

XXX Fonctions de deux variables

31 août 2021

On se place dans \mathbb{R}^2 muni de sa norme euclidienne canonique.

1 Fonctions numériques à deux variables

1.1 Petite topologie du plan

Définition 1.1.1 (boules).

Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$.

On appelle *boule ouverte* de centre a et de rayon r l'ensemble

$$B(a, r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|a - x\| < r \right\}.$$

On appelle *boule fermée* de centre a et de rayon r l'ensemble

$$\overline{B}(a, r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|a - x\| \leq r \right\}.$$

On appelle *sphère* de centre a et de rayon r l'ensemble

$$\overline{S}(a, r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|a - x\| = r \right\}.$$

Remarque 1.1.2.

La boule fermée s'obtient en ajoutant à la boule ouverte la sphère qui la délimite.

Définition 1.1.3 (ouverts du plan).

Une partie A du plan est dite *ouverte* si

$$\forall a \in A, \exists r > 0, B(a, r) \subset A.$$

Exemple 1.1.4 (exemples fondamentaux).

Sont des parties ouvertes du plan : le plan, \emptyset , toute boule ouverte, un produit d'intervalles ouverts.

Proposition 1.1.5 (voir figure 1).

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, soit $(x_0, y_0) \in A$. Alors, il existe deux intervalles ouverts I et J tels que

- $x_0 \in I$;
- $y_0 \in J$;
- $I \times J \subset A$.

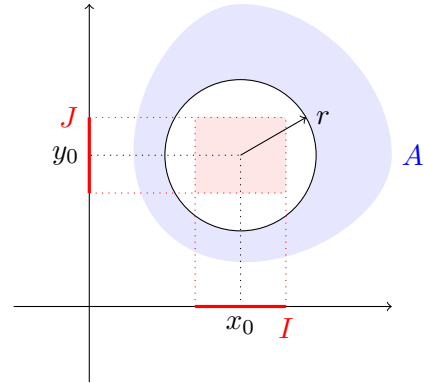


FIGURE 1 – Un ouvert A , contenant un disque, contenant un rectangle.

Démonstration.

Il existe $r > 0$ tel que le $B((x_0, y_0), r) \subset A$. En posant

$$I = \left] x_0 - \frac{r}{\sqrt{2}}; x_0 + \frac{r}{\sqrt{2}} \right[$$

$$J = \left] y_0 - \frac{r}{\sqrt{2}}; y_0 + \frac{r}{\sqrt{2}} \right[$$

on vérifie aisément que $I \times J \subset B((x_0, y_0), r)$, I et J étant bien des intervalles ouverts contenant respectivement x_0 et y_0 . \square

1.2 Représentation d'une fonction de deux variables

Dans cette partie, on considère un ouvert A de \mathbb{R}^2 et une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Rappel 1.2.1.

Le graphe de f est

$$\Gamma = \{ (a, f(a)) \mid a \in A \}.$$

Remarque 1.2.2.

Le graphe de f est formellement une partie de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, que l'on identifie à \mathbb{R}^3 . On considère donc que le graphe de f est

$$\{ (x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in A \}.$$

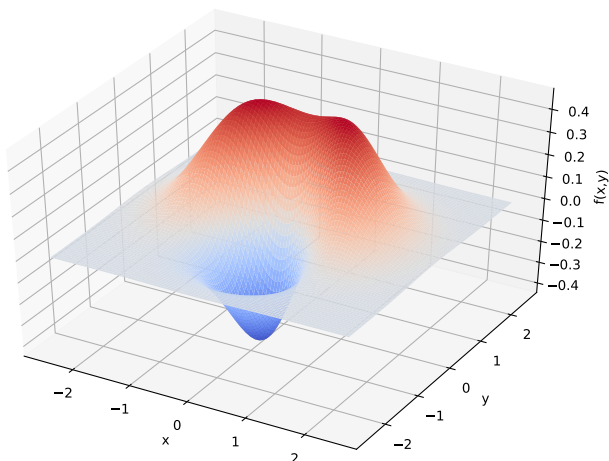


FIGURE 2 – Représentation de $f : (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$.

Ainsi, le graphe de f se représente comme une « nappe » au dessus de la partie A , $f(x, y)$ désignant l'altitude du point d'abscisse x et d'ordonnée y (voir figure 2).

1.3 Continuité

Dans cette partie, on considère un ouvert A de \mathbb{R}^2 et une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 1.3.1.

