M1: CINEMATIQUE NEWTONIENNE DU POINT

• Mécanique = étude du mouvement des systèmes matériels.
• Cinématique = étude du mouvement d'un corps indépendamment des causes qui le provoquent.
• Dynamique = étude des relations entre les causes du mouvement et les effets.
• Point matériel = corps assez petit pour que, dans l'étude envisagée, sa position puisse être définie comme celle d'un point géométrique.

A la notion de mouvement on associe étroitement la notion de référentiel.

• Historique
→ Antiquité : Archimède (287-212) = les premiers résultats en hydrostatique, étude des leviers, concept de centre de gravité.
→ 16ème siècle : • Nicolas Copernic (1473-15) = la terre n'est pas au centre de l'univers, description cinématique du système solaire.
• Johannes Kepler (1571-1630) = les trois lois cinématiques du mouvement des planètes.
• Galileo Galilei dit Galilée (1564-1642) = introduction de la méthode expérimentale, principe de relativité galiléenne, principe d'inertie.
→ 17ème siècle : • Christiaan Huygens (629-1695) = étude des mouvements de rotation, concepts de force centrifuge et d'énergie cinétique.
• Isaac Newton (1642 -1727) = concept de masse, de forces, les trois lois de la dynamique classique.

I. Repérage d'un point dans l'espace et dans le temps (Rappels)

I.1. L'espace physique.

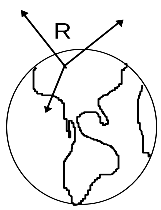
• Nous postulons l'existence de solides indéformables, c'est à dire de systèmes dont les distances mutuelles des éléments qui le composent sont invariables.
Solide indéformable = modèle d'un corps à l'état solide.

Remarque: Le modèle du solide indéformable ne représente la réalité physique d'un corps à l'état solide que de façon très approchée: un tel corps se déforme toujours au moins faiblement, sous l'action de contraintes mécaniques et par ailleurs il est soumis à une éventuelle dilatation thermique.

• Pour repérer la position d'un point dans l'espace, il faut tout d'abord choisir un solide de référence (S). A ce solide (S) on peut associer divers axes de coordonnées (en pratique des trièdres trirectangles) appelés repères.

Repère lié au solide de référence (S) = Système d'axes de coordonnées attachés à (S)

Exemple: Solide de référence = la terre
Système d'axes de coordonnées liés à la terre = repère terrestre



• Unité de longueur: S.I. = le mètre (m)
1 mètre = distance parcourue par la lumière dans le vide pendant une durée de 1/(299792458) s. (Définition qui dépend de la définition de la seconde)

I.2. Le temps physique.

• Ce concept est issu de l'observation suivante: la notion de temps est intuitive, tel événement à lieu avant ou après tel autre.
Le temps est un paramètre réel servant à dater un événement.

• Propriétés du temps: • il s'écoule toujours dans le même sens
• le temps est uniforme c'est à dire que les lois physiques sont invariantes par translation dans le temps.

• Tout instrument propre à dater un événement est appelé une horloge (ou chronomètre): ces instruments utilisent un phénomène qui se reproduit identique à lui-même. (grâce à l'uniformité du temps, un système, qui décrit des cycles, utilise la même durée pour décrire chacun de ces cycles).
Les horloges mesurent des durées: $D = t_2 - t_1$.

• La donnée d'une horloge de référence et d'une date origine (t = 0) définit un repère temporel ou chronologie.

Horloge de référence + date origine = Repère temporel ou chronologie

• Unité de temps: S.I. = la seconde (s)
La seconde définie depuis 1967 à partir d'horloges atomiques = un multiple de la période d'une radiation de l'atome de Césium 133.
1 seconde = durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre 2 niveaux hyper fins de l'état fondamental du Ce 133.

I.3. Référentiel

Ensemble des repères d'espace liés à un solide de référence + Chronologie	=	Référentiel ($\mathfrak{R}$)

Dans un référentiel donné, un événement est repéré par un quadruplet de nombres réels.
(x, y, z, t) : point de l'espace temps.

I.4. Hypothèses de la mécanique Newtonienne

• Principe Newtonien de l'universalité du temps
« Le temps est une notion absolue indépendante du référentiel. »
Deux observateurs liés à des référentiels différents peuvent attribuer les mêmes dates aux mêmes événements.

Conséquence: 2 référentiels $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}'$ ne se distinguent que par leur repère d'espace.

Remarque: Ce principe est démenti par la relativité restreinte car il suppose qu'il existe un signal de synchronisation des horloges se propageant à une vitesse infinie.

• **« On peut connaître avec une précision infinie la position et la vitesse d'une particule à un instant donné. »**

Remarque: Ce principe est démenti par le principe d'incertitude d'Heisenberg en mécanique quantique.

