

DS n°5 : Fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom :

Note :

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

Limites de fonctions.

Calculer les limites de fonctions suivantes (écrire PAS DE LIMITE le cas échéant) :

$$\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0}$$

(1)

$$\mathbf{1}_{\mathbb{R}^*} \left(x^2 \cos \left(\frac{1}{x} \right) \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0}$$

(2)

$$(1+x)^{1/x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty}$$

(3)

Continuité.

$$\text{Soit } \psi : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} x+1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x-1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{cases} \quad \text{et } f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x \sin \left(\frac{1}{x} \right) \end{cases}.$$

On peut prolonger f par continuité en 0 en posant

$$f(0) =$$

(4)

Si f est ainsi prolongée, $\psi \circ f$ est continue sur

(5)

Donner un exemple d'application $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ bijective, discontinue en tout point de $[0, 1]$.

(6)

Algèbre.

On munit \mathbb{R}^2 d'une structure de groupe avec la loi $*$ par : $(x, y) * (a, b) = (x + a, ye^a + be^{-x})$.

Le neutre de ce groupe est

. (7)

Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'inverse de (x, y) est

. (8)

Le groupe $(\mathbb{R}^2, *)$ est-il abélien (répondre OUI ou NON) ?

(9)

Suites.

Déterminer la suite réelle u vérifiant : $u_1 = 7$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 4$.

. (10)

Déterminer la suite réelle u vérifiant : $u_0 = 1, u_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

. (11)

Déterminer l'ensemble des suites u vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{\sqrt{2}}{2}u_{n+1} - \frac{u_n}{4}$.

. (12)

On considère une suite réelle v vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n^2 + \frac{3}{16}$.

Alors v converge si et seulement si

$$v_0 \in \div style="border: 1px solid black; width: 285px; height: 60px; display: flex; align-items: center; justify-content: center;">$$

En cas de convergence,

$$v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \div style="border: 1px solid black; width: 378px; height: 90px; display: flex; align-items: center; justify-content: center;">$$

— FIN —