M5 LES OSCILLATEURS

Pour déterminer une position d'équilibre il existe plusieurs possibilités :

→ La somme des forces est nulle.

→ Extremum d'énergie potentielle.

Ce chapitre a pour objet d'étudier dans un premier temps les mouvements d'un point au voisinage proche d'une position d'équilibre.
Puis nous étudierons les oscillateurs forcés

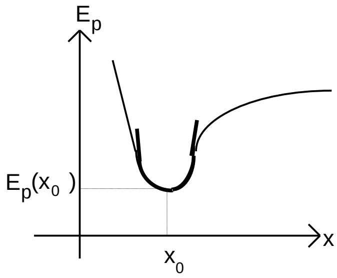
I. Oscillateur harmonique.

Le premier oscillateur harmonique qui ait fait l'objet d'une expérimentation est le lustre de la cathédrale de Pise. C'est en observant son balancement que Galilée (1564-1642) découvrit les lois du mouvement pendulaire (1583)

I.1. Le mouvement au voisinage de la position d'équilibre stable (rappels).

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la simplification d'un problème à un degré de liberté, au voisinage d'une position d'équilibre stable et après changement d'origine, menait à l'équation différentielle suivant :

$$\Leftrightarrow \frac{d^2X}{dt^2} + \omega_0^2 X = 0 \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$



On appelle oscillateur harmonique à une dimension, tout système mécanique dépendant d'un paramètre dont le mouvement est décrit par une équation différentielle de la forme $\ddot{X}+\omega_0^2X=0$.
Au voisinage d'une position d'équilibre stable, une particule est rappelée vers cette position par une force qui, en première approximation, est proportionnelle à l'élongation, et le système constitue un oscillateur harmonique.

I.2. Exemples types.

I.2.1. Une masse suspendue à un ressort.

Référentiel : $\mathfrak{R}$ terrestre galiléen.

Système : M (m) point matériel suspendu à un ressort dans le champ de pesanteur terrestre.

Forces appliquées : $\vec{T} = -k\vec{\Delta l}$ et $\vec{p}=m\vec{g}$

Equilibre : mg - k (l - l_0) =0 (1)

Oscillations : mg - k (x -l_0) = m $\ddot{x}$ (2)

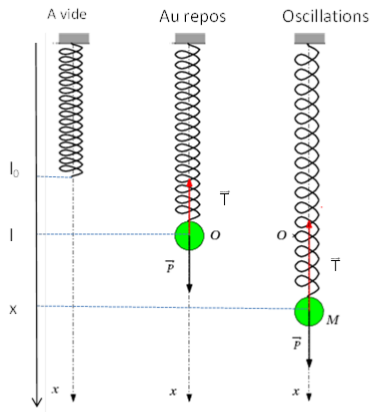
(1) et (2) ⇒ m $\ddot{x}$+ k (x - l) = 0.

Changement d'origine : X = x - l ⇒ m$\ddot{X}$+ kX = 0

On a donc un oscillateur harmonique dans la limite des approximations :

→ ressort sans masse.

→ absence de frottement.



I.2.2. Le pendule simple.

Référentiel : $\mathfrak{R}$ galiléen.

Système : M (m) point matériel suspendu à un fil sans masse.

Forces appliquées : $m\vec{g}$ et $\vec{T}$ la tension du fil.

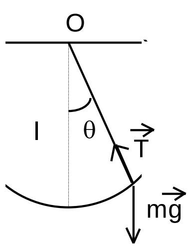
Loi : Conservation de l'énergie (la tension du fil ne travaille pas).

$$E_p + \frac{1}{2}mv^2 = cte \Leftrightarrow mgl(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 = cte$$

Si le mouvement est de faible amplitude : $\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2$

$\Leftrightarrow g\theta^2 + l\dot{\theta}^2 = cte$

La dérivée par rapport au temps donne : $l\ddot{\theta} + g\theta = 0$ car $\dot{\theta} \neq 0$



I.3. Etude.

Equation : $\frac{d^2X}{dt^2} + \omega_0^2 X = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{1}{m}\frac{d^2E_p}{dx^2}\Big|_{x=x_0}$

Solution générale : $X = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

ω_0 pulsation, A amplitude, φ phase à l'origine, $\omega_0 t + \varphi$ phase instantanée.

A et φ sont déterminées par les conditions initiales, ce sont des constantes du mouvement.

Conditions initiales : → position initiale.
→ vitesse initiale.

