Devoir à la maison n° 12

À rendre le 8 février

1) Soit $u=(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de terme général $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$.

a) En s'aidant des suites (u_{2n}) et (u_{2n-1}), montrer que que la suite u converge.

b) Justifier que $\forall n\geqslant 1,\ u_n<0$.

2) Soit un entier naturel $n\geqslant 2$, on introduit le polynôme

$$P_n=-1+X+\frac{1}{2}X^2+\cdots+\frac{1}{n}X^n=-1+\sum_{k=1}^{n}\frac{X^k}{k}.$$

a) Déterminer les racines du polynôme dérivé P_n', en séparant, selon la parité de n, les racines réelles des racines complexes non réelles.

b) Montrer que tout racine **<u>réelle</u>** de P_n est simple.

3) **a)** Montrer que, pour tout entier naturel $n\geqslant 2$, le polynôme P_n admet une unique racine (réelle !) dans l'intervalle $[0,+\infty[$. On note x_n cette racine : vérifier que $x_n\in[0,1]$.

b) Pour $n\geqslant 2$, déterminer le signe de $P_{n+1}(x_n)$. En déduire la monotonie de $(x_n)_{n\geqslant 2}$ puis sa convergence. On note ℓ la limite de $(x_n)_{n\geqslant 2}$.

4) On pose, pour $n\geqslant 2$,

$$G_n:\left\{\begin{array}{rcl}[0,1[& \to & \mathbb{R};\\ x & \mapsto & -1-\ln(1-x)-P_n(x).\end{array}\right.$$

a) Calculer la valeur exacte de $C=x_2$ et comparer C et 1.

b) Calculer et simplifier G_n'.

c) En déduire que, pour tout $x\in[0,C]$ et pout tout $n\geqslant 2$, $|G_n'(x)|\leqslant\dfrac{C^n}{1-C}$ puis que $|G_n(x)|\leqslant|x|\dfrac{C^n}{1-C}$.

5) **a)** Justifier que, pour $n\geqslant 2$, $x_n\in[0,C]$.

b) En déduire que, pour $n\geqslant 2$, $|1+\ln(1-x_n)|\leqslant\dfrac{C^{n+1}}{1-C}$.

c) Déterminer la valeur de ℓ.

— **FIN** —