Dérivation - exercices supplémentaires

Exercice 1 ( )

Soit f une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que si f est paire, alors f' est impaire.

2) Montrer que si f est impaire, alors f' est paire.

3) Montrer que si f est périodique de période $T \in \mathbb{R}$, alors f' est aussi périodique de période T.

Exercice 2 ( ) On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{Arcsin} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer sa dérivée et en déduire une expression plus simple de f.

Exercice 3 ( ) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et bornée telle que $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$. Montrer que $\ell = 0$.

Exercice 4 ( )

À l'aide du théorème des accroissements finis déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left((x+1)\mathrm{e}^{x+1} - x\mathrm{e}^{x}\right)$.

Exercice 5 ( )

1) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que f est décroissante.

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que f est constante.

Exercice 6 ( ) Soit f définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0, telle que $\dfrac{f(2x)-f(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que f est dérivable en 0. Que vaut alors $f'(0)$?

Exercice 7 ( ) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables, vérifiant $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x)f'(f(x)) = 1$.

Exercice 8 ( ) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et dérivable. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$0 \leqslant \frac{1}{2}f(0) + f(1) + \cdots + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n) - \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{f'(n)-f'(0)}{8}.$$

Indication : on pourra commencer par montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\dfrac{f(k+1)+f(k)}{2} - \dfrac{f'(k+1)-f'(k)}{8} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{f(k+1)+f(k)}{2}$.

Et pour ceux qui veulent une petite révision sur les recollements de solutions d'équations différentielles :

Exercice 9

1) On cherche à déterminer les solutions $y \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de l'équation $x^2y' + xy = 1$.

- **a)** Déterminer les solutions de cette équation qui sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}_+^\star$ (resp. $\mathbb{R}_-^\star$).
- **b)** Conclure.

2) Même question avec l'équation $x^3y' = 2y$.