Devoir surveillé n° 04 - Remarques

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 34 points, ramené sur 5 points.
- Exercice de TD et problèmes : chaque question sur 4 points, total sur 112 points, ramené sur 15 points.

Statistiques descriptives.

	Calculs	Problème	Note finale
Note maximale	23	66	18
Note minimale	2	7	$3,5$
Moyenne	$\approx 14,73$	$\approx 32,02$	$\approx 10,09$
Écart-type	$\approx 4,49$	$\approx 13,42$	$\approx 3,26$

Exercice vu en TD.

Plutôt bien traité. Quelques erreurs récurrentes toutefois. Déjà, vous manquez de rigueur dans l'utilisation des inégalités strictes et larges : les deux ne veulent pas dire la même chose.
Beaucoup lu : « $a+b < \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 2$ donc $a+b \leqslant \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 1$ », ce qui est faux car $a+b$ n'est *a priori* pas un entier.
Il est consternant de lire : $\lfloor a \rfloor \leqslant a$ et $\lfloor b \rfloor \leqslant b$ donc $\lfloor a \rfloor - \lfloor b \rfloor \leqslant a - b$.

Étude d'une fonction complexe.

1. Pour la millième fois, « f est définie ssi $\bar{z}+2 \neq 0$ » est doublement affreux : premièrement, que veut dire pour vous « f est définie » ? Pour moi rien. Et ensuite, une proposition ne dépendant pas de z ne peut pas être équivalente à une proposition dépendant de z !
De plus, pour déterminer un domaine de définition, il faut raisonner par équivalence : dire que f n'est pas définie en -2 ne suffit pas (est-elle définie ailleurs ?), et à l'inverse dire que $f(z)$ est définie si $z \neq -2$ ne pas permet de savoir si f est définie ou pas en -2.
Enfin, il est franchement anormal que vous deviez utiliser l'écriture algébrique de z pour résoudre $\bar{z}+2=0$! ! ! !

2.a. Là encore, passer par l'écriture algébrique pour montrer que $|\bar{z}+2| = |z+2|$ n'est pas normal : c'est du cours.
Et écrire « $|\bar{z}| = |z|$ donc $|\bar{z}+2| = |z+2|$ » est très maladroit et révèle un manque de compréhension de l'usage des quantificateurs et des variables. Il faudrait rédiger ainsi : « pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\bar{z}| = |z|$ donc ici $|\bar{z}+2| = |z+2|$ », ce qui n'est pas encore idéal. « Pour tout $u \in \mathbb{C}$, $|\bar{u}| = |u|$ donc ici $|\bar{z}+2| = |z+2|$ » me semble encore plus clair.

Dans toute la suite, les définitions des images directes et réciproques sont en général bien connues, et bien utilisées, ce qui m'a fait très plaisir. Par contre le moins que l'on puisse dire c'est que vous avez été à la peine dans les calculs et que vous n'êtes pas du tout à l'aise avec les complexes. C'est un point à travailler, vous allez rencontrer des complexes tout le temps jusqu'à la fin de l'année.

4.a. L'ensemble $\left\{\dfrac{x+1}{x+2},\ x\in\mathbb{R}\backslash\{-2\}\right\}$ était à expliciter. En étudiant la fonction $x\mapsto\dfrac{x+1}{x+2}$, on voyait qu'il s'agissait de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

7. Beaucoup d'erreurs de calcul dans le discriminant. Et on cherche des racines complexes, donc arriver à « $\Delta<0$ donc il n'y a pas de solutions » me fait froid dans le dos.
Après avoir trouvé les racines, il fallait repérer si elles étaient dans $\mathbb{U}$ ou pas.

Construction de la fonction « racine p-ième ».

1.a. Lisez l'énoncé, il était interdit d'utiliser des résultats d'analyse. En tout cas, pas de dérivation ! Et vous ne pouvez pas vous contenter de $x<y$ donc $x^2<y^2$, $x^3<y^3$ etc donc $x^p<y^p$. Il faut rédiger une récurrence.

1.b. Erreur fréquente : $\{y\in\mathbb{R},\ a\leqslant y\leqslant b\}$ est un intervalle, donc $\{y\in\mathbb{R},\ 0\leqslant y^p\leqslant x_0\}$ en est un aussi. Vous voyez bien que ce n'est pas la même écriture, la puissance p change tout. Regarder par exemple $\{y\in\mathbb{R},\ 1\leqslant y^2\leqslant 4\}$.

3.b L'argument « $(1+x_0)^p>1+px_0$ donc $1+x_0\notin A(x_0)$ donc c'est un majorant » est un peu rapide. Revenez à la définition : si $y\in A(x_0)$, $y^p\leqslant x_0<(1+x_0)^p$ donc par croissance de $x\mapsto x^p$, $y\leqslant 1+x_0$.

4.a. Attention, $x_0^p\leqslant x_0$ n'est vraie que si $x_0\leqslant 1$.

4.b. C'est encore et toujours le même argument avec les bornes sup : $u_n<\sup A(x_0)$ donc u_n ne majore pas $A(x_0)$, et voilà. Certains ont utilisé que $A(x_0)$ était un intervalle, mais le résultat suivant n'est pas au programme : si I est un intervalle, $x\in I$ et y tel que $x\leqslant y<\sup I$, alors $y\in I$. Il fallait le démontrer, et regardez bien : c'est exactement ce que vous demande de faire cette question, en vue de la question suivante ! On montre l'existence de a ici, et ensuite, on peut dire que $u_n\in A(x_0)$.

6.a. Quand vous utilisez le théorème de la borne sup, citez-le et rappelez toutes les hypothèses.
Pour montrer que $\sup B\leqslant\sup C$, qu'est-ce que vous vous compliquez la vie ! Tous ceux qui ont abordé cette question ont montré que B est majoré par $\sup C$: c'est donc fini ! $\sup C$ est un majorant de B, or $\sup B$ est le plus petit majorant de B, donc $\sup B\leqslant\sup C$. Repartir sur une démo par l'absurde était très maladroit.