

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Note :

Intégration.

$$g'(x) = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| = 1. \quad (1)$$
$$\int_1^2 x^2 \ln x \, dx = \quad (2)$$

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}} = \quad (3)$$

$$x \mapsto \left| \begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|. \quad (4)$$
$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^n \tan\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \quad (6)$$

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \quad (7)$$

Soit $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi^5}{3840} - \frac{\pi^7}{645120}$. Donner un nombre simple dont α est une valeur approchée à 10^{-2} près.

(8)

Dénombrement.

Un taupin a dans sa bibliothèque 4 livres de mathématiques, 5 livres de physique, deux livres d'informatique et un livre d'anglais (*H2G2, of course*).

Combien a-t-il de manières de ranger sa bibliothèque en regroupant les livres matière par matière ?

(9)

Et de la ranger en ne plaçant jamais les deux livres d'informatique côte à côte ?

(10)

Soit $k \in \mathbb{N}$, combien y a-t-il d'entiers compris entre 1 et 10^k dont la somme des chiffres vaut 3 ?

(11)

Divers

On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : y' + \text{th}(x)y = x$. L'ensemble des solutions homogènes de (\mathcal{E}) est

(12)

et une solution particulière de (\mathcal{E}) est

(13)

L'unique solution de (\mathcal{E}) vérifiant $y(1) = 0$ est

(14)

Combien les racines 93^{èmes} de l'unité ont-elles de parties réelles distinctes ?

(15)

— FIN —