

Devoir à la maison n° 1

À rendre le 8 septembre

Dans ce problème, on s'autorisera à utiliser librement le résultat suivant :

Soit g une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Soit $a, b \in I$. S'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in I, |g(t)| \leq k$, alors $\left| \int_a^b g(t) dt \right| \leq k|b - a|$.

On munit le plan P d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , où l'unité est 5 cm. On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par $f : x \mapsto e^{-x} \cos(x)$.

I) Étudions d'abord quelques propriétés élémentaires de la courbe f .

- 1) Étudier les variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et tracer la courbe représentative Γ de f sur cet intervalle. On précisera notamment les coefficients directeurs des tangentes aux points de la courbe d'abscisses $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = 0$, et $x = \frac{\pi}{2}$.

- 2) Trouver deux réels a et b tels que la fonction F définie sur \mathbb{R} par

$$F : x \mapsto (a \cos(x) + b \sin(x))e^{-x}$$

soit une primitive de f .

- 3) Calculer l'aire délimitée par Γ , les droites d'équations $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$ ainsi que par l'axe des abscisses. On exprimera le résultat en cm^2 .

II) On se propose maintenant d'étudier l'intersection de la courbe Γ avec la droite Δ d'équation $y = x$. On dit aussi que l'on recherche les *points fixes* de la fonction f .

- 1) Existe-t-il des points d'intersection de Γ et de Δ dont l'abscisse appartient à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$?
- 2) Soit φ la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $\varphi : x \mapsto e^{-x} \cos(x) - x$.
 - a) Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
 - b) Étudier les variations de φ .

- c) En déduire qu'il existe un réel unique α dans $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $e^{-\alpha} \cos(\alpha) = \alpha$ (i.e, $f(\alpha) = \alpha$).
- d) On pose $\beta = f(1) = e^{-1} \cos(1)$. Prouver d'abord que $\beta < 1$ puis, en utilisant le sens de variation de f , montrer l'encadrement :

$$\beta < \alpha < 1.$$

- 3) On pose $k = |f'(\beta)|$. On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $\beta \leq u_n \leq 1$.

- b) En étudiant le signe de f'' sur l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, prouver que, pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$,

$$f'(0) < f'(x) < f'\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

- c) En déduire que $k < 1$.
- d) Prouver que, pour tout réel x dans $[\beta, 1]$, $|f'(x)| \leq k$.
- e) Montrer que, pour tout entier naturel n , $|u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$.
- f) En déduire que la suite (u_n) converge vers α .

— FIN —