Feuille d'exercice n° 27 : **Séries numériques**

Exercice 1

1) On sait que pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{2}(a+b)$. Il suffit d'appliquer cela à u_n et v_n : par majoration, puisque toutes les séries sont ici à termes réels positifs, $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sqrt{u_n v_n}$ converge.

2) $\sqrt{u_n v_n} = \dfrac{\sqrt{1-v_n}}{n}$.

3) Si $\sum v_n$ cv, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $\sqrt{u_n v_n} \sim \dfrac{1}{n}$, donc $\sum \sqrt{u_n v_n}$ div, et dans ce cas avec la première question, $\sum u_n$ ne peut converger.

Exercice 2 $u_n = (1+a+b)\ln n + a\ln(1+1/n) + b\ln(1+2/n) = (1+a+b)\ln n + \dfrac{a+2b}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
Si $1+a+b \neq 0$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.
Si $1+a+b = 0$ mais $a+2b \neq 0$, $u_n \sim \dfrac{a+2b}{n}$ donc $\sum u_n$ diverge par comparaison à une série de Riemann.
Pour avoir convergence il faut donc avoir $1+a+b = a+2b = 0$, i.e. $a=-2$ et $b=1$.
Cette condition est suffisante : si $a=-2$ et $b=1$, $u_n = \ln n - 2\ln(n+1) + \ln(n+2) = (\ln n - \ln(n+1)) - (\ln(n+1) - \ln(n+2))$. La série est donc télescopique : $\sum\limits_{n=1}^{N} u_n = -\ln 2 - \ln(N+1) + \ln(N+2) \xrightarrow[N\to+\infty]{} -\ln 2$.

Exercice 3

1) $v_{n+1} - v_n = n(u_n - u_{n+1}) \geqslant 0$. La suite (v_n) est donc bornée et croissante : elle cv.

2) Vu à la question précédente : $u_{k+1} - u_k = -\dfrac{1}{k}(v_{k+1} - v_k)$.

3) $\sum\limits_{k=n}^{N} u_{k+1} - u_k = u_{N+1} - u_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} -u_n$, donc $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} -\dfrac{1}{k}(v_{k+1} - v_k) = -u_n$. Or $u_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{k}(v_{k+1} - v_k) \leqslant \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{n}(v_{k+1} - v_k) = \dfrac{1}{n}(\ell - v_n)$. Donc $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}(\ell - v_n)$.

4) Donc $0 \leqslant nu_n \leqslant \ell - v_n$. Mais $\ell - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc par encadrement $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or $v_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right) - nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ donc $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Exercice 4

1) $u_1 \in]0,1[$. Or sin est croissante sur $[0,1]$ donc $\sin([0,1]) =]0, \sin 1] \subset [0,1]$. Donc par stabilité, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \in [0,1]$. De plus comme sin est croisante, (u_n) est monotone. Elles est bornée, donc elle converge.

2) On voit facilement que 0 est le seul point fixe de sin sur $[0,1]$, donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3) **a)** $u_{n+1} = sin(u_n) = u_n - \dfrac{1}{6}u_n^3 + o(u_n^3)$ car $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $u_n^3 = 6(u_n - u_{n+1}) + o(u_n^3)$, donc $u_n^3 \sim 6(u_n - u_{n+1})$.

b) $\sum u_n^3$ a donc même nature que $\sum u_n - u_{n+1}$, qui est téléscopique et a même nature que (u_n), qui cv.

4) $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \sum \ln(u_{n+1}) - \ln n$, qui a même nature que $(\ln(u_n))$, qui diverge.

5) **a)** $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(1 - \frac{1}{6}u_n^2 + o(u_n^2)) \sim -\frac{1}{6}u_n^2$.

b) $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge donc $\sum u_n^2$ aussi. Or $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n^2 = o(u_n)$, donc $\sum u_n$ diverge aussi.

Exercice 5 Pour tout n,

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0, k \text{ carré parfait}}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=0, k \text{ pas carré parfait}}^{n} \frac{1}{k^2} \\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \frac{1}{i^2} + \sum_{k=0, k \text{ pas carré parfait}}^{n} \frac{1}{k^2} \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i^2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} \\ &\leqslant 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

$\sum u_n$ est donc réelle à termes positifs et son terme général est inférieur à celui d'une série convergente : elle converge donc.

