



## C3-1 - Analyse temporelle des systèmes asservis du 1er ordre

16 Octobre 2018

### Table des matières

<b>I</b>	<b>Système du premier ordre</b>	<b>1</b>
1	Définitions . . . . .	1
2	Caractérisations de la réponse d'un système du premier ordre . . . . .	3
a)	Réponse à un échelon . . . . .	3
b)	Réponse à une rampe : . . . . .	5

### Compétences

- **Modéliser :**
  - Proposer un modèle de connaissance et de comportement :
    - > Systèmes linéaires continus et invariants;
    - > Signaux canoniques d'entrée;
    - > Schémas blocs;
    - > Modèles de comportement.
- **Résoudre :** Proposer une démarche de résolution et mettre en oeuvre la résolution analytique :
  - Réponse fréquentielle des systèmes du 1er ordre
- **Expérimenter :** proposer, justifier et mettre en oeuvre un protocole expérimental
  - Prévoir les allures des réponses attendues;

## I. Système du premier ordre

### 1 Définitions



#### Définition 1 : Système du premier ordre

On appelle **système du premier ordre** tout système linéaire, continu et invariant régi par une équation différentielle du premier degré de la forme :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t). \quad (1)$$

**Remarque 1 :**

Pour la suite du cours, on considérera que les **conditions initiales de  $s(t)$  sont toujours nulles** :

- pour une équation différentielle du premier ordre :  $s(t = 0) = 0$  ;
- pour une équation différentielle du deuxième ordre :  $s'(t = 0) = 0$

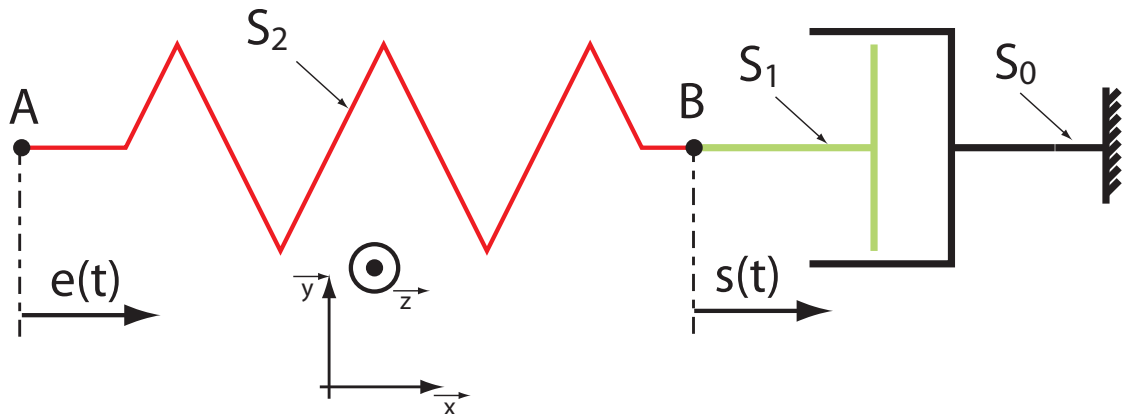
**Propriété 1 :**

La fonction de transfert de ces systèmes peut s'écrire sous la **forme canonique suivante** :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \quad (2)$$

où :

- $\tau$  : **constante de temps** (en s) ;
- $K$  : **gain statique** (unité selon l'application).


**Exemple 1 : Exemple : ressort de raideur  $k$  et amortisseur de coefficient  $c$** 


On déplace l'extrémité A d'une longueur  $e(t)$ . Le point B répond à ce déplacement en se déplaçant d'une longueur  $s(t)$ . En isolant le solide  $S_1$  de masse ( $m$ ), on obtient le bilan des actions mécaniques extérieures suivant  $\vec{x}$  :

- Le ressort  $S_2$  de raideur  $k$  exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant  $\vec{x}$ ,

$$F_r = -k(s(t) - e(t)).$$

- L'amortisseur  $S_0$  de coefficient de viscosité  $c$  exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant  $\vec{x}$ ,

$$F_c = -c \cdot \frac{ds(t)}{dt}.$$

- On néglige le poids du solide  $S_1$ .

En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique suivant la direction  $\vec{x}$ , on obtient :

$$F_r + F_c = m \frac{d^2 s(t)}{dt^2}.$$

En négligeant la masse  $m$  (ce qui revient à négliger l'inertie), on obtient alors,

$$\boxed{c \frac{ds(t)}{dt} + ks(t) = ke(t).} \quad (3)$$

Cette équation différentielle de degré 1 caractérise **un système du premier ordre**. On considère que les conditions initiales sont nulles ( $s(t=0) = 0$ ).



### Exemple 2 : Détermination dans le domaine de Laplace de la fonction de transfert associée

## 2 Caractérisations de la réponse d'un système du premier ordre

### a) Réponse à un échelon

On cherche à calculer la réponse temporelle  $s(t)$  à un échelon  $e(t)$  d'amplitude  $e_0$  :

$$e(t) = e_0 \cdot u(t).$$



#### Remarque 2 :

Si  $e_0 = 1$ , la réponse  $e(t)$  est appelée **réponse indicielle**.

• **Équation de la réponse :** On cherche à calculer  $s(t)$  à partir de  $H(p)$  et  $E(p)$  :

$$\begin{aligned} E(p) &= \frac{e_0}{p} \\ S(p) &= H(p) \cdot E(p) \\ &= \left( \frac{K}{1 + \tau p} \right) \frac{e_0}{p} \end{aligned}$$

La décomposition en élément simple donne :

La transformée inverse donne :

On en déduit :

**Théorème 1 :**

La réponse d'un système du 1<sup>er</sup> ordre à un échelon est de la forme :

$$s(t) = K \cdot e_0 (1 - e^{-t/\tau}) \cdot u(t).$$

(4)

Une représentation graphique est donnée en figure 1.

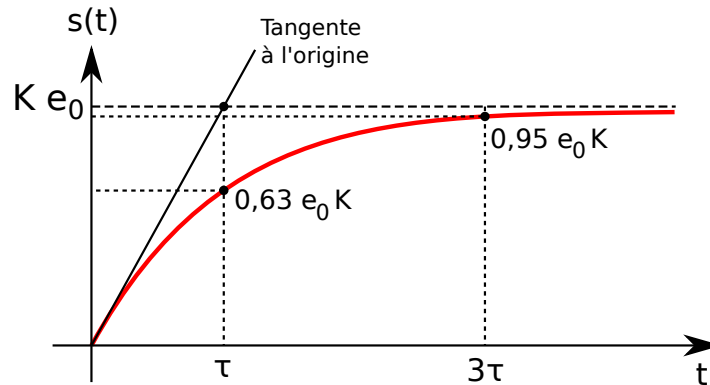


FIGURE 1 – Réponse indicielle d'un système du 1<sup>er</sup> ordre

• **Comportement asymptotique :** On cherche à déterminer le comportement asymptotique (valeur et dérivée) de la réponse  $s(t)$  au voisinage de 0 et  $+\infty$ . Pour cela, on peut utiliser les théorèmes des valeurs limites :

Au voisinage de  $+\infty$  :

Au voisinage de 0 :

D'où la propriété :

**Propriété 2 :**

La réponse indicielle à un système du 1<sup>er</sup> ordre possède :

- une **asymptote horizontale au voisinage de  $+\infty$**  d'ordonnée à l'origine  $K \cdot e_0$ ,
- une **tangente à l'origine de coefficient directeur  $\frac{K \cdot e_0}{\tau}$** .

• **Rapidité :** La rapidité d'une réponse à un échelon peut se caractériser par rapport au **temps de réponse à 5%** (noté  $t_r$ ).

$$s(t_r) = K e_0 (1 - e^{-t_r/\tau}) = 0,95 K e_0$$

$$\Leftrightarrow t_r = -\tau \ln(0,05)$$

avec  $\ln(0,05) \approx -3$ . Ainsi :

**Propriété 3 :**

Le temps de réponse à 5% d'un système du 1<sup>er</sup> ordre soumis à un échelon vaut (environ) :

$$t_r \approx 3 \tau.$$

(5)

- **Précision** La précision de la réponse à un échelon peut être indiquée par l'**erreur statique**, noté  $\varepsilon_s$ . Elle s'obtient en recherchant l'écart au voisinage de  $+\infty$  :

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e(t) - s(t))$$

(6)

**Attention :**

Il convient d'abord de vérifier que  $e(t)$  et  $s(t)$  soient **homogènes** pour être comparables ! Cela prend en compte aussi bien la nature des entrées-sorties, mais également l'amplification de la sortie par rapport à l'entrée. On prendra donc soit un gain unitaire ( $K = 1$ ), soit l'équation 6 légèrement modifiée :

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} (K e(t) - s(t))$$

(7)

Pour illustrer cela, prenons un gain  $K = 1$ . D'après le raisonnement suivant :

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (e(t) - s(t)) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot (E(p) - H(p) \cdot E(p)) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot E(p) \left(1 - \frac{1}{1 + \tau p}\right) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{e_0}{p} \left(1 - \frac{1}{1 + \tau p}\right) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} e_0 \left(1 - \frac{1}{1 + \tau p}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dans tous les cas, on déduit que :

**Propriété 4 :**

L'erreur statique  $\varepsilon_s$  d'un système du 1<sup>er</sup> ordre soumis à un échelon est nulle :

$$\varepsilon_s = 0.$$

(8)

**b) Réponse à une rampe :**

Dans ce cas, l'entrée est une rampe :

$$e(t) = a t u(t)$$

- **Équation de la réponse :** On cherche à calculer  $s(t)$  à partir de  $H(p)$  et  $E(p)$  :

$$\begin{aligned}
 E(p) &= \frac{a}{p^2} \\
 S(p) &= H(p)E(p) \\
 &= \left( \frac{K}{1 + \tau p} \right) \frac{a}{p^2} \\
 &= K a \left( \frac{1}{p^2} - \frac{\tau}{p} + \frac{\tau^2}{1 + \tau p} \right)
 \end{aligned}$$

Après transformée inverse, on obtient :



### Théorème 2 :

La réponse d'un système du 1<sup>er</sup> ordre soumis à une rampe est de la forme :

$$s(t) = K a \left( t + \tau \left( e^{-t/\tau} - 1 \right) \right) u(t). \quad (9)$$

• **Comportement asymptotique :** On cherche à déterminer le comportement asymptotique (valeur et dérivée) de la réponse  $s(t)$  au voisinage de 0 et  $+\infty$ . Pour cela, on utilise les théorèmes des valeurs limites.

Au voisinage de  $+\infty$  :

Au voisinage de 0 :



### Propriété 5 :

La réponse d'un système du 1<sup>er</sup> ordre à une rampe possède :

- une **tangente horizontale au voisinage de 0**,
- une **asymptote oblique, de coefficient directeur  $K a$** .

• **Précision :** Comme pour le 1<sup>er</sup> ordre, on mesure la précision en comparant l'entrée  $e(t)$  avec la sortie  $s(t)$ . Toutefois, cette étude n'a de sens que si les deux grandeurs sont homogène, et notamment si le gain est unitaire ( $K = 1$ ) ou que l'entrée est multipliée par le gain  $K$ . Dans le cas contraire, l'asymptote de  $s(t)$  ne sera pas parallèle à  $e(t)$  et les deux grandeurs ne seront pas comparables.

Pour  $K = 1$  (voir fig.2), on trouve :

$$\epsilon_v = a \tau. \quad (10)$$

• **Rapidité :** La rapidité d'une réponse à une rampe peut se caractériser par un **retard de traînage**  $r_t$  (voir fig.2). Dans le cas d'un système du 1<sup>er</sup> ordre :

$$r_t = \tau. \quad (11)$$

au final :

**Propriété 6 :**

La réponse à une rampe d'un système du 1<sup>er</sup> ordre de gain unitaire possède :

- une **asymptote oblique d'équation**  $y(t) = a(t - \tau)$  **au voisinage de**  $+\infty$ .
- une **tangente horizontale** au voisinage de 0.

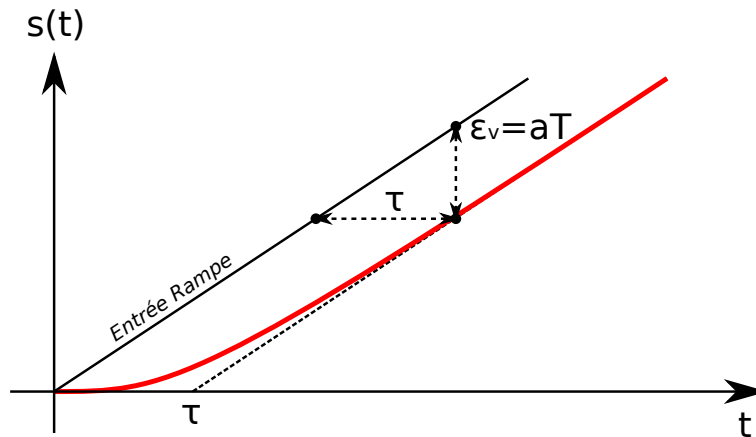


FIGURE 2 – Réponse à une rampe d'un système du 1<sup>er</sup> ordre (ici  $K = 1$ )