

XXIX Espaces euclidiens et préhilbertiens réels

22 septembre 2021

Le corps de base est \mathbb{R} . n, p, q, r et s désignent des entiers naturels non nuls. E désigne un espace vectoriel.

1 Produit scalaire, norme et distance.

Définition 1.0.1.

On appelle *produit scalaire sur E* toute application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire symétrique et telle que pour tout $x \in E$, on ait d'une part $\varphi(x, x) \geq 0$ et d'autre part $\varphi(x, x) = 0$ si et seulement si $x = 0$. Un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire est dit *préhilbertien*. Si de plus il est de dimension finie, il est dit *euclidien*.

Remarque 1.0.2. — Différentes notations sont utilisées couramment pour le produit scalaire de x et y : $\langle x | y \rangle, \langle x, y \rangle, (x, y), \langle x, y \rangle, x \cdot y$.
 — Par bilinéarité, si x ou $y = 0$, $\langle x | y \rangle = 0$.
 — La symétrie et la linéarité par rapport à une variable suffisent à montrer la bilinéarité.
 — Jusqu'à maintenant on définissait le produit scalaire à partir d'angles. En fait c'est l'inverse que l'on fait lorsque l'on théorise tout cela.

Exemple 1.0.3. — Les produits scalaires usuels vus en début d'année sur \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 sont bien évidemment des produits scalaires.

- Il existe de nombreux produits scalaires sur \mathbb{R}^2 ; par exemple $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto x_1x_2 - y_1x_2 + 2y_1y_2 - x_1y_2$.
- Il existe également sur \mathbb{R}^n un produit scalaire canonique ; $(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
- Par extension, tout \mathbb{R} -ev de dimension n , étant isomorphe à \mathbb{R}^n , est muni d'un produit scalaire. Ainsi, sur $\mathbb{R}_n[X]$ le produit scalaire usuel est $\left(\sum_{k=0}^n a_k X^k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^n b_k X^k \right) =$

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k b_k \right).$$

- Soit a et b deux réels avec $a < b$. Sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, l'application $(f, g) \mapsto \int_a^b fg$ est un produit scalaire (attention : cet espace est de dimension infinie, donc n'est pas euclidien, mais préhilbertien réel).

Exercice 1.0.4.

L'espérance munit-elle l'ensemble des variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé fini d'un produit scalaire (via $\langle X, Y \rangle = E(XY)$) ?

Proposer une solution à ce « problème ».

Définition 1.0.5 (Distance).

Soit E un ensemble (quelconque, pas nécessairement un espace vectoriel). On appelle *distance sur E* toute application $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant les trois conditions suivantes :

- (i) $\forall (x, y) \in E^2 \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$;
- (ii) $\forall (x, y) \in E^2 \quad d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie) ;
- (iii) $\forall (x, y, z) \in E^3 \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Un ensemble muni d'une distance est appelé *espace métrique*.

Remarque 1.0.6.

Il convient de ne pas oublier la positivité dans la définition d'une distance.

Exemple 1.0.7. — La distance usuelle dans le plan est une distance.

- La distance de deux points sur un graphe connexe, comptée comme le nombre minimal d'arêtes à parcourir sur ce graphe pour relier ces deux points.

Remarque 1.0.8.

Soit E un ensemble muni d'une distance d . Soit $(x, y, z) \in E^3$. Alors, on a

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z).$$

Démonstration.

On a $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, donc $d(x, z) - d(x, y) \leq$

$d(y, z)$. De même, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, donc $d(x, y) - d(x, z) \leq d(y, z)$. Or $|d(x, y) - d(x, z)| = \max(d(x, z) - d(x, y), d(x, y) - d(x, z))$, d'où le résultat. \square

Définition 1.0.9 (Norme).

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. On appelle norme sur E toute application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant les trois conditions suivantes :

- (i) $\forall x \in E \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$;
- (ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénéité) ;
- (iii) $\forall (x, y) \in E \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Remarque 1.0.10.

Il convient de ne pas oublier la positivité dans la définition d'une norme.

Exemple 1.0.11.

Sur \mathbb{R}^n et pour $p \in [1, +\infty[$, les applications

$$\|\cdot\|_p : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}$$

et

$$\|\cdot\|_\infty : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_k|$$

sont des normes.

Remarque 1.0.12.

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$. Alors pour tout $(x, y) \in E^2$, on a

$$|||x| - |y||| \leq \|x - y\|.$$

Démonstration.

