Devoir surveillé n°2

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Dans un match de rugby, une équipe peut marquer 3 points (pénalité ou drop), 5 points (essai non transformé) ou 7 points (essai transformé). Quel est l'ensemble des scores possibles ?

II. Le corps des quaternions.

On introduit les matrices suivantes, à coefficients complexes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

On définit alors l'ensemble des quaternions par

$$\mathbb{H} = \left\{ \alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L \mid (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

1) Montrer que $\forall q \in \mathbb{H},\ \exists!(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4,\ q = \alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L.$

On peut donc, pour un quaternion $q = \alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L$, avec $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$, définir son conjugué $\bar{q} = \alpha I - \beta J - \gamma K - \delta L$.
On dit qu'un quaternion q est réel si $\bar{q} = q$ et est pur si $\bar{q} = -q$.

2) Soit un quaternion $q = \alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L$, avec $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$

- **a)** Montrer que q est réel si et seulement si $\beta = \gamma = \delta = 0$.
- **b)** Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ pour que q soit pur.

À partir de maintenant, on identifiera un quaternion réel αI au réel α.

3)
- **a)** Exprimer JK, KL et LJ en fonction respectivement de L, J et K.
- **b)** Calculer J^2, K^2, L^2.
- **c)** En déduire, sans calcul matriciel, les expressions de KJ, LK et JL en fonction respectivement de L, J et K.
- **d)** Montrer que $\mathbb{H}$ est stable par le produit matriciel (*i.e.* que le produit de deux quaternions est un quaternion). Le produit ainsi défini sur les quaternions est-il commutatif ?
- **e)** Déterminer l'ensemble des quaternions qui commutent avec tous les quaternions, soit $\{q \in \mathbb{H} \mid \forall r \in \mathbb{H},\ qr = rq\}$.

4)
- **a)** Montrer que $\forall (q, r) \in \mathbb{H}^2$, $\overline{qr} = \bar{r} \times \bar{q}$.
- **b)** Montrer que, si $q \in \mathbb{H}$, $q\bar{q}$ est un quaternion réel, positif.

5) Pour tout quaternion q, on peut donc définir sa norme $N(q) = \sqrt{q\bar{q}}$.

a) Montrer que tout quaternion non nul est inversible et que son inverse est un quaternion.

b) Montrer que $\forall (q,r) \in \mathbb{H}^2$, $N(qr) = N(q)N(r)$.

c) Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{N}^4$, $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{N}^4$. Déterminer quatre entiers (p,q,r,s) vérifiant l'identité des quatre carrés d'Euler :

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2) = p^2+q^2+r^2+s^2.$$

6) On cherche à résoudre dans $\mathbb{H}$ l'équation $X^2 = -I$, d'inconnue X.

a) Donner sans calculs six solutions distinctes à cette équation.

b) Montrer que toute solution de cette équation est de norme 1. En déduire alors que toute solution est pure.

c) Étudier la réciproque et conclure.

III. Quelques inégalités.

Pour deux nombres complexes z et z' écrits sous forme algébrique $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$, on définit le produit scalaire $\langle z, z' \rangle = xx' + yy'$.

1) Pour $z \in \mathbb{C}$, que vaut $\langle z, z \rangle$?

2) Pour $(z,z') \in \mathbb{C}^2$, exprimer $\langle z, z' \rangle$ en fonction de $z\overline{z'}$.

3) En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle z, z' \rangle| \leqslant |z||z'|.$$

Soient a et b deux complexes de même module non nul r, d'arguments α et β respectivement. On note A et B les points d'affixe a et b respectivement.

4) Interpréter géométriquement les conditions $ab = r^2$ puis $ab = -r^2$.

5) On suppose désormais que $ab \neq r^2$ et $ab \neq -r^2$.

a) Montrer que les complexes $z_1 = \dfrac{a+b}{r^2+ab}$ et $z_2 = \dfrac{a-b}{r^2-ab}$ sont réels.

b) Exprimer $z = rz_1$ en fonction des cosinus de $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ et $\dfrac{\alpha-\beta}{2}$. Qu'en est-il de $\zeta = rz_2$?

c) Prouver l'inégalité $z_1^2 + z_2^2 \geqslant \dfrac{1}{r^2}$.

d) Quels sont les cas d'égalité ?

— **FIN** —