Feuille d'exercice n° 22 : **EV de dimension finie - correction**

Exercice 1

1) On a une famille de $5 > \dim(\mathbb{R}^4)$ vecteurs de $\mathbb{R}^4$, donc $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ est liée.

v_1 et v_2 sont deux vecteurs non colinéaires, donc (v_1, v_2) est libre.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, en considérant le système $av_1 + bv_2 = v_3$, en considérant la première ligne on obtient $a = 1$, et avec la deuxième ligne $b = -1$. Les autres lignes sont incompatibles. Ainsi, la famille (v_1, v_2, v_3) est libre.

De même, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, on voit que le système $av_1 + bv_2 + cv_3 = v_4$ n'a pas de solution. Ainsi, la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est libre.

C'est une famille libre de $4 = \dim(\mathbb{R}^4)$ vecteurs de $\mathbb{R}^4$, (v_1, v_2, v_3, v_4) est donc une base de $\mathbb{R}^4$.

Notamment, comme sur-famille d'une famille génératrice, $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ engendre $\mathbb{R}^5$.

2) On a une famille de $3 < \dim(\mathbb{R}^4)$ vecteurs de $\mathbb{R}^4$, donc (v_1, v_2, v_3) n'est pas génératrice.

v_1 et v_2 sont deux vecteurs non colinéaires, donc (v_1, v_2) est libre.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, en considérant le système $av_1 + bv_2 = v_3$, en considérant la première ligne on obtient $a = 3$, et avec la deuxième ligne $b = -2$. Les autres lignes sont incompatibles. Ainsi, la famille (v_1, v_2, v_3) est libre.

On observe (après résolution de système) que $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ n'est pas combinaison linéaire de (v_1, v_2, v_3), donc (v_1, v_2, v_3, e_1) est une famille libre $4 = \dim(\mathbb{R}^4)$ vecteurs de $\mathbb{R}^4$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$.

3) On a une famille de $4 = \dim(\mathbb{R}^4)$ vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

v_1 et v_2 sont deux vecteurs non colinéaires, donc (v_1, v_2) est libre.

Comme dans l'exercice précédent, on observe que $v_4 = 3v_1 - 2v_1$. De même, $v_3 = 2v_1 - 3v_2$. Ainsi, (v_1, v_2, v_3, v_4) est liée. D'après la première remarque, ce n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$.

Avec $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ et $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, on observe que e_1 n'est pas combinaison linéaire de (v_1, v_2) et que e_2 n'est pas combinaison linéaire de (v_1, v_2, e_1). Ainsi, (v_1, v_2, e_1, e_2) est une famille libre, elle comporte $4 = \dim(\mathbb{R}^4)$ vecteurs de $\mathbb{R}^4$, donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2

1) Comme $P \mapsto P(0)$ et $P \mapsto P'$ sont linéaires, φ est linéaire. De plus, on sait que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ et tout $a \in \mathbb{K}$, il existe un unique $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(0) = a$ et $Q' = P$ (pour le redémontrer, écrivez P puis Q sous forme développée-réduite). Ainsi, φ est bijective, donc est bien un isomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

2) Supposons que $\mathbb{K}[X]$ soit de dimension finie, notée d. Alors $\mathbb{K}[X]$ serait isomorphe à $\mathbb{K} \times \mathbb{K}[X]$, qui est de dimension $d + 1$. On aurait $d = d + 1$, ce qui est impossible.

Exercice 3

1) Soit $x, y, z, a, b \in \mathbb{R}$. On écrit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 3a + 2b \\ y & = & a + b \\ z & = & 2a + 3b \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x - 3y & = & -b \\ y & = & a + b \\ -2y + z & = & b \end{array} \right. \quad L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2,\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x - 3y & = & -b \\ y & = & a + b \\ x - 5y + z & = & 0 \end{array} \right. \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

Ce système (en a, b) admet une solution si et seulement si la dernière ligne est vérifiée.
Une équation cartésienne de F est donc $x - 5y + z = 0$.

2) Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$. On observe que $(x, y, z) \in G$ si et seulement si (x, y, z) est colinéaire à $(1, 2, 3)$, donc si et seulement si $y = 2x$ et $z = 3x$.
Une représentation cartésienne de G est donc le système $2x - y = 0, 3x - z = 0$.

3) Soit $x, y, z, t, a, b, c \in \mathbb{R}$. On écrit comme dans la première question le système (en a, b, c) :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce système (en a, b, c) admet une solution si et seulement si la dernière ligne est vérifiée.
Une équation cartésienne de H est donc $t = 0$.

Exercice 4

1) On a une famille de $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ vecteurs dans $\mathbb{R}_n[X]$. Il suffit donc de montrer que cette famille est libre. s
Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0$. Supposons que les λ_k ne sont pas tous nuls, on peut donc considérer le plus grand entier m tel que $\lambda_m \neq 0$. On aurait alors $P_m = -\frac{1}{\lambda_m} \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k P_k \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$.
Ceci contredit le fait que $\deg(P_m) = m$.
Ainsi, $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

2) On montre que cette famille est libre et engendre $\mathbb{R}[X]$.
Soit $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de scalaires à support fini telle que $\sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i P_i = 0$. Comme cette suite est à support fini, elle est nulle à partir d'un rang $n \in \mathbb{N}$. On peut donc écrire $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = 0$. Par la question précédente, si $0 \leqslant i \leqslant n$, $\lambda_i = 0$. Ainsi, $\forall i \in \mathbb{N}$, $\lambda_i = 0$, donc $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est libre.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, notons $n = \max(0, \deg(P))$. On a alors par la question précédente $P \in \mathbb{R}[X] = \mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_n) \subset \mathrm{Vect}(P_i, i \in \mathbb{N})$. Ainsi, $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ engendre $\mathbb{R}[X]$.
Ainsi, $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.