1.3 : Remarques sur le produit :

a) $$M = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_p \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

On note $C_1 \dots C_p$ les colonnes de M.

(ici : $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$).

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ alors $MX = \sum_{i=1}^{p} x_i C_i$

ex :
$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

alors
$$MX = 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \times \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Déf : $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

$$MX = \left(\sum_{l=1}^{p} m_{il} x_l \right)_{1 \leq i \leq n}$$

$$= \sum_{l=1}^{p} \underbrace{\left(m_{il} x_l \right)_{1 \leq i \leq n}}_{A_l}$$

$$= \sum_{l=1}^{p} x_l \underbrace{\left(m_{il} \right)_{1 \leq i \leq n}}_{C_l}$$

$\square$

__Applica° :__

$$M = \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \\ \left(\begin{matrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \end{matrix}\right) \end{array}$$

Je remarque que $C_3 = 2C_1 + C_2$.

ie : $2C_1 + 1C_2 - 1C_3 = 0$

ie : $M \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

ie $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker M$

noyau d'1 matrice ??

On va voir + tard...

$\left(\ker M = \{ X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}),\ MX = 0 \} \right)$.

Lien avec les noyaux d'applic. lin ?

c'est l'objectif du chapitre !

2) Généralisation :

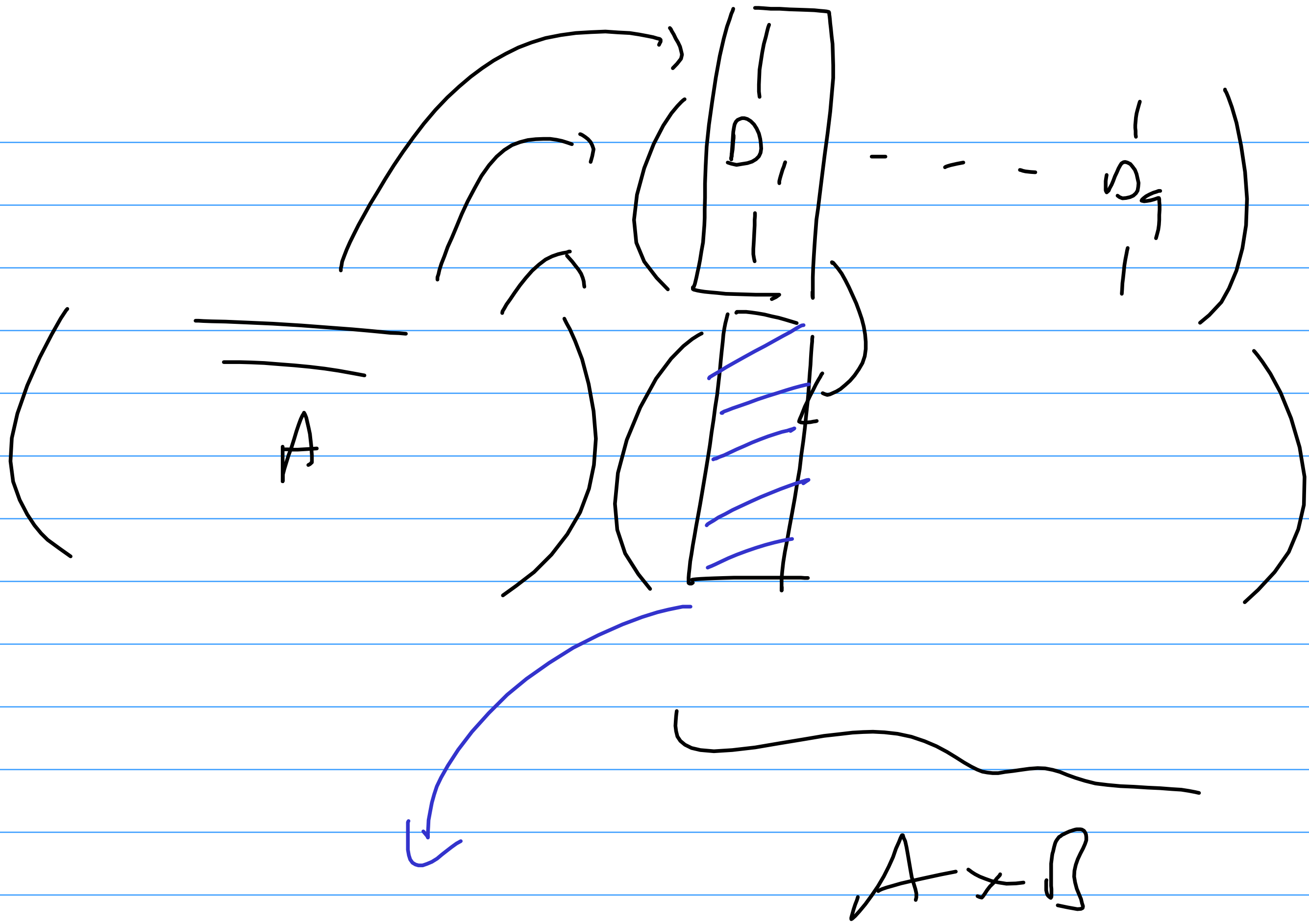
$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ C_1 & \cdots & C_p \\ | & & | \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$$

