Ex3 : Mq. $\sqrt{\cdot}$ est u^t cont. sur $\mathbb{R}_+$.

1) • revenir à la définition

2) • la dérivée est bornée $\Rightarrow$ la fonction est lipsch.

$\Rightarrow$ la fonction est u^t cont.

3) • Th. de Heine : la fonc. est cont. sur 1 seg^t $\Rightarrow$ elle est u^t cont.

2) $f : x \mapsto \sqrt{x}$, si $a > 0$, f' est bornée par $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ sur $[a, +\infty[$

dc $\sqrt{\cdot}$ est u^t cont. sur $[a, +\infty[$.

Pb : f' n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$: • f pas dérivable en 0

• $f' \xrightarrow[0^+]{} +\infty$

3) Si $a > 0$: th. de Heine : $\sqrt{\cdot}$ est u^t cont. sur $[0, a]$

Pb : $\mathbb{R}_+$ n'est pas 1 segment.

⚠ Si f est continue sur $[0,a]$ et $[a,+\infty[$, alors elle est continue sur $[0,a] \cup [a,+\infty[$.

C'est faux pour la continuité uniforme !!

en effet : soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha_1 > 0$ tq. $\forall x,y \in [0,a]$,

$$|x-y| < \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon .$$

soit $\alpha_2 > 0$ tq. $\forall x,y \in [a,+\infty[$,

$$|x-y| < \alpha_2 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon .$$

Soit $x,y \in \mathbb{R}_+$ tq. $|x-y| < \min(\alpha_1, \alpha_2)$.

- Si $x,y \in [0,a]$: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$
- Si $x,y \in [a,+\infty[$: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

. Si $x \in [0,a]$ et $y \in [a,+\infty[$: ??

<u>Solution</u> : $\sqrt{.}$ est uniformément continue sur $[0,2]$

$\sqrt{.}$ est uniformément continue sur $[1,+\infty[$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Soit $\alpha_1 > 0$, $\forall x,y \in [0,2]$, $|x-y| < \alpha_1 \Rightarrow |\sqrt{x}-\sqrt{y}| < \varepsilon$

Soit $\alpha_2 > 0$, $\forall x,y \in [1,+\infty[$, $|x-y| < \alpha_2 \Rightarrow |\sqrt{x}-\sqrt{y}| < \varepsilon$

Posons $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2, 1)$

Soit $x,y \in \mathbb{R}_+$ tq. $|x-y| < \alpha$

En particulier : $|x-y| < 1$ donc on ne peut pas avoir $x \in [0,2] \setminus [1,+\infty[$, ie $x \in [0,1[$

et $y \in [1,+\infty[\setminus [0,2]$, ie $y \in]2,+\infty[$

dc : $x, y \in [0,2]$ <u>ou</u> $x, y \in [1, +\infty[$

ds les 2 cas, $|x-y| < \alpha_1$ et $|x-y| < \alpha_2$

dc $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon$.

Nous avons montré :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}_+, |x-y| < \alpha \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon$.

$\sqrt{\cdot}$ est u^t cont. sur $\mathbb{R}_+$.