Devoir à la maison n° 11

À rendre le 24 janvier

Partie 1 : endomorphismes continus de $(\mathbb{R},+)$.

On veut montrer que l'ensemble des homothéties de $\mathbb{R}$ est égal à l'ensemble $\mathscr{E}$ des endomorphismes continus du groupe additif $(\mathbb{R},+)$, c'est-à-dire des fonctions **continues** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ ,\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1) Soit $f \in \mathscr{E}$.

- **a)** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $f(kx) = kf(x)$.
- **b)** On pose $\lambda = f(1)$. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = \lambda x$.
  Indication : si $x \in \mathbb{Q}$, on pourra multiplier x par un entier pour obtenir un entier et utiliser la question précédente.

2) Conclure.

Partie 2 : une équation fonctionnelle.

On veut maintenant déterminer l'ensemble $\mathscr{E}'$ des fonctions f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ **continues en 0** vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ ,\ f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}. \qquad (\spadesuit)$$

En particulier, cela signifie que $\forall x, y \in \mathbb{R}\ ,\ 1 + f(x)f(y) \neq 0$.

3) Quelles sont les fonctions constantes de $\mathscr{E}'$?

4) Soit f un élément de $\mathscr{E}'$ pour lequel il existe un $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x_0)| = 1$. Montrer que f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

5) Soit f un élément de $\mathscr{E}'$ qui n'est **pas** une fonction constante.

- **a)** Montrer que $f(0) = 0$. Étudier la parité de f.
- **b)** Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- **c)** En déduire que, pour tout réel x, on a $|f(x)| < 1$.
- **d)** On rappelle que $\mathrm{th} : \mathbb{R} \to]-1,1[$ est bijective, on note Argth sa réciproque. On pose : $g(x) = \mathrm{Argth}(f(x))$. Justifier l'existence et la continuité de g sur $\mathbb{R}$.
- **e)** Vérifier que la fonction th est un élément de $\mathscr{E}'$.
- **f)** En déduire que g est un élément de $\mathscr{E}$.

6) Donner l'expression des fonctions non constantes de $\mathscr{E}'$.

7) Conclure en donnant une description complète de $\mathscr{E}'$.

— FIN —