QCM n° 12

QCM - cocher une case si la phrase qui suit est correcte.

Question n°1

- ☐ $\{1\}$ est une base de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- ☐ $\{i\}$ est une base de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
- ☐ $\{i, 1+i\}$ est une base de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- ☐ 1 et i sont $\mathbb{C}$ linéairement indépendants.

Question n°2 On considère les applications suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \to & (x-y, y+2z+a) \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \to & (ax+b)(x+y). \end{array}$$

où a et b sont des réels.

- ☐ Pour tout $a \in \mathbb{R}$, f est une application linéaire.
- ☐ f est une application linéaire si et seulement si $a = 0$.
- ☐ g est une application linéaire si et seulement si $a = b = 0$.
- ☐ g est une application linéaire si et seulement si $a = 0$.

Question n°3 Soit E un espace vectoriel et f un projecteur de E, c.à.d. un endomorphisme de E tel que $f^2 = f$. On notera Id l'identité de E.

- ☐ f est injective.
- ☐ $Id - f$ est un projecteur de E.
- ☐ $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.
- ☐ $\operatorname{Im} f = \ker(Id - f)$.

Question n°4 Dans $\mathbb{R}_3[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 3, on considère les polynômes $P_1 = X^3 + 1, P_2 = P_1'$ (la dérivée de P_1) et $P_3 = P_1''$ (la dérivée seconde de P_1).

- ☐ Le rang de la famille $\{P_1, P_3\}$ est 3.
- ☐ $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$.
- ☐ $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$.
- ☐ Le rang de la famille $\{P_1, P_2, P_3\}$ est 3.

Question n°5 Soit n un entier ≥ 3 et $E = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,;\, x_1 = x_2 = \cdots = x_n\}$.

- ☐ $\dim E = n - 1$.
- ☐ $\dim E = n$.
- ☐ $\dim E = 1$.
- ☐ $E = \mathbb{R}$.

Question n°6 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$ et de loi donnée par

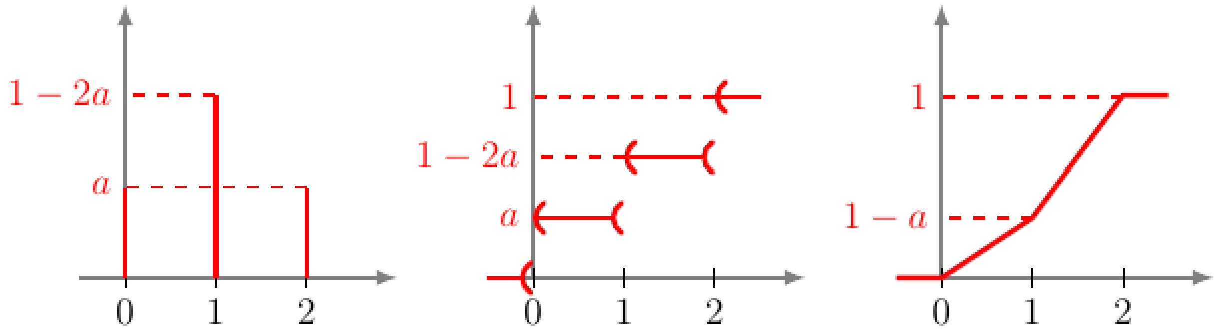
$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 2) = a \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 1) = 1 - 2a$$

où a est une constante réelle.

Quelles valeurs la constante a a-t-elle le droit de prendre ?

☐ Toutes les valeurs de $]0, 1[$ car $\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = 1$.
☐ Seulement la valeur $a = 1/4$.
☐ Toutes les valeurs de $]0, 1/2[$.
☐ Une autre réponse que les précédentes.

Quel est le graphe de la fonction de répartition de X parmi les graphes suivants ?



☐ Le premier.
☐ Le second.
☐ Le troisième.

Que valent l'espérance et la variance de X ?

☐ $\mathbb{E}(X) = 1$ et $\mathrm{Var}(X) = 1 + 2a$.
☐ $\mathbb{E}(X) = 2a$ et $\mathrm{Var}(X) = 4a^2$.
☐ $\mathbb{E}(X) = 1$ et $\mathrm{Var}(X) = 2a$.

On pose $Y = 4 - 2X$. *Sans déterminer la loi de* Y, peut-on calculer l'espérance et l'écart-type de Y ?

☐ Oui, ils valent respectivement 2 et $\sqrt{8a}$.
☐ Oui, ils valent respectivement 2 et $\sqrt{4(1 - a)}$.
☐ Oui, ils valent respectivement $4(1 - a)$ et $4a$.
☐ Oui, mais aucune des propositions précédentes n'est correcte.
☐ Non, il nous faut nécessairement la loi pour calculer ces caractéristiques de Y.

Question n°7 Soit $\mathscr{E}$ une expérience aléatoire et Ω l'univers qui lui a été associé. Soient A et B deux événements de probabilités respectives 0.5 et 0.6.

☐ A est inclus dans B car $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.
☐ A et B ne peuvent pas être incompatibles car $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1.1 > 1$.
☐ Il est impossible que A et B soient indépendants si A implique B.
☐ Ω est indépendant de tout autre événement.
☐ Deux événements quelconques (mais non impossibles) ne peuvent être simultanément incompatibles et indépendants.

Supposons maintenant que $\mathbb{P}(A \cup B) = 4/5$. A et B sont-ils indépendants ?

☐ Oui.
☐ Non.
☐ On ne peut pas se prononcer car on ne dispose pas de $\mathbb{P}(A \cap B)$.
☐ On ne peut pas se prononcer car on ne dispose pas de détails sur l'expérience, sur Ω, A et B.

Question n°8 On considère le système d'équations, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètre un réel m :

$$(\mathtt{S}) \left\{ \begin{array}{rcl} x - y - z & = & 1 \\ -x + 2y - mz & = & -3 \\ 2x - y + (m-1)z & = & 2m + 2. \end{array} \right.$$

☐ $(\mathtt{S}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x - y - z & = & 1 \\ y - (m+1)z & = & -2 \\ (m+1)z & = & m+1. \end{array} \right.$
☐ Pour tout réel m, $(\mathtt{S})$ admet une infinité de solutions.
☐ Si $m = -1$, $(\mathtt{S})$ n'admet pas de solution.
☐ Si $m \neq -1$, $(\mathtt{S})$ admet une unique solution.

Question n°9 Soit A une matrice de rang r.

☐ A admet r vecteurs colonnes linéairement indépendants.
☐ A admet r vecteurs lignes linéairement indépendants.
☐ Toute famille contenant r vecteurs colonnes de A est libre.
☐ Toute famille contenant r vecteurs lignes de A est libre.

Question n°10 On considère $M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels muni des deux bases $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ et $\mathcal{B}' = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$, où

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \; A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \; A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \; B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \; B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \; B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

On notera P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et Q la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

Définition : Soit E un espace vectoriel muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice de l'identité de E de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$. Autrement dit, c'est la matrice dont la jième colonne est constituée des coordonnées du jième vecteur de la base $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

☐ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

☐ $P = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

☐ La matrice de l'application identité de $M_2(\mathbb{R})$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est : $\dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.