Soit $(x, y) \in E^2$. Remarquons qu'on a $\|x\| = \|x + y - y\| \leq \|x + y\| + \|y\|$ par l'inégalité triangulaire, d'où l'on déduit $\|x\| - \|y\| \leq \|x + y\|$. Symétriquement, on remarque qu'on a $\|y\| - \|x\| \leq \|x + y\|$. Or $|||x| - |y||| = \max(\|x\| - \|y\|, \|y\| - \|x\|)$. On en déduit le résultat. \square

Définition 1.0.13 (Distance associée à une norme).

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$. On appelle *distance associée à la norme* $\|\cdot\|$ l'application $(x, y) \mapsto \|x - y\|$.

Proposition 1.0.14.

Cette application est bien une distance.

Exemple 1.0.15.

La distance associée à $\|\cdot\|_1$ est parfois appelée *distance de Manhattan*. Dans Manhattan, les rues forment un damier « orthogonal », on ne peut donc que se déplacer parallèlement à ces axes. La distance parcourue entre deux points n'est donc pas la distance « euclidienne » usuelle ...

Exercice 1.0.16.

Pour une norme $\|\cdot\|$, on appelle boule centrée en $a \in E$ et de rayon $r \geq 0$ l'ensemble

$$B(a, r) = \{ x \in E \mid \|a - x\| \leq r \}.$$

Tracer les boules centrées en 0 et de rayon 1 pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur \mathbb{R}^2 .

Démonstration.

Soit d la distance associée à une norme $\|\cdot\|$ sur un \mathbb{R} -espace vectoriel E . On a clairement $\forall (x, y) \in E^2 \quad d(x, y) \geq 0$, donc d est bien une application de E^2 dans \mathbb{R}^+ . On vérifie aisément les trois conditions de la définition d'une distance :

- (i) Soit $(x, y) \in E^2$. On a $d(x, y) = \|x - y\|$. Or $\|x - y\| = 0 \iff x - y = 0$. Donc $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
- (ii) Soit $(x, y) \in E^2$. On a $d(y, x) = \|y - x\| = \|-(x - y)\| = |-1| \|x - y\| = d(x, y)$.
- (iii) Soit $(x, y, z) \in E^3$. On a $d(x, z) = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$.

\square

Définition 1.0.17 (Norme associée à un produit scalaire).

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. On appelle *norme associée au produit scalaire* $\langle \cdot | \cdot \rangle$ l'application $x \mapsto \sqrt{\langle x | x \rangle}$.

Remarque 1.0.18. 1. Il est clair, par positivité du produit scalaire, que cette application est bien définie. La racine carrée étant à valeurs dans \mathbb{R}^+ , elle est de plus à valeurs dans \mathbb{R}^+ . Il reste à voir si cette application est bien une norme.

2. La norme associée à un produit scalaire dépend évidemment du produit scalaire. Par exemple sur \mathbb{R}^2 , les normes associées respectivement au produit scalaire usuel et au produit scalaire $((x, y), (x', y')) \mapsto \frac{1}{2}xx' + 2yy'$ sont différentes (regarder par exemple les valeurs pour les vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$).
3. On a directement que pour une famille (x_1, \dots, x_n) de vecteurs,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \langle x_i | x_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \langle x_i | x_j \rangle. \end{aligned}$$

Pour deux vecteurs, on retrouve $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2 \langle x | y \rangle + \|y\|^2$.

Dans tout ce qui suit, sauf mention expresse du contraire, $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ désigne un espace vectoriel préhilbertien, et $\|\cdot\|$ la norme associée à son produit scalaire.

Proposition 1.0.19.

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et $\|\cdot\|$ la norme associée. On a

1. $\forall x \in E \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$;
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in E \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

Démonstration. 1. Soit $x \in E$. On a $\|x\| = 0 \iff \langle x | x \rangle = 0$. $\langle \cdot | \cdot \rangle$ étant un produit scalaire, on a donc $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$. On a $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x | \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x | x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x | x \rangle}$.

□

Avec ce qui précède, il suffit maintenant de démontrer que $\|\cdot\|$ vérifie l'inégalité triangulaire pour démontrer qu'il s'agit bien d'une norme. Pour cela, on démontre tout d'abord le théorème suivant.

Théorème 1.0.20 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et $\|\cdot\|$ la norme associée. Alors pour tout $(x, y) \in E^2$, on a

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

L'égalité a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration.