Soit $a \in A$, la fonction f est continue en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \\ \|x - a\| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

La fonction f est continue sur A si elle est continue en tout point a de A .

Proposition 1.3.2 (opérations).

Soit $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur A .

1. Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + \mu g$ est continue sur A .
2. Les fonctions fg , $|f|$, $\min(f, g)$ et $\max(f, g)$ sont continues sur A .

Démonstration.

C'est la même chose que pour les fonctions réelles. \square

Proposition 1.3.3 (composition à gauche).

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur A , soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Alors, $\varphi \circ f$ est continue sur A .

Démonstration.

C'est la même chose que pour les fonctions réelles. \square

Proposition 1.3.4 (composition à droite).

Soit A, B deux ouverts de \mathbb{R}^2 , Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur A , soit $u, v : B \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $u(B) \times v(B) \subset A$.

Alors, $(x, y) \mapsto f(u(x, y), v(x, y))$ est continue sur B .

Démonstration.

C'est la même chose que pour les fonctions réelles. \square

Lemme 1.3.5 (continuité des projections).

Les fonctions $\pi_1 : (x, y) \mapsto x$ et $\pi_2 : (x, y) \mapsto y$ sont continues sur \mathbb{R}^2 .

Démonstration.

Il suffit de voir que pour tout $a, b \in \mathbb{R}^2$ et pour $i \in \{1, 2\}$,

$$|\pi_i(a) - \pi_i(b)| = |\pi_i(a - b)| \leq \|a - b\|.$$

\square

Définition 1.3.6.

On appelle *fonction polynomiale de deux variables* toute fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ combinaison linéaire des fonctions de la forme

$$(x, y) \mapsto x^p y^q,$$

pour $p, q \in \mathbb{N}$.

Proposition 1.3.7.

Toute fonction polynomiale de deux variables est continue sur \mathbb{R} .

Démonstration.

Il suffit d'utiliser le résultat du lemme 1.3.5, puis la stabilité de l'ensemble des fonctions continues par combinaison linéaire et produit. \square

2 Introduction au calcul différentiel

Dans cette partie on considère U un ouvert de \mathbb{R}^2 , et f une application de U dans \mathbb{R} .

2.1 Dérivées partielles

Définition 2.1.1.

On dit que la fonction f est dérivable en un point (x_0, y_0) par rapport à sa première variable si la fonction partielle $f_1 : x \mapsto f(x, y_0)$ est dérivable en x_0 . On note alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_1(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

La fonction f est dite dérivable par rapport à sa première variable sur U si elle l'est en tout point de U .

De même, On dit que la fonction f est dérivable en un point (x_0, y_0) par rapport à sa deuxième variable si la fonction partielle $f_2 : y \mapsto f(x_0, y)$ est dérivable en y_0 . On note alors

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_2(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

La fonction f est dite dérivable par rapport à sa deuxième variable sur U si elle l'est en tout point de U .

Remarque 2.1.2.

Le lemme 1.1.5 assure la validité de cette définition, vu le caractère ouvert de U .

Remarque 2.1.3.

La notation $\frac{\partial f}{\partial x}$ signifie la dérivation par rapport à la première variable de la fonction f , et est parfois notée $D_1 f$, ou $\partial_1 f$, *idem* pour la dérivation par rapport à la seconde variable.

Si l'on a noté une fonction $f : (u, v) \mapsto [\dots]$, on pourra bien entendu écrire $\frac{\partial f}{\partial u}$ pour signifier la dérivation par rapport à la première variable de f , *idem* pour la dérivation par rapport à la seconde variable.

On évitera absolument de considérer une fonction $f : (y, x) \mapsto [\dots]$.

On pourra aussi utiliser le symbole $\frac{\partial}{\partial \heartsuit}$ pour signifier la dérivation partielle d'une expression par rapport à la variable \heartsuit , toutes les autres variables étant considérées comme fixées.

Exemple 2.1.4.

Avec $f : (x, y) \mapsto x^2 e^{-x+y^2}$, définie sur \mathbb{R}^2 , on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= (2x - x^2) e^{-x+y^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2x^2 y e^{-x+y^2}. \end{aligned}$$



Remarque 2.1.5 (⚠).

Une fonction de deux variables peut être dérivable par rapport à chacune de ses deux variables, sans pour autant être continue.

Par exemple, la fonction définie par

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$$

admet des dérivées partielles en tout point de \mathbb{R}^2 , mais n'est pas continue.

