Feuille d'exercice n° 21 : **Dénombrement**

Exercice 1 Soit 1000 points du plan distincts. Le but est de montrer l'existence d'une droite ne passant par aucun de ces points et qui les partage en deux groupes de 500 points. On considère un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Dans toute la suite, on note $\mathscr{D}_{m,p}$ la droite d'équation $y = mx + p$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On note également $\mathscr{M}$ l'ensemble formé par les 1000 points.

1) **a)** Montrer que l'ensemble des nombres réels m tels qu'il existe $p \in \mathbb{R}$ tel que l'ensemble $\mathscr{D}_{m,p} \cap \mathscr{M}$ contienne au moins deux points est un ensemble fini.

b) Quel est le plus petit cardinal possible de l'ensemble précédent ? Quel est son plus grand cardinal possible ? Donner deux situations où ces cardinaux sont atteints.

Indication : En utilisant le fait que pour tout polynôme non nul P à coefficients rationnels, on a $P(\mathrm{e}) \neq 0$, on pourra utiliser les points de la courbe $y = \mathrm{e}^{x}$.

2) Établir l'existence d'un nombre $m_0 \in \mathbb{R}$ tel que l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, $p \mapsto \mathrm{Card}(\mathscr{D}_{m_0,p} \cap \mathscr{M})$ prenne ses valeurs dans $\{0, 1\}$.

3) Conclure.

Exercice 2 ( ) On appellera « mot » toute suite finie de lettres, qu'elle ait un sens ou non. On rappelle que la lettre « y » est une voyelle. Combien de mots de 5 lettres peut-on former avec les 26 lettres de l'alphabet latin, dans lesquels toute consonne est suivie d'une voyelle et toute voyelle d'une consonne ?

Exercice 3 ( ) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \dots, A_n$ des ensembles finis. Démontrer la *formule du crible*, ou *formule de Poincaré* :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}\, A_i - \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} \mathrm{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) \\
&\quad + \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant n} \mathrm{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) \\
&\quad + \quad \dots \\
&\quad + (-1)^{n+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_n \leqslant n} \mathrm{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n} \mathrm{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \subset [\![1,n]\!],\ \mathrm{Card}(I) = k} \mathrm{Card}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right).
\end{aligned}$$

Exercice 4 ( ) Soit E un ensemble fini et $\sigma \in S_E$. En considérant l'application $\varphi : \mathbb{Z} \to S_E$, $k \mapsto \sigma^k$, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^n = \mathrm{Id}$.

Exercice 5 Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. Combien existe-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$?

Exercice 6 Montrer que tout anneau fini, commutatif et intègre est un corps.

Exercice 7 On trace dans un plan $n \in \mathbb{N}^*$ droites en position générale (*i.e.* deux d'entre elles ne sont jamais parallèles ni trois d'entre elles concourantes). Combien forme-t-on ainsi de triangles ?

Exercice 8 (✎) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit E un ensemble à n éléments.

1) Soit $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, soit X une partie à p éléments de E. Combien y a-t-il de parties Y de E disjointes de X ?

2) Combien y a-t-il de couples (X, Y) formés de parties disjointes de E ?