Ex. 27 :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{8k^3+n^3} \quad \left(= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right.$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 n}{8k^3+n^3}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{8\left(\frac{k}{n}\right)^3+1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

avec $f : x \longmapsto \frac{x^2}{8x^3+1}$, et $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f$

$$\int_0^1 f = \frac{1}{24} \int_0^1 \frac{24x^2}{8x^3+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{24}\left[\ln(8x^3+1)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{24}\ln 9 = \frac{1}{12}\ln 3.$$