La dérivabilité par rapport à chacune des variables est élémentaire, la non continuité en 0 découle par exemple du fait que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x, x) = \frac{1}{2}.$$

Il suffit ensuite prendre x suffisamment petit pour nier la continuité de f .

2.2 Fonctions de classe \mathcal{C}^1

Définition 2.2.1.

La fonction f est dite de classe \mathcal{C}^1 sur U si f est dérivable par rapport à ses deux variables sur U et si les deux fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur U .

Proposition 2.2.2.

Toute fonction polynomiale de deux variables est de classe \mathcal{C}^1 .

Démonstration.

Une fonction polynomiale de deux variables est dérivable par rapport à chacune de ses variables, et ses dérivées partielles sont polynomiales, donc continues. \square

Définition 2.2.3 (notation o).

Soit $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in U$.

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a s'il existe une fonction $\varepsilon : U \rightarrow \mathbb{R}$ continue en a et vérifiant $\varepsilon(a) = 0$ telle que, pour tout $(x, y) \in U$,

$$f(x, y) = g(x, y)\varepsilon(x, y).$$

On note ceci

$$f(x, y) \underset{(x, y) \rightarrow a}{=} o(g(x, y)).$$

Théorème 2.2.4 (DL à l'ordre 1).

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur U , soit $(x_0, y_0) \in U$. Alors

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &\underset{(h, k) \rightarrow (0, 0)}{=} f(x_0, y_0) \\ &+ h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(\|(h, k)\|). \end{aligned}$$

Démonstration (hors-programme).

Pour alléger les notations, on note $a = (x_0, y_0)$.

On définit $\varepsilon : U \rightarrow \mathbb{R}$ par $\varepsilon(0, 0) = 0$ et si $(h, k) \neq (0, 0)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(h, k) &= \frac{1}{\|(h, k)\|} \left(f(a + (h, k)) - f(a) - \right. \\ &\quad \left. h \frac{\partial f}{\partial x}(a) - k \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right) \end{aligned}$$

On montre que la fonction ε est continue en $(0, 0)$. Considérons $\eta > 0$.

Soit I et J deux intervalles ouverts vérifiant $I \times J \subset U$, $x_0 \in I$ et $y_0 \in J$. Il existe notamment $\alpha_0 > 0$ tel que, pour tout $u \in U$, si $\|a - u\| \leq \alpha$, alors $u \in I \times J$.

Pour $u = (h, k)$ suffisamment petit, on a

$$\begin{aligned} \Delta &= \left| f(a + u) - f(a) - h \frac{\partial f}{\partial x}(a) - k \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right| \\ &= \left| f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - h \frac{\partial f}{\partial x}(a) \right. \\ &\quad \left. + f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - k \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right| \\ &\leq \underbrace{\left| f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - h \frac{\partial f}{\partial x}(a) \right|}_{\Delta_1} \\ &\quad + \underbrace{\left| f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - k \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right|}_{\Delta_2} \end{aligned}$$

Comme $f(\cdot, y_0 + k)$ est dérivable sur I , par le théorème des accroissements finis, il existe t_1 entre x_0 et $x_0 + h$ vérifiant

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) = h \frac{\partial f}{\partial x}(t_1, y_0 + k).$$

On a donc

$$\Delta_1 = |h| \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t_1, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right|.$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $a = (x_0, y_0)$, il existe $\alpha_1 > 0$ tel que pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, si $\|(h, k)\| \leq \alpha_1$, alors

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t_1, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right| \leq \eta,$$

ce qui donne $|\Delta_1| \leq \eta \|(h, k)\|$.

On procède de même pour Δ_2 , et il existe donc $\alpha_2 > 0$ tel que pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, si $\|(h, k)\| \leq \alpha_2$, alors $|\Delta_2| \leq \eta \|(h, k)\|$.

Ainsi, pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, si $\|(h, k)\| \leq \min(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, alors $|\varepsilon(h, k)| \leq 2\eta$, ce qui est bien le résultat demandé. \square

Remarque 2.2.5 (plan tangent).

Sous les mêmes hypothèses,

$$z - f(x_0, y_0) = (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

est l'équation d'un plan, appelé *plan tangent* au graphe de f en (x_0, y_0) .

Corollaire 2.2.6.

Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 , alors f est continue.

