Feuille d'exercice n° 21 : **Applications linéaires et familles de vecteurs**

Exercice 1 Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires.

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x^2$

2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 4x - 3$

3) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x^2}$

4) $\varphi : \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ f \mapsto f(3/4)$

5) $\chi : \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ f \mapsto -\displaystyle\int_{1/2}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$

6) $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \sin(3x+5y)$

7) $\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto xy$

8) $\rho : \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ f \mapsto \left(x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t\right)$

Exercice 2 Calculer le noyau et l'image de

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x + 2y \\ -x - 4y + 2z \\ 2x + 5y - z \end{pmatrix} \end{array}.$$

Exercice 3 Pour chaque propriété suivante, donner un exemple d'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ la vérifiant.

1) $\mathrm{Ker}(f)$ est inclus strictement dans $\mathrm{Im}(f)$.

2) $\mathrm{Im}(f)$ est inclus strictement dans $\mathrm{Ker}(f)$.

3) $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

4) $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires.

Exercice 4 Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f^2$ et $\mathrm{Im}\, f^2 \subset \mathrm{Im}\, f$.

2) Montrer que $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0_E\} \iff \mathrm{Ker}\, f^2 = \mathrm{Ker}\, f$.

3) Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f \iff \mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Im}\, f$.

Exercice 5

1) Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Établir l'équivalence

$$g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E,G)} \iff \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g.$$

2) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, vérifiant $f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

- **a)** Montrer que $(f - \mathrm{Id}_E) \circ (f + 2\mathrm{Id}_E) = (f + 2\mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
- **b)** En déduire que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(f + 2\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.
- **c)** Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E)$.

Exercice 6 Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, où E est un $\mathbb{K}$−espace vectoriel. On suppose que

$$\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda x.$$

Montrer que

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(x) = \lambda x.$$

Exercice 7 ( ) Dans $\mathbb{R}^4$, comparer (*i.e.* dire s'ils sont égaux ou si l'un est inclus dans l'autre) les sous-espaces F et G suivants :

$$\begin{aligned} F &= \operatorname{Vect}\{(1,0,1,1),(-1,-2,3,-1),(-5,-3,1,-5)\} \ ; \\ G &= \operatorname{Vect}\{(-1,-1,1,-1),(4,1,2,4)\}\,. \end{aligned}$$

Exercice 8 ( ) Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1,x_2,x_3,x_4) vérifiant $x_1+x_2+x_3+x_4=0$. L'ensemble E est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Le cas échéant, en donner une famille génératrice.

Exercice 9 ( ) Soit dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1=(1,1,0)$, $v_2=(4,1,4)$ et $v_3=(2,-1,4)$.

1) Montrer que v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires. Faire de même avec v_1 et v_3, puis avec v_2 et v_3.

2) La famille (v_1,v_2,v_3) est-elle libre ?

Exercice 10 Soit A et B deux parties d'un espace vectoriel E. Comparer $\operatorname{Vect}(A\cap B)$ et $\operatorname{Vect} A\cap\operatorname{Vect} B$.

Exercice 11 Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout entier $k\in\mathbb{N}$, on pose $f_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^k$.

1) Montrer que la famille $(f_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2) Est-ce toujours le cas pour la famille $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$?

Exercice 12 Quelle est la nature de l'application $f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -5x + 2y \\ -12x + 5y \\ -4x + 2y - z \end{pmatrix} \end{array}$?

Déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 13 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $p,q\in\mathscr{L}(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre les deux assertions suivantes :

1) $p\circ q=p$ et $q\circ p=q$;

2) p et q sont deux projecteurs de même noyau.

Exercice 14 ( ) On pose $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=z\}$ et $G=\operatorname{Vect}(1,1,0)$.

1) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer une expression explicite de la projection de $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G.

Exercice 15 Soit p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que $p-q$ est un projecteur si et seulement si $p\circ q=q\circ p=q$.