

Feuille d'exercice n° 23 : **Dénombrement – Exercices supplémentaires**

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini de cardinal n . Dénombrer les objets suivants :

- 1) L'ensemble des relations sur E .
- 2) L'ensemble des relations réflexives sur E .
- 3) L'ensemble des relations symétriques sur E .
- 4) L'ensemble des relations antisymétriques sur E .
- 5) L'ensemble des relations réflexives et symétriques sur E .
- 6) L'ensemble des relations réflexives et anti-symétriques sur E .

Exercice 2 Soit A une partie d'un ensemble E à n éléments. On pose $p = \text{Card}A$.

- 1) Combien y a-t-il de parties X de E contenant A ?
- 2) Combien y a-t-il de parties X de E à $m \in \{p, \dots, n\}$ éléments contenant A ?
- 3) Combien y a-t-il de couples (X, Y) de parties de E tels que $X \cap Y = A$?

Exercice 3 Soit E un ensemble à $n \in \mathbb{N}^*$ éléments.

- 1) Calculer $\sum_{X \subset E} \text{Card}(X)$.
- 2) Calculer $\sum_{X, Y \subset E} \text{Card}(X \cap Y)$.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre de triplets $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ solutions de l'équation $x + y + z = n$.

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre de triplets $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ solutions de l'équation $x + y + z = n$ avec les conditions $x \leq y + z$, $y \leq z + x$ et $z \leq x + y$.

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, soit E un ensemble fini de cardinal n et A une partie de E de cardinal p .

Soit $k \in \mathbb{N}$.

- 1) Combien y a-t-il de parties de E à k éléments contenant un et un seul élément de A ?
- 2) Combien y a-t-il de parties de E à k éléments contenant au moins un élément de A ?

Exercice 7 Soit E un ensemble à $n \in \mathbb{N}^*$ éléments. Dénombrer les ensembles suivants.

- 1) $F = \{ (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \mid A \cup B = E \text{ et } A \cap B = \emptyset \}$
- 2) Si $A \subset E$ est fixée et possède p éléments, $G_A = \{ B \subset E \mid A \cup B = E \}$.
- 3) $F = \{ (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \mid A \cup B = E \}$

Exercice 8 Soit n, p deux entiers naturels non nuls, soit a_1, \dots, a_p des entiers naturels tels que

$$\sum_{i=1}^p a_i = n.$$

Dénombrer l'ensemble des applications de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p \rrbracket$ telles que, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, i ait exactement a_i antécédents.

Exercice 9 Montrer que tout anneau fini, commutatif et intègre est un corps.