Feuille d'exercice n° 25 : **Déterminants − Correction**

Exercice 1

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 6 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix} = (1,2)(3,4,6),\ \varepsilon(\sigma\tau) = -1$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix} = (1,4,2)(3,5,6,7),\ \mathrm{E}(\sigma^{-1}) = -1$$

Exercice 2

$$s = (1,3,6)(2,10,9,8,5) = (1,3)(3,6)(2,10)(10,9)(9,8)(8,5),\ \varepsilon(\sigma) = 1$$

Exercice 3 On peut supposer que $\tau \in S_7$. Sinon, les $k \geqslant 8$ sont des points fixes de τ et n'apparaissent pas dans les réponses.

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} = (1,4,3,6,7,2,5),\ \varepsilon(\tau) = 1$$

Exercice 4

1) $f = (1,5,6,8,3,2,4,1)$, $\varepsilon(f) = -1$.

2) $\varepsilon(g) = 1$

3) $h = (1,5)(2,3,4)$, $\varepsilon(h^{-1}) = \varepsilon(h) = -1$.

Exercice 5

1) Comme toute permutation s'écrit comme produit de transpositions, il suffit de montrer que toute transposition s'écrit comme produit de transpositions de la forme $(1,i)$.
Si $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, il suffit d'observer que $(i,j) = (1,i)(1,j)(1,i)$.

2) Comme toute permutation s'écrit comme produit de transpositions de la forme $(1,i)$, il suggit de montrer que toute transposition de la forme $(1,i)$ s'écrit comme produit de transpositions de la forme $(j, j+1)$.
Il suffit d'observer que si $i > 2$ $(1,i) = (i-1,i)(1,i-1)(i-1,i)$ et conclure par récurrence.
Alternativement, on pouvait aussi observer que, si $j > i$, $(i,j) = (j-1,j)(i,j-1)(j-1,j)$ et on conclut par récurrence.

3) Comme toute permutation paire s'écrit comme produit d'une nombre pair de transpositions, il suffit de montrer que le produit de deux transpositions est un produit de 3-cycles.
Si l'on considère deux transpositions, on a trois cas à traiter en considérant les supports de ces deux transpositions :
— si les supports sont égaux, le produit vaut l'identité, qui est bien un produit de 0 3-cycles ;
— si les supports ont un élément en commun, on écrit (comme vu en cours) : $(a,b)(b,c) = (a,b,c)$;
— si les supports sont disjoints, on écrit : $(a,b)(c,d) = (a,b)(b,c)(b,c)(c,d) = (a,b,c)(b,c,d)$.

4) Par la première question, comme toute permutation paire s'écrit comme produit d'une nombre pair de transpositions de la forme $(1,i)$, il suffit d'observer que $(1,i)(1,j) = (i,1)(1,j) = (i,1,j) = ((1,j,i)$.

5) En utilisant la question précédente, il suffit d'observer que $(1,i,j) = (1,2,j)(1,2,i)(1,2,j)$ et $(1,i,2) = (1,2,i)(1,2,i)$.

Exercice 6

1) Non

2) Non

3) Oui

4) Non

5) Oui

6) Oui

7) Non

Exercice 7 On a $\det A = \det A^\top = \det(-A) = (-1)^3 \det A = -\det A$, donc $\boxed{\det(A) = 0.}$

Avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, on a bien $A^\top = -A$ et $\det(A) = 1$.

$\boxed{\text{Ce n'est donc pas vrai en dimension deux.}}$

Exercice 8 On montre aisément que pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique couple $(R, I) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = R + iS$ (considérer cela coefficient par coefficient).

On a $PA = BP$, donc comme $P = R + iS$: $RA + iSA = BR + iSR$, donc par le résultat précédent : $RA = BR$ et $SA = BS$. Immédiatement, si $t \in \mathbb{R}$, $(R + tS)A = RA + tSA = BR + tBS = B(R + tS)$.

Il suffit de montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $R + tS$ est inversible. Or, par la grosse formule, $f : t \mapsto \det(R + tS)$ est polynomiale, de degré au plus n, et $f(i) = \det(P) \neq 0$, donc f n'est pas nulle. Ainsi, f ne s'annule pas partout sur $\mathbb{R}$ (sinon f aurait une infinité de racines), donc il exite $t \in \mathbb{R}$ tel que $f(t) \neq 0$. Avec $Q = R + tS$, on a bien $\det(Q) \neq 0$, donc $Q \in GL_n(\mathbb{R})$, et $QA = BQ$, donc $A = Q^{-1}BQ$.

Exercice 9

$$AV = \begin{pmatrix} a+b+c & a+jb+j^2c & a+j^2b+jc \\ a+b+c & c+ja+j^2b & c+j^2a+jb \\ a+b+c & b+jc+j^2a & b+j^2c+ja \end{pmatrix}.$$

On reconnaît un déterminant de Vandermonde :

$$\det V = V(1, j, j^2) = (j-1)(j^2-1)(j^2-j) = j(j+1)(j-1)^3 = -(j-1)^3 = 3j(j-1)$$

On a aussi :

$$\det(AV) = (a+b+c)(a+jb+j^2c)(a+j^2b+jc)\det V$$

On obtient $\det A = (a+b+c)(a+jb+j^2c)(a+j^2b+jc)$.

