



C3 : Analyse temporelle des systèmes asservis

C3-1 : Analyse temporelle des systèmes asservis du 1er ordre

Émilien DURIF

Lycée La Martinière Monplaisir Lyon
Classe de MPSI
16 Octobre 2018

Plan

- 1 Système du premier ordre
 - Définitions
 - Caractérisations de la réponse d'un système du premier ordre

Plan

1 Système du premier ordre

- Définitions
- Caractérisations de la réponse d'un système du premier ordre



Système du premier ordre

Système du premier ordre

On appelle **système du premier ordre** tout système linéaire, continu et invariant régi par une équation différentielle du premier degré de la forme :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t). \quad (1)$$

Remarque

Pour la suite du cours, on considérera que les conditions initiales de $s(t)$ sont toujours nulles :

- pour une équation différentielle du premier ordre : $s(t=0) = 0$;
- pour une équation différentielle du deuxième ordre : $s'(t=0) = 0$



Système du premier ordre

Système du premier ordre

On appelle **système du premier ordre** tout système linéaire, continu et invariant régi par une équation différentielle du premier degré de la forme :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t). \quad (1)$$

Remarque

*Pour la suite du cours, on considérera que les **conditions initiales de $s(t)$** sont toujours nulles :*

- pour une équation différentielle du premier ordre : $s(t = 0) = 0$;
- pour une équation différentielle du deuxième ordre : $s'(t = 0) = 0$

Système du premier ordre

Système du premier ordre

On appelle **système du premier ordre** tout système linéaire, continu et invariant régi par une équation différentielle du premier degré de la forme :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t). \quad (1)$$

Remarque

Pour la suite du cours, on considérera que les **conditions initiales de $s(t)$ sont toujours nulles** :

- pour une équation différentielle du premier ordre : $s(t = 0) = 0$;
- pour une équation différentielle du deuxième ordre : $s'(t = 0) = 0$



Système du premier ordre

Propriété

La fonction de transfert de ces systèmes peut s'écrire sous la **forme canonique** suivante :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \quad (2)$$

où :

- τ : constante de temps (en s) ;
- K : gain statique (unité selon l'application).



Système du premier ordre

Propriété

La fonction de transfert de ces systèmes peut s'écrire sous la **forme canonique** suivante :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \quad (2)$$

où :

- τ : **constante de temps** (en s) ;
- K : **gain statique** (unité selon l'application).



Système du premier ordre

Propriété

La fonction de transfert de ces systèmes peut s'écrire sous la **forme canonique** suivante :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \quad (2)$$

où :

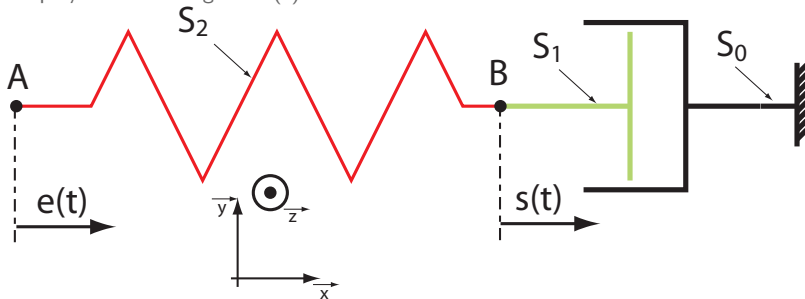
- τ : **constante de temps** (en s) ;
- K : **gain statique** (unité selon l'application).



Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c

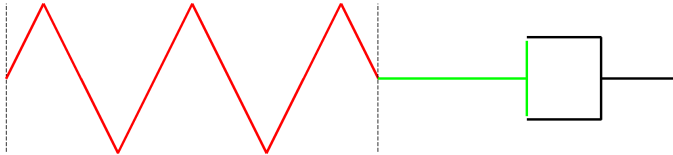
On déplace l'extrémité A d'une longueur $e(t)$. Le point B répond à ce déplacement en se déplaçant d'une longueur $s(t)$.



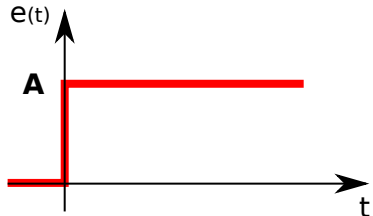
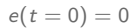
Systeme du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c

On déplace l'extrémité A d'une longueur $e(t)$. Le point B répond à ce déplacement en se déplaçant d'une longueur $s(t)$.