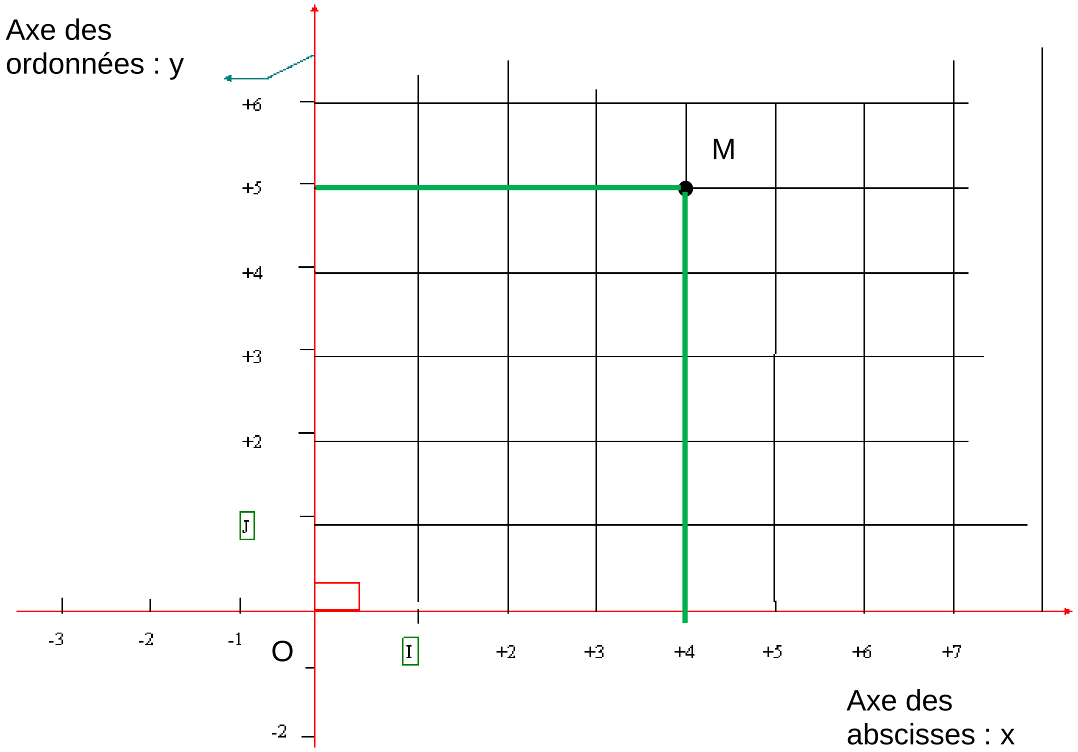
II. Trajectoire

Soit M un point matériel dont le vecteur position est : $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ à l'instant t dans un référentiel $\mathfrak{R}$.
Le mouvement de M est entièrement défini dans $\mathfrak{R}$ par l'application : $t \rightarrow \vec{r}(t)$.
On appelle trajectoire de M relative à $\mathfrak{R}$, la courbe orientée (en général dans le sens du mouvement) décrite par M au cours du temps.
Pour définir la position du point M, on peut utiliser divers systèmes de coordonnées.

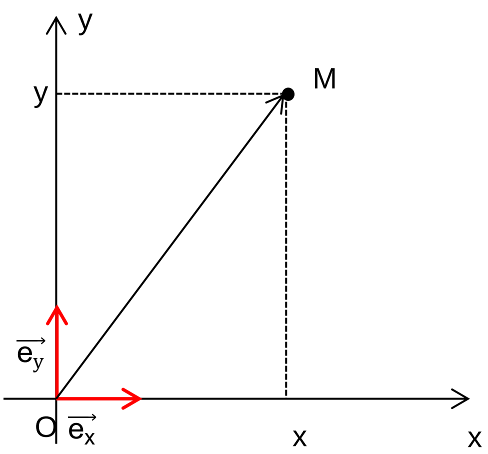
II.1. Coordonnées cartésiennes

II.1.1. Repérage dans le plan

• Description : Le repérage cartésien consiste à quadriller le plan à l'aide d'une grille carrée. Un point M est repéré par ses coordonnées sur les deux axes.



M a pour coordonnées : x = +4 et y = +5



Dans le plan (xOy) le point M de coordonnées x et y est repéré par le vecteur : $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y$

Ainsi x et y sont les projections orthogonales du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur les vecteurs $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$

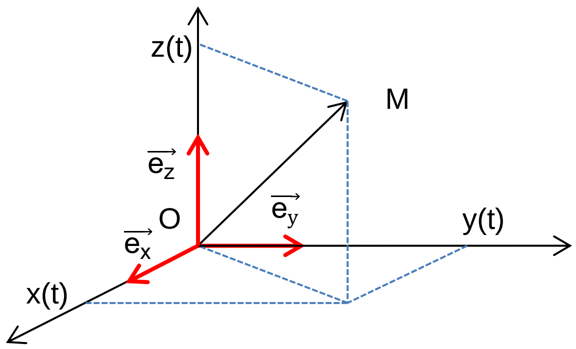
II.1.2. Repérage dans l'espace

• Base orthonormée directe: $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

• M repéré par (x, y, z).

• Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\vec{e}_z$,

• M décrit tout l'espace si : $x \in]-\infty\,;+\infty[$
$y \in]-\infty\,;+\infty[$
$z \in]-\infty\,;+\infty[$

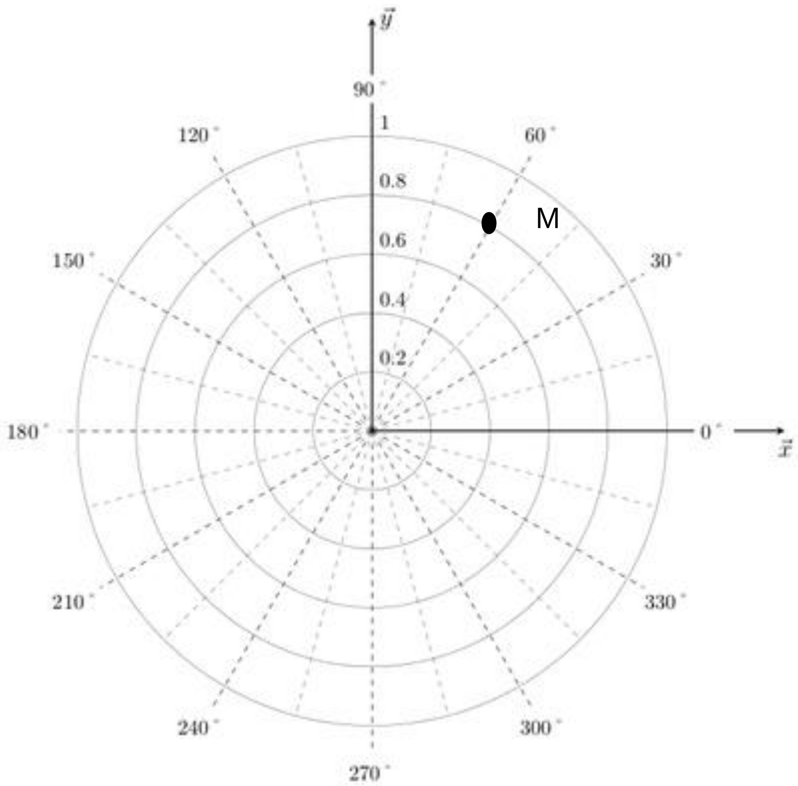


• <u>Loi horaire</u>: elle est donnée par { x(t), y(t), z(t) }, équation paramétrique de la trajectoire.
Ces fonctions seront toujours supposées <u>continues</u> et <u>dérivables</u>, en tout point, en mécanique classique. (Le phénomène physique du mouvement interdit la discontinuité de la loi horaire et exige l'existence d'une vitesse en tout point).

II.2. Coordonnées cylindriques

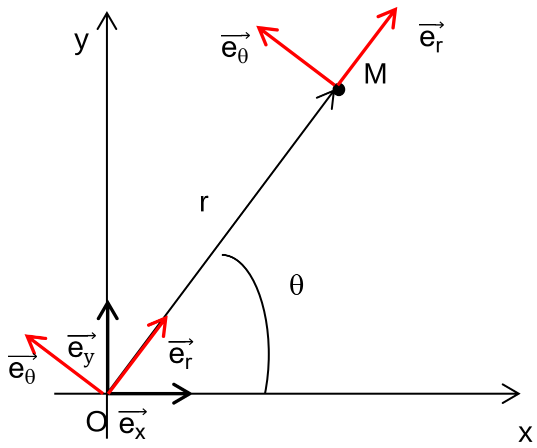
II.2.1. Repérage dans le plan

• <u>Description</u> : Le repérage polaire consiste à quadriller le plan à l'aide d'une grille centrée sur un point O du plan. Un point M est repéré par sa distance au point O et un angle mesuré par rapport à un axe fixe.



M a pour coordonnées : r = 0.8 et θ = 60°

• <u>Repérage du point M</u>
On utilise en règle générale l'axe (O, $\vec{e_x}$) comme axe de référence pour définir les angles. Le point M est repéré par ses coordonnées polaires r et θ définis comme suit :
- r est la distance de O à M : c'est la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$
- θ est l'angle orienté que fait le vecteur $\overrightarrow{OM}$ avec le vecteur $\vec{e_x}$.



Dans le plan (xOy) le point M de coordonnées polaires r et θ est repéré par le vecteur : $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\vec{e_r}$
Il est à noter que la base ($\vec{e_r}$, $\vec{e_\theta}$) est une baser locale ou mobile

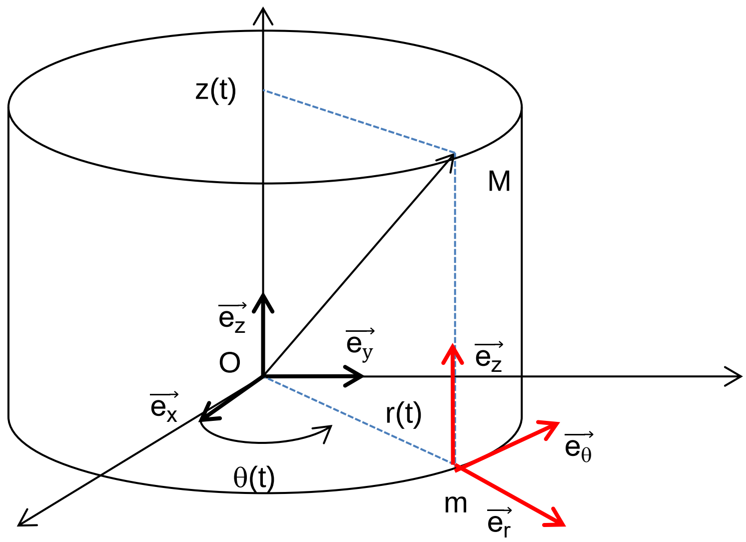
• <u>Passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes et inversement</u>
Projection de $\overrightarrow{OM}$ sur les axes Ox et Oy :
$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$
Ainsi $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\tan\theta = y/x$

II.2.2. Repérage dans l'espace

Il existe de nombreux problèmes où il existe une direction privilégiée, il est alors intéressant de faire coïncider cette direction avec l'axe Oz.

