Devoir à la maison n° 9

À rendre le 17 décembre

I. Limites supérieures et inférieures d'une suite.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note U_n l'ensemble $\{ u_k \mid k \in \mathbb{N},\ k \geqslant n \}$.

- **a)** Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que U_n possède une borne inférieure (notée m_n) ainsi qu'une borne supérieure (notée M_n).
- **b)** Montrer que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $m_n \leqslant u_n \leqslant M_n$.
- **c)** En déduire que $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et que : $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} M_n$.

On appelle alors *limite inférieure* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$, le réel $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n$.

De même, on appelle *limite supérieure* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$, le réel $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n$.

Comme on vient de le voir : $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$.

L'intérêt de ces notions est que toute suite bornée possède une limite inférieure et une limite supérieure, alors que toute suite bornée ne possède pas forcément une limite au sens usuel.

2)

- **a)** On suppose que $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$. Montrer qu'alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$.
- **b)** Réciproquement, montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$.

  Indication : Ne pas hésiter à utiliser des ε.

3) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une nouvelle suite réelle bornée. On suppose que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$.

- **a)** Montrer que pour tout $n \geqslant N$ et pour tout $k \geqslant n$ on a $m_n \leqslant v_k$.
- **b)** En déduire que $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \liminf\limits_{n\to+\infty} v_n$.

On montrerait de même l'inégalité $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \limsup\limits_{n\to+\infty} v_n$.

II. Suites de Cauchy (devoir facultatif).

On dit qu'une suite réelle (u_n) est *de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geqslant N,\ |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon.$$

4) Montrer qu'une suite convergente est de Cauchy.

5) Montrer qu'une suite de Cauchy est bornée.

6) En utilisant la première partie, montrer qu'une suite de Cauchy converge.

7) *Application :* soit $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}.$$

Montrer que (a_n) est de Cauchy. Exprimer ensuite sa limite en fonction de a_0 et de a_1.

— FIN —