LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON
SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR
CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I.
ANNÉE 2018 - 2019

C4 : MODÉLISATION CINÉMATIQUES DES SYSTÈMES COMPOSÉS DE CHAINES DE SOLIDES

TD 10 - Cinématique des solides(C4-4)

8 Janvier 2019

Compétences

- **Analyser :** Apprécier la pertinence et la validité des résultats :
  - unités du système international;
  - homogénéité des grandeurs.
- **Modéliser :** Proposer un modèle de connaissance et de comportement :
  - Solide indéformable;
  - référentiel, repère;
  - équivalence solide/référentiel;
  - vecteur-vitesse angulaire de deux référentiels en mouvement l'un par rapport à l'autre";
- **Résoudre :** Proposer un modèle de connaissance et de comportement
  - Modélisation plane;
  - Torseur cinématique;

1 Mécanisme d'ouverture de porte en accordéon

La figure 1 ci-dessous représente une porte "accordéon" motorisée. L'extrémité A du battant 1 est en liaison pivot avec les murs du bâtiment 0. L'extrémité C du battant 2 se déplace dans un rail. Elle est reliée à un maillon de la chaîne 3 qui est mise en mouvement par un moto-réducteur 4. Le maillon C se déplace à vitesse constante v. On considère la phase de fermeture de la porte, (à l'instant initial les points A et C sont confondus). On note a les largeurs AB et BC des battants.

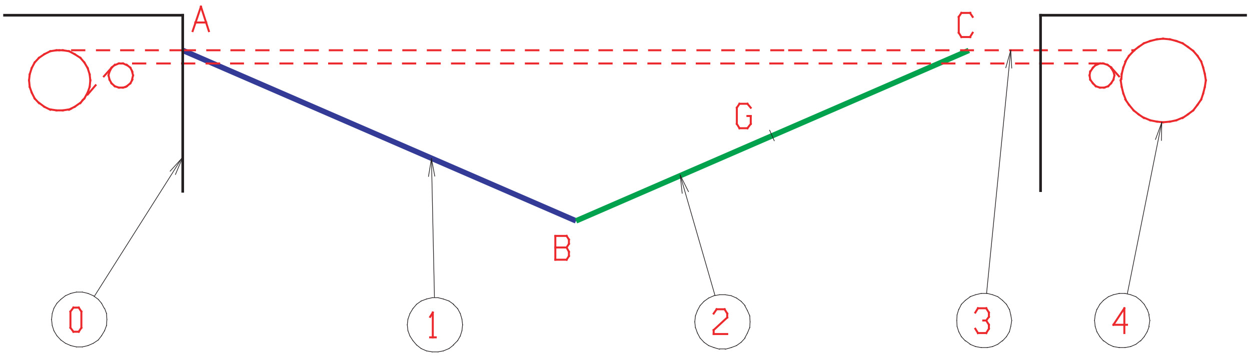


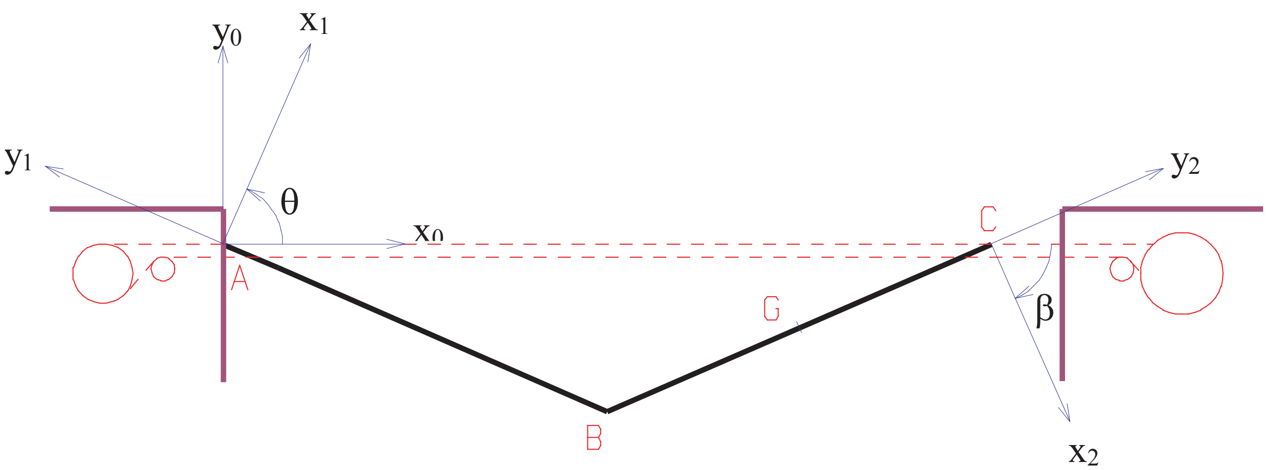
FIGURE 1 – Système d'ouverture de porte en accordéon

