Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 point, total sur 30 points, ramené sur 5 points, +5%.
- Problème et exercice de TD : chaque question sur 4 points, total sur 72 points, ramené sur 15 points, +70%.

Statistiques descriptives.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \min\left(\frac{1}{10}\lceil 10x \rceil\,;20\right)$.

	Calculs	Problème	Note finale
Transformation	c	p	$\varphi\left(1,05\frac{5c}{30}+1,7\frac{15p}{72}\right)$
Note maximale	30	69	20+
Note minimale	6	10	5
Moyenne	$\approx 14,80$	$\approx 21,74$	$\approx 10,11$
Écart-type	$\approx 5,60$	$\approx 10,20$	$\approx 3,23$
Premier quartile	10	15,5	7,9
Médiane	14	19,75	9,9
Troisième quartile	17	23,25	11,7

Remarques générales.

• Vous devez encadrer la réponse directe à la question qui vous est posée, et non pas, comme je l'ai vu souvent, la dernière étape d'un calcul ou d'une équivalence.
• Certains introduisent les objets manipulés de la manière suivante : « Soit $z \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $z = x + iy$ ». Ceci signifie $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $z = x + iy$: c'est faux ! Il convient d'écrire « Soit $z \in \mathbb{C}$, il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $z = x + iy$ » ou « Soit $z \in \mathbb{C}$, on pose $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$ ». C'est exactement la même chose avec « Soit $z \in \mathbb{U}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $z = \mathrm{e}^{i\theta}$ ».
• Lorsque vous utilisez un résultat obtenu à une question précédente, vous devez le faire explicitement. Par exemple, dans la question **6a)**, vous pouviez dire « D'après le résultat obtenu en **5b)**, on a [...] ». De même, vous devez nommer les résultats de cours que vous utilisez (sinon, cela compte comme une réponse non justifiée).
• Notez bien que toutes vos affirmations doivent être justifiées, et toutes vos transitions doivent être claires. Ce n'est pas au correcteur de vérifier à votre place si ce que vous affirmez est juste !
• Deux lignes d'un même calcul ou raisonnement ne doivent pas se suivre sans lien logique (le plus souvent, « donc » ou « si et seulement si »). Sinon, ces phrases ne sont pas reliées et ce que vous écrivez n'a aucune valeur : comment savoir si vous montrez une condition nécessaire ou suffisante ? procédez à une phase d'analyse ou de synthèse ? De manière générale, mieux vaut être prudent. Pour la résolution d'une équation, procédez avec des « donc » (phase d'analyse ou condition nécessaire) et vérifiez à la fin que les objets trouvés conviennent (phase de synthèse ou condition suffisante). Vous procéderez par équivalences une fois que vous aurez pris plus d'assurance.
• Certains écrivent systématiquement les nombres complexes qu'ils introduisent sous forme algébrique, ce qui rend leurs calculs inutilement lourds. De manière générale, n'introduisez une telle forme ou notation que si vous y êtes contraints.
• Comparer deux nombres complexes est une ☠HORREUR☠ si vous n'avez pas montré préalablement qu'ils sont réels.
• Si $z \in \mathbb{C}$, alors $z\bar{z} = |z|^2$ et non $|z|$.
• Je vous interdit d'utiliser la locution « par identification ». Par prudence, n'utilisez pas le verbe « identifier ». De plus, on identifie toujours deux objets, en utilisant une propriété d'unicité. Par exemple, si deux nombres complexes sont égaux, alors leurs parties réelles sont égales (de même avec leurs parties imaginaires). On utilise une propriété d'unicité vue en cours. Si vous voulez le justifier, on préférera dire « par unicité de la partie réelle d'un nombre complexe » plutôt que « en identifiant leurs parties réelles » et surtout pas « par identification ».
• Certains gagneraient à comprendre que l'objectif n'est pas de répondre coûte que coûte aux questions, mais de donner des réponses dont vous vous êtes assurés. Sinon, cela ne peut que vous desservir : le correcteur aura une impression très négative de vous et ne vous passera plus rien. Mieux vaut ne pas répondre à une question plutôt que d'affabuler un résultat ou de tenter une arnaque.

I – Exercice vu en TD

Vous ne pouvez diviser par z^3 ou par $\bar{z}$ (après avoir écrit z sous la forme $\rho e^{i\theta}$, par exemple) qu'après avoir spécifié que $z \neq 0$. Il est donc essentiel d'étudier le cas $z = 0$ (solution évidente) auparavant.
De même, écrire $\arg(z)$ est illicite si vous n'avez pas spécifié $z \neq 0$.
Il est très maladroit de commencer par écrire « Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\bar{z} = z^3$ », puis de procéder par équivalences. La manière dont z est introduit invalide en effet les équivalences suivantes : vous ne travaillez que sur les solutions de l'équation et procédez donc à une phase d'analyse. Il convient donc de procéder ensuite à une phase de synthèse, *i.e.* de vérifier que tous les complexes trouvés sont effectivement solution. Pour palier cela, il suffit juste d'écrire « Soit $z \in \mathbb{C}$ ».

