Devoir à la maison n° 01

À rendre le 14 septembre

Première partie – Étude d'une fonction auxiliaire g –

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = 2x^2 - (x^2+1)\ln(x^2+1).$$

1) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, en détaillant les calculs, donner l'expression de la dérivée de g sur $\mathbb{R}_+$.

2) Faire l'étude du sens de variation de g sur $\mathbb{R}_+$.

3) Montrer qu'il existe dans l'intervalle $\left[\sqrt{\mathrm{e}-1}, \sqrt{\mathrm{e}^2-1}\right]$ un unique réel, que l'on notera α, vérifiant $g(\alpha) = 0$.

4) En déduire le signe de $g(x)$, pour x appartenant à $\mathbb{R}_+$.

Deuxième partie – Étude de la fonction f –

La fonction f est définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} \qquad \text{lorsque } x \neq 0.$$

Sa courbe représentative $(\mathscr{C})$, dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'origine O, est donnée dans la figure **1**. Elle sera recopiée sur votre copie, et complétée.

5) **a)** Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ a une limite en 0, et donner cette limite. En déduire que f est dérivable en 0, et donner la valeur de $f'(0)$.

b) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, exprimer $f'(x)$ sous forme d'une fraction dont le numérateur est $g(x)$.

c) Faire l'étude du sens de variation de f sur $\mathbb{R}_+$.

6) **a)** Montrer que, pour tout $x \in [1, +\infty[$, $f(x) \leqslant \dfrac{\ln(2x^2)}{x}$.

b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Troisième partie – Étude d'une primitive de f –

On note F la primitive de f sur $\mathbb{R}_+$ qui s'annule en 1.
On rappelle que pour $x \in \mathbb{R}_+$, nous avons alors $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$, et on ne cherchera pas à calculer cette intégrale.

7) **a)** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \geqslant \dfrac{2\ln x}{x}$.

b) Calculer $\displaystyle\int_1^x \frac{2\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$ pour $x \geqslant 1$, et en déduire la limite de F en $+\infty$.

8) Dresser le tableau des variations de F.

9) Montrer que $f(1) < F(2) < f(\alpha)$ (dans la suite, on prendra $f(\alpha) \simeq 0,8$).

10) On note I le point de coordonnées $(1,0)$, A le point de $(\mathscr{C})$ de coordonnées $(1, \ln 2)$ et B le point de coordonnées $(\ln 2, \ln 2)$.

a) Vérifier que B appartient à la tangente à $(\mathscr{C})$ en O.

b) Placer les points I, A et B sur la figure, et tracer les segments $[OA]$, $[OB]$, $[BA]$ et $[AI]$.

c) On admet que, pour les abscisses appartenant à l'intervalle $[0,1]$, la courbe $(\mathscr{C})$ est située au-dessus de $[OA]$ et en-dessous de $[OB]$ et $[BA]$.
Déterminer un encadrement de $F(0)$.

11) Tracer la représentation graphique (Γ) de F en exploitant au maximum les résultats précédents – on précisera notamment la tangente à (Γ) au point d'abscisse 1 en la traçant et en donnant son coefficient directeur. On prendra également 2 cm comme unité graphique.

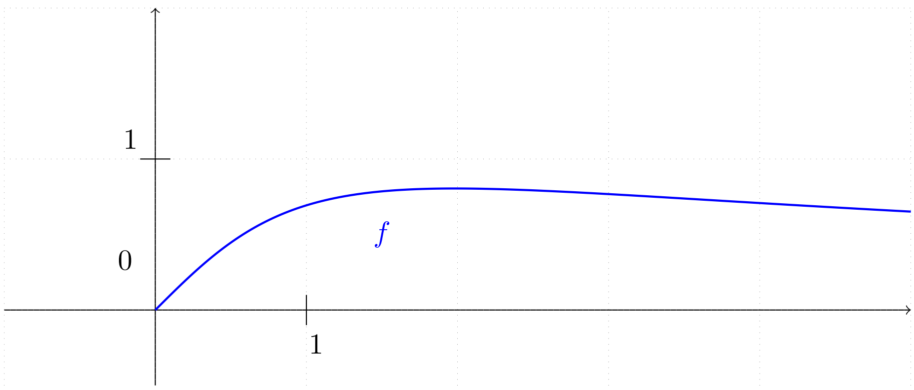

FIGURE 1 – Graphe de la fonction f.

— FIN —