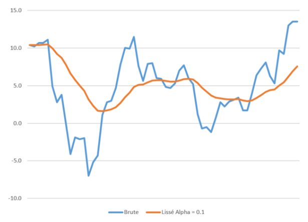
DS02



9 Novembre 2022

Algorithmique et programmation

Sources :

Consignes

Vos réponses dépendent d'un paramètre α, unique pour chaque étudiant, qui vous est donné sur le site de la classe. On considère la suite u à valeurs dans $[\![0, 64\,007[\![$, définie comme suit.

$$u_0 = \alpha \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (15\,091 \times u_n)\,[64\,007].$$

Nous vous en proposons l'implémentation suivante.

```
def u(alpha,n):
    """u_n, u_0 = alpha"""
    x = alpha
    for i in range(n):
        x = (15091 * x) % 64007
    return x
```

Cette fonction sera déjà implémentée dans le notebook et est importé depuis le module `lissage_initialisation`. Vous pouvez donc directement utiliser le fonction `u(alpha,n)` avec `alpha` correspondant à votre numéro d'anonymat.

Dans ce devoir, on notera $a\%b$ le reste de la division euclidienne de a par b.

Lorsque vous donnerez un résultat flottant, vous écrirez juste ses huit premières décimales.

Vous trouverez en annexe les réponses pour le paramètre $\alpha = 1$, utilisez-les pour vérifier la correction de vos algorithmes.

Exercice 1 – Manipulation sur des tableaux

Question 1 *Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de $u_2 - u_3^2$ par u_4.*

Question 2 *Calculer $\sqrt[4]{u_5}$.*

Question 3 *Calculer* $\sin(u_6)$ *(On pourra utiliser la fonction sin du module numpy).*

Dans toute la suite du devoir, on appelle L le tableau $\left[u_k,\ k \in [\![0, 10\,000[\![\ \right]$, c'est-à-dire

$$L = \left[u_0, u_1, \ldots, u_{9\,999}\right].$$

Si $0 \leq k \leq 99$, on note a_k le nombre d'éléments de L dont le reste dans la division euclidienne par 100 vaut k. On aura intérêt à calculer une fois pour toutes le tableau L. Le tableau L est sauvegardées dans la variable `tab_L` définie ci-dessous. Les valeurs de a_k sont sauvegardé dans la variable `tab_a` définie ci-dessous.

Question 4 *Calculer* a_{42}.

Question 5 *Calculer la moyenne du tableau* $[a_0, \ldots, a_{99}]$.

On rappelle les définitions de la variance v :

$$v = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (a_i - m)^2.$$

Question 6 *Calculer la variance du tableau* $[a_0, \ldots, a_{99}]$.

Dans un tableau de nombres $t = [t_0, \ldots, t_{n-1}]$, on appelle *dénivelé* la valeur

$$\sum_{\substack{0 \leq i < n-1 \\ t_i < t_{i+1}}} t_{i+1} - t_i.$$

Question 7 *Calculer le dénivelé du tableau* L.

Une opération de lissage d'un tableau de nombres $t = [t_0, \ldots, t_{n-1}]$ renvoie un nouveau tableau $t' = [t'_0, \ldots, t'_{n-1}]$ où :

- le premier et le dernier coefficient de t' sont ceux de t ;
- pour chaque autre coefficient de t, on place dans t' la moyenne des coefficients de t qui l'entourent.

Par exemple, le lissage du tableau

$$t = [1, 3, -2, 0, 4]$$

donne le tableau

$$t' = [1, -0.5, 1.5, 1, 4].$$

Question 8 *On note* $L' = [\ell'_0, \ldots, \ell'_{9\,999}]$ *le tableau obtenu après avoir effectué* 42 *lissages successifs sur le tableau* L. *Calculer* ℓ'_{1515}.

Question 9 *Calculer le plus petit nombre de lissages successifs à effectuer sur le tableau* L *pour obtenir un tableau dont la valeur absolue de la différence entre deux coefficients successifs ne dépasse pas* 10^4 *(strictement).*

On dit que la position $1 \leq i < 9\,999$ est sous l'eau dans le tableau L s'il existe $k \in [\![0, i[\![$ et $\ell \in [\![i+1, 10^4[\![$ tels que

$$u_k > u_i \quad \text{et} \quad u_\ell > u_i.$$

Question 10 *Calculer le nombre de positions sous l'eau dans le tableau* L.

Indications

Exemples de réponse pour $\alpha = 99$

Question	Réponse
Q1 reste	3699
Q1 quotient	-30611
Q2	13.540
Q3	-0.998
Q4	95
Q5	100.0
Q6	102.760
Q7	106038842
Q8	38519.708
Q9	758
Q10	9971