

# **XXIII Dénombrement**

13 octobre 2021

Soient  $E$ ,  $F$  et  $G$  trois ensembles.

### Définition 0.0.1.

On dit que  $E$  et  $F$  sont *équipotents* s'il existe une bijection de  $E$  dans  $F$ . Dans ce cas, on notera  $E \cong F$  (notation non officielle), et si  $\varphi$  est une bijection de  $E$  dans  $F$ , on notera  $\varphi : E \xrightarrow{\sim} F$ .

### Proposition 0.0.2.

La relation d'équipotence est une relation d'équivalence.

## 1 Cardinal d'un ensemble fini.

Le programme stipule que parmi les propriétés de la partie 1, les plus intuitives seront admises sans démonstration ; il stipule également que l'utilisation systématique de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.

### Définition 1.0.1.

On dit que  $E$  est *fini* s'il est vide ou s'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $E \cong [1, n]$ .  
Dans le cas contraire,  $E$  est dit *infini*.

Le résultat qui donne un sens à ce que l'on appelle intuitivement *le nombre d'éléments d'un ensemble fini* est alors le suivant.

**Théorème 1.0.2.** (i) Soient  $n, m$  deux entiers naturels non nuls. Si  $[1, n] \cong [1, m]$ , alors  $n = m$ .

(ii) Cela assure que si un ensemble est fini et équipotent à  $[1, n]$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$ , alors ce  $n$  est unique et est appelé le *cardinal* de  $E$ , et est noté  $\text{Card } E$  ou  $|E|$ .

Par convention,  $\text{Card } \emptyset = 0$ .

### Démonstration.

La démonstration du premier point se fait par récurrence sur  $n$  en posant l'hypothèse  $(P_n)$  : pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ , si  $[1, m] \cong [1, n]$ , alors  $m = n$ .

La démonstration est tout à fait du même style que les démonstrations des résultats 1.0.6 et 1.0.7, et est laissée en exercice.  $\square$

### Remarque 1.0.3.

On trouvera parfois la notation  $\#E$ .

**Exemple 1.0.4.** 1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $[1, n]$  est évidemment fini et de cardinal  $n$ .

2. Soient  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n < m$ .

Alors  $\text{Card}[n, m] = m - n + 1$ . En effet, l'application  $[1, m - n + 1] \rightarrow [n, m]$ ,  $a \mapsto a + n - 1$  est une bijection.

**Dans toute la suite on supposera que  $E$  est fini de cardinal  $n$ .**

### Théorème 1.0.5.

$E$  est équipotent à  $F$  si et seulement si ( $F$  est aussi fini et  $\text{Card } E = \text{Card } F$ ).

### Démonstration.

Si  $E$  est vide,  $F$  aussi.

Sinon, soit  $\varphi : [1, n] \xrightarrow{\sim} E$ , et  $\psi : E \xrightarrow{\sim} F$ . Alors  $\psi \circ \varphi : [1, n] \xrightarrow{\sim} F$ .  $\square$

### Lemme 1.0.6.

Supposons  $E$  non vide, et  $a \in E$ . Alors  $E \setminus \{a\}$  est fini de cardinal  $n - 1$ .

### Démonstration.

Le cas où  $E = \{a\}$  est évident. Supposons donc que  $E \setminus \{a\}$  est non vide.

Soit  $\varphi : [1, n] \xrightarrow{\sim} E$ .

— Si  $\varphi(n) = a$ , posons  $\psi = \varphi$ .

— Si  $\varphi(n) = b$  pour  $b$  un élément de  $E$  différent de  $a$ , notons  $p$  l'antécédent de  $a$ . Donc  $p < n$ . Posons alors  $\psi = \varphi \circ \tau_{p,n}$ , où  $\tau_{p,n}$  est la transposition de  $S_n$  échangeant  $p$  et  $n$ .

Alors, dans tous les cas,  $\psi : [1, n] \xrightarrow{\sim} E$ , et  $\psi(n) = a$ . Ainsi,  $\psi|_{[1, n-1]} : [1, n-1] \xrightarrow{\sim} E \setminus \{a\}$ , d'où le résultat.  $\square$

**Théorème 1.0.7.**

Soit  $A \subset E$ . Alors  $A$  est fini et  $\text{Card } A \leq \text{Card } E$ . De plus,  $\text{Card } A = \text{Card } E$  si et seulement si  $A = E$ .