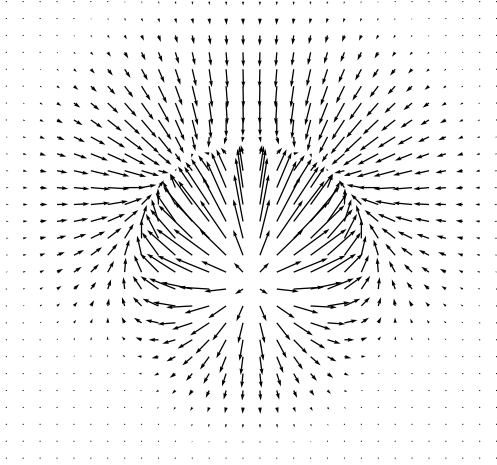


FIGURE 3 – Champ de vecteurs de ∇f , pour $f : (x, y) \mapsto (x^2 + y)e^{-(x^2 + y^2)}$.

Définition 2.2.7 (gradient).

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur U , soit $(x_0, y_0) \in U$. On définit le *gradient* de f en (x_0, y_0) comme le vecteur

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Remarque 2.2.8.

Le théorème 2.2.4 s'écrit alors ainsi, avec $a = (x_0, y_0)$:

$$f(a + u) \underset{u \rightarrow (0,0)}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), u \rangle + o(\|u\|).$$

Exemple 2.2.9.

Le champ de vecteur de l'exemple du début du chapitre est tracé dans la figure 3.

2.3 Dérivées directionnelles

Définition 2.3.1 (dérivée selon un vecteur).

Soit $a \in U$, soit $v \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$, soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. La fonction f est dite *dérivable selon le vecteur v en a* si la fonction $t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0.

La dérivée de cette fonction en 0 est alors appelée *dérivée de f selon v en a* , et est notée $D_v f(a)$:

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

Remarque 2.3.2.

En notant (e_1, e_2) la base canonique de \mathbb{R}^2 , on a sous réserve d'existence :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a) &= D_{e_1} f(a), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) &= D_{e_2} f(a). \end{aligned}$$

Remarque 2.3.3.

Si $\|v\| = 1$, $D_v f(a)$ est la pente de la droite tangente au graphe de f en a et dirigée par v .

Théorème 2.3.4.

Si f est de classe \mathcal{C}^1 en $a \in U$, alors f admet des dérivées selon tous les vecteurs en a , et pour tout $v \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$:

$$D_v f(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle.$$

Remarque 2.3.5.

On a donc pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ non nuls :

$$D_{(h,k)} f(a) = h \frac{\partial f}{\partial x}(a) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

Démonstration.

Notons $v = (h, k)$ et $a = (x_0, y_0)$, soit $t \neq 0$. Par le théorème de développement limité à l'ordre 1 de f , qui est de classe \mathcal{C}^1 ,

$$f(a + tv) = f(a) + th \frac{\partial f}{\partial x}(a) + tk \frac{\partial f}{\partial y}(a) + o(\|tv\|)$$

Il existe donc une fonction ε continue en $(0, 0)$ et vérifiant $\varepsilon(0, 0) = 0$ telle que, pour tous tels a, v, t ,

$$f(a + tv) = f(a) + th \frac{\partial f}{\partial x}(a) + tk \frac{\partial f}{\partial y}(a) + |t| \|v\| \varepsilon(|t| \|v\|),$$

ce que l'on écrit

$$f(a + tv) = f(a) + th \frac{\partial f}{\partial x}(a) + tk \frac{\partial f}{\partial y}(a) + o(t).$$

Ainsi, $t \mapsto f(a + tv)$ admet un DL à l'ordre 1 en 0, donc est dérivable en 0, et immédiatement

$$D_v f(a) = h \frac{\partial f}{\partial x}(a) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

□

Remarque 2.3.6.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\nabla f(a)$ est la direction selon laquelle croît/décroît le plus vite, c'est-à-dire la direction de pente la plus forte.

2.4 Composition, règle de la chaîne

Théorème 2.4.1 (règle de la chaîne).

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telles que $x(I) \times y(I) \subset U$.

Alors, $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f(x(t), y(t))) &= x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \\ &\quad + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Démonstration.

Soit $t_0 \in I$. Notons $a = (x(t_0), y(t_0))$. Pour $t \in I$, on note aussi $\varphi(t) = (x(t), y(t))$.

