

Feuille d'exercice n° 03 : Quelques fondamentaux


**Exercice 1** Soit  $P, Q$  deux propositions. La proposition  $(P \wedge Q \implies (\neg P) \vee Q)$  est-elle nécessairement vraie ?

**Exercice 2** Soit la propriété suivante :  $P(z) : \ll |z - 1| \leq 3 \implies |z - 5| \geq 1 \gg$ .


- 1) Quel est l'ensemble des  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $P(z)$  soit vraie ? A-t-on :  $\forall z \in \mathbb{C}, P(z)$  vraie ?
- 2) Mêmes questions en remplaçant  $|z - 5| \geq 1$  par  $|z - 5| > 1$ , puis par  $|z - 5| \geq 2$ .

**Exercice 3** Dans chacun des cas suivants, comprendre le sens des deux phrases proposées et déterminer leur valeur de vérité :

- 1)  $\forall n \in \mathbb{N} \exists N \in \mathbb{N} n \leq N$  et  $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n \leq N$ .
- 2)  $\forall y \in \mathbb{R}_+^* \exists x \in \mathbb{R} y = e^x$  et  $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}_+^*, y = e^x$ .
- 3) Soit  $f$  une fonction réelle définie sur  $\mathbb{R}$ .  
 $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} y = f(x)$  et  $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} y = f(x)$ .

**Exercice 4** () Écrire la négation des assertions suivantes où  $P, Q, R, S$  sont des propositions.

- 1)  $P \implies Q$
- 2)  $P$  et non  $Q$
- 3)  $P$  et  $(Q$  et  $R)$
- 4)  $P$  ou  $(Q$  et  $R)$
- 5)  $(P$  et  $Q) \implies (R \implies S)$

**Exercice 5** () Soit  $f$  une fonction réelle définie sur  $\mathbb{R}$ . Quelle est la négation des propositions suivantes ?

- 1)  $\exists M \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$
- 2)  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 1$  ou  $f(x) \leq -1$
- 3)  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0 \implies x \geq 0$
- 4)  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y \leq f(x) \leq 2x + y$
- 5)  $\forall x \in \mathbb{R}, (\exists y \in \mathbb{R}, f(x) \geq y) \implies x \leq 0$


**Exercice 6** Soient les quatre assertions suivantes :

- (a)  $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$  ; (c)  $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$  ;  
(b)  $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$  ; (d)  $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x$ .


- 1) Les assertions (a), (b), (c) et (d) sont-elles vraies ou fausses ?
- 2) Donner la négation de chacune.

**Exercice 7** Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose :  $\Leftrightarrow, \Leftarrow, \Rightarrow$ .

- 1)  $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 4 \dots\dots x = 2$
- 2)  $\forall z \in \mathbb{C} \quad z = \bar{z} \dots\dots z \in \mathbb{R}$
- 3)  $\forall x \in \mathbb{R} \quad x = \pi \dots\dots e^{2ix} = 1$

**Exercice 8** () Soit  $f$  une fonction réelle définie sur  $\mathbb{R}$ . Écrire au moyen de quantificateurs les propositions suivantes :

- |                        |   |
|------------------------|---|
| 1) $f$ est croissante. | 3) $f$ s'annule au plus une fois.           |
| 2) $f$ est périodique. | 4) $f$ prend au moins une fois la valeur 1. |

**Exercice 9** () Écrire avec des quantificateurs les assertions suivantes, où  $u$  désigne une suite réelle et  $f$  désigne une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

- |                                    |                                      |
|------------------------------------|--------------------------------------|
| 1) La suite $u$ est majorée.       | 3) La fonction $f$ n'est pas paire.  |
| 2) La suite $u$ n'est pas majorée. | 4) La fonction $f$ n'est pas bornée. |

**Exercice 10** En quoi le raisonnement suivant est-il faux ?

Soit  $\mathcal{P}(n)$  : «  $n$  crayons de couleurs sont tous de la même couleur ».

- $\mathcal{P}(1)$  est vraie car un crayon de couleur est de la même couleur que lui-même.
- Supposons  $\mathcal{P}(n)$ . Soit  $n + 1$  crayons. On en retire 1. Les  $n$  crayons restants sont de la même couleur par hypothèse de récurrence.  
Reposons ce crayon et retirons-en un autre ; les  $n$  nouveaux crayons sont à nouveau de la même couleur. Le premier crayon retiré était donc bien de la même couleur que les  $n$  autres. La proposition est donc vraie au rang  $n + 1$ .
- On a donc démontré que tous les crayons en nombre infini dénombrable sont de la même couleur.

**Exercice 11** Dans un match de rugby, une équipe peut marquer 3 points (pénalité ou drop), 5 points (essai non transformé) ou 7 points (essai transformé). Quel est l'ensemble des scores possibles ?

**Exercice 12** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite (on admet qu'elle existe et que la relation suivante permet bien de la définir) vérifiant :  $u_0 \leq 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$ . Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n \leq 2^n$ .

