DS N°7 du 12 avril 2019

MECANIQUE

- *Les questions doivent être clairement séparées.*
- *Toute réponse doit être introduite par le numéro de la question et un titre, elle doit justifiée.*
- *La rédaction doit être claire et concise.*
- *Les résultats doivent être encadrés.*
- *Les différents exercices sont à démarrer sur une nouvelle page.*
- *Vérifiez l'homogénéité des résultats.*

Problème 1

Un enfant faisant de la balançoire (figure 1) est modélisé par une masse ponctuelle m située en M et suspendue en O par une tige rigide, de masse négligeable et de longueur l Le champ de pesanteur $\vec{g}$ de norme g, est supposé uniforme. L'angle que fait la tige de suspension avec la verticale est noté θ (figure 2). Les vecteurs unitaires $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_z = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta$ tels que définis sur la figure 2, définissent un trièdre orthonormé direct lié à la balançoire.

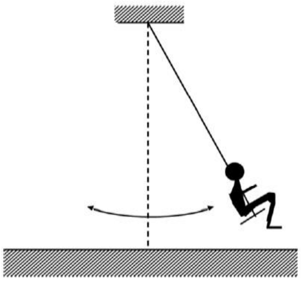


Figure 1 : enfant assis sur la balançoire

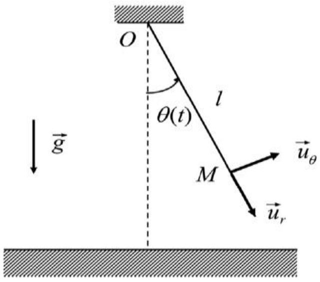


Figure 2 : schématisation de la balançoire et repère mobile associé

Le référentiel terrestre est considéré comme galiléen

1 - Dans cette question, tout frottement de la tige sur son axe de rotation et tout frottement dû à la résistance de l'air sont négligés.

1.1- Etablir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par $\theta(t)$ en utilisant trois méthodes:

1.1.1- en appliquant le principe fondamental de la dynamique;

1.1.2- en appliquant le théorème de l'énergie cinétique;

1.1.3- en appliquant le théorème du moment cinétique.

1.2- En déduire que le mouvement est plan.

Dans toute la suite du problème, les mouvements de la balançoire et de l'enfant seront étudiés dans le plan vertical de la figure 2.

2 - A quelle condition l'enfant assis sur la balançoire sera-t-il un oscillateur harmonique ?

Donner l'expression littérale de la pulsation propre ω_0 correspondante.

<u>Application numérique</u>: l'enfant part d'un angle θ_0 = 30° sans vitesse initiale. Avec les valeurs numériques suivantes : l= 2,5 m, g = 10 m.s^{-2} et m = 20 kg, calculer la période T_0 de l'oscillateur harmonique, ainsi que la vitesse maximale v_{max} de l'enfant.

3 - L'approximation de l'oscillateur harmonique est ici examinée en considérant les effets non linéaires. L'enfant part d'un angle θ_0 positif sans vitesse initiale.

En partant du théorème de l'énergie cinétique, étudié à la question (1.1.2), donner l'expression de $\frac{d\theta}{dt}$ en fonction de θ, θ_0 et des paramètres caractéristiques du système. En déduire l'expression de la période $T(\theta_0)$ sous forme d'une intégrale en fonction de θ, θ_0 et des paramètres caractéristiques du système. On précisera soigneusement les bornes d'intégration. On ne demande pas de calculer cette intégrale.

Retrouver le résultat de la question 2 dans le cas des petites oscillations.