On impose un échelon sur le déplacement $e(t)$:

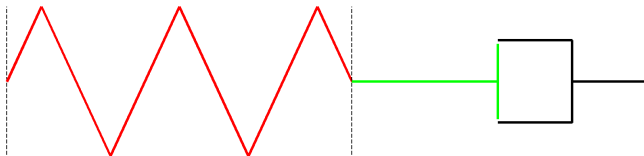




Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c

On déplace l'extrémité A d'une longueur $e(t)$. Le point B répond à ce déplacement en se déplaçant d'une longueur $s(t)$.



On impose un échelon sur le déplacement $e(t)$:

$$e(t = 0^+) = e_0$$



Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c

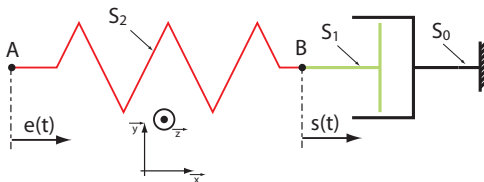
Question : Comment le système va répondre ?

Système oscillant

Système amorti

Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c



On déplace l'extrémité A d'une longueur $e(t)$. Le point B répond à ce déplacement en se déplaçant d'une longueur $s(t)$. En isolant le solide S_1 de masse (m), on obtient le bilan des actions mécaniques extérieurs suivant \vec{x} :

- Le ressort S_2 de raideur k exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant \vec{x} ,

$$F_r = -k(s(t) - e(t)).$$

- L'amortisseur S_0 de coefficient de viscosité c exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant \vec{x} ,

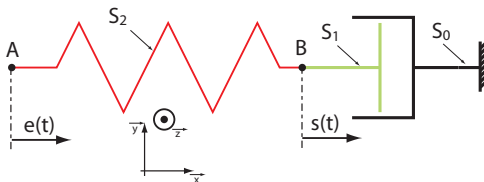
$$F_c = -c \cdot \frac{ds(t)}{dt}.$$

- On néglige le poids du solide S_1 .



Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c



On déplace l'extrémité A d'une longueur $e(t)$. Le point B répond à ce déplacement en se déplaçant d'une longueur $s(t)$. En isolant le solide S_1 de masse (m), on obtient le bilan des actions mécaniques extérieurs suivant \vec{x} :

- Le ressort S_2 de raideur k exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant \vec{x} ,

$$F_r = -k(s(t) - e(t)).$$

- L'amortisseur S_0 de coefficient de viscosité c exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant \vec{x} ,

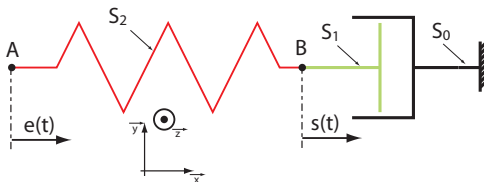
$$F_c = -c \cdot \frac{ds(t)}{dt}.$$

- On néglige le poids du solide S_1 .



Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c



On déplace l'extrémité A d'une longueur $e(t)$. Le point B répond à ce déplacement en se déplaçant d'une longueur $s(t)$. En isolant le solide S_1 de masse (m), on obtient le bilan des actions mécaniques extérieurs suivant \vec{x} :

- Le ressort S_2 de raideur k exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant \vec{x} ,

$$F_r = -k(s(t) - e(t)).$$

- L'amortisseur S_0 de coefficient de viscosité c exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant \vec{x} ,

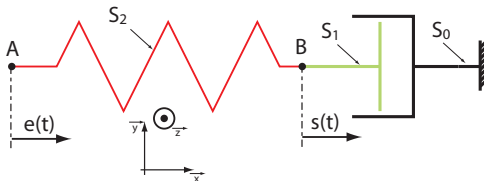
$$F_c = -c \cdot \frac{ds(t)}{dt}.$$

- On néglige le poids du solide S_1 .



Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c



- En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique suivant la direction \vec{x} , on obtient :

$$F_r + F_c = m \frac{d^2 s(t)}{dt^2}.$$

- En négligeant la masse m (ce qui revient à négliger l'inertie), on obtient alors,

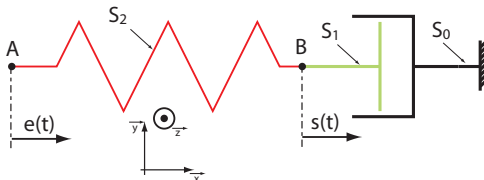
$$c \frac{ds(t)}{dt} + ks(t) = ke(t). \quad (3)$$

- Cette équation différentielle de degré 1 caractérise **un système du premier ordre**.
- On considère que les conditions initiales sont nulles ($s(t=0) = 0$).



Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c



- En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique suivant la direction \vec{x} , on obtient :

$$F_r + F_c = m \frac{d^2 s(t)}{dt^2}.$$

- En négligeant la masse m (ce qui revient à négliger l'inertie), on obtient alors,

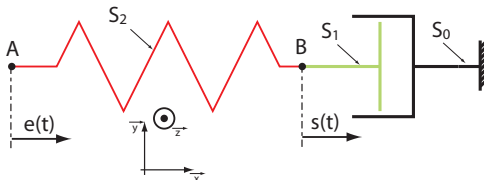
$$\boxed{c \frac{ds(t)}{dt} + ks(t) = ke(t).} \quad (3)$$

- Cette équation différentielle de degré 1 caractérise un **système du premier ordre**.
- On considère que les conditions initiales sont nulles ($s(t=0) = 0$).



Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c



- En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique suivant la direction \vec{x} , on obtient :

$$F_r + F_c = m \frac{d^2 s(t)}{dt^2}.$$

- En négligeant la masse m (ce qui revient à négliger l'inertie), on obtient alors,

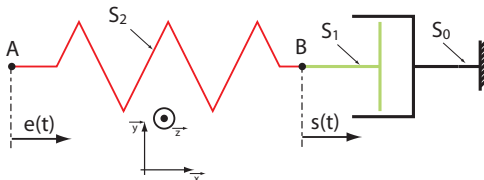
$$\boxed{c \frac{ds(t)}{dt} + ks(t) = ke(t).} \quad (3)$$

- Cette équation différentielle de degré 1 caractérise **un système du premier ordre**.
- On considère que les conditions initiales sont nulles ($s(t=0) = 0$).



Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c



- En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique suivant la direction \vec{x} , on obtient :

$$F_r + F_c = m \frac{d^2 s(t)}{dt^2}.$$

- En négligeant la masse m (ce qui revient à négliger l'inertie), on obtient alors,

$$\boxed{c \frac{ds(t)}{dt} + ks(t) = ke(t).} \quad (3)$$

- Cette équation différentielle de degré 1 caractérise **un système du premier ordre**.
- On considère que les conditions initiales sont nulles ($s(t=0) = 0$).

Système du premier ordre : exemple

Détermination dans le domaine de Laplace de la fonction de transfert associée

- Dans le domaine de Laplace on obtient :

$$c \cdot p \cdot S(p) + kS(p) = kE(p).$$

- On obtient alors,

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{k + c \cdot p};$$

- qui s'écrit sous la forme canonique :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + \frac{c}{k} \cdot p};$$

- On peut alors identifier la forme canonique avec les coefficients :

- $\tau = \frac{c}{k}$
- $K = 1$

Système du premier ordre : exemple

Détermination dans le domaine de Laplace de la fonction de transfert associée

- Dans le domaine de Laplace on obtient :

$$c \cdot p \cdot S(p) + kS(p) = kE(p).$$

- On obtient alors,

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{k + c \cdot p};$$

- qui s'écrit sous la forme canonique :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + \frac{c}{k} \cdot p};$$

- On peut alors identifier la forme canonique avec les coefficients :

- $\tau = \frac{c}{k}$
- $K = 1$

Système du premier ordre : exemple

Détermination dans le domaine de Laplace de la fonction de transfert associée

- Dans le domaine de Laplace on obtient :

$$c \cdot p \cdot S(p) + kS(p) = kE(p).$$

- On obtient alors,

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{k + c \cdot p};$$

- qui s'écrit sous la forme canonique :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + \frac{c}{k} \cdot p};$$