**Démonstration.**

On le montre par récurrence sur  $n = \text{Card } E$ .

Si  $n = 0$ ,  $E = A = \emptyset$ , et le résultat est évident.

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que pour tout ensemble  $E$  de cardinal  $n$ , et pour tout  $A \subset E$ ,  $A$  est fini et  $\text{Card } A \leq \text{Card } E$ .

Soit  $E$  de cardinal  $n + 1$ , et  $A \subset E$ . Si  $A = E$ , alors  $A$  est fini et  $\text{Card } A = \text{Card } E$ .

Sinon, soit  $a \in E \setminus A$ . Posons  $\tilde{E} = E \setminus \{a\}$ . Alors  $\text{Card } \tilde{E} = n$  d'après le lemme précédent, et  $A \subset \tilde{E}$ . Par hypothèse de récurrence,  $A$  est fini, et  $\text{Card } A \leq n$ . En particulier,  $\text{Card } A < \text{Card } E$ , donc  $A \neq E$ , ce qui prouve au passage que  $\text{Card } A = \text{Card } E$  si et seulement si  $A = E$ .  $\square$

**Remarque 1.0.8.**

Grâce à ce résultat, pour montrer l'égalité de deux ensembles finis, on peut montrer la double inclusion, mais aussi se contenter d'une inclusion et montrer l'égalité des cardinaux.

Ce résultat est à rapprocher du résultat assurant que deux espaces vectoriels de dimension finie sont égaux si et seulement si l'un est inclus dans l'autre et ils ont même dimension.

**Lemme 1.0.9.**

Soit  $f$  une application surjective de  $F$  dans  $G$ . Alors il existe une injection de  $G$  dans  $F$ .

**Démonstration.**

Soit  $y \in G$ . Alors  $y$  a un (ou plusieurs) antécédent(s) par  $f$ . Choisissons un de ces antécédents, par exemple le plus petit, puisque  $f^{-1}(\{y\})$  est une partie non vide de  $\mathbb{N}$ , et notons-le  $g(y)$ . On définit ainsi une application  $g : G \rightarrow F$ , tel que pour tout  $y \in G$ ,  $f(g(y)) = y$ . Ainsi,  $f \circ g$  est injective, et on sait alors que  $g$  est injective de  $G$  dans  $F$ .  $\square$

**Exercice 1.0.10.**

Montrer que s'il existe une injection  $f : F \rightarrow G$ , alors il existe une surjection  $g : G \rightarrow F$ .

**Théorème 1.0.11.**

Soit  $f$  une application de  $F$  dans  $G$ .

- (i) Si  $G$  est fini et  $f$  est injective, alors  $F$  est fini également, et  $\text{Card } F \leq \text{Card } G$ .

- (ii) Si  $F$  est fini et  $f$  est surjective, alors  $G$  est fini également, et  $\text{Card } F \geq \text{Card } G$ .  
(iii) Si  $F$  et  $G$  sont finis et  $\text{Card } F = \text{Card } G$ , alors :

$f$  est injective  $\Leftrightarrow f$  est surjective  $\Leftrightarrow f$  est bijective.

**Remarque 1.0.12.**

La relation «  $F$  a moins d'éléments que  $G$  » correspond donc à «  $F$  s'injecte dans  $G$  » (au moins pour des ensembles finis).

De même, la relation «  $F$  a plus d'éléments que  $G$  » correspond donc à «  $F$  se surjecte sur  $G$  » (au moins pour des ensembles finis).

Concernant des ensembles quelconques, le lecteur intéressé pourra étudier le théorème de Cantor-Bernstein.

**Remarque 1.0.13.**

Une fois encore, ce résultat est à rapprocher des résultats sur les espaces vectoriels et les applications linéaires en dimension finie.

