Devoir à la maison n° 13

À rendre le 9 février

I. Une étude de fonction.

On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} e^{1/t} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$.

1) Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en 0.

2) Calculer $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et étudier l'existence de $f''(0)$.

3) Étudier les variations de f' sur $\mathbb{R}_-$.

4) Dresser le tableau de variations et tracer l'allure de la courbe de f dans un repère orthonormé (unité 2 cm).

5) On veut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $t < 0$,

$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}.$$

a) Trouver P_1 et P_2.

b) Montrer l'existence de P_n et trouver une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P_n' pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

II. Une décomposition très simple.

Donner une CNS sur $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ pour qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\frac{X^2 + pX + q}{(X^2 - 1)^2} = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{(X+1)^2}.$$

— **FIN** —