

## **II Un peu de calcul**

12 juillet 2019

## 1. Le symbole somme : $\Sigma$

### Définition 1.0.1.

Soit  $m, n \in \mathbb{Z}$  tels que  $m \leq n$ . Soit  $z_m, \dots, z_n$  des nombres complexes. Leur somme est notée

$$\sum_{k=m}^n z_k,$$

c'est le nombre complexe que l'on peut noter de manière abusive

$$z_m + z_{m+1} + z_{m+2} + \dots + z_n.$$

Par convention, si  $m > n$ , on posera  $\sum_{k=m}^n z_k = 0$ .

### Exemple 1.0.2.

$$\sum_{k=1}^4 k^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30.$$

### Remarque 1.0.3.

Dans une expression du type  $\sum_{k=m}^n f(k)$ , on dit que la variable  $k$  est *muette*. En effet, on peut remplacer la lettre  $k$  par un autre nom de variable non encore utilisé, sans changer le sens de l'expression.

Ainsi  $\sum_{k=m}^n f(k)$ ,  $\sum_{i=m}^n f(i)$  et  $\sum_{\text{Brandon}=m}^n f(\text{Brandon})$  sont synonymes. Par contre on ne peut pas écrire  $\sum_{m=m}^n f(m)$ ,  $\sum_{n=m}^n f(n)$  ou  $\sum_{f=m}^n f(f)$ , qui n'ont aucun sens.

On essaiera bien entendu de garder des notations cohérentes avec le contexte ... et raisonnables.

Les règles de manipulations vues au collège sont bien entendu valides ici.

### Proposition 1.0.4 (Linéarité de la somme).

Soit  $a_m, \dots, a_n, b_m, \dots, b_n$  des nombres complexes, soit  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ . Alors

$$\sum_{k=m}^n (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=m}^n a_k + \mu \sum_{k=m}^n b_k.$$

### Démonstration.

On le montre par récurrence sur  $n$ , après avoir fixé  $m$ .  $\square$

Il est important de savoir manipuler des sommes écrites avec le symbole  $\Sigma$ . Pour cela, nous utiliserons principalement les deux outils suivants.

Le premier consiste à observer que la somme

$$z_{m+1} + z_{m+2} + z_{m+3} + \dots + z_n + z_{n+1}$$

peut s'écrire comme

$$z_{m+1} + z_{(m+1)+1} + z_{(m+2)+1} + \dots + z_{(n-1)+1} + z_{n+1}.$$

### Proposition 1.0.5 (Décalage d'indice).

Soit  $n, m \in \mathbb{Z}$ , tels que  $m \leq n$ , soit  $z_m, \dots, z_{n+1}$  des nombres complexes. On a

$$\sum_{k=m}^n z_{k+1} = \sum_{k=m+1}^{n+1} z_k.$$

### Démonstration.

On le montre par récurrence sur  $n$ , en ayant fixé un entier  $m$ .

Si  $n = m$ , alors

$$\sum_{k=m}^n z_{k+1} = z_{m+1} = \sum_{k=m+1}^{n+1} z_k.$$

Soit un entier  $n \geq m$ , supposons que l'identité soit vraie au rang  $n$ . Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n+1} z_{k+1} &= \left( \sum_{k=m}^n z_{k+1} \right) + z_{n+1+1} \\ &= \left( \sum_{k=m+1}^{n+1} z_k \right) + z_{n+2} \\ &= \sum_{k=m+1}^{n+2} z_k. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang  $n+1$  et l'on peut conclure par récurrence.  $\square$

### Exercice 1.0.6.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , écrire comme une somme partant de l'indice 0 :

$$\sum_{k=2}^{n+1} k^2.$$

Le second outil consiste à remarquer que la somme

$$z_0 + z_1 + \cdots + z_{n-1} + z_n$$

peut s'écrire

$$z_{n-0} + z_{n-1} + \cdots + z_{n-(n-1)} + z_{n-n}.$$

**Proposition 1.0.7** (Renversement d'indices).

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $z_0, \dots, z_n$  des nombres complexes.

On a

$$\sum_{k=0}^n z_k = \sum_{k=0}^n z_{n-k}$$

et

$$\sum_{k=1}^n z_k = \sum_{k=0}^{n-1} z_{n-k}.$$

**Démonstration.**

On montre la première par récurrence sur  $n$ .

Si  $n = 0$ , alors

$$\sum_{k=0}^n z_k = z_0 = z_{n-0} = \sum_{k=0}^n z_{n-k}.$$

Soit un entier naturel  $n$ , supposons que l'identité soit vraie au rang  $n$ . Alors, en effectuant un décalage d'indice pour passer de la troisième à la quatrième ligne,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} z_k &= \left( \sum_{k=0}^n z_k \right) + z_{n+1} \\ &= \left( \sum_{k=0}^n z_{n-k} \right) + z_{n+1} \\ &= \left( \sum_{k=0}^n z_{n+1-(k+1)} \right) + z_{n+1} \\ &= \left( \sum_{k=1}^{n+1} z_{n+1-k} \right) + z_{n+1-0} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} z_{n+1-k}. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang  $n + 1$  et l'on peut conclure par récurrence.

La seconde identité se déduit immédiatement de celle-là avec un décalage d'indice.  $\square$

**Exemple 1.0.8.**

$$\sum_{i=3}^6 i^2 = \sum_{i=2}^5 (i+1)^2 = \sum_{i=0}^3 (i+3)^2 = \sum_{i=0}^3 (6-i)^2.$$

Le résultat suivant est fondamental. Savoir repérer une somme télescopique et la simplifier (ou, réciproquement, faire apparaître une somme télescopique à la place de la différence de deux termes) est un *savoir faire* important.

**Théorème 1.0.9** (Simplification télescopique).

Soit  $z_m, \dots, z_{n+1}$  des nombres complexes. Alors :

$$\sum_{k=m}^n (z_{k+1} - z_k) = z_{n+1} - z_m.$$

**Remarque 1.0.10.**

Ceci est l'analogue discret du résultat d'intégration  $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$ , pour les fonctions  $f$  éligibles.

**Démonstration.**

Commencer par écrire la somme « à la main » avec des « petits points » pour voir les simplifications apparaître.

Ensuite, par changement d'indice :

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n (z_{k+1} - z_k) &= \sum_{k=m}^n z_{k+1} - \sum_{k=m}^n z_k \\ &= \sum_{k=m+1}^{n+1} z_k - \sum_{k=m}^n z_k \\ &= z_{n+1} - z_m. \end{aligned}$$

$\square$

**Remarque 1.0.11.**

La dernière égalité se comprend intuitivement, on peut la montrer formellement par récurrence sur  $n$ .

**Exemple 1.0.12.**

Calculer la somme  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$  en utilisant  $1 = k + 1 - k$ .

**Définition 1.0.13** (Somme double).

Soit  $(z_{k,\ell})_{m \leq k \leq n, p \leq \ell \leq q}$  la donnée de  $(n+1-m)(q+1-p)$  nombres complexes.

