Devoir surveillé n°5
Version n°2

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Développement en série de Engel.

Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des suites *croissantes* de nombres *entiers supérieurs ou égaux* à 2. A chaque suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ élément de $\mathcal{T}$ on associe la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$s_1 = \frac{1}{q_1}, \quad s_2 = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2}, \quad \cdots \quad , \quad s_n = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2} + \cdots + \frac{1}{q_1 q_2 \cdots q_n}$$

1) Soit λ un nombre réel strictement supérieur à 1. Démontrer que $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda^k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que sa limite est un élément de $\left]\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda-1}\right]$.

2) **a)** Démontrer que, pour toute suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ élément de $\mathcal{T}$ la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite x est un élément de $]0,1]$.

b) Montrer que $q_1 = 1 + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ et que, pour tout entier k non nul,

$$q_{k+1} - 1 = \left\lfloor \frac{1}{q_1 q_2 \cdots q_k (x - s_k)} \right\rfloor.$$

3) Si $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite stationnaire de $\mathcal{T}$, montrer que la limite x de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un nombre rationnel.

4) **a)** Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(q'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites dans $\mathcal{T}$. Les suites qui leurs sont respectivement associées sont notées $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. La limite de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est x, celle de $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est x'.

On suppose qu'il existe un entier p tel que $q_p < q'_p$ et que

$$\forall n \in \{1, \ldots, p-1\}, q_n = q'_n$$

Montrer que $x' < x$.

b) Montrer que l'application φ de $\mathcal{T}$ dans $]0,1]$ qui, à chaque suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, associe la limite de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est injective.

5) On veut maintenant montrer que φ est surjective.
Soit $x \in]0,1]$. Nous définissons par récurrence les suites suivantes :
- $x_1 = x$;
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n = \left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor + 1$ et $x_{n+1} = q_n x_n - 1$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n > 0$.

b) Montrer que la suite (x_n) est décroissante, et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n \geqslant 2$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $s_n = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2} + \cdots + \frac{1}{q_1 q_2 \cdots q_n}$. Exprimer s_n en fonction de x_n et des $q_1, \ldots, q_n$, et en déduire que la suite (s_n) tend vers x.

d) Conclure.

La suite (s_n) ainsi construite s'appelle le *développement de x en série de Engel.*

6) En reprenant les notations de la question **5)**, déterminer la suite des entiers $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ du développement de Engel de :

$$x = \frac{1}{2} \tag{1}$$

$$x = \frac{3}{4} \tag{2}$$

7) En reprenant les notations de la question **5)**, montrer que x est rationnel si et seulement si les entiers q_n de son développement de Engel forment une suite stationnaire.

8) On rappelle que $\mathrm{e} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$. Montrer que e est irrationnel.

II. Théorèmes de Lagrange et de Cauchy.

Soit $(G, \times)$ un groupe fini. On adoptera des notations multiplicatives. Notamment, on notera 1 le neutre de G.

L'objectif de ce problème est d'établir deux résultats élémentaires sur G – les théorèmes de Lagrange et de Cauchy – puis d'en déduire deux applications.

Un ensemble X est dit *fini* s'il possède un nombre fini d'éléments. Ce nombre d'éléments est appelé *cardinal* de X et est noté $|X|$.

On acceptera les trois résultats élémentaires de dénombrement suivants :
- s'il existe une bijection entre deux ensembles finis, ces deux ensembles on le même cardinal ;
- dans un ensemble à n éléments, si l'on prend $n+1$ éléments, deux aux moins de ces éléments sont égaux (principe des tiroirs) ;
- si A et B sont deux ensembles finis de même cardinal vérifiant $A \subset B$, alors $A = B$.

I – Le théorème de Lagrange

Soit H un sous-groupe de G. On définit sur G la relation de *congruence modulo H* par

$$a \equiv b\ [H] \text{ si } ab^{-1} \in H.$$

On remarquera que

$$a \equiv b\ [H] \Leftrightarrow \exists h \in H,\ a = hb.$$

1) Montrer que la relation de congruence modulo H est une relation d'équivalence sur G.

2) Montrer que H est une classe d'équivalence pour cette relation.

3) Montrer que deux classes d'équivalence (quelconques) pour cette relation peuvent être mises en bijection l'une avec l'autre.

Indication : on pourra étudier l'effet des translations (*i.e.* des transformations de la forme $x \mapsto xa$, où $a \in G$) sur les classes d'équivalence de cette relation.

4) En déduire le théorème de Lagrange : $|H|$ divise $|G|$.

II – Ordre d'un élément

Pour un élément x de G, on définit l'orbite de x par

$$\langle x \rangle = \left\{ x^k \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

et l'ordre de x par

$$o(x) = \min \left\{ k \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; x^k = 1 \right\}.$$

5) Montrer que $\langle x \rangle$ est un sous-groupe de G.

6) Montrer que $o(x)$ est bien défini.

7) Montrer que $\langle x \rangle$ est de cardinal $o(x)$.

III – Le théorème de Cauchy

Soit p un nombre premier divisant $|G|$. On considère l'ensemble E des p-uplets d'éléments de G dont le produit vaut 1 :

$$E = \{ (x_1, \ldots, x_p) \in G^p \mid x_1 \cdots x_p = 1 \}.$$

Une permutation circulaire d'un p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ est un des p-uplets suivants :

$$(x_k, \ldots, x_p, x_1, \ldots, x_{k-1}),$$

où k parcourt l'ensemble $[\![1, p]\!]$.

On définit sur E la relation $\sim$ par :

$$(x_1, \ldots, x_p) \sim (y_1, \ldots, y_p) \text{ si } (y_1, \ldots, y_p) \text{ est une permutation circulaire de } (x_1, \ldots, x_p).$$

On observe aisément que $\sim$ définit une relation d'équivalence sur E (on ne demande pas de démontrer cela).

8) Soit $x_1, \ldots, x_{p-1} \in G$. Combien existe-t-il d'éléments x de G pour lesquels

$$(x_1, \ldots, x_{p-1}, x) \in E \;?$$

9) En déduire le nombre d'éléments de E.

10) Soit $(x_1, \ldots, x_p) \in E$. Montrer que toute permutation circulaire de $(x_1, \ldots, x_p)$ est aussi un élément de E.

11) Soit $(x_1, \dots, x_p) \in G$. Montrer que s'il existe $k \in [\![2, p]\!]$ tel que la permutation circulaire $(x_k, \dots, x_p, x_1, \dots, x_{k-1})$ soit égale à $(x_1, \dots, x_p)$, alors $x_1 = \cdots = x_p$.
Indication : on n'hésitera pas à étendre le p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ à une famille $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ par p-périodicité.

12) Que peut-on donc dire du nombre d'éléments d'une classe d'équivalence pour $\sim$, au vu des deux questions précédentes ?

13) En déduire que le nombre d'éléments x de G vérifiant $x^p = 1$ est un multiple de p.

14) En déduire le théorème de Cauchy : il existe $x \in G$ tel que $o(x) = p$.

IV – Deux applications

On dit que G est cyclique s'il existe $x \in G$ tel que $\langle x \rangle = G$.

15) On suppose qu'il existe un nombre premier p tel que $|G| = p$. Montrer que G est cyclique.

16) On suppose que G est commutatif et qu'il existe deux nombres premiers distincts p et q tels que $|G| = pq$. Montrer que G est cyclique.

— FIN —