• <u>Base orthonormée directe instantanée</u> :
($\vec{e_r}$, $\vec{e_\theta}$, $\vec{e_z}$) ou encore *base locale* des coordonnées cylindriques.

• <u>M repéré</u> par (r, θ, z).
Le plan (Ox, Oy) est le plan polaire.
L'axe Ox est l'axe polaire.
r : le rayon polaire : $\overrightarrow{Om} = r\,\vec{e_r}$
θ : l'angle polaire, $\theta = (\vec{e_x}, \vec{e_r})$.
z : la côte : $\overrightarrow{mM} = z\vec{e_z}$
$\vec{e_r}$ est le vecteur unitaire dit radial et $\vec{e_\theta}$ vecteur unitaire orthoradial.



• <u>Vecteur position</u> : $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$

• M décrit tout l'espace si : $r \in [\, 0 \,;\, +\infty \,[$ toutes les distances possibles.
$\theta \in [\, 0 \,;\, 2\pi \,[$ toutes les directions possibles.
$z \in]\, -\infty \,;\, +\infty \,[$ toutes les côtes possibles.

• <u>Loi horaire</u> : elle est donnée par { rt), θ(t), z(t) } équation paramétrique en coordonnées cylindriques. En mécanique classique, ces fonctions seront toujours supposées <u>continues</u> et <u>dérivables</u> en tout point.

• <u>Relations avec les coordonnées cartésiennes</u> : $x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$
$z = z$

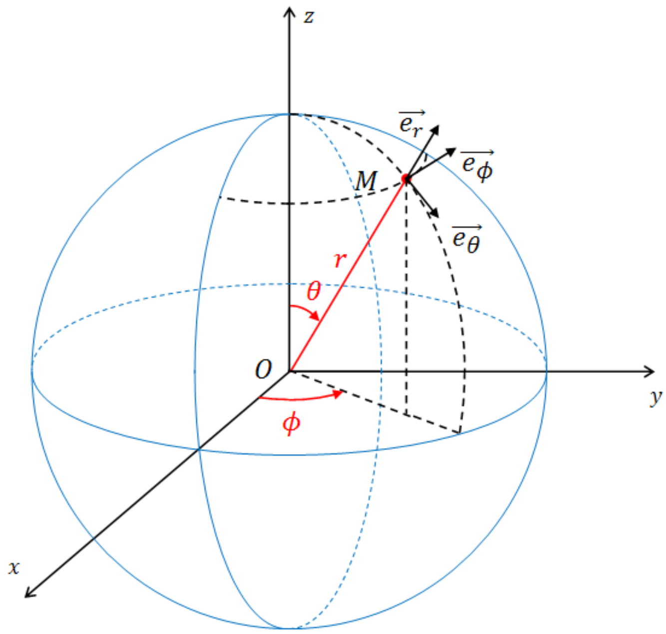
II.3. Coordonnées sphériques

Il existe de nombreux problèmes où seule la distance à un point fixe intervient, il est alors intéressant de faire coïncider ce point avec le point O et d'utiliser des coordonnées sphériques.

• Base orthonormée instantanée (ou locale) :
$(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$ • M repéré par (r, θ, φ).

$r = \|\overrightarrow{OM}\|$: le rayon vecteur
θ : colatitude
φ : azimut ou longitude

• Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\,\vec{e_r}$
$\vec{e_\theta}$ est un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{e_r}$ dans le plan OmM, il est tangent au cercle de centre O et de rayon r; $\vec{e_\varphi}$ est un vecteur unitaire parallèle au plan Oxy et orthogonal à $\overrightarrow{Om}$ dans ce plan, il est tangent au cercle de centre H et de rayon $r \sin\theta$.



• M décrit tout l'espace si :

$r \in [\,0\,;+\infty\,[$.
$\theta \in [\,0\,;\pi\,]$
$\varphi \in [\,0\,;2\pi\,[$.

• Loi horaire : elle est donnée par $\{ r(t), \theta(t), \varphi(t) \}$
En mécanique classique, ces fonctions seront toujours supposées continues et dérivables, en tout point.

• Relations avec les coordonnées cartésiennes :
$x = r \sin\theta \cos\varphi$
$y = r \sin\theta \sin\varphi$
$z = r \cos\theta$

III. Vecteurs vitesse et accélération

III.1. Définitions

III.1.1. Vitesse

Référentiel : $\mathfrak{R}$
Système : Le mobile M de masse m
M est repéré: à l'instant t, par son vecteur position $\overrightarrow{OM} = \vec{r}\,(t)$ où O est l'origine de repère ou du moins un point fixe de $\mathfrak{R}$.

