

# **XVII Dérivabilité**

4 novembre 2021

Sauf mention du contraire,  $I$  et  $J$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $a \in I$ .

## 1 Définitions et premières propriétés.

### 1.1 Taux d'accroissement.

#### Rappel 1.1.1.

Soit  $x \neq y \in I$ .

La *corde* à la courbe de  $f$  reliant les points d'abscisses  $x$  et  $y$  est le segment reliant les points de coordonnées  $(x, f(x))$  et  $(y, f(y))$ .

La *sécante* à la courbe de  $f$  reliant les points d'abscisses  $x$  et  $y$  est la droite passant par les points de coordonnées  $(x, f(x))$  et  $(y, f(y))$ .

#### Définition 1.1.2.

Soit  $x, y \in I$  avec  $x \neq y$ , on note  $\tau_f(x, y)$  le *taux d'accroissement* de  $f$  entre  $x$  et  $y$ , défini comme le réel  $\frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ . Pour  $x$  fixé, on notera

$$\begin{aligned} \tau_{f,x} : I \setminus \{x\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \tau_f(x, t) \end{aligned}.$$

#### Remarque 1.1.3.

On a toujours  $\tau_f(x, y) = \tau_f(y, x)$ .

#### Remarque 1.1.4.

$\tau_f(x, y)$  est la pente de la corde de la courbe  $f$  reliant les points d'abscisses  $x$  et  $y$ .

### 1.2 Définitions.

#### Définition 1.2.1.

Soit  $a \in I$ . On dit que  $f$  est dérivable en  $a$  si  $\tau_{f,a}$  admet une limite finie en  $a$ . On appelle alors *dérivée de  $f$  en  $a$*  ou *nombre dérivé de  $f$  en  $a$*  cette limite, que l'on note  $f'(a)$ .

#### Remarque 1.2.2.

$\tau_{f,a}$  admet une limite finie en  $a$  si et seulement si

$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  admet une limite finie quand  $h$  tend vers 0 et ces deux limites sont alors égales.

**Exemple 1.2.3.** 1. Si  $f$  est constante,  $f'(a) = 0$  pour tout  $a \in I$ .

2. Dérivée de  $x \mapsto x^{n+1}$  en  $a$ , pour  $n$  entier naturel : pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x^{n+1} - a^{n+1} = (x - a) \sum_{k=0}^n x^k a^{n-k}$ , donc  $\frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{x - a} = \sum_{k=0}^n x^k a^{n-k}$ . Il suffit alors de passer à la limite.

#### Définition 1.2.4.

Si  $f$  est dérivable en tout point de  $I$ , on dit qu'elle est *dérivable sur  $I$* . On appelle alors *fonction dérivée de  $f$*  et on note  $f'$ , voire  $Df$  ou  $\frac{df}{dx}$ , l'application  $x \mapsto f'(x)$ .

#### Proposition 1.2.5.

Soit  $\ell$  un réel. Les propositions suivantes sont toutes équivalentes.

- (i)  $f$  est dérivable en  $a$  et  $f'(a) = \ell$  ;
- (ii)  $\tau_{f,a}$  admet pour limite  $\ell$  en  $a$  ;
- (iii) on peut prolonger  $\tau_{f,a}$  par continuité en  $a$  et son prolongement est

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{f,a} : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \tau_{f,a}(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \end{aligned}$$

- (iv) il existe une application  $\varphi_{f,a} : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue en  $a$ , vérifiant  $\varphi_{f,a}(a) = \ell$  et

$$\forall x \in I \quad f(x) = f(a) + (x - a)\varphi_{f,a}(x)$$

- (v) il existe une fonction  $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ , de limite nulle en  $a$ , telle que pour tout  $x \in I$ ,

$$f(x) = f(a) + (x - a) \cdot \ell + (x - a)\varepsilon(x).$$

**Remarque 1.2.6.**

On traduira plus tard le point (v) comme suit :  
 «  $f$  admet, au voisinage de  $a$ , le développement limité  $f(x) = f(a) + (x - a) \cdot \ell + o(x - a)$  ».

**Démonstration.**

On a évidemment (i)  $\iff$  (ii) d'après la définition de la dérivée. Montrons les autres équivalences par implications successives.

(ii)  $\implies$  (iii) C'est immédiat à partir de la définition de prolongement par continuité.

(iii)  $\implies$  (iv) Supposons (iii). Posons  $\varphi_{f,a} = \hat{\tau}_{f,a}$ . Alors,  $\varphi_{f,a}$  est continue en  $a$  et on a bien  $\varphi_{f,a}(a) = \ell$ .

Enfin, soit  $x \in I$ . Si  $x = a$ , on a clairement  $f(x) = f(a) + (x - a)\varphi_{f,a}(x)$ . Si  $x \neq a$ , on a  $\varphi_{f,a}(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ , d'où  $f(x) - f(a) = (x - a)\varphi_{f,a}(x)$ .

On a donc

$$\forall x \in I \quad f(x) = f(a) + (x - a)\varphi_{f,a}(x)$$

(iv)  $\implies$  (v) Supposons (iv).  $\varphi_{f,a}$  est continue en  $a$  donc tend vers  $\varphi_{f,a}(a) = \ell$  en  $a$ . Il suffit alors de poser  $\varepsilon = \varphi_{f,a} - \ell$ .

(v)  $\implies$  (ii) Supposons (v). Alors, pour  $x \in I \setminus \{a\}$ , on a successivement :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + (x - a) \cdot \ell + (x - a)\varepsilon(x), \\ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \ell + \varepsilon(x), \\ \tau_{f,a}(x) &= \ell + \varepsilon(x). \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \tau_{f,a}(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell.$$

□

**Remarque 1.2.7.** 1. La caractérisation (iv) est parfois appelée caractérisation de Carathéodory.

2. Lorsque  $f$  est dérivable en  $a$ , la fonction  $\varphi_{f,a}$  de la caractérisation de Carathéodory coïncide nécessairement avec le taux d'accroissement  $\tau_{f,a}$  sur  $I \setminus \{a\}$  et est continue en  $a$ , c'est donc le prolongement par continuité  $\hat{\tau}_{f,a}$  du taux d'accroissement en  $a$ .
3. La caractérisation (v) est parfois appelée caractérisation de Hilbert.
4. Sous la forme donnée plus haut, la caractérisation de Carathéodory et celles de Hilbert sont utiles lorsqu'on veut *utiliser* une hypothèse disant que  $f$  est dérivable en  $a$ . Lorsqu'on veut les utiliser pour *montrer* que  $f$

est dérivable en  $a$ , on les utilisera plutôt sous les formes

$$\begin{aligned} \forall x \in I \quad f(x) - f(a) &= (x - a)\varphi_{f,a}(x) \\ f(x) - f(a) &= (x - a) \cdot \ell + o(x - a) \end{aligned}$$

**Théorème 1.2.8.**

Si  $f$  est dérivable en  $a$ , alors  $f$  est continue en  $a$ .

**Démonstration.**

C'est une conséquence directe de la caractérisation de Carathéodory (et de celle de Hilbert). □



La réciproque est fautive :

1. L'application valeur absolue n'est pas dérivable en 0, son taux d'accroissement en 0 ayant des limites à gauche et à droite distinctes en 0.
2. L'application racine carrée n'est pas dérivable en 0, son taux d'accroissement tendant vers  $+\infty$  en 0.

Cela nous amène à la notion de dérivabilité à gauche et à droite :

**Définition 1.2.9.**

On dit que  $f$  est *dérivable à gauche en  $a$*  (resp. à droite en  $a$ ) si la fonction  $f|_{]-\infty, a] \cap I}$  (resp.  $f|_{[a, +\infty[ \cap I}$ ) est dérivable en  $a$ , c'est-à-dire si le taux d'accroissement  $\tau_{f,a}$  de  $f$  en  $a$  admet une limite finie à gauche (resp. une limite finie à droite).

Dans ce cas, cette limite est appelée dérivée à gauche (resp. à droite) de  $f$  en  $a$  et est notée  $f'_g(a)$  (resp.  $f'_d(a)$ ).

**Exemple 1.2.10.**

L'application valeur absolue est dérivable à gauche en 0 (de dérivée à gauche  $-1$ ), ainsi qu'à droite (de dérivée à droite  $1$ ).

**Remarque 1.2.11.**

Si  $f$  est dérivable à droite (resp. à gauche) alors elle est continue à droite (resp. à gauche).

**Définition 1.2.12** (Interprétation géométrique). Si  $f$  est dérivable (resp. dérivable à gauche, resp. dérivable à droite) en  $a$ , on appelle *tangente à  $f$  en  $a$*  (resp. *demi-tangente à  $f$  à gauche en  $a$* , resp. *demi-tangente à  $f$  à droite en  $a$* ) la droite d'équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

(resp. la demi-droite d'équation  $y = f(a) + f'_g(a)(x - a)$  et  $x \leq a$ , resp. la demi-droite d'équation  $y = f(a) + f'_d(a)(x - a)$  et  $x \geq a$ ).

**Remarque 1.2.13.**

Le membre droit de cette équation n'est autre que la partie linéaire du développement limité donné par la caractérisation de Hilbert.

**Théorème 1.2.14.**

$f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si  $f$  est dérivable à gauche et à droite en  $a$  **et**  $f'_g(a) = f'_d(a)$ .

**Démonstration.**

C'est une conséquence directe des résultats sur les limites de fonction : le taux d'accroissement  $\tau_{f,a}$  de  $f$  en  $a$ , qui n'est pas défini en  $a$  admet une limite en  $a$  si et seulement s'il admet des limites à gauche et à droite en  $a$  et que ces limites sont égales.  $\square$

**Exemple 1.2.15.** 1. Valeur absolue en 0.

2. La fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \ln(1+2x) & \text{si } x \geq 0 \\ 2e^x - 2 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

est-elle dérivable en 0 ?

On calcule les dérivées à gauche et à droite en revenant à la définition : à gauche, on constate  $\frac{2(e^x - 1)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 2$ , à droite,  $\frac{\ln(1+2x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 2$ , donc  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 2$ .

3. Les fonctions

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

pour  $n \in \mathbb{N}$ , sont-elles dérivables en 0 ?