**Démonstration.** (i)  $f$  étant injective, elle établit une bijection de  $F$  dans  $f(F)$ . Or  $f(F) \subset G$ , donc  $f(F)$  est fini et  $\text{Card } f(F) \leq \text{Card } G$ . Ainsi, puisque  $F \cong f(F)$ ,  $F$  est fini et  $\text{Card } F \leq \text{Card } G$ .

- (ii) En utilisant 1.0.9, soit  $g$  injective de  $G$  dans  $F$ . En appliquant le premier point,  $G$  est donc fini et  $\text{Card } G \leq \text{Card } F$ .

- (iii) Il suffit de démontrer :  $f$  est injective  $\Leftrightarrow f$  est surjective, le reste étant alors facile.

Pour le sens direct, si  $f$  est injective,  $f$  est une bijection de  $F$  dans  $f(F)$ , donc  $\text{Card } F = \text{Card } f(F)$ . Mais  $\text{Card } G = \text{Card } F$ , donc  $\text{Card } f(F) = \text{Card } G$ , et comme  $f(F) \subset G$ , nous avons  $f(F) = G$ , ce qui signifie bien que  $f$  est surjective.

Pour le sens indirect, soient  $x, y \in F$  tels que  $f(x) = f(y)$  et  $x \neq y$ . Alors  $f(y) \in f(F \setminus \{x\})$ , et donc  $f(F \setminus \{x\}) = G$ . Par conséquent,  $f|_{F \setminus \{x\}}$  est surjective à valeurs dans  $G$ , donc avec le point (ii),  $\text{Card } F \setminus \{x\} \geq \text{Card } G$ . Mais  $\text{Card } F \setminus \{x\} = \text{Card } F - 1 = \text{Card } G - 1$ , ce qui est absurde. Par conséquent,  $f$  est aussi injective.  $\square$

**Exercice 1.0.14.**

Soient  $(G, \star)$  un groupe et  $A$  une partie *finie* non vide de  $G$  stable par  $\star$ . Soit  $x \in A$ .

1. Soit  $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow G$  l'application définie par  $\varphi(n) = x^n$ . Montrer que  $\varphi$  n'est pas injective.
2. En déduire que  $x^{-1} \in A$ , puis que  $A$  est un sous-groupe de  $(G, \star)$ .

**Corollaire 1.0.15** (Principe des tiroirs, ou *Pigeonhole Principle* en anglais).

Si  $m < n$ , il est impossible de ranger  $n$  paires de chaussettes dans  $m$  tiroirs sans en mettre au moins deux dans le même tiroir.

**Exercice 1.0.16.**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ . Montrer qu'il existe  $0 \leq i \neq j \leq n$  tels que  $n \mid (a_i - a_j)$ .

**Exercice 1.0.17.** 1. On prend un Rubik's Cube fini sur lequel on effectue la même manipulation encore et toujours. Démontrer que l'on finit par se retrouver avec ce Rubik's Cube de nouveau terminé<sup>1</sup>.

2. Les membres d'une société internationale sont originaires de six pays différents. La liste des membres contient 1978 noms numérotés de 1 à 1978. Montrer qu'il y a un membre dont le numéro vaut la somme des numéros de deux autres membres venant du même pays ou le double du numéro d'un compatriote.

## 2 Dénombrement.

### 2.1 Réunion, intersection et complémentaire.

**Définition 2.1.1.**

Lorsque deux ensembles  $A$  et  $B$  sont disjoints, la réunion de  $A$  et  $B$  est appelée *union disjointe* de  $A$  et  $B$ , et est notée  $A \sqcup B$ .

**Théorème 2.1.2.**

Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ .

<sup>1</sup> Pour mémoire, il y a plus de  $43.10^{12}$  combinaisons possibles sur un Rubik's Cube classique.

- (i) Si  $A$  et  $B$  sont disjoints, alors  $\text{Card}(A \sqcup B) = \text{Card } A + \text{Card } B$  ;
- (ii)  $\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card } A - \text{Card}(A \cap B)$  ;
- (iii)  $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}(A \cap B)$ .
- (iv)  $\text{Card}(\mathbb{C}_E^A) = \text{Card } E - \text{Card } A$ .