à $t + \Delta t$ en M': $\overrightarrow{OM'} = \vec{r}\,(t + \Delta t)$.

• La vitesse ou vecteur vitesse de M par rapport à $\mathfrak{R}$ est la fonction vectorielle de t définie par :

$$t \rightarrow \overrightarrow{v(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$$

On a donc $$\overrightarrow{v(t)} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

• Le vecteur vitesse $\overrightarrow{v(t)}$ du point matériel M à l'instant t, dans le référentiel $\mathfrak{R}$, est le vecteur :

→ **de direction** : celle de la tangente à la trajectoire au point M dans $\mathfrak{R}$;
→ **de sens** : celui du mouvement ;
→ **de norme** : la valeur de la vitesse instantanée à l'instant t ;

• La dimension de $||\overrightarrow{v(t)}||$ et des composantes de $\overrightarrow{v(t)}$, dans une base quelconque est: LT^{-1}
Ces diverses grandeurs s'expriment dans le système international en $m.s^{-1}$.

• Il est parfois indispensable de préciser le référentiel par rapport auquel la vitesse est définie, on note alors: $\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\Re} = \vec{v}_{\Re}(M)$ ou encore $\vec{v}(M/\Re)$

• Le mouvement d'un point matériel est dit **uniforme** si la norme de son vecteur vitesse reste constante au cours du temps : $||\overrightarrow{v(t)}||$ = cte.
• Le mouvement d'un point matériel est dit **rectiligne et uniforme** si son vecteur vitesse reste constant au cours du temps : $\overrightarrow{v(t)} = \overrightarrow{cst}$.

III.1.2. Accélération

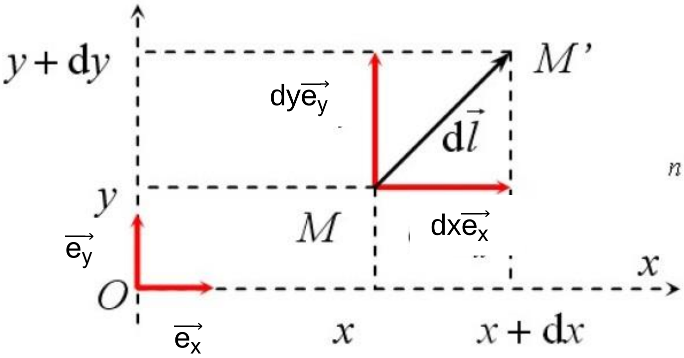
• L'accélération ou vecteur accélération de M dans $\Re$ est la fonction vectorielle de t définie par:

$$t \rightarrow \overrightarrow{a(t)} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

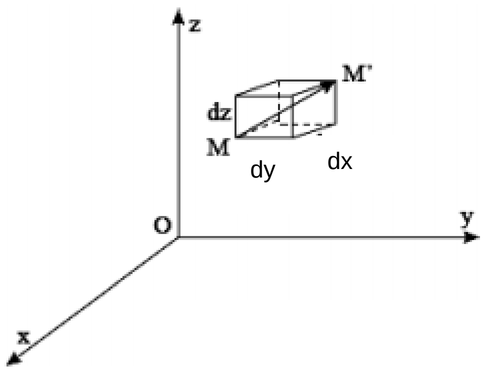
• La dimension de $||\overrightarrow{a(t)}||$ et des composantes de $\overrightarrow{a(t)}$, dans une base quelconque est: LT^{-2}
Ces diverses grandeurs s'expriment dans le système international en $m.s^{-2}$.
• Notation: $\left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{\Re} = \vec{a}_{\Re}(M)$ ou encore $\vec{a}(M/\Re)$
•Un mouvement est **accéléré** si $\overrightarrow{v(t)}.\overrightarrow{a(t)}>0$, **retardé** si $\overrightarrow{v(t)}.\overrightarrow{a(t)}<0$, **uniforme** si $\overrightarrow{v(t)}.\overrightarrow{a(t)} = 0$

III.2. Expressions en coordonnées cartésiennes

III.2.1. Déplacement élémentaire



• Dans le plan
Lorsque le point M passe en M' alors x varie de dx et y varie de dy
On a le déplacement élémentaire qui s'écrit : $\overrightarrow{MM'} = \vec{dl} = dx\overrightarrow{e_x} + dy\,\overrightarrow{e_y}$



• Généralisation dans l'espace

$\overrightarrow{MM'} = \vec{dl} = dx\overrightarrow{e_x} + dy\,\overrightarrow{e_y} + dz\,\overrightarrow{e_z}$

III.2.2. Le vecteur vitesse

Le vecteur vitesse est égal au rapport du vecteur déplacement élémentaire à la durée élémentaire dt de ce déplacement.

$$\overrightarrow{v(t)} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

$$\overrightarrow{v(t)} = \frac{dx}{dt}\overrightarrow{e_x} + \frac{dy}{dt}\overrightarrow{e_y} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{v(t)} = \dot{x}\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\overrightarrow{e_y} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$$

III.2.3. Le vecteur accélération

Il suffit de dériver l'expression ci-dessus par rapport au temps en remarquant que les vecteurs de la base cartésienne sont fixes.

