Ensembles - un exercice supplémentaire - corrigé

Exercice 1

1)

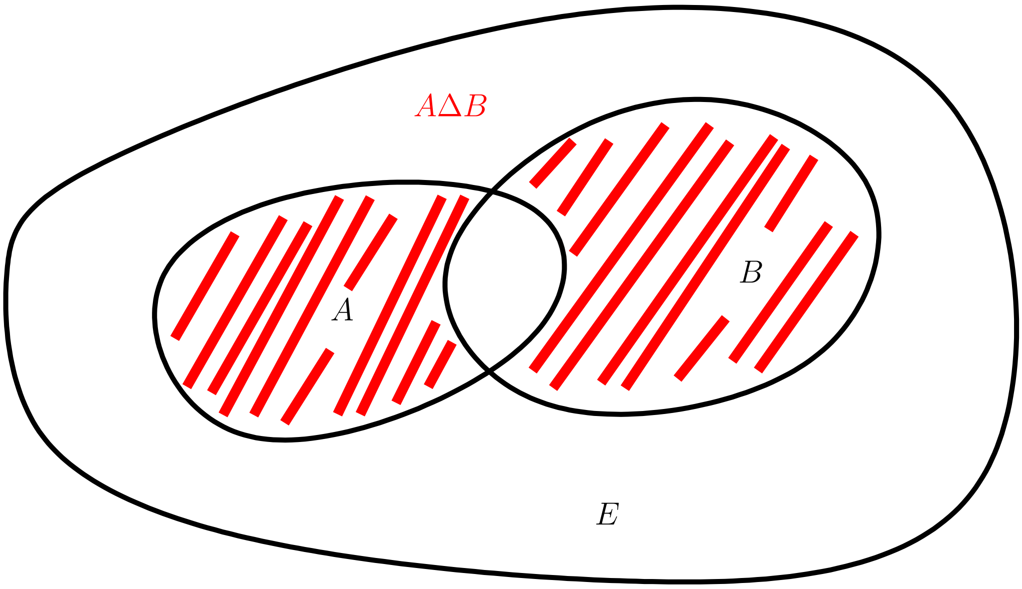

Figure 1 – Différence symétrique de deux parties d'un ensemble.

2) Soit A et B deux parties de E, on a

$$\begin{aligned}A\Delta B &= (A\cup B)\cap\overline{A\cap B} = (A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B}) = \left[A\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\right]\cup\left[A\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\right]\\ &= (A\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})\cup(B\cap\overline{B})\\ &= \varnothing\cup(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})\cup\varnothing\\ &\boxed{= (A\backslash B)\cup(B\backslash A).}\end{aligned}$$

On remarquera que l'on a surtout utilisé ici la distributivité de $\cap$ sur $\cup$.

3) Soit $x\in E$, on a, d'après la dernière question, $x\in A\Delta B$ si et seulement si $[(x\in A)\wedge(x\notin B)]\vee[(x\notin A)\wedge(x\in B)]$. On a obtient donc à partir de cela la table de vérité de $\otimes$ (voir la table 1) : si P et Q sont deux propositions, $P\otimes Q\equiv(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$. C'est le « ou exclusif », ou XOR en anglais.

4) Soit $A\in\mathscr{P}(E)$, on a

$$\boxed{A\Delta\varnothing = (A\cup\varnothing)\backslash(A\cap\varnothing) = A\backslash\varnothing = A.}$$

5) On peut très bien montrer que, si P, Q et R sont trois propositions, $P\otimes(Q\otimes R) = (P\otimes Q)\otimes R$ (via les tables de vérité, par exemple). On peut aussi raisonner en utilisant les fonctions

P	Q	$P \otimes Q$
V	V	F
F	V	V
F	F	F
V	F	V

TABLE 1 – Table de vérité de $\otimes$.

caractéristiques : $\mathbf{1}_{A\Delta B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$. On montre alors que les fonctions caractéristiques de $(A\Delta B)\Delta C$ et de $A\Delta(B\Delta C)$ sont égales.
Nous allons maintenant en donner une preuve calculatoire (certes un peu technique), qui a principalement le mérite d'éclairer la dernière question. Remarquons d'abord que, si X, Y et Z sont trois parties de E :
— $(X \cup Y)\backslash Z = (X \cup Y) \cap \overline{Z} = (X \cap \overline{Z}) \cup (Y \cap \overline{Z}) = (X\backslash Z) \cup (Y\backslash Z)$.
— $(X\backslash Y)\backslash Z = (X \cap \overline{Y}) \cap \overline{Z} = X \cap \overline{Y \cup Z} = X\backslash(Y \cup Z)$.
— $X\backslash(Y \cup Z) = X \cap \overline{Y \cup Z} = X \cap \overline{Y} \cap \overline{Z}$.
On peut alors écrire, en utilisant le résultat de la deuxième question,

$$(A\Delta B)\Delta C = [(A\backslash B) \cup (B\backslash A)]\Delta C = ([(A\backslash B) \cup (B\backslash A)]\backslash C) \cup (C\backslash[(A\backslash B) \cup (B\backslash A)]).$$

On utilise ensuite le premier résultat intermédiaire pour le premier membre :

$$[(A\backslash B) \cup (B\backslash A)]\backslash C = [(A\backslash B)\backslash C] \cup [(B\backslash A)\backslash C].$$

On utilise ensuite le second résultat intermédiaire :

$$[(A\backslash B) \cup (B\backslash A)]\backslash C = [A\backslash(B \cup C)] \cup [B\backslash(A \cup C)].$$