$1 - p)$  nombres complexes, que l'on peut représenter dans le tableau suivant :

$$\begin{pmatrix} z_{m,p} & \cdots & z_{m,q} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n,p} & \cdots & z_{n,q} \end{pmatrix}.$$

Leur somme est notée

$$\sum_{m \leq k \leq n, p \leq \ell \leq q} z_{k\ell}.$$

**Exemple 1.0.14.**

Le nombre  $\sum_{1 \leq i \leq 3, 4 \leq j \leq 5} i^2 j$  est la somme des éléments du tableau

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 16 & 20 \\ 36 & 45 \end{pmatrix}$$

et vaut donc 126.

**Remarque 1.0.15.**

Par décalage d'indice, cette somme vaut  $\sum_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 2} i^2(3 + j)$ .

On essaiera toujours d'écrire des sommes partant de 0 ou de 1.

La plus souvent, nous sommerons des nombres sur des tableaux carrés. Dans ce cas, nous utiliserons des notations plus légères.

**Définition 1.0.16** (Somme double sur un tableau carré).

Soit  $(z_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n}$  la donnée de  $n^2$  nombres complexes, que l'on peut représenter dans le tableau suivant :

$$\begin{pmatrix} z_{1,1} & \cdots & z_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n,1} & \cdots & z_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Leur somme est notée

$$\sum_{1 \leq k, \ell \leq n} z_{k,\ell}.$$

La somme des éléments de ce tableau situés *au dessus* de sa diagonale, diagonale comprise, est notée

$$\sum_{1 \leq k \leq \ell \leq n} z_{k,\ell}.$$

La somme des éléments de ce tableau situés *strictement au dessus* de sa diagonale, est notée

$$\sum_{1 \leq k < \ell \leq n} z_{k,\ell}.$$

La somme des éléments de ce tableau situés *en dessous* de sa diagonale, diagonale comprise, est notée

$$\sum_{1 \leq \ell \leq k \leq n} z_{k,\ell}.$$

La somme des éléments de ce tableau situés *strictement en dessous* de sa diagonale, est notée

$$\sum_{1 \leq \ell < k \leq n} z_{k,\ell}.$$

**Remarque 1.0.17.**

Il est important de se rappeler que les coefficients d'indice  $(i, j)$  d'un tel tableau :

- sont sur la diagonale si et seulement si  $i = j$  ;
- sont strictement au dessus de la diagonale si et seulement si  $i < j$  ;
- sont strictement au dessous de la diagonale si et seulement si  $j < i$ .

On pourra par exemple décomposer la somme des éléments d'un tel tableau sur ces trois parties :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} z_{i,j} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} z_{i,j} + \sum_{i=1}^n z_{i,i} + \sum_{1 \leq j < i \leq n} z_{i,j}.$$

**Théorème 1.0.18** (Sommes doubles et permutation des  $\Sigma$ ).

Soit  $(z_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  une famille de nombres complexes. Alors :

$$1. \quad \sum_{1 \leq i, j \leq n} z_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n z_{ij}.$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} z_{ij} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n z_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j z_{ij}. \\
 3. \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} z_{ij} &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n z_{ij} = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} z_{ij}.
 \end{aligned}$$

**Démonstration.**

Cela revient, à chaque fois, à sommer les éléments du tableau ligne par ligne ou colonne par colonne.  $\square$

**Remarque 1.0.19.**

Par convention, une somme vide est nulle. On peut donc écrire :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} z_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n z_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} z_{ij}.$$

Les définitions précédentes peuvent bien entendu se généraliser comme suit.

**Définition 1.0.20.**

Soient  $I$  un ensemble **fini** et  $(z_i)_{i \in I}$  une famille de nombres complexes indexée par  $I$  (c'est-à-dire il existe une application  $z : I \rightarrow \mathbb{C}$  et on note  $z_i = z(i)$ ). La somme des  $z_i$ ,  $i$  parcourant l'ensemble  $I$ , est notée  $\sum_{i \in I} z_i$ .

Dans le cas où  $I = \llbracket m, n \rrbracket$ , où  $m, n \in \mathbb{Z}$  sont tels que  $m \leq n$ , on la note plus couramment  $\sum_{k=m}^n z_k$  ou  $\sum_{m \leq k \leq n} z_k$ . Elle vaut  $z_m + z_{m+1} + z_{m+2} + \dots + z_n$ .

Dans le cas où  $I = \llbracket m, n \rrbracket \times \llbracket p, q \rrbracket$  où  $m, n, p$  et  $q \in \mathbb{Z}$  sont tels que  $m \leq n$  et  $p \leq q$ , on la note plus couramment  $\sum_{m \leq k \leq n, p \leq \ell \leq q} z_{k\ell}$ .

**Remarque 1.0.21.**

On pourrait formellement définir ces symboles par récurrence sur le nombre d'objets sommés.

## 2. Le symbole produit : $\prod$

Le symbole  $\prod$  est au produit ce que le symbole  $\sum$  est à la somme.

**Définition 2.0.1.**

Soient  $I$  un ensemble **fini** et  $(z_i)_{i \in I}$  une famille de nombres complexes indexée par  $I$ . Le produit des  $z_i$ ,  $i$  parcourant l'ensemble  $I$ , est noté  $\prod_{i \in I} z_i$ .

**Remarque 2.0.2.**

Par convention, un produit vide vaut 1.

**Définition 2.0.3 (Factorielle).**

Pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  (noté aussi  $\mathbb{N}^\times$  ou  $\mathbb{N}^*$ ), on appelle *factorielle*  $n$ , notée  $n!$  le nombre

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times 3 \dots \times n.$$

Par convention,  $0! = 1$ .

**Exemple 2.0.4.**

Il est bon de connaître les 5 ou 6 premières factorielles :  $0! = 1$ ,  $1! = 1$ ,  $2! = 2$ ,  $3! = 6$ ,  $4! = 24$ ,  $5! = 120$  et  $6! = 720$ .

Les nombres factoriels vérifient la relation de récurrence suivante.

**Proposition 2.0.5.**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(n+1)! = (n+1) \times n!$ .

**Démonstration.**

Immédiat.  $\square$

**Théorème 2.0.6 (Simplification télescopique).**

Soit  $(z_k)_{m \leq k \leq n+1}$  une famille de nombres complexes non nuls. Alors :  $\prod_{k=m}^n \frac{z_{k+1}}{z_k} = \frac{z_{n+1}}{z_m}$ .

Il y a pour les produits l'exact analogue du théorème 1.0.18 pour les sommes, et la démonstration est elle aussi analogue.