Soient $x, y \in E$. Pour $y = 0$ le résultat est évident. Sinon, on peut donner deux démonstrations

Géométrique Posons $u = \frac{1}{\|y\|} y$. On vérifie aisément $\|u\| = 1$. Posons alors $x' = \langle x | u \rangle u$ et $x'' = x - x'$ (faire un dessin). On a alors

$$\langle x' | x'' \rangle = \langle x' | x \rangle - \langle x' | x' \rangle = \langle x | u \rangle^2 - \langle x | u \rangle^2 = 0.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|x'\|^2 + 2 \langle x' | x'' \rangle + \|x''\|^2 \\ &= \|x'\|^2 + \|x''\|^2 \\ &\geq \|x'\|^2. \end{aligned}$$

On en déduit $\|x\| \cdot \|y\| \geq \|x'\| \cdot \|y\|$. Or on a :

$$\begin{aligned} \|x'\| \cdot \|y\| &= |\langle x | u \rangle| \cdot \|y\| \\ &= |\langle x | y \rangle|. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Algébrique pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $\|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t \langle x | y \rangle + t^2 \|y\|^2$. C'est un polynôme toujours positif, donc son discriminant est négatif ou nul.

Il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si ce discriminant est nul, donc si et seulement si ce polynôme a une racine réelle, donc si et seulement si il existe t tel que [à vous de l'écrire], donc si et seulement si x et y sont colinéaires.

Une idée calculatoire astucieuse Si $x = 0$ ou $y = 0$, le résultat est évident. Sinon, on remarque que $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$ et l'on écrit (\pm signifie qu'on le fait pour $+$ puis pour $-$) :

$$0 \leq \left\| \frac{x}{\|x\|} \pm \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|^2 + \left\| \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \pm 2 \frac{\langle x | y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

ce qui donne

$$0 \leq 1 \pm \frac{\langle x | y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

et c'est fini !

□

Proposition 1.0.21 (Inégalité triangulaire).

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, $x, y \in E$. Alors,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

De plus, on a l'égalité si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens.

Démonstration.

On a $\|x + y\|^2 = \langle x + y | x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x | y \rangle + \|y\|^2$. Or $(\|x\| + \|y\|)^2 = \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2$ et $\langle x | y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$, donc $\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$. $\|x + y\|$ et $\|x\| + \|y\|$ étant positifs, on en déduit le résultat.

L'égalité a lieu si et seulement si $\langle x | y \rangle = \|x\| \cdot \|y\|$. Pour cela, il est nécessaire d'avoir $\langle x | y \rangle \geq 0$ (car le produit de deux normes est positif ou nul) et x et y colinéaires (cas d'égalité de Cauchy-Schwarz), donc il est nécessaire que x et y soient colinéaires — l'un s'écrit comme produit de l'autre par un scalaire — et de même sens — ce scalaire est positif ou nul. Cette condition est clairement suffisante. \square

Théorème 1.0.22.

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, $x, y \in E$.

1. Identité du parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

2. Identité de polarisation :

$$\begin{aligned} \langle x | y \rangle &= \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2). \end{aligned}$$

Remarque 1.0.23.

Faire le dessin d'un parallélogramme, on utilise le théorème d'Al-Kashi deux fois (une par hypothénuse).

Démonstration.

Il suffit de développer les normes. \square

Remarque 1.0.24.

Ces identités permettent de retrouver l'expression du produit scalaire quand on ne connaît que la norme.

Exemple 1.0.25.

Existe-t-il un produit scalaire donnant la norme $\|(x, y)\|^2 = (x + y)^2 + x^2$?

2 Orthogonalité.

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un ev préhilbertien et $\|\cdot\|$ la norme associée.

2.1 Premières définitions.**Définition 2.1.1.**

Soient $x, y \in E$. On dit que x est *unitaire* (ou *normé*) si $\|x\| = 1$. On dit que x et y sont *orthogonaux* et l'on note $x \perp y$ si $\langle x | y \rangle = 0$.

Remarque 2.1.2.

Si $x \neq 0_E$, il y a exactement deux vecteurs unitaires colinéaires à x .

Exemple 2.1.3.

- Tout vecteur est toujours orthogonal au vecteur nul.
- Dans \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire usuel, $(1, 3)$ et $(-6, 2)$ sont orthogonaux.
- Dans \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire $(x, y) \cdot (x', y') = 2xx' - xy' - x'y + 3yy'$, les vecteurs $(1, 1)$ et $(2, -1)$ sont orthogonaux.