**1.3 Opérations sur la dérivabilité.**

**Théorème 1.3.1.**

si  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  sont dérivables en  $a$ , alors :

1.  $f + g$  aussi, et  $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$  ;
2.  $f \times g$  aussi, et  $(f \times g)'(a) = f'(a) \times g(a) + f(a) \times g'(a)$  ;
3.  $\lambda f$  aussi et  $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$  ;
4. si  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$ , alors  $1/g$  est dérivable au voisinage de  $a$  et  $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}$
5. si  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$ , alors  $f/g$  est aussi dérivable en  $a$  et

$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$$

**Démonstration.**

On donne une première démonstration en utilisant directement la définition de la dérivée. Supposons  $f$  et  $g$  dérivable en  $a$ .

1. Soit  $x \in I \setminus \{a\}$ , Alors  $\frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \frac{g(x) - g(a)}{x-a}$ , d'où le résultat par passage à la limite en  $a$ .
2. Soit  $x \in I \setminus \{a\}$ , Alors

$$\begin{aligned} & \frac{(f \times g)(x) - (f \times g)(a)}{x-a} \\ &= f(x) \left( \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \right) + g(a) \left( \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right) \end{aligned}$$

d'où le résultat par passage à la limite en  $a$ .

3. Ce cas est une conséquence directe du précédent (en considérant le réel  $\lambda$  comme la fonction constante de valeur  $\lambda$ ).

4. Supposons que  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$ , alors pour  $x$  au voisinage épointé de  $a$ , on a

$$\frac{1/g(x) - 1/g(a)}{x - a} = -\frac{1}{g(x)g(a)} \times \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

Lorsque  $x$  tend vers  $a$ , le membre droit de cette égalité tend vers  $-g'(a)/g(a)^2$ , d'où le résultat.

5. Ce résultat se déduit cas du produit appliqué à  $f$  et  $1/g$  : En effet, supposons que  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$ . Alors  $1/g$  est dérivable en  $a$  d'après le point précédent, donc  $f \times 1/g$  est dérivable en  $a$ . De plus

$$\begin{aligned} (f \times 1/g)'(a) &= f'(a) \times 1/g(a) + f(a) \times \left(-\frac{g'(a)}{g(a)^2}\right) \\ &= \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g(a)^2} \end{aligned}$$

□

La démonstration ci-dessus a l'avantage de n'utiliser que la définition de la dérivée. Elle a deux inconvénients : d'une part, le cas du produit n'est pas évident à retrouver ; d'autre part cette méthode ne marchera pas dans le cas de la composition.

Voici une autre méthode qui n'a pas l'inconvénient précédent :

**Démonstration.**

Supposons  $f$  et  $g$  dérivables en  $a$  et notons  $\varphi_{f,a}$  et  $\varphi_{g,a}$  leurs taux d'accroissements en  $a$  respectifs, prolongés en  $a$  par continuité. Soit alors  $x \in I$ , on a

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + (x - a)\varphi_{f,a}(x) \\ g(x) &= g(a) + (x - a)\varphi_{g,a}(x) \end{aligned}$$

1. On a donc

$$(f + g)(x) - (f + g)(a) = (x - a)(\varphi_{f,a} + \varphi_{g,a})(x)$$

Or  $\varphi_{f,a} + \varphi_{g,a}$  a pour limite  $f'(a) + g'(a)$  en  $a$ , donc c'est une application continue, donc d'après la caractérisation de Carathéodory,  $f + g$  est dérivable en  $a$ , de dérivée  $f'(a) + g'(a)$ .

2. On a

$$\begin{aligned} (f \times g)(x) - (f \times g)(a) &= (f(a) + (x - a)\varphi_{f,a}(x)) \times (g(a) + (x - a)\varphi_{g,a}(x)) \\ &\quad - f(a)g(a) \\ &= (x - a)\varphi_{f,a}(x)g(a) + f(a)(x - a)\varphi_{g,a}(x) \\ &\quad + (x - a)^2\varphi_{f,a}(x)\varphi_{g,a}(x) \\ &= (x - a) \left( \varphi_{f,a}(x)g(a) + f(a)\varphi_{g,a}(x) \right. \\ &\quad \left. + (x - a)\varphi_{f,a}(x)\varphi_{g,a}(x) \right) \end{aligned}$$

Or, lorsque  $x$  tend vers  $a$ ,  $\varphi_{f,a}(x)g(a) + f(a)\varphi_{g,a}(x) + (x - a)\varphi_{f,a}(x)\varphi_{g,a}(x)$  tend vers  $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ . Donc  $f \times g$  est dérivable en  $a$ , de dérivée  $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ .

3. On a

$$(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a) = (x - a)(\lambda\varphi_{f,a})(x)$$

- 4.

$$\begin{aligned} \text{On a } \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)} &= \frac{g(a) - g(x)}{g(a)g(x)} = -\frac{(x - a)\varphi_{g,a}(x)}{g(a)g(x)} \\ \text{et } -\frac{\varphi_{f,a}(x)}{g(a)g(x)} &\xrightarrow{x \rightarrow a} -\frac{g'(a)}{g(a)^2} \end{aligned}$$

□

**Remarque 1.3.2.**

On peut également effectuer cette démonstration en utilisant la caractérisation de Hilbert plutôt que celle de Carathéodory.

**Théorème 1.3.3.**

Soit  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant  $f(I) \subset J$  et  $a \in I$ .

1. Si  $f$  est dérivable en  $a$  et  $g$  dérivable en  $f(a)$ , alors  $g \circ f$  est dérivable en  $a$  et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$$

2. Si  $g$  est dérivable sur  $J$  et  $f$  sur  $I$ , alors  $g \circ f$  est dérivable sur  $I$  et

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$$

Le second point est évidemment une conséquence immédiate du premier.

**Démonstration (Erronée).**

$f$  est dérivable en  $a$  donc continue en  $a$ , donc  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$ .

Par composition, on a donc

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \xrightarrow{x \rightarrow a} g'(f(a))$$

De plus

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a)$$

Par produit, on obtient bien le résultat voulu. □

**Remarque 1.3.4.**

La démonstration précédente est erronée, car elle utilise une hypothèse implicite sur  $f$  qui n'est pas nécessairement vérifiée. Laquelle ?

**Démonstration.**

Supposons  $f$  (resp.  $g$ ) étant dérivable en  $a$  (resp. en  $f(a)$ ) ; on note alors  $\varphi$  (resp.  $\psi$ ) son taux d'accroissement en  $a$  (resp. en  $f(a)$ ) prolongé par continuité en  $a$  (resp. en  $f(a)$ ). On a alors, pour tout  $x \in I$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a) &= (f(x) - f(a))\psi(f(x)) \\ &= (x - a)\varphi(x)\psi(f(x))\end{aligned}$$

$f$  étant dérivable en  $a$ , elle est nécessairement continue en  $a$  ; on en déduit

$$\varphi(x)\psi(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a) \times g'(f(a))$$

D'où le résultat.  $\square$

**Théorème 1.3.5.**

Soit  $f : I \rightarrow J$  bijective continue (de réciproque  $f^{-1} : J \rightarrow I$ ). Soit  $a \in I$ , on note  $f(a) = b$ . Si  $f$  est dérivable en  $a$  (resp. sur  $I$ ) et si  $f'$  ne s'annule pas en  $a$  (resp. sur  $I$ ), alors  $f^{-1}$  est dérivable en  $b$  (resp. sur  $J$ ) et  $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$  (resp.  $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ ).

**Remarque 1.3.6.** 1. Moyen mnémotechnique :

$f \circ f^{-1} = \text{Id}$ , donc est dérivable de dérivée

1. Or on sait d'après le th. de composition,  $(f \circ f^{-1})' = (f^{-1})' \times f' \circ f^{-1}$ .

2. Ce résultat est faux sans l'hypothèse de continuité. Considérer par exemple

$$\begin{aligned}f : [0, 2[ &\rightarrow [-1, 1[ \\ x &\mapsto x - 2 \lfloor x \rfloor\end{aligned}$$

$f$  est bijective et dérivable en 0 de dérivée 1 mais sa réciproque n'est même pas continue en  $f(0)$ . En effet il s'agit de

$$\begin{aligned}f^{-1} : [-1, 1[ &\rightarrow [0, 2[ \\ x &\mapsto x - 2 \lfloor x \rfloor\end{aligned}$$

On peut même construire des contre-exemples où  $a$  n'est pas une extrémité de l'intervalle.

3. Le graphe de  $f^{-1}$  étant le symétrique de celui de  $f$  par rapport à la droite d'équation  $y = x$ , la tangente à  $f^{-1}$  en un point  $f(a)$ , si elle existe, est la symétrique de la tangente à  $f$  en  $a$  par rapport à la droite d'équation  $y = x$ . Par conséquent, si  $f'(a) = 0$ ,  $f^{-1}$  a une tangente verticale en  $f(a)$ , et sa dérivée en ce point n'existe pas.

**Démonstration.**

Supposons  $f$  dérivable en  $a$  de dérivée  $f'(a)$  non nulle. Notons alors  $\varphi$  le prolongement par continuité en  $a$  de son taux d'accroissement en  $a$ .

On a, pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) - f(a) = (x - a)\varphi(x)$ .

Soit alors  $y \in J$ . Alors on a  $f(f^{-1}(y)) - f(a) = (f^{-1}(y) - a)\varphi(f^{-1}(y))$ , donc

$$y - b = (f^{-1}(y) - f^{-1}(b))\varphi(f^{-1}(y))$$

Si  $y \neq b$ , on a  $y - b \neq 0$ , donc  $\varphi(f^{-1}(y)) \neq 0$ , et si  $y = b$ , on sait déjà que  $\varphi(f^{-1}(y)) \neq 0$ . Donc dans les deux cas, on a :

$$(f^{-1}(y) - f^{-1}(b)) = (y - b) \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))}$$

On sait  $\frac{1}{\varphi(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}$ , donc pour conclure, il suffit de montrer que  $y \mapsto \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))}$  est continue en  $b$ .

Or  $f$  est une bijection continue de  $I$  sur  $J$  donc  $f^{-1}$  est également continue sur  $J$  donc en particulier en  $b$  et vaut  $a$  en  $b$ . Par ailleurs on sait déjà que  $\varphi$  est continue en  $a$ . On en déduit donc le résultat.  $\square$

**Exemple 1.3.7.**

On admet que  $\exp$  et  $\sin$  sont dérivables. Grâce aux résultats précédents, on peut montrer les résultats connus de dérivabilité de toutes les fonctions usuelles ( $\ln$ ,  $\cos$ ,  $\tan$ ,  $\text{Arctan}$ ,  $\text{Arcsin}$ ,  $\text{Arccos}$ ,  $\text{ch}$ ,  $\text{sh}$ ,  $\text{th}$ ,  $\text{Argth}$ ,  $\text{Argch}$ ,  $\text{Argsh}$ ).

