



C4 : MODÉLISATION CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES COMPOSÉS DE CHAINES DE SOLIDES

C4-4 - Cinématique du solide

7 Janvier 2020

Table des matières

I Champ cinématique des solides	1
1 Torseur cinématique	1
2 Propriétés	3
a) Equiprojectivité	3
b) Axe central	4
3 Composition des champs cinématiques	4
4 Champ de vecteur accélération des points d'un solide	4
II Mouvements particuliers des solides	5
1 Mouvement de translation	5
a) Définition	5
b) Mouvement de translation rectiligne	5
c) Mouvement de translation circulaire	5
2 Mouvement de rotation	6
3 Mouvement de translation/rotation hélicoïdale	6
4 Mouvements plan	6
a) Définition	6
b) Centre instantané de rotation (C.I.R.)	7
c) Cas des mouvements de translation	8

Compétences

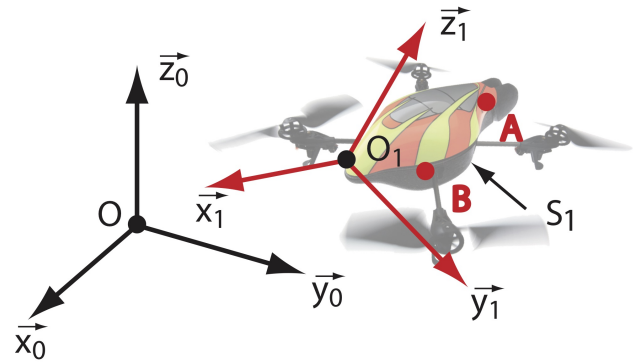
- **Analyser**; Caractériser des écarts : Grandeurs utilisées : unités du système international; homogénéité des grandeurs
- **Modéliser**; Proposer un modèle de connaissance et de comportement : Modélisation plane

I. Champ cinématique des solides

1 Torseur cinématique

Dans cette partie nous considérons que les solides sont indéformables. Le repère R_1 est attaché au solide S_1 (corps du drone ici), ainsi on note :

$$\vec{\Omega}(R_1/R_0) = \vec{\Omega}(S_1/R_0).$$



Considérons deux points **A et B appartenant au solide** S_1 attachés au repère $R_1 (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. D'après la définition des solides indéformables vue dans le premier chapitre :

$$\left[\frac{d\vec{AB}}{dt} \right]_{R_1} = \vec{0}.$$

En écrivant la dérivée temporelle du vecteur \vec{AB} par rapport au repère R_0 avec la formule de dérivation vectorielle, on obtient :

$$\left[\frac{d\vec{AB}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{AB}}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(S_1/R_0) \wedge \vec{AB}.$$

On peut également écrire :

$$\left[\frac{d\vec{AB}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{OB}}{dt} \right]_{R_0} - \left[\frac{d\vec{OA}}{dt} \right]_{R_0} = \vec{V}(B/R_0) - \vec{V}(A/R_0)$$



Définition 1 : Changement de point

- On obtient alors **la relation fondamentale de changement de point pour le champ cinématique** pour deux points A et B appartenant à un solide quelconque S :

$$\vec{V}(B/R_0) = \vec{V}(A/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \vec{AB} = \vec{V}(A/R_0) + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}(S/R_0).$$

- On peut étendre cette formule à **deux points quelconques A et B** (n'appartenant pas forcément à S) avec l'utilisation des vitesses d'entraînement :

$$\vec{V}(B \in S/R_0) = \vec{V}(A \in S/R_0) + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}(S/R_0). \quad (1)$$

- On peut parfois appeler cette relation, **la formule de Varignon**.



Propriété 1 :

On remarque alors que les vecteurs vitesses des points d'un solide indéformable vérifient la relation de changement de point du moment d'un torseur. Nous pouvons alors définir le **torseur cinématiques**.



