Devoir surveillé n°1

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Concavité du logarithme.

L'objectif de ce problème est d'établir quelques propriétés géométriques de la courbe de la fonction logarithme népérien, puis d'obtenir une inégalité classique et d'en tirer une application géométrique.

Dans tout ce problème, on notera $\mathscr{C}$ la courbe de la fonction logarithme népérien, que l'on considère dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

1) Résultat préliminaire. Montrer que pour tout $x > 0$:

$$\ln(x) \leqslant x - 1.$$

Quand y a-t'il égalité dans l'inégalité précédente ?

2) Tangentes à la courbe. On considère un réel $a > 0$ et l'on note T_a la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.

- **a)** Déterminer l'équation de la droite T_a.
- **b)** Déterminer la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite T_a.

3) Cordes. On considère deux réels $0 < a < b$ et l'on note A et B les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses a et b. On rappelle que le segment $[A, B]$ est une corde à la courbe $\mathscr{C}$.

- **a)** Déterminer pour chaque réel $0 \leqslant t \leqslant 1$ les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ du point $M(t)$ vérifiant
$$\overrightarrow{AM(t)} = t\overrightarrow{AB}.$$
- **b)** On note f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f : t \mapsto \ln(x(t)) - y(t)$.
Étudier le caractère dérivable de f et déterminer l'expression de f'.
- **c)** Étudier la monotonie de f' ainsi que les signes de $f'(0)$ et de $f'(1)$.
- **d)** En déduire le tableau de variations de f sur $[0, 1]$.
- **e)** Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport au segment $[A, B]$.

4) Inégalité arithmético-géométrique et cas d'égalité. Dans cette partie, on pourra utiliser le résultat obtenu dans la partie précédente : si $a, b > 0$ et si $0 \leqslant t \leqslant 1$, alors

$$\ln((1-t)a + tb) \geqslant (1-t)\ln(a) + t\ln(b).$$

Ce résultat est appelé *inégalité de concavité du logarithme*.

- **a)** Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ et tous réels $a_1, \dots, a_n$ strictement positifs :
$$\ln\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right) \geqslant \frac{\ln(a_1) + \cdots + \ln(a_n)}{n}.$$
Indication : on pourra procéder par récurrence et utiliser la relation rappelée ci-dessus.

b) En déduire l'inégalité arithmético-géométrique : pour tout $n \geqslant 2$ et tous réels $a_1, \dots, a_n$ strictement positifs,

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}. \tag{IAG}$$

c) Montrer que si a et b sont deux réels strictement positifs, alors $\sqrt{ab} = \dfrac{a+b}{2}$ si et seulement si $a = b$.

d) Montrer que si $a_1, \dots, a_n$ sont des réels strictement positifs, alors il y a égalité dans (IAG) si et seulement si $a_1 = \cdots = a_n$.
Indication : on pourra utiliser le résultat de la question précédente.

e) On considère un parallélépipède rectangle (non plat), dont on note $\mathscr{A}$ l'aire de la surface et $\mathscr{V}$ le volume (exprimés dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$).
Montrer que $216\mathscr{V}^2 \leqslant \mathscr{A}^3$, avec égalité si et seulement si ce parallélépipède est un cube.

II. Étude d'une fonction.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin(x)}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f, que l'on pourra noter $\mathscr{D}_f$.

2) Montrer que l'on peut réduire l'étude de f à l'intervalle $I = \left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right[$.

3) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$, partout où cela est possible.

4) Étudier les variations de f sur I et en déduire le tableau de variations de f sur $[-\pi, \pi] \cap \mathscr{D}_f$.

5) Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé, sur $[-\pi, \pi] \cap \mathscr{D}_f$, en faisant apparaître ses tangentes et asymptotes remarquables.

On note g la restriction de f à l'intervalle I.

6) Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J, que l'on précisera, puis donner le tableau de variations de g^{-1}.

7) Pour $x \in I$, on pose $y = g(x)$. Exprimer x en fonction de y et en déduire une expression de g^{-1}.

8) En utilisant la formule précédente, déterminer l'ensemble de dérivabilité de (g^{-1}) et calculer $(g^{-1})'(y)$, partout où cela est possible.

9) Retrouver les résultats obtenus à la question précédente en utilisant la formule de dérivation d'une réciproque.

10) *Application :* calculer l'intégrale

$$\int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2 - 1}}.$$

— **FIN** —