

Feuille d'exercice n° 02 : **Sommes et calculs**
Corrigé des exercices 16 et 20

Exercice 16

- 1) Remarquons que comme le système est homogène (c'est-à-dire les coefficients du second membre sont nuls) alors $(0, 0, 0)$ est une solution du système. Voyons s'il y en a d'autres. Nous faisons semblant de ne pas voir que la seconde ligne implique $x = y$ et que le système est en fait très simple à résoudre. Nous allons appliquer le pivot de Gauss en faisant les opérations suivantes sur les lignes $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

On fait maintenant $L_3 \leftarrow 2L_3 + 3L_2$ pour obtenir :

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ 7z = 0 \end{cases}$$

En partant de la dernière ligne on trouve $z = 0$, puis en remontant $y = 0$, puis $x = 0$. Conclusion l'unique solution de ce système est $(0, 0, 0)$.

- 2) On applique le pivot de Gauss $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ -2y - 3z = -4 \\ -y - z = -2 \end{cases}$$

Puis $L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2$ pour obtenir un système équivalent qui est triangulaire donc facile à résoudre :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ -2y - 3z = -4 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

On n'oublie pas de vérifier que c'est une solution du système initial.

- 3) On fait les opérations $L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1$ pour obtenir :

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ -x + 2y - 3z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ 5y - 7z = 3b + a \\ 7y + z = 3c - a \end{cases}$$

Puis on fait $L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2$, ce qui donne un système triangulaire :

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ 5y - 7z = 3b + a \\ 54z = 5(3c - a) - 7(3b + a) \end{cases}$$

En partant de la fin on en déduit : $z = \frac{1}{54}(-12a - 21b + 15c)$ puis en remontant cela donne

$$\begin{cases} x = \frac{1}{18}(8a + 5b - c) \\ y = \frac{1}{18}(-2a + b + 7c) \\ z = \frac{1}{18}(-4a - 7b + 5c) \end{cases}$$

Exercice 20

- 1) On commence par simplifier le système en effectuant les opérations suivantes sur les lignes :
 $L_1 \leftarrow L_1 - L_4, L_2 \leftarrow L_2 - L_4, L_3 \leftarrow L_3 - L_4$:

$$(S) \iff \begin{cases} \lambda x & & - & \lambda t & = & a - d \\ & \lambda y & & - & \lambda t & = & b - d \\ & & \lambda z & - & \lambda t & = & c - d \\ x & + & y & + & z & + & (1 + \lambda)t & = & d \end{cases}$$

- 2) Traitons le cas particulier $\lambda = 0$. Si $\lambda = 0$ alors le système n'a des solutions que si $a = b = c = d$. Les solutions sont alors les (x, y, z, t) qui vérifie $x + y + z + t = d$. (C'est un espace de dimension 3 dans \mathbb{R}^4 .)
- 3) Si $\lambda \neq 0$ alors on peut faire l'opération suivante sur la dernière ligne : $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{\lambda}L_1 - \frac{1}{\lambda}L_2 - \frac{1}{\lambda}L_3$ pour obtenir :

$$(S) \iff \begin{cases} \lambda x & & - & \lambda t & = & a - d \\ & \lambda y & & - & \lambda t & = & b - d \\ & & \lambda z & - & \lambda t & = & c - d \\ & & & (\lambda + 4)t & = & d - \frac{1}{\lambda}(a + b + c - 3d) \end{cases}$$

- 4) Cas particulier $\lambda = -4$. La dernière ligne devient $0 = a + b + c + d$. Donc si $a + b + c + d \neq 0$ alors il n'y a pas de solutions.
- Si $\lambda = -4$ et $a + b + c + d = 0$ alors existe une infinité de solutions :

$$\left\{ \left(t - \frac{a-d}{4}, t - \frac{b-d}{4}, t - \frac{c-d}{4}, t \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

- 5) Cas général : $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq -4$. On calcule d'abord $t = \frac{1}{\lambda+4} \left(d - \frac{1}{\lambda}(a + b + c - 3d) \right)$ et en remplaçant par la valeur de t obtenue on en déduit les valeurs pour $x = t + \frac{1}{\lambda}(a-d), y = t + \frac{1}{\lambda}(b-d), z = t + \frac{1}{\lambda}(c-d)$. Il existe donc une solution unique :

$$\left(\frac{(\lambda + 3)a - b - c - d}{\lambda(\lambda + 4)}, \frac{(\lambda + 3)b - a - c - d}{\lambda(\lambda + 4)}, \frac{(\lambda + 3)c - a - b - d}{\lambda(\lambda + 4)}, \frac{(\lambda + 3)d - a - b - c}{\lambda(\lambda + 4)} \right).$$