Définition 2 : Torseur cinématique

On définit le torseur cinématique du mouvement d'un solide indéformable S par rapport à un repère R_0 , le torseur qui a pour résultante, le vecteur de rotation instantané $\overrightarrow{\Omega}(S/R_0)$ et pour moment la vitesse en un point donné A , dans le mouvement de S par rapport à R_0 , $\overrightarrow{V}_{(A \in S/R_0)}$. On le note alors :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S/R_0)} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}(S/R_0) \\ \overrightarrow{V}_{(A \in S/R_0)} = \overrightarrow{V}_A(S/R_0) \end{array} \right\} \quad (2)$$



Définition 3 : Torseur

Un torseur est un outil mathématique qui présente deux composantes vectorielles :

- Une résultante qui est **indépendante** du point où on l'exprime et que l'on note $\vec{R} = \overrightarrow{\Omega}(S/R_0)$.
- Un moment qui **dépend du point** où on l'exprime par la **formule fondamentale de changement de point** et que l'on note $\vec{M}_A(\vec{R}) = \overrightarrow{V}_{(A \in S/R_0)} = \vec{V}_A(S/R_0)$.



Remarque 1 :

Le point A est lié au solide S . Deux cas peuvent se présenter.

- Lorsque le point appartient physiquement au solide (S), il est lié à tout instant à ce solide. On peut alors calculer sa vitesse avec le vecteur vitesse ou par dérivation vectorielle. On parlera alors de **point matériel**.
- Lorsque le point considéré est lié uniquement au solide à l'instant t où on calcule son vecteur vitesse, on ne peut calculer sa vitesse qu'en utilisant la loi de composition des vitesses. On parlera alors de **point géométrique**.

2 Propriétés

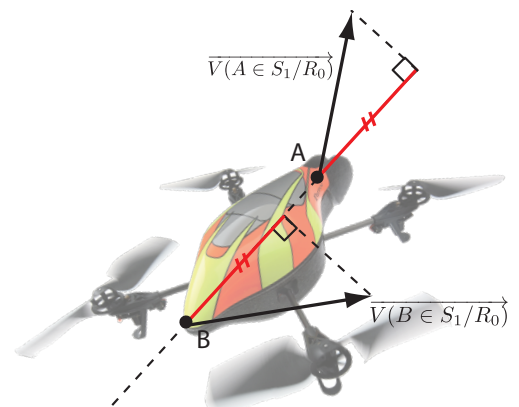
a) Equiprojectivité



Définition 4 : Equiprojectivité

Un champ de vitesse est **équiprojectif**, c'est à dire qu'il vérifie pour tout couple de point (A, B) dans le mouvement d'un solide S_1 par rapport à R_0 la relation suivante :

$$\overrightarrow{V}_{(A \in S_1/R_0)} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V}_{(B \in S_1/R_0)} \cdot \overrightarrow{AB} \quad (3)$$



b) Axe central

**Définition 5 : Axe central**

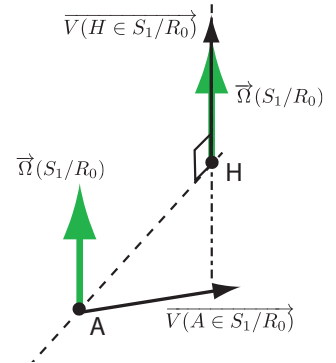
- Un **point central** d'un torseur est un point où le moment résultant a même direction que la résultante générale.
- L'**axe central** d'un torseur est la droite constituée par l'ensemble des points centraux. Il a même direction que la résultante du torseur. L'axe central n'existe que si la résultante du torseur n'est pas nulle.

