

Devoir à la maison n° 15

À rendre le 19 mars

I. Développement limité et calculs de sommes

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \mapsto (1 - e^x)^n$.

- 1) Justifier que f_n admet un développement limité au voisinage de 0 à tout ordre.
- 2) Déterminer de deux manières (et formes) différentes le développement limité de f_n en 0 à l'ordre $n + 2$.
- 3) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^p$ pour chaque $p \in \llbracket 0, n + 2 \rrbracket$.

II. Étude d'un endomorphisme

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel et f un endomorphisme de E . On fait deux hypothèses :

- f n'est pas une homothétie de E ;
- $f^2 = 5f - 6\text{Id}_E$.

- 1) Montrer que f est un automorphisme de E et exprimer f^{-1} en fonction de Id_E et f .
- 2) On note \mathcal{A} le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(\text{Id}_E, f)$ de $\mathcal{L}(E)$.
 - a) Montrer que (Id_E, f) est une base de \mathcal{A} .
 - b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n \in \mathcal{A}$.
- 3) Soit λ et μ deux réels, tels que $\mu \neq 0$. Montrer que $\lambda \text{Id}_E + \mu f$ est un projecteur de E si et seulement si (λ, μ) est l'un des couples suivants : $(-2, 1)$ ou $(3, -1)$.

On pose $p = f - 2\text{Id}_E$ et $q = -f + 3\text{Id}_E$. On vient de voir que p et q sont deux projecteurs de E , de sorte que $p^2 = p$ et $q^2 = q$.

- 4)
 - a) Calculer $p + q$, $p \circ q$ et $q \circ p$.
 - b) En déduire que $\text{Ker } p = \text{Im } q$, que $\text{Ker } q = \text{Im } p$, puis que $\text{Ker } p$ et $\text{Ker } q$ sont supplémentaires dans E .
- 5)
 - a) Montrer que (p, q) est une base de \mathcal{A} et déterminer les coordonnées de Id_E et f dans cette base.
 - b) Déterminer, au moyen de la formule du binôme de Newton, les coordonnées de f^n dans la base (p, q) pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - c) En déduire enfin les coordonnées de f^n dans la base (Id_E, f) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

— FIN —