

DS n° 08 : Fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom :

Note :

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

Algèbre linéaire

On considère l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 $\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 3y + z \\ -x + y + z \\ 2x + 4y + z \end{pmatrix}$.

Donner une base de chacun des sev de \mathbb{R}^3 suivants.

$\text{Ker}(\varphi) :$

(1)

$\text{Im}(\varphi) :$

(2)

Soit $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ la projection par rapport à $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z\}$ et parallèlement à $\text{Vect}(1, 1, 1)$.
Alors

$$p : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto$$

(3)

Intégration

Calculer les intégrales suivantes. Pour la première, on pourra commencer par poser $t = e^x$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{2 \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x + 1} =$$

(4)

$$\int_1^e \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx =$$

(5)

Une valeur approchée rationnelle de \sqrt{e} à 10^{-2} près est :

(6)

Indiquer la limite (dans $\overline{\mathbb{R}}$) des suites de termes généraux suivants :

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + 2nk + k^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty}$$

(7)

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{\sqrt{n^3 + 2nk^2 + k^3}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty}$$

(8)

Dénombrement

Une main est un ensemble de cartes. On considère les mains de 5 cartes que l'on peut tirer (sans remise) d'un jeu de 52 cartes. Combien y a-t-il de mains

différentes ?

(9)

avec un seul as ?

(10)

avec au moins un valet ?

(11)

Combien y a-t-il de bijections f de $\llbracket 1, 12 \rrbracket$ dans lui-même possédant les propriétés suivantes ?

pour tout $n \in \llbracket 1, 12 \rrbracket$, n et $f(n)$ sont de même parité :

(12)

$\forall n \in \llbracket 1, 12 \rrbracket, (3 \mid n) \Rightarrow (3 \mid f(n)) :$

(13)

les deux propriétés précédentes :

(14)

— FIN —