Polynômes - exercices supplémentaires

Exercice 1 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, et $x_0, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$. Montrer que le polynôme d'interpolation de P aux points $x_0, \cdots, x_n$ est le reste de la division euclidienne de P par $\prod_{i=0}^{n}(X - x_i)$.

Exercice 2 Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A^2 \mid B^2$. Montrer que $A \mid B$.

Exercice 3 Montrer que le polynôme $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ admet une racine triple. Application : déterminer les racines du polynôme $3X^5 - 5X^4 + 5X - 3$.

Exercice 4 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples, de degré supérieur ou égal à 2.

1) Montrer que P' est aussi scindé à racines simples réelles.

2) Montrer que le polynôme $P^2 + 1$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 5 Trouver tous les $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $P(0) = 0$ et $P(X^2 + 1) = P(X)^2 + 1$.

Exercice 6 Soit $x_0 = 0$ et $x_1, \cdots, x_n$ des réels tels que $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Soit $y_0, \cdots, y_n$ des réels et P le polynôme d'interpolation de Lagrange tel que $P(x_0) = y_0$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(x_i) = P(-x_i) = y_i$.
Montrer que P est pair.

Exercice 7 Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ premiers entre eux. Montrer que si r est racine double de $P^2 + Q^2$, alors r est racine de $P'^2 + Q'^2$.

Exercice 8 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé de degré supérieur ou égal à 4. Montrer que si r est une racine au moins double de P'', alors r est racine au moins quadruple de P. Généraliser.