$$B = \begin{pmatrix} | & & | \\ D_1 & \cdots & D_q \\ | & & | \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$$

$A \times B$ existe.

La $1^{\text{ère}}$ col. de $A \times B$ est égale

à $A \cdot D_1$.



$= AD_1$.

La $\alpha^{\text{ème}}$ col. de $A \times B$ est égale à $A \times (\alpha^{\text{ème}}$ col. de $B)$.

Si la $\alpha^{\text{ème}}$ col de B est $D_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$

alors la α^{e} col. de $A \times B$

est : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} x_i C_i$.

<u>Résultats analogues sur les lignes :</u>

$$A = \begin{pmatrix} — L_1 — \\ \vdots \\ — L_n — \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

$$Y = (y_1 \quad \cdots \quad y_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$$

alors : $$Y \times A = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i$$

(Rq : op. sur les colonnes de A $\Longleftrightarrow$ mult. à dte

op. sur les lignes de A $\Longleftrightarrow$ mult à gche)

ex :
$$(1 \quad 2 \quad 3) \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} = (1 \quad -1) + 2(2 \quad 0) + 3\,(4 \quad -7)$$

$= \begin{pmatrix} 17 & -20 \end{pmatrix}.$

2) Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$B \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$

la $\beta^{\text{ème}}$ ligne de $B \times A$

$=$ (la $\beta^{\text{ème}}$ ligne de B) $\times A$.

3) <u>Applica° canonique^t associée à 1 matrice:</u>

Déf : Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
espaces vectoriels à considérer : $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$.

On appelle applica° linéaire canonique associée à M, l'applica° : "$u(x) = MX$"

$$u : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \longmapsto M \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Rq : 1) On identifie matrice colonnes et vecteurs.

a priori : $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$: ~~c'est 1 vecteur,~~ ~~pas 1 matrice.~~

~~donc $M \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ ne veut rien dire !~~

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ est 1 vecteur de $\mathbb{K}^p$

mais c'est aussi 1 matrice de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

donc : $M \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ est 1 produit de 2 matrices : il est bien

défini, et le résultat est 1 matrice colonne :
donc c'est aussi 1 vecteur !

Donc on peut dire que $M \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$.

Ainsi, avec cette identification, u est bien définie.

2) Attention aux dimensions !!

$$M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

tentant : $u : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^p$ <u>FAUX</u>

__ex :__ $M \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

si $X \in \mathbb{K}^2$: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$MX = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}}_{3\text{ col!}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{2\text{ lignes}}$$: n'existe pas !!

Si : $M \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$, $u : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$.

en effet : si $X \in \mathbb{K}^3$: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$MX = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2.$$

l'applica° linéaire canoniquement associée à M

est :

$$u : \begin{array}{ccc} \underline{\underline{\mathbb{K}^3}} & \longrightarrow & \underline{\underline{\mathbb{K}^2}} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \end{pmatrix} \end{array}.$$

coord. ds les bases canoniques (celle de $\mathbb{K}^3$ et celle de $\mathbb{K}^2$).

