<u>Ex. 11</u> : Si $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}_+)$, alors $\left(\int_a^b f^n\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup_{[a,b]} f$

f étant continue sur un segment,

$$\sup_{[a,b]} f = \max_{[a,b]} f = f(m) \quad , \quad m \in [a,b]$$

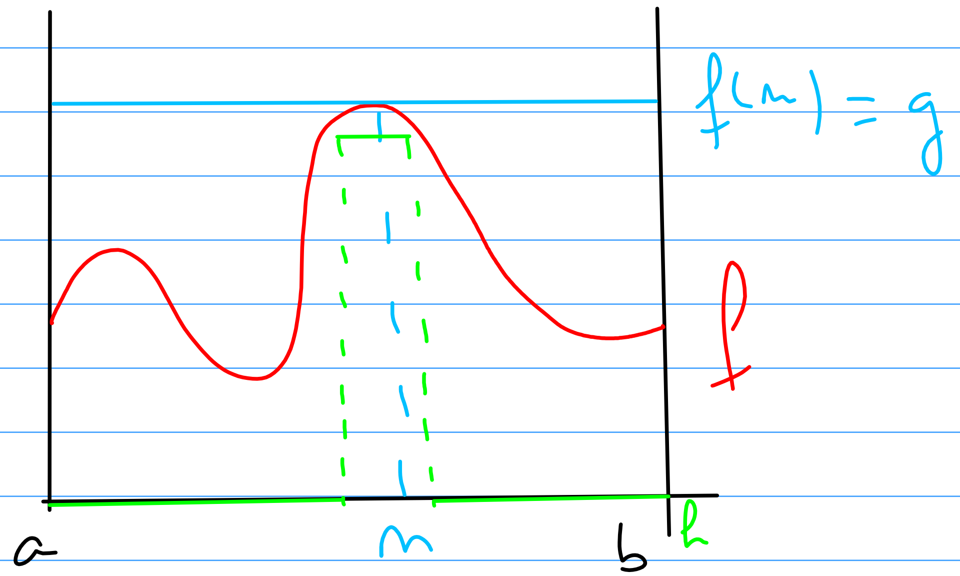
- si f est constante égale à $\lambda \in \mathbb{R}_+$:

$$\int_a^b f^n = (b-a)\lambda^n \quad , \text{ donc } \left(\int_a^b f^n\right)^{\frac{1}{n}} = (b-a)^{\frac{1}{n}} \cdot \lambda$$

$$= e^{\frac{1}{n}\ln(b-a)} \cdot \lambda$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda = \max f$$

. cas général :



Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f, il existe $\alpha > 0$ tq :

$$f(m) \geq f|_{[m-\alpha, m+\alpha]} \geq f(m) - \varepsilon.$$

Nous posons : $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(m) \qquad x \longmapsto \begin{cases} f(m) - \varepsilon & \text{si } x \in [m-\alpha, m+\alpha] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

dc : $\quad 0 \leq h \leq f \leq g$ dc : $\quad 0 \leq h^n \leq f^n \leq g^n$

dc : $$\int_a^b h^n \leq \int_a^b f^n \leq \int_a^b g^n \text{ et } \left(\int_a^b h^n\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\int_a^b f^n\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\int_a^b g^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

or : $$\left(\int_a^b g^n\right)^{\frac{1}{n}} = (b-a)^{\frac{1}{n}} f(m) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(m)$$

et : $$\int_a^b h^n = \int_{m-\alpha}^{m+\alpha} h^n = 2\alpha \left(f(m) - \varepsilon\right)^n$$

dc : $$\left(\int_a^b h^n\right)^{\frac{1}{n}} = (2\alpha)^{\frac{1}{n}} \left(f(m) - \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(m) - \varepsilon.$$

En particulier, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq. $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n_0$:

$$f(x)-\varepsilon \leq \left[\left(\int_a^b g^n\right)^{\frac{1}{n}} \leq f(x)+\varepsilon\right] \quad \text{et} \quad \left[f(x)-2\varepsilon \leq \left(\int_a^b f^n\right)^{\frac{1}{n}}\right] \leq f(x)$$

dc, si $n \geq n_0$:

$$f(x)-2\varepsilon \leq \left(\int_a^b f^n\right)^{\frac{1}{n}} \leq f(x)+\varepsilon \leq f(x)+2\varepsilon$$

On a mq : $\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow$

$$\left|\left(\int_a^b f^n\right)^{\frac{1}{n}} - f(x)\right| \leq 2\varepsilon$$

dc :

$$\left(\int_a^b f^n\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) = \max_{[a,b]} f = \sup_{[a,b]} f$$