**Exercice 1.3.8.**

Se faire un formulaire reprenant tout ça sur un intervalle, ainsi notamment que les cas de  $(f + g)'$ ,  $(fg)'$ ,  $(f^n)'$ ,  $(f \circ g)'$ ,  $(1/f)'$ ,  $(f^{-1})'$ ,  $(\ln \circ f)'$ ,  $(\exp \circ f)'$ .

**1.4 Dérivées successives.****Définition 1.4.1.**

On définit les dérivées successives par récurrence. si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , on commence par définir  $f^{(0)} = f$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , si  $f^{(n)}$  est définie et dérivable, on pose

$$f^{(n+1)} = [f^{(n)}]'$$

Si  $f^{(n)}$  existe, on dit que  $f$  est  $n$ -fois dérivable.

**Définition 1.4.2** (Classes de régularité).

On note pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{D}^n(I, \mathbb{R}) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f^{(n)} \text{ existe} \right\};$$

$$\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R}) \mid f^{(n)} \text{ est continue} \right\};$$

$$\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}).$$

Si  $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ , on dit que  $f$  est  $n$ -fois continuellement dérivable (ou de classe  $\mathcal{C}^n$ ) sur  $I$ .

Si  $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ , on dit que  $f$  est infiniment dérivable (ou de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ) sur  $I$ .

**Proposition 1.4.3.**

Soit  $I$  un intervalle non vide, non réduit à un point. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{D}^{n+1}(I, \mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}).$$

**Démonstration.**

Les inclusions sont immédiates. On obtient le caractère strict en primitivant  $n$  fois l'exemple suivant, ainsi que la fonction valeur absolue, après avoir opéré une translation pour se ramener de 0 en un point à l'intérieur de  $I$ .  $\square$

**Exemple 1.4.4** (Exemple fondamental).

Soit  $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ , prolongée par continuité en 0 en posant  $f(0) = 0$ . Alors  $f$  est dérivable en 0 (ainsi que sur  $\mathbb{R}$ ), mais sa dérivée n'est pas continue en 0.

**Exercice 1.4.5.**

Soit  $n \in \mathbb{Z}$ , soit

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

Déterminer  $f_n^{(k)}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

**Théorème 1.4.6.**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soient  $f, g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

1.  $(f + g) \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$  et  $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$ .
2.  $\lambda f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$  et  $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$ .
3.  $(fg) \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$  et (formule de Leibniz) :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

4. Si  $g$  ne s'annule pas,  $(f/g) \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ .

**Démonstration.** 1. Facile par récurrence, en notant pour  $f$  et  $g$  fixées et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(H_n)$  l'assertion «si  $f$  et  $g$  appartiennent à  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$  alors  $(f + g) \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$  et  $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$ ».

3. On fait encore une démonstration par récurrence, en notant  $(H_n)$  l'assertion «si  $f$  et  $g$  appartiennent à  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$  alors  $(fg) \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$  et  $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ » :

—  $(H_0)$  est évidemment vraie.

— L'hérédité se démontre à l'aide de la formule 2 du théorème 1.3.1, et se conduit de la même manière que la démonstration de la formule du binôme de Newton.

4. Encore une récurrence, mais plus subtile car cette fois on ne fixe pas  $f$  et  $g$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $(H_n)$  l'assertion «*pour toutes*  $f, g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$  telles que  $g$  ne s'annule pas, on a  $f/g \in \mathcal{C}^n$ ».

— De nouveau  $(H_0)$  se démontre aisément.

— Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $(H_n)$  et montrons  $(H_{n+1})$ .

Soit  $f, g \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ ,  $g$  ne s'annulant pas.

Alors on sait que  $f/g$  est dérivable et  $(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ . Mais  $f'g - fg'$  est de classe  $\mathcal{C}^n$ , ainsi

que  $g^2$ , et  $g^2$  ne s'annule pas. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence  $(H_n)$  à  $f'g - fg'$  et  $g^2$  et en déduire que  $(f/g)'$  est de classe  $\mathcal{C}^n$ , donc que  $f/g$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$ .  $\square$

**Théorème 1.4.7.**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$  et  $g \in \mathcal{C}^n(J, I)$ .

Alors  $(f \circ g) \in \mathcal{C}^n(J, \mathbb{R})$ .

**Démonstration.**

(non exigible). La démonstration se fait là encore par récurrence, avec la même subtilité que dans la démonstration précédente. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $(H_n)$  l'assertion «*pour toutes*  $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$  et  $g \in \mathcal{C}^n(J, I)$ , on a  $(f \circ g) \in \mathcal{C}^n(J, \mathbb{R})$ ».

- De nouveau  $(H_0)$  est triviale.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $(H_n)$  et montrons  $(H_{n+1})$ . Soit  $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$  et  $g \in \mathcal{C}^{n+1}(J, I)$ . Alors on sait que  $f \circ g$  est dérivable et que  $(f \circ g)' = g' \cdot f' \circ g$ . Or  $f'$  est de classe  $\mathcal{C}^n$ , ainsi que  $g$ . En appliquant l'hypothèse de récurrence  $(H_n)$  à  $f'$  et  $g$ , on obtient que  $f' \circ g$  est de classe  $\mathcal{C}^n$ . Or  $g'$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^n$ , donc le produit  $g' \cdot f' \circ g$  est de classe  $\mathcal{C}^n$ . Ainsi  $(f \circ g)'$  est de classe  $\mathcal{C}^n$ , donc  $f \circ g$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$ .

□

**Théorème 1.4.8.**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $f \in \mathcal{C}^n(I, J)$ . Si  $f$  est bijective et  $f'$  ne s'annule pas alors  $f^{-1} \in \mathcal{C}^n(J, I)$ .

**Démonstration.**

(non exigible). La démonstration se fait par récurrence de la même manière que les deux démonstrations précédentes.

□

## 2 Les grands théorèmes.

### 2.1 Extremums locaux.

**Définition 2.1.1.**

On dit que  $f$  a un *minimum* (resp. *maximum*) *local* en  $a$  s'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que pour tout  $x \in V \cap I$ ,  $f(x) \geq f(a)$  (resp.  $f(x) \leq f(a)$ ). On dit que  $f$  a un *extremum local* en  $a$  si  $f$  a un minimum ou un maximum local en  $a$ .

**Remarque 2.1.2.** 1. La condition  $\forall x \in V \cap I$   $f(a) \geq f(x)$  est équivalente à chacune des assertions suivantes :

- (i)  $f|_{V \cap I}$  admet un maximum global en  $a$  ;
- (ii)  $f$  est majorée par  $f(a)$  sur  $V \cap I$  ;
- (iii)  $f(V \cap I)$  est majoré par  $f(a)$  ;
- (iv)  $f(a) = \sup_{x \in V \cap I} f(x)$  ;
- (v)  $f(a) = \max_{x \in V \cap I} f(x)$ .

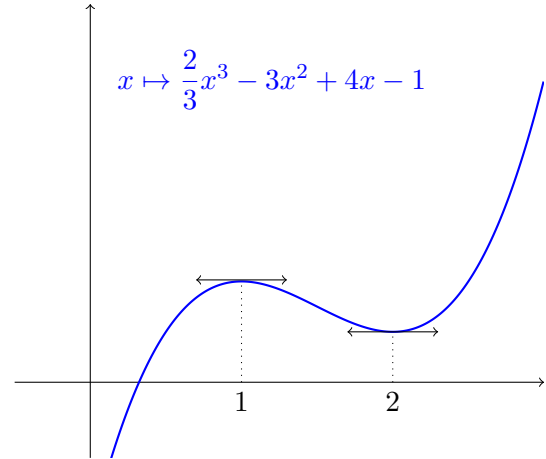


FIGURE 1 – Exemple de fonction possédant des extremums locaux, mais non globaux.

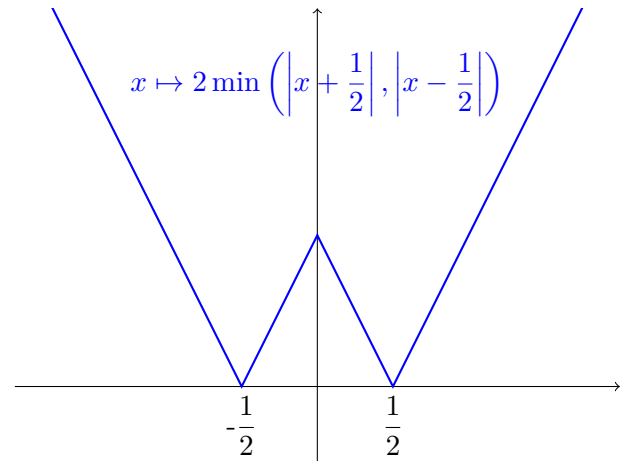


FIGURE 2 – Exemple de fonction possédant des minimums globaux non uniques.

2. Une fonction peut avoir un minimum en un point  $a$  sans qu'elle ne soit croissante sur un voisinage à droite ni décroissante sur un voisinage à gauche. Considérer par exemple l'application

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2[\sin(1/x) + 1] & \text{sinon} \end{cases}$$



**Théorème 2.1.3.**

Soit  $a \in I$ . Si  $f$  possède un extremum local en  $a$  et si  $f$  est dérivable en  $a$ , alors  $f'(a) = 0$ .

- Remarque 2.1.4.** 1. Il est essentiel que  $a$  appartienne à l'intérieur de  $I$ . Si  $a$  est une extrémité de  $I$ , on peut considérer le contre-exemple  $\text{Id}_{[0,1]}$ , qui possède un minimum global en 0 et un maximum global en 1 et est dérivable sur  $[0,1]$  mais dont la dérivée ne s'annule ni en 0 ni en 1.
2. La réciproque est fautive. Ainsi  $x \mapsto x^3$  a une dérivée nulle en 0 sans avoir d'extremum.

**Démonstration.**

Sans perte de généralité, on suppose que  $f$  admet un maximum local en  $a$ . Il existe donc un voisinage  $V_1$  de  $a$  tel que  $f$  soit majorée par  $f(a)$  sur  $V_1 \cap I$ .

$a$  étant intérieur à  $I$ , il existe un voisinage  $V_2$  de  $a$  inclus dans  $I$ .

On a alors  $V_1 \cap V_2 \subset V_1 \cap I$ ,  $f$  est donc majorée par  $f(a)$  sur  $V_1 \cap V_2$ .

De plus,  $V_1 \cap V_2$  est un voisinage donc contient un segment  $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$  où  $\varepsilon > 0$ .

On a alors, pour tout  $x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ ,  $f(x) - f(a) \leq 0$ .