On pouvait aussi sommer les lignes de A pour obtenir des 1, simplifier, et obtenir

$$\det A = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-(ab+ac+bc))$$

Exercice 10

1) $\det(A) = k + 1$

2) $\det(B) = 3k^2 - 2k - 1$

Exercice 11

1) $\alpha = -3$

2) $\beta = -16$

3) $\gamma = -24$

Exercice 12 Développer par rapport à C_1, on obtient

$$D = V(2,3,4) - xV(1,3,4) + x^2V(1,2,4) + x^3V(1,2,3) = 2 - 6x + 6x^2 - 2x^3 = 2(1-x)^3.$$

Exercice 13

1) Développer par rapport à C_1 : 0.

2) Sommer toutes les colonnes sur la première puis soustraire la première ligne aux autres.

3) Ajouter la colonne 4 à la 2 : 0.

4) Développer par rapport à la première ligne ou colonne.

5) Pour faire apparaître plein de 0 : $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$ puis $C_1 \leftarrow C_2 - C_3$ puis $C_1 \leftarrow C_4 - C_3$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$.

6) Développer par rapport à C_1 pour obtenir $D_n = pD_{n-1} - D_{n-2}$ puis résoudre.

7) $C_1 \leftarrow C_1 + C_n$ et $L_1 \leftarrow L_1 + L_n$, puis développement : $D_n = D_{n-2}$.

Exercice 14

1) Développement par rapport à C_1 puis L_2 dans le second déterminant. On obtient $A_n = (1 + x^2)A_{n-1} - x^2 A_{n-2}$. Racines de l'EC : 1 et x^2, discuter selon x.

2) Si $a_i = 0$, on factorise b_i. Sinon, factoriser les a_i, on obtient

$$a_1 \dots a_n \begin{vmatrix} 1+z_1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1+z_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1+z_n \end{vmatrix}$$

avec $z_i = b_i/a_i$.

En notant E_i la colonne élémentaire et U la colonne ne comportant que des 1, on a

$$B_n = a_1 \dots a_n \det(z_1E_1 + U, \dots, z_nE_n + U).$$

Par multilinéarité et le caractère alterné du déterminant :

$$B_n = a_1 \dots a_n \left[z_1 \dots z_n \det(E_1, \dots, E_n) + \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j \neq i} z_j \right) \det(E_1, \dots, E_{i-1}, U, E_{i+1}, \dots, E_n) \right],$$

donc

$$B_n = b_1 \dots b_n + \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{j \neq i} b_j.$$

Ou plutôt, écrire $B_n = \det(b_1e_1 + u, \dots, b_ne_n + u)$, où $u = {}^t(a_1, \dots, a_n)$. Ensuite : développer par multilinéarité.

Exercice 15

1) Les colonnes de la première matrice sont toutes des combinaisons linéaires des deux colonnes $(\cos(a_i))$ et $(\sin(a_i))$, donc si $n \geqslant 3$, le déterminant est nul.

2) $\cos((n+1)x) = 2\cos(nx)\cos(x) - \cos((n-1)x)$, donc tout $\cos(nx)$ est de la forme $2^n \cos^n x +$ polynôme en $\cos x$ de degré $< n$. Ligne après ligne, on peut donc apparaître un VDM.

Exercice 16 On réalise les opérations successives $L_{i+1} \leftarrow L_{i+1} - L_i$ pour i de 1 à p. On trouve alors $\det A_{n,p} = \det A_{n-1,p-1}$ et par récurrence on a $\det A_{n,p} = \det A_{1,1} = 1$.

Exercice 17

a) $f - \lambda \mathrm{Id}$ n'est pas injective ssi $\det(f - \lambda \mathrm{Id}) = 0$ ssi $\det \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] = 0$. Les techniques habituelles permettent de calculer ce déterminant, qui vaut $-(\lambda + 4)(\lambda - 1)(\lambda - 2)$. Les valeurs propres de f sont donc $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 2$.

b) Il faut trouver des bases de $\mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id})$. Les méthodes classiques donnent par exemple $v_1 = (2, -3, 2)$, $v_2 = (1, 1, 1)$ et $v_3 = (4, 3, -2)$.

c) Remarquons d'abord que les vecteurs (v_1, v_2, v_3) forment une base appelée $\mathscr{B}$. $v_1 \in \mathrm{Ker}(f + 4\mathrm{Id})$, d'où $(f + 4\mathrm{Id})(v_1) = 0$, ou encore $f(v_1) = -4v_1$. De même $f(v_2) = v_2$ et $f(v_3) = 2v_3$. On a donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, qui est une matrice diagonale.