En général on ne peut pas permuter les  $\Sigma$  et les  $\Pi$ . Par exemple, calculer  $\sum_{i=1}^3 \prod_{j=1}^2 1$  et

$$\prod_{j=1}^2 \sum_{i=1}^3 1.$$

**Remarque 2.0.7.**

### 3. Quelques formules à connaître

#### Théorème 3.0.1.

Soit  $n$  un entier naturel. Alors

1.  $\sum_{k=0}^n 1 = n + 1$  ;
2.  $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$  ;
3.  $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

#### Démonstration.

Les trois se démontrent facilement par récurrence. Par curiosité et pour s'entraîner, voici deux autres démonstrations :

2. On note  $S_n = \sum_{k=0}^n k$ . On fait un changement d'indice :

$$S_n = \sum_{k=0}^n (n-k) \text{ et on développe : } S_n = \sum_{k=0}^n n -$$

$$\sum_{k=0}^n k = n(n+1) - S_n, \text{ d'où } 2S_n = n(n+1).$$

3. On note  $S'_n = \sum_{k=0}^n k^2$ . Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on a :

$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ . On somme tout ça de 0 à  $n$ , et on obtient, après simplification télescopique du membre de gauche :  $(n+1)^3 = 3S'_n + 3\frac{n(n+1)}{2} + n + 1$ . Ça se simplifie pour donner le résultat voulu.  $\square$

#### Remarque 3.0.2.

On pourrait montrer de la même manière que si  $a, b \in \mathbb{Z}$  tels que  $a \leq b$ , alors  $\sum_{k=a}^b k =$

$\frac{(b-a+1)(a+b)}{2}$ . En effet, le double de cette somme correspond bien au nombre de termes de la somme, fois la somme du plus petit et du plus grand élément.

On pourrait aussi calculer de la manière suivante :

$$\sum_{k=a}^b k = \frac{(b-a+1)(a+b)}{2} = \sum_{k=0}^b k - \sum_{k=0}^{a-1} k.$$

#### Remarque 3.0.3.

Si  $p \in \mathbb{N}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on calcule aisément

$$\int_1^n t^p dt = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1}.$$

Dans les cas traités ici ( $0 \leq p \leq 2$ ), on retrouve le même terme dominant que dans  $\sum_{k=1}^n k^p : \frac{n^{p+1}}{p+1}$ .

On généralisera cela un peu plus tard dans l'année.

#### Définition 3.0.4 (Coefficients binomiaux).

Soit  $(n, k) \in \mathbb{N}^2$  tels que  $k \leq n$ . On appelle *coefficient binomial*, aussi lu «  $k$  parmi  $n$  », le réel noté  $\binom{n}{k}$  valant  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

On étend cette définition à tout  $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$  en posant  $\binom{n}{k} = 0$  pour  $k > n$  ou  $k < 0$ .

#### Remarque 3.0.5.

On utilisera souvent :

$$\binom{n}{k} = \frac{\prod_{i=n-k+1}^n i}{\prod_{j=1}^k j} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times \cdots \times 1}.$$

#### Théorème 3.0.6 (Formule du triangle de Pascal).

Soit  $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$ . Alors

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

**Démonstration.**

Se fait par un calcul direct.  $\square$

**Remarque 3.0.7.**

Cette formule permet de calculer par récurrence tous les coefficients binomiaux, en les représentant par exemple dans le triangle de Pascal.

**Corollaire 3.0.8.**

Soit  $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ ,  $\binom{n}{k}$  est un entier.

**Démonstration.**

La démonstration se fait par récurrence sur  $n$ , avec l'hypothèse : «  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\binom{n}{k}$  est un entier », en utilisant la formule de Pascal pour l'hérédité.  $\square$

**Théorème 3.0.9.**

Sur un arbre représentant les répétitions d'une même expérience aléatoire, le coefficient binomial  $k$  parmi  $n$  compte le nombre de chemins réalisant  $k$  succès pour  $n$  répétitions. En particulier, c'est un entier.

La figure 1 illustre le calcul de ces coefficients pour 4 répétitions.

**Démonstration.**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons  $H_n$  la proposition : « pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , il y a  $\binom{n}{k}$  chemins réalisant  $k$  succès pour  $n$  répétitions. »

- $H_1$  est évidente ;
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  vérifiant  $H_n$ . Montrons  $H_{n+1}$ .

Soit  $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$ . Montrons qu'il y a  $\binom{n+1}{k}$  chemins réalisant  $k$  succès pour  $n+1$  répétitions. Il est immédiat qu'il n'y a qu'un chemin réalisant 0 succès pour  $n+1$  répétitions. Or  $\binom{n+1}{0} = 1$ .

De même, il n'y a qu'un chemin réalisant  $n+1$  succès pour  $n+1$  répétitions. Or  $\binom{n+1}{n+1} = 1$ .

Le résultat est donc démontré si  $k = 0$  ou  $k = n+1$ . Supposons donc maintenant  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Comptons le nombre de chemins réalisant  $k$  succès pour  $n+1$  répétitions : pour un tel chemin, regardons le résultat de la dernière répétition. Si c'est un succès, cela signifie que parmi les  $n$  premières répétitions,

$k-1$  succès ont été réalisés ; si c'est un échec, cela signifie que parmi les  $n$  premières répétitions,  $k$  succès ont été réalisés.

Réciproquement, pour tout chemin réalisant  $k-1$  succès pour les  $n$  premières répétitions il y a un chemin réalisant  $k$  succès pour  $n+1$  répétitions dont la dernière répétition est un succès et pour tout chemin réalisant  $k$  succès pour les  $n$  premières répétitions, il y a un chemin réalisant  $k$  succès pour  $n+1$  répétitions dont la dernière répétition est un échec.

Par conséquent, le nombre de chemins réalisant  $k$  succès pour  $n+1$  répétitions est égal au nombre de chemins réalisant  $k$  succès pour  $n$  répétitions plus le nombre de chemins réalisant  $k-1$  succès pour  $n$  répétitions. D'après l'hypothèse de récurrence, le nombre de chemins réalisant  $k$  succès pour  $n+1$  répétitions vaut donc  $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ , ce qui, d'après la formule de Pascal, vaut bien  $\binom{n+1}{k}$ .

Donc on a  $H_{n+1}$ .

On a donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $H_n$ .  $\square$

**Remarque 3.0.10.**

- $\binom{n}{k}$  est aussi égal au nombre de possibilités de choisir  $k$  éléments dans un ensemble de  $n$  éléments.
- Considérons un goban de taille  $n+1$  fois  $n+1$ . On le coupe le long d'une diagonale, et on n'en conserve que la moitié. On pose cette moitié sur une table, le long de sa diagonale, verticalement. On numérote alors de 0 à  $n$  les intersections de cette diagonale, de gauche à droite. Une fourmi ce trouvant en haut, sur le coin opposé à la diagonale, décide de descendre sur la table en suivant les lignes du goban, mais en se dirigeant toujours vers le bas. À chaque intersection de lignes, deux choix s'offrent donc à elle. On peut alors montrer que le nombre de chemins par lesquels la fourmi peut atteindre la  $k$ ème intersection de la diagonale est exactement  $\binom{n}{k}$ .

**Proposition 3.0.11.**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On a  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ .

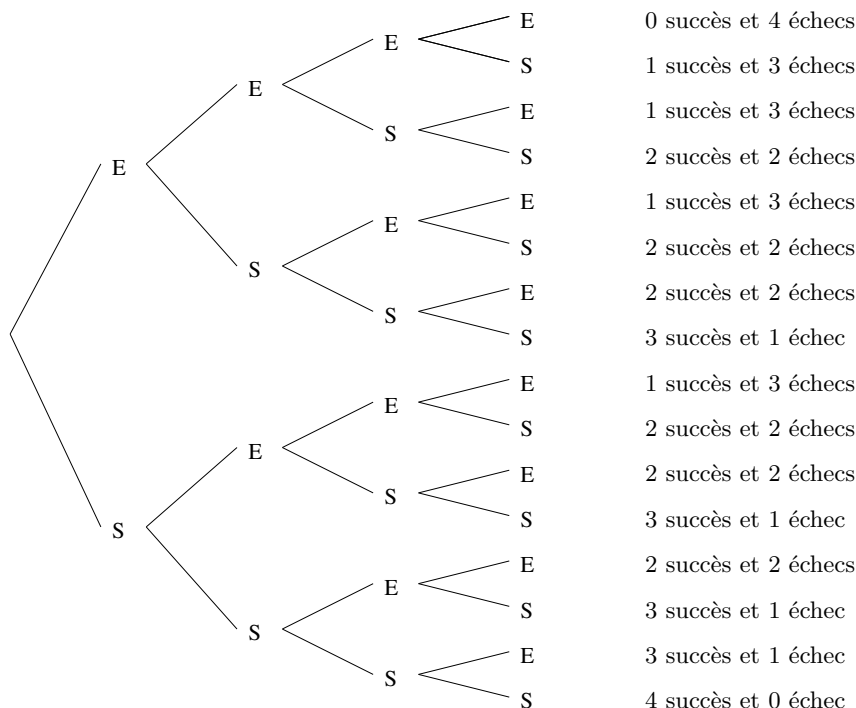


FIGURE 1 – Chemins des succès et échecs pour 4 répétitions d’une expérience

**Démonstration.**

 Remarquer que  $k = n - (n - k) !$ 

□

La formule suivant n’est pas exigible mais est fort utile.

**Proposition 3.0.12.**

 Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $0 < k \leq n$ , alors

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

**Démonstration.**

Facile et laissée en exercice.

□

**Théorème 3.0.13** (Formule du binôme de Newton).

 Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $a, b \in \mathbb{C}$ . On a :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

**Démonstration.**

 On le démontrer par récurrence sur  $n$ , après avoir fixé  $a$  et  $b$ .

 Pour  $n = 0$ , c’est évident :

$$(a + b)^0 = 1 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^0.$$

 Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons la formule du binôme au rang  $n$ . Alors,

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n \\ &= a(a + b)^n + b(a + b)^n \\ &= a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \end{aligned}$$

On écrit alors, avec un décalage d’indice, la première somme

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1-1} a^{k+1} b^{n+1-(k+1)} + a^{n+1} \\ = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} \end{aligned}$$



De même, la seconde somme s'écrit :

$$b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}.$$

On a donc, en utilisant la formule du triangle de Pascal,

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^k b^{n+1-k} \\ &\quad + a^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &\quad + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}. \end{aligned}$$

On peut donc conclure par récurrence.  $\square$

### Corollaire 3.0.14.

Soit  $n > 0$ .  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$  et  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ .

### Théorème 3.0.15.

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $a, b \in \mathbb{C}$ . Alors :

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}.$$

### Démonstration.

On développe, il apparaît une simplification télescopique :

$$\begin{aligned} (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} (a-b) a^k b^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-(k+1)} - a^k b^{n-k} \\ &= a^n - b^n \end{aligned}$$

$\square$

### Corollaire 3.0.16.

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $a, b \in \mathbb{C}$ . Alors,

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a^k b^{2n-k}.$$

### Démonstration.

$a^{2n+1} + b^{2n+1} = a^{2n+1} - (-b)^{2n+1}$  et on utilise le théorème précédent.  $\square$

### Corollaire 3.0.17 (Formule de sommation géométrique).

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $z \in \mathbb{C}$ . Alors,

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \begin{cases} \frac{z^n - 1}{z - 1} & \text{si } z \neq 1 \\ n & \text{si } z = 1 \end{cases}.$$

**Démonstration.** — Si  $z = 1$  : on somme  $n$  fois 1.

— Sinon,  $z^n - 1 = z^n - 1^n = (z-1) \sum_{k=0}^{n-1} z^k 1^{n-1-k} =$

$$(z-1) \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

$\square$

### Remarque 3.0.18.

Si  $p \leq n$  sont deux entiers relatifs, et si  $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^n z^k &= z^p \sum_{k=p}^n z^{k-p} \\ &= z^p \sum_{k=0}^{n-p} z^k \\ &= z^p \times \frac{z^{n-p+1} - 1}{z - 1} \\ &= \frac{z^{n+1} - z^p}{z - 1}. \end{aligned}$$



La formule de sommation géométrique revient très souvent (c'est la formule que nous utiliserons le plus cette année), mais rarement avec les mêmes indice de début et de fin. Il faut donc être extrêmement vigilant quant à ces deux indices et bien penser à factoriser par le premier terme pour revenir à une somme partant de l'indice zéro.

## 4. Calcul matriciel élémentaire

Même si quelques définitions et démonstrations théoriques sont données ici, le seul but de cette

section et de savoir effectuer des opérations élémentaires sur des matrices simples. Le chapitre sur les matrices reprendra tout cela de manière plus poussée, au second semestre, et fera ensuite le lien entre les matrices et les applications linéaires.

$n, m, p, q$  et  $r$  désignent des entiers naturels non nuls, et  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### 4.1. Définitions élémentaires

#### Définition 4.1.1.

On appelle *matrice de taille*  $n \times p$  (ou à  $n$  lignes et  $p$  colonnes), à valeurs (ou coefficients) dans  $\mathbb{K}$ , toute famille de  $np$  éléments de  $\mathbb{K}$ , ces éléments étant notés  $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ , et présentés sous la forme d'un tableau de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

On note  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ , les  $(a_{i,j})$  étant les *coefficients* de la matrice  $A$ ,  $a_{i,j}$  étant le coefficient de la  $i^{\text{e}}$  ligne et de la  $j^{\text{e}}$  colonne.

La matrice  $(a_{i,j})_{1 \leq j \leq n}$  est la  $i^{\text{e}}$  ligne de  $A$ , parfois notée  $a_{i,*}$ .

La matrice  $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq n}$  est la  $j^{\text{e}}$  colonne de  $A$ , parfois notée  $a_{*,j}$ .

#### Remarque 4.1.2.

Le premier indice indique toujours la ligne et le second indice indique toujours la colonne. En général (mais attention quand même), on les note respectivement  $i$  et  $j$ .

#### Exemple 4.1.3.

Donner la matrice  $(i \times j)_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 5}$ .