Le mouvement est périodique : $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

Remarque: $X = \alpha\cos(\omega_0 t) + \beta\sin(\omega_0 t)$.

I.4. Aspect énergétique.

Energie potentielle : $E_p = \frac{1}{2}kx^2$

$E_p = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$

Energie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

$E_c = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi)$

Energie mécanique : $E = E_c + E_p = \frac{1}{2}kA^2$

L'énergie mécanique est bien une constante du mouvement. Il y a en permanence inter échange entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique.

Valeurs moyennes temporelles.

$\langle E_c\rangle = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} E_c dt = \frac{kA^2}{2T_0}\int_0^{T_0}\frac{1-\cos(2\omega_0 t+\varphi)}{2}dt$

$\langle E_c\rangle = \frac{kA^2}{4}$

de même $\langle E_p\rangle = \frac{kA^2}{4}$

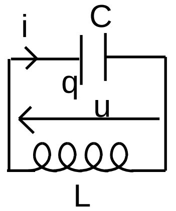
Il y a en moyenne équipartition de l'énergie.

I.4. Analogies avec l'électricité.

$i = \frac{dq}{dt}$; $u = \frac{q}{C} = -L\frac{di}{dt}$

$\Rightarrow \frac{q}{C} = -L\frac{d^2q}{dt^2}$

$\Rightarrow \ddot{q} + \omega_0^2 = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$



ELECTRICITE	MECANIQUE
Charge q	Déplacement x
Intensité i = dq/dt	Vitesse v= dx/dt
Inductance L	Masse m
Capacité C	Souplesse 1/k
Energie potentielle ½ q²/C	Energie potentielle ½ kx²
Energie "cinétique" ½ Li²	Energie cinétique ½ mv²

II. Les oscillateurs libres amortis

Lorsqu'on écarte un oscillateur de sa position de repos (équilibre stable) son mouvement peut être oscillatoire ou non, mais dans tous les cas nous constatons une diminution de l'amplitude, puis un arrêt au bout d'un temps plus ou moins long, ce sont des oscillateurs amortis. C'est l'existence de forces de frottements qui en sont à l'origine. Les frottements sont des phénomènes complexes dont la description est purement empirique.

II.1. Mise en équation.

Nous nous limiterons aux cas des frottements fluides ou visqueux dont le modèle est : $\vec{F}=-h\vec{v}$.
Référentiel : $\mathfrak{R}$ galiléen.
Système : M (m)
Forces appliquées : $\vec{F_1}= -k\overrightarrow{OM}$ la tension du ressort,
$\vec{F_2}= -h\vec{v}= -h\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ les frottements
Où $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur position de l'oscillateur repéré par rapport à sa position d'équilibre stable.
Repère : l'axe x coïncide avec la direction du mouvement (oscillations unidimensionnelles)
Le poids est compensé par la réaction du support ou l'origine a été choisie en conséquence.
Loi : PFD $m\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} =- k\overrightarrow{OM} -h\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$
Ou $m\dfrac{d^2x}{dt^2} +h\dfrac{dx}{dt} + kx = 0 \Leftrightarrow \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{h}{m}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{kx}{m} = 0$
Ou encore $\ddot{x} +2\alpha\dot{x} + \omega_0^2\, x = \ddot{x} +2\lambda\omega_0\dot{x} + \omega_0^2\, x = \ddot{x} +\frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2\, x = 0$

avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ la pulsation propre du circuit

$\alpha = \dfrac{h}{2m}$ le coefficient d'amortissement

$\lambda = \dfrac{h}{2}\sqrt{\dfrac{1}{mk}}$ le coefficient d'amortissement réduit

$Q = \dfrac{1}{2\lambda}= \dfrac{m\omega_0}{h}=\dfrac{k}{h\omega_0}$ le facteur de qualité.

II.2. Etude du régime libre.

Il y a plusieurs cas possibles selon le signe de $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2-4\omega_0^2 = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2}-4\right)$

• **Régime apériodique** : $Q < ½ \Leftrightarrow h^2>4mk$

L'amortissement est important.

Les racines de l'équation caractéristique : $s_+ =-\dfrac{\omega_0}{2Q} +\omega_0\sqrt{\left(\dfrac{1}{4Q^2}-1\right)} = -r_+$

$s_- =-\dfrac{\omega_0}{2Q} - \omega_0\sqrt{\left(\dfrac{1}{4Q^2}-1\right)} = - r_-$

La solution générale : $x(t) = A\exp(-r_+t) + B\exp(-r_-t)$
A et B sont deux constantes à déterminer par les conditions initiales (la position et la vitesse).

