Devoir facultatif n° 7

Partie 1 - Localisation des racines positives d'un polynôme

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ne s'annulant pas en zéro, que l'on écrit sous la forme

$$P = a_0 + a_1 X^{b_1} + \cdots + a_n X^{b_n}$$

avec

$$0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n$$

et $a_k \neq 0$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$.

On désigne par Z l'ensemble des racines de P.

Soit $V(P)$ le nombre de changements de signes parmi les coefficients de P, *i.e.*

$$V(P) = \operatorname{card}\{0 \leqslant k < n \mid a_k a_{k+1} < 0\}.$$

On désigne par $n_+(P)$ le nombre de racines de P strictement positives comptées avec multiplicités. Autrement dit, si m_r est la multiplicité de la racine r alors

$$n_+(P) = \sum_{r \in Z \text{ et } r > 0} m_r.$$

On cherche à montrer le résultat suivant (règle de Descartes).

> Si P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ n'admettant pas 0 pour racine alors $n_+(P) \leqslant V(P)$.

1) Établir la règle de Descartes si $n = 0$ ou $n = 1$.

2) Montrer que $X^{b_1 - 1}$ divise P'.

Dans toute la suite de cette partie, on note Q le quotient de la division de P' par X^{b_1-1} et

$$r_1 < \cdots < r_\ell$$

les racines strictement positives de P.

On suppose également que la règle de Descartes est vraie au rang $n - 1$ avec $n \geqslant 1$.

3) Montrer que

$$n_+(Q) \geqslant n_+(P) - 1$$

4) Montrer que $n_+(P) \leqslant V(P)$ si $a_0 a_1 < 0$.

5) On suppose dans cette question $a_0 a_1 > 0$.

a) Montrer que si $a_0 > 0$, P est croissante au voisinage de 0 à droite.

b) Montrer que si $a_0 < 0$, $-P$ est croissante au voisinage de 0 à droite.

c) En déduire que Q admet une racine dans l'intervalle $]0, r_1[$.

d) Montrer que $n_+(P) \leqslant V(P)$.

On cherche maintenant à affiner cette règle de Descartes dans un cas particulier.

6) Soit $P^- = P(-X)$ et $c_k = (-1)^{b_k} a_k$ le coefficient de X^{b_k} dans P^-.

a) Montrer que si $c_k c_{k+1} < 0$ et si $a_k a_{k+1} < 0$, alors $b_{k+1} - b_k \geqslant 2$.

b) On désigne par $V(P, P^-)$ le nombre d'indice k tels que $c_k c_{k+1} < 0$ et $a_k a_{k+1} < 0$. Montrer que

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=0}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) \\ &\geqslant (V(P) - V(P, P^-)) + (V(P^-) - V(P, P^-)) + 2V(P, P^-). \end{aligned}$$

Indication : on pourra partitionner l'intervalle d'entiers $[\![0, n-1]\!]$ en quatre, selon que l'on a, ou non, $a_k a_{k+1} < 0$ et que l'on a, ou non, $c_k c_{k+1} < 0$.

c) En déduire que si P a toutes ses racines réelles, $n_+(P) = V(P)$.

Partie 2 - Localisation des racines d'un polynôme

On considère dans cette partie un polynôme P à coefficients complexes, *unitaire*, de degré $n > 0$ et de coefficient constant a_0 non nul. On écrit :

$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n.$$

On définit aussi

$$\gamma_1 = 1 + \max_{0 \leqslant k < n} |a_k| \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \max\left(1, \sum_{0 \leqslant k < n} |a_k|\right).$$

On suppose dans les quatre premières questions de cette partie que P est à coefficients réels avec

$$a_0 < 0, a_1 \leqslant 0, \cdots, a_{n-1} \leqslant 0$$

7) Montrer que P admet une unique racine strictement positive, que l'on notera ρ.
Indication : on pourra considérer $\frac{P(x)}{x^n}$ ou utiliser la première partie.

8) Montrer que pour tout nombre complexe z, $|P(z)| \geqslant P(|z|)$.

9) Montrer que $\rho \leqslant \gamma_1$ et $\rho \leqslant \gamma_2$.

10) Montrer que pour toute racine r de P, on a $|r| \leqslant \min(\gamma_1, \gamma_2)$.

11) On retourne au cas général.
Montrer que toute racine r de P vérifie $|r| \leqslant \min(\gamma_1, \gamma_2)$.
Indication : on considérera $Q = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| X^k$.

Partie 3 - Isolement des zéros d'une fonction

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que f et sa dérivée f' n'ont pas de zéros communs. On note Z l'ensemble des zéros de f.

12) Soient $a < b$ deux réels dans I et $c = \dfrac{a+b}{2}$.

a) Montrer que si f admet un zéro dans $[a, b]$ alors

$$|f(c)| \leqslant \frac{b-a}{2} \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |f'(t)|.$$

b) Montrer que si f admet deux zéros dans $[a, b]$ alors

$$|f'(c)| \leqslant \frac{b-a}{2} \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |f''(t)|.$$

13) **a)** Montrer que les zéros de f sont isolés, *i.e.* pour tout zéro r de f, il existe un $\varepsilon_r > 0$ tel que r soit le seul zéro de f dans $[r - \varepsilon_r, r + \varepsilon_r]$.

b) En déduire que l'intersection de Z avec tout segment inclus dans I est fini.

c) Donner un exemple de fonction g de classe $\mathcal{C}^2$, sans racine en commun avec sa dérivée sur un intervalle borné et qui admet un nombre infini de zéros.

14) On suppose dorénavant que I est un segment.

a) Soient α et β des majorants respectifs de $|f'|$ et $|f''|$ dans I. Montrer qu'il existe un entier naturel n tel que pour tout $t \in [a, b]$, on ait l'une ou l'autre des inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} |f(t)| &> \alpha \frac{b-a}{2^n} \\ |f'(t)| &> \beta \frac{b-a}{2^n} \end{aligned}$$

b) Montrer qu'il existe une subdivision $(c_k)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ à pas constant telle que, pour tout $0 \leqslant k < p$, f a au plus un zéro sur $[c_k, c_{k+1}]$.

c) Écrire un algorithme qui sépare les zéros (un pseudo-code suffira). (On supposera f', α et β donnés.)
On s'attachera à montrer qu'il s'arrête au bout d'un nombre fini d'itérations.

— FIN —