$$\overrightarrow{a(t)} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\overrightarrow{a(t)} = \frac{d^2x}{dt^2}\overrightarrow{e_x} + \frac{d^2y}{dt^2}\overrightarrow{e_y} + \frac{d^2z}{dt^2}\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{a(t)} = \ddot{x}\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}\overrightarrow{e_y} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}$$

III.3. Expression en coordonnées cylindriques

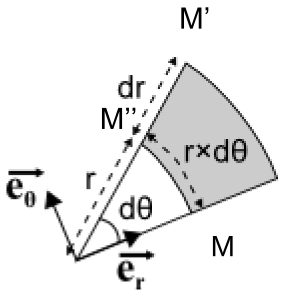
III.3.1. Déplacement élémentaire

• Dans le plan

Lorsque le point M passe en M' alors r varie de dr et θ varie de $d\theta$

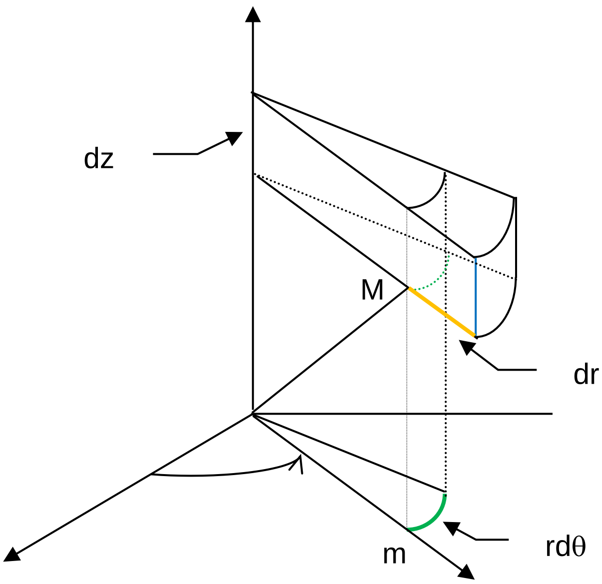
On a le déplacement élémentaire qui s'écrit :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dl} = \overrightarrow{MM''} + \overrightarrow{M''M'} = dr\,\overrightarrow{e_r} + r d\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$$



• Généralisation dans l'espace

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dl} = dr\,\overrightarrow{e_r} + r d\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + dz\,\overrightarrow{e_z}$$



III.3.2. Le vecteur vitesse

Le vecteur vitesse est égal au rapport du vecteur déplacement élémentaire à la durée élémentaire dt de ce déplacement.

$$\overrightarrow{v(t)} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

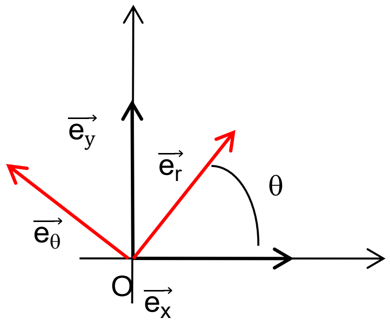
$$\overrightarrow{v(t)} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{e_r} + r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_\theta}$$

Si on se place dans l'espace :

$$\overrightarrow{v(t)} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{e_r} + r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{v(t)} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$$

• Par la dérivée du vecteur



$\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ sont des vecteurs instantanés, il faut donc connaître leur dérivée par rapport au temps.

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \frac{d\theta}{dt}(-\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y)$$

D'où $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\frac{d\theta}{dt}(\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y)$$

D'où $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_r = -\dot{\theta}\vec{e}_r$

Ainsi $\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z$

On retrouve : $\vec{v}(t) = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z$

III.3.3. Le vecteur accélération

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{e}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \left(\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\vec{e}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{e}_z$$

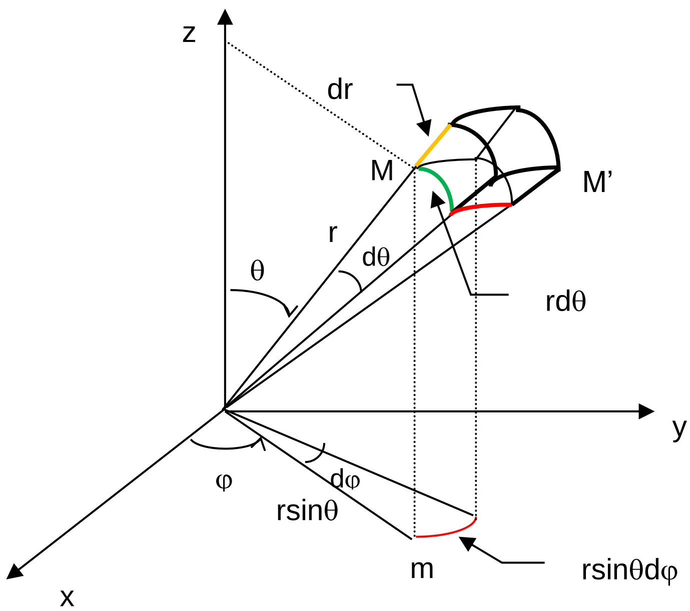
ainsi $\vec{a}(t) = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{e}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \left(\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\vec{e}_\theta - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{e}_r + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{e}_z$

Enfin $\vec{a}(t) = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\vec{e}_r + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\vec{e}_\theta + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{e}_z$

$\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$

III.4. Expression de la vitesse en coordonnées sphériques

III.4.1. Déplacement élémentaire



$\overrightarrow{MM'} = \vec{dl}$

$= \overrightarrow{MM''} + \overrightarrow{M''M'''} + \overrightarrow{M'''M'} = dr\,\vec{e}_r + rd\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi$

III.4.2. Le vecteur vitesse

Le vecteur vitesse est égal au rapport du vecteur déplacement élémentaire à la durée élémentaire dt de ce déplacement.