2.2 Familles orthogonales.**Définition 2.2.1.**

Une famille de vecteurs est dite *orthogonale* s'ils sont 2 à 2 orthogonaux. Si les vecteurs sont de plus unitaires, la famille est dite *orthonormale* (ou *orthonormée*).

Exemple 2.2.2.

Les $f_n : x \mapsto \cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, forment une famille orthogonale pour le produit scalaire usuel de $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$.

Théorème 2.2.3 (Pythagore).

Soit (v_1, \dots, v_n) une famille orthogonale de n vecteurs. Alors $\left\| \sum_{k=1}^n v_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|v_k\|^2$.

Démonstration.

On développe le produit scalaire : $\left\| \sum_{k=1}^n v_k \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle v_i | v_j \rangle$. \square

Exemple 2.2.4.

Dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire usuel, on pose $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (-5, 1, 1)$ et $v_3 = (-1, -16, 11)$. Vérifier que la famille (v_1, v_2, v_3) est orthogonale et s'assurer que l'égalité donnée par le théorème de Pythagore est vérifiée.

Théorème 2.2.5.

Toute famille orthogonale ne comportant **aucun vecteur nul** est libre.

Démonstration.

Soient λ_k tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k = 0$. Alors pour tout i , $\left\langle \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k \mid v_i \right\rangle = 0$ or quand on développe la somme on a $\lambda_i \langle v_i | v_i \rangle$. \square

Remarque 2.2.6.

Toute famille orthonormale est une famille orthogonale ne comportant aucun vecteur nul.

Corollaire 2.2.7.

Toute famille orthogonale ne comportant **aucun vecteur nul** et de cardinal $\dim E$ est une base de E .

Exemple 2.2.8.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment une famille orthogonale, et donc une base de \mathbb{R}^3 .

Théorème 2.2.9 (orthonormalisation de Gram-Schmidt).

On suppose E euclidien de dim n . Soit (u_1, \dots, u_n) une base de E . Alors il existe une base (v_1, \dots, v_n) de E telle que :

1. (v_1, \dots, v_n) est orthonormale ;
2. pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k).$$

Les v_k sont uniques au signe près et on peut

$$\text{choisir : } v_k = \frac{u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k | v_i \rangle v_i}{\left\| u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k | v_i \rangle v_i \right\|}.$$

Démonstration.

Explication pour le choix de v_1 .

• Analyse : on suppose la famille construite jusqu'au rang k . Construisons le $k+1^{\text{e}}$ vecteur.

Il faut choisir v_{k+1} dans $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k, u_{k+1})$: $v_{k+1} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \mu u_{k+1}$. $\langle v_{k+1} | v_j \rangle = 0$ donne $\lambda_j + \mu \langle u_{k+1} | v_j \rangle = 0$, donc $v_{k+1} = \mu \left(- \sum_{i=1}^k \langle u_{k+1} | v_i \rangle v_i + u_{k+1} \right)$. Reste à choisir μ pour

avoir $\|v_{k+1}\| = 1$ (2 choix possibles).

• Synthèse : on a vu unicité au signe près. On vérifie que les vecteurs trouvés conviennent bien. \square

Exemple 2.2.10.

Orthonormaliser $(1, X, X^2)$ pour le produit scalaire de $\mathbb{R}_2[X]$, $\langle P | Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$. On trouve (P_1, P_2, P_3) , où

$$P_1 = 1,$$

$$P_2 = \frac{X - 1/2}{1/(2\sqrt{3})} = \sqrt{3}(2X - 1),$$

$$P_3 = \frac{X^2 - X + 1/6}{\|\dots\|} = \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1).$$

Corollaire 2.2.11.

Tout espace euclidien a une base orthonormale. Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

Démonstration.

Pour l'existence, il suffit d'orthonormaliser une base quelconque.

Soit (e_1, \dots, e_p) une famille orthonormale de E . On peut la compléter en base de E : $(e_1, \dots, e_p, e'_{p+1}, \dots, e'_n)$.

On orthonormalise ensuite cette base : pour les p premiers vecteurs, on a à chaque fois le choix entre e_i et $-e_i$, on choisit bien entendu e_i .

On obtient donc une base orthonormée de E dont les p premiers vecteurs sont e_1, \dots, e_p . \square

Proposition 2.2.12.

