l'absurde : soit $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geqslant 3$, soit $P, Q, R \in \mathbb{Z}[X]$, non constants, vérifiant

$$P^n + Q^n = R^n.$$

On admettra bien entendu le grand théorème de Fermat.

13) Montrer que l'on peut supposer que P, Q, R sont premiers entre eux dans leur ensemble (quitte à se ramener à des polynômes à coefficients rationnels).

Dans la suite de cette partie, on suppose donc que P, Q, R sont premiers entre eux dans leur ensemble, et ne sont pas tous constants.

14) Proposer une majoration de $n \deg(P)$ en fonction de $\deg(P)$, $\deg(Q)$ et $\deg(R)$.

15) Conclure.

Partie IV - Application : théorème de Davenport.

On se propose finalement de montrer le résultat suivant.

Théorème de Davenport. Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ non constants tels que $P^3 - Q^2 \neq 0$. Alors

$$\deg(P^3 - Q^2) \geqslant \frac{1}{2}\deg(P) + 1.$$

Soit donc $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ non constants tels que $P^3 - Q^2 \neq 0$.

16) Démontrer le résultat dans le cas où $\deg(P^3) \neq \deg(Q^2)$.

Dans la suite, on suppose donc que $\deg(P^3) = \deg(Q^2)$.

17) Démontrer le résultat dans le cas où P et Q sont premiers entre eux.

18) Montrer que, si $A, B, F, G \in \mathbb{C}[X]$ ne sont pas constants et si AF et BG sont premiers entre eux, avec $H = AF^3 + BG^2$, alors

$$\deg(F) \leqslant \deg(A) + \deg(B) + 2\deg(H) - 2.$$

19) Conclure.

— FIN —