Rem : $r_+r_- =\omega_0^2$ et $r_+<\omega_0<r_-$

• **Régime critique** : $Q = ½ \Leftrightarrow h^2=4mk$

Les racines de l'équation caractéristique : racine double $-\omega_0$.
La solution générale : $x(t) = (A+Bt)\exp(-\omega_0 t)$
D'un point de vue physique il s'agit du cas intermédiaire entre les deux autres cas.

• **<u>Régime pseudopériodique</u>** : Q > ½ ⇔ h²>4mk

L'amortissement est faible. Dans le cas limite h = 0, on retrouve le régime des oscillations harmoniques

Les racines de l'équation caractéristique : $s_+ = -\frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0\sqrt{\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right)} = -\frac{\omega_0}{2Q} + j\Omega$

$s_- = -\frac{\omega_0}{2Q} - j\omega_0\sqrt{\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right)} = -\frac{\omega_0}{2Q} - j\Omega$

La solution générale : $x(t) = A\exp(-\frac{\omega_0}{2Q})\cos(\Omega t + \varphi) = \exp(-\frac{\omega_0}{2Q})[A'\cos(\Omega t) + B'\sin(\Omega t)]$

→ <u>La pseudopériode</u> : intervalle de temps qui sépare deux passages successifs, et dans la même direction pour le vecteur vitesse, par la position d'équilibre :

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} > T_0$$

→ <u>Le décrément logarithmique</u> : $\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{x(t)}{x(t+n)}\right) \approx \frac{\pi}{Q}$ si Q >>1

• <u>Amortissement optimal</u>.

→ Régime pseudopériodique : l'amortissement diminue comme $\exp(-\frac{\omega_0}{2Q}t)$ avec $\frac{\omega_0}{2Q} = \frac{h}{2m}$. Il faut h le plus grand possible. On se rapproche du régime critique.

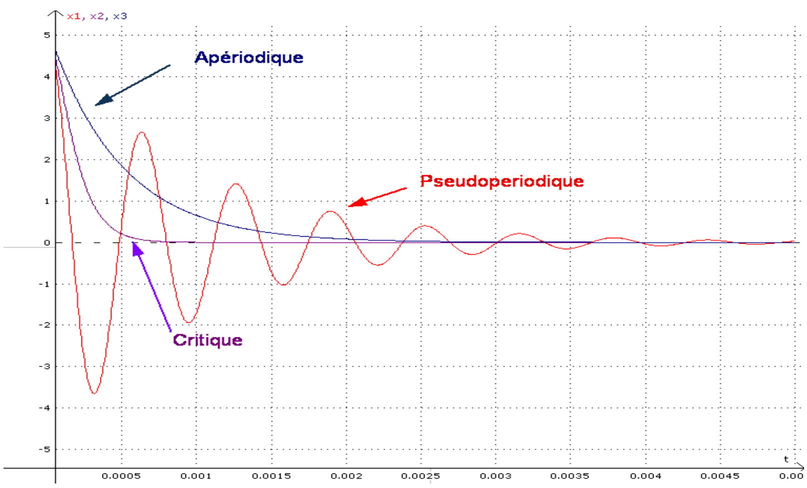
→ Régime apériodique : $r_+ r_- = \omega_0^2$ et $r_+ < \omega_0 < r_-$, donc le terme $\exp(-r_- t)$ s'amortit plus vite que $\exp(-r_+ t)$ et en tenant compte du fait que $r_+ < \omega_0$ ce régime s'amortit moins vite que $\exp(-\omega_0 t)$ qui correspond au régime critique.

⇒ C'est le régime critique qui donne le retour à zéro le plus rapidement.

II.3. Analogies avec l'électricité

ELECTRICITE	MECANIQUE
Charge q	Déplacement x
Intensité i = dq/dt	Vitesse v= dx/dt
Résistance R	Coefficient d'amortissement h
Inductance L	Masse m
Capacité C	Souplesse 1/k
Energie potentielle ½ q²/C	Energie potentielle ½ kx²
Energie "cinétique" ½ Li²	Energie cinétique ½ mv²
Facteur de qualité $\frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$	Facteur de qualité $\frac{m\omega_0}{h} = \frac{k}{h\omega_0} = \frac{\sqrt{km}}{h}$

II.5. Graphes



III . Régime sinusoïdal forcé et résonance

III.1. Mise en équation

Référentiel : $\mathfrak{R}$ galiléen.