[Coordonnées dans une base orthonormale] E euclidien, (v_1, \dots, v_n) base orthonormale de E .

Alors, pour tout $x \in E$, $x = \sum_{k=1}^n \langle x | v_k \rangle v_k$.

Démonstration.

Soit $x \in E$, soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k$. Si $1 \leq k \leq n$, on a par bilinéarité du produit scalaire

$$\begin{aligned} \langle x | v_k \rangle &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle v_i | v_k \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{i,k} \\ &= \lambda_k. \end{aligned}$$

 \square **Exemple 2.2.13.**

Trouver les coordonnées de $(1, -3)$ dans la base $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) \right)$ (pour le produit scalaire usuel).

Exercice 2.2.14.

Exprimer la formule de la proposition 2.2.12 dans le cas où (v_1, \dots, v_n) base orthogonale de E .

Proposition 2.2.15 (Expression du produit scalaire dans une base orthonormale).

Soit E euclidien, (v_1, \dots, v_n) une base orthonormale de E . x et y de coordonnées (x_i) et (y_i) dans la base (v_1, \dots, v_n) . Alors $\langle x | y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$.

Corollaire 2.2.16.

Avec les mêmes notations,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Remarque 2.2.17.

Tous les produits scalaires ont la même expression «usuelle» à condition de se placer dans une base orthonormale **pour ce produit scalaire**.

Remarque 2.2.18.

Ces formules d'adaptent encore dans le cas de bases orthogonales.

2.3 Sous-espaces vectoriels orthogonaux.**Définition 2.3.1.**

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On dit que F et G sont des sous-espaces orthogonaux et on écrit $F \perp G$ si

$$\forall x \in F \quad \forall y \in G \quad x \perp y.$$

Exemple 2.3.2.

Dans \mathbb{R}^3 avec le produit scalaire usuel, $\text{Vect}(1, -1, 0) \perp \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 0, 1))$.

Remarque 2.3.3.

Si F et G sont orthogonaux, alors ils sont en somme directe. En effet, soit alors $x \in F \cap G$. On a alors $x \perp x$, donc $\langle x | x \rangle = 0$, donc $x = 0$. Donc $F \cap G \subset \{0\}$, d'où on déduit le résultat.

Théorème 2.3.4.

Soient F et G deux sev de dimension finies de E . On note (f_1, \dots, f_q) une famille génératrice de F et (g_1, \dots, g_p) une famille génératrice de G . Alors $F \perp G$ si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ on a $\langle f_i | g_j \rangle = 0$.

Démonstration.

(\Rightarrow) par définition de $F \perp G$.

(\Leftarrow) soient $f = \sum \lambda_i f_i$ et $g = \sum \mu_j g_j$. Alors $\langle f | g \rangle = \sum_i \sum_j \lambda_i \mu_j \langle f_i | g_j \rangle = 0$. \square

Définition 2.3.5.

Soit X une partie (quelconque) de E . On appelle *orthogonal* de X et on note X^\perp (ou X^o) l'ensemble $\{y \in E \mid \forall x \in X \langle x | y \rangle = 0\}$.

Proposition 2.3.6.

Soit X une partie de E . Alors

1. X^\perp est un sev de E ;
2. Pour toute partie Y de E telle que $X \subset Y$, on a $Y^\perp \subset X^\perp$;
3. $X \subset (X^\perp)^\perp$.

Démonstration. 1. On a $0 \in X^\perp$ car 0 est orthogonal à tout vecteur, donc à tout vecteur de X ; de plus toute combinaison linéaire de vecteurs orthogonaux à tout vecteur de X est orthogonale à tout vecteur de X .

Sinon, il suffit de voir que

$$X^\perp = \bigcap_{x \in X} \text{Ker } \langle x | \cdot \rangle.$$

2. Tout élément de Y^\perp est orthogonal à tout vecteur de Y , donc a fortiori à tout vecteur de X .
3. Soit x un vecteur de X . Tout vecteur de X^\perp est orthogonal à tout vecteur de X , donc en particulier à x . Donc x est orthogonal à tout vecteur de X^\perp , donc appartient à $(X^\perp)^\perp$. \square

Remarque 2.3.7.

Il n'y a pas forcément égalité dans le dernier point. Par exemple, avec $X = \emptyset$, $(X^\perp)^\perp = \{0\}$.

Théorème 2.3.8.

