Feuille d'exercice n° 02 : **Sommes et calculs**

Exercice 1 Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$. Quelles sont les expressions toujours égales entre elles ?

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k} b_{n+1-k}, \quad \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2 - \sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2\right)$

2) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right), \quad \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{p=1}^{n} b_p\right), \quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}(a_k b_p), \quad \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \sum_{p=1}^{n} b_p\right), \quad \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$

Exercice 2 ( ) Montrer que pour toute famille $(z_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{C}^n$, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} z_k^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} z_i z_j.$$

Quel résultat bien connu cette formule généralise-t-elle ?

Exercice 3 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = (n+1)! - 1$.

Exercice 4 ( ) Donner une expression simplifiée des quantités suivantes.

1) $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} i.j$ **2)** $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} i+j$ **3)** $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} i-j$ **4)** $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i,j)$

Même question en remplaçant $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n}$ par $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n}$ puis par $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n}$.

Exercice 5 En considérant $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$, calculer les sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2k+1}$, où $\lfloor\cdot\rfloor$ est la fonction « partie entière ».

Remarque : ces sommes sont souvent notées $\displaystyle\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}$ et $\displaystyle\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}$.

Exercice 6 ( )

1) Soit $k \in \mathbb{N}$. Écrire $(1+k)^4 - k^4$ sous la forme d'un polynôme de degré 3 en k.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. En s'inspirant de la démonstration du cours donnant la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$, calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$ (on donnera cette valeur sous la forme la plus factorisée possible).

Exercice 7 () Écrire avec des factorielles les quantités suivantes.

1) $\displaystyle\prod_{k=n}^{m} k$ pour $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ t.q. $n \leqslant m$.

2) $\displaystyle\prod_{k=1}^{p} n-p+k$ pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ t.q. $p \leq n$.

3) $\displaystyle\prod_{k=1}^{p} \frac{n-p+k}{k}$ pour $n \geq 2$ et $1 \leq p \leq n-1$.

4) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8 ()

1) Soit z un nombre complexe différent de 1, calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} z^k$.

2) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k i^{k-1} = \frac{i - n i^n - (n+1) i^{(n+1)}}{2}$

3) En déduire les valeurs des deux sommes $S_1 = 1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + (-1)^p (2p+1)$ et $S_2 = 2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + (-1)^{(p+1)} 2p$.

Exercice 9 Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la fonction $x \mapsto (1+x)^n$, calculer les quantités suivantes.

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$

3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$

Exercice 10 () Effectuer les produit de matrices suivants.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$

Exercice 11 Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Calculer $A^n(\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 12 () Soit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{C}$. On considère la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer M^2, M^3, M^4 et M^5.

2) Pouvez-vous calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$? Et pour tout $n \in \mathbb{Z}$?

Exercice 13 () Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, que l'on écrit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $A^2 - (a_{1,1} + a_{2,2})A + (a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1})I = 0$.

2) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible.

Exercice 14 (🚲) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$, où I_3 est la matrice identité 3×3. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 15 Soit $a, b \in \mathbb{C}$.

1) Trouver les matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2) De même avec $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Exercice 16 (🚲) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$.

1) Calculer B^2, B^3 en déduire la valeur de B^n pour tout entier naturel n.

2) Développer $(B + I_3)^n$ par la formule du binôme et simplifier.

3) En déduire A^n pour tout entier naturel n.

4) La relation précédente est-elle aussi valable pour les entiers n négatifs ?

Exercice 17 (✎) Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Résoudre les systèmes suivants.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ x & + & 4y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & b \\ x & + & 2y & + & z & = & c \end{array}\right.$$

Exercice 18 (✎) Mettre sous forme matricielle et résoudre les systèmes suivants.

1) $\left\{\begin{array}{rcrcr} \sqrt{3}x & + & y & = & 2x \\ x & - & \sqrt{3}y & = & 2y \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 3 \\ 3x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & -2 \\ x & + & 2y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & - & y & + & 2z & - & 3t & = & 2 \\ 2x & & & + & 4z & + & 4t & = & 3 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & + & 8t & = & 2 \\ 5x & + & 3y & + & 9z & + & 19t & = & 6 \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 2 \\ 3x & - & y & - & 3z & + & 2t & = & 5 \\ & & 5y & + & 9z & - & t & = & -6 \end{array}\right.$

5) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & t & = & 5 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & + & 5t & = & 8 \\ 3x & + & y & - & z & + & t & = & 7 \end{array}\right.$

6) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$

Exercice 19 Soit a un nombre réel. On étudie le système linéaire suivant.

$$\mathcal{S}_a : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 3y & - & 2z & = & 5 \\ 2x & - & y & + & az & = & 1 \end{array} \right.$$

1) En fonction des valeurs du paramètre a, déterminer si le système $\mathcal{S}_a$ peut :

- **a)** n'admettre aucune solution ;
- **b)** admettre exactement une solution ;
- **c)** admettre une infinité de solutions.

2) Résoudre le système $\mathcal{S}_a$ lorsque celui-ci admet une (des) solution(s).

Exercice 20 Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels λ, a, b, c, d le système suivant.

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} (1+\lambda)x & + & y & + & z & + & t & = & a \\ x & + & (1+\lambda)y & + & z & + & t & = & b \\ x & + & y & + & (1+\lambda)z & + & t & = & c \\ x & + & y & + & z & + & (1+\lambda)t & = & d \end{array} \right.$$