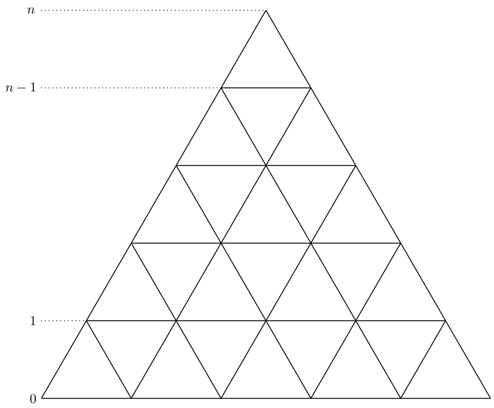
Devoir à la maison n° 03

À rendre le 29 septembre

Dans le triangle ci-dessous, comportant n niveaux, on veut calculer le nombre de triangles, petits ET grands, qui apparaissent dans la figure. On note u_n ce nombre.



Les triangles sont dits de type $\bigtriangleup$ ou de type $\bigtriangledown$ selon qu'ils pointent vers le haut ou vers le bas.
Pour $n \geqslant 1$, on note x_n le nombre de triangles de type $\bigtriangleup$ et y_n le nombre de triangles de type $\bigtriangledown$.

1) Donner une relation simple entre u_n, x_n et y_n.

2) Faire une figure dans les cas $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$. Pour chacun de ces cas, calculer x_n et y_n.

3) On va calculer x_n. Soit n un entier fixé.
- Combien y a-t-il de triangles de type $\bigtriangleup$ de taille 1 ? de taille 2 ? de taille 3 ?
- Combien y a-t-il de triangles de type $\bigtriangleup$ de taille n ?
- En déduire un calcul de x_n et l'exprimer sans sommation. Vérifier la formule obtenue pour $n \leqslant 4$.

4) On va maintenant calculer y_n. Soit n un entier fixé.

a) Combient y a-t-il de triangle de type $\bigtriangledown$ de taille 1 ? de taille 2 ?

On suppose dans un premier temps que n est impair, et on pose $n = 2p + 1$.

b) Déterminer la taille T des plus grands triangles de type $\bigtriangledown$. Déterminer le nombre de triangles de type $\bigtriangledown$ de taille T.

c) Exprimer y_n en fonction de p, et montrer que $y_n = \frac{(n-1)(n+1)(2n+3)}{24}$.

On suppose maintenant que n est pair, et on pose $n = 2p$.

d) Déterminer la taille T des plus grands triangles de type $\bigtriangledown$. Déterminer le nombre de triangles de type $\bigtriangledown$ de taille T.

e) Exprimer y_n en fonction de p, puis en fonction de n, sans signe de sommation.

5) Donner, selon la parité de n, u_n en fonction de n.

6) Montrer que $u_n = \left\lfloor \dfrac{n(n+2)(2n+1)}{8} \right\rfloor$, où $\lfloor\cdot\rfloor$ désigne la fonction « partie entière ».

— FIN —