Supposons un torseur défini en un point A du mouvement de S_1/R_0 :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_1/R_0)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}} \\ \overrightarrow{V_{(A \in S_1/R_0)}} \end{array} \right\}$$

La position de la projection du point A sur l'axe central (que l'on notera H) est obtenu par la relation suivante :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}} \wedge \overrightarrow{V_{(A \in S_1/R_0)}}}{\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}}^2} \quad (4)$$



3 Composition des champs cinématiques

**Propriété 2 : Composition des champs cinématiques**

On peut décomposer un champ cinématique à l'aide des torseurs en effectuant une relation de Chasles par des solides successifs. Soit S_1, S_2, \dots, S_n un ensemble de solides indéformables :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_n/S_0)} \right\} = \left\{ \mathcal{V}_{(S_n/S_{n-1})} \right\} + \left\{ \mathcal{V}_{(S_{n-1}/S_{n-2})} \right\} + \dots + \left\{ \mathcal{V}_{(S_1/S_0)} \right\} \quad (5)$$

Il en découle une décomposition en :

- Vecteur rotation instantané :

$$\overrightarrow{\Omega_{(S_n/S_0)}} = \overrightarrow{\Omega_{(S_n/S_{n-1})}} + \overrightarrow{\Omega_{(S_{n-1}/S_{n-2})}} + \dots + \overrightarrow{\Omega_{(S_1/S_0)}} \quad (6)$$

- Vecteur vitesse en un même point quelconque A :

$$\overrightarrow{V_{(A \in S_n/S_0)}} = \overrightarrow{V_{(A \in S_n/S_{n-1})}} + \overrightarrow{V_{(A \in S_{n-1}/S_{n-2})}} + \dots + \overrightarrow{V_{(A \in S_1/S_0)}} \quad (7)$$

4 Champ de vecteur accélération des points d'un solide

**Définition 6 : Champ d'accélération**

Le relation de changement de point entre A et B pour un champ d'accélération d'un solide S_1 par rapport à un repère R_0 est donnée par :

$$\vec{a}(B/R_0) = \vec{a}(A/R_0) + \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}} \right]_{R_0} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}} \wedge (\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}} \wedge \overrightarrow{AB}).$$

**Attention :**

Un champ d'accélération n'est pas un champ de moment, c'est à dire qu'il ne vérifie pas les propriétés d'équiprojectivité et il ne peut pas être décrit par un torseur.

II. Mouvements particuliers des solides

1 Mouvement de translation

a) Définition



Définition 7 : Mouvement de translation

Un solide S_1 est en mouvement de **translation** par rapport à R_0 si l'ensemble des points de S_1 ont la même vitesse à l'instant t par rapport à R_0 .

Le vecteur de rotation instantané associé à ce torseur est nul : $\overrightarrow{\Omega}(S_1/R_0) = \vec{0}$. Il s'agit donc d'un **torseur couple** qui est indépendant du point où on l'exprime :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_1/R_0)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \overrightarrow{V}_{(A \in S_1/R_0)} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \overrightarrow{V}_{(B \in S_1/R_0)} \end{array} \right\}_B \quad (8)$$

Parmi les mouvements de translation, on peut en retenir deux particuliers :

b) Mouvement de translation rectiligne



Définition 8 : translation rectiligne

Un mouvement de translation de S_1 par rapport à R_0 est dit de **translation rectiligne** si la trajectoire de tous les points de S_1 par rapport à R_0 est une **droite**. Dans ce cas $\overrightarrow{V}_{(A \in S_1/R_0)}$ a pour direction la trajectoire du point A.

c) Mouvement de translation circulaire



Définition 9 : Mouvement de translation circulaire

Un mouvement de S_1 par rapport à R_0 est dit de **translation circulaire** si la trajectoire de tous les points de S_1 sont des **cercles**.

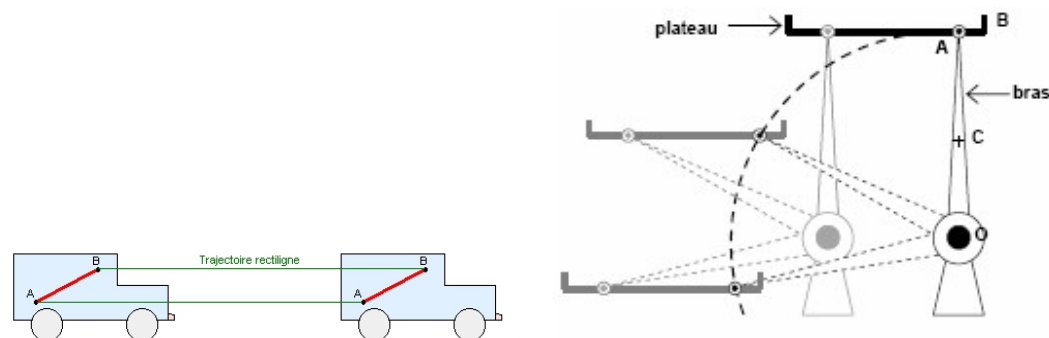


FIGURE 1 – Exemple de translation rectiligne et circulaire.

