Devoir à la maison n° 13

À rendre le 1er mars

I. Théorème de Darboux.

À la fin du XIXe siècle, les mathématiciens ont démontré que toute fonction continue vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. Beaucoup conjecturent que la réciproque est vraie. Cependant, en 1875, Gaston Darboux, dans son *Mémoire sur les fonctions discontinues* montre que cela est faux. Il introduit notamment la fonction φ, définie par $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(y) = y^2 \sin \dfrac{1}{y}$ pour $y \neq 0$.

1) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Étudier la continuité de φ'.

3) Montrer que φ' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$, pour tout m compris entre $\varphi'(a)$ et $\varphi'(b)$, il existe $c \in [a, b]$ vérifiant $\varphi'(c) = m$.

4) Le cas de φ' est-il isolé ou se généralise-t-il au cas de toutes les dérivées ? Pour étudier la question, considérons $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application quelconque dérivable.

- **a)** Montrer que si $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$, alors f ne peut admettre de minimum en a ni en b.
- **b)** En déduire que, dans ce cas, f' s'annule en un point c appartenant à $]a, b[$.
- **c)** En supposant seulement $f'(a) < f'(b)$, montrer que pour tout $m \in]f'(a), f'(b)[$, il existe $c \in]a, b[$ vérifiant $f'(c) = m$.
- **d)** Montrer le théorème de Darboux : pour tout m compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$, il existe $c \in [a, b]$ vérifiant $f'(c) = m$ (sans supposer $f'(a) < f'(b)$).

Note : Darboux exhibe alors une fonction qui est une dérivée mais n'est continue en aucun rationnel. Il s'agit donc d'une application discontinue en une infinité dense de points mais vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires ! Depuis, les applications vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires sont appelées fonctions de Darboux. Un résultat étonnant sur ces fonctions est que toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme somme de deux fonctions de Darboux.

II. Un petit exercice.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé, à racines simples, soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $P' + aP$ est scindé, à racines simples.
Indication : on pourra, au choix :

- étudier la fonction $x \mapsto \dfrac{P'(x)}{P(x)}$;
- étudier la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{ax} P(x)$.

— FIN —