DS n°9 : Fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom : Note :

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

Probabilités.

Une urne contient des boules numérotées de 1 à n. Pour chaque $1 \leqslant i \leqslant n$, on y a placé i boules portant le numéro i. On tire une boule, on note X son numéro, et I l'ensemble des valeurs prises par X. Soit $i \in I$.

$I =$ (1)

$E(X) =$ (3)

$P(X = i) =$ (2)

$V(X) =$ (4)

Un professeur corrige un QCM pour deux classes : la première contient 35 étudiants, la seconde 45. Un étudiant de la première classe a une chance sur 3 de faire une erreur, un étudiant de la deuxième classe une chance sur 4. Les copies sont mélangées.
Le professeur corrige une question fausse. Quelle est la probabilité que la copie provienne de la première classe ?

(5)

Six couples (H/F, c'est très vieux jeu) vont à un bal masqué. Chaque personne choisit comme cavalier une personne du sexe opposé, au hasard. Calculer la probabilité p_1 que M. S. et M. Z. dansent chacun avec leur compagne respective puis la probabilité p_2 que M. S. ou M. Z. dansent chacun avec leur compagne respective.

$p_1 =$ (6)

$p_1 =$ (7)

Une usine peut produire chaque jour entre 1 et n composants. Cependant, plus l'usine produit, moins les composants sont de bonne qualité. Plus exactement, si l'usine a produit i composants en une journée, chaque composant a une probabilité $\dfrac{i}{n}$ d'être défaillant. Les composants sont produits indépendamment les uns des autres.
Pour quelle valeur de i est-ce que le nombre moyen de composants viables produit en une journée est maximal ?

(8)

Le directeur de l'usine choisit le nombre de composants à produire uniformément entre 1 et n, on note V le nombre de composants viables produits.

$$P(V=1) = \boxed{} \quad (9) \qquad E[V] = \boxed{} \quad (10)$$

Matrices.

Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\mathscr{B}' = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$ une base de $\mathbb{R}^2$, $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{C}' = \left(\begin{pmatrix}4\\-4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$ une base de $\mathbb{R}^3$. On note $P_{\mathscr{C}'}^{\mathscr{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}'}(\mathscr{C})$.

Soit $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix}x - 2y\\2x + y\\x + y\end{pmatrix}\end{array}\right.$. Déterminer les matrices suivantes.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \boxed{} \quad (11) \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}}(f) = \boxed{} \quad (12)$$

$$P_{\mathscr{C}'}^{\mathscr{C}} = \boxed{} \quad (13) \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f) = \boxed{} \quad (14)$$

Une relation entre les trois matrices précédentes ($\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}}(f)$, $P_{\mathscr{C}'}^{\mathscr{C}}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$) est

$$\boxed{} \quad (15)$$

Avec $A = \begin{pmatrix}1 & 4 & -1\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, calculer :

$$\mathrm{rg}(A) = \boxed{} \quad (16) \qquad A \times {}^tA = \boxed{} \quad (17)$$

Calculer :

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -2\end{pmatrix} = \boxed{} \quad (18)$$

— FIN —