Nom : Correcteur : Note :

Démontrer le résultat suivant (théorème de changement de variable). Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $(a,b) \in I^2$, $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, avec $\varphi(I) \subset J$. Alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Donner l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle $y'' - y' + y = 0$.

Déterminer une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation $y' - \dfrac{y}{2x} = \sqrt{x}\ln(x)$, en utilisant la méthode de la variation de la constante.
Indication : une solution homogène est $x \mapsto \sqrt{x}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$. Donner la valeur des sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k$.