3) u est bien linéaire car le produit matriciel est linéaire à dte :

$$M\times(X+\lambda Y) = MX+\lambda MY.$$

4) ⚠ les coord sont des n-uplets, donc écrits en ligne : $(1,2)\in\mathbb{R}^2$, $(4,5,6)\in\mathbb{R}^3$.

Mais, si les on identifie à des matrices, on les écrira <u>TOUJOURS</u> en colonne.

$M\times$ colonne : bien défini
$M\times$ ligne : pas défini.

d) $E_{ab} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $a \in [\![1,n]\!]$
$b \in [\![1,p]\!]$

c'est 1 matrice dite élémentaire :

$$E_{ab} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} & b & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} & a \end{array}$$

$$= (m_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m_{ab} = 1 \\ m_{ij} = 0 \quad \text{si } i \ne a \text{ ou } j \ne b \end{cases}$$

ie: $m_{ij} = \delta_{ia} \times \delta_{jb}$.

$$= \begin{cases} 1 \times 1 & \text{si } i=a \text{ et } j=b \\ 0 & \text{si } i \neq a \text{ ou } j \neq b. \end{cases}$$

$(E_{ab})_{\substack{1 \leq a \leq n \\ 1 \leq b \leq p}}$ est 1 base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

ex:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = a E_{11} + b E_{12} + c E_{21} + d E_{22} + e E_{31} + f E_{32}$$

Qu : calculer $\underbrace{E_{ab}}_{\in M_{n,p}(\mathbb{K})} \times \underbrace{E_{cd}}_{\in M_{p,q}(\mathbb{K})}$.

Si : $b=c$:

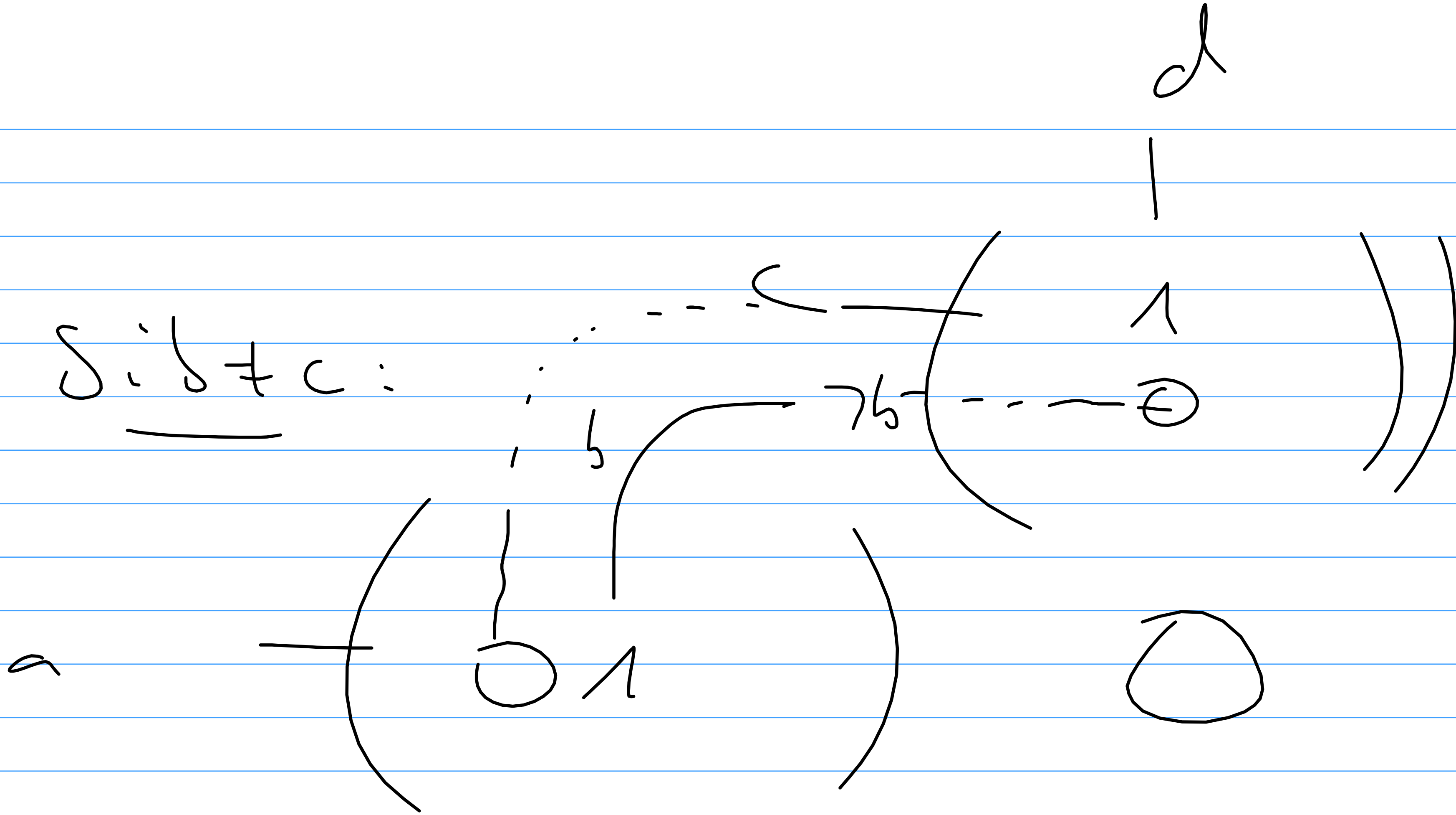
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} d & \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ - c \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \\ a - \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{cc} b & \end{array} & \end{array}$$

