Devoir de révisions n° 2

I. Premier sujet : élémentaire

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O. Au départ, le mobile est à l'origine (point d'abscisse 0).
Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité $\dfrac{k+1}{k+2}$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $\dfrac{1}{k+2}$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$, X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini (Ω, P) et on pose $u_n = P(X_n = 0)$.

Partie I : étude de la variable X_n.

1) Vérifier que $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ puis donner la loi de X_1.

2) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$.

3) **a)** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall k \in \{1, \ldots, n\},\ P(X_n = k) = \frac{k}{k+1} P(X_{n-1} = k-1)\ .$$

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{0, 1, \ldots, n\},\ P(X_n = k) = \frac{1}{k+1} u_{n-k}\ .$$

c) En remarquant que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{j=0}^{n} \frac{u_j}{n-j+1} = 1.$$

d) Retrouver ainsi les valeurs de u_0 et u_1 puis déterminer u_2 et u_3.

4) **a)** En remarquant que la relation obtenue à la question 3)a) peut s'écrire sous la forme $(k+1)P(X_n = k) = kP(X_{n-1} = k-1)$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \mathrm{E}[X_n] - \mathrm{E}[X_{n-1}] = u_n.$$

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, $\mathrm{E}[X_n]$ sous forme de somme mettant en jeu certains termes de la suite (u_n).

c) Pour tout entier naturel n non nul, donner la valeur de $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j}$ et vérifier que

$$u_n + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j+1} = 1.$$

Déduire de ces deux résultats que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n-j)(n-j+1)}.$$

d) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$. Déterminer ensuite $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{E}[X_n]$.

Partie II : informatique.

5) Écrire une fonction Python `q1(n)`, où `n` est un entier naturel, qui calcule u_0, u_1, ..., u_n ainsi que l'espérance de X_n. On renverra un couple `u, e`, où `u` est le tableau $[u_0, \ldots, u_n]$ et `e` est l'espérance de X_n.

6) On note T l'instant auquel le mobile se retrouve pour la première fois en O (sans compter son positionnement au départ).

Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.

Écrire une fonction Python `q2()` qui calcule et renvoie une réalisation de T lors de l'expérience aléatoire étudiée. On rappelle que la fonction `randrange(a,b)` de la bibliothèque `random` permet d'obtenir une réalisation d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![\mathtt{a}, \mathtt{b}[\![$, les appels successifs de cette fonction pouvant être considérés comme donnant des réalisations mutuellement indépendantes de cette loi.

II. Deuxième sujet : plus abstrait

L'objectif de ce problème est de montrer le théorème d'approximation de Weierstrass :

pour toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\geqslant 1}$ telle que

$$\sup\left\{ |P_n(x) - f(x)| \mid x \in [0,1] \right\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

1) Montrer l'inégalité triangulaire : pour toute variable aléatoire réelle X définie sur un espace probabilisé fini, $|\mathrm{E}X| \leqslant \mathrm{E}|X|$.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.
Pour tout $x \in [0,1]$, on considère une suite $(X_i^{(x)})_{i\geqslant 1}$ de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre x. On définit ensuite pour tout $n \geqslant 1$

$$T_n^{(x)} = \frac{X_1^{(x)} + \cdots + X_n^{(x)}}{n}$$

et

$$P_n(x) = \mathrm{E}\left[f\left(T_n^{(x)}\right)\right].$$

2) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, P_n est une fonction polynomiale.

3) Déterminer l'espérance et la variance de $T_n^{(x)}$.

4) On fixe un réel $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x, y \in [0,1]$, si $|x-y| \leqslant \alpha$, alors $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

5) Majorer $P\left(\left|T_n^{(x)} - x\right| \geqslant \alpha\right)$ par une quantité ne dépendant pas de x.

6) La fonction f est-elle bornée ? Proposer deux majorations de $\left|f(T_n^{(x)}) - f(x)\right|$, l'une sur l'événement $\left[\left|T_n^{(x)} - x\right| \geqslant \alpha\right]$, l'autre sur l'événement $\left[\left|T_n^{(x)} - x\right| < \alpha\right]$.

7) En déduire une majoration de $|P_n(x) - f(x)|$ ne dépendant pas de x et conclure.

8) Ce résultat s'étend sans problème à tout segment de $\mathbb{R}$. Est-il vrai sur $\mathbb{R}$ entier ?

9) On compare finalement deux modes de convergence de fonctions. Soit I un ensemble et f une fonction définie sur I.

a) Montrer que si $(P_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de polynômes vérifiant

$$\sup\left\{ |P_n(x) - f(x)| \mid x \in I \right\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

alors pour tout $x \in I$, $P_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.

b) Montrer que, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, alors il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\geqslant 1}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.

— FIN —