Donc d'une part

$$\forall x \in [a - \varepsilon, a[ \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

donc par passage à la limite  $f'(a) \geq 0$ .

Et d'autre part,

$$\forall x \in ]a, a + \varepsilon] \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

donc par passage à la limite  $f'(a) \leq 0$ .

Donc  $f'(a) = 0$ . □

**Définition 2.1.5.**

Supposons  $f$  dérivable, un point  $a \in I$  est un *point critique* de  $f$  si  $f'(a) = 0$ .

**Remarque 2.1.6.**

Le théorème 2.1.3 s'énonce donc ainsi : tous les extremums locaux d'une fonction dérivable à l'intérieur de son ensemble de définition sont des points critiques de cette fonction. Ou bien : une condition nécessaire pour qu'un point  $a$ , à l'intérieur de l'ensemble de définition d'une fonction  $f$

dérivable, soit un extremum local de  $f$  est que  $a$  soit un point critique de  $f$ .

**Remarque 2.1.7.**

Cette condition nécessaire n'est pas suffisante, comme le montre le contre-exemple  $x \mapsto x^3$  en 0.

L'étude des extremums (locaux ou globaux) d'une fonction dérivable commencera donc la plupart du temps par une étude systématique de ses points critiques.

**2.2 Le théorème de Rolle.****Théorème 2.2.1** (Théorème de Rolle).

Soient  $a, b \in I$  avec  $a < b$  et  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}(]a, b[, \mathbb{R})$  vérifiant  $f(a) = f(b)$ , alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Remarque 2.2.2.**

Toutes les hypothèses sont importantes. On pourra considérer les applications suivantes qui sont toutes des contre-exemples correspondant à l'oubli d'une hypothèse :

$$f_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x$$

$$f_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$$

$$f_3 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x|$$

**Démonstration.**

$f$  est continue sur  $[a, b]$ , donc elle est bornée et atteint ses bornes. On note  $m$  son minimum et  $M$  son maximum.

- Si  $f(a) = f(b) \neq m$ , alors  $m < f(a)$  et  $m < f(b)$ , et donc  $m$  est atteint sur  $]a, b[$ , donc  $f'$  s'annule en ce point.
- Même raisonnement si  $f(a) = f(b) \neq M$ .
- Sinon, cela signifie que  $f(a) = f(b) = m = M$ , et donc  $f$  est nécessairement constante sur  $]a, b[$ .  $f'$  y est donc identiquement nulle. □

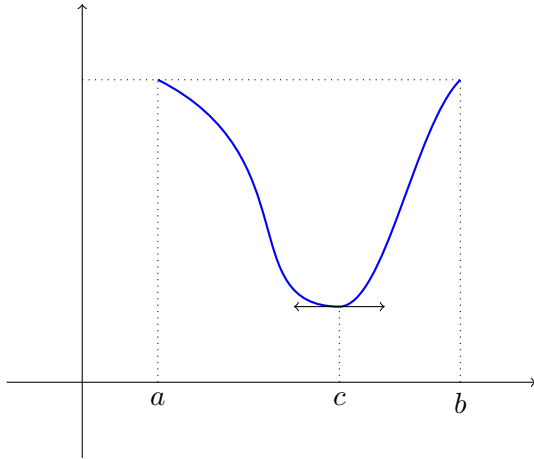


FIGURE 3 – Illustration du théorème de Rolle (existence d'une tangente horizontale, d'un point critique).

## 2.3 Égalité et inégalité des accroissements finis.

**Théorème 2.3.1** (Égalité des accroissements finis, ou TAF).

Soient  $(a, b) \in I^2$  avec  $a < b$  et  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}(]a, b[, \mathbb{R})$ . Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Remarque 2.3.2.** 1. Ce théorème est une généralisation du théorème de Rolle : les hypothèses sont les mêmes, à l'exception de l'hypothèse  $f(a) = f(b)$ , qui n'est ici pas nécessaire, et la conclusion est la même que celle du théorème de Rolle dans le cas où  $f(a) = f(b)$ .

2. Cependant, on va utiliser le théorème de Rolle pour démontrer le théorème des accroissements finis. Dans ces conditions affirmer que le théorème de Rolle n'est qu'un corollaire du TAF laisserait croire que l'on n'a pas bien saisi l'enchaînement des démonstrations.
3. Un autre énoncé de ce théorème est le suivant : Soient  $(a, b) \in I^2$  avec  $a \neq b$  et

$f$  continue sur l'intervalle  $[a, b]$  (ou  $[b, a]$  si  $b < a$ ) et dérivable sur l'intérieur de ce même intervalle. Alors il existe  $\theta \in ]0, 1[$  tel que

$$f'(a + \theta(b - a)) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Démonstration.**

Posons  $p = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  et

$$\begin{aligned} \varphi : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - px \end{aligned}$$

Alors  $\varphi(b) - \varphi(a) = f(b) - f(a) - p(b - a) = 0$ , donc  $\varphi(a) = \varphi(b)$ .

De plus,  $\varphi$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . Donc d'après le théorème de Rolle, il existe  $c \in ]a, b[$  vérifiant  $\varphi'(c) = 0$ . Or  $\varphi'(c) = f'(c) - p$ , donc  $f'(c) = p = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .  $\square$

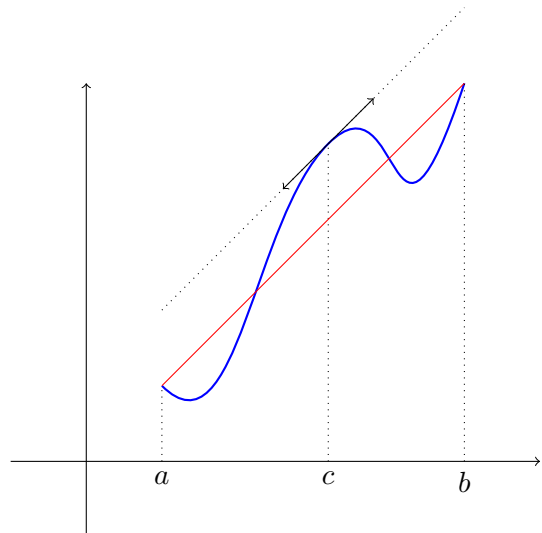


FIGURE 4 – Illustration du théorème des accroissements finis (existence d'une tangente de même pente que la corde).

Pour montrer le TAF, on se ramène à Rolle par une transformation géométrique  $(x, y) \mapsto (x, y - px)$ . Où  $p$  est la pente de la droite  $D$  passant par les points  $(a, f(a))$  et  $(b, f(b))$ . En effet, on peut remarquer que  $D$  est parallèle au graphe de  $p\text{Id}$ , donc  $f(a) - pa = f(b) - pb$ . On peut alors appliquer le théorème de Rolle à l'application  $f - p\text{Id}$ .

**Théorème 2.3.3** (Inégalité des accroissements finis, ou IAF).

Soient  $(a, b) \in I^2$  avec  $a < b$  et  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}(]a, b[, \mathbb{R})$ .

1. Si  $f'$  est minorée par un réel  $m$  sur  $]a, b[$ , alors  $m(b - a) \leq f(b) - f(a)$ .
2. Si  $f'$  est majorée par un réel  $M$  sur  $]a, b[$ , alors  $f(b) - f(a) \leq M(b - a)$ .
3. Si  $|f'|$  est majorée par  $K > 0$ , alors  $|f(b) - f(a)| \leq K|b - a|$ .

**Démonstration.**

Par application du TAF à  $f$ , on sait qu'il existe  $c \in ]a, b[$  vérifiant  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

1. Sous les hypothèses données, on a  $m \leq f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ , d'où le résultat.
2. De même, on a  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \leq M$ , d'où le résultat.
3. De même,  $\frac{|f(b) - f(a)|}{|b - a|} = |f'(c)| \leq K$ , d'où le résultat.

Notez que l'hypothèse  $a < b$  n'est ici pas nécessaire : dans le cas où  $a = b$  le résultat est évident ; dans le cas où  $a > b$ , il suffit d'échanger les rôles de  $a$  et  $b$ .

□

**Définition 2.3.4.**

Soit  $K \in \mathbb{R}_+^*$ . On dit que  $f$  est  $K$ -lipschitzienne si  $\forall (x, y) \in I^2$ ,  $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ .

**Remarque 2.3.5.**

Si  $x \neq y$ , on a donc  $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq K$ , donc les pentes des cordes du graphe de  $f$  sont bornées par  $K$ .

**Proposition 2.3.6.**

Toute fonction lipschitzienne est continue.

**Démonstration.**

Direct en revenant aux définitions.

□

**Exemple 2.3.7.**

La fonction

$$f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x}$$

est 1-lipschitzienne. En effet, si  $x, y \geq 1$ ,

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{x - y}{xy} \right| \leq 1 \times |x - y|.$$

On retrouve cela par l'inégalité des accroissements finis.

**Corollaire 2.3.8.** 1. Soit  $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ . Si  $|f'|$  est bornée par  $K$  sur  $I$ , alors  $f$  est  $K$ -lipschitzienne sur  $I$

2. Si  $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ , alors  $f$  est lipschitzienne sur  $[a, b]$ .

**Démonstration.** 1. Immédiat avec le second point de l'IAF.

2.  $f'$  est continue sur un segment, donc bornée sur ce segment, et on peut donc appliquer le premier point.

□

**Exemple 2.3.9.**

Utiliser l'IAF permet de montrer aisément que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|\sin x| \leq |x|$ .

**Exercice 2.3.10.**

En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout  $x > 0$  :

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \leq \frac{1}{x}.$$

En déduire une minoration et la limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$  de

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

## 2.4 Dérivabilité et sens de variation.

Résultats déjà connus, que l'on précise et démontre. On rappelle l'hypothèse primordiale :  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

**Théorème 2.4.1.**

Soit  $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ .

1.  $f$  est croissante sur  $I$  si et seulement si  $f' \geq 0$  sur  $I$ .
2.  $f$  est constante sur  $I$  si et seulement si  $f' = 0$  sur  $I$ .
3.  $f$  est strictement croissante sur  $I$  si et seulement si  $f' \geq 0$  et l'ensemble  $\{x \in I, f'(x) = 0\}$  ne contient aucun intervalle non trivial (non vide et non réduit à un point).

On obtient les mêmes résultats pour des fonctions décroissantes *mutatis mutandis*.

**Démonstration.**

On ne traite que les cas où  $f$  est croissante.

