BS4 : CIRCUIT FIXE DANS UN CHAMP MAGNETIQUE VARIABLE

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que toute variation de flux magnétique à proximité d'un conducteur faisait apparaitre une fém d'induction aux bornes du conducteur ou un courant induit si le circuit est fermé. On distinguait alors clairement un inducteur extérieur provoquant la « cause » (aimant, bobine…) et un induit subissant les « effets » (conducteur ou circuit).

Mais, une bobine parcourue par un courant crée son propre champ magnétique. Si celui-ci varie, elle va provoquer des phénomènes d'induction appelées ici **auto-induction** car l'**inducteur et l'induit sont confondus**. C'est ce que nous allons étudier ici.

I . Auto-induction

I.1. Inductance propre

• Un circuit filiforme (C) parcouru par un courant i est source de champ magnétique propre $\vec{B}_{propre}$.
Ce champ magnétique propre engendre un flux magnétique à travers le circuit lui-même, appelé flux magnétique propre Φ_{propre}.

$\Rightarrow \Phi_{propre} = \int \vec{B}_{propre}.\overrightarrow{dS}$ où S est une surface s'appuyant sur (C)

$\vec{B}_{propre}$ peut se calculer à partir de la loi telle que celle de Biot et Savart .

$\Rightarrow \vec{B}_{propre}$ est proportionnel à i et par conséquent Φ_{propre} est également proportionnel à i.

• Définition **:** on appelle inductance propre ou coefficient d'auto-induction le coefficient L, tel que :

$$\Phi_{propre} = L\, i$$

L dépend de la géométrie du circuit et de la nature du milieu dans lequel est plongé ce circuit.

• Dimension :

Unités : L en Henry (H) ; Φ_{propre} en Weber (Wb) ; i en Ampère (A)

Ordre de grandeur : L de l'ordre de quelques mH à 0,1 H

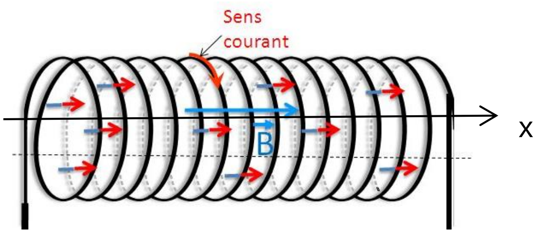
Signe de L : L > 0 (Φ_{propre} et i sont de mêmes signes par choix d'orientation)

• Remarque **:** le champ magnétique total est $\vec{B} = \vec{B}_{extérieur} + \vec{B}_{propre} \Rightarrow \Phi = \Phi_{extérieur} + \Phi_{propre}$
où $\vec{B}_{extérieur}$ est dû aux courants extérieurs au circuit ; Φ est le flux total et $\Phi_{extérieur}$ le flux du champ magnétique extérieur, à travers le circuit.

I.2. Calcul d'une inductance propre

• Méthode : ① Orientation du circuit
② Calcul du champ propre $\vec{B}_{propre}$ créé par le circuit
③ Calcul du flux propre de $\vec{B}_{propre}$ à travers le circuit : $\Phi_{propre} = \int \vec{B}_{propre}.\overrightarrow{dS}$
④ Identification avec $\Phi_{propre} = L.i$, d'où on en déduit L.

• Exemple : Une bobine longue de longueur ℓ constituée de N spires parcourue par un courant I.
① Orientation du circuit



② Calcul du champ propre $\vec{B}_{propre}$ créé par le circuit

On pose n = $\frac{N}{\ell}$ le nombre de spires par unité de longueur de la bobine.

Le champ magnétique créé a pour expression : $\vec{B}_{propre} = \mu_0 n I\, \vec{e_x} = \mu_0 \frac{N}{\ell} I\, \vec{e_x}$

③ Calcul du flux propre de $\vec{B}_{propre}$ à travers le circuit : $\Phi_{propre} = \int \vec{B}_{propre}.\vec{dS}$

$\Phi_{propre} = N\int \vec{B}_{propre}.\vec{dS} = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} I\, S$

④ Identification avec Φ_{propre} = L.i, d'où on en déduit L.

