Devoir surveillé n°3

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Une équation différentielle.

L'objectif de ce problème est de déterminer toutes les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \quad f''(x) + f(-x) = x + \cos(x). \qquad (\mathscr{E})$$

I – Questions préliminaires :

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y'' + y = \cos(x). \qquad (\mathscr{E}_1)$$

2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y'' - y = x. \qquad (\mathscr{E}_2)$$

II – Analyse :

Soit f une solution de $(\mathscr{E})$. On considère les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

3) Que peut-on dire de la parité de g et de h ? Exprimer f en fonction de g et h.

4) **a)** Établir que la fonction g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_1)$.

b) En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \alpha \cos x + \frac{1}{2} x \sin(x)$.

5) **a)** Établir que la fonction h est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_2)$.

b) En déduire qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \beta \operatorname{sh} x - x$.

6) Déduire des questions précédentes la forme nécessaire de la fonction f.

III – Synthèse :

7) Vérifier réciproquement que toutes les fonctions f obtenues précédemment sont bien solutions de l'équation $(\mathscr{E})$ et donner l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$.

II. Étude d'une homographie.

Dans tout le problème, on confondra le complexe z et le point du plan d'affixe z.
a, b, c, d étant quatre complexes deux à deux distincts, on définit le birapport :

$$B(a,b,c,d) = \frac{a-c}{a-d} \times \frac{b-d}{b-c}.$$

Préliminaire : lien entre le birapport et la cocyclicité.

On rappelle le théorème de l'angle au centre :

> « Soit A, B et C trois points deux à deux distints et $\mathscr{C}$ un cercle de centre Ω, passant par A et B. Le point C est sur $\mathscr{C}$ si et seulement si $\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right) = 2\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)\ [\pi]$ ».

Soit a, b, c, d quatre nombres complexes, représentant respectivement les points A, B, C et D du plan. On montre dans cette partie que le birapport de ces quatres points est réel si et seulement si ces points sont alignés ou cocycliques (*i.e*,, appartiennent à un même cercle).

1) **a)** Exprimer l'argument de $B(a,b,c,d)$ comme une différence d'angle faisant intervenir les points A, B, C, D.

b) Montrer que si A, B, C et D sont alignés, alors $\arg(B(a,b,c,d)) = 0[\pi]$.

c) Montrer que si A, B, C et D sont cocycliques, alors $\arg(B(a,b,c,d)) = 0[\pi]$.

d) Que peut-on donc conclure ?

2) Réciproquement, supposons que $B(a,b,c,d) \in \mathbb{R}$.

a) Que peut-on dire si A, C et D sont alignés ?

b) Sinon, montrer que A, B, C et D sont cocycliques.

Partie principale : étude d'une homographie.

On pose $E = \mathbb{C} \setminus \{i, 1\}$. On définit $f : \begin{array}{ccc} E & \to & C \\ z & \mapsto & \dfrac{z+i}{z-i} \end{array}$.

Si A est un ensemble, on note $f(A)$ l'image directe de A par f. C'est l'ensemble des images des éléments de A par f, soit $\{f(z) \mid z \in A\}$.

3) **a)** Montrer : $\forall z \in E,\ f(z) \in E$.

b) Montrer que pour tout élément z' de E, il existe un unique $z \in E$ vérifiant $z' = f(z)$. Exprimer alors ce z en fonction de z'. *On dit alors que f est bijective et l'on vient de trouver l'expression de sa réciproque.*

c) Calculer $(f \circ f)(z)$ et en déduire que $f \circ f \circ f = Id_E$.

4) **a)** Démontrer que $f(\mathbb{R}\backslash\{1\}) = \mathbb{U} \cap E$, où $\mathbb{U}$ est le cercle unité de $\mathbb{C}$.

b) Soient $P = \{z \in E \mid \operatorname{Im}(z) < 0\}$ et $D = \{z \in E \mid |z| < 1\}$. Démontrer que $f(P) = D$.

5) Soient a, b, c, d quatre éléments distincts de E et a', b', c', d' leurs images par f.

a) Montrer : $\dfrac{a'-c'}{a'-d'} = \dfrac{a-c}{a-d} \times \dfrac{d-i}{c-i}$.

b) En déduire : $B(a', b', c', d') = B(a, b, c, d)$.

c) Que peut-on en déduire si a, b, c, d sont cocycliques ou alignés ?

d) Montrer que a, c, d sont alignés si et seulement si $a', 1, c', d'$ sont cocycliques ou alignés.

6) **a)** Déterminer les complexes de E tels que $f(z) = z$.
On trouvera deux solutions distinctes que l'on notera α et β avec $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$.

b) Vérifier : $\dfrac{\beta - i}{\alpha - i} = j^2$ avec $j = \exp(\frac{2i\pi}{3})$.

c) Soient $z \in E \setminus \{\alpha, \beta\}$ et $z' = f(z)$.
Montrer : $z' \neq \alpha,\ z' \neq \beta$.
Etablir $\dfrac{z'-\alpha}{z'-\beta} = j^2 \dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$.

7) Construction géométrique de l'image d'un point

On note Δ la médiatrice de $[\alpha, \beta]$.

a) Montrer que $f(\Delta \cap E) = \Delta \cap E$.
Indication : utiliser le résultat de la question précédente.

b) Montrer que Δ est la droite passant par 1 et i.

c) Montrer que $\forall z \in E,\ z \in \Delta \iff f(z) \in \Delta$.

d) Soit $z \in \Delta \cap E$ et $z' = f(z)$.
Montrer que $(\overrightarrow{z\alpha}, \overrightarrow{zi}) = (\overrightarrow{zi}, \overrightarrow{z\beta})\ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{z'\alpha}, \overrightarrow{z'i}) = (\overrightarrow{z'i}, \overrightarrow{z'\beta})\ [2\pi]$.
En déduire que les mesures des angles orientés entre les droites $((\alpha z), (\alpha z'))$ et $((\beta z), (\beta z'))$ valent respectivement $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$ (modulo π).

e) Soit $z \in E$ tel que α, z, β ne soient pas alignés.
Alors les droites (αz) et (βz) coupent Δ en deux points distincts a, b de E.
Expliquer comment construire géométriquement $a' = f(a)$ et $b' = f(b)$ puis $z' = f(z)$.
Indication : on pourra utiliser le résultat de la question **5)d)**.
Réaliser cette construction pour $z = \frac{1}{2}$ (unité 5cm).

— **FIN** —