Pour le second membre, on utilise le troisième résultat intermédiaire :

$$C\backslash[(A\backslash B) \cup (B\backslash A)] = C \cap \overline{A\backslash B} \cap \overline{B\backslash A} = C \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}).$$

On utilise ensuite la distributivité de $\cap$ sur $\cup$:

$$C \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = C \cap \left[\underbrace{(\overline{A} \cap A)}_{\varnothing} \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (B \cap A) \cup \underbrace{(B \cap \overline{B})}_{\varnothing} \right].$$

On obtient donc, toujours en utilisant la distributivité de $\cap$ sur $\cup$:

$$C \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = (C \cap (\overline{A} \cap \overline{B})) \cup (C \cap A \cap B) = [C\backslash(A \cup B)] \cup (A \cap B \cap C).$$

Finalement,

$$\boxed{(A\Delta B)\Delta C = [A\backslash(B \cup C)] \cup [B\backslash(A \cup C)] \cup [C\backslash(A \cup B)] \cup [A \cap B \cap C].} \tag{1}$$

Cette expression est invariante par permutation circulaire de A, B et C. Il est ensuite aisé de voir que la différence symétrique est commutative :

$$A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B) = (B \cup A)\backslash(B \cap A) = B\Delta A.$$

Ainsi :

$$\boxed{(A\Delta B)\Delta C = (B\Delta C)\Delta A = A\Delta(B\Delta C).}$$

Remarque : l'équation (1) *montre bien qu'un élément de E est dans $A\Delta B\Delta C$ si et seulement s'il est exactement dans un seul des trois ensembles, ou bien dans les trois à la fois ...*

6) Nous venons de montrer que $(\mathscr{P}(E), \Delta)$ est un monoïde commutatif, de neutre $\varnothing$. Il suffit donc de montrer que chaque élément est inversible. Pour cela, on voit que, pour toute partie A de E,

$$A\Delta A = (A \cup A)\backslash(A \cap A) = A\backslash A = \varnothing.$$

Cela permet donc bien de conclure : toute partie de E est son propre inverse pour Δ.

7) Soit A, B et C trois parties de E, on a, en utilisant la distributivité de $\cap$ sur $\cup$ pour passer à la deuxième ligne :

$$\begin{aligned} A \cap (B\Delta C) &= A \cap [(B\backslash C) \cup (C\backslash B)] = A \cap \left[(B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})\right] \\ &= (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B}) \\ &= \left[(A \cap B \cap \overline{C}) \cup \varnothing\right] \cup \left[(A \cap C \cap \overline{B}) \cup \varnothing\right]. \end{aligned}$$

On écrit alors $\varnothing = A \cap \overline{A} \cap B$ dans le permier membre et $\varnothing = A \cap \overline{A} \cap C$ dans le second. On factorise ensuite :

$$\begin{aligned} A \cap (B\Delta C) &= \big((A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{A} \cap B)\big) \cup \big((A \cap C \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{A} \cap B)\big) \\ &= \left[(A \cap B) \cap (\overline{C} \cup \overline{A})\right] \cup \left[(A \cap C) \cap (\overline{B} \cup \overline{A})\right] \\ &= \left[A \cap B \cap \overline{A \cap C}\right] \cup \left[A \cap C \cap \overline{A \cap B}\right] \\ &= [(A \cap B)\backslash(A \cap C)] \cup [(A \cap C)\backslash(A \cap B)] \\ &= \boxed{(A \cap B)\Delta(A \cap C).} \end{aligned}$$

Remarque : on pouvait aussi se contenter de montrer que, pour toutes propositions P, Q et R, $P \wedge (Q \otimes R) \equiv (P \otimes Q) \wedge (P \otimes R)$, en écrivant les tables de vérités correspondantes, par exemple.

Comme $(\mathscr{P}(E), \cap)$ est un monoïde commutatif (la commutativité et l'associativité sont très simples, voire évidentes, le neutre est E), $(\mathscr{P}(E), \Delta, \cap)$ a une structure d'anneau commutatif. Comme certaines parties de E n'admettent par d'inverse pour $\cap$ (penser à $\varnothing$: si $A \subset E$, $A \cap \varnothing = \varnothing \neq E$), ce n'est pas un corps.

8) On montre cela par récurrence. Nous avons déjà traité les cas $n = 2$ et $n = 3$. Soit un entier $n \geqslant 2$, supposons que la propriété est vraie pour n parties de E. Soit $A_1, \ldots, A_{n+1}$ $n + 1$ parties de E et $x \in E$.

Par hypothèse de récurrence, x appartient à $A_1\Delta \ldots \Delta A_n$ si et seulement si x appartient à un nombre impair des n premières parties.

Comme $A_1\Delta \ldots \Delta A_{n+1} = (A_1\Delta \ldots A_n)\Delta A_{n+1}$, x appartient à $A_1\Delta \ldots \Delta A_{n+1}$ si et seulement si

— x appartient à $A_1\Delta \ldots \Delta A_n$ (et donc à un nombre impair d'entre elles) et pas à A_{n+1} ;
— ou bien x appartient à A_{n+1} et pas à $A_1\Delta \ldots \Delta A_n$ (et donc à un nombre pair d'entre elles).

Dans les deux cas, x appartient bien à $A_1\Delta \ldots \Delta A_{n+1}$ si et seulement si x appartient à un nombre impair de A_i.

On a donc bien montré l'hérédité et on conclut par récurrence simple.