Devoir surveillé n° 8 - Remarques

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 26 points, ramené sur 5 points. Remarque : l'énoncé de la question 7 était faux, donc cette question n'est pas prise en compte. Les moyennes dans les statistiques descriptives ne répercutent pas cette modification et sont donc très légèrement fausses.
- Problèmes : chaque question sur 4 points, total sur 104 points (v1) et 108 points (v2), ramené sur 15 points.

Statistiques descriptives.

	Calculs	v1	v2	Note finale
Note maximale	23	51	67	19
Note minimale	4	14	14	4
Moyenne	$\approx 11,68$	$\approx 27,24$	$\approx 38,35$	$\approx 10,04$
Écart-type	$\approx 5,24$	$\approx 10,23$	$\approx 16,52$	$\approx 3,43$

I. Un exercice vu en TD (v1).

On demandait de trouver un point fixe dans $]0,1[$, ouvert. Il ne faut donc pas commencer par supposer qu'il n'y a pas de point fixe dans $[0,1]$ fermé. Soyez rigoureux : ouvert, fermé, ce n'est pas pareil.

La continuité de f servait à deux reprises : pour justifier que si $x \mapsto f(x) - x > 0$ alors $\int_0^1 f(t) - t \,\mathrm{d}t > 0$, et ensuite pour justifier que si cette même fonction change de signe, elle s'annule. C'était un peu le cœur de l'exercice.

II. Une fonction définie par une intégrale (v1).

1. C'était une question de cours : il fallait introduire F une primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ et alors $G(x) = F(x^2) - F(x)$. Il fallait ensuite dériver cela correctement : je suis inquiet de voir que beaucoup ne savent toujours pas dériver correctement une composée de fonctions.

4.b. Majorer une fonction, c'est la majorer par une constante, pas par une autre fonction.

III. Les matrices magiques (v1).

2. Une forme linéaire est une application linéaire, certes, mais il faut aussi préciser qu'elle est à valeurs dans $\mathbb{K}$ (ici $\mathbb{R}$).
Beaucoup confondent « sev » et « application linéaire », et ont parlé ici de stabilité par combinaison linéaire ou de 0 : rien à voir ! Ce sont deux définitions fondamentales, il est inenvisageable de ne pas les maîtriser.

4. Pour qu'une application soit linéaire, il faut déjà que ce soit une application entre deux ev : il fallait donc préciser ici que $\mathscr{M}$, l'ensemble de définition, était un sev.

5. Presque tout le monde a vu que $\mathscr{M}_0 = \operatorname{Ker} \Sigma$. Mais il fallait achever la question : on peut en déduire que $\mathscr{M}_0$ est un sev.

7. Beaucoup d'analyses sans synthèse. Cela devient pénible à ce stade de l'année ...

8. Il s'agissait d'une analyse / synthèse on ne peut plus classique et déjà vue en cours. Le fait que $M \in \mathscr{M}_0$ n'intervenait absolument pas.

I. Convergence d'une suite d'intégrales (v2).

1.b. La question posée était : « si $\forall x,\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, est-ce que $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$? » Tout le monde a montré que dans l'exemple proposé, on avait $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Mais on ne peut pas répondre à la question sans regarder si $\forall\ x,\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$!

2.a. On ne peut pas répondre à cette question sans faire apparaître le mot magique : « segment ».

2.b. Il fallait justifier précisément pourquoi $\forall x,\ f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x) \Rightarrow M_{n+1} \leqslant M_n$.

II. Crochet de Lie et nilpotence (v2).

2.b. C'était probablement la question la plus difficile.

2.c. Rappelez-vous que si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors $P' = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$ et non $P' = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k a_k X^{k-1}$. Ici il fallait expliquer comment on passait d'une somme commençant à $k=0$ à une somme commençant à $k=1$, en utilisant la convention de l'énoncé : $0f^{-1} = 0$.

5.a. Attention, $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q$ n'implique pas $p = q$. Prendre par exemple $p = \mathrm{Id}$ et $q = 2\mathrm{Id}$.