$L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S$

• <u>Application numérique</u>

Une bobine de rayon a = 3 cm, de 1000 spires uniformément réparties sur une longueur ℓ = 10 cm.

On a ainsi L = 35 mH

• <u>Remarque</u>

Nous venons de voir que l'ordre de grandeur typique de l'inductance propre tout en maintenant un encombrement raisonnable est de quelques mH.

Pour pouvoir augmenter cette valeur on introduit dans la bobine un noyau ferromagnétique dont la perméabilité magnétique est plus grande que celle du vide.

I.3. F.é.m d'auto-induction

• <u>Définition :</u>

Les variations de i(t) ont pour conséquence des variations dans le temps du flux propre. Si le circuit est seul dans l'espace (tout au moins s'il n'y a aucune autre cause de variation de flux) il apparaît une force électromotrice d'induction

$$e_{propre} = -\frac{d\,\Phi_{propre}}{dt} = -\frac{dLi}{dt}$$

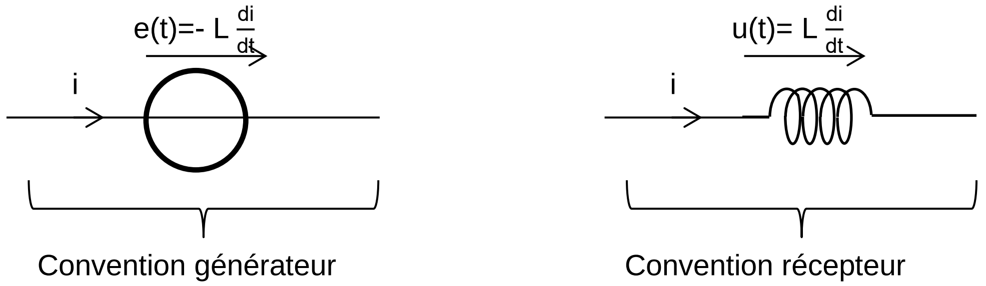
Le plus souvent, les circuits filiformes (C) considérés sont indéformables (bobines rigides), et L est alors constant. D'où l'expression de la f.é.m d'auto-induction :

$$e_{propre} = -\frac{d\,\Phi_{propre}}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

Cette f.é.m d'auto-induction s'oppose à l'établissement du courant.

• <u>Schéma électrocinétique équivalent</u>

En prenant soin de bien orienter la f.e.m induite dans le même sens que l'intensité du courant, on obtient le schéma électrique équivalent :



• <u>Remarque</u>

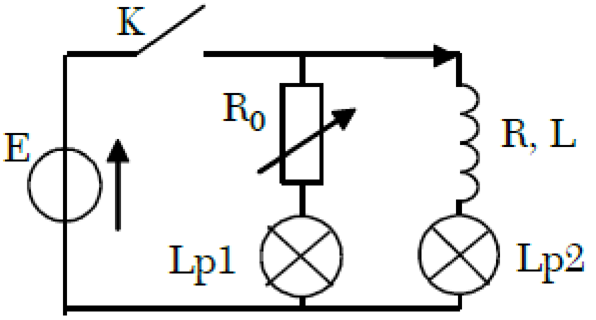
Dans le cas où le circuit est plongé dans un champ magnétique extérieur, un flux supplémentaire à travers le circuit s'ajoute au flux propre. Dans ce cas

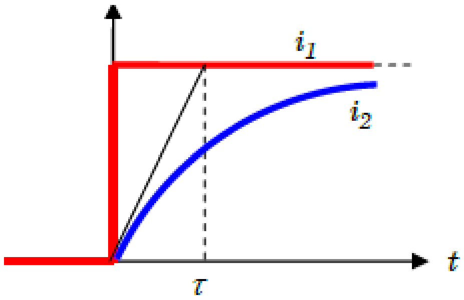
$$e(t) = -L\frac{di}{dt} - \frac{d\,\Phi_{extérieur}}{dt}$$