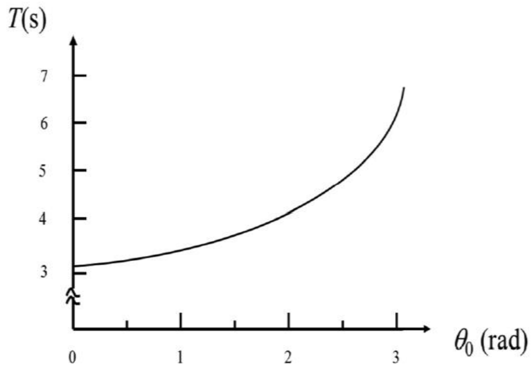


Figure 3 : période en fonction de l'angle de départ

Une intégration numérique permet de dessiner la courbe représentative de la fonction $T(\theta_0)$ ci-dessous (figure 3). Commenter cette courbe.

4 - Au point O s'exercent des forcent e frottement sur la tige. Le moment de ces forces (par rapport à O) est égal à $-C\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_z}$ où C est une constante positive.

4.1- Quelle est la dimension de C ?

4.2- Etablir l'équation différentielle à laquelle doit maintenant obéir $\theta(t)$.

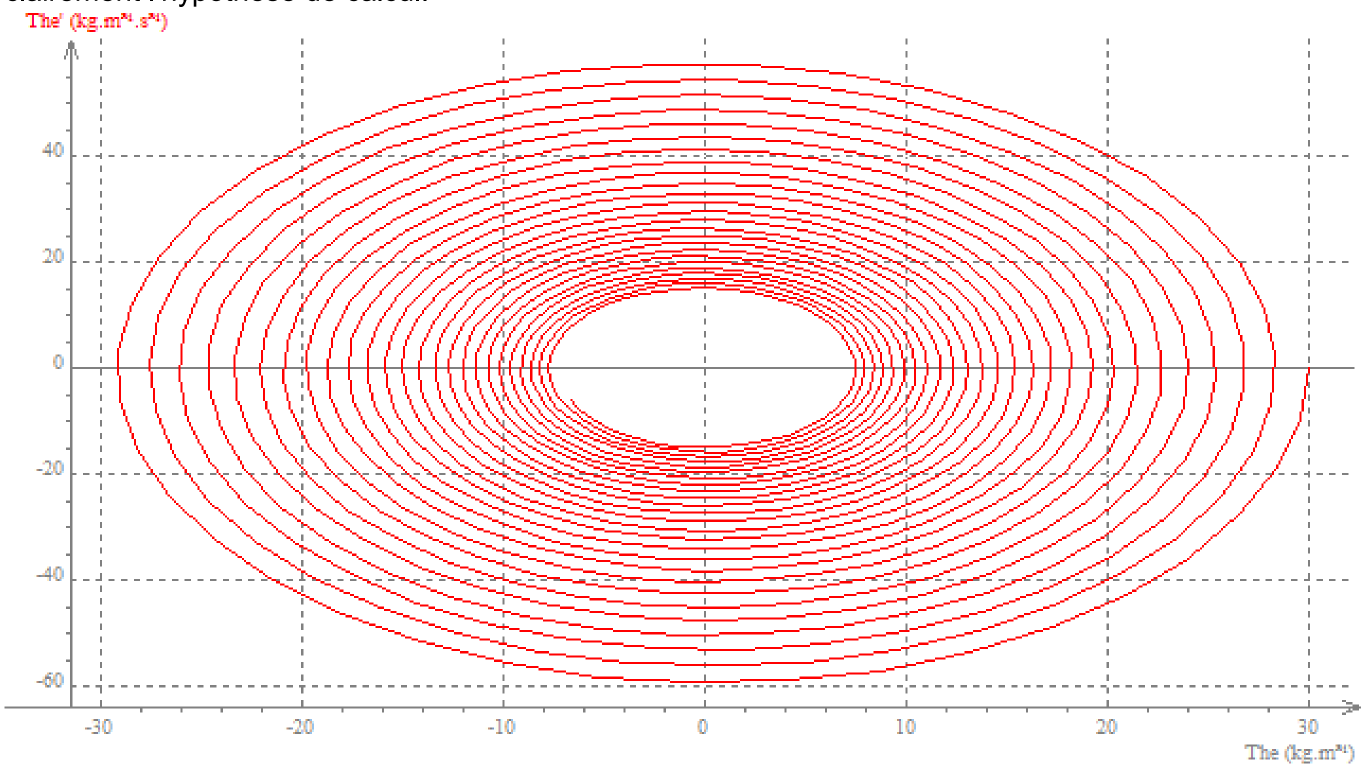
4.3- En supposant que l'angle θ reste suffisamment petit, à quelle inégalité doit satisfaire C pour que le mouvement de l'enfant puisse être considéré comme un mouvement oscillatoire dont l'amplitude décroît avec le temps ?