Exercice 7 On écrit que $\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln(n-1) + \ln(n+1) - 2\ln n = (\ln(n-1) - \ln n) + (\ln(n+1) - \ln n)$ et on obtient donc deux sommes télescopiques. On trouve $-\ln 2$ comme limite.

Exercice 8 $\sum_{n=0}^{N} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0} N - 1\frac{1}{n!} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \mathrm{e} + \mathrm{e} = 2\mathrm{e}$.

$\sum_{n=0}^{N} \frac{n^2-2}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{n(n-1)+n-2}{n!} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0} N - 2\frac{1}{n!} - 2\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.

Exercice 9 Convergence car le terme général est équivalent à $3/n^3$.
On décompose la fraction, on fait intervenir des ln et γ, et on trouve $18 - 24\ln 2$.

Exercice 10 Remarque : on compare souvent la transformation d'Abel à l'intégration par parties.

1) Soit M un majorant de $(|S_n|)$. Alors $0 \leqslant |(a_n - a_{n+1})S_n| \leqslant a_n - a_{n+1}$. Or $\sum a_n - a_{n+1}$ a même nature que la suite (a_n), donc elle cv. Donc $\sum |(a_n - a_{n+1})S_n|$ aussi, donc $\sum (a_n - a_{n+1})S_n$ cv absolument.

2) $\sum_{n=0}^{N} a_{n+1}(S_{n+1} - S_n) = -\sum_{n=0}^{N} a_{n+1}S_n + \sum_{n=0}^{N} a_{n+1}S_{n+1} = -\sum_{n=0}^{N} a_{n+1}S_n + \sum_{n=1}^{N+1} a_nS_n = -a_0S_0 + a_{N+1}S_{N+1} + \sum_{n=0}^{N}(a_n - a_{n+1})S_n$. Or $\sum_{n=0}^{N}(a_n - a_{n+1})S_n$ cv et $a_{N+1}S_{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$, donc $\sum a_{n+1}(S_{n+1} - S_n)$ cv.

3) Appliquer ce qui précède avec $a_n = \frac{1}{n}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \Re\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx}\right) = \Re\left(\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)x} - 1}{\mathrm{e}^{ix} - 1}\right)$. On vérifiera bien les hypothèses !

Exercice 11 Avec une comparaison série-intégrale, on obtient $1/u_n \geqslant \int_1^n (\ln t)^2 \,\mathrm{d}t$, et ensuite par IPP, $\int_1^n (\ln t)^2 \,\mathrm{d}t \sim n(\ln n)^2$.

Exercice 13 Par continuit'é de f', il existe un $\alpha > 0$ tel que sur $]-\alpha, \alpha[$, $|f'(x)| < \beta$ avec $\beta < 1$. Avec l'IAF, si $x \in]-alpha, \alpha[$, $|f(x) - f(0)| < \beta|x - 0|$, soit $|f(x)| < \beta|x| < |x|$. Donc $f(x) \in]-alpha, \alpha[$, et on peut réitérer. Avec $x = u_0$, on obtient : $|u_n| \leqslant \beta^n |u_0|$, donc $\sum |u_n|$ cv car $|\beta| < 1$.

Exercice 14

1) Il y a cv absolue.

2) Idem, car $n^2 \times \left|\dfrac{(-1)^n n^2 + 3n}{\mathrm{e}^n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\left|\dfrac{(-1)^n n^2 + 3n}{\mathrm{e}^n}\right| = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

3) $\left|\dfrac{\sin n}{\operatorname{sh} n}\right| = O\left(\dfrac{1}{\operatorname{sh} n}\right)$. Or $\operatorname{sh} n \sim \dfrac{\mathrm{e}^n}{2}$, donc $\sum \dfrac{1}{\operatorname{sh} n}$ cv. Ainsi il y a cv absolue.

Exercice 15

1) Déjà traité dans l'exercice 16 de la feuille de TD n° 10.

2) Considérer $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$.

3) **a)** cv par application directe de la question 1.

b) $\sum \dfrac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{n} = \sum \dfrac{1}{n} + \sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$: div car somme d'une série convergente et d'une série divergente.