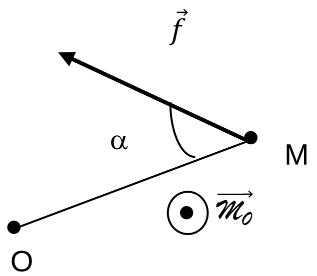
# M7 MOMENT CINETIQUE

## I. Le moment d'une force

### I.1. Le moment d'une force par rapport à un point




Référentiel : $\mathfrak{R}$ Galiléen
Système : Particule M(m)
Forces : $\vec{f}$

• Définition

Soit O un point quelconque de $\mathfrak{R}$, le moment de la force en O relativement à $\mathfrak{R}$ : $\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}$

Unités : N.m
Dimensions : $M.L^2T^{-2}$
Le moment est orthogonal à la force $\vec{f}$ et à $\overrightarrow{OM}$ , il a pour module : $\|\vec{f}\|$OM sinα, sa direction est donnée par la règle de la main droite ou du tire-bouchon.

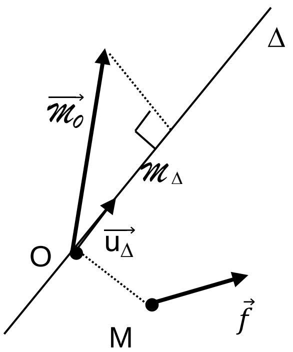
• Changement d'origine

Recherchons le lien qu'il existe entre le moment de la force $\vec{f}$ par rapport au point O et celui par rapport à A.
Par définition : $\vec{\mathcal{M}}_A = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f} = \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}\right) \wedge \vec{f}$

Ainsi : $\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{\mathcal{M}}_0 + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{f}$

### I.2. Le moment d'une force par rapport à un axe

#### I.2.1. Définition




Référentiel : $\mathfrak{R}$ Galiléen
Système : Particule M(m)
Forces : $\vec{f}$
Soit Δ un axe passant par le point O et de vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$
Le moment de la force en O est $\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}$

Le moment $\mathcal{M}_\Delta$ de la force $\vec{f}$ par rapport à l'axe Δ est $\mathcal{M}_\Delta = \vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{u}_\Delta$

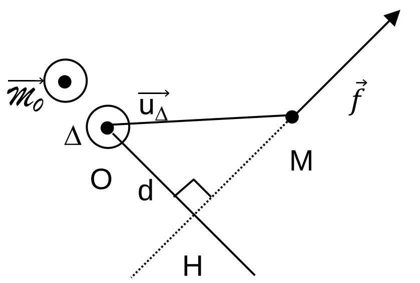
Cela correspond en fait à la projection du moment $\vec{\mathcal{M}}_O$ sur l'axe Δ.

#### I.2.2. Cas d'une force parallèle à l'axe

Le moment d'une force par rapport à un axe Δ est nul si la force est parallèle à cet axe.

Démonstration
Si la force est parallèle à l'axe le moment de la force en O sera perpendiculaire à la force est donc à l'axe Δ, sa projection sur cet axe sera donc nulle.

### I.2.3. Le « bras de levier »

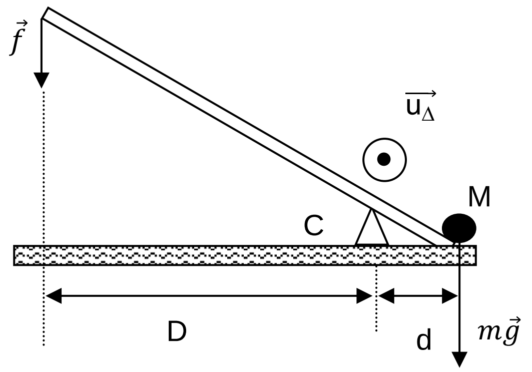



• Soit $\Pi$ le plan défini par les vecteurs $\vec{f}$ et $\overrightarrow{OM}$.
On choisit comme axe $\Delta$ l'axe perpendiculaire à $\Pi$ et passant par O.
Ainsi par le choix de cet axe le moment de la force en O est porté par l'axe $\Delta$.
Ainsi $\vec{\mathcal{M}}_O = \pm\|\vec{\mathcal{M}}_0\|.\vec{u}_\Delta \Rightarrow \mathcal{M}_\Delta = \vec{\mathcal{M}}_O.\vec{u}_\Delta = \pm\|\vec{\mathcal{M}}_0\|$.
Dans la pratique on utilise une expression simplifiée de $\mathcal{M}_\Delta$ en considérant H le projeté de O sur droite de direction $\vec{f}$, on note alors d = OH la distance entre D et $\Delta$.