1.  $(\Rightarrow)$  On suppose  $f$  croissante sur  $I$ , alors son taux d'accroissement en tout point fixé  $a \in I$  est positif. Par passage à la limite, on obtient  $f'(a) \geq 0$ .  
 $(\Leftarrow)$  On suppose  $f' \geq 0$ . Soit alors  $(x, y) \in I^2$  avec  $x < y$ . Par application de l'IAF à  $f$  entre  $x$  et  $y$ , nous avons directement  $f(y) - f(x) \geq 0$ .  
 Donc  $f$  est croissante.
2.  $f$  est constante si et seulement si  $f$  est croissante et décroissante. On conclut par utilisation du point précédent.
3.  $(\Rightarrow)$  On suppose  $f$  strictement croissante. On sait déjà que  $f' \geq 0$ . On pose  $\mathcal{E} = \{x \in I \mid f'(x) = 0\}$ . Soit  $(a, b) \in I^2$ ,  $a \leq b$ , tel que  $[a, b] \subset \mathcal{E}$ . Il suffit de montrer que  $a = b$ . On a  $f'|_{[a, b]} = 0$  donc  $f|_{[a, b]}$  est constante. En particulier  $f(a) = f(b)$ . Or  $f$  est strictement croissante, donc on ne peut pas avoir  $a < b$ , donc  $a = b$ .  
 $(\Leftarrow)$  Supposons que l'ensemble des points où  $f'$  s'annule ne contient aucun intervalle non trivial. Alors  $f$  est croissante. Par l'absurde, supposons que  $f$  ne soit pas strictement croissante. Alors il existe  $(x, y) \in I^2$  avec  $x < y$  et  $f(x) = f(y)$ . Alors puisque  $f$  est croissante,  $f$  est constante sur  $[x, y]$ , et donc  $f'|_{[x, y]} = 0$ . Mais alors par hypothèse,  $x = y$ , ce qui est absurde. Donc  $f$  est strictement croissante.  $\square$

**Remarque 2.4.2.** 1. On a  $f' > 0 \Rightarrow f$  strictement croissante, mais pas la réciproque : une fonction strictement croissante peut avoir une dérivée qui s'annule (mais pas n'importe

comment), ex :  $x \mapsto x^3$  (il s'agit souvent d'un point d'inflexion).

2.  $I$  doit être un intervalle. Le théorème est faux dans le cas où  $I$  est une réunion d'intervalles disjoints (considérer par exemple l'application  $x \mapsto 1/x$ , de  $] -\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$ ).
3. Si on suppose seulement  $f'(a) > 0$ , alors  $f$  n'est pas nécessairement strictement croissante au voisinage de  $a$ . Exemple :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \sin 1/x + (x/2) & \text{sinon} \end{cases}$$

En calculant la limite du taux d'accroissement de  $f$  en zéro, on obtient  $f'(0) = 1/2$ , mais pour  $x \neq 0$ ,  $f'(x) = 1/2 + 2x \sin 1/x - \cos 1/x$ , et cette expression prend des valeurs négatives dans tout voisinage de 0.

4. En général, pour étudier les variations de  $f$  sur  $I$  avec ce théorème, il suffit que  $f$  soit dérivable sur l'intérieur de  $I$  et continue sur  $I$  tout entier. En effet, si une application  $f$  continue sur  $I$  est croissante (resp. strictement croissante, resp. décroissante, resp. strictement décroissante) sur  $\overset{\circ}{I}$  alors elle l'est aussi sur  $I$ .

**2.5 Limite de la dérivée.****Théorème 2.5.1** (de la limite de la dérivée).

Soit  $a < b$ ,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ . On suppose

1.  $f$  continue sur  $[a, b]$
2. et  $f$  dérivable sur  $]a, b[$
3. et  $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \ell$ .

Alors  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \ell$ . En particulier

- dans le cas où  $\ell = +\infty$  (resp.  $\ell = -\infty$ ),  $f$  n'admet pas de dérivée à droite en  $a$  et son graphe admet une demi-tangente verticale en  $(a, f(a))$  dirigée vers le haut (resp. vers le bas) ;
- dans le cas où  $\ell$  est réel, on a

1.  $f$  est dérivable (à droite) en  $a$
2. et  $f'(a) = \ell = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$
3. et  $f'$  est continue (à droite) en  $a$ .

On a le même résultat à gauche en un point (inverser haut et bas dans le cas des limite infinies) et des deux côtés (limite globale) en un même point.

#### Démonstration.

La difficulté est de montrer  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \ell$ , le reste s'en déduisant immédiatement.

Pour tout  $x \in ]a, b]$ ,  $f$  est dérivable sur  $]a, x[$  et continue sur  $[a, x]$  donc il existe  $c \in ]a, x[$  vérifiant  $f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ .

On peut ainsi définir une application  $g : ]a, b] \rightarrow ]a, b]$ , vérifiant pour tout  $x \in ]a, b]$ ,  $g(x) \in ]a, x[$  et  $f'(g(x)) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ .

Donc  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} a$ . Or  $f' \xrightarrow{a^+} \ell$  donc  $f'(g(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \ell$ .

Donc  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \ell$ .  $\square$

#### Remarque 2.5.2.

Ce théorème permet de conclure sur la dérivabilité ou non-dérivabilité de  $f$  en  $a$  dans le cas où la dérivée au voisinage épointé de  $a$  admet une limite (finie ou infinie) en  $a$ . En revanche il ne permet pas de dire quoi que ce soit dans le cas où la dérivée n'admet pas de limite.

#### Exemple 2.5.3.

On considère les fonctions  $f_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$  définies au point 3 de l'exemple 1.2.15. Pour  $n \geq 1$ ,  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ . De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'_n(x) = nx^{n-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^{n-2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Pour  $n \geq 3$ ,  $f'_n(x) \xrightarrow[x \neq 0]{x \rightarrow 0} 0$ . Donc, d'après le théorème ci-dessus, pour tout  $n \geq 3$ ,  $f_n$  est dérivable en 0, de dérivée égale à 0 et on a même  $f_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Pour  $n \in \{1, 2\}$ ,  $f'_n$  n'a pas de limite en 0. Le théorème précédent ne permet alors de conclure ni à la dérivabilité, ni à la non-dérivabilité de  $f_n$  en 0. Et pour cause :  $f_2$  est bien dérivable en 0, de dérivée nulle tandis que  $f_1$  ne l'est pas. En effet, le

taux d'accroissement de  $f_n$  en 0 est l'application  $x \mapsto x^{n-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ , qui tend vers 0 en 0 si  $n = 2$  et n'a pas de limite en 0 si  $n = 1$ .

#### Exemple 2.5.4.

Notons  $f$  l'application racine carrée de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$ .  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

Donc  $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ , donc  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ , donc  $f$  n'est pas dérivable en 0.

Remarquez cependant qu'il était ici tout aussi aisé de calculer directement le taux d'accroissement de  $f$  en 0 et de vérifier qu'il ne convergerait pas.

#### Remarque 2.5.5.

On voit sur ces exemples qu'il est erroné de croire que la non-dérivabilité de  $f$  en  $a$  implique que  $f'$  n'a pas de limite en  $a$  (cas de la racine carrée).

Il est tout aussi erroné de croire que l'absence de limite pour  $f'$  en  $a$  implique que  $f$  n'est pas dérivable en  $a$  (cas de  $f_2$ ).

#### Exercice 2.5.6.

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ , et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  :  

$$x \mapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$
 Trouver les valeurs de  $a$  et  $b$  pour lesquelles  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

#### Correction.

Remarquons que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  et que sa dérivée est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

De plus  $f$  est continue à gauche et dérivable à gauche en 1, de dérivée à gauche  $f'_g(1) = e$ .

**Analyse** Supposons  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Alors  $f$  est continue, donc  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} f(1)$ , donc  $1 + a + b = e$ .

De plus  $f$  est dérivable. Sa dérivée à gauche en 1 est  $e$ . Pour  $x > 1$ , on a  $f'(x) = 2x + a$ , donc  $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 2 + a$ , donc  $f'$  est dérivable à droite en 1, de dérivée  $2 + a$ .

$f$  étant dérivable en 1, on a  $e = f'_g(1) = f'_d(1) = 2 + a$ .

Donc  $a = e - 2$  et  $b = 1$ .

**Synthèse** Supposons  $a = e - 2$  et  $b = 1$ . Par les calculs précédents,  $f$  est continue à droite en 1, donc  $f$  est continue en 1.

De plus,  $f$  est dérivable en tout  $x \in ]1, +\infty[$ , et  $f'(x) = 2x + a$ , donc  $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 2 + a$ , donc grâce au théorème de la limite de la dérivée,  $f$  est dérivable à droite en 1 et  $f'_d(1) = 2 + a = e$ .

Ainsi,  $f$  est dérivable en 1, de dérivée  $e$ .  $f$  est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

De plus  $f'$  est continue à droite et à gauche en 1, donc  $f'$  est continue en 1, donc sur  $\mathbb{R}$ .

Donc  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

**Conclusion**  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  si et seulement si  $a = e - 2$  et  $b = 1$ .

## 2.6 Théorème des accroissements finis et suites récurrentes.

Le TAF fournit un outil supplémentaire pour étudier les suites récurrentes. Si une telle suite converge, elle converge vers un point fixe de  $f$ , et se prête à une approximation des points fixes de  $f$ .

Le TAF, dans certaines conditions, assure qu'une telle suite converge (1er résultat) sans avoir à étudier la monotonie de  $f$  ni celle de  $(u_n)$ , et assure que la convergence est rapide (2eme résultat).

### Exemple 2.6.1.

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  stable par  $f$ , et  $\ell \in I$  un point fixe de  $f$ . Soit  $u_0 \in I$ . On considère la suite  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

Si  $|f'|$  est majorée par  $M$  tel que  $0 \leq M < 1$ , alors pour tout  $n$ ,  $|u_n - \ell| \leq M^n |u_0 - \ell|$  (le montrer par récurrence). Et donc  $|u_n - \ell| \rightarrow 0$ . De plus, la convergence est géométrique ce qui est rapide. Par exemple, si  $M = \frac{1}{10}$ , alors on gagne une décimale de précision à chaque étape.

### Exemple 2.6.2.

Trouver une approximation du point fixe de  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$  à  $10^{-2}$ .  $\mathbb{R}_+$  est stable par  $f$ ,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ , de dérivée  $x \mapsto -\frac{1}{(1+x)^2}$

bornée par 1.

Malheureusement cette borne est insuffisante pour appliquer les idées vues ci-dessus : on aimerait avoir une borne  $K$  strictement inférieure à 1.