II – Problème

1a) Attention à bien spécifier $z \neq 1$, sinon vous effectuez une division par 0.
Vous pouviez faire intervenir la fonction cotan, mais pas la fonction tan : $h(e^{i\theta}) = \text{cotan}(\theta/2)$ et non $h(e^{i\theta}) = \tan^{-1}(\theta/2)$ (prenez par exemple $\theta = \pi$).

1b) Avec $z \in \mathscr{D}$, $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $z = x + iy$, une fois écrit $\text{Im}(h(z)) = \dfrac{1-(x^2+y^2)}{(x-1)^2+y^2}$, vous ne pouvez pas dire que $(x-1)^2$ et y^2 sont strictement positifs (prenez par exemple $z = 0$). Vous pouvez dire qu'ils sont positifs, et que $(x-1)^2 + y^2 = 0$ si et seulement si $z = 1$, donc $(x-1)^2 + y^2 > 0$.
Dire que le signe de $\dfrac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$ *dépend* de celui de $1 - |z|^2$ est imprécis : est-ce le même ou son opposé ?
Ne développez pas $|1-z|^2$ (en $1 - z - \bar{z} + |z|^2$ ou autre). Certains l'ont fait ... et n'ont pas su ensuite montrer que cette quantité est positive. Quel dommage ! De manière générale, ne procédez à une transformation (développement, factorisation *etc.*) que si une raison (réelle) vous-y pousse. Sinon, conservez les objets sous leur forme initiale.

1c) Ceux qui ont écrit que i (ou $-i$) est racine évidente de l'équation $h(z) = z$ n'ont pas vu que cela est incohérent avec le résultat de la question **1a)** : $i \in \mathbb{U}$, donc $h(i) \in \mathbb{R}$, donc $h(i) \neq i$.
Écrire $\sqrt{i}$ (ou équivalent) est une ☠HORREUR☠ et confère immédiatement à l'impétrant la note de 0 pour cette question.
$i\sqrt{6}$ n'est pas une racine carrée de $-6i$: $(i\sqrt{6})^2 = -6$. Vérifiez toujours vos calculs quand c'est possible (c'est largement le cas ici), surtout quand vous donnez une solution « de tête ».

2) Écrire $g(z) = \dfrac{z-i}{z+i} \Leftrightarrow |g(z)| = \left|\dfrac{z-i}{z+i}\right|$ est une erreur préoccupante, car $\Leftarrow$ est grossièrement fausse. N'utilisez pas $\Leftrightarrow$ à la place de « donc ».

2a) Si $z \in \mathbb{R}$, on a $|z+i|^2 = z^2 + 1^2$ et non $|z+i|^2 = z^2 + i^2$ (c'est incohérent, prenez par exemple $z = 0$).

3) Vous ne pouviez pas appeler les éléments de $\mathbb{U}$ « $e^{i\theta}$ », car la variable θ est déjà utilisée. Ceux qui ont fait cela ont cru montrer que $\forall z \in \mathbb{U}$, $h(z) = 1$: c'est faux !

4a) N'oubliez pas de montrer que h est une homographie !
Écrire $|z| = 1$ donc $\bar{\alpha}z + 1 \neq 0$ est insuffisant, vous devez donner plus d'explications.

4b) Vous ne pouvez pas écrire $|z + \alpha| = |z| + |\alpha|$ en toute impunité ...

5a) Si $z \in \mathbb{C}$, la partie réelle de z se note $\text{Re}(z)$ et non ... $\cos(z)$, qui n'a aucun sens (pour l'instant).

5b) Si $b \in \mathbb{C}$, alors $\text{Re}(be^{-i\theta}) \neq b\cos(-\theta)$: b n'est pas réel ...
Obtenir que $a = -2\,\text{Re}(be^{-i\theta})$ n'apporte pas de contradiction : un réel est bien un nombre complexe ...

6) Les variables a et b ne sont pas les mêmes que dans la question **5)**.

6e-f) Dire que comme $(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0$, alors $|a| = |c|$ ou $|a| = |d|$, donc que $|a| = |c|$ est possible est peu intéressant ... Vous devez aller plus loin dans votre analyse et montrer soit que cela donne une forme de h compatible avec les formes étudiées en **3)** et **4)**, soit que cela contredit une hypothèse de l'énoncé ou un résultat obtenu auparavant.