I.4. Loi de Lenz

Les formules établies sont cohérentes avec la loi de Lenz.
Soit une bobine branchée sur un générateur extérieur de sorte que son intensité augmente au court du temps.
$\Rightarrow \frac{di}{dt} > 0$
$\Rightarrow e(t) = -L\frac{di}{dt} < 0$
Cette f.e.m induite s'oppose à l'augmentation du courant.

Ainsi on observe un retard à l'allumage d'une ampoule dans un circuit contenant une bobine.



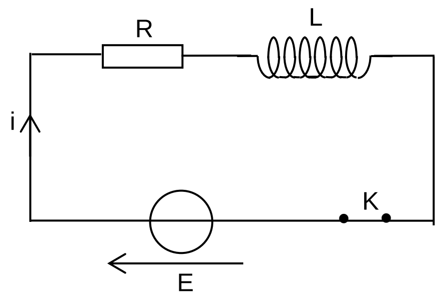


I.5. Mesure expérimentale

On réalise un circuit en mettant la bobine en série avec un générateur de f.e.m $e_g(t)$ et une résistance R.
Mise en équation par l'équation de maille :

$$L\frac{di}{dt} + Ri = e_g(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{e_g(t)}{L}$$



On pose **τ = L / R**, il est homogène à un temps, c'est la constante de temps ou le temps de relaxation
Il suffit de mesurer τ soit par la tangente à l'origine soit par le temps de montée à 63% dans le cas où $e_g(t)$ est une tension créneau.

Remarque
Bien souvent la bobine a une résistance interne qui n'est pas négligeable. Elle est alors comptabilisée dans l'expression de $\tau = L/(R + R_L)$

I.6. Etude énergétique

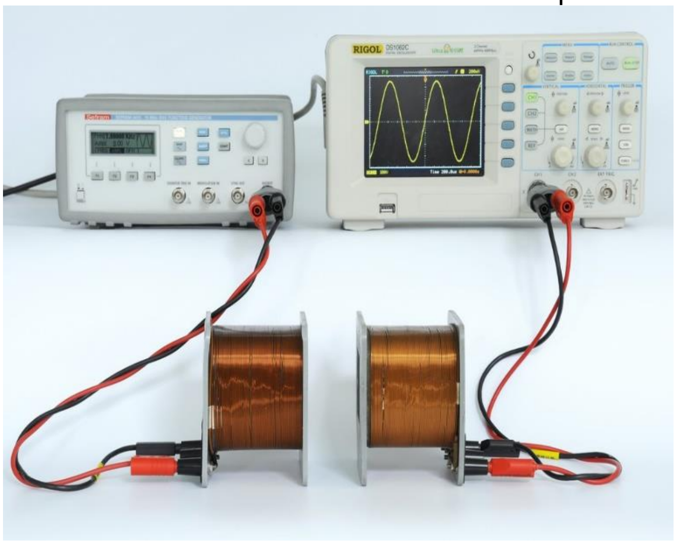
Pour effectuer un bilan en puissance on multiplie la loi des mailles par i(t) :
$L\frac{di}{dt} + Ri = e_g(t) \xrightarrow{\times i(t)} Li(t)\frac{di}{dt} + Ri^2(t) = e_g(t)i(t)$
Avec $Li(t)\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}Li^2(t))$
On obtient : $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}Li^2(t)) + Ri^2(t) = e_g(t).i(t)$
$e_g(t).i(t)$ représente la puissance délivrée par le générateur. Elle se répartie de la façon suivante :
- $\rightarrow Ri^2(t)$ puissance dissipée par effet joule dans la résistance R.
- $\rightarrow \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}Li^2(t))$ puissance stockée dans la bobine

Pendant le régime transitoire (où i augmente de la valeur 0 à I), la bobine accumule une énergie :
$\mathcal{E}_{magnétique} = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}I\Phi_{propre}$
Cette énergie stockée dans la bobine est "récupérée" en coupant le courant.