Pour cela, on va chercher un intervalle stable par  $f$  sur lequel  $f'$  est bornée par un  $K < 1$ .  $f'$  étant strictement croissante et à valeurs négatives, il suffit de trouver un intervalle de la forme  $[a, b]$  avec  $a < b$  et  $a > -1$ .

Le point fixe de  $f$  est par calcul  $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ . On peut constater que  $f(1) = 1/2$ , et comme  $\alpha \leq 1$ , en déduire que  $1/2 \leq f(\alpha) = \alpha$ .

On peut alors constater aisément que  $[1/2, 1]$  est stable par  $f$ . On peut choisir une valeur arbitraire dans  $[1/2, 1]$ . En itérant  $f$  sur cette valeur on obtient des approximations successives de  $\alpha$  convergeant vers  $\alpha$ .

### Exercice 2.6.3.

On considère une suite  $u$  définie par

$$u_0 \in [-1, 1] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}.$$

Déterminer un segment  $I$  sur lequel appliquer l'IAF permet de montrer que si  $u_0 \in I$ , alors  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

### Remarque 2.6.4.

Supposons maintenant que  $f : I \rightarrow I$  soit dérivable et que sa dérivée soit bornée par  $K < 1$ .

Par récurrence, on montre facilement que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1} - u_n| \leq K^n |u_1 - u_0|$ . Alors, si  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} |u_n - u_0| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |u_{k+1} - u_k| \\ &\leq |u_1 - u_0| \sum_{k=0}^{n-1} K^k \\ &\leq \frac{1}{1-K} |u_1 - u_0|. \end{aligned}$$

Ainsi,  $(u_n)$  est bornée.

### 3 Extension au cas des fonctions complexes.

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

- La définition de dérivée en  $a$  est exactement la même que pour les fonctions réelles, mais la dérivée est à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . On a aussi le résultat (simple) suivant.

#### Proposition 3.0.1.

La fonction  $f$  est dérivable (en un point ou sur  $I$ ) si et seulement si  $\operatorname{Re}(f)$  et  $\operatorname{Im}(f)$  le sont aussi. Dans ce cas, on a  $f' = \operatorname{Re}(f)' + i \operatorname{Im}(f)'$ .

- Les résultats concernant les opérations sur la dérivabilité se généralisent :  $+$ ,  $\times$ ,  $/$ .

- Par contre, attention à la composition : dériver  $f \circ g$  n'a de sens (dans notre cadre) que si  $g$  est à valeurs réelles, et  $f$  peut être à valeurs complexes ! Dans ce cas, on a le même résultat que dans le cas réel.

- Pour démontrer tout cela, on utilise la proposition 3.0.1.

- Les grands théorèmes :

- le théorème de Rolle ne se généralise pas.  
Ex :  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $x \mapsto e^{ix}$ .

- TAF : faux aussi (normal, cela impliquerait le théorème de Rolle).

- IAF : On peut le formuler comme suit.

#### Théorème 3.0.2 (IAF version complexe).

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $a < b$  et  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})^0 \cap \mathcal{D}(]a, b[, \mathbb{C})$  tel qu'il existe  $K > 0$  vérifiant  $\forall x \in ]a, b[ \quad |f'(x)| \leq K$ . Alors  $|f(b) - f(a)| \leq K(b - a)$ .

**Démonstration.** 1. On va d'abord s'intéresser au cas particulier où  $f(b) - f(a)$  est un réel. Dans ce cas, on considère l'application  $\operatorname{Re}(f) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Elle est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . De plus, pour tout  $x \in ]a, b[$ , on a  $|\operatorname{Re}(f)'(x)| = |\operatorname{Re}(f'(x))| \leq |f'(x)| \leq K$ . Donc on peut appliquer l'IAF à  $\operatorname{Re}(f)$  et en déduire :  $|\operatorname{Re}(f)(b) - \operatorname{Re}(f)(a)| \leq K(b - a)$ . Or  $\operatorname{Re}(f)(b) - \operatorname{Re}(f)(a) = \operatorname{Re}(f(b) - f(a)) = f(b) - f(a)$ . On a donc le résultat.

2. Montrons maintenant le cas général.  $f(b) - f(a)$  est de la forme  $e^{i\theta}|f(b) - f(a)|$ . Notons alors

$$\begin{aligned} \varphi : [a, b] &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto e^{-i\theta} f(x) \end{aligned}$$

$\varphi$  est clairement dérivable sur  $]a, b[$  et continue sur  $[a, b]$ . De plus pour tout  $x \in ]a, b[$ ,  $\varphi'(x) = e^{-i\theta} f'(x)$ , donc  $|\varphi'(x)| = |f'(x)| \leq K$ .

De plus  $\varphi(b) - \varphi(a) = e^{-i\theta}(f(b) - f(a)) = |f(b) - f(a)|$ .

$\varphi(b) - \varphi(a)$  est donc réel, donc on peut appliquer le point ci-dessus à  $\varphi : |\varphi(b) - \varphi(a)| \leq K|b - a|$ .

Or  $|\varphi(b) - \varphi(a)| = |f(b) - f(a)|$ , d'où le résultat.  $\square$

Les notions de monotonie d'une fonction  $f$  ou de signe de  $f'$  n'ont évidemment pas de sens dans le cas des fonctions à valeurs complexes, mais on a cependant le résultat suivant.

#### Théorème 3.0.3.

Soit  $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$ . Alors  $f$  est constante si et seulement si  $f' = 0$ .

#### Démonstration.

La fonction  $f$  est constante si et seulement si  $\operatorname{Re}(f)$  et  $\operatorname{Im}(f)$  sont constantes, ce qui équivaut à  $(\operatorname{Re}(f))' = (\operatorname{Im}(f))' = 0$ , ce qui équivaut à  $(\operatorname{Re}(f))' + i(\operatorname{Im}(f))' = 0$ , c'est-à-dire à  $f' = 0$ .  $\square$

## 4 Convexité.

### 4.1 Parties convexes de $\mathbb{R}^2$ (HP).

Cette partie est hors du programme de MPSI (mais au programme en MP), et est présente ici à but d'illustration.

#### Rappel 4.1.1.

Soit  $A, B$  des points du plan de  $\mathbb{R}^2$  d'affixes respectives  $a, b$ , soit  $M$  un autre point du plan. On

note  $[A, B]$  le segment reliant les points  $A$  et  $B$ .  
On a alors

$$\begin{aligned} M \in [A, B] &\Leftrightarrow \exists \lambda \in [0, 1], \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in [0, 1], \overrightarrow{OM} = (1 - \lambda) \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

Notamment, ce segment a pour paramétrisation complexe

$$\{ (1 - \lambda)a + b\lambda \mid \lambda \in [0, 1] \}.$$

#### Définition 4.1.2.

Une partie  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$  est dite convexe si pour tout  $A, B \in \mathcal{C}$ ,  $[A, B] \subset \mathcal{C}$ , c'est-à-dire si cette partie contient tous les segments reliant ses points (voir figure 5).

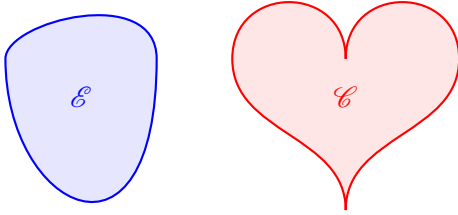


FIGURE 5 –  $\mathcal{E}$  est convexe,  $\mathcal{C}$  ne l'est pas.

#### Remarque 4.1.3.

On peut donner la même définition dans  $\mathbb{R}$ . Les parties convexes de  $\mathbb{R}$  sont alors les intervalles de  $\mathbb{R}$ .

Si  $a < b < c \in \mathbb{R}$ , on écrit  $b = (1 - \lambda)a + \lambda c$ ,  
avec  $\lambda = \frac{b - a}{c - a} \in ]0, 1[$ .

#### Exemple 4.1.4.

Un demi-plan est une partie convexe de  $\mathbb{R}^2$ .

#### Exercice 4.1.5.

Montrer qu'un disque est une partie convexe de  $\mathbb{R}^2$ .

## 4.2 Fonctions convexes.

**Définition 4.2.1.** 1. On dit que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est *convexe* si

$$\begin{aligned} \forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1], \\ f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \end{aligned}$$

2. On dit que  $f$  est *concave* si

$$\begin{aligned} \forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1], \\ f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \end{aligned}$$

**Remarque 4.2.2** (voir figure 6).

Nous avons vu que  $(\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y))$  est une paramétrisation de la corde à la courbe de  $f$  reliant les points d'abscisses  $x$  et  $y$ .

Ainsi,  $f$  est convexe si et seulement si ses cordes sont toutes au dessus des arcs de courbes correspondants, et concave si et seulement si ses cordes sont toutes au dessous des arcs de courbes correspondants.

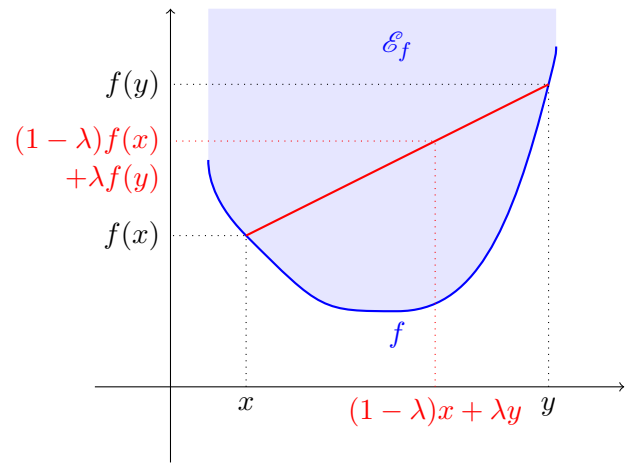



FIGURE 6 – Exemple de fonction  $f$  convexe, une de ses cordes et son épigraphe  $\mathcal{E}_f$ .

#### Remarque 4.2.3.

Cette définition est symétrique en  $x, y$ . On pourra



donc toujours supposer, sans perte de généralité, que  $x < y$ .

**Remarque 4.2.4** () .

« concave » n'est pas le contraire de « convexe ».

Il existe des fonctions ni concaves, ni convexes (par exemple,  $x \mapsto x^3$ ) ; il existe des fonctions concaves et convexes (par exemple, les fonctions constantes).

**Exercice 4.2.5.**

Caractériser les fonctions à la fois concaves et convexes.

**Proposition 4.2.6.**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , alors  $f$  est convexe si et seulement si  $-f$  est concave.