2 Mouvement de rotation



Définition 10 : Mouvement de rotation

Un solide S_1 est en **mouvement de rotation** par rapport à R_0 autour d'un axe (A, \vec{u}) si tous les points appartenant à l'axe (A, \vec{u}) ont une vitesse nulle par rapport à R_0 . Le vecteur de rotation instantané $(\vec{\Omega}(S_1/S_0))$ est alors colinéaire à la direction \vec{u} :

$$\vec{\Omega}(S_1/S_0) \wedge \vec{u} = \vec{0}$$

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_1/R_0)} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(S_1/S_0) \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad (9)$$

$$\forall A \in \vec{u}.$$

Ce torseur est alors "**un glisseur**" car il existe des points pour lesquels le moment du torseur cinématique est nul. Ces points appartiennent à l'axe de rotation qui est **l'axe central du torseur cinématique associé**.

3 Mouvement de translation/rotation hélicoïdale



Définition 11 : Mouvement de translation/rotation hélicoïdale

- Un mouvement de **translation/rotation** hélicoïdale est la superposition entre un mouvement de rotation autour d'un axe (A, \vec{u}) et de translation suivant la direction \vec{u} .
- Ces deux mouvement sont liés par le paramètre p qui représente le **pas hélicoïdal** et s'exprime en $m.rad^{-1}$.
- Le torseur cinématique associé à ce mouvement pour un solide S_1 par rapport à R_0 est donné par :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_1/R_0)} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(S_1/S_0) = \Omega \cdot \vec{u} \\ \vec{V}_{(A \in S_1/R_0)} = p\Omega \cdot \vec{u} \end{array} \right\} \quad (10)$$

4 Mouvements plan

a) Définition

Soit un solide S_1 , de repère lié R_1 , en mouvement dans un repère R_0 .



Définition 12 : Mouvement plan

On dit que S_1 a un **mouvement plan** dans R_0 si chaque point $M \in S_1$ se déplace parallèlement à un plan P_0 lié à R_0 . Autrement dit, si \vec{n} est la normale à P_0 , alors :

$$\overrightarrow{V_{(M \in S_1/R_0)}} \cdot \vec{n} = 0 \quad \forall M \in S_1$$

**Remarque 2 :**

Dans le cas d'un mouvement plan (par exemple dans le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$), le torseur cinématique de S_1 par rapport à R_0 se ramène à :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_1/R_0)} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega_z & 0 \end{array} \right\}_{R_0} \quad \forall M$$

On remarquera ainsi que $\vec{\Omega}_{(S_1/R_0)} \perp \vec{V}_{(M \in S_1/R_0)}$, et donc que ce torseur est un glisseur.

**Exemple 1 : Forme des torseurs pour des mouvements plans**

- cas d'un mouvement dans le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$, le torseur cinématique de S_1 par rapport à R_0 est donné par :
- cas d'un mouvement dans le plan $(O, \vec{z}_0, \vec{x}_0)$, le torseur cinématique de S_1 par rapport à R_0 est donné par :
- cas d'un mouvement dans le plan $(O, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, le torseur cinématique de S_1 par rapport à R_0 est donné par :

b) Centre instantané de rotation (C.I.R.)**Définition 13 : Centre instantané de rotation (C.I.R.)**

On appelle “**centre instantané de rotation**” (noté familièrement “**C.I.R.**”) le point d'intersection entre l'axe central (Δ) et le plan du mouvement.