**Définition 4.1.4.** — L'ensemble des matrices de taille  $n \times p$  est noté  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

- On appelle *matrice carrée d'ordre*  $n$  toute matrice de taille  $n \times n$ . L'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  est noté  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- On appelle *matrice nulle d'ordre*  $n$  la matrice carrée d'ordre  $n$  dont tous les coefficients sont nuls. On la note simplement  $0_n$ , ou  $0$  sans référence à sa taille s'il n'y a pas d'ambiguïté.
- On appelle *matrice identité d'ordre*  $n$  la matrice  $(\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ . On la note  $I_n$ , ou  $\text{Id}_n$ .
- On appelle *matrice diagonale* toute matrice carrée  $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$  telle que pour tous  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$ .
- On appelle *matrice triangulaire supérieure* (resp. *inférieure*) toute matrice carrée  $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$  telle que pour tous  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tels que  $i > j$  (resp.  $i < j$ ),  $a_{ij} = 0$ .

**Remarque 4.1.5.** 1. On note généralement les matrices par des lettres majuscules, et la famille des coefficients par la lettre minuscule correspondante.

2. On identifie les matrices colonnes de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  avec les éléments de  $\mathbb{K}^n$ .
3. On se gardera d'identifier les matrices lignes avec les éléments de  $\mathbb{K}^n$  car on préfère les identifier avec d'autres objets mathématiques (on verra cela plus tard).

### 4.2. Opérations sur les matrices

#### Définition 4.2.1.

Soient  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$  et  $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$  deux matrices de même taille, et  $\lambda \in \mathbb{K}$  un scalaire.

**Addition** On appelle *somme* de  $A$  et  $B$  la matrice  $(a_{ij} + b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ , notée  $A + B$ .

**Produit par un scalaire** On note  $\lambda A$  la matrice  $(\lambda a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ .



Attention aux tailles des matrices : on ne peut additionner n'importe quoi avec n'importe quoi.

**Exemple 4.2.2.**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

**Définition 4.2.3** (Produit matriciel).

Soient  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ . On appelle *produit de A par B* noté  $AB$  la matrice de  $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$  de coefficients  $\left( \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \right)$ .



Gare aux dimensions, on ne peut pas multiplier n'importe quelle matrices.

**Exemple 4.2.4.** — On tâchera d'organiser les produits comme suit :

$$\begin{array}{cc} \text{Dim. OK} & \begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}^B \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}}_A \end{array} \\ & \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 12 \end{pmatrix} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=AB} \end{array} \end{array}$$

— Le produit impossible :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$



Ce produit comporte plein de pièges :

- Il n'est pas commutatif, par exemple :  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Et même pire,  $AB$  peut exister mais pas  $BA$ .

- Le produit de deux matrices non nulles peut valoir la matrice nulle. Exemple :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , alors  $AA = 0$ ,  $AB = 0$  et  $BA \neq 0$ .

- On ne peut pas « simplifier » dans un produit. Ici :  $A \times A = A \times B$  mais  $A \neq B$ .

**Proposition 4.2.5.**

Le produit matriciel est :

**Associatif** : si  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ ,  $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ , alors  $(AB)C$  et  $A(BC)$  sont dans  $\mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$  et sont égales, notées  $ABC$ .

**Bilinéaire** : si  $A, B, C, D$  sont des matrices de taille convenable, et si  $\lambda \in \mathbb{K}$ , alors  $(A + \lambda B)C = AC + \lambda BC$  et  $A(C + \lambda D) = AC + \lambda AD$ .

Les matrices nulles et identité jouent un rôle bien particulier. Si  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $q \in \mathbb{N}^*$ , alors

**Neutre à gauche** :  $I_n A = A$

**Neutre à droite** :  $A I_p = A$

**Mult. par 0 à gauche** :  $0_{q,n} A = 0_{q,p}$

**Mult. par 0 à droite** :  $A 0_{p,q} = 0_{n,q}$

**Démonstration.**

Bien qu'un peu technique, nous donnons ici la démonstration ; nous en verrons plus tard une autre.

1.  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$ ,  $C = (c_{ij})$ . Ainsi,

$$BC = \left( \sum_{k=1}^q b_{ik} c_{kj} \right)_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq r}$$

et

$$A(BC) = \left( \sum_{\ell=1}^p a_{i\ell} \times \left( \sum_{k=1}^q b_{\ell k} c_{kj} \right) \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r}.$$

Or, si  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq r$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^p a_{i\ell} \times \left( \sum_{k=1}^q b_{\ell k} c_{kj} \right) &= \sum_{\ell=1}^p a_{i\ell} \times \sum_{k=1}^q b_{\ell k} c_{kj} \\ &= \sum_{\ell=1}^p \sum_{k=1}^q a_{i\ell} b_{\ell k} c_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^q \sum_{\ell=1}^p a_{i\ell} b_{\ell k} c_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^q \left( \sum_{\ell=1}^p a_{i\ell} b_{\ell k} \right) \times c_{kj}, \end{aligned}$$

qui est le coefficient  $i, j$  de  $(AB)C$ . D'où l'égalité voulue.

2. *idem*

3.  $I_n A = \left( \sum_{k=1}^n \delta_{ik} a_{kj} \right) = (\delta_{ii} a_{ij}) = (a_{ij}) = A$ .

4. Direct.

□

#### Remarque 4.2.6.

Par associativité, il y a 5 manières de calculer  $ABCD$  qui conduisent toutes au même résultat :  $((AB)C)D = (A(BC))D = A((BC)D) = A(B(CD)) = (AB)(CD)$ . Mais le temps de calcul est-il le même dans les 5 cas ? C'est le problème de la *multiplication matricielle enchaînée* (Matrix chain multiplication ou Matrix Chain Ordering Problem (MCOP) en anglais). Plus généralement, le problème est de savoir dans quel ordre effectuer les produits pour calculer le plus efficacement possible un produit de matrices  $M_1.M_2.\dots.M_n$ . Ce problème peut se résoudre par programmation dynamique, ce qui est au programme en option informatique, mais même si ce n'est pas toujours la solution optimale, il vaut mieux commencer par les produits qui font apparaître des « petites » matrices.

Précisément, le produit d'une matrice  $n \times p$  par une matrice  $p \times q$  nécessite de l'ordre de  $n \times p \times q$  opérations. Ainsi, si  $A \in \mathcal{M}_{10,100}(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{100,5}$  et  $C \in \mathcal{M}_{5,50}$ , le calcul de  $(AB)C$  demande de l'ordre de  $(10 \times 100 \times 5) + 10 \times 5 \times 50 = 7\,500$  opérations, alors que celui de  $A(BC)$  en demande de l'ordre de  $100 \times 5 \times 50 + 10 \times 100 \times 50 = 75\,000$ .

### 4.3. Matrices carrées

#### Remarque 4.3.1.

Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices carrées d'ordre  $n$ , alors  $AB$  et  $BA$  sont définies et également de taille  $n$ . On dit que le produit matriciel est une *loi de composition interne* de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

De plus,  $I_n.A = A.I_n = A$ . On dit que  $I_n$  est le *neutre* de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  pour le produit matriciel.