II. Cas de deux bobines en interaction

II.1. Mise en évidence expérimentale du couplage par inductance mutuelle

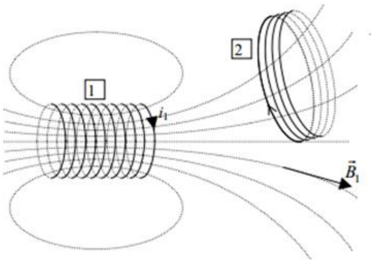
Reprenons l'expérience de Faraday.
Soit deux bobines identiques (même nombre de spires, même section, même longueur) l'une face à l'autre. La première est alimentée par un GBF pas la seconde.
Pourtant on visualise pour les deux bobines une tension à l'oscilloscope.

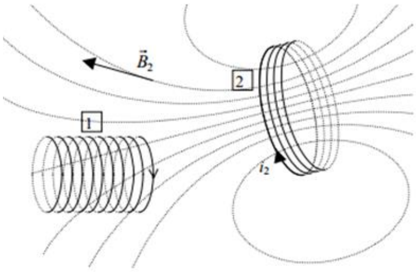


Ainsi si nous imposons une tension sinusoïdale aux bornes de la première bobine, nous observons une tension sinusoïdale de même fréquence aux bornes de la seconde.
Cependant l'amplitude de la tension aux bornes de la seconde bobine va dépendre de sa position par rapport à la première.

II.2. Inductance mutuelle

• Soit un circuit (C_1) (par exemple un solénoïde) parcouru par un courant i_1. Il crée un champ magnétique $\overrightarrow{B_1}$ dont la norme est proportionnelle à l'intensité i_1.
Soit un deuxième circuit (C_2) (par exemple une bobine plate), disposé dans le champ $\overrightarrow{B_1}$. Ainsi les lignes de champ de $\overrightarrow{B_1}$ traverse (C_2) et crée un flux $\Phi_{1\to2}$.
Si l'expression de ce flux est difficile à calculer ($\overrightarrow{B_1}$ n'étant pas forcement uniforme) on sait toutefois qu'il est proportionnel à la norme du champ $\overrightarrow{B_1}$ elle-même proportionnelle à l'intensité du courant i_1.
• Inversement si (C_2) est parcouru par un courant i_2, il va créer un champ magnétique $\overrightarrow{B_2}$ dont la norme est proportionnelle à l'intensité i_2.
Ce champ va créer un flux $\Phi_{2\to1}$ qui de même sera proportionnel à l'intensité i_2.





• Définition de l'inductance mutuelle (ou coefficient d'inductance mutuelle)
On pose $\Phi_{1\to2} = M_{21}i_1$ et $\Phi_{2\to1} = M_{12}i_2$ et on peut montrer que $M_{12} = M_{21}$
M est appelé l'inductance mutuelle des deux circuits (C_1) et (C_2).

• Propriétés de M
- Unité : M s'exprime en Henry, comme L.
- |M| dépend de la forme de (C_1) et (C_2), de leur disposition relative dans l'espace, c'est-à-dire de la géométrie du système et du milieu dans lequel est plongé le système.
- Le signe de M dépend des orientations choisies pour les courants : M *est algébrique* ($\neq$ L > 0).