Soit F un sev de E . Alors F^\perp est le plus grand sous-espace vectoriel orthogonal à F (et F et F^\perp sont de plus en somme directe).

Si de plus E est euclidien, alors $E = F \oplus F^\perp$ et F^\perp est l'unique sous-espace vectoriel G vérifiant $E = F \oplus G$ et $F \perp G$. C'est pourquoi on appelle F^\perp le supplémentaire orthogonal de F dans E .

De plus, dans le cas euclidien, on a $F = (F^\perp)^\perp$.

Démonstration.

On sait déjà que F^\perp est un sous-espace vectoriel. F et F^\perp sont clairement orthogonaux (donc en somme directe) et de plus pour tout sous-espace vectoriel G tel que F et G sont orthogonaux, tout élément x de G est orthogonal à tout élément de F , donc appartient à F^\perp , donc $G \subset F^\perp$.

Supposons de plus que E est euclidien. Alors le sous-espace vectoriel F est aussi un espace vectoriel euclidien, donc possède une base orthonormale (f_1, \dots, f_q) . Cette base est une famille orthonormale de E , qu'on peut compléter en une base orthonormale $(f_1, \dots, f_q, g_1, \dots, g_p)$ de E . Posons $G = \text{Vect}(g_1, \dots, g_p)$. On a alors $\dim E = p + q = \dim F + \dim G$. De plus pour tout $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$ et tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a $f_i \perp g_j$, donc $F \perp G$, donc $G \subset F^\perp$. Donc $\dim E \leq \dim F + \dim F^\perp$. Or F et F^\perp sont en somme directe, donc $\dim(F \oplus F^\perp) \leq \dim E$, donc $G = F^\perp$ et $E = F \oplus F^\perp$ (et de plus, $F^\perp = \text{Vect}(g_1, \dots, g_p)$).

On en déduit, $\dim(F^\perp)^\perp = \dim E - \dim F^\perp = \dim F$. Or on sait qu'on a $F \subset (F^\perp)^\perp$, donc $F = (F^\perp)^\perp$. \square

Remarque 2.3.9 (Important).

Le résultat ne se généralise pas à des espaces préhilbertiens E qui ne sont pas de dimension finie. Dans ce cas (non euclidien), on peut trouver des sous-espaces vectoriels F tels que F et F^\perp ne soient pas supplémentaires et tels que $(F^\perp)^\perp \neq F$ (on peut même trouver F tel que $F \neq E$ et $F^\perp = \{0\}$). On verra ce résultat en exercice dans le cas de $\mathbb{R}[X]$.

Remarque 2.3.10 (Culturelle).

En revanche, pour toute partie X d'un espace préhilbertien, on a toujours $\left((X^\perp)^\perp\right)^\perp = X^\perp$ (une inclusion est la conséquence du fait que $(X^\perp)^\perp$ contient X et qu'en conséquence leurs orthogonaux sont inclus dans l'autre sens; l'autre inclusion vient du fait que le biorthogonal de X^\perp contient X^\perp).

Exemple 2.3.11.

On pose, pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}_2[X]$, $\langle P | Q \rangle = P'(1)Q'(1) + P(-1)Q(-1) +$

$P(0)Q(0)$. Vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire et trouver $\mathbb{R}_1[X]^\perp$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 2.3.12.

On considère dans $\mathbb{R}[X]$ le sev $F = \text{Vect}(1+X, 1+X^2, \dots, 1+X^n, \dots)$. On rappelle qu'un hyperplan est un sev admettant un supplémentaire de dimension 1.

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k, \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k.$$

1. Montrer que F est un hyperplan de $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer F^\perp pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}[X]$.
3. Quel résultat vrai en dimension finie est ici mis en défaut ?

DANS TOUTE LA SUITE, $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ EST UN ESPACE VECTORIEL EUCLIDIEN DE DIMENSION n .

2.4 Formes linéaires et hyperplans d'un espace euclidien.

Théorème 2.4.1 (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet).

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ euclidien. Soit $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Alors il existe un unique $v_f \in E$ vérifiant $\forall x \in E$ $f(x) = \langle v_f | x \rangle$ ou encore $f = \langle v_f | \cdot \rangle$.

On trois preuves de ce résultats.

Démonstration (Preuve géométrique.).

La forme linéaire f est définie par son noyau (hyperplan H) et la valeur prise sur un vecteur qui n'est pas dans le noyau.