1. **Paramétrage :**
   - Associer un repère aux solides 0, 1 et 2 ;
   - paramétrer leur position relative.
2. **Mouvement, par rapport au bâtiment 0, du maillon de chaîne relié au battant :**
   Caractériser ce mouvement par son torseur cinématique en fonction de v : $\left\{\mathscr{V}_{(3/0)}\right\}$ au point C.
3. **Mouvement du battant 1 par rapport au bâtiment 0 :**
   Donner en fonction du temps, de a et v :
   - le vecteur rotation : $\overrightarrow{\Omega}(1/0)$ (on écrira la fermeture géométrique) ;
   - la vitesse du point A : $\overrightarrow{V}(A \in 1/0)$ et la vitesse du point B : $\overrightarrow{V}(B \in 1/0)$.
4. **Mouvement du battant 2 par rapport au bâtiment 0**
   Déterminer en fonction de θ, $\dot{\theta}$ et a :
   - la vitesse du point C : $\overrightarrow{V}(C \in 2/0)$;
   - le vecteur rotation : $\overrightarrow{\Omega}(2/0)$;
   - le vecteur rotation : $\overrightarrow{\Omega}(2/1)$;
   - la trajectoire de G centre d'inertie de 2 dans R_0, (le point G se trouve au milieu du battant) ;
   - la vitesse de G : $\overrightarrow{V}(G \in 2/0)$, en dérivant ses cordonnées dans R0 puis en utilisant la relation de champ des vitesses ;
   - l'accélération de G : $\overrightarrow{\Gamma}(G \in 2/0)$.

Corrigé

1 Corrigé : mécanisme d'ouverture de porte en accordéon

1. **Paramétrage :**
   - Associer un repère aux solides 0, 1 et 2 ;



   - paramétrer leur position relative.
     La position de 1 par rapport à 0 est définie par l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}\right)$ et la position de 2 par rapport à 0 par l'angle $\beta = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_2}\right)$. Les axes sont associés à la géométrie des pièces et choisis pour que tous les axes $\overrightarrow{y_1}$ coïncident à l'instant initial, ainsi à $t = 0$ on a $\theta = \beta = 0$.
2. **Mouvement, par rapport au bâtiment 0, du maillon de chaîne relié au battant :**

$$\left\{\mathscr{V}_{(3/0)}\right\} = {}_{C}\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{(3/0)}} \\ \overrightarrow{V_{(C\in 3/0)}} \end{array} \right\}$$

   Le maillon translate, donc

$$\left\{\mathscr{V}_{(3/0)}\right\} = \underset{C}{\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{(3/0)}} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V_{(C\in 3/0)}} = v\,\overrightarrow{x_0} \end{array} \right\}}$$

3. **Mouvement du battant 1 par rapport au bâtiment 0 :**
   - le vecteur rotation : $\overrightarrow{\Omega}(1/0)$ (on écrira la fermeture géométrique) ;
   $\overrightarrow{\Omega_{(1/0)}} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{z}$.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$$

$$-a\,\overrightarrow{y_1} + a\,\overrightarrow{y_2} - v\,t\,\overrightarrow{x_0} = \overrightarrow{0}.$$

Projetons dans R_0 :

$$\overrightarrow{y_1} = -\sin\theta\,\overrightarrow{x_0} + \cos\theta\,\overrightarrow{y_0}$$

$$\overrightarrow{y_2} = -\sin\beta\,\overrightarrow{x_0} + \cos\beta\,\overrightarrow{y_0}$$