II.3. Circuits électriques équivalents

Considérons deux circuits (C_1) et (C_2).
(C_1) est parcouru par un courant i_1 et (C_2) est parcouru par un courant i_2.
Ils créent chacun un champ magnétique respectivement $\overrightarrow{B_1}$ et $\overrightarrow{B_2}$.
Ainsi il y a donc un flux propre à travers (C_1) : $\Phi_{1\to1} = L_1 i_1$ créé par son propre champ magnétique et un flux créé par le champ magnétique $\overrightarrow{B_2}$: $\Phi_{2\to1} = M i_2$
Le flux total à travers (C_1) est donc :

$$\Phi_1 = \Phi_{1\to1} + \Phi_{2\to1} = L_1 i_1 + M i_2$$

La fem induite dans (C_1) :

$$e_1(t) = -\frac{d\Phi_1}{dt} = - L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt}$$

Un même raisonnement conduit pour le circuit (C_2)

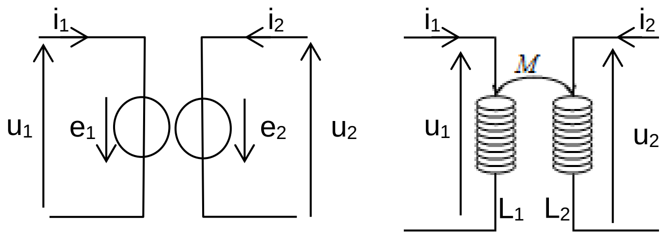
Le flux total à travers (C_2):

$$\Phi_2 = \Phi_{2\to2} + \Phi_{1\to2} = L_2 i_2 + M i_1$$

La fem induite dans (C_2) :

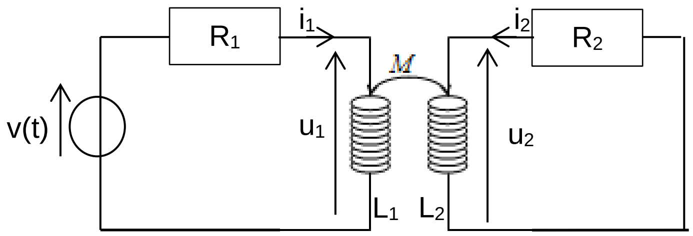
$$e_2(t) = -\frac{d\Phi_2}{dt} = - L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt}$$

Circuit équivalant :



II.4. Cas du régime sinusoïdal

On considère le circuit suivant :



avec $v(t) = V_0\cos(\omega t)$

• Lois des mailles :
$v(t) = R_1 i_1(t) + u_1(t)$
$0 = u_2(t) + R_2 i_2(t)$

Avec les relations donnant $u_1(t)$ et $u_2(t)$
$v(t) = R_1 i_1(t) + L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$
$0 = R_2 i_2(t) + L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$

• Passage en notations complexes
$\underline{V} = R_1\underline{I_1} + jL_1\omega\underline{I_1} + jM\omega\underline{I_2}$
$0 = R_2\underline{I_2} + jL_2\omega\underline{I_2} + jM\omega\underline{I_1}$

• Résolution

$\underline{I_2} = \frac{-jM\omega}{R_2+jL_2\omega}\,\underline{I_1}$

$\underline{V} = (R_1 + jL_1\omega + \frac{(M\omega)^2}{R_2+jL_2\omega})\,\underline{I_1} = \underline{Z}.\,\underline{I_1}$

Le couplage entre les deux circuits est équivalent, vu depuis le circuit (C_1) à un unique dipôle d'impédance $\underline{Z}$.

II.5. Etude énergétique

Reprenons l'exemple précédent.
Pour faire un bilan en puissance il suffit de multiplier chacune des mailles par son intensité.

$$v(t)i_1(t) = R_1 i_1^2(t) + L_1 i_1(t)\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}i_1(t)$$

$$0 = R_2 i_2^2(t) + L_2 i_2(t)\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}i_2(t)$$

Faisons la somme des deux équations :

$$v(t)i_1(t) = R_1 i_1^2(t) + R_2 i_2^2(t) + L_1 i_1(t)\frac{di_1}{dt} + L_2 i_2(t)\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_2}{dt}i_1(t) + M\frac{di_1}{dt}i_2(t)$$

