Devoir surveillé n°2

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$, calculer les quantités suivantes.

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ **2)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$ **3)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

II. Suite de Sylvester.

On définit la suite de Sylvester par :

$$s_0 = 2, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ s_{n+1} = 1 + \prod_{k=0}^{n} s_k.$$

1) Calculer s_1, s_2, s_3 et s_4.

2) Montrer que, pour tout entier naturel n, s_n est un entier supérieur ou égal à $n+2$.

3) Que peut-on en déduire quant à la limite de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

4) Déterminer le sens de variations de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5) **a)** Montrer que pour tout entier naturel n : $s_{n+1} = s_n^2 - s_n + 1$.

b) Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}$ la quantité $\dfrac{1}{s_n - 1} - \dfrac{1}{s_{n+1} - 1}$.

c) En déduire l'existence et la valeur de la limite de $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{s_n}$ lorsque N tend vers $+\infty$.

6) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{\ln(s_n)}{2^{n+1}}$.

a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

7) On note dorénavant ℓ la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'on pose $r = \sqrt[3]{2}$.

a) Montrer que $\left(1 + \dfrac{5}{16}\right)^3 \geqslant 2$. Que peut-on en déduire quant à r ?

b) Montrer que $s_0 s_1 s_2 \geqslant r^{16}$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ supérieur ou égal à 3 : $s_n \geqslant r^{2^{n+1}}$.
Indication : on pourra procéder par récurrence.

d) Que peut-on en déduire quant à ℓ et r ?

e) Proposer (en le justifiant) une majoration de ℓ.

III. Suites récurrentes triples.

On se propose d'étudier de deux manières différentes les suites (u_n) vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n. \qquad (\mathscr{R})$$

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites vérifiant $(\mathscr{R})$. Montrer que si $u_0 = v_0$, $u_1 = v_1$ et $u_2 = v_2$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n$.

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites vérifiant $(\mathscr{R})$. Montrer que, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de $(\mathscr{R})$.

3) Soit $r \in \mathbb{C}$. Montrer que $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$ si et seulement si $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $(\mathscr{R})$.

4) En déduire qu'il existe uniquement trois réels $r_1 < r_2 < r_3$, que l'on calculera, tels que, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, la suite géométrique $(r_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $(\mathscr{R})$.

5) *Application.* soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $(\mathscr{R})$ telle que $u_0 = 2$, $u_1 = -1$ et $u_2 = 4$. Déterminer $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \\ r_1^2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \\ r_2^2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ r_3 \\ r_3^2 \end{pmatrix}$$

et en déduire l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $(\mathscr{R})$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il existe une matrice A, que l'on explicitera, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n.$$

7) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$.

8) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Résoudre le système d'inconnues x, y, z :

$$P \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

9) En déduire que P est inversible et expliciter P^{-1}.

10) Calculer $D = P^{-1}AP$.

11) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.

12) En déduire l'expression du terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Vérifier que l'on retrouve bien le résultat trouvé à la question **5)**.

— FIN —