Ensembles - un exercice supplémentaire

Exercice 1 On se propose d'étudier une nouvelle opération sur les parties d'un ensemble E. On introduit la *différence symétrique* de deux parties A et B de E, comme étant

$$A\Delta B = (A\cup B)\backslash(A\cap B).$$

1) Réaliser un schéma représentant E, A, B et $A\Delta B$ en toute généralité.

2) Montrer que $\forall A \in \mathscr{P}(E),\ \forall B \in \mathscr{P}(E),\ A\Delta B = (A\backslash B)\cup(B\backslash A)$.

3) Soit A et B deux parties de E. Donner la table de vérité du connecteur logique $\otimes$ vérifiant $\forall x \in E,\ x \in A\Delta B \Leftrightarrow (x\in A)\otimes(x\in B)$. Comment l'appelle-t-on usuellement ?

4) Soit A une partie de E, donner $A\Delta\varnothing$.

5) Montrer que $\forall (A,B,C)\in\mathscr{P}(E)^3$, $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

6) Montrer que $(\mathscr{P}(E),\Delta)$ est un groupe abélien (on dit aussi commutatif).

7) Soit A, B et C trois parties de E. Que vaut $A\cap(B\Delta C)$? Quelle est la structure de $(\mathscr{P}(E),\Delta,\cap)$?

8) Soit $A_1,\dots,A_n$ n parties de E. Montrer que x est un élément de $A_1\Delta\dots\Delta A_n$ si et seulement si x est un élément d'un nombre impair de parties A_i.