   - Sur $\overrightarrow{x_0}$: $a\sin\theta - a\,sin\beta - v\,t = 0$ (1)
   - Sur $\overrightarrow{y_0}$: $-a\cos\theta + a\,cos\beta = 0$ (2)
   - L'équation (2) nous donne que $\beta = \pm\theta$.
   - L'équation (1) nous donne que $v\,t = a\sin\theta - a\,sin\beta$ pour $t \neq 0$, $v\,t \neq 0$ donc $\beta = -\theta$.

Ainsi $v\,t = 2\,a\,\sin\theta$ soit $\theta = Arcsi\left(\frac{v\,t}{2\,a}\right)$.
Dérivons $v\,t = 2\,a\,\sin\theta$, on obtient alors :

$$v = 2\,a\,\dot{\theta}\cos\theta = 2\,a\,\dot{\theta}\sqrt{1-\sin^2\theta} = 2\,a\,\dot{\theta}\sqrt{1-\left(\frac{v\,t}{2\,a}\right)^2}$$

d'où,

$$\dot{\theta} = \frac{v}{\sqrt{4\,a^2 - v^2\,t^2}}$$

Ainsi

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega_{(1/0)}} = \frac{v}{\sqrt{4\,a^2 - v^2\,t^2}}\overrightarrow{z}}$$

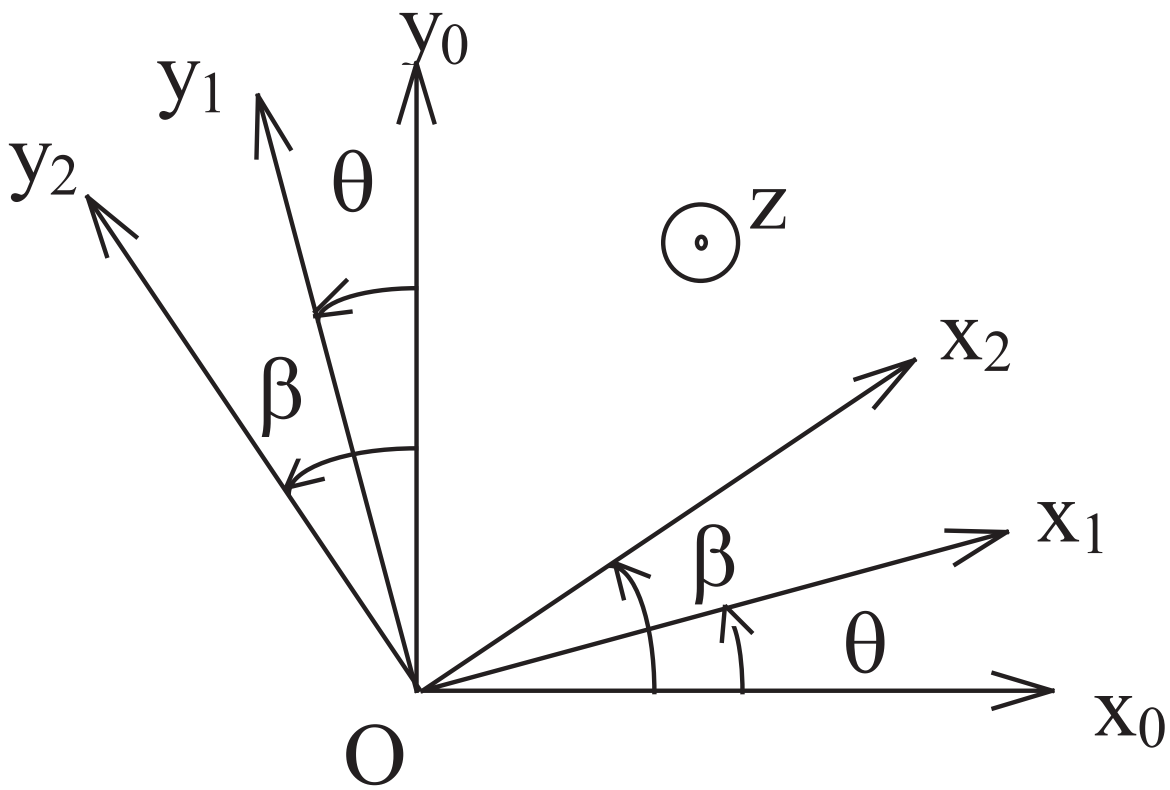
   - la vitesse du point A : $\overrightarrow{V}(A \in 1/0)$ et la vitesse du point B : $\overrightarrow{V}(B \in 1/0)$.

