

Devoir surveillé n°1

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Montrer que pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$, il existe $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = m^2 + n^2.$$

II. Autour de π .

1) On pose $I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \frac{1}{3}(2\sin(x) + \tan(x)) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{3\sin(x)}{2 + \cos(x)}.$$

On pose aussi, pour tout $x \in I$,

$$u(x) = f(x) - x \quad \text{et} \quad v(x) = g(x) - x.$$

a) Factoriser le polynôme $P = 2X^3 - 3X^2 + 1$ en produit de polynômes réels.

b) Justifier que u est dérivable sur I et que, pour tout $x \in I$,

$$u'(x) = \frac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}.$$

c) En déduire les variations de u sur I .

d) Justifier que v est dérivable sur I et déterminer un polynôme réel Q tel que, pour tout $x \in I$,

$$v'(x) = \frac{Q(\cos(x))}{(2 + \cos(x))^2}.$$

e) En déduire les variations de v sur I .

f) Montrer que, pour tout $x \in I$, $g(x) < x < f(x)$.

2) a) En utilisant le fait que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

b) Déduire de la question 1)f) un encadrement de π .

3) On pose, pour tout entier naturel n ,

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) \quad \text{et} \quad b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right).$$

a) Justifier que, pour tout réel θ , $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - b_n}{2}} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + b_n}{2}}.$$

c) Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$9 \times 2^n \frac{a_n}{2 + b_n} < \pi < 2^n \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n} \right).$$

d) Justifier que les deux termes de l'encadrement précédent tendent vers π quand n tend vers $+\infty$.

Indication : On pourra déterminer la limite de (b_n) et, pour (a_n) , utiliser la limite de $\frac{\sin(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0.

III. Involutions continues de \mathbb{R} .

L'objectif de ce problème est de déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et *involutives* (ou qui sont des *involutions*), c'est-à-dire vérifiant $f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$, ce qui signifie que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) = x.$$

On admettra le *théorème de la limite monotone* : toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotone admet une limite en $+\infty$ ainsi qu'en $-\infty$, finie ou infinie.

- 1) Donner deux exemples différents d'une telle fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, involutive et continue.
- 2) On considère une telle fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, involutive et continue. Montrer que f est *injective*, c'est-à-dire que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $f(x) = f(y)$, alors $x = y$.

Nous avons montré en DM qu'une telle fonction était alors nécessairement strictement monotone, nous ne le redémontrons pas ici.

On considère donc maintenant une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ involutive, continue et strictement monotone.

- 3) Montrer que si f est strictement croissante, alors $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ (on pourra raisonner par l'absurde et supposer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq f(x)$).
- 4) On suppose dans cette question que f est strictement décroissante. On considère $g = \text{Id}_{\mathbb{R}} - f$, c'est-à-dire

$$g : x \mapsto x - f(x).$$

- a) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$.
- b) En déduire que f n'est pas majorée. On montrerait de même que f n'est pas minorée (on ne demande pas de le montrer, et on pourra utiliser ce résultat).
- c) Tracer le tableau des variations de f .
- d) Construire le tableau des variations de g , et montrer que g admet une réciproque, dont on donnera aussi le tableau des variations.
- e) Montrer que $f = g^{-1} \circ (-\text{Id}_{\mathbb{R}}) \circ g$.
- 5) Réciproquement, considérons une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, strictement croissante et vérifiant

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \text{ et } g(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty.$$

Montrer que $g^{-1} \circ (-\text{Id}_{\mathbb{R}}) \circ g$ est une involution, continue et strictement décroissante.

- 6) Exhiber une infinité d'involutions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues.

— FIN —