4.4- Application numérique : On définit le décrément logarithmique par $\delta = \frac{1}{n} ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+nT)}\right)$ où T est la pseudo période.

Mesurer à partir de la courbe de phase, en expliquant la méthode, le décrément logarithmique.

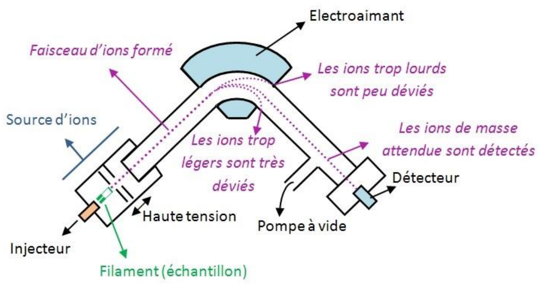
On considère ici que la pseudo période T est quasiment égale à la période propre déterminer au 2.

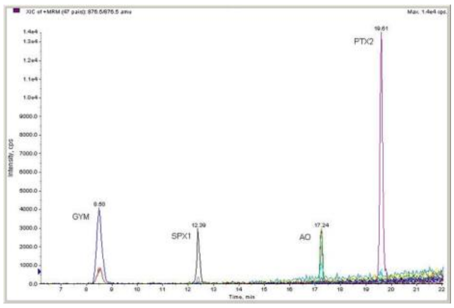
Calculer la valeur de la constante C avec les valeurs numériques données à la question 2. en explicitant clairement l'hypothèse de calcul.



Problème 2

Spectromètre de masse





Données : charge élémentaire $e = 1{,}602.10^{-19}$ C; nombre d'Avogadro $N_A = 6{,}022.10^{23}$ mol^{-1}.

La France produit l'essentiel de son électricité – environ 75 % – à partir de centrales électriques nucléaires. Ces centrales utilisent comme source d'énergie un « combustible » constitué d'oxyde d'uranium enrichi en uranium 235, seul isotope fissible, afin d'atteindre une teneur de l'ordre de 4 % . Avant utilisation dans une centrale, le minerai doit donc d'abord être traité afin de produire ce combustible.

L'uranium

L'uranium est un élément qui possède plusieurs isotopes.

1. Rappeler la définition d'un isotope. Du point de vue purement chimique, y a-t-il une différence de comportement entre deux isotopes? Pourquoi?

Les deux principaux isotopes de l'uranium sont ${}^{235}_{92}U$ et ${}^{238}_{92}U$ de masses molaires respectives 235,0439 g·mol^{-1} et 238,0508 g·mol^{-1}.

2. Donner la composition du noyau de chacun des isotopes de l'uranium.
3. Calculer la masse de chaque isotope de l'uranium.

Généralités sur le mouvement d'une particule chargées dans un champ électrique ou magnétique.