Enfin, la propriété de bilinéarité montrée précédemment montre que  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$  a une structure d'anneau, non commutatif.

#### Remarque 4.3.2.

Soit  $a_1, \dots, a_n$  et  $b_1, \dots, b_n$  des nombres com-

plexes. Alors,

$$\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n b_n \end{pmatrix}$$

#### Définition 4.3.3 (Puissances d'une matrice carrée).

On les définit par récurrence : si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors,  $M^0 = I_n$ ,  $M^1 = M$ , et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $M^{k+1} = M \times M^k$  (on a donc, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $M^k = \underbrace{M \times M \dots \times M}_{k \text{ fois}}$ ). Ainsi pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $M^n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

#### Remarque 4.3.4.

On remarque que les puissances d'une même matrice commutent entre elles :

$$\begin{aligned} M^k \times M^j &= \underbrace{M \times M \dots \times M}_{k \text{ fois}} \times \underbrace{M \times M \dots \times M}_{j \text{ fois}} \\ &= \underbrace{M \times M \dots \times M}_{(k+j) \text{ fois}} \\ &= \underbrace{M \times M \dots \times M}_{j \text{ fois}} \times \underbrace{M \times M \dots \times M}_{k \text{ fois}} \\ &= M^j \times M^k. \end{aligned}$$

#### Théorème 4.3.5 (Formule du binôme de Newton).

Elle est valable pour les matrices *carrées qui commutent*.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in \mathbb{N}$ , soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  vérifiant  $AB = BA$ . Alors,

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

#### Lemme 4.3.6.

Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  vérifiant  $AB = BA$ . Alors, pour tout  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $A^p B^q = B^q A^p$ .

**Démonstration.**

On fixe  $q = 1$  et on montre par récurrence que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $A^p B = BA^p$ .

On fixe alors  $p \in \mathbb{N}$  et on utilise ce que l'on vient de montrer avec  $A^p$  à la place de  $B$  et  $B$  à la place de  $A$ .  $\square$

**Démonstration** (Formule du binôme de Newton).

Reprendre la démonstration du binôme de Newton pour des complexes, en repérant bien à quel endroit le fait que les deux matrices commutent intervient, on utilise alors le lemme 4.3.6.  $\square$

**Exemple 4.3.7.**

Calculer  $A^2$  avec

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= B + C. \end{aligned}$$

Calculer  $A^3$  avec

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= B + C. \end{aligned}$$

**Définition 4.3.8.**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est *inversible* s'il existe une matrice  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $AB = BA = I_n$ .

Dans ce cas  $B$  est unique, est appelée *l'inverse de  $A$*  et est notée  $A^{-1}$ .

On note  $GL_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  inversibles.

**Démonstration** (Unicité).

Soit  $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  deux « inverses » de  $A$ . Alors,

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_n C = C.$$

$\square$

**Remarque 4.3.9.**

Une matrice inversible commute toujours avec son inverse.

**Exercice 4.3.10.**

Montrer que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  étudiée précédemment n'est pas inversible.

**Définition 4.3.11** (Puissances négatives d'une matrice inversible.).

Soit  $A \in GL_n(\mathbb{K})$ , soit  $p \in \mathbb{Z}$ . On définit :

$$A^{-p} = (A^{-1})^p$$

**Proposition 4.3.12.**

Soit  $A \in GL_n(\mathbb{K})$ . Alors, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $A^p$  est inversible et

$$(A^p)^{-1} = A^{-p}.$$

**Démonstration.**

Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Comme  $A$  et  $A^{-1}$  commutent,  $A^p(A^{-1})^p = (AA^{-1})^p = I_n^p = I_n$ , de même de l'autre côté.  $\square$

Enfin, le cas particulier des matrices carrées d'ordre 2 est à connaître sur le bout des doigts.

**Définition 4.3.13.**

Le déterminant d'une matrice *carrée d'ordre 2*  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est  $\det A = ad - bc$ .

**Proposition 4.3.14.**

Une matrice, carrée d'ordre 2, notée  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est  $\det A = ad - bc$  est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Le cas échéant,  $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ .

**Démonstration.**

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , on a toujours (le vérifier par le calcul)

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = 0.$$

Alors, si  $\det A \neq 0$ , avec  $B = \frac{1}{\det A}((a+d)I_2 - A)$ , on a  $AB = BA = I_2$  donc  $A$  est inversible, d'inverse  $B$ .

Réciproquement, si  $\det A = 0$ , alors  $A(A - (a+d)I_2) = 0$ . Si  $A$  est inversible, en multipliant par cet inverse on obtient que  $A$  est diagonale, puis que  $a = 0$  ou que  $d = 0$  ... Dans les deux cas,  $A^2 = 0$  donc  $A$  ne peut être inversible (à vous de réfléchir pourquoi !).  $\square$

## 5. Systèmes linéaires et pivot de Gauss

### 5.1. Définitions

**Définition 5.1.1.**

On appelle *système linéaire à  $n$  équations et  $p$  inconnues* tout système de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

où les  $a_{ij}$  et les  $b_i$  sont dans  $\mathbb{K}$ , et les  $x_i$  sont les inconnues.

On dit que le système est *compatible* s'il admet une solution.

Le *système homogène associé* est le système :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

Dans la suite nous noterons  $S$  le premier système et  $S_H$  son système homogène associé, et nous noterons  $\text{Sol}$  et  $\text{Sol}_H$  leurs ensembles de solutions respectifs.

Le système  $S$  peut aussi s'écrire sous forme matricielle  $AX = B$ , avec  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ ,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

$S_H$  s'écrit alors  $AX = 0$ .

### 5.2. Interprétation géométrique

#### a. Dans le plan

Si  $p = 2$ , chaque ligne du système s'interprète comme l'équation d'une droite dans le plan. Chaque droite  $y$  est en effet représentée par une équation cartésienne. On « sait » de plus que l'intersection de deux droites est

- soit l'ensemble vide (droites parallèles distinctes) ;
- soit une droite (droites confondues) ;
- soit un point (droites non parallèles).

Ainsi, l'ensemble des solutions est soit vide, soit un point, soit représente une droite.

#### b. Dans l'espace

Si  $p = 3$ , chaque ligne du système s'interprète comme l'équation d'un plan dans l'espace. Chaque plan  $y$  est en effet représenté par une équation cartésienne. On « sait » de plus que l'intersection de deux plans est

- soit l'ensemble vide (plans parallèles distincts) ;
- soit un plan (plans confondus) ;
- soit une droite (plans non parallèles).

De plus, on « sait » que l'intersection d'un plan et d'une droite est

- soit l'ensemble vide (droite parallèle au plan, non incluse dedans) ;
- soit une droite (droite incluse dans le plan) ;
- soit un point (droite non parallèle au plan).

Ainsi, l'ensemble des solutions est soit vide, soit un point, soit représente une droite, soit représente un plan.

### 5.3. Structure des solutions

**Théorème 5.3.1.** 1.  $\text{Sol}_H$  contient toujours l'élément  $(0, \dots, 0)$ . S'il n'est pas réduit à cet élément, il est infini.

