

DS n°7 : Fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom :

Note :

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

Dérivation

Donner un exemple de fonction définie sur un segment, dérivable, dont la dérivée n'est pas bornée.

(1)

Avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\frac{d^n}{dx^n}(x \sin x) =$

(2)

Soit la fonction $f : [5, 6] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x} + 5$. Alors f admet un point fixe

$\alpha =$

(3)

et un couple $(a, b) \in \llbracket 0, 1000 \rrbracket^2$ tel que $\frac{a}{b}$ est une valeur approchée de α à 10^{-4} près est

$(a, b) =$

(4)

Fractions rationnelles

Décomposer les fractions rationnelles suivantes dans $\mathbb{C}(X)$:

$$\frac{X^4 - 3X + 2}{(X - 2)^3} =$$

(5)

$$\frac{4}{(X^2 + 1)^2} =$$

(6)

Calculer la primitive suivante (on ne précisera pas l'ensemble de définition) :

$$\int^x \frac{6t}{t^3 - 1} dt = \quad (7)$$

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{p=1}^n \frac{2}{p^3 + 3p^2 + 2p} = \quad (8)$$

Espaces vectoriels

Les parties F suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels du \mathbb{K} -espace vectoriel E (répondre **OUI** ou **NON**) ?

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, E = \mathbb{C}^4, F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - iz + t = 0 \right\} \quad (9)$$

$$\mathbb{K} = \mathbb{C}, E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}), F = \left\{ f \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)} = f^{(n+3)} + \text{Id}_{\mathbb{R}} \right\} \quad (10)$$

Analyse asymptotique

Donner un équivalent des suites suivantes :

$$\sqrt{n} + \cos(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \boxed{\phantom{\frac{1}{n}}} \quad (11)$$

$$\frac{\sin(\frac{1}{n})}{\cos(\frac{2}{n}) - 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \boxed{} \quad (12)$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 - \frac{4}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \boxed{} \quad (13)$$

Calculer les DL suivant ($DL_n(a)$ pour DL à l'ordre n au voisinage de a)

$$\text{DL}_3(0) \text{ de } \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1} : \quad (14)$$

$$\text{DL}_5(0) \text{ de } \exp(\cos x) : \quad (15)$$

— FIN —