- On peut alors identifier la forme canonique avec les coefficients :

- $\tau = \frac{c}{k}$
- $K = 1$

Système du premier ordre : exemple

Détermination dans le domaine de Laplace de la fonction de transfert associée

- Dans le domaine de Laplace on obtient :

$$c \cdot p \cdot S(p) + kS(p) = kE(p).$$

- On obtient alors,

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{k + c \cdot p};$$

- qui s'écrit sous la forme canonique :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + \frac{c}{k} \cdot p};$$

- On peut alors identifier la forme canonique avec les coefficients :

- $\tau = \frac{c}{k}$
- $K = 1$

Système du premier ordre : exemple

Détermination dans le domaine de Laplace de la fonction de transfert associée

- Dans le domaine de Laplace on obtient :

$$c \cdot p \cdot S(p) + kS(p) = kE(p).$$

- On obtient alors,

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{k + c \cdot p};$$

- qui s'écrit sous la forme canonique :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + \frac{c}{k} \cdot p};$$

- On peut alors identifier la forme canonique avec les coefficients :
 - $\tau = \frac{c}{k}$
 - $K = 1$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Réponse indicielle

$$e(t) = e_0 \cdot u(t).$$

Si $e_0 = 1$, la réponse $e(t)$ est appelée **réponse indicielle**.

Équation de la réponse

On cherche à calculer $s(t)$ à partir de $H(p)$ et $E(p)$:

$$\begin{aligned} E(p) &= \frac{e_0}{p} \\ S(p) &= H(p) \cdot E(p) \\ &= \left(\frac{K}{1 + \tau p} \right) \frac{e_0}{p} \end{aligned}$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

- Transformée inverse de :

$$S(p) = H(p) \cdot E(p) = \left(\frac{K}{1 + \tau p} \right) \frac{e_0}{p}$$

- La décomposition en élément simple donne :

$$S(p) = \frac{K \cdot e_0}{p} - \frac{K \cdot e_0}{\frac{1}{\tau} + p}$$

- La transformée inverse donne :

$$s(t) = K \cdot e_0 \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \cdot u(t)$$

- On en déduit :

Réponse à un échelon

La réponse d'un système du 1^{er} ordre à un échelon est de la forme :

$$s(t) = K \cdot e_0 \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \cdot u(t). \quad (4)$$



Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

- Transformée inverse de :

$$S(p) = H(p) \cdot E(p) = \left(\frac{K}{1 + \tau p} \right) \frac{e_0}{p}$$

- La décomposition en élément simple donne :

$$S(p) = \frac{K \cdot e_0}{p} - \frac{K \cdot e_0}{\frac{1}{\tau} + p}$$

- La transformée inverse donne :

$$s(t) = K \cdot e_0 \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \cdot u(t)$$

- On en déduit :

Réponse à un échelon

La réponse d'un système du 1^{er} ordre à un échelon est de la forme :

$$s(t) = K \cdot e_0 \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \cdot u(t). \quad (4)$$



Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

- Transformée inverse de :

$$S(p) = H(p) \cdot E(p) = \left(\frac{K}{1 + \tau p} \right) \frac{e_0}{p}$$

- La décomposition en élément simple donne :

$$S(p) = \frac{K \cdot e_0}{p} - \frac{K \cdot e_0}{\frac{1}{\tau} + p}$$

- La transformée inverse donne :

$$s(t) = K \cdot e_0 \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \cdot u(t)$$

- On en déduit :

Réponse à un échelon

La réponse d'un système du 1^{er} ordre à un échelon est de la forme :

$$s(t) = K \cdot e_0 \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \cdot u(t). \quad (4)$$



Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

- Transformée inverse de :

$$S(p) = H(p) \cdot E(p) = \left(\frac{K}{1 + \tau p} \right) \frac{e_0}{p}$$

- La décomposition en élément simple donne :

$$S(p) = \frac{K \cdot e_0}{p} - \frac{K \cdot e_0}{\frac{1}{\tau} + p}$$

- La transformée inverse donne :

$$s(t) = K \cdot e_0 \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \cdot u(t)$$

- On en déduit :