**Démonstration.** (i) Soient  $m, p$  les cardinaux de  $A$  et  $B$ , et  $\varphi : \llbracket 1, m \rrbracket \xrightarrow{\sim} A$  et  $\psi : \llbracket 1, p \rrbracket \xrightarrow{\sim} B$ .

Soit  $\chi : \llbracket 1, m+p \rrbracket \rightarrow A \sqcup B$

$$x \mapsto \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \leq m \\ \psi(x-m) & \text{si } x > m \end{cases}$$

Cette application est bien définie et il est facile de voir qu'elle est surjective. De plus,  $A$  et  $B$  étant disjoints, elle est injective, donc  $A \sqcup B \cong \llbracket 1, m+p \rrbracket$ , donc  $\text{Card}(A \sqcup B) = m+p = \text{Card } A + \text{Card } B$ .

- (ii) Il suffit d'écrire que  $A = (A \cap B) \sqcup (A \setminus B)$  et d'utiliser le premier point.
- (iii) Là encore, on remarque que  $A \cup B = B \sqcup (A \setminus B)$  et on utilise les deux premiers points.
- (iv) Remarquer que  $\mathbb{C}_E^A = E \setminus A$ .

□

**Remarque 2.1.3.**

Il existe une formule qui généralise le résultat précédent à la réunion d'une famille finie d'ensembles finis : c'est la *formule de Poincaré*, aussi appelée *formule du crible*. Elle est hors-programme et sera vue en TD.

### 2.2 Produit cartésien.

**Théorème 2.2.1.**

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles finis. Alors  $E \times F$  est fini et

$$\text{Card}(E \times F) = (\text{Card } E) \times (\text{Card } F).$$



Il existe beaucoup d'analogies entre la dimension d'un espace vectoriel et le cardinal d'un ensemble, mais  $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$ .

**Démonstration.**

On note :

$$n = \text{Card } E, p = \text{Card } F, \\ E = \{e_1, \dots, e_n\}, F = \{f_1, \dots, f_p\}.$$

Donc  $E \times F = \{(e_i, f_j), i \in \llbracket 1, n \rrbracket, j \in \llbracket 1, p \rrbracket\}$ .

Donc en notant  $A_i = \{e_i\} \times F$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a :

$$E \times F = \bigsqcup_{i=1}^n A_i,$$

ainsi

$$\begin{aligned} \text{Card } E \times F &= \sum_{i=1}^n \text{Card } A_i \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Card } F \\ &= n \text{ Card } F \\ &= \text{Card } E \times \text{Card } F. \end{aligned}$$

□

### Remarque 2.2.2.

Ce résultat se généralise facilement par récurrence à un produit de  $q$  ensembles finis,  $q \in \mathbb{N}^*$  :

$$\text{Card} \left( \prod_{i=1}^q E_i \right) = \prod_{i=1}^q \text{Card } E_i.$$

### Exercice 2.2.3.

Combien y a-t-il de possibilités de tirer neuf cartes avec remise dans un jeu de 32 cartes ?

## 2.3 Applications entre ensembles finis.

### Théorème 2.3.1.

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles finis. Alors  $F^E$  est fini et

$$\text{Card} (F^E) = (\text{Card } F)^{\text{Card } E}.$$

#### Démonstration.

On pose  $\varphi : \llbracket 1, n \rrbracket \xrightarrow{\sim} E$ , et :

$$\begin{aligned} \mu : F^E &\rightarrow F^n \\ f &\mapsto (f \circ \varphi(1), \dots, f \circ \varphi(n)) = (f \circ \varphi(i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \\ \nu : F^n &\rightarrow F^E \\ (f_1, \dots, f_n) = (f_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} &\mapsto \begin{cases} E &\rightarrow F \\ x &\mapsto f_{\varphi^{-1}(x)} \end{cases} \end{aligned}$$

On vérifie que  $\nu \circ \mu = \text{Id}_{F^E}$  et  $\mu \circ \nu = \text{Id}_{F^n}$ , donc ce sont des bijections. Ainsi  $F^E \cong F^n$  et l'on peut conclure avec 1.0.5. □

### Définition 2.3.2.

Soit  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On appelle  *$p$ -arrangement de  $E$*  toute injection de  $\llbracket 1, p \rrbracket$  dans  $E$ . Autrement dit, un  $p$ -arrangement est une manière de choisir  $p$  éléments deux à deux distincts de  $E$  **en tenant compte de l'ordre dans lequel on choisit ces éléments** ; c'est donc aussi un  $p$ -uplet de  $E$ , ou encore une liste de  $p$  éléments de  $E$ .

