# Devoir surveillé n° 4 - Remarques

## Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 32 points, ramené sur 5 points.
- Problèmes : exercice de TD sur 6 points, chaque question sur 4 points, total sur 106 points, ramené sur 15 points.

## Statistiques descriptives.

| | Calculs | Problème | Note finale |
|---|---|---|---|
| Note maximale | 28 | 70 | 19 |
| Note minimale | 4 | 6 | 3 |
| Moyenne | $\approx 20,51$ | $\approx 31,85$ | $\approx 10,24$ |
| Écart-type | $\approx 5,32$ | $\approx 18,86$ | $\approx 4,33$ |

## Remarques générales.

Les résultats non encadrés n'ont pas été pris en compte, mais cela est très peu arrivé.
La rédaction demeure tout à fait bonne dans l'ensemble, même si beaucoup oublient encore d'introduire leurs variables.
Les exercices II et III nécessitaient de la rigueur, et une bonne manipulation des quantificateurs : il y a globalement des progrès à faire sur ce point.
Les « $\forall n \in \mathbb{N}$ » dans les hypothèses de récurrence ont fait leur grand retour : ce n'est pas normal. Vous devez tous être irréprochables sur la rédaction des récurrences, vous en aurez encore une palanquée à rédiger avant la fin de votre prépa, y compris aux concours.

## I. Un exercice vu en TD.

Très bien traité dans l'ensemble, sauf peut-être la partie $n < 0$, qui manquait souvent de précisions.
Il est inutile de détailler le cas $n = 2$ avant d'attaquer la récurrence.

## II. Limites supérieure et inférieure.

**1.** Vous avez souvent bien deviné ce que valaient ces ensembles, mais rarement donné d'explications.
Attention : dans l'écriture $\bigcap_{p \leqslant n} X_p$, $n$ est un entier qui doit être introduit avant, et $p$ est l'indice. Donc cet ensemble ne dépend pas de $p$ ! De même, liminf et limsup sont des ensembles, qui ne dépendent ni de $n$ ni de $p$.
N'écrivez pas $[\![0, +\infty[\![$ : cet ensemble est $\mathbb{N}$ !

**2.** Les descriptions « en français » sont souvent des paraphrases de la phrase quantifiée. Ce qui n'a pas d'utilité.

**3.** Plutôt bien traité, sans piège.

**4.a.** Ne pouvait pas se faire par équivalences : on ne peut pas passer de « $\exists p \geqslant n$, $x \in \bigcap_{p \leqslant n} X_p$ et $\exists p \geqslant n$, $x \in \bigcap_{p \leqslant n} X_p$ » à « $\exists p \geqslant n$, $x \in \bigcap_{p \leqslant n} X_p \cap Y_p$ » sans détailler. Il n'y a en effet aucune raison que ce soit le même $p$ qui convienne dans les deux cas.

**4.** Beaucoup ont affirmé que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \cap B_n = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right)$, soi-disant par distributivité. Déjà, le cours ne contient aucun résultat qui impliquerait cela. Ensuite, sans même prendre $\mathbb{N}$ comme ensemble d'indices, on voit déjà qu'en général $(A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2) \neq (A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2)$. Et on voit aussi que même si cela était une égalité, ce ne serait pas un résultat de distributivité.

## III. Une construction du logarithme.

**1.** Lisez bien l'énoncé : la suite est définie sur $\mathbb{Z}$. Il était vraiment éxagéré de faire cela par récurrence : on veut $a_{n+1} > a_n$, cela se fait directement, pourquoi donc une récurrence ? ? ?
Attention : $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ne prouve rien. Par exemple, si $u_n = -n$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ et pourtant la suite est strictement décroissante. En général, c'est une très mauvaise idée d'étudier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour la monotonie : cela pose des problèmes de signe, alors qu'il est extrêmement rare que l'étude de $u_{n+1} - u_n$ soit moins efficace que celle du quotient.

**3.** Dire qu'elle est croissante, minorée par 1 à partir du rang 0 etc, était évident et sans intérêt, et n'utilisait même pas la question précédente. On voulait tirer de la question précédente que $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.
On ne pouvait pas dire que la suite $(a^n)$ était minorée par $1 + n(a-1)$ : ce dernier terme n'est pas une constante.

**4.** Un exemple flagrant de mauvaise compréhension des quantificateurs : on demandait « $\forall z$, $\exists p$ tq blablabla », et beaucoup ont montré « $\forall p$, $\exists z$ tq blablabla ».

**6.** Ce résultat se démontrait par récurrence : les rédactions avec des petits points et des « $\times \ldots \times$ $p$ fois » ne sont en général pas acceptées, et sont à éviter.

**8.** Vous ne pouviez pas utiliser de but en blanc un $\frac{m}{n} \in A_x$, puisqu'il fallait d'abord commencer par montrer que $m$ existait.

**10.** Là encore, attention aux quantificateurs : dire qu'il existe $m, n$ tels que $\frac{m}{n} \leqslant f(x)$ ne permet pas de dire que $f(x)$ majore $A_x$.

**12.** Le résultat de la question 8 a été obtenu dans l'analyse, donc en supposant que $f$ était solution : on ne pouvait en aucun cas le réutiliser ici.

Pour combler le vide, une blague de geek que vous pourrez raconter à votre prof d'anglais :