Devoir à la maison n° 02

À rendre le 21 septembre

1) Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par

$$\forall x \in [0,\pi] \qquad f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}} \ .$$

a) Calculer la dérivée de f. Vérifier que $f'(x)$ est du même signe que $\cos(x) - \frac{1}{2}$.

b) En déduire les variations de f sur $[0,\pi]$ et tracer sa courbe représentative.

2) Soit g la fonction définie sur $[0,\pi]$ par

$$\forall x \in [0,\pi] \qquad g(x) = \text{Arccos}\left(\frac{4-5\cos x}{5-4\cos x}\right) \ .$$

a) Vérifier que g est bien définie en tout point de $[0,\pi]$.

b) Pour $x \in [0,\pi]$, simplifier les expressions $\cos\left(g(x)\right)$ et $\sin\left(g(x)\right)$.

c) Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0,\pi[$ (*pour cela, on pourra dériver la relation donnant* $\cos\left(g(x)\right)$ *obtenue à la question précédente*).

d) Vérifier que $\forall x \in [0,\pi] \quad g(g(x)) = x$.
Qu'en déduit-on concernant la courbe (Γ) représentant g ?

e) Construire la courbe (Γ).

3) Soit x un réel appartenant à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{3}\right[$.

a) Montrer qu'il existe un unique $z \in \left]\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ tel que $f(z) = f(x)$.

b) Montrer que $z = g(x)$.

— FIN —