LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I.

ANNÉE 2017 - 2018

C2 : MODÉLISATION DES SYSTÈMES ASSERVIS

Fiche méthode 1 - Décomposition en Eléments Simples(C2-2)

26 septembre 2017

1 Décomposition

Soit une fonction rationnelle :

$$Y(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

où $N(p)$ et $D(p)$ sont des dénominateur.

Supposons que $D(p)$ se factorise **au maximum** sous la forme :

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{\left(p+a_1\right)^{n_1}\left(p+a_2\right)^{n_2}\cdots\left(p^2+b_1p+c_1\right)^{m_1}\left(p^2+b_2p+c_2\right)^{m_2}\cdots}$$

(où les facteurs d'ordre 2 n'ont pas de racine réelle, et ne sont donc pas factorisables dans $\mathbb{R}$). On montre que cette fraction peut se décomposé en une somme de fractions (dit **éléments simples**) :

$$\begin{aligned}
\frac{N(p)}{D(p)} = & \frac{A}{p+a_1} + \frac{B}{\left(p+a_1\right)^2} + \frac{C}{\left(p+a_1\right)^3} + \cdots + \frac{D}{\left(p+a_1\right)^{n_1}} \\
& + \frac{E}{p+a_2} + \frac{F}{\left(p+a_2\right)^2} + \frac{G}{\left(p+a_2\right)^3} + \cdots + \frac{H}{\left(p+a_2\right)^{n_2}} \\
& + \cdots \\
& + \frac{Ip+J}{p^2+b_1p+c_1} + \frac{Kp+L}{\left(p^2+b_1p+c_1\right)^2} + \frac{Mp+N}{\left(p^2+b_1p+c_1\right)^3} + \cdots + \frac{Op+P}{\left(p^2+b_1p+c_1\right)^{m_1}} \\
& + \frac{Qp+R}{p^2+b_2p+c_2} + \frac{Sp+T}{\left(p^2+b_2p+c_2\right)^2} + \frac{Up+V}{\left(p^2+b_2p+c_2\right)^3} + \cdots + \frac{Wp+X}{\left(p^2+b_2p+c_2\right)^{m_1}} \\
& + \cdots
\end{aligned}$$

Ce qui précède se base sur les remarques suivantes :

Remarque 1 :

- Les facteurs multiples (à la puissance n) engendreront n éléments simples, dont les dénominateurs seront à la puissance $1, 2, \cdots$ jusqu'à n.
- Les facteurs d'ordre 2 (trinômes du 2^{nd} degrés qui n'ont pas de racines réelles) engendreront des éléments simples dont le dénominateur sera un binôme du 1^{er} degrés.

2 Détermination des inconnues

Plusieurs méthodes sont possibles pour déterminer les inconnus des numérateurs.

a) Identification du numérateur : la bouée de secours !

La méthode consiste à remettre tous les éléments simples au même dénominateur pour ré-obtenir une seule fraction rationnelle. Le numérateur sera donc un polynôme, fonction de toutes les inconnues. Les numérateurs peuvent alors être identifiés, coefficient.

Exemple 1 :

$$Y(p) = \frac{2}{p\left(p+3\right)^2}$$

b) Recherche de solution par limites :

Une méthode efficace consiste à venir multiplier la fonction $Y(p)$ par l'un des facteurs, puis à faire tendre la variable p vers sa racine.

Exemple 2 :

En reprenant l'exemple précédent :

$$Y(p) \times \ p$$

Pour ce qui est la recherche des inconnues issues des éléments simples dont les dénominateurs est d'ordre 2, La méthode est similaire, à la différence que l'on fait tendre la variable p vers la racine complexe. Le résultat sera alors un nombre complexe, dont on pourra identifier partie imaginaire et partie réelle.