**Démonstration.**

Élémentaire. □

**Remarque 4.2.7.**

Tous les résultats sur les fonctions concaves s'obtiennent donc par symétrie à partir de ceux obtenus sur les fonctions convexes. Nous nous intéressons donc principalement aux fonctions convexes par la suite.

**Définition 4.2.8.**

On appelle *épigraphe* de  $f$  l'ensemble

$$\{ (x, y) \mid x \in I \text{ et } y \geq f(x) \}.$$

**Proposition 4.2.9** (Interprétation géométrique, voir figure 6).

Une fonction est convexe si et seulement si son épigraphe est une partie convexe de  $\mathbb{R}^2$ .

**Démonstration.**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  convexe, soit  $(x, y)$  et  $(x', y')$  deux points de l'épigraphe de  $f : x, x' \in I, y \geq f(x)$  et  $y' \geq f(x')$ . Soit  $\lambda \in [0, 1]$ . Comme  $1 - \lambda \geq 0$  et  $\lambda \geq 0$ , on a

$$(1 - \lambda)y + \lambda y' \geq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(x').$$

Comme  $I$  est un intervalle, on a  $(1 - \lambda)x + \lambda x' \in I$ . Comme  $f$  est convexe, on a  $(1 - \lambda)f(x) + \lambda f(x') \geq f((1 - \lambda)x + \lambda x')$ , donc

$$(1 - \lambda)y + \lambda y' \geq f((1 - \lambda)x + \lambda x').$$

Ainsi,  $((1 - \lambda)x + \lambda x', (1 - \lambda)y + \lambda y')$  appartient à l'épigraphe de  $f$ , donc cet épigraphe est bien convexe.

Réciproquement, supposons que l'épigraphe de  $f$  soit convexe. Si  $x, y \in I$ , on a bien entendu  $f(x) \geq f(x)$  (*idem* pour  $y$ ), donc  $(x, f(x))$  et  $(y, f(y))$  sont deux points de l'épigraphe de  $f$ . Ainsi, si  $\lambda \in [0, 1]$ , alors  $((1 - \lambda)x + \lambda y, (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y))$  est dans l'épigraphe de  $f$ , ce qui signifie exactement que

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Ainsi,  $f$  est convexe. □

**Proposition 4.2.10** (Inégalité de Jensen).

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  convexe. Alors pour tout  $x_1, \dots, x_n \in I$  et pour tout  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$  vérifiant  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ , on a

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

**Démonstration.**

On le montre par récurrence.

Pour  $n = 1$ , il n'y a rien à faire.

Pour  $n = 2$ , c'est la définition de la convexité. En effet, si  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ , on a alors  $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$ .

Soit  $n \geq 1$ , supposons l'inégalité de Jensen vérifiée pour  $n$  points et paramètres quelconques. Soit  $x_1, \dots, x_{n+1} \in I$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0$  vérifiant  $\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 1$ .

Remarquons que si  $\lambda_{n+1} = 0$ , le résultat est assuré par hypothèse de récurrence, et si  $\lambda_{n+1} = 1$ , on a  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ , et le résultat est immédiat.

On peut donc supposer que  $0 < \lambda_{n+1} < 1$ .

On pose  $\mu = \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 - \lambda_{n+1} \in ]0, 1[$ . Posons aussi

$$S = \frac{\lambda_1}{\mu} x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{\mu} x_n,$$

de sorte que

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1} = \mu S + \lambda_{n+1} x_{n+1},$$

où  $\mu + \lambda_{n+1} = 1$ .

Comme  $\frac{\lambda_1}{\mu} + \dots + \frac{\lambda_n}{\mu} = \frac{\mu}{\mu} = 1$  et comme ces nombres sont tous positifs, par convexité de  $I$  on a  $S \in I$  (cela se montre aisément par une récurrence similaire à celle-ci, laissée au lecteur – ou à la lectrice).

On a alors par convexité de  $f$  :

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \leq \mu f(S) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}).$$

Par hypothèse de récurrence, on a

$$f(S) \leq \frac{\lambda_1}{\mu} f(x_1) + \dots + \dots \frac{\lambda_n}{\mu} f(x_n),$$

de sorte que l'on obtient bien

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}).$$

Le résultat est donc bien établi par récurrence.  $\square$

### Théorème 4.2.11.

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors,  $f$  est convexe si et seulement si, pour tout  $a \in I$ , la fonction

$$\tau_{f,a} : \begin{cases} I \setminus \{a\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{cases}$$

est croissante.

#### Démonstration.

Supposons que  $f$  est convexe, soit  $a \in I$ , montrons que  $\tau_{f,a}$  est croissante.

Soit  $x, y \in I \setminus \{a\}$  vérifiant  $x < y$ , montrons que  $\tau_{f,a}(x) \leq \tau_{f,a}(y)$ .

On procède par disjonction de cas, suivant la position de  $a$ .

- Si  $a < x < y$ , il existe  $\lambda \in ]0, 1[$  tel que  $x = (1 - \lambda)a + \lambda y$  :  $\lambda = \frac{x - a}{y - a}$ . On a alors par convexité de  $f$  :

$$f(x) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(y),$$

donc

$$f(x) - f(a) \leq \lambda(f(y) - f(a))$$

Avec la valeur de  $\lambda$  trouvée précédemment, on obtient

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a},$$

soit exactement  $\tau_{f,a}(x) \leq \tau_{f,a}(y)$ .

On pourrait procéder de même dans les deux autres cas, mais ces derniers sont équivalents (voir la remarque 4.2.13 pour plus de détails).

- Si  $x < a < y$ , on a par ce qui précède :

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Après avoir multiplié par  $(a - x)(y - x) \geq 0$  et réordonné cela, on retrouve  $\tau_{f,a}(x) \leq \tau_{f,a}(y)$ .

- Si  $x < y < a$ , on a de même

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(a) - f(x)}{a - x}$$

et l'on retrouve de la même manière (après des manipulations élémentaires) :  $\tau_{f,a}(x) \leq \tau_{f,a}(y)$ .

Ainsi, par disjonction de cas,  $\tau_{f,a}$  est croissante.

Réciproquement, supposons que, pour tout  $a \in I$ ,  $\tau_{f,a}$  soit croissante sur  $I \setminus \{a\}$ .

Soit  $x, y \in I$ , supposons sans perte de généralité que  $x < y$ . Soit  $\lambda \in ]0, 1[$ , montrons que  $f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$ . Posons  $a = (1 - \lambda)x + \lambda y \in ]x, y[$ . Notamment,  $\lambda = \frac{a - x}{y - x}$  et  $1 - \lambda = \frac{y - a}{y - x}$ . On a par croissance de  $\tau_{f,a}$  :

$$\tau_{f,a}(x) \leq \tau_{f,a}(y),$$

soit

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a},$$

ou l'on a prit soin de n'écrire que des membres positifs. On a donc

$$(y - a)(f(a) - f(x)) \leq (a - x)(f(y) - f(a)),$$

soit

$$(y - x)f(a) \leq (a - x)f(y) + (y - a)f(x),$$

soit exactement

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Ainsi,  $f$  est convexe.  $\square$

**Corollaire 4.2.12** (Théorème des trois pentes, voir figure 7).

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors,  $f$  est convexe si et seulement si, pour tout  $a < b < c \in I$ , on a

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} \leq \frac{f(a) - f(c)}{a - c} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

#### Démonstration.

Si  $f$  est convexe, cela se lit  $\tau_{f,a}(b) \leq \tau_{f,a}(c)$  et  $\tau_{f,c}(a) \leq \tau_{f,c}(b)$ , ce qui est vrai par les croissances de  $\tau_{f,a}$  et de  $\tau_{f,b}$ .

Réciproquement, si l'inégalité des trois pentes est toujours vraie, on lit que la fonction  $\tau_{f,a}$  est croissante sur  $I \cap ]a, +\infty[$  et que la fonction  $\tau_{f,c}$  est croissante sur  $I \cap ]-\infty, c[$ .

Comme  $a$  et  $c$  sont quelconques,  $\tau_{f,b}$  est croissante sur  $I \cap ]-\infty, b[$  et sur  $I \cap ]b, +\infty[$ . Or si  $a < b < c$ , on lit  $\tau_{f,b}(a) \leq \tau_{f,b}(c)$ , donc  $\tau_{f,b}$  est croissante, donc  $f$  est convexe.  $\square$

**Remarque 4.2.13.**

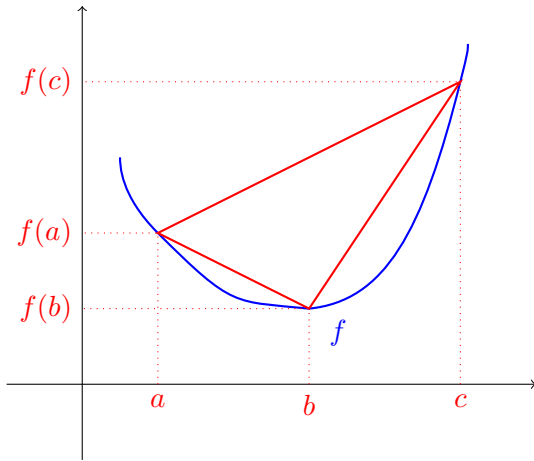
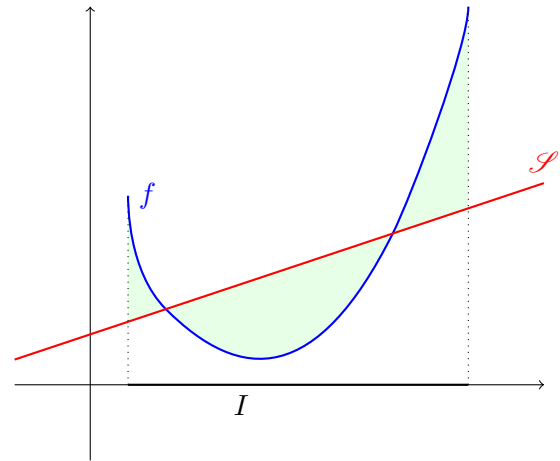


FIGURE 7 – Les trois cordes du théorème des trois pentes.

FIGURE 8 – Position d'une sécante  $\mathcal{S}$  par rapport à la courbe d'une fonction convexe  $f$ .

Les trois inégalités

$$\begin{aligned} \frac{f(a) - f(b)}{a - b} &\leq \frac{f(a) - f(c)}{a - c} \\ \frac{f(a) - f(c)}{a - c} &\leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c} \\ \frac{f(a) - f(b)}{a - b} &\leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c} \end{aligned}$$

sont toutes les trois équivalentes à l'inégalité

$$(a - b)f(c) + (b - c)f(a) + (c - a)f(b) \leq 0.$$

**Corollaire 4.2.14** (voir la figure 8).

Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe, considérons une sécante à la courbe de  $f$  :

- la corde ainsi construite est au dessus de la courbe de  $f$  ;
- en dehors de la corde, la sécante est en dessous de la courbe de  $f$ .

