# Feuille d'exercice n° 04 : **Nombres complexes**

**Exercice 1** Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

**1)** $\dfrac{1+2i}{3-4i}$

**2)** $\dfrac{1}{(1+2i)^2}$

**3)** $\dfrac{(1+i)^3}{(1-i)^2}$

**4)** $\dfrac{1+i}{3-i}+\dfrac{1-i}{3+i}$

**5)** $\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{i}}$

**6)** $(1+(1+(1+2i)^2)^{-1})$

**Exercice 2** Montrer que pour tout $(a,b,c,d)\in\mathbb{Z}^4$, il existe $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ tel que

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=m^2+n^2.$$

**Exercice 3** Soit $\theta\in\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, $z=\dfrac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta}$. Calculer $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$.

**Exercice 4** Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

**1)** $\left(\sqrt{3}-i\right)^{11}$

**2)** $(-1+i)^{17}$

**3)** $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{-42}$

**Exercice 5** Résoudre pour $z\in\mathbb{C}$, $2\arg(z+i)=\arg(z)+\arg(i)\ [2\pi]$.

**Exercice 6** Soient $z_1$ et $z_2$ deux complexes de module 1, tels que $1+z_1z_2\neq 0$. Montrer que

$$\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\in\mathbb{R}.$$

**Exercice 7** Soit $a\in[0;2\pi[$ et $n$ un entier naturel. Déterminer le module et l'argument de : $(1+i\mathrm{e}^{ia})^n$.

**Exercice 8** Soit $\omega=\exp\left(\dfrac{2i\pi}{7}\right)$. Calculer $A=\omega+\omega^2+\omega^4$ et $B=\omega^3+\omega^5+\omega^6$.
(*Indication* : on pourra d'abord calculer $AB$ et $A+B$.)

**Exercice 9** Déterminer les racines $4^{\text{es}}$ dans $\mathbb{C}$ de $-119+120i$

**Exercice 10** Soit $(n,z)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{C}$ tel que $z^n=(z+1)^n=1$. Montrer que $n$ est multiple de 6 et que $z^3=1$.

**Exercice 11** Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $x$ : $(1+x)^{2n}=(1-x)^{2n}$. Calculer alors le produit des solutions de cette équation.

**Exercice 12** Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2.

**1)** Écrire $-i$ et $1+i$ sous forme trigonométrique.

**2)** Calculer les racines $n^{\text{es}}$ de $-i$ et de $1+i$.

**3)** Résoudre $z^2-z+1-i=0$.

**4)** En déduire les racines de $z^{2n}-z^n+1-i=0$.

**Exercice 13 ()** Soit $n$ un entier naturel non nul, notons $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n.$$

**Exercice 14** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\overline{z} = z^3$.

**Exercice 15** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z$ : $z^4 + 2\lambda^2 z^2(1+\cos\theta)\cos\theta + \lambda^4(1+\cos\theta)^2 = 0$ $(\lambda \in \mathbb{C}, \theta \in [0,\pi])$. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum\limits_{k=1}^{4} z_k^n$ où les $z_k$ sont les racines de cette équation.

**Exercice 16**

**1)** Calculer les racines carrées de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.

**2)** Calculer les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

**Exercice 17**

**1)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.

**2)** En déduire que $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$ est racine du polynôme $16X^4 - 20X^2 + 5$.

**3)** En déduire la valeur de $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$.

**4)** Montrer que $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

**Exercice 18 ()** Calculer $\cos 5\theta$, $\cos 8\theta$, $\sin 6\theta$, $\sin 9\theta$, en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

**Exercice 19 ()** Linéariser les quantités suivantes.

**1)** $\cos^2(x)\sin^3(x)$.

**2)** $\cos^6(x) + \sin^6(x)$.

**Exercice 20 ()** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a$, $b \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}\cos(a+kb)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}\sin(a+kb)$.

**Exercice 21** Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z$ vérifiant chacune des équations suivantes.

**1)** $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 1$

**2)** $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

**Exercice 22** Quel est l'ensemble des nombres complexes $z$ tels que $\dfrac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pur ?

**Exercice 23** Déterminer les points d'affixe $z \in \mathbb{C}$ vérifiant chaque situation.

**1)** 1, $z$ et $z^2$ soient les affixes de trois points alignés.

**2)** $z$ et $\dfrac{1}{z}$ soient les affixes de deux vecteurs orthogonaux.

**3)** 1, $z$ et $z+i$ soient les affixes des sommets d'un triangle dont le centre du cercle circonscrit est l'origine $O$ du repère.

**4)** $z$, $\dfrac{1}{z}$ et $z-1$ soient les affixes de trois points situés sur un même cercle de centre $O$.

**Exercice 24** Soient $A$, $B$ et $C$ trois points, distincts deux à deux, d'affixes respectifs $a$, $b$ et $c$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

**1)** $ABC$ est un triangle équilatéral.

**2)** $j$ ou $j^2$ est racine du polynôme $aX^2 + bX + c$.

**3)** $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

**4)** $(b-a)^2 + (c-b)^2 + (a-c)^2 = 0$.

**Exercice 25** Soit $A$, $B$, $A'$ et $B'$ quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Montrer qu'il existe une et une seule similitude directe qui transforme $A$ en $A'$ et $B$ en $B'$.

**Exercice 26** (✎)

**1)** Caractériser géométriquement l'application $\begin{cases} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & (2+2i)z - (7+4i) \end{cases}$

**2)** Soient $r$ la rotation de centre le point d'affixe 1 et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$, et $s$ la symétrie centrale de centre le point d'affixe $i+3$. Caractériser géométriquement l'application $s \circ r$.

**3)** Soit $r$ la rotation de centre le point d'affixe $1+i$ et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{4}$. Déterminer l'expression complexe de $r$.