$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$

$\vec{v}(t) = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi$

$\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$

IV. Référentiel d'étude et repère de projection

On a un référentiel d'étude lié à l'observateur placé au point O par exemple. Tous les calculs qui suivent sont donc liés à ce référentiel :

- → position
- → trajectoire
- → vitesse et accélération.

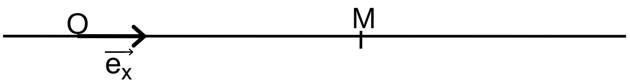
Mais selon la nature du mouvement le choix du système de coordonnées sera fonction des simplifications qui peuvent être faites. La vitesse a alors pour composantes (A, B, C) dans ce système de coordonnées choisi, mais sa norme, son sens et sa direction ne dépendent pas du système de coordonnées.

La vitesse n'est définie que par rapport à un référentiel, un système d'axes liés à un observateur. Le vecteur une fois défini peut être exprimé dans n'importe quel repère géométrique.

V. Exemples de mouvements.

V.1. Le mouvement rectiligne

La trajectoire est une droite.
Il est judicieux de faire coïncider un axe du repère cartésien avec la droite.



Pour un observateur lié à la droite : la position : $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{e_x}$

la vitesse : $\overrightarrow{v(t)} = \dot{x}\vec{e_x}$

l'accélération : $\overrightarrow{a(t)} = \ddot{x}\vec{e_x}$

Mouvement rectiligne uniforme : $\vec{v} = \overrightarrow{constante} = \vec{v_0}$

$\Rightarrow$ $\vec{a} = \vec{0}$

et $x = v_0 t + x_0$ où x_0 est l'abscisse à t = 0.

Mouvement rectiligne uniformément varié : $\vec{a} = \overrightarrow{constante} = \vec{a_0}$

$\Rightarrow v = a_0 t + v_0$ et $x = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0$.

C'est le cas de la chute libre.
Si $a_0 > 0$ le mouvement est accéléré.
Si $a_0 < 0$ le mouvement est retardé.

Mouvement rectiligne sinusoïdal : $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = X_m \cos(\omega t)\, \vec{e_x}$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{v(t)} = \dot{x}\vec{e_x} = X_m \omega \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})\, \vec{e_x} = -X_m \omega \sin(\omega t)\, \vec{e_x}$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{a(t)} = \ddot{x}\vec{e_x} = -\omega^2 X_m \cos(\omega t)\, \vec{e_x} = -\omega^2 \vec{e_x}$

V.2. Le mouvement à accélération constante

Référentiel : $\Re_T$ Galiléen
Système M (m)
Caractéristique du mouvement : L'accélération du point M est constante $\vec{a} = \overrightarrow{constante} = \vec{g}$ le champ de pesanteur terrestre.

La vitesse : $\vec{v} = \int \vec{a}\,dt = \vec{v_0} + \vec{g}t$
Le vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \int \vec{v}\,dt = \overrightarrow{OM_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$

Choix du repère :
- Origine : On choisit de faire coïncider l'origine du repère avec la position de M à t=0

Ainsi $\overrightarrow{OM} = \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$

