Devoir à la maison n° 4

À rendre le 10 octobre

I. Récurrence de Cauchy et inégalité arithmético-géométrique.

1) Montrer le principe de récurrence descendante, qui s'énonce comme suit.
« Soit P un prédicat défini sur les entiers naturels, n_0 un entier naturel vérifiant
— $P(n_0)$;
— $\forall k \in [\![1, n_0]\!], P(k) \Rightarrow P(k-1)$.
Alors, $\forall k \in [\![0, n_0]\!],\ P(k)$. »

2) On introduit un nouveau schéma de récurrence. Soit P un prédicat défini sur les entiers naturels supérieurs à 2, vérifiant :
— $P(2)$;
— $\forall n \geqslant 3,\ P(n) \Rightarrow P(n-1)$;
— $\forall n \geqslant 2,\ (P(2) \wedge P(n)) \Rightarrow P(2n)$.
Montrer alors que $\forall n \geqslant 2,\ P(n)$.

On se propose maintenant de montrer l'inégalité arithmético-géométrique, qui relie les moyennes harmonique (à gauche dans (**IAG**)), arithmétique (à droite dans (**IAG**)) et géométrique (au centre dans (**IAG**)) d'un échantillon de nombres réels strictement positifs.

$$\forall n \geqslant 2, \forall (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n,\ \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i. \qquad \textbf{(IAG)}$$

Nous proposons pour cela de suivre une démonstration attibuée à Cauchy.

3) On note P le prédicat défini, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, par

$$P(n) = « \ \forall (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n,\ \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \ »,$$

a) Montrer $P(2)$.

b) Montrer que $\forall n \geqslant 3,\ P(n) \Rightarrow P(n-1)$.

c) Montrer que $\forall n \geqslant 2,\ (P(2) \wedge P(n)) \Rightarrow P(2n)$.

d) Conclure quant à la validité de l'inégalité arithmético-géométrique énoncée dans l'équation (**IAG**).

4) Montrer l'inégalité de concavité du logarithme : pour tout $n \geqslant 2$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i).$$

II. Algorithme russe de multiplication.

On propose l'algorithme suivant. Soit m et n deux entiers strictement positifs. Sur une première ligne, on écrit côte à côte m et n. Sur la ligne suivante, on écrit le quotient de la division euclidienne de m par 2 (on oublie donc les décimales) sous la valeur de m, et on écrit $2n$ sous la valeur de n. On continue ainsi : dans la première colonne, on passe d'une ligne à l'autre en divisant par 2, dans la deuxième colonne, on multiplie par 2. On s'arrête lorsqu'on a obtenu 1 dans la première colonne. On barre ensuite toutes les lignes pour lesquelles le nombre situé dans la première colonne est pair. On fait enfin la somme des nombres situés dans la deuxième colonne et non barrés. On note $\varphi(m,n)$ l'entier obtenu.
Voici un exemple pour 11 et 17.

$$\begin{array}{cc} 11 & 17 \\ 5 & 34 \\ \cancel{2} & \cancel{64} \\ 1 & 136 \\ \hline & 187 \end{array}$$

Montrer que $\varphi(m,n) = mn$ pour tout $m,n \in \mathbb{N}^*$.

— FIN —