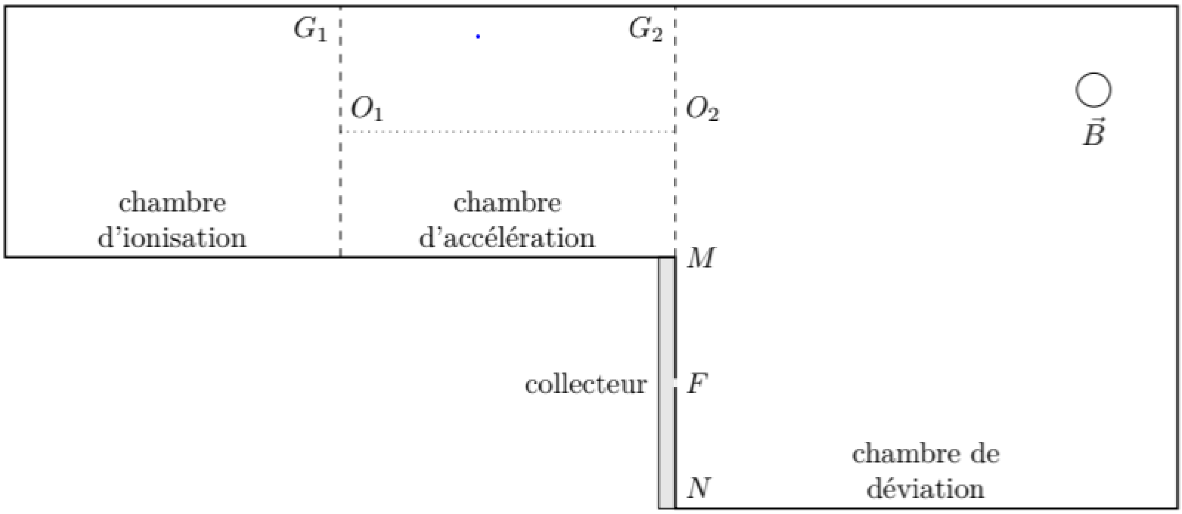
4. Donner la force que subit une particule chargée plongée dans un champ électrique et un champ magnétique. Préciser les unités de toutes les grandeurs.
5. Citer des ordres de grandeur de champs électrique et magnétiques, accessibles en laboratoire.
6. Comparer, en ordre de grandeur, le poids et la force de Lorentz, on traitera séparément la présence d'un champ électrique et d'un champ magnétique.

Séparation des isotopes par spectrométrie de masse

L'enrichissement de l'uranium a pour but d'élever la teneur en ${}^{235}U$ de l'uranium de départ à une valeur optimale pour l'application souhaitée. Une des méthodes est la spectrographie de masse qui reste la méthode la plus sensible d'analyse isotopique.

Un spectrographe de masse se compose de quatre parties :

- La chambre d'ionisation dans laquelle des atomes d'uranium ${}^{235}_{92}U$ et ${}^{238}_{92}U$ de masses respectives m_{235} et m_{238} portés à haute température sont ionisés en ions U^+. On considérera qu'à la sortie de cette chambre, en O_1, la vitesse des ions est quasi nulle.
- La chambre d'accélération dans laquelle les ions sont accélérés entre O_1 et O_2 sous l'action d'une différence de potentiel établie entre les deux grilles G_1 et G_2.
- La chambre de déviation dans laquelle les ions sont déviés par un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ de direction perpendiculaire au plan de la figure.
- Un collecteur d'ions constitué d'une plaque photosensible.



Les chambres sont sous vide, ce qui permet de considérer que les particules n'interagissent pas entre elles. On admettra qu'à la sortie de la chambre d'accélération, les vitesses des ions sont contenues dans le plan de la figure.

Accélération des ions

7. Quel doit être le signe de la différence de potentiel $V_{G1} - V_{G2}$ pour que les ions soient accélérés entre
O_1 et O_2?

8. Établir les expressions des vitesses v_{235} et v_{238} respectivement des ions ${}^{235}_{92}U^+$ et ${}^{238}_{92}U^+$ lorsqu'ils parviennent en O_2 en fonction de m_{235} et m_{238} et $U = V_{G1} - V_{G2}$.