### Exemple 2.3.3.

Si  $E = \llbracket 1, 5 \rrbracket$  et  $p = 2$ , les applications  $\varphi$  et  $\psi$  de  $\llbracket 1, 2 \rrbracket$  dans  $E$  telles que  $\varphi(1) = 3$ ,  $\varphi(2) = 5$ ,  $\psi(1) = 5$  et  $\psi(2) = 3$ , sont deux  $p$ -arrangements différents de  $E$ .

On peut aussi les identifier aux couples  $(3, 5)$  et  $(5, 3)$ .

### Théorème 2.3.4.

Si  $\text{Card } E = n$ , il y a exactement  $\frac{n!}{(n-p)!}$   $p$ -arrangements de  $E$ .

#### Démonstration.

Pour construire une injection  $f$  de  $\llbracket 1, p \rrbracket$  dans  $E$ , il y a  $n$  choix possibles pour  $f(1)$ . Il reste alors  $n-1$  choix possibles pour  $f(2)$  et ainsi de suite, jusqu'aux  $n-p+1$  choix possibles pour  $f(p)$  : il y a donc  $n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)$  injections possibles. □

### Remarque 2.3.5.

Les arrangements sont utilisés pour modéliser des tirages **successifs** et **sans remise**.

### Exercice 2.3.6.

Vous jouez « au hasard » au tiercé lors d'une course avec 10 partants : combien avez-vous de chance d'avoir le tiercé dans l'ordre ?

### Corollaire 2.3.7.

Le groupe  $S_n$  des permutations sur  $n$  éléments est fini de cardinal  $n!$ .

#### Démonstration.

$S_n$  correspond à l'ensemble des  $n$ -arrangements de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . □

## 2.4 Parties d'un ensemble fini.

### Définition 2.4.1.

Soit  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On appelle  $p$ -combinaison de  $E$  toute partie de  $E$  de cardinal  $p$ . Autrement dit, une  $p$ -combinaison est une manière de choisir  $p$  éléments distincts de  $E$  **sans tenir compte de l'ordre dans lequel on choisit ces éléments**.

On note alors  $\binom{n}{p}$  le nombre de  $p$ -combinaisons de  $E$  ; ce nombre se lit «  $p$  parmi  $n$  ».

### Remarque 2.4.2.

Les combinaisons sont utilisées pour modéliser des tirages **simultanés**.

### Remarque 2.4.3.

On étend cette définition à  $p \in \mathbb{Z}$  par  $\binom{n}{p} = 0$  lorsque  $p \notin \llbracket 0, n \rrbracket$ .

### Théorème 2.4.4.

Si  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , alors  $\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ .

### Remarque 2.4.5.

Nous venons donc de donner une nouvelle définition du coefficient binomial  $\binom{n}{p}$ , défini en début d'année, et que nous avons interprété comme le nombre de chemin réalisant  $p$  succès lors de  $n$  répétitions d'une même expérience aléatoire. Remarquons à nouveau qu'il s'agit d'un entier, ce qui n'est absolument pas évident avec la formule du théorème 2.4.4.

### Démonstration.

Commençons par remarquer qu'ordonner (totalement) un ensemble à  $n$  éléments revient à numéroter ses éléments de 1 à  $n$ . Par conséquent, un ordre sur  $E$  peut être vu comme une bijection de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  dans  $E$ , ou encore comme une permutation de  $E$ . Il y a donc  $n!$  façons d'ordonner un ensemble à  $n$  éléments.

