Devoir facultatif n° 3

Quelque définitions

On appelle *fonction polynomiale complexe* toute fonction P de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$$

où n est un entier naturel appelé le *degré* de P, et les $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des complexes.
On dit qu'un complexe z_0 est une *racine* de P si $P(z_0) = 0$.

* * *

Le théorème de Eneström-Kakeya

Soient $n+1$ réels strictement positifs rangés dans cet ordre :

$$a_0 \geqslant a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0,$$

et la fonction polynomiale P définie par $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$.
Le but de cette partie est de démontrer le théorème de Eneström-Kakeya :
Théorème : *Les racines du polynôme P sont toutes à l'extérieur du disque ouvert $D = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$*

Nous allons le démontrer par l'absurde. Soit donc t une racine de P, telle que $|t| < 1$.
Introduisons le polynôme $Q(z) = (1-z)P(z)$.

1) Que vaut $Q(t)$?

2) Montrer que

$$Q(z) = a_0 - a_n z^{n+1} - (a_0 - a_1)z - (a_1 - a_2)z^2 - \cdots - (a_{n-1} - a_n)z^n$$

3) En déduire que $|a_n t^{n+1}| \geqslant a_0 + (a_1 - a_0)|t| + (a_2 - a_1)|t|^2 + \ldots + (a_n - a_{n-1})|t|^n$.
On fera attention au signe des termes de la forme $a_i - a_{i-1}$.

4) Remarquer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|t|^i \leqslant 1$ et, grâce à la question précédente, aboutir à $a_n|t|^{n+1} \geqslant a_n$ et conclure.

$$* \quad * \quad *$$

Une vérification de ce théorème sur un exemple

5) Vérifier ce résultat sur la fonction polynomiale $P(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \sum_{k=0}^{n} z^k$; en particulier, on précisera les racines de P.

$$* \quad * \quad *$$

Un corollaire intéressant du théorème

6) Soit la fonction polynomiale Q définie par :

$$Q(z) = b_n z^n + \ldots + b_0$$

où les $b_0, b_1, \ldots, b_n$ représentent des réels **strictement positifs**.
On définit alors les réels r et R comme suit :

$$r = \min_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \left(\frac{b_k}{b_{k+1}} \right) \text{ et } R = \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \left(\frac{b_k}{b_{k+1}} \right).$$

Autrement dit r et R sont, respectivement, la plus petite et la plus grande des fractions suivantes :

$$\frac{b_0}{b_1}, \frac{b_1}{b_2}, \ldots, \frac{b_{n-2}}{b_{n-1}}, \frac{b_{n-1}}{b_n}.$$

a) Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $b_i r^i \leqslant b_{i-1} r^{i-1}$.

b) On désigne par P_1 la fonction polynomiale définie par

$$\forall z \in \mathbb{C},\ P_1(z) = Q(r \times z).$$

Montrer que la fonction polynomiale P_1 vérifie les hypothèses du théorème de Eneström-Kakeya.

c) On désigne par P_2 la fonction définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ P_2(z) = z^n Q\left(\frac{R}{z}\right) \text{ et } P_2(0) = b_n R^n.$$

Montrer que la fonction P_2 est une fonction polynomiale et que de plus elle vérifie les hypothèses du théorème de Eneström-Kakeya.

d) Représenter graphiquement l'ensemble des points du plan dont les affixes sont dans l'ensemble $A = \{z \in \mathbb{C},\ r \leqslant |z| \leqslant R\}$. Pourquoi a-t-on choisi la lettre A pour désigner cet ensemble ?

e) Déduire, de ce qui précède, que les racines de la fonction polynomiale Q sont situées dans A. On dit qu'on a "localisé" les racines de la fonction polynomiale Q.

* * *

Une application

7) Soit Q la fonction polynomiale définie par $Q(z) = 2z^3 + 3z^2 + 2z + 1$.

a) Que valent ici r et R ?

b) Parmi les nombres suivants se cache une racine de Q : laquelle ?

$$\alpha = 1 - 2i,\ \beta = -\frac{1}{4} + i\frac{1}{4}\sqrt{7},\ \gamma = -\frac{1}{4} + i4\sqrt{2},\ \delta = \frac{1}{4} + i\frac{1}{8}.$$

c) En déduire toutes les racines de Q.

— **FIN** —