Devoir surveillé n°8
Version n°2
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice d'intégration.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour toute fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ en escaliers, on ait $\displaystyle\int_a^b fg = 0$.
Montrer que f est nulle sur $[a, b]$.

II. Un petit problème de dénombrement.

Soit E et F deux ensembles finis, non vides, de cardinaux respectifs n et p. On note S_n^p le nombre de surjections de E sur F.

1) Calculer S_n^1, S_n^n, ainsi que S_n^p pour $p > n$.

2) On suppose $p \leqslant n$, montrer que

$$S_n^p = p(S_{n-1}^{p-1} + S_{n-1}^p).$$

Avec $a \in E$, on pourra s'intéresser aux surjections de $E \setminus \{a\}$ sur F.

3) Soit $0 \leqslant j \leqslant p$. Déterminer en fonction des S_n^k le nombre d'applications de E dans F prenant exactement j valeurs distinctes.

4) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$ et tout $p \geqslant 1$,

$$S_n^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n.$$

III. Dualité en dimension finie.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n non nulle.
L'ensemble $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires de E est un $\mathbb{K}$-ev appelé le *dual* de E et noté E^*.

Le dual de E^* est appelé le *bidual* de E et noté E^{**}. On a ainsi $(E^*)^* = E^{**}$.

Partie I — Base duale —

Soit $\mathscr{B} = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note e_i^* l'unique forme linéaire de E définie par la relation :

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

On rappelle que δ est appelé *symbole de Kronecker*.

La famille $(e_k^*)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est alors notée $\mathscr{B}^*$.

1) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, e_k^* est appelée l'*application coordonnée d'indice k de* $\mathscr{B}$. Justifier cette appellation en montrant que pour tout $x \in E$ on a $x = \sum\limits_{k=1}^{n} e_k^*(x)e_k$.

2) **a)** Montrer que $\mathscr{B}^*$ est une famille libre de E^*.

b) Montrer que pour toute $f \in E^*$, $f = \sum\limits_{k=1}^{n} f(e_k)e_k^*$.

c) En déduire que $\mathscr{B}^*$ est une base de E^*, appelée la *base duale de* $\mathscr{B}$.

Partie II — Bidual et base antéduale —

3) Pour tout $x \in E$ on note ev_x l'application $\begin{array}{ccc} E^* & \to & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & f(x) \end{array}$, appelée *évaluation de f en x*.

a) Soit $x \in E$. Montrer que ev_x appartient à E^{**}.

b) Montrer que l'application $\mathrm{ev} \ : \begin{array}{ccc} E & \to & E^{**} \\ x & \mapsto & \mathrm{ev}_x \end{array}$ est un isomorphisme de E sur E^{**}.

c) Quelle est l'application e_i^{**} ?

4) Soit $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de E^*. Montrer qu'il existe une et une seule base $\mathscr{G} = (g_1, \ldots, g_n)$ de E telle que $\mathscr{G}^* = \mathscr{F}$. Cette base est appelée *base antéduale de $\mathscr{F}$*.

Partie III — Orthogonalité —

Pour tout sev F de E^*, on appelle *orthogonal de F* la partie $F^\perp$ de E définie par

$$F^\perp = \{\, x \in E \;\mid\; \forall f \in F,\; f(x) = 0_E \,\}\,.$$

5) Soit F un sev de E^*.

- **a)** Montrer que $F^\perp$ est un sev de E.
- **b)** Soit p la dimension de F et $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F. On complète cette base en une base $(f_1, \dots, f_n)$ de E^*. On introduit la base antéduale $(e_1, \dots, e_n)$ associée.
  En utilisant ces objets, donner une base de $F^\perp$.
- **c)** En déduire l'égalité $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$.

6) Soient F et G deux sev de E^*.

- **a)** Montrer que si $F \subset G$, alors $G^\perp \subset F^\perp$.
- **b)** Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
- **c)** En déduire que $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

Partie IV — Équations —

Soient $f_1, f_2, \dots, f_q \in E^*$ et $F = \{\, x \in E \;\mid\; \forall k \in [\![1, q]\!],\; f_k(x) = 0 \,\}$.
On note r le rang de la famille $(f_1, f_2, \dots, f_q)$.

7) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - r$.

— FIN —