2. L'ensemble  $\text{Sol}$  est :

- soit vide ;
- soit non vide, et dans ce cas, si  $X_0 = (x_1, \dots, x_p)$  est un élément de  $\text{Sol}$ , alors  $\text{Sol} = \{X_0 + X_H, X_H \in \text{Sol}_H\}$ , ce que l'on note  $\text{Sol}_H + (x_1, \dots, x_p)$ .

Par conséquent,  $\text{Sol}$  contient 0, 1 ou une infinité d'éléments.

#### Démonstration.

On utilise les notations matricielles, le système  $S$  s'écrivant  $S : AX = B$ , avec  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . Le système homogène associé à  $S$  est  $S_H : AX = 0$ . Soit  $X, Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ . On a bien

$$A \times \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc le vecteur nul est solution du système homogène. De plus, si  $X$  et  $Y$  sont solutions de  $S_H$ , alors

$$A(\lambda X + \mu Y) = \lambda AX + \mu AY = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notamment, si  $X$  est une solution de  $S_H$ , tous les vecteurs colinéaires à  $X$  seront aussi solution de  $S_H$ , donc  $S_H$  est infini.

Ensuite, soit  $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$  solution de  $S$ . On a

$$\begin{aligned} X \in \text{Sol} &\Leftrightarrow AX = B \\ &\Leftrightarrow AX = AX_0 \\ &\Leftrightarrow A(X - X_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow X - X_0 \in \text{Sol}_H, \end{aligned}$$

ce qui montre bien que  $\text{Sol} = \{X_0 + X_H \mid X_H \in \text{Sol}_H\}$ .  $\square$

#### Exemple 5.3.2.

On considère le système

$$\begin{cases} x + 3y &= 2 \\ 2y + z &= 1 \end{cases}$$

Le système homogène associé est

$$\begin{cases} x + 3y &= 0 \\ 2y + z &= 0 \end{cases}$$

Si  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , on a

$$\begin{cases} x + 3y &= 0 \\ 2y + z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions homogènes est une droite vectorielle dirigée par le vecteur de coordonnées  $(-3, 1, -2)$ .

De même, si  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , on a

$$\begin{cases} x + 3y &= 2 \\ 2y + z &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions du système est une droite passant par le point de coordonnées  $(2, 0, 1)$  et dirigée par le vecteur de coordonnées  $(-3, 1, -2)$ .

### 5.4. Opérations sur les lignes d'un système

#### Définition 5.4.1.

On dit que deux systèmes linéaires sont *équivalents* s'ils ont le même ensemble de solutions.

Si  $i$  et  $j$  sont deux indices différents compris entre 1 et  $n$ , et  $\lambda$  est un scalaire, on note :

- $L_i \leftrightarrow L_j$  l'opération consistant à échanger les  $i^{\text{ème}}$  et  $j^{\text{ème}}$  lignes du système  $S$  ;
- $L_i \leftarrow \lambda L_i$  l'opération consistant à multiplier par  $\lambda$  la  $i^{\text{ème}}$  ligne du système ;
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$  l'opération consistant à ajouter la  $j^{\text{ème}}$  ligne multipliée par  $\lambda$  à la  $i^{\text{ème}}$  ligne du système.



Il faut effectuer ces opérations sur toute la ligne du système sans oublier le membre de droite.

#### Exemple 5.4.2.

Donner des exemples.

**Théorème 5.4.3.**

- Le système obtenu à partir de  $S$  après avoir effectué une opération  $L_i \leftrightarrow L_j$  ou une opération  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$  est encore équivalent à  $S$ .
- Si  $\lambda \neq 0$ , alors le système obtenu à partir de  $S$  après avoir effectué une opération  $L_i \leftrightarrow \lambda L_i$  est encore équivalent à  $S$ .

**Démonstration.**

Si l'on a effectué  $L_i \leftrightarrow L_j$ , il suffit de la réeffectuer pour revenir au système de départ.

Si l'on a effectué  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ , il suffit d'effectuer  $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$  pour revenir au système de départ.

Si  $\lambda \neq 0$  et si l'on a effectué  $L_i \leftrightarrow \lambda L_i$ , il suffit d'effectuer  $L_i \leftrightarrow \lambda^{-1} L_i$  pour revenir au système de départ.  $\square$

**5.5. Algorithme du pivot**

L'idée du pivot de Gauss pour résoudre un système est de se ramener à un système simple à résoudre, grâce à une succession d'opérations sur les lignes. Ainsi, l'on se ramène d'abord à un système triangulaire (processus d'*élimination*), puis, si cela est possible, à un système diagonal (processus de *remontée*).

Pour étudier d'abord les cas les plus simples et finir par le cas général, étudions ces étapes à rebours.

**a. Cas d'un système diagonal**

Si le système  $S$  est *diagonal*, c'est-à-dire si  $A$  est une matrice diagonale dans l'écriture  $AX = B$  du système, alors le système se résout de manière immédiate.

**Exemple 5.5.1.**

Résoudre les systèmes  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

et  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

On remarque que s'il n'y a aucun zéro sur la diagonale, il y a une unique solution, sinon il n'y a aucune solution, ou une infinité de solutions.

**b. Cas d'un système triangulaire inversible**

Un cas un peu plus compliqué est celui où le système est *triangulaire*, c'est-à-dire si  $A$  est une matrice triangulaire dans l'écriture  $AX = B$  du système.

Nous ne traiterons pour l'instant que le cas où  $A$  n'a aucun zéro sur la diagonale (on peut alors montrer qu'elle est inversible).

Pour fixer les idées, supposons  $A$  triangulaire supérieure.

Le système a donc cette allure :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots + \dots = \dots \\ \dots + \dots = \dots \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

On obtient alors facilement :

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

puis

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

et, par récurrence (descendante),

$$b_k - \sum_{i=k+1}^n a_{k,i}x_i$$

pour tout  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $x_k = \frac{a_{k,k}}{a_{k,k}}$ .

Ces relations permettent de calculer les  $x_k$  par récurrence.

Nous pouvons également appliquer une succession d'opérations sur les lignes du système pour se ramener de manière équivalente à un système diagonal.

Ce processus est parfois appelé principe de *remontée* car l'on y fait apparaître des zéros dans le haut de la matrice du système, en partant des lignes du bas.

Cette méthode peut être présentée en utilisant une suite de systèmes équivalents.



Il existe une présentation plus visuelle et plus rapide à rédiger. Par exemple, considérons le système

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ -2y + z = 1 \\ -z = 3 \end{cases}.$$

Nous pouvons l'écrire

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right).$$

Les opérations à effectuer sont alors bien visibles : dans un premier temps, nous allons faire apparaître des zéros dans toute la dernière colonne de la partie de gauche du système, sauf à la dernière ligne. Pour cela, effectuons les opérations  $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$  et  $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ , et nous obtenons (sans oublier d'effectuer également ces opérations sur la partie de droite du système !)