Comme f est de classe \mathcal{C}^1 , on peut appliquer le théorème de développement limité à l'ordre 1. Il existe donc une fonction ε continue en 0, vérifiant $\varepsilon(0, 0) = 0$ et telle que pour tout $u = (h, k)$ tel que $a + u \in U$:

$$f(a + u) = f(a) + h \frac{\partial f}{\partial x}(a) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a) + \|u\| \varepsilon(\|u\|).$$

On a donc pour $t \in I$:

$$\begin{aligned} f(\varphi(t)) &= f(a) + (x(t) - x(t_0)) \frac{\partial f}{\partial x}(a) \\ &\quad + (y(t) - y(t_0)) \frac{\partial f}{\partial y}(a) + \|\varphi(t) - a\| \varepsilon(\|\varphi(t) - a\|). \end{aligned}$$

Comme x et y sont dérivables, on peut écrire des développements limités à l'ordre 1. Il existe donc deux fonctions ε_1 et ε_2 de limite nulle en 0 telles que, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} x(t) - x(t_0) &= (t - t_0)x'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon_1(t), \\ y(t) - y(t_0) &= (t - t_0)y'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon_2(t). \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} f(\varphi(t)) &= f(a) + (t - t_0) \left(x'(t_0) \frac{\partial f}{\partial x}(a) + y'(t_0) \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right) \\ &\quad + R(t), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} R(t) &= (t - t_0) \left(\varepsilon_1(t) \frac{\partial f}{\partial x}(a) + \varepsilon_2(t) \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right) \\ &\quad + \|\varphi(t) - a\| \varepsilon(\|\varphi(t) - a\|). \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que $R(t) = o(t - t_0)$. Comme f est de classe \mathcal{C}^1 , $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont bornées au voisinage de 1, et comme ε_1 et ε_2 tendent vers 0, on peut écrire que

$$\varepsilon_1(t) \frac{\partial f}{\partial x}(a) + \varepsilon_2(t) \frac{\partial f}{\partial y}(a) = o(1).$$

De plus, comme φ est dérivable, en généralisant les notations de Landau,

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) - a\| &= |t - t_0| \left\| \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} \right\| \\ &= |t - t_0| \times O(1) \\ &= O(t - t_0) \end{aligned}$$

Par composition, on a $\varepsilon(\|\varphi(t) - a\|) = o(1)$, ce qui permet de conclure. □

Remarque 2.4.2.

Sous les mêmes hypothèses, notons $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$. Cette fonction γ est appelée *arc de classe \mathcal{C}^1* . La règle de la chaîne donne la dérivée de f suivant l'arc γ , et peut s'écrire comme suit :

$$(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle.$$

Définition 2.4.3.

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Si $z \in \mathbb{R}$, on appelle *ligne de niveau de f d'altitude z* la partie

$$\{a \in \mathbb{R}^2 \mid f(a) = z\}.$$

Exemple 2.4.4.

On a tracé dans la figure 4 les lignes de niveau correspondant à la fonction tracée dans la figure 2.

Exemple 2.4.5.

Vous trouverez dans la figure 5 un exemple de carte IGN, faisant figurer les lignes de niveau du terrain. Avec un peu d'habitude, on arrive très bien à se représenter le terrain !

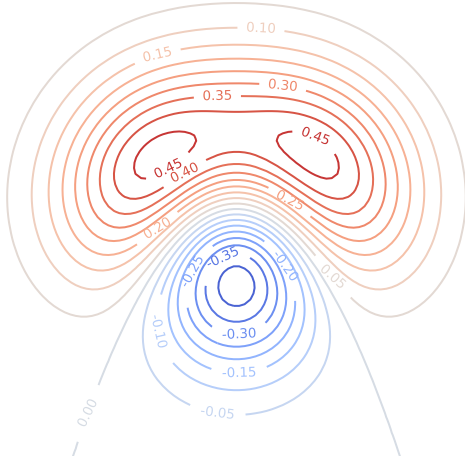


FIGURE 4 – Lignes de niveau de $f : (x, y) \mapsto (x^2 + y)e^{-(x^2 + y^2)}$.

Remarque 2.4.6.

La ligne de niveau d'altitude z est donc $f^{-1}(\{z\})$.

Proposition 2.4.7.

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, soit $\gamma : I \rightarrow U$ un arc de classe \mathcal{C}^1 tel que $\gamma(I)$ est inclu dans une ligne de niveau de f .

Alors, pour tout $t \in I$, $\nabla f(\gamma(t))$ est orthogonal à $\gamma'(t)$.

Démonstration.

Immédiat, étant donné que pour tout $t \in I$: $(f \circ \gamma)'(t) = 0$. \square

Remarque 2.4.8.

La propriété précédente est souvent résumée sous la locution « le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau de f ». En effet, $\gamma'(t)$ dirige la droite tangente à l'arc γ au point $\gamma(t)$ (voir figure 6).

