Ex 13 : $p, q \in \mathcal{L}(E)$. Mq : $\begin{cases} qp = q \\ pq = p \end{cases}$ ssi p, q 2 projecteurs de m̂ noyau.

$(\Rightarrow)$ Mq. $p^2 = p$.

$$p^2 = (pq)^2 = p\overbrace{qp}^{=q}q = \overbrace{pq}^{=p}q = pq = p$$

p est 1 projecteur. De m̂ pour q.

$\operatorname{Ker}(p \circ q) \supset \operatorname{Ker} q$.

comme $pq = p$: $\operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} p$

par symétrie : $\operatorname{Ker} q \supset \operatorname{Ker} p$ dc : $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q$.

$(\Leftarrow)$ p étant 1 projecteur : $\operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p = E$.

Soit $x \in E$, il existe $y \in \operatorname{Ker} p$, $z \in \operatorname{Im} p$ tq.

$x = y + z$.

Nous avons : $\cdot\ p(y) = 0$ et $q(y) = 0$ car $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q$.

$\cdot\ p(z) = z$ car $p|_{\operatorname{Im} p} = id_{\operatorname{Im} p}$

$\cdot\ p(x) = z$

donc : $q(x) = q(y+z) = q(y) + q(z) = q(z)$

$= qp(x)$ car $z = p(x)$

cela est valable $\forall x \in E$, dc $q = qp$.

$\hat{M}$ chose pour $p = pq$.