9. L'énergie cinétique acquise par les ions en O_2 est de 15,0 keV; en déduire la valeur de la tension U appliquée entre les deux grilles.
Déterminer numériquement les vitesses v_{235} et v_{238} en respectant les chiffres significatifs.

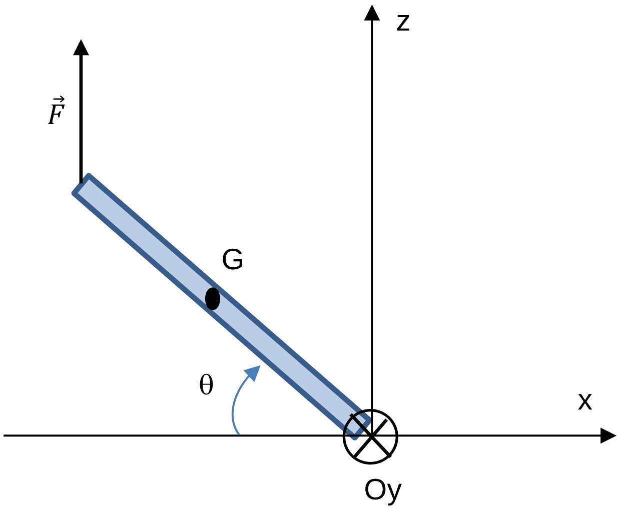
Déviation des ions

10. Justifier que le mouvement d'une particule chargée dans une zone où règne un champ magnétique est uniforme. La réponse devra être proprement justifiée.
11. Quel doit être le sens du champ magnétique $\vec{B}$ régnant dans la chambre de déviation pour que les ions puissent atteindre le collecteur?

12. Exprimer le rayon R_{235} de la trajectoire des ions ${}^{235}_{92}U^+$, en fonction de m_{235}, e,U et B = $\|\vec{B}\|$.
Faire de même pour des ions ${}^{238}_{92}U^+$, on notera R_{238} le rayon de leur trajectoire.
13. Le collecteur consiste en un récipient métallique muni d'une fente centrée en F de largeur L' placée entre M et N qui permet de recueillir les isotopes 235.
Quelle doit être la valeur du champ magnétique régnant dans le spectromètre sachant que la fente F est placée à D = 940 mm de O_2 ?
14. Le faisceau d'ions émis en O_2 est un faisceau parallèle dans le plan de la figure. La fente du collecteur a une largeur de L' = 4,0 mm dans le plan de la figure.
Peut-il y avoir séparation isotopique dans le récipient du collecteur?
15. L'intensité du faisceau utilisé dans le spectromètre est de 100 mA. La source est alimentée en uranium contenant 0,7 % de ${}^{235}_{92}U^+$ et 99,3 % de ${}^{238}_{92}U^+$.
Quelle quantité de l'isotope 235 le spectromètre peut-il isoler en une année de fonctionnement continu?

Exercice

On utilise une grue pour dresser un mur en béton préfabriqué à la verticale.
Le mur est initialement posé sur le sol (θ= 0). La grue le soulève en exerçant une force $\vec{F}$ toujours verticale appliquée en A. Le mur pivote alors autour de l'axe Oy fixe.
Le mur possède une hauteur H = OA = 3,0 m, une masse m = 5,0 10^3 kg et son centre de masse G se situe à OG = a = 1,2m de la base.
Le moment d'inertie du mur par rapport à l'axe Oy est J = 2,8 10^3 kg.m².
On néglige tous les frottements et l'accélération de la pesanteur est g = 9,8 m.s^{-2}.



1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par θ.
2. Le mur pivote de sa base Oy avec une vitesse angulaire $\omega_0 = \dot{\theta}$ = 0,20 rad.s^{-1} constante. Déterminer et calculer la force $\vec{F}$ exercée par la grue.
3. Exprimer la puissance de la force $\vec{F}$ puis le travail W effectué par la grue pour dresser le mur à la verticale. Calculer W.