## Feuille d'exercice n° 10 : Suites

## Exercice 1 ( ) – Méfiez-vous des faux amis –

Soit  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$  deux suites réelles. Parmi les affirmations suivantes, dites lesquelles sont vraies (on les démontrera alors) et lesquelles sont fausses (on donnera un contre-exemple).

- 1) Si  $(u_n)$  converge, alors  $(u_{n+1} u_n)$  converge vers 0.
- 2) Si  $(u_{n+1} u_n)$  converge vers 0, alors  $(u_n)$  converge.
- 3) Si  $(u_n)$  converge et pour tout n  $u_n \neq 0$ , alors  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  converge vers 1.
- **4)** Si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \neq 0$  et si  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  converge vers 1, alors  $(u_n)$  converge.
- **5)** Si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \neq 0$  et si  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  converge vers 1/2, alors  $(u_n)$  converge.
- **6)** Si  $(u_n)$  converge vers 0 et si  $(v_n)$  diverge, alors à partir d'un certain rang  $|u_n| \leq |v_n|$ .
- 7) Si  $(u_n)$  est une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0, alors elle est décroissante à partir d'un certain rang.
- 8) Si une suite positive est non majorée, elle tend vers  $+\infty$ .
- 9)  $(u_n)$  converge si et seulement si  $(|u_n|)$  converge.
- **10)** Si  $(|u_n|)$  tend vers  $+\infty$ , alors  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$  ou  $-\infty$ .
- 11) Si  $(u_n)$  n'est pas majorée, elle admet une sous-suite strictement croissante qui tend vers  $+\infty$ .
- 12) Si  $(u_n)$  est monotone et admet une sous-suite convergente, alors  $(u_n)$  est convergente.
- 13) Si une suite d'entiers converge, elle est stationnaire.
- 14) Si une suite a un nombre fini de valeurs, elle converge si et seulement si elle est stationnaire.
- **15)** Si  $(u_n + v_n)$  est convergente,  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent.
- **16)** Si  $(u_n v_n)$  est convergente,  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent.
- 17) Si  $(u_n)$  converge,  $(|u_n|)$  également.

**Exercice 2** Étudier la suite de terme général  $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ , a et b étant donnés dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

## Exercice 3 ( Lemme de Césaro –

Soit  $(u_n)$  une suite réelle. On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n = \frac{u_0 + \dots + u_{n-1}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ .

- 1) Montrer que si  $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ , alors  $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ .
- **2)** Soit  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ , montrer que si  $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ , alors  $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ .
- 3) Donner un exemple où  $(v_n)$  converge mais  $(u_n)$  diverge.

**Exercice 4** ( $\mathfrak{S}_{+}^{\otimes}$ ) Soit  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$  et  $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$ 

- 1) On suppose que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ . Montrer que
  - **a)** si  $\ell < 1$ , alors  $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{n} 0$ ;
  - **b)** si  $\ell > 1$ , alors  $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ .
- 2) On suppose que  $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ . Montrer que
  - a) si  $\ell < 1$ , alors  $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ ;
  - **b)** si  $\ell > 1$ , alors  $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ .
- **3)** Soit  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ . Montrer que si  $\frac{u_{n+1}}{u_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell$ , alors  $\sqrt[n]{u_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell$ . Indication: utiliser le lemme de Césaro.
- 4) Chercher les limites des suites de termes généraux suivants.

$$\mathbf{a)} \ u_n = \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$$

$$\mathbf{b)} \ v_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

c) 
$$w_n = \frac{1}{n^2} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}$$

Exercice 5 ( $^{\circ}$ ) – Divergence de ( $e^{in\theta}$ ) –

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Montrer que si  $\theta \not\equiv 0$  [ $\pi$ ], les suites  $(\cos(n\theta))$  et  $(\sin(n\theta))$  sont toutes les deux divergentes. Indication: On pourra montrer que si l'une converge, alors l'autre aussi, puis obtenir une contradiction.

Exercice 6 ( ) Étudier la convergence des suites de termes généraux suivants et calculer la limite, le cas échéant.

