Devoir surveillé n° 4 - Remarques

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 36 points, ramené sur 5 points.
- Problèmes : exercice de TD sur 8 points, chaque question sur 4 points, total sur 100 points, ramené sur 15 points.

Statistiques descriptives.

	Calculs	Problème	Note finale
Note maximale	32	88	19
Note minimale	10	8	$5,5$
Moyenne	$\approx 23,23$	$\approx 38,23$	$\approx 10,78$
Écart-type	$\approx 5,41$	$\approx 20,96$	$\approx 3,74$

Remarques générales.

Il faut introduire toutes les variables que vous utilisez.

Vous utilisez encore beaucoup trop d'équivalences là où des implications suffisent. Ou alors vous utilisez le symbole $\Leftrightarrow$ comme une abréviation pour ne pas avoir à écrire « donc ». J'enlève un point à chaque fois. Je vous conseille de ne jamais utiliser ces symboles, de toute façon ils ne servent absolument à rien. À la rigueur dans des résolutions d'équations.

Certains sont encore rétifs à l'encadrement des résultats. C'est bien dommage (pour eux).

I. Un exercice vu en TD.

Le sens direct a été plutôt bien traité. La réciproque beaucoup moins.
Peu d'élèves introduisent A et A' dans le sens direct, c'est déprimant. Dans le sens indirect, les phrases « on suppose que $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$ » et « on suppose que $\forall\ A, A' \in \mathscr{P}(E)$, $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$ » n'ont rien à voir !

II. À l'abordage.

Les questions 1. et 3.c. n'étaient même pas vraiment des questions tellement elles étaient triviales (osons le mot). Les questions 2. et 3.a. étaient simples. Les deux questions qui restaient comportaient une légère difficulté. Bref, cette partie était simple, et finalement pas très réussie, car ne vous n'êtes pas encore à l'aise en arithmétique. En particulier, vous n'utilisez pour la plupart pas les résultats du cours sur les congruences, et vous passez beaucoup trop par « il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + kn$ » (et encore, quand j'ai le droit au « il existe », je suis déjà très content). Typiquement, la question 3.a. se résout en quelques mots : c'est uniquement la transitivité de la relation de congruence.

1. Il suffisait (mais il fallait) dire que c'était le théorème de Bézout. Ce simple nom vous donnait quatre points. Et avec une majuscule s'il-vous-plaît, c'est Monsieur Bézout.

2. Utilisez les congruences, il n'y a pas à introduire d'entier : $r_0 = aur_2 + bvr_1 = a(ur_2 - ur_1) + r_1 \equiv r_1\ [a]$, et voilà.

3.a. $n \equiv r_1\ [a]$ et $r_0 \equiv r_1\ [a]$, donc par symétrie et transitivité, $n \equiv r_0\ [a]$. Introduire k tel que $n = r_1 + ak$ révèle juste un manque de pratique, même s'il était bien sûr possible de montrer le résultat ainsi.

3.b. Vous avez tous montré sans peine que $a|(n-r_0)$ et $b|(n-r_0)$. Certains en on déduit que $ab|(n-r_0)$: quelle horreur. D'autres, un peu plus attentifs au début en ont déduit que $ab|(n-r_0)^2$, ce qui est vrai, mais l'arnaque est arrivé juste après, car cela n'implique que $ab|(n-r_0)$. Je vous laisse trouver des contrexemples. Il fallait utiliser la définition du PPCM : si $a|(n-r_0)$ et $b|(n-r_0)$, alors $a \vee b|(n-r_0)$.

4. Là encore, que de complications ! Si $n|r_0\ [ab]$, alors $(n-r_0)$ est un multiple de ab ... donc c'est un multiple de a, et aussi de b, et c'est fini !
Pour l'ensemble des solutions, on trouve $\{r_0 + abk\ ,\ k \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}$. Les solutions sont en effet des entiers naturels. Mais ce n'est pas pour autant que $k \in \mathbb{N}$: on peut avoir $k < 0$ et $r_0 + abk \geqslant 0$.

5. Vous avez presque tous trouvé le bon système de congruence. Il n'y avait plus qu'à suivre l'algorithme décrit dans les questions précédentes. Deux élèves seulement ont réussi cela jusqu'au bout :(

III. Une construction de la fonction racine p-ième.

Cette partie était sensiblement plus compliquée que la précédente. Vous avez souvent fait preuve d'un manque de rigueur : les exposants p apparaissaient et disparaissaient un peu au petit bonheur. Par exemple, il y a eu beaucoup de « $y^p \leqslant x_0$ donc $y^p \in A(x_0)$ », et encore plus d'erreurs inverses du style « pour tout $y \in A(x_0)$, $y^p \leqslant M$ donc M majore $A(x_0)$ ».
Je vous rappelle aussi, qu'une borne c'est féminin, donc on écrit « une borne supérieure » avec un « e » ! !

1.a. Il y avait plusieurs démonstrations possibles : essentiellement par récurrence ou par binôme de Newton.

1.b. Peu abordée. Certains connaissent bien la définition, et l'énoncent correctement. Mais quand il s'agit de montrer que $A(x_0)$ est un intervalle, ils écrivent un tas de choses qui n'ont plus rien à voir. Je dois avouer que je suis très dérouté quand je lis ça ...

3.a. Là aussi, plusieurs démonstrations étaient possibles.

3.b. Il ne s'agissait pas de montrer que $y^p \leqslant 1 + x_0$, mais $y \leqslant 1 + x_0$.

4.a. Je suis stupéfait par le nombre d'élèves qui montrent que $x_0 \in A(x_0)$ et concluent. L'énoncé vous indique que x_0 OU $\dfrac{1}{x_0} \in A(x_0)$. Ce n'est pas une devinette du genre « devinez qui est donc dans $A(x_0)$? ». Ici, si $x_0 < 1$, $x_0 \in A(x_0)$, mais si $x_0 \geqslant 1$, $\dfrac{1}{x_0}$.

4.b. Là je ne sais plus trop quoi faire : dans toutes les vidéos sur les bornes sups, les exos, les DM, j'ai dit qu'on allait utiliser tout le temps le même argument. Je vous l'ai mis en interro, et on l'a corrigé. Donc ça devait arriver : il fallait utiliser cet argument, et vous n'êtes qu'une poignée à y avoir pensé. Donc je vous le redonne : si $u_n < \sup A(x_0)$, alors u_n ne majore pas $A(x_0)$ donc il existe $a \in A(x_0)$ tel que $u_n < a$.
J'ai lu beaucoup de $u_n < c$ donc il existe un réel a entre les deux. C'est vrai, mais on voulait $a \in A(x_0)$, pas quelconque.
Et évidemment aussi beaucoup de : $u_n < c$ donc $u_n\ A(x_0)$. Mais on a vu des contrexemples en cours ! Un certain nombre ont pensé à utiliser que $A(x_0)$ était un intervalle, ça marchait aussi.

4.c. u_n est entre deux éléments d'un même intervalle, donc il est dans cet intervalle.

Les dernière questions étaient essentiellement des passages à la limite dans des inégalités.

IV. Conjugaison d'applications.

Partie très algébrique. Pas forcément difficile mais abstraite et ne demandant aucune imagination mais une rigueur froide et méthodique.
Le problème principal a été la non homogénéité des réponses : $\Phi_f \circ \Phi_g = f \circ g \circ \varphi \circ g^{-1} \circ f^{-1}$ n'a pas de sens. On peut le voir de deux manières : le membre de gauche ne dépend pas de φ alors que celui de droite en dépend. Mais la vraie raison, c'est que le membre de gauche est une fonction de E^E dans E^E alors que celui de droite est une fonction de E dans E.
Dans plusieurs questions, on attendait des réponses synthétiques et sans la variable φ, qui étaient élégantes : $\Phi_f \circ \Phi_g = \Phi_{f \circ g}$, $\Phi_{\mathrm{Id}_E} = \mathrm{Id}_{E^E}$, $(\Phi_f)^{-1} = \Phi_{f^{-1}}$, $(\Phi_f(\varphi))^{-1} = \Phi_f(\varphi^{-1})$.