On a alors $\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{f} = \left(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HM}\right)\wedge\vec{f} = \overrightarrow{OH}\wedge\vec{f}$

En effet par construction $\overrightarrow{HM}$ est parallèle à $\vec{f}$, le produit vectoriel est donc nul.
On a donc $|\mathcal{M}_\Delta| = \|\vec{\mathcal{M}}_0\|$ = d.f avec d la distance, appelée « bras de levier » , entre le support de la force et l'axe $\Delta$.

• Le levier dont le rôle est connu depuis longtemps permet de démultiplier une action motrice.




Exemple : Pour déplacer un objet lourd que l'on matérialisera par un point M de masse m, on exercera une force $\vec{f}$ sur l'extrémité d'une barre en plaçant l'autre extrémité sous l'objet. On placera ensuite une cale C proche de l'objet de sorte que le bras de levier de la force (D) soit bien plus grand que celui du point (d).
Ainsi le moment des forces par rapport à l'axe horizontal passant par C :

Pour la force $\vec{f}$ : $\mathcal{M}_C$ = Df

Pour le poids : $\mathcal{M}'_C$ = -dmg

On montre que si les frottements sont négligeables et si la masse de la barre est très inférieure à celle de l'objet alors ce système permet de le soulevé si :

$$\mathcal{M}_C > \mathcal{M}'_C \Rightarrow f > mgd/D$$

Ainsi on exercera une force f << mg si d << D

## II. Le moment cinétique

### II.1. Définition

Référentiel : $\Re$ Galiléen
Système : M(m) de quantité de mouvement $\vec{p} = m\,\vec{v}$
Soit O un point quelconque de $\Re$, pas nécessairement fixe.

Le moment cinétique de M en O relativement à $\Re$ : $\vec{L}_0\,(M) = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{p} = \overrightarrow{OM}\wedge m\,\vec{v}$

Unités : $kg.m^2.s^{-1}$
Dimensions : $M.L^2T^{-1}$
Le moment cinétique est orthogonal à la vitesse $\vec{v}$ et à $\overrightarrow{OM}$, il a pour module :$\|m\,\vec{v}\|$ OM sin$\beta$, sa direction est donnée par la règle de la main droite ou du tire-bouchon.

• Changement d'origine
Recherchons le lien qu'il existe entre le moment cinétique par rapport au point A et celui par rapport à O.
Par définition : $\vec{L}_A\,(M) = \overrightarrow{AM}\wedge m\,\vec{v} = \left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM}\right)\wedge m\,\vec{v}$
Ainsi : $\vec{L}_A = \vec{L}_0 + \overrightarrow{OA}\wedge m\vec{v}$

### II.2. Le moment cinétique par rapport à un axe

Référentiel : $\Re$ Galiléen
Système : Particule M(m)

Soit $\Delta$ un axe passant par le point O et de vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\Delta}$.
Le moment cinétique en O est $\overrightarrow{L_0}$ (M)= $\overrightarrow{OM}\wedge\vec{p}$ = $\overrightarrow{OM}\wedge m\,\vec{v}$

Le moment $L_\Delta$ par rapport à l'axe $\Delta$ est $L_\Delta = \overrightarrow{L_0}.\,\overrightarrow{u_\Delta}$

Cela correspond en fait à la projection du moment $\overrightarrow{L_0}$ sur l'axe $\Delta$.

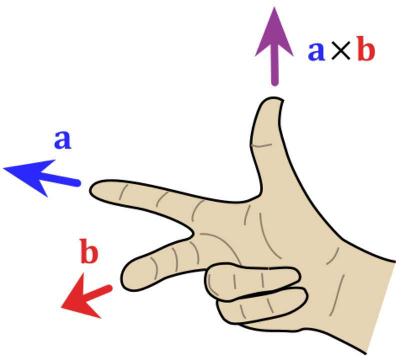
### II.3. Cas où le point matériel est en mouvement circulaire

Il est alors judicieux d'utiliser les coordonnées cylindriques en faisant coïncider le plan polaire avec le plan du cercle et l'origine avec le centre du cercle.
On a alors :

$\overrightarrow{OM} = R\,\overrightarrow{e_r}$
$\vec{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$
Ainsi $\overrightarrow{L_0}$ (M) = $\overrightarrow{OM}\wedge m\,\vec{v} = mR^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$

Soit $\Delta$ un axe passant par le point O et de vecteur unitaire $\overrightarrow{e_z}$ :
$L_\Delta = mR^2\dot{\theta}$

On peut trouver la direction du moment cinétique avec la règle de la main droite.