On désignera par “ I_{10} ” le CIR du mouvement de S_1 par rapport à R_0 .

**Remarque 3 :**

Pendant un instant Δt infiniment bref, le centre instantané de rotation représente le point autour duquel S_1 a un mouvement de rotation. Cependant, à l'instant suivant, il peut avoir changé de position.

**Propriétés 3 :**

- Soit S_1 , un solide en mouvement dans un repère R_0 , et ayant pour CIR " I_{10} ". Alors, pour tout $P \in S_1$, on a (fig.2) :

$$\overrightarrow{V_{(P \in S_1 / R_0)}} \cdot \overrightarrow{PI_{10}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{V_{(P \in S_1 / R_0)}} \perp \overrightarrow{PI_{10}} \quad (11)$$

- La norme des vecteurs vitesse est proportionnelle à la distance au CIR.
- On en déduit que la vitesse sur le CIR est nulle.

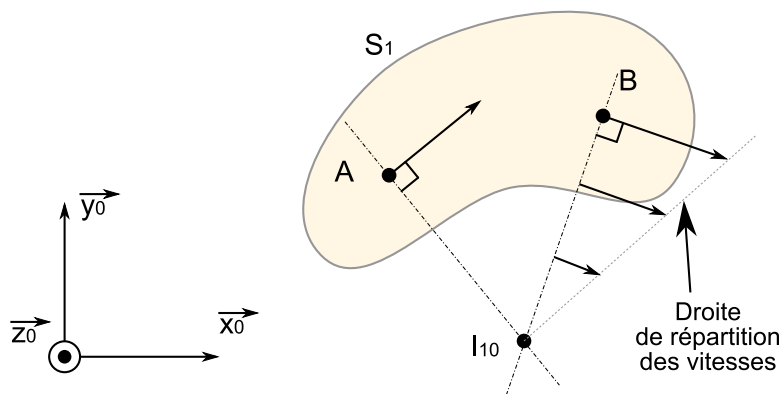


FIGURE 2 – Orthogonalité entre les vitesses et le “rayon au CIR”.

c) Cas des mouvements de translation

Lorsque le mouvement relatif des deux solides est une translation, le CIR **n'existe pas**. Cependant, on peut considérer qu'il est comme rejeté à l'infini, perpendiculairement à la direction de la translation (fig.3).

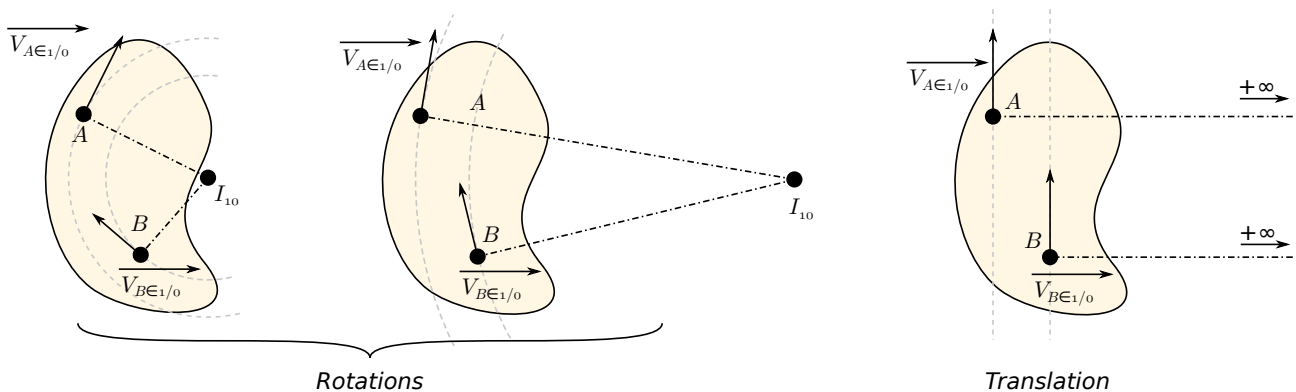


FIGURE 3 – CIR en translation.