# Feuille d'exercice n° 09 : **Calcul matriciel**

**Exercice 1** Effectuer les produit de matrices suivants.

**1)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$

**Exercice 2** Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Calculer $A^n(\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

**Exercice 3** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si tous les coefficients de $A$ sont positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chaque ligne de $A$ est égale à 1.

Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.

**Exercice 4** Pour chacune de ces matrices, déterminer si elle est inversible et, le cas échéant, donner son inverse.

**1)** $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ **2)** $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ **3)** $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Exercice 5** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$.

**1)** Calculer $B^2$, $B^3$, puis en déduire la valeur de $B^n$ pour tout entier naturel $n$.

**2)** Développer $(B + I_3)^n$ par la formule du binôme et simplifier.

**3)** En déduire $A^n$ pour tout entier naturel $n$.

**4)** La relation précédente est-elle aussi valable pour les entiers $n$ négatifs ?

**Exercice 6** Soit $a, b \in \mathbb{C}$.

**1)** Trouver les matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

**2)** De même avec $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

**Exercice 7** Soit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{C}$. On considère la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**1)** Calculer $M^2, M^3, M^4$ et $M^5$.

**2)** Pouvez-vous calculer $M^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ? Et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ ?

**Exercice 8** ( ) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**1)** Calculer $A^2$ et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$ , où $I_3$ est la matrice identité $3 \times 3$.

**2)** En déduire que $A$ est inversible et déterminer son inverse.

**Exercice 9** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), MH = HM.$$

**Exercice 10** Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

**1)** Déterminer une matrice $L_1$ triangulaire inférieure et une matrice $U$ triangulaire supérieure telles que $L_1 M = U$.

*Indication :* on écrira $L_1$ comme produit de matrices d'opérations élémentaires.

**2)** Déterminer une matrice $L$ triangulaire inférieure telle que $M = LU$.

**3)** Résoudre les systèmes suivants :

**a)** $MX = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ **b)** $MX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **c)** $MX = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$