$$E_{ab} \times E_{cd} = E_{ab} E_{bd}$$

$$= E_{ad}.$$

Dibtc:



$$E_{ab} \times E_{cd} \Rightarrow$$

bilan: $E_{ab} E_{cd} = f_{bc} E_{ad}$.

"rigoureux" : $E_{ab} = (\delta_{ia}\delta_{bj})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} = (a_{ij})$

$E_{cd} = (\delta_{ic}\,\delta_{dj})_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le q}}$

$= (b_{ij})$

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$.

Le coeff i,j de $E_{ab} \times E_{cd}$ est :

$$\sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \delta_{ia}\underbrace{\delta_{bk}}\,\underbrace{\delta_{kc}}\,\delta_{dj}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } b \neq c \\ & \text{car } \forall k,\ f_{bk} = 0 \ \underline{\text{ou}}\ f_{kc} = 0. \\ f_{ia} f_{dj} & \text{si } b = c \\ & (\text{et } k = b = c). \end{cases}$$

$$\text{d'où}\quad E_{ab} \times E_{cd} = \begin{cases} 0 & \text{si } b \neq c \\ (f_{ia} f_{dj}) & \text{si } b = c \\ = E_{ad}. \end{cases}$$

2) Matrice d'1 famille de vecteurs :

<u>Déf</u> : Soit E $\mathbb{K}$-ev de dim. $n \in \mathbb{N}$,
soit $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ base de E.
soit $(v_1 \dots v_p)$ p vecteurs de E.

Si $j \in [\![1, p]\!]$, v_j a des coord ds $\mathcal{B}$,
on les note : $(a_{1j}, a_{2j} \dots a_{nj})$.
ie : $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$.

La matrice $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$

s'appelle matrice de la famille $(v_1 \dots v_p)$ ds la base $\mathcal{B}$. On la note :

$$\underline{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1 \dots v_p)} \text{ ou } \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v_1 \dots v_p).$$

ie :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1 \dots v_p) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} & \boxed{} & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \vdots \\ \leftarrow e_n \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & v_2 & \dots & v_p \end{array} \end{array}$$

les coord de v_2 ds $\mathcal{B}$

$$\in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

__Ex :__ $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$\mathcal{B}_2 = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{f_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{f_2} \right)$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(v_1, v_2, v_3) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \leftarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{array} & \end{array}$$

$$v_1 = 0 \times f_1 + 1 \times f_2$$

$$v_2 = 2 \times f_1 - 1 \times f_2$$

$$v_3 = 1 \times f_1 + 1 \times f_2$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}_2}(v_1, v_2, v_3) = \begin{array}{c c} \begin{array}{c} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow f_1 \\ \leftarrow f_2 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{array} & \end{array}$$