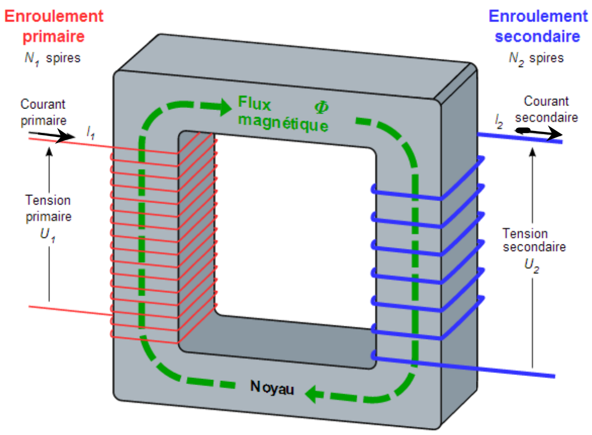
D'où le bilan

$$\underbrace{v(t)i_1(t)}_{\text{puissance fournie par le générateur}} = \underbrace{R_1 i_1^2(t) + R_2 i_2^2(t)}_{\text{Puissance perdue par effet joule}} + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2}L_2 i_2^2(t) + M i_1(t) i_2(t)\right)}_{\text{puissance magnétique qui dérive d'une énergie magnétique de chaque cuicuit et du couplage}}$$

III. Exemple d'application : les transformateurs

III.1. Présentation

C'est un appareil qui permet de modifier l'amplitude d'une tension ou d'un courant alternatif.
Il est composé d'un noyau ferromagnétique de section S et de deux bobines.
Le noyau permet de canaliser les lignes de champ magnétique.
Le premier circuit est appelé le primaire et est constitué de N_1 spires.
Le second circuit est appelé le secondaire et est constitué de N_2 spires.



III.2. Principe de fonctionnement

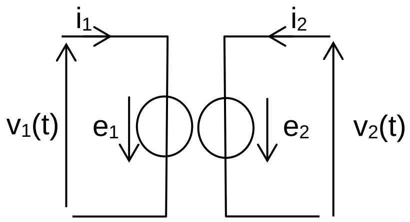
Le primaire est alimenté par une tension sinusoïdale $v_1(t)$ qui va créer un courant sinusoïdal $i_1(t)$. La circulation de ce courant la bobine du primaire va créer un champ magnétique $\vec{B}(t)$. Le noyau va canaliser les lignes de champ vers le secondaire. Ainsi toute ligne de champ traversant une spire traversera l'autre.

Soit $\Phi_1 = N_1 S B(t)$ le flux du champ magnétique à travers l'ensemble des spires du primaire.
Soit $\Phi_2 = N_2 S B(t)$ le flux du champ magnétique à travers l'ensemble des spires du secondaire.

Il en résulte dans fem induites :

$$e_1(t) = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -N_1 S\frac{dB(t)}{dt} \text{ et } e_2(t) = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -N_2 S\frac{dB(t)}{dt}$$

Soit le schéma électrique équivalent :

