Devoir à la maison n° 21

À rendre le 21 juin

Soient $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X_k \in \mathbb{C}[X]$, deux polynômes non nuls, avec $p = \deg P$ et $q = \deg Q$. On considère :

- $D = P \wedge Q$, $d = \deg D$, $P = DP_1$ et $Q = DQ_1$;
- $E = \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ et $F = \mathbb{C}_{p+q-1}[X]$;
- $\varphi \ : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ (A,B) & \mapsto & PA + QB \end{array} \right.$;
- $\mathrm{Res}(P,Q) = \begin{vmatrix} a_0 & & & & b_0 & & & & & \\ a_1 & \ddots & & & b_1 & \ddots & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & & \ddots & a_0 & b_{q-1} & & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & a_1 & b_q & & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & & & \ddots & b_0 \\ a_p & & & \vdots & & & \ddots & & & b_1 \\ & \ddots & & \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & a_p & & & & & & b_q \end{vmatrix}$.

Les q premières colonnes de $\mathrm{Res}(P,Q)$ représentent les coefficients de P, les p dernières ceux de Q. Les positions non remplies correspondent à des zéros, et on a donné ici l'écriture pour $p > q$.
$\mathrm{Res}(P,Q)$ est un déterminant $(p+q) \times (p+q)$ appelé *résultant* de P et Q.
Par exemple, si $P = 1 + 2X + 3X^2$ et $Q = 4 + 5X + 6X^2 + 7X^3$,

$$\mathrm{Res}(P,Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

Première partie : résultant et polynômes premiers entre eux.

1) **a)** Déterminer une relation entre $\mathrm{Res}(P,Q)$ et $\mathrm{Res}(Q,P)$.

b) On suppose que $p > 0$. Calculer $\mathrm{Res}(P, 1)$.

c) Calculer $\mathrm{Res}(\lambda P, Q)$ et $\mathrm{Res}(P, \lambda Q)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

2) **a)** Montrer que φ est linéaire. Quelles sont les dimensions de E et de F ? Que peut on en déduire quant à φ ?

b) Montrer que φ est bijective si et seulement si $D = 1$.

3) On considère $\mathscr{B} = ((1,0), (X,0), \dots, (X^{q-1}, 0), (0,1), (0,X), \dots, (0, X^{p-1}))$ la base canonique de E et $\mathscr{B}' = (1, X, \dots, X^{p+q-1})$ la base canonique de F.

a) Écrire la matrice M de φ dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.

b) Montrer que $\mathrm{Res}(P, Q) \neq 0 \Leftrightarrow D = 1$.

Deuxième partie : étude plus poussée.

4) Soit $a \in \mathbb{C}$.

a) Soit $f_a : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ R & \mapsto & R \circ (X + a) \end{array} \right.$. Calculer $\det f_a$.

b) Calculer de même $\det g_a$ avec $g_a : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ (A, B) & \mapsto & (A \circ (X + a), B \circ (X + a)) \end{array} \right.$.

c) En étudiant $f_{-a} \circ \varphi \circ g_a$, montrer que $\mathrm{Res}(P, Q) = \mathrm{Res}(P \circ (X - a), Q \circ (X - a))$.

5) **a)** Montrer que $\mathrm{Res}(XP, Q) = (-1)^q Q(0) \mathrm{Res}(P, Q)$.

b) Montrer que $\forall a \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Res}((X - a)P, Q) = (-1)^q Q(a) \mathrm{Res}(P, Q)$.

c) En déduire que $\mathrm{Res}(P, Q) = (-1)^{pq} (a_p)^q (b_q)^p \prod_{k=1}^{p} \prod_{\ell=1}^{q} (\alpha_k - \beta_\ell)$ où $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont les racines complexes de P et $\beta_1, \dots, \beta_q$ celles de Q.

6) **a)** Déterminer $\mathrm{Ker}\, \varphi$.

b) Vérifier que $\dim(\mathrm{Ker}\, \varphi) = d$.

c) Montrer que $\mathrm{Im}\, \varphi = \{ R \in \mathbb{C}[X] \mid \deg R \leqslant p + q - 1 \text{ et } D \mid R \}$.

Troisième partie : applications.

7) **Racine multiple :** Soit $P = X^3 + aX + b$, avec $a, b \in \mathbb{C}$. Donner une CNS sur a et b pour que P admette une racine multiple.

8) **Nombre algébrique :** En utilisant les polynômes $P(X) = X^2 - 3$ et $Q_y(X) = (y - X)^2 - 7$, déterminer un polynôme à coefficients entiers de degré 4 ayant comme racine $\sqrt{3} + \sqrt{7}$. Quelles sont les autres racines de ce polynôme ?

— **FIN** —