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

ce qui correspond au système

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ -2y = 4 \\ -z = 3 \end{cases}$$

équivalent au premier. Ensuite, nous effectuons l'opération  $L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2$ . Ou plutôt, pour simplifier dès à présent la deuxième ligne et obtenir la valeur de  $y$ , nous pouvons effectuer  $L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2$ , et ensuite  $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ , ce qui donne

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

ce qui correspond au système

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ -z = 3 \end{cases}$$

qui est bien diagonal. Il vient alors directement

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -3 \end{cases}.$$

### Exercice 5.5.2.

Résoudre le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 5.5.3.

Résoudre, en fonction de la valeur du paramètre  $p$ , le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & p & 3 \\ 0 & 0 & p(p-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

### c. Cas d'un système triangulaire non inversible

S'il y a un zéro sur la diagonale d'un système triangulaire, ce dernier n'est pas inversible. On obtient un certain nombre de lignes de la forme  $0 = c_i$ , où les  $c_i$  sont des constantes. Si un de ces  $c_i$  est non nul, le système n'admet pas de solution, sinon, des lignes se simplifient.

Nous n'évoquerons ce cas que lorsque  $p \leq 3$  et  $n \leq 3$ .

Les solutions du système s'interprètent simplement en termes géométriques.

- si  $p = 2$ , l'ensemble des solutions est soit vide, soit un singleton, soit une droite du plan, soit le plan tout entier.

### Exemple 5.5.4.

Résoudre les systèmes :

1.  $\begin{cases} y = 2 \\ y = 1 \end{cases}$
2.  $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2y = 1 \end{cases}$

- si  $p = 3$ , l'ensemble des solutions est soit vide, soit un singleton, soit une droite de l'espace, soit un plan de l'espace, soit l'espace tout entier.

### Exemple 5.5.5.

Résoudre les systèmes :

$$1. \begin{cases} x + y + z = 1 \\ z = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

#### d. Systèmes échelonnés

Nous généralisons ici le cas précédent, quand la matrice du système n'est pas carrée.

Le système  $S$  est dit échelonné de rang  $r \in \{0, 1, \dots, \min(n, p)\}$  s'il est de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,r}x_r + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,r}x_r + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{r,r}x_r + \dots + a_{r,p}x_p = b_r \\ 0 = b_{r+1} \\ \vdots \\ 0 = b_p \end{cases}$$

où les coefficients  $a_{1,1}, \dots, a_{r,r}$  sont tous non nuls.

Si  $S$  est échelonné, il est compatible (possède au moins une solution) si et seulement  $b_{r+1} = \dots = b_p = 0$ . Dans ce cas, chacune des premières lignes s'interprète comme l'équation d'un « hyperplan » de dimension  $p - 1$  dans  $\mathbb{K}^p$ . Le système possède une unique solution si et seulement si  $r = p$  et une infinité de solutions si et seulement si  $r < p$ .

Nous n'évoquerons ce cas que lorsque  $p \leq 3$  et  $n \leq 3$ .

Les solutions du système s'interprètent simplement en termes géométriques.

• si  $p = 2$ , l'ensemble des solutions est soit vide, soit un singleton, soit une droite du plan, soit le plan tout entier.

#### Exemple 5.5.6.

Résoudre les systèmes :

$$1. \begin{cases} x + y = 2 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

$$2. x + y = 1$$

• si  $p = 3$ , l'ensemble des solutions est soit vide, soit un singleton, soit une droite de l'espace, soit un plan de l'espace, soit l'espace tout entier.

#### Exemple 5.5.7.

Résoudre les systèmes :

$$1. \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

$$2. x + y + z = 1$$

#### e. Cas général

Nous allons maintenant voir la méthode d'élimination qui permet de se ramener à un système échelonné.

Dans le système de départ, choisissons une ligne, et une variable. Le but est d'éliminer cette variable dans les autres lignes. Il est donc souvent intéressant de choisir une variable qui apparaît dans un minimum de lignes, comme cela une partie du travail est déjà fait.

Si la variable choisie est  $x$  et que la ligne conservée  $L$  est de la forme  $ax + by + \dots$  et que l'on veuille éliminer  $x$  d'une ligne  $L'$  de la forme  $cx + dy + \dots$ , il suffit d'effectuer l'opération  $L' \leftarrow L' - \frac{c}{a}L$ . La ligne  $L'$  devient alors  $(d - \frac{bc}{a})y + \dots$

Après avoir éliminé la variable choisie dans toutes les lignes sauf celle conservée, on ne touche plus à cette dernière ligne, et on réitère le procédé avec les lignes restantes, en choisissant une autre variable. On continue jusqu'à ce que le système soit triangulaire ou trivialement sans solution.

#### Exemple 5.5.8.

Considérons le système  $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \\ 2x - z = 1 \end{cases}$

que l'on écrira sous forme matricielle  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$ . Puisque  $y$  n'apparaît

pas dans la dernière ligne, choisissons d'éliminer  $y$  dans les deux premières lignes. Afin d'éviter de manipuler des fractions, nous choisissons de conserver la première ligne, car le coefficient devant  $y$  y est 1.

Effectuons l'opération  $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$  : le

système est donc équivalent à  $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$ .

On choisit ensuite d'éliminer  $z$  de la seconde ligne en utilisant la dernière ligne, car la variable  $z$  y a un coefficient égal à  $-1$ . Après l'opération

$$L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3, \text{ il vient : } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Le système obtenu n'a pas l'air très triangulaire ... en fait il l'est si on le réécrit

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{array}\right) \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \text{ ce qui revient à faire}$$

des échanges de lignes et de variables dans le dernier système obtenu.

$$\text{Il vient finalement } \begin{cases} x = \frac{7}{9} \\ y = -\frac{1}{9} \\ z = \frac{5}{9} \end{cases}.$$

### Exemple 5.5.9.

$$\text{Considérons le système } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \\ \quad 2y + z = 2 \end{cases}.$$

Codons-le et exécutons l'algorithme du pivot. Il vient successivement :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \quad (1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 + 3L_4 \quad (2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad (3)$$

Or les deuxième et troisième lignes sont contradictoires, donc le système n'a pas de solution.

### Remarque 5.5.10.

Si  $A$  est une matrice carrée inversible, alors le système  $AX = B$  a une unique solution qui est  $X = A^{-1}B$ .

La résolution des systèmes  $2 \times 2$  inversibles peut être effectuée très simplement ainsi.

### Exemple 5.5.11.

$$\text{Résoudre } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

### Remarque 5.5.12.

Pour montrer qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inversible et déterminer son inverse, vous pouvez procéder comme suit :

1. Introduire  $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .
2. Résoudre en  $X$  le système  $AX = Y$ .
3. Si ce système admet toujours une solution, vous pouvez alors lire la solution :  $X = BY$ .
4. Vérifiez que  $AB = BA = I_n$  : il ne reste plus qu'à conclure.

Tout cela sera justifié au second semestre.

### Exercice 5.5.13.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Montrer que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .