

Feuille d'exercice n° 10 : **Relations d'ordre et d'équivalence, et ensembles de nombres usuels**

Exercice 1 Soit E un ensemble et A une partie de E . On définit la relation \mathcal{R} sur $\mathcal{P}(E)$ par : $X\mathcal{R}Y$ si $X \cup A = Y \cup A$.

- 1) Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
- 2) Décrire la classe d'équivalence de $X \in \mathcal{P}(E)$

Exercice 2 (📖) Soit \mathcal{R} une relation binaire réflexive et transitive sur un ensemble E . On définit la relation \mathcal{S} sur E par : $x\mathcal{S}y$ si $(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x)$.

Montrer que \mathcal{S} est une relation d'équivalence et que \mathcal{R} permet de définir une relation d'ordre sur les classes d'équivalences de \mathcal{S} .

Exercice 3 (📝) Soit (E, \leq) un ensemble ordonné. On définit sur $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ la relation \mathcal{R} par : $X\mathcal{R}Y$ si $(X = Y \text{ ou } \forall x \in X \forall y \in Y \ x \leq y)$. Vérifier que c'est une relation d'ordre.

Exercice 4 Un ensemble E muni d'une relation d'ordre \preceq est dit *bien ordonné* pour \preceq si toute partie non vide admet un plus petit élément pour \preceq .

- 1) Donner un exemple d'ensemble bien ordonné et un exemple d'ensemble qui ne l'est pas.
- 2) Montrer que tout ensemble bien ordonné est totalement ordonné.
- 3) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 5

- 1) On définit une relation \leq^0 sur \mathbb{R}^2 en posant, pour tout $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$:

$$(x, y) \leq^0 (x', y') \quad \text{si} \quad x \leq x' \text{ et } y \leq y'.$$

- a) Montrer que \leq^0 est une relation d'ordre sur \mathbb{R}^2 .
 - b) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Représenter graphiquement l'ensemble des majorants et l'ensemble des minorants de $\{(x, y)\}$ pour \leq^0 .
 - c) Cet ordre est-il total ?
- 2) On définit une relation \leq^* sur \mathbb{R}^2 en posant, pour tout $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$:

$$(x, y) \leq^* (x', y') \quad \text{si} \quad x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y').$$

- a) Montrer que \leq^* est une relation d'ordre sur \mathbb{R}^2 . Cet ordre s'appelle l'ordre *lexicographique*.
- b) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Représenter graphiquement l'ensemble des majorants et l'ensemble des minorants de $\{(x, y)\}$ pour \leq^* .
- c) Cet ordre est-il total ?
- d) L'ordre lexicographique (sur \mathbb{R}^2) possède-t-il la propriété de la borne supérieure ?
Indication : on pourra considérer $\mathcal{A} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Exercice 6 Déterminer les bornes supérieures et inférieures des parties suivantes de \mathbb{R} .

$$A = \left\{ \sqrt{\frac{n}{n+1}} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad B = \left\{ x^2 + 2x + 3 \mid x \in [-3; 2] \right\} \quad C = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Exercice 7 (🔄) Soit $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante d'entiers naturels. Montrer que $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *stationnaire*, i.e. que k_n prend toujours la même valeur à partir d'un certain rang.

Exercice 8 (🚲) Soient A et B deux parties non vides et majorées de \mathbb{R} , soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On définit

$$A + B = \{ x \in \mathbb{R} \mid \exists (a, b) \in A \times B, x = a + b \} = \{ a + b \mid (a, b) \in A \times B \}$$

$$\text{et} \quad \lambda A = \{ x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A, x = \lambda a \} = \{ \lambda a \mid a \in A \}.$$

- 1) Si $A \subset B$, montrer que $\sup A \leq \sup B$.
- 2) Montrer que $A \cup B$ possède une borne supérieure. Que vaut $\sup(A \cup B)$?
- 3) Montrer que $A + B$ possède une borne supérieure. Que vaut $\sup(A + B)$?
- 4) Montrer que λA possède une borne supérieure. Que vaut $\sup(\lambda A)$? Et si $\lambda < 0$?

Exercice 9 (🚲🏔️) Soit X et Y deux ensembles non vides et $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ majorée. Montrer

$$\sup \{ f(x, y) \mid (x, y) \in X \times Y \} = \sup \{ \sup \{ f(x, y) \mid y \in Y \} \mid x \in X \}.$$

Exercice 10 (🚲) Soient a et b deux réels. Montrer que :

- 1) $a \leq b \Rightarrow \lfloor a \rfloor \leq \lfloor b \rfloor$;
- 2) $\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leq \lfloor a + b \rfloor \leq \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 1$.

Exercice 11 On veut calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n^2} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$.

- 1) Montrer que $S_n = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=i^2}^{(i+1)^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor \right) + n$.
- 2) Conclure.

Exercice 12 On appelle *ouvert* de \mathbb{R} toute partie U de \mathbb{R} vérifiant la propriété suivante.

« Pour tout $x \in U$, il existe un intervalle I ouvert tel que $x \in I \subset U$. »

Soit U et V deux ouverts denses de \mathbb{R} . Établir que $U \cap V$ est encore un ouvert dense de \mathbb{R} .

