

c) Formule de Bayes:

Prop. 1.3.15: $P(A) > 0$, $P(B) > 0$.

$$P(B|A) \times P(A) = P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)}$$

Prop. 1.3.17: $(A_1, \dots, A_n) \perp \text{syst-}\text{cplét d'ev.}$
et $B \text{ ev.}$ h. $P(B) > 0$.

also: $\forall j \in \{1, n\}$:

$$P(A_j | B) = \frac{P(B | A_j) \times P(A_j)}{P(B)}$$

$$P(A_0 | B) = \frac{P(B | A_j) \times P(A_j)}{\sum_{k=1}^n P(B | A_k) \times P(A_k)}$$

Ex. 1.3.14: M : la personne est malade

S : la personne est saine: $S = \bar{M}$

pos: le test est positif

nég: le test est négatif: $\text{nég} = \overline{\text{pos}}$

$$p_1 = P(\text{pos} | M)$$

$$p_2 = P(\text{nég} | S)$$

N = pop. française

m = nb. de malades.

Q: calculer $P(M | \text{pos})$.

Bayes: $P(n|pos) = \frac{P(pos|M) \times P(M)}{P(pos)}$

μ_1 $\frac{m}{N}$

??

(M, S) est 1 syst. complet.

$$P(pos) = P(pos|M) \times P(M) + P(pos|S) \times P(S) = (1 - P(M))$$

et: $P(pos|S) = 1 - P(neg|S)$

$$P_S(pos) = 1 - P_S(neg)$$

$$= 1 - \mu_2.$$

$$P(M|pos) = \frac{P(pos|M) \times P(M)}{P(pos|M) \times P(M) + P(pos|S) \times P(S)}$$

$$= \frac{p_1 \times \frac{m}{N}}$$

$$p_1 \times \frac{m}{N} + (1 - p_2) \times (1 - \frac{m}{N})$$

$$= \frac{p_1 \times m}{p_1 \times m + (1 - p_2)(N - m)}$$

$$= \frac{0,99}{0,99 + 0,02 \times (6 \cdot 10^4 - 1)} \approx 0,0008$$

Ex. 1.3.19: μ : il vient à pied

C : à cheval

V : en voiture

S : chambre de sport

$$\left(P(\mu) = \frac{1}{100}, P(C) = \frac{9}{10}, P(V) = \frac{1}{100} \right.$$

$$P(S|\mu) = \frac{1}{10}, P(S|C) = \frac{1}{2}, P(S|V) = \frac{1}{10}$$

Q_n: calculer $P(C|S)$.

$$\text{Bayes: } P(c|S) = \frac{P(S|c) \times P(c)}{P(S)}$$

(p, c, v) ist 1 system complet dc:

$$P(S) = P(S|p) \times P(p) + P(S|c) \times P(c) + P(S|v) \times P(v)$$

$$\text{dc: } P(c|S) = \frac{P(S|c) \times P(c)}{P(S|c) \times P(c) + P(S|p) \times P(p) + P(S|v) \times P(v)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{9}{10}}{\frac{1}{2} \times \frac{9}{10} + \frac{9}{10} \times \frac{9}{100} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{100}} = \frac{4500}{4500 + 81 + 1}$$

$$\begin{array}{r} 2250 \\ \hline 2291 \end{array}$$