Ainsi, pour chaque choix de  $p$  éléments parmi  $n$ , il existe  $p!$   $p$ -arrangements contenant ces  $p$ -éléments : il y a donc exactement  $p!$  fois plus de  $p$ -arrangements que de  $p$ -combinaisons. Ainsi,  $\binom{n}{p} = \frac{1}{p!} \times \frac{n!}{(n-p)!}$ .  $\square$

### Exercice 2.4.6.

Vous jouez au hasard au tiercé lors d'une course avec 10 partants : combien avez-vous de chance d'avoir le tiercé dans le désordre ?

**Proposition 2.4.7** (Formule du triangle de Pascal).

Si  $n \in \mathbb{N}$  et si  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ .

### Démonstration.

On donne ici une preuve combinatoire. Le cas où  $p \notin \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  est évident. Sinon, soit  $E$  de cardinal  $n$  et  $a \in E$ . Notons  $F_p$  l'ensemble des parties de  $E$  à  $p$  éléments, alors

$$F_p = \underbrace{\{A \subset E \mid |A| = p \text{ et } a \in A\}}_{A_p} \sqcup \underbrace{\{A \subset E \mid |A| = p \text{ et } a \notin A\}}_{B_p}.$$

Il est évident (*sinon, détaillez le !*) que  $A_p$  est en correspondance bijective avec l'ensemble des parties de  $E \setminus \{a\}$  ayant  $p-1$  éléments (par  $A \mapsto A \setminus \{a\}$ ) et possède donc  $\binom{n-1}{p-1}$  éléments. De même,  $B_p$  est en correspondance bijective avec l'ensemble des parties de  $E \setminus \{a\}$  ayant  $p$  éléments (par  $A \mapsto A$ ) et possède donc  $\binom{n-1}{p}$  éléments. Cela permet donc de conclure, car  $|F_p| = |A_p| + |B_p|$ .  $\square$

**Proposition 2.4.8** (Formule du binôme de Newton).

Soit  $x$  et  $y$  deux éléments d'un anneau  $(A, +, \cdot)$  commutant l'un avec l'autre ( $xy = yx$ ), soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

### Démonstration.

En voici une preuve combinatoire. On montre d'abord aisément par récurrence que toutes les puissances de  $x$  et de  $y$  commutent. Ensuite, lorsque l'on développe le produit

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y) \cdots (x+y)}_{n \text{ fois}}$$

on obtient des termes qui sont des produits de  $k$  facteurs valant  $x$ , et de  $n-k$  facteurs valant  $y$ , pour  $k$  allant de 0 à  $n$ . Or, pour chacun de ces  $k$ , il y a  $k$  parmi  $n$  possibilités d'obtenir un produit de  $k$  facteurs valant  $x$ , et de  $n-k$  facteurs valant  $y$ , d'où le résultat.  $\square$

**Théorème 2.4.9.**

Si  $E$  est fini, l'ensemble  $\mathcal{P}(E)$  des parties l'est aussi et

$$\text{Card } \mathcal{P}(E) = 2^{\text{Card } E}.$$

**Démonstration.**

Pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , notons  $P_i$  l'ensemble des parties de  $E$  ayant  $i$  éléments. Nous avons alors  $\mathcal{P}(E) = \bigsqcup_{i=0}^n P_i$ . Or chaque  $P_i$  est de cardinal  $\binom{n}{i}$ , donc  $\mathcal{P}(E)$  est fini et :

$$\begin{aligned} \text{Card } \mathcal{P}(E) &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \\ &= (1+1)^n \quad (\text{binôme de Newton}) \\ &= 2^n. \end{aligned}$$

On peut aussi voir qu'il y a une correspondance bijective entre les parties de  $E$  et les applications à variables dans  $E$  et à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , par  $\mathcal{P}(E) \rightarrow \{0, 1\}^E$ ,  $A \mapsto \mathbf{1}_A$ .  $\square$

**Exercice 2.4.10.**

Dans une urne, on place quatre boules rouges (numérotées 1 à 4) et trois boules vertes (numérotées 5 à 7). On réalise trois tirages avec remise, un résultat est le triplet des boules tirées.

Combien y a-t-il de résultats contenant exactement une boule rouge ? Au moins une boule rouge ? Au plus deux boules rouges ? Dont les deux dernières boules sont de couleurs différentes ?

Et si les tirages se font sans remise ?