Devoir surveillé n°6
Version 1
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme $X^n + X + 1$ par le polynôme $(X-1)^2$.

II. Une équation fonctionnelle.

Partie 1 : endomorphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$.

On veut montrer que l'ensemble des homothéties de $\mathbb{R}$ est égal à l'ensemble $\mathscr{E}$ des endomorphismes continus du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$, c'est-à-dire des fonctions **continues** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \ , \ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1) Soit $f \in \mathscr{E}$.

- **a)** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \ f(kx) = kf(x)$.
- **b)** On pose $\lambda = f(1)$. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{Q}, \ f(x) = \lambda x$.
  Indication : si $x \in \mathbb{Q}$, on pourra multiplier x par un entier pour obtenir un entier et utiliser la question précédente.

2) Conclure.

Partie 2 : une équation fonctionnelle.

On veut maintenant déterminer l'ensemble $\mathscr{E}'$ des fonctions f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ **continues en 0** vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \ , \ f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)}. \qquad (\spadesuit)$$

En particulier, cela signifie que $\forall x, y \in \mathbb{R} \ , \ 1 + f(x)f(y) \neq 0$.

3) Quelles sont les fonctions constantes de $\mathscr{E}'$?

4) Soit f un élément de $\mathscr{E}'$ pour lequel il existe un $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x_0)| = 1$. Montrer que f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

5) Soit f un élément de $\mathscr{E}'$ qui n'est **pas** une fonction constante.

- **a)** Montrer que $f(0) = 0$. Étudier la parité de f.
- **b)** Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- **c)** En déduire que, pour tout réel x, on a $|f(x)| < 1$.
- **d)** On rappelle que th : $\mathbb{R} \to]-1, 1[$ est bijective, on note Argth sa réciproque. On pose : $g(x) = \mathrm{Argth}(f(x))$. Justifier l'existence et la continuité de g sur $\mathbb{R}$.

e) Vérifier que la fonction th est un élément de $\mathscr{E}'$.

f) En déduire que g est un élément de $\mathscr{E}$.

6) Donner l'expression des fonctions non constantes de $\mathscr{E}'$.

7) Conclure en donnant une description complète de $\mathscr{E}'$.

III. Suite, polynôme, suite...

1) Soit $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

a) En s'aidant des suites (u_{2n}) et (u_{2n-1}), montrer que que la suite u converge.

b) Justifier que $\forall n \geqslant 1,\ u_n < 0$.

2) Soit un entier naturel $n \geqslant 2$, on introduit le polynôme

$$P_n = -1 + X + \frac{1}{2}X^2 + \cdots + \frac{1}{n}X^n = -1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{X^k}{k}.$$

a) Déterminer les racines du polynôme dérivé P_n', en séparant, selon la parité de n, les racines réelles des racines complexes non réelles.

b) Montrer que tout racine <u>**réelle**</u> de P_n est simple.

3) **a)** Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, le polynôme P_n admet une unique racine (réelle !) dans l'intervalle $[0, +\infty[$. On note x_n cette racine : vérifier que $x_n \in [0, 1]$.

b) Pour $n \geqslant 2$, déterminer le signe de $P_{n+1}(x_n)$. En déduire la monotonie de $(x_n)_{n\geqslant 2}$ puis sa convergence. On note ℓ la limite de $(x_n)_{n\geqslant 2}$.

4) On pose, pour $n \geqslant 2$,

$$G_n : \left\{ \begin{array}{rcl} [0,1[& \to & \mathbb{R}; \\ x & \mapsto & -1 - \ln(1-x) - P_n(x). \end{array} \right.$$

a) Calculer la valeur exacte de $C = x_2$ et comparer C et 1.

b) Calculer et simplifier G_n'.

c) En déduire que, pour tout $x \in [0, C]$ et pout tout $n \geqslant 2$, $|G_n'(x)| \leqslant \dfrac{C^n}{1-C}$ puis que $|G_n(x)| \leqslant |x|\dfrac{C^n}{1-C}$.

5) **a)** Justifier que, pour $n \geqslant 2$, $x_n \in [0, C]$.

b) En déduire que, pour $n \geqslant 2$, $|1 + \ln(1 - x_n)| \leqslant \dfrac{C^{n+1}}{1-C}$.

c) Déterminer la valeur de ℓ.

— FIN —