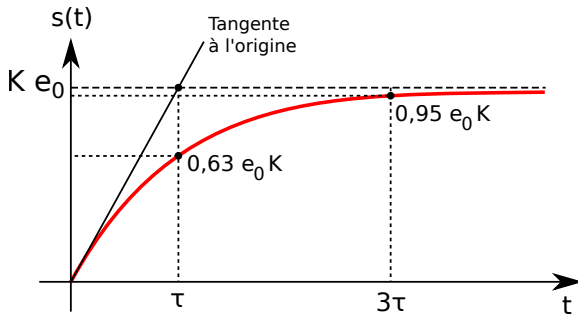
Réponse à un échelon

La réponse d'un système du 1^{er} ordre à un échelon est de la forme :

$$s(t) = K \cdot e_0 \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \cdot u(t). \quad (4)$$



Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon



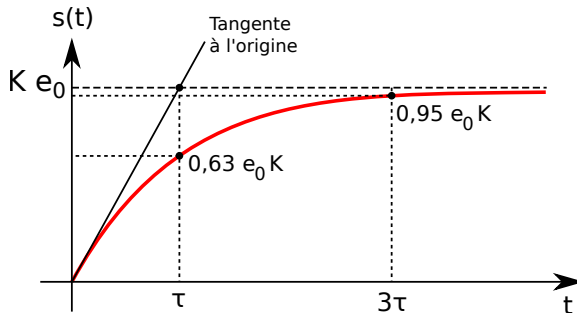
Au voisinage de $+\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \dots$$

Au voisinage de 0 :

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \dots$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon



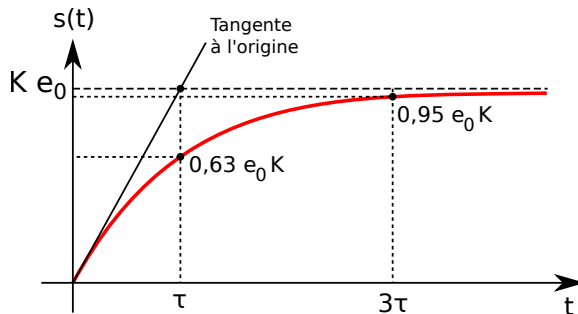
$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot S(p) \\ &= K e_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{ds(t)}{dt} &= \lim_{p \rightarrow 0} p^2 \cdot S(p) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} s(t) &= \lim_{p \rightarrow +\infty} p \cdot S(p) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{ds(t)}{dt} &= \lim_{p \rightarrow +\infty} p^2 \cdot S(p) \\ &= \frac{K \cdot e_0}{\tau} \end{aligned}$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon



Propriétés

- une **asymptote horizontale** au voisinage de $+\infty$ d'ordonnée à l'origine $K \cdot e_0$,
- une **tangente à l'origine** de coefficient directeur $\frac{K \cdot e_0}{\tau}$.



Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Rapidité

La rapidité d'une réponse à un échelon peut se caractériser par rapport au **temps de réponse à 5%** (noté t_r).

$$s(t_r) = K e_0 \left(1 - e^{-t_r/\tau}\right) = 0,95 K e_0$$

$$\Leftrightarrow t_r = -\tau \ln(0,05) \approx 3 \cdot \tau$$

Ainsi le temps de réponse à 5% d'un système du 1^{er} ordre soumis à un échelon vaut (environ) :

$$t_r \approx 3 \tau$$

(5)

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Précision

La précision de la réponse à un échelon peut être indiquée par l'**erreur statique**, noté ε_s . Elle s'obtient en recherchant l'écart au voisinage de $+\infty$:

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e(t) - s(t)) . \quad (6)$$

Attention

Verifier l'homogénéité !!!