De même, $(\text{Vect } v_f)^\perp$ est de dimension $n-1$, donc c'est un hyperplan. Si on choisit v_f vecteur normal à H , alors f et $\langle v_f | \cdot \rangle$ sont des formes linéaires de même noyau, donc sont proportionnelles. La norme de v_f est alors choisie de sorte qu'elle corresponde avec la valeur précédente de f sur un vecteur qui n'est pas dans le noyau. \square

Démonstration (Preuve algébrique.).

On considère l'application

$$\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ v & \longmapsto (x \mapsto \langle v | x \rangle) \end{cases}.$$

Par bilinéarité du produit scalaire, φ est linéaire. De plus, avec $v_1, v_2 \in E$, si $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$, alors pour tout $x \in E$, $\langle v_1 | x \rangle = \langle v_2 | x \rangle$, i.e. pour tout $x \in E$, $\langle v_1 - v_2 | x \rangle = 0$, donc $v_1 - v_2 \in E^\perp$.

Or $E^\perp = \{0\}$ car pour tout $x \in E^\perp$, $\langle x | x \rangle = 0$. Donc $v_1 = v_2$ et φ est injective.

Mais comme $\dim E = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, alors φ est un isomorphisme. D'où le résultat. \square

Démonstration (Preuve matricielle.).

Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E . Notons

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},1}(f) = (a_1 \quad \dots \quad a_n).$$

Posons

$$a = \sum_{i=1}^n a_i e_i.$$

Si $x \in E$ est de coordonnées (x_1, \dots, x_n) dans \mathcal{B} , alors

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i = \langle a | x \rangle.$$

L'unicité se déduit immédiatement de la représentation matricielle. \square

Définition 2.4.2.

Soit H un hyperplan d'un espace euclidien, alors H^\perp est une droite vectorielle appelée *droite normale* à H .

Tout vecteur v vérifiant $H^\perp = \text{Vect}(v)$ est appelé *vecteur normal* à H .

Proposition 2.4.3.

Soit H un hyperplan d'un espace euclidien E , soit $v \in E$. Alors v est un vecteur normal à H si et seulement si $v \neq 0_E$ et $v \in H^\perp$.

Démonstration.

Immédiat. \square

Remarque 2.4.4.

Si H est un hyperplan de E , considérons f une forme linéaire non nulle telle que $H = \text{Ker}(f)$. Il existe alors $v \in E$ tel que $f = \langle v, \cdot \rangle$.

Alors, v est un vecteur normal à H .

Remarque 2.4.5 (Écriture matricielle du produit scalaire).

Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ base orthonormale de E , x et y des vecteurs de matrices (dans e) X et Y .

Alors $\langle x | y \rangle = {}^t X.Y$.

Dans le cadre d'application du théorème de Riesz-Fréchet, on a $f(x) = {}^t V_f.X$, et ainsi $\text{Mat}_e(f) = {}^t \text{Mat}_e(v_f)$. Les points de vue se rejoignent.

2.5 Symétries et projecteurs orthogonaux.

Définition 2.5.1.

On appelle *projection orthogonale* (resp. *symétrie orthogonale*) toute projection (resp. symétrie) sur un (resp. par rapport à un) sev F parallèlement à F^\perp .

Proposition 2.5.2.

Un projecteur p est orthogonal si et seulement si $\text{Im } p \perp \text{Ker } p$. Une symétrie s est orthogonale si et seulement si $\text{Ker}(s - \text{Id}) \perp \text{Ker}(s + \text{Id})$.

Démonstration.

Direct. \square

Théorème 2.5.3 (expression d'un projecteur orthogonal dans une base orthonormée).

Soit F sev d'un ev euclidien E . Soit (f_1, \dots, f_p) une base orthonormale de F . Soit $x \in E$. Le projeté orthogonal de x sur F est $p(x) = \sum_{i=1}^p \langle x | f_i \rangle f_i$.

Démonstration.

On complète (f_1, \dots, f_p) en une base orthonormale de E notée (f_1, \dots, f_n) . Alors (f_{p+1}, \dots, f_n) est une base de F^\perp

(\perp + dimension). Donc $x = \sum_{i=1}^n \langle x | f_i \rangle f_i$, donc somme

d'un élément de F et d'un élément de F^\perp : cet élément de F est le projeté de x sur F . \square

Exemple 2.5.4.