→ Lorsque la particule tourne dans le sens direct autour de $\overrightarrow{e_z}$ ($\dot{\theta}>0$)
$\overrightarrow{L_0}$ est selon $+\overrightarrow{e_z}$
→ Lorsque la particule tourne dans le sens indirect autour de $\overrightarrow{e_z}$ ($\dot{\theta}<0$)
$\overrightarrow{L_0}$ est selon $-\overrightarrow{e_z}$

Ainsi le signe de $L_\Delta$ permet de déterminer le sens de rotation de M

## III. Théorème du moment cinétique pour un point matériel

### III.1. Théorème du moment cinétique en un point fixe

Si O est un point fixe : $\overrightarrow{L_0}$ (M)= $\overrightarrow{OM}\wedge\vec{p}$

Dans $\Re$ : $\dfrac{d\overrightarrow{L_0}}{dt}(M) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\wedge\vec{p} + \overrightarrow{OM}\wedge m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}\wedge m\vec{v} + \overrightarrow{OM}\wedge\vec{f}$

D'où $\dfrac{d\overrightarrow{L_0}}{dt}(M) = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{f} = \overrightarrow{\mathcal{M}_0}$ moment de la force en O

En un point fixe O d'un référentiel Galiléen $\Re$, la dérivée par rapport au temps, calculée dans $\Re$, du moment cinétique d'une particule est égale au moment de la force appliquée à celle-ci.

### III.2. Théorème du moment cinétique en projection sur un axe fixe

Il suffit de projeter la relation précédente sur l'axe de vecteur directeur $\overrightarrow{u_\Delta}$

$\overrightarrow{u_\Delta}.\dfrac{d\overrightarrow{L_0}}{dt}(M) = (\overrightarrow{OM}\wedge\vec{f}).\,\overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{\mathcal{M}_0}.\overrightarrow{u_\Delta} = \mathcal{M}_\Delta$

Comme l'axe $\Delta$ est fixe : $\overrightarrow{u_\Delta}.\dfrac{d\overrightarrow{L_0}}{dt}(M) = .\dfrac{d\overrightarrow{u_\Delta}.\overrightarrow{L_0}}{dt} = \dfrac{dL_\Delta}{dt}$

D'où le théorème : $\dfrac{dL_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_\Delta$

### III.3. Conservation du moment cinétique

Système : A ($m_A$) B ($m_B$) soumises à leur seule interaction ⇒ {A,B} est isolé.
Référentiel : Galiléen

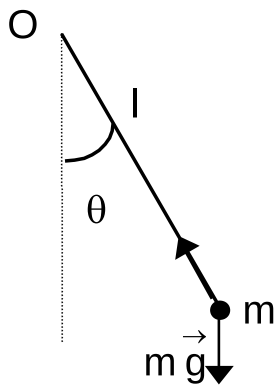
Loi : Théorème du moment cinétique $\frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}$

Dérivée dans $\Re$ : $\frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{f}_{B/A} + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{f}_{A/B} = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \wedge \vec{f}_{B/A} = \vec{0}$

En effet $\vec{f}_{B/A}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$
Le moment cinétique d'un système isolé se conserve.

### III.4. Exemple le pendule simple

Il est pratique d'utiliser le théorème du moment cinétique lorsqu'une force de liaison passe par un point fixe. L'utilisation du théorème par rapport à ce point permet une obtention rapide de l'équation du mouvement.




- Référentiel : $\Re$
- Système : M(m)
- Forces : La tension du fil $\vec{T}$
  Le poids $\vec{p} = m\vec{g}$
- Loi : Théorème du moment cinétique :

$\overrightarrow{OM} = l\,\overrightarrow{e_r}$

$\vec{v} = l\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$

→ Le moment cinétique : $\overrightarrow{L_0}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\,\vec{v} = ml^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$

→ La dérivée du moment cinétique : $\frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\overrightarrow{e_z}$

→ Le moment des forces

$\overrightarrow{\mathcal{M}_O} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{T}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{p}) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{g} = -mgl\sin\theta\,\overrightarrow{e_z}$

→ Théorème du moment cinétique

$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$

$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta = -\omega_0^2 \sin\theta$

# M7 MOMENT CINETIQUE