Système : M (m)

Forces $\overrightarrow{F_1}$= -k$\overrightarrow{OM}$ la tension du ressort,

$\overrightarrow{F_2}$= -h$\vec{v}$= -h$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ les frottements

$\overrightarrow{F_3}$ =f(t) $\overrightarrow{e_x}$ la force excitatrice

Où $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur position de l'oscillateur repéré par rapport à sa position d'équilibre stable.
Repère : l'axe x coïncide avec la direction du mouvement (oscillations unidimensionnelles)
Le poids est compensé par la réaction du support ou l'origine a été choisie en conséquence.

Loi : PFD $m\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = k\overrightarrow{OM} - h\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$

Ou $m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + kx = f(t) \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{h}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{kx}{m} = \frac{f(t)}{m}$

Avec les mêmes notations on obtient : $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \ddot{x} + 2\lambda\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m}$

On se limite dans la suite de l'étude aux excitations sinusoïdales : f(t) = Fcosωt.
Comme nous l'avons vue en électrocinétique l'intérêt d'étudier ce type d'excitation ne se limite pas à sa simple expression. En effet nous avons signaler que toute fonction périodique peut se décomposer en une somme des fonctions sinusoïdales, la linéarité de l'équation différentielle permet d'affirmer que dans le cas d'une fonction périodique la réponse à l'excitation sera la somme des réponses à chaque terme qui la compose.

III.2. La solution en régime forcé

On cherche une solution de la forme x(t) = Xcos(ωt + Ψ) avec X(ω) amplitude des oscillations forcées et $\psi(\omega)$ retard de phase.

Représentation complexe : $\underline{x} = Xe^{j\psi}e^{j\omega t}$, $\underline{X} = Xe^{j\psi}$ et $\underline{F}$ = F

Résolution : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F\cos\omega t}{m}$

$$\Rightarrow X\exp(j\psi)\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+j\frac{\omega}{Q\omega_0}\right) = \frac{F}{m\omega_0^2} = \underline{X}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+j\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{X} = \frac{\frac{F}{m\omega_0^2}}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+j\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)}$$

$$\Rightarrow X = \frac{\frac{F}{m\omega_0^2}}{\sqrt{\left(\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2\right)}}$$

III.3. La résonance en élongation

• On recherche la pulsation de la force excitatrice qui donnera une élongation maximale.

X(ω) est maximale dès que $D=\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2$ est minimal. On pose $u=\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$.

$\frac{dD}{du}=0 \Leftrightarrow -2(1-u)+\frac{1}{Q^2}=0$

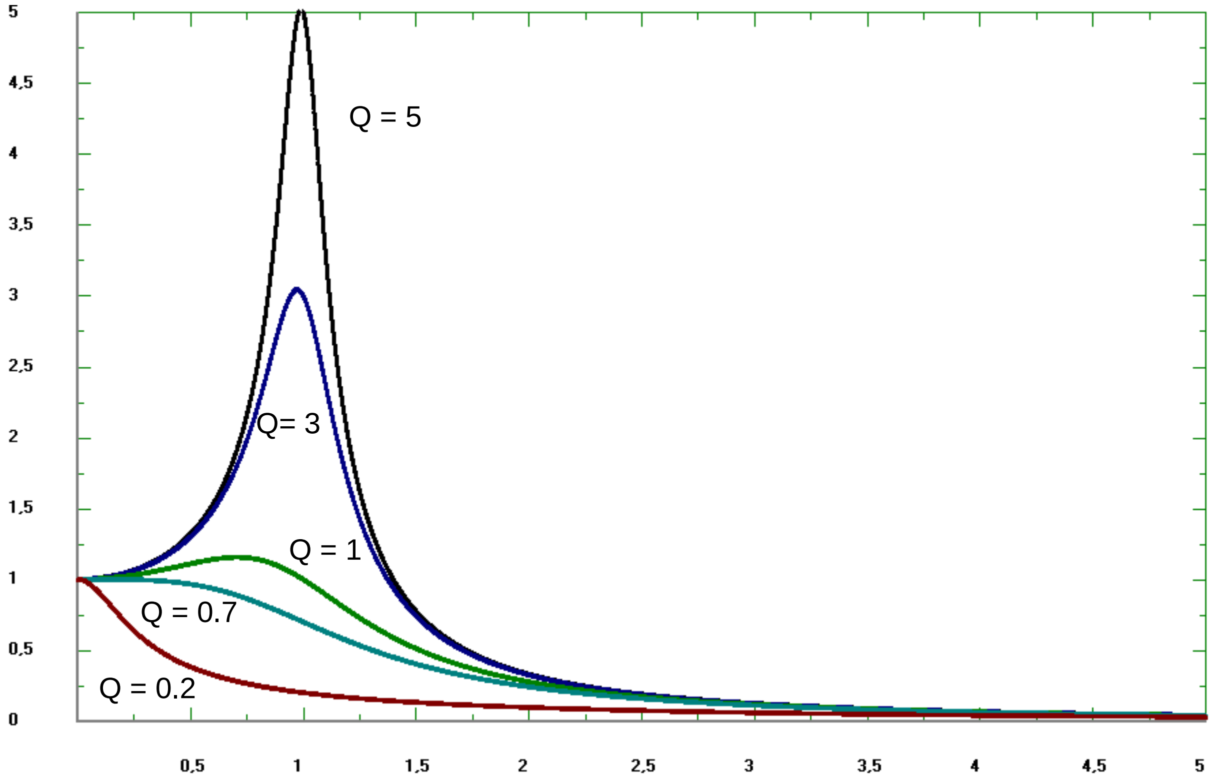
$\Leftrightarrow u=\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 1-\frac{1}{2Q^2} > 0$