Déterminer la projection orthogonale (et la symétrie orthogonale) de $(2, 1)$ sur $\text{Vect}(-1, 2)$, ainsi que sur son supplémentaire orthogonal, pour le produit scalaire

$$((x_1, y_1) | (x_2, y_2)) = 5x_1x_2 + 2y_1x_2 + 2x_1y_2 + y_1y_2.$$

Remarque 2.5.5.

On peut ré-écrire le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt comme suit.

Avec $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, en notant p_k le projeté de e_{k+1} sur F_k , on procède comme suit.

- On renormalise e_1 pour obtenir v_1 .
- Pour chaque $1 \leq k \leq p-1$, on remarque que $e_{k+1} - p_k \in F_k^\perp$. On renormalise donc $e_k - p_k$ pour obtenir v_{k+1} .

2.6 Distance à un sous ev.

Définition 2.6.1 (distance d'un point à une partie d'un espace euclidien).

Soit A une partie de E et $x \in E$. On appelle distance de x à A et on note $d(x, A)$ le réel $\inf_{a \in A} d(x, a)$.

Théorème 2.6.2.

Soit F un sev de E . Alors la distance de x à F est atteinte en un seul point, qui est la projection orthogonale de x . De plus : $d(x, F)^2 = \|x - p(x)\|^2$. En particulier $d(x, F) = 0$ si et seulement si $x \in F$.

Démonstration.

Soit $f \in F$. On a la décomposition dans $F^\perp \oplus F$: $x - f = x - p(x) + p(x) - f$. On conclut en appliquant le théorème de Pythagore. \square

Exemple 2.6.3.

Le minimum de la fonction

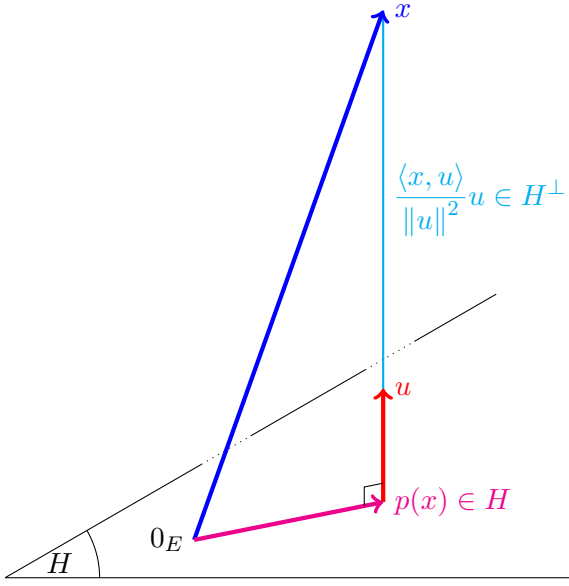
$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) & \mapsto \int_0^1 (-a - bx + x^2)^2 dx \end{cases}$$

est atteint pour $a = -1/6$ et $b = 1$ et vaut $1/180$.

2.7 Distance et projection sur un hyperplan

Dans toute cette partie, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ désigne un espace euclidien, H un hyperplan de E et u un vecteur normal à E .

Notamment, $H = \text{Vect}(u)^\perp$.

FIGURE 1 – Projection orthogonale sur un hyperplan H .**Proposition 2.7.1** (voir figure 1).

Soit $x \in E$, le projeté orthogonal de x sur H est

$$p(x) = x - \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u.$$

La distance de x à H est

$$d(x, H) = \frac{|\langle x, u \rangle|}{\|u\|}.$$

Démonstration.

Il suffit d'observer que

$$x = x - \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u + \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u$$

et que

$$\langle x - \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u, u \rangle = \langle x, u \rangle - \langle x, u \rangle = 0,$$

donc que

$$x - \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u \in H.$$

On peut aussi observer que $\frac{u}{\|u\|}$ est une b.o.n. de H^\perp , et donc que $\frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u$ est le projeté orthogonal de x sur $\text{Vect}(u)$. Ainsi, $x - \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u$ est le projeté orthogonal de x sur $\text{Vect}(u)^\perp$. \square

Corollaire 2.7.2.

Soit (e_1, \dots, e_n) une b.o.n. de E , dans laquelle on écrit

$$\begin{aligned} u &= u_1 e_1 + \dots + u_n e_n, \\ x &= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n. \end{aligned}$$

Alors, la distance de x à H est

$$\frac{|x_1 u_1 + \dots + x_n u_n|}{\sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}}.$$

Démonstration.

Immédiat. \square