$$\boxed{\overrightarrow{V}(A \in 1/0) = \overrightarrow{0}}$$

$$\overrightarrow{V}(B \in 1/0) = \overrightarrow{V}(A \in 1/0) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{(1/0)}} = \overrightarrow{0} + a\,\overrightarrow{y_1} \wedge \dot{\theta}\,\overrightarrow{z} = a\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{x_1}.$$

Ainsi

$$\boxed{\overrightarrow{V}(B \in 1/0) = \frac{a\,v}{\sqrt{4\,a^2 - v^2\,t^2}}\overrightarrow{x_1}}$$



4. **Mouvement du battant 2 par rapport au bâtiment 0**
   Déterminer en fonction de θ, $\dot{\theta}$ et a :
   - la vitesse du point C : $\overrightarrow{V}(C \in 2/0)$;

$$\overrightarrow{V}(C \in 2/0) = \overrightarrow{V}(C \in 3/0) = v\,\overrightarrow{x_0} = 2\,a\dot{\theta}\,\cos\theta\,\overrightarrow{x_0}.$$

   - le vecteur rotation : $\overrightarrow{\Omega}(2/0)$;

$$\overrightarrow{\Omega_{(2/0)}} = \dot{\beta}\,\overrightarrow{z} = -\dot{\theta}\,\overrightarrow{z}.$$

   - le vecteur rotation : $\overrightarrow{\Omega}(2/1)$;

$$\overrightarrow{\Omega_{(2/1)}} = \dot{\beta}\,\overrightarrow{z} = -\dot{\theta}\,\overrightarrow{z}.$$

   - la trajectoire de G centre d'inertie de 2 dans R_0, (le point G se trouve au milieu du battant) ;

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = -a\,\overrightarrow{y_1} + \frac{a}{2}\,\overrightarrow{y_2}.$$

   En projetant dans R_0 :

$$\overrightarrow{y_1} = -\sin\theta\,\overrightarrow{x_0} + \cos\theta\,\overrightarrow{y_0}$$