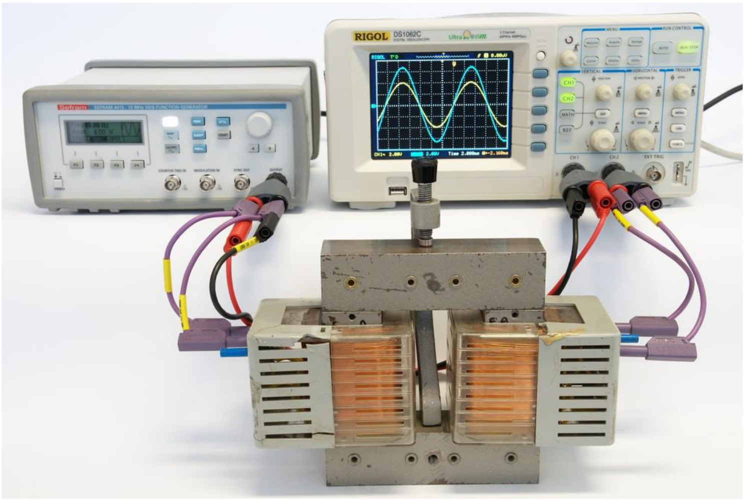


Ainsi $v_1(t) = - e_1(t) = N_1 S \frac{dB(t)}{dt}$

et $v_2(t) = - e_2(t) = N_2 S \frac{dB(t)}{dt}$

Comme le champ magnétique est variable $\frac{dB(t)}{dt} \neq 0$

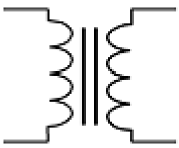
ce qui implique : $\frac{v_2(t)}{v_1(t)} = \frac{N_2}{N_1}$



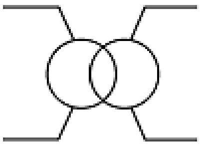
• Remarque

Attention au sens des courants. Si on inverse le sens de $i_2(t)$ alors les deux flux sont antagonistes et $\frac{v_2(t)}{v_1(t)} = - \frac{N_2}{N_1}$

• Symbolisme



ou



III.3. Exemple d'utilisations

• Transformateurs d'isolement :

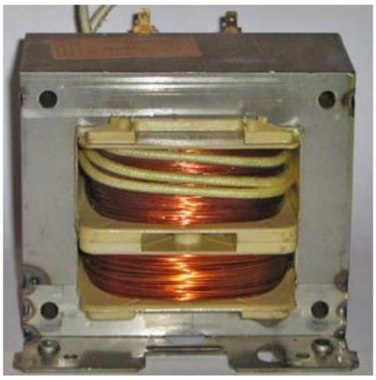
Si on choisit $N_1 = N_2$ alors $v_2(t) = v_1(t)$.

La tension dans le secondaire est la même que celle dans le primaire.

L'intérêt d'un tel dispositif réside dans le fait que le primaire et le secondaire n'ont aucun lien électrique. Si le primaire est alimenté par un GBF avec un point de masse, le secondaire aura la même ddp mais il n'y aura plus le potentiel zéro. Cela permet d'éviter des court-circuit avec l'oscilloscope par exemple.

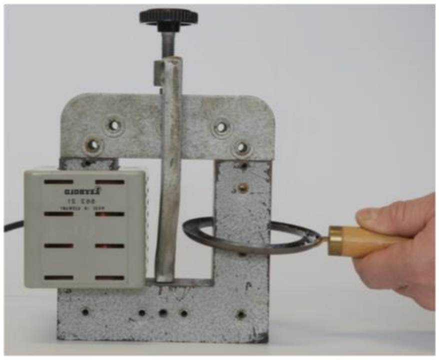
• <u>Transformateurs de tension</u> :

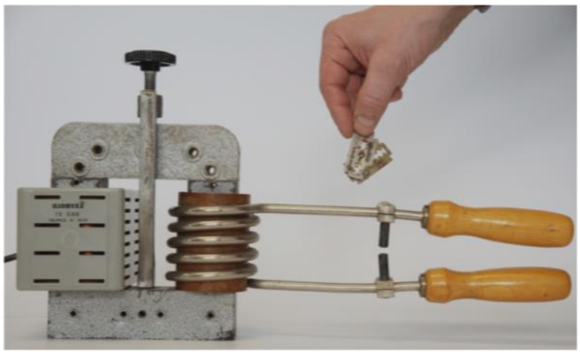
Alimentation 12 V d'ordinateur ou autres appareils, transformateurs haute tension d'EDF.



Transformateur élévateur de tension 220 V / 4500 V provenant d'un four à micro-ondes

• Transformateur de courant
Un petit nombre de spires au secondaire permet d'obtenir un grand courant et donc de faire fondre, de souder un milieu métallique :





BS4 : CIRCUIT FIXE DANS UN CHAMP MAGNETIQUE VARIABLE