**Démonstration.**

Nous savons déjà que la corde à la courbe de  $f$  est au dessus de sa courbe. Soit  $a < b \in I$ , notons  $\mathcal{S}$  la sécante à la courbe de  $f$  passant par les points d'abscisses  $a$  et  $b$ . Soit  $x \in I$  vérifiant  $x < a$ . Le point d'abscisse  $x$  se trouvant sur  $\mathcal{S}$  a pour ordonnée

$$f(a) + \tau_{f,a}(b)(x - a)$$

et le point d'abscisse  $x$  de trouvant sur la courbe de  $f$  a pour ordonnée

$$f(x) = f(a) + \tau_{f,a}(x)(x - a).$$

Par croissance de  $\tau_{f,a}$ , on a  $\tau_{f,a}(b) \geq \tau_{f,a}(x)$ . Comme  $x - a < 0$ , on obtient bien

$$f(a) + \tau_{f,a}(b)(x - a) \leq f(x),$$

ce qui permet de conclure.

Le cas  $x > b$  est strictement identique.  $\square$

### 4.3 Régularité des fonctions convexes.

#### Rappel 4.3.1.

Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle, de bornes inférieures et supérieures  $a, b \in \mathbb{R}$ .

L'intérieur de  $I$  est l'intervalle ouvert  $\overset{\circ}{I} = ]a, b[$ . Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on a la caractérisation

$$x \in \overset{\circ}{I} \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, [x - \varepsilon, x + \varepsilon] \subset I.$$

#### Théorème 4.3.2 (HP, mais important).

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  convexe.

Pour tout  $a \in \overset{\circ}{I}$ ,  $f$  est dérivable à gauche et à droite en  $a$  et  $f'_g(a) \leq f'_d(a)$ .

De plus,  $f$  est continue sur  $\overset{\circ}{I}$ .

**Démonstration.**

La clef de ce théorème est le résultat de croissance des pentes démontré précédemment. Soit  $x < a < y \in \overset{\circ}{I}$ . Alors, par croissance de  $\tau_{f,a}$  :

$$\tau_f(x, a) \leq \tau_f(a, y).$$

Par limite monotone,  $\tau_{f,a}$  admet donc une limite finie à gauche en  $a$ , donc  $f$  est dérivable à gauche en  $a$  et

$$f'_g(a) \leq \tau_f(a, y).$$

De même,  $\tau_{f,a}$  admet une limite finie à droite en  $a$ , donc  $f$  est dérivable à droite en  $a$  et

$$f'_g(a) \leq f'_d(a).$$

Comme  $f$  est dérivable à gauche et à droite en  $a$ ,  $f$  est continue à gauche et à droite en  $a$ , donc continue en  $a$ .  $\square$

**Remarque 4.3.3.**

Il existe des fonctions convexes non continues, les discontinuités se trouvant alors au bord de l'intervalle de définition. On peut démontrer qu'une fonction convexe admet des limites (éventuellement infinies) à gauche ou à droite au bord son intervalle de définition.

Il existe aussi des fonctions convexes non dérivables.

**Exercice 4.3.4.**

Montrer que la fonction valeur absolue est convexe.

**Théorème 4.3.5.**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable. Alors,  $f$  est convexe si et seulement si  $f'$  est croissante.

**Démonstration.**

Supposons que  $f$  est convexe. Soit  $a < b \in I$ , soit  $x \in ]a, b[$ . Par le théorème des trois pentes (corollaire 4.2.12) :

$$\tau_f(a, x) \leq \tau_f(a, b) \leq \tau_f(b, x).$$

Par passage à la limite lorsque  $x$  tend vers  $a$ , puis vers  $b$ , on obtient

$$f'(a) \leq \tau_f(a, b) \leq f'(b),$$

donc  $f'$  est croissante.

Réciproquement, supposons que  $f'$  est croissante. Soit  $a < b < c \in I$ . Par l'égalité des accroissements finis appliqués sur  $[a, b]$  et  $[b, c]$ , il existe  $x \in ]a, b[$  et  $y \in ]b, c[$  tels que  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x)$  et  $\frac{f(c) - f(b)}{c - b} = f'(y)$ . Comme  $x < y$ , on a donc

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b},$$

ce qui s'écrit en multipliant par  $(b - a)(c - b) > 0$  et en simplifiant :

$$(c - a)f(b) + (b - c)f(a) + (a - b)f(c) \leq 0.$$

On en déduit immédiatement la condition du théorème des trois pentes, donc  $f$  est convexe.  $\square$

**Remarque 4.3.6.**

On démontre de même que, si  $f$  est convexe,  $f'_g$  et  $f'_d$  sont croissantes sur  $\overset{\circ}{I}$ , et ce sans hypothèse de dérivabilité.

**Corollaire 4.3.7.**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois dérivable. Alors,  $f$  est convexe si et seulement si  $f''$  est positive.

**Démonstration.**

Immédiat.  $\square$

**Exemple 4.3.8.**

La fonction exponentielle est convexe. Si  $\alpha \geq 1$ ,  $x \mapsto x^\alpha$  est convexe sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Théorème 4.3.9** (voir la figure 9).

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable. Alors,  $f$  est convexe si et seulement si la courbe de  $f$  est au dessus de toutes ses tangentes.

**Démonstration.**

On démontre que  $f$  est convexe si et seulement si, pour tout  $a, x \in I$ ,

$$f(x) \geq f(a) + (x - a)f'(a).$$

Supposons  $f$  convexe. Soit  $x, a \in I$ . Si  $x = a$ , on a  $f(x) = f(a) + (x - a)f'(a)$ . Si  $x \neq a$ , on peut appliquer l'égalité des accroissements finis : il existe  $c$  entre  $a$  et  $x$  tel que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c).$$

- Si  $x > a$ , on a  $x - a > 0$  et par croissance de  $f'$ , on a  $f'(c) \geq f'(a)$ .
- Si  $x < a$ , on a  $x - a < 0$  et par croissance de  $f'$ , on a  $f'(c) \leq f'(a)$ .

Dans les deux cas, on a bien  $f(x) \geq f(a) + (x - a)f'(a)$ .

Réciproquement, supposons que la courbe de  $f$  soit au dessus de toutes ses tangentes. Soit  $x, y \in I^2$ , soit  $\lambda \in [0, 1]$ . On pose  $a = \lambda x + (1 - \lambda)y \in I$ . Le graphe de  $f$  est au-dessus de sa tangente en  $(a, f(a))$ , donc on a les deux inégalités

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a),$$

$$f(y) \geq f(a) + f'(a)(y - a).$$

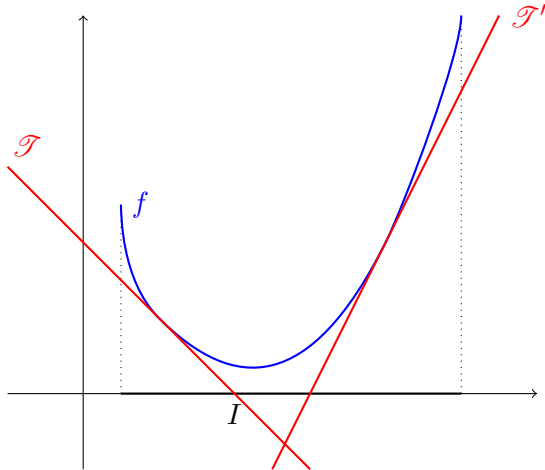


FIGURE 9 – Position de deux tangentes  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$  par rapport à la courbe d'une fonction convexe  $f$ .

En effectuant leur combinaison linéaire avec les coefficients  $\lambda \geq 0$  et  $(1 - \lambda) \geq 0$ , on obtient

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \geq f(a) + f'(a)(\lambda x + (1 - \lambda)y - a),$$

ce qui donne exactement

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \geq f(a).$$

Ainsi,  $f$  est convexe.  $\square$

**Corollaire 4.3.10** (Caractérisations de la concavité).

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Si  $f$  est dérivable, alors  $f$  est concave si et seulement si  $f'$  est décroissante, et si et seulement si la courbe de  $f$  est en dessous de toutes ses tangentes.

Si  $f$  est deux fois dérivable, alors  $f$  est concave si et seulement si  $f''$  est négative.

**Démonstration.**

Immédiat avec la proposition 4.2.6.  $\square$

**Exemple 4.3.11.**

La fonction  $\ln$  est concave.

**Définition 4.3.12.**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue, soit  $a \in I$ . Alors,  $a$  est un *point d'inflexion* pour  $f$  si la courbe de  $f$  change de concavité en  $a$ , c'est-à-dire s'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $f|_{[a-\varepsilon, a]}$  et  $f|_{[a, a+\varepsilon]}$  soient de concavités opposées (l'une est convexe et l'autre est concave).

**Proposition 4.3.13.**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois dérivable. Alors tout point d'annulation de  $f''$  où  $f''$  change de signe est un point d'inflexion de  $f$ .

Si  $a$  est un point d'inflexion de  $f$ , la tangente à la courbe de  $f$  en  $a$  traverse la courbe de  $f$ , en  $a$ .

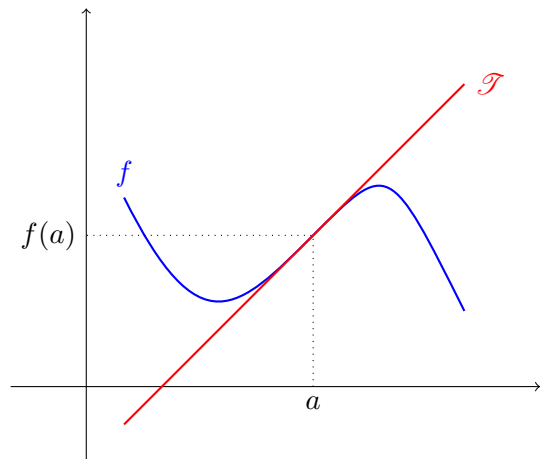


FIGURE 10 – Exemple de point d'inflexion  $a$  pour une fonction  $f$ . La tangente  $\mathcal{T}$  traverse la courbe de  $f$ .

**Exemple 4.3.14.**

Les fonction  $\tan$ ,  $\sin$  et  $\sh$  ont chacune un point d'inflexion en 0.