Le théorème des fonctions implicites (hors programme) permet de montrer que, sous certaines hypothèses, les lignes de niveau d'une fonction forment des arcs de classe \mathcal{C}^1 .

Théorème 2.4.9.

Soit U, V deux ouverts de \mathbb{R}^2 , soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de

classe \mathcal{C}^1 , soit $\varphi, \psi : V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telles que $\varphi(V) \times \psi(V) \subset U$.

Soit

$$g : \begin{cases} V & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) & \longmapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \end{cases}.$$

Alors, g est de classe \mathcal{C}^1 sur V et pour tout $(u, v) \in V$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \end{aligned}$$

Remarque 2.4.10 (à la physicienne).

Les formules précédentes sont quelque peu difficiles à retenir. En notant x la fonction φ et y la fonction ψ , en notant $t = (u, v)$ et $a(t) = (x(t), y(t))$, on a alors

$$\frac{\partial (f \circ a)}{\partial u}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(a(t)) \frac{\partial x}{\partial u}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(a(t)) \frac{\partial y}{\partial u}(t),$$

ce que l'on peut (abusivement) écrire

$$\frac{\partial (f \circ a)}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}.$$

2.5 Recherche d'extrema

Définition 2.5.1 (extremum global).

Soit $a \in U$.

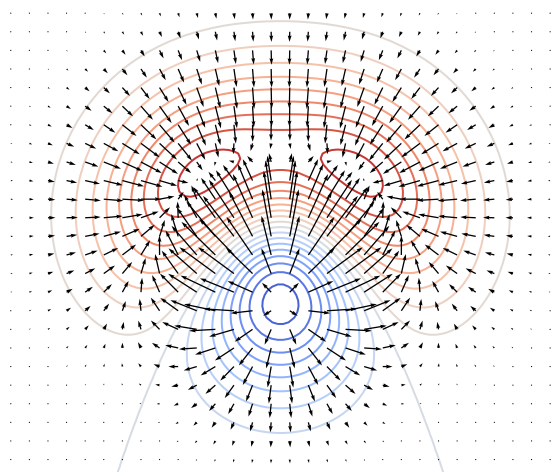
1. On dit que a est le lieu d'un *maximum global* de f si $\forall u \in U, f(u) \leq f(a)$.
2. On dit que a est le lieu d'un *minimum global* de f si $\forall u \in U, f(u) \geq f(a)$.
3. On dit que a est le lieu d'un *extremum global* de f si c'est le lieu d'un minimum ou d'un maximum global de f .



FIGURE 5 – Exemple de carte IGN (source : géoportail).

Remarque 2.5.2.

On dit aussi que f admet un maximum global en a (*idem* pour minimum et extremum).

FIGURE 6 – Champ de vecteurs de ∇f , et lignes de niveau de f .**Définition 2.5.3** (extremum local).

Soit $a \in U$.

1. On dit que a est le lieu d'un *maximum local* de f s'il existe $r > 0$ tel que

$$\forall u \in U, \|a - u\| \leq r \rightarrow f(u) \leq f(a).$$

2. On dit que a est le lieu d'un *minimum local* de f s'il existe $r > 0$ tel que

$$\forall u \in U, \|a - u\| \leq r \rightarrow f(u) \geq f(a).$$

3. On dit que a est le lieu d'un *extremum local* de f si c'est le lieu d'un minimum ou d'un maximum local de f .

Remarque 2.5.4.

On dit aussi que f admet un maximum local en a (*idem* pour minimum et extremum).

Remarque 2.5.5.

Tout extremum global est aussi un extremum local, la réciproque étant bien évidemment fausse.

Définition 2.5.6 (point critique).

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, un *point critique* de f est un point $a \in U$ vérifiant

$$\nabla f(a) = (0, 0).$$

Théorème 2.5.7 (condition du premier ordre).

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , soit $a \in U$.

Si f admet un extremum local en a , alors a est un point critique de f .

Démonstration.

Notons $a = (x_0, y_0)$. Les deux fonctions partielles de f en a admettent chacune un extremum local en x_0/y_0 , intérieur à leur ensemble de définition. Elles y admettent donc chacune un point critique, donc les dérivées partielles de f sont nulles en a , d'où le résultat. \square

Remarque 2.5.8.

Il est ici primordial que U soit un ouvert.

Ce théorème ne donne qu'une condition *nécessaire* pour qu'un point soit un extremum local (et *a fortiori* global) d'une fonction.