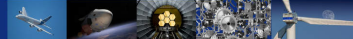
$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} (K e(t) - s(t)) . \quad (7)$$

Dans tous les cas

$$\varepsilon_s = 0 . \quad (8)$$



Système du premier ordre



Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une rampe

Réponse à une rampe :

Dans ce cas, l'entrée est une rampe :

$$e(t) = a t u(t)$$

Équation de la réponse

On cherche à calculer $s(t)$ à partir de $H(p)$ et $E(p)$:

$$E(p) = \frac{a}{p^2}$$

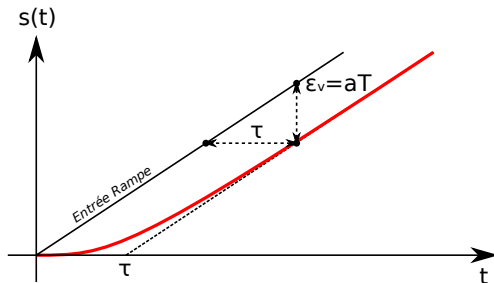
$$S(p) = H(p)E(p) = \left(\frac{K}{1 + \tau p} \right) \frac{a}{p^2} = K a \left(\frac{1}{p^2} - \frac{\tau}{p} + \frac{\tau^2}{1 + \tau p} \right)$$

Après transformée inverse, on obtient :

La réponse d'un système du 1^{er} ordre soumis à une rampe est de la forme :

$$s(t) = K a \left(t + \tau \left(e^{-t/\tau} - 1 \right) \right) u(t). \quad (9)$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une rampe



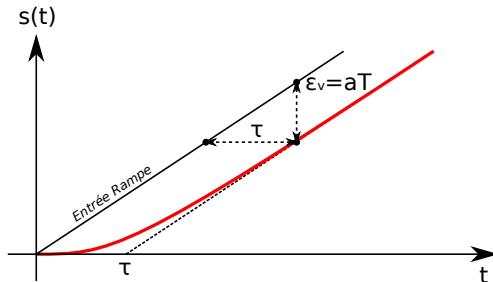
Au voisinage de $+\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \dots$$

Au voisinage de 0 :

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \dots$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une rampe



Au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} p S(p) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K a}{p(1 + \tau p)} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

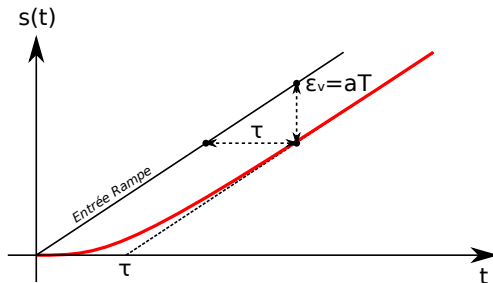
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{ds(t)}{dt} = K a$$

Au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} s(t) &= \lim_{p \rightarrow +\infty} p S(p) \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{K a}{p(1 + \tau p)} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{ds(t)}{dt} = 0$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une rampe

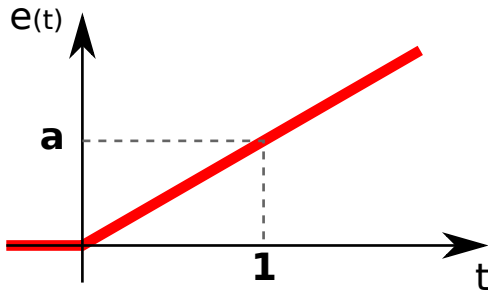


Propriétés

- une **tangente horizontale** au voisinage de 0,
- une **asymptote oblique**, de coefficient directeur $K a$.



Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une rampe



Précision, pour $K = 1$

$$\epsilon_v = a\tau.$$

(10)

Rapidité

retard de traînage r_t :

$$r_t = \tau.$$

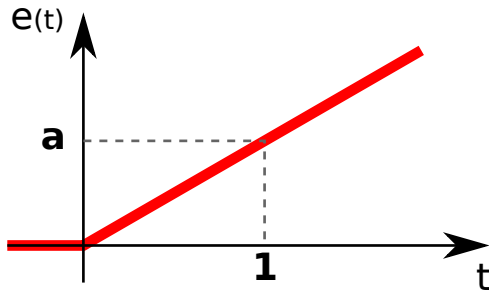
(11)

Propriétés

- une asymptote oblique d'équation $y(t) = a(t - \tau)$ au voisinage de $+\infty$.
- une tangente horizontale au voisinage de 0.



Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une rampe



Précision, pour $K = 1$

$$\epsilon_v = a\tau.$$

(10)

Rapidité

retard de traînage r_t :

$$r_t = \tau.$$

(11)

Propriétés

- une asymptote oblique d'équation $y(t) = a(t - \tau)$ au voisinage de $+\infty$.
- une tangente horizontale au voisinage de 0.