1) 
$$a_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n}$$

**4)** 
$$d_n = \left[1 + \frac{(-1)^n}{n}\right]$$

7) 
$$g_n = \frac{n^3 + 2^n}{3^n}$$

**2)** 
$$b_n = \frac{n\sin(n)}{n^2 + 1}$$

$$5) e_n = \frac{n}{2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

8) 
$$h_n = n - \sqrt{n^2 - n^2}$$

**3)** 
$$c_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$$

**6)** 
$$f_n = \sqrt[n]{3 - \sin n^2}$$

$$9) \ i_n = 3n \sin\left(\frac{4\pi}{n}\right)$$

**Exercice 7** ( $\circlearrowleft$ ) Soit  $(u_n)$  une suite complexe telle que  $(u_{2n})$ ,  $(u_{2n+1})$  et  $(u_{3n})$  convergent. Montrer que  $(u_n)$  converge.

Exercice 8 ( $\stackrel{\triangleright}{\cong}$ ) On appelle ouvert de  $\mathbb{R}$  toute partie U de  $\mathbb{R}$  vérifiant la propriété suivante.

« Pour tout  $x \in U$ , il existe un intervalle I ouvert tel que  $x \in I \subset U$ . »

Soit U et V deux ouverts denses de  $\mathbb{R}$ . Établir que  $U \cap V$  est encore un ouvert dense de  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 9** Soient  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$  deux suites réelles telles que

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$
,  $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$  et  $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ .

- 1) Soit  $\varepsilon > 0$  et  $n_0 \in \mathbb{N}$  tels que, pour tout  $n \ge n_0$ ,  $|u_{n+1} u_n| \le \varepsilon$ . Montrer que, pour tout  $a \ge u_{n_0}$ , il existe  $n \ge n_0$  tel que  $|u_n a| \le \varepsilon$ .
- 2) En déduire que  $\{u_n v_p \mid n, p \in \mathbb{N}\}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .
- 3) Montrer que l'ensemble  $\{\cos(\ln n) \mid n \in \mathbb{N} \}$  est dense dans [-1,1].

**Exercice 10** On donne  $u_0 \in \mathbb{R}$  et l'on pose, quand c'est possible,  $u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{1 - u_n}$ .

- 1) Pour quelles valeurs de  $u_0$  définit-on ainsi une suite  $(u_n)$  ?
- 2) Montrer qu'alors la suite  $(u_n)$  est périodique.

**Exercice 11** ( $\mathfrak{D}$ ) Étudier la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ .

Exercice 12 Soit  $u_0 = -1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{3 + 2u_n}{2 + u_n}$ .

- 1) Montrer que la suite  $(u_n)$  est bien définie.
- 2) Résoudre l'équation f(x) = x où  $f: x \to \frac{3+2x}{2+x}$ . On notera  $\alpha$  et  $\beta$  ses racines, avec  $\beta < \alpha$ .
- 3) On définit, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = \frac{u_n \alpha}{u_n \beta}$ . Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique. En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de n.
- 4) La suite  $(u_n)$  possède-t-elle une limite?

**Exercice 13** Soient  $(x_n), (y_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telles que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2}$  et  $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ . En introduisant la suite complexe de terme général  $z_n = x_n + iy_n$ , montrer que les suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  convergent et déterminer leurs limites.

**Exercice 14** ( $\succeq$ ) Étudier la suite  $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  vérifiant  $|z_0| \leq 1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z_{n+1} = \frac{z_n}{2 - z_n}$ .

**Exercice 15** (%) Soit, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{1}{n}$  et  $v_n = \frac{1}{n^2}$ .

- 1) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \ v_n < u_{n-1} u_n$ .
- 2) En déduire que la suite de terme général  $S_n = \sum_{i=1}^n v_i$  converge et majorer sa limite.

Exercice 16 (%) – Critère spécial des séries alternées ou critère de Leibniz –

Soit  $(u_n)$  une suite de réels décroissante et de limite nulle. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$ . Montrer que les suites extraites  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  sont adjacentes et en déduire que  $(S_n)$  converge.

**Exercice 17** (N) Soit la suite  $(H_n)$  de terme général  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$  et soit, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n = H_n - \ln(n)$  et  $w_n = H_n - \ln(n+1)$ .

- 1) Montrer que les suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$  sont adjacentes (leur limite commune s'appelle la constante d'Euler, notée  $\gamma$ ).
- 2) En déduire la nature de la suite  $(H_n)$ .