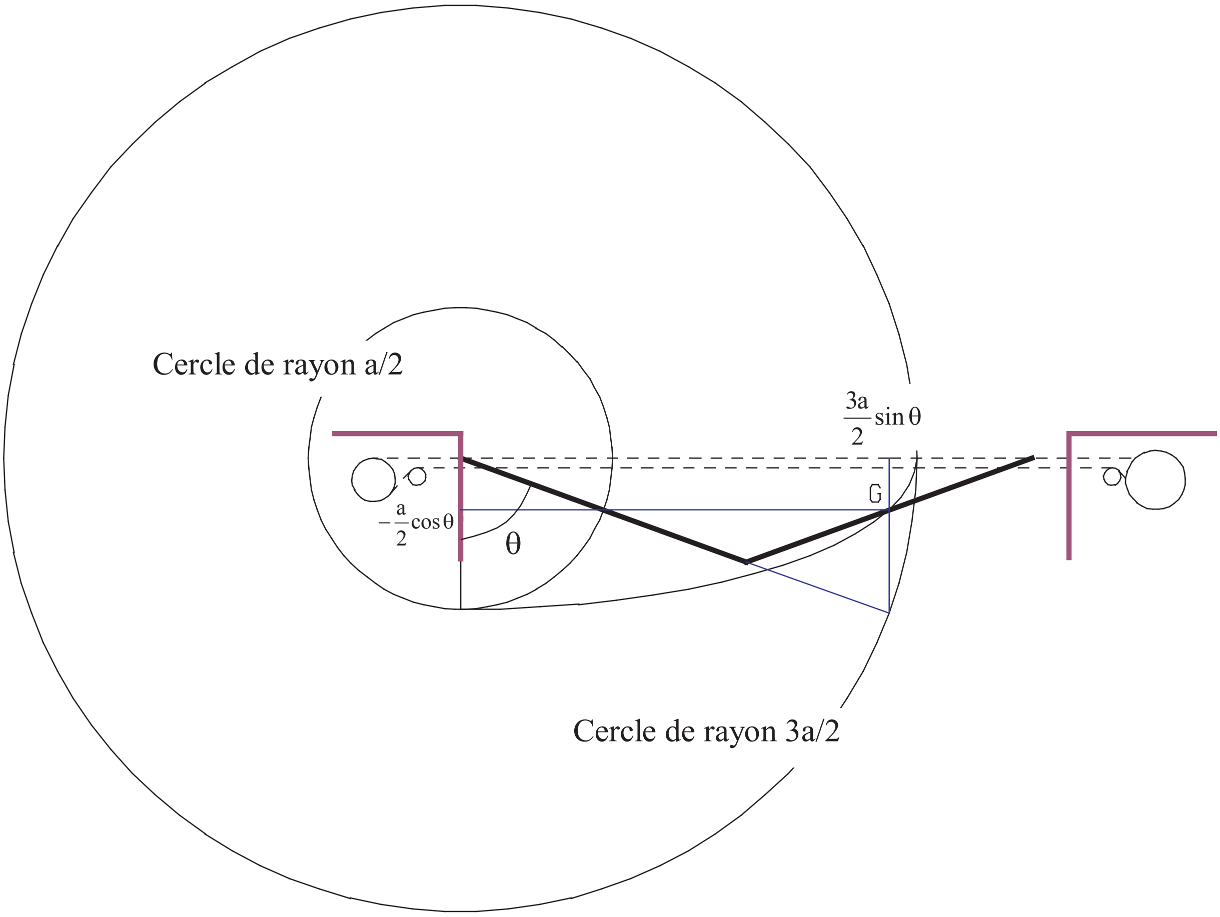
$$\overrightarrow{y_2} = -\sin\beta\,\overrightarrow{x_0} + \cos\beta\,\overrightarrow{y_0}$$

   On obtient,

$$x_G = a\,\sin\theta - \frac{a}{2}\,\sin\beta = \frac{3\,a}{2}\,\sin\theta$$

$$y_G = -a\,\cos\theta + \frac{a}{2}\,\cos\beta = -\frac{a}{2}\,\cos\theta$$

La trajectoire de G est une ellipse de demi grand axe $\frac{3\,a}{2}$ et de demi petit axe $\frac{a}{2}$.



- la vitesse de G : $\overrightarrow{V}(G \in 2/0)$, en dérivant ses cordonnées dans R0 puis en utilisant la relation de champ des vitesses;
  En dérivant les coordonnées x_G et y_G dans R_0 :

$$\boxed{\overrightarrow{V}(G \in 2/0) = \frac{a}{2}\left(3\,\cos\theta\,\overrightarrow{x_0} + \sin\theta\,\overrightarrow{y_0}\right)}$$

  ou bien en écrivant :

$$\overrightarrow{V}(G \in 2/0) = \overrightarrow{V}(B \in 2/0) + \overrightarrow{GB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{(2/0)}} = a\,\dot\theta\,\overrightarrow{x_1} - \frac{a}{2}\,\overrightarrow{y_2} \wedge \left(-\dot\theta\,\overrightarrow{z}\right) = a\,\dot\theta\,\overrightarrow{x_1} + \frac{a}{2}\dot\theta\,\overrightarrow{x_2}.$$

- l'accélération de G : $\overrightarrow{\Gamma}(G \in 2/0)$.

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma}(G \in 2/0) = a\left(\ddot\theta\,\overrightarrow{x_1} + \dot\theta^2\,\overrightarrow{y_1}\right) + \frac{a}{2}\left(\ddot\theta\,\overrightarrow{x_2} - \dot\theta^2\,\overrightarrow{y_2}\right).}$$