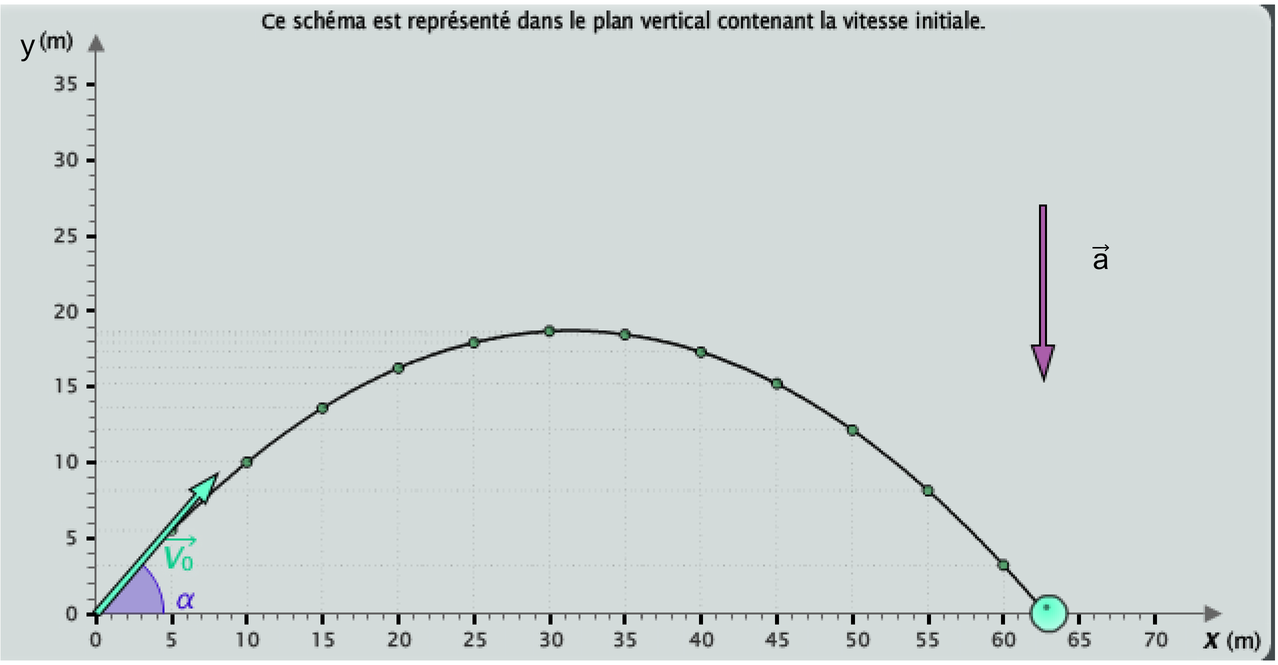
- Axes : On fait coïncider l'axe Oz avec le vecteur accélération et le plan xOz avec le vecteur vitesse initial.

D'où les projections :

$\vec{a}=\begin{cases}\ddot{x}=0\\ \ddot{z}=-g\end{cases} \Rightarrow \vec{v}=\begin{cases}\dot{x}=v_0\cos\alpha\\ \dot{z}=-gt+v_0\sin\alpha\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM}=\begin{cases}x=v_0\cos\alpha.\,t\\ z=-\frac{1}{2}gt^2+v_0\sin\alpha\,.t\end{cases}$

En éliminant le temps entre les deux équations x(t) et z(t) on obtient l'équation de la trajectoire dans le plan xOz :

$t=\frac{x}{v_0\cos\alpha} \Rightarrow z=-\frac{1}{2}\frac{g}{(v_0\cos\alpha)^2}x^2+\tan\alpha\,.x$



Remarque

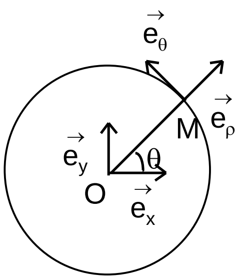
Si $\alpha = \pm\pi/2$ alors le mouvement est rectiligne selon la droite Oz

V.3. Mouvement circulaire

La trajectoire est un cercle.
Il est judicieux de faire coïncider l'origine O du repère avec le centre du cercle.
L'emploi des coordonnées polaires est conseillé

On a alors : R = OM = constante

$\theta(t) = (\vec{e_x},\overrightarrow{OM})$



• La vitesse

On a vu : $\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{e_r}+r\,\dot{\theta}\vec{e_\theta} = R\,\dot{\theta}\vec{e_\theta}$.

On pose $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega$ la vitesse angulaire du point matériel.

Pour un mouvement circulaire on a alors :$v = R\omega$

• L'accélération

On a vu $\vec{a}(t)= (\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{e_r}+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\vec{e_\theta} = -R\dot{\theta}^2\vec{e_r}+R\ddot{\theta}\vec{e_\theta}$

$a_r = -R\omega^2 = -\frac{v^2}{R}$ perpendiculaire à la trajectoire, elle modifie la direction de la vitesse, c'est ce qui fait que le mouvement est circulaire.

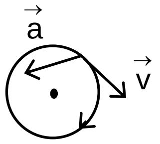
$a_\theta = R\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ tangente à la trajectoire, elle modifie la norme de la vitesse

Bilan pour le mouvement circulaire

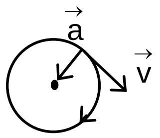
$\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{e_r}$

$\overrightarrow{v(t)} = R\,\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} = R\omega\overrightarrow{e_\theta}$

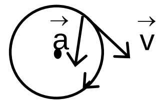
$\overrightarrow{a(t)} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} = -R\omega^2\overrightarrow{e_r} + R\frac{d\omega}{dt}\overrightarrow{e_\theta} = -\frac{v^2}{R}\overrightarrow{e_r} + \frac{dv}{dt}\overrightarrow{e_\theta}$



Mouvement circulaire retardé



Mouvement circulaire uniforme



Mouvement circulaire accéléré

• Résultats pour le mouvement circulaire uniforme

$\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{e_r}$

$\overrightarrow{v(t)} = \overrightarrow{v_0} = R\,\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$

Ainsi pour le mouvement circulaire uniforme $\omega = \dot{\theta} = \frac{v_0}{R} = \omega_0$ la vitesse angulaire est constante

$\overrightarrow{a(t)} = -r\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{e_r} = -R\omega_0^2\overrightarrow{e_r} = -\frac{v_0^2}{R}\overrightarrow{e_r}$

M1: CINEMATIQUE NEWTONIENNE DU POINT