Condition pour qu'il y ait phénomène de résonance $Q > 1/\sqrt{2}$
Donc pour un facteur de qualité suffisamment élevé on observe une résonance en élongation, ceci contrairement à la résonance en intensité où celle-ci existe toujours.

On obtient $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

On remarque que la résonance est d'autant plus intense que l'oscillateur est peu amorti c'est-à-dire pour un facteur de qualité d'autant plus élevé.

Rem :si Q>>1 et à ω=0 X = F/(mω_0) alors Q = X_{max}/X_0 relation valable à 3%prés dès que Q=2.



• La bande passante :

C'est le domaine de fréquence tel que $X \in \left[\frac{X_{max}}{\sqrt{2}} ; X_{max}\right]$ =

$X_{max}^2 = 2X^2 \quad \Leftrightarrow \frac{Q^2}{1-\frac{1}{4Q^2}} = \frac{2}{(1-u)^2+\frac{u}{Q^2}} \Leftrightarrow (1-u)^2 + \frac{u}{Q^2} = \frac{2}{Q^2} - \frac{1}{2Q^4} \Leftrightarrow u^2 - 2\left(1-\frac{1}{2Q^2}\right)u + 1 - \frac{2}{Q^2} - \frac{1}{2Q^4} = 0$

$\Leftrightarrow u = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} \mp \frac{1}{Q}\sqrt{1- \frac{1}{4Q^2}}$

La largeur de la bande passante : $\Delta\omega = |\omega_2-\omega_1|$

Si Q>>1 alors $u \approx 1 \pm 1/Q \Rightarrow \omega/\omega_0 \approx 1 \pm 1/2Q$

D'où $\frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ = Q si Q >>1

III.4. Résonance en vitesse

On a obtenu : $\underline{X} = \frac{\frac{F}{m\omega_0^2}}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+j\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)}$

On a donc l'expression de la vitesse en complexe : $\underline{V} = j\omega\, \underline{X} = \frac{j\omega\frac{F}{m\omega_0^2}}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+j\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)}$

Ainsi $V = \omega X = \frac{\frac{\omega F}{m\omega_0^2}}{\sqrt{\left(\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2\right)}} = \frac{\frac{F}{m\omega_0^2}}{\sqrt{\frac{1}{Q^2}+\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$

• Il y a résonance si $\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_0}{\omega} \Leftrightarrow \omega = \omega_0$ quel que soit le facteur de qualité Q.
Il faut donc que la pulsation excitatrice soit égale à la pulsation propre du système.
A la résonance $V = V_{max} = \frac{QF}{m\omega_0}$
• La bande passante :

$$V = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}} \qquad \Leftrightarrow 1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 2 \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = \pm\frac{1}{Q}$$

$$\Leftrightarrow x^2 \pm \frac{x}{Q} - 1 = 0$$

On ne garde que les racines positives $\Rightarrow x = \pm\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}$

D'où $\boxed{\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}}$

La résonance est d'autant plus aigüe que le facteur de qualité est élevé.

M5 LES OSCILLATEURS