LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON
SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR
CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I.
ANNÉE 2018 - 2019

C3 : ANALYSE TEMPORELLE DES SYSTÈMES ASSERVIS

C3-2 - Analyse temporelle des systemes asservis du 2nd ordre

13 Novembre 2018

Table des matières

Compétences

- **Modéliser :**
  - Proposer un modèle de connaissance et de comportement :
    - > Systèmes linéaires continus et invariants;
    - > Signaux canoniques d'entrée;
    - > Schémas blocs;
    - > Modèles de comportement.
- **Résoudre :** Proposer une démarche de résolution et mettre en oeuvre la résolution analytique :
  - Réponse fréquentielle des systèmes du 1er ordre
- **Expérimenter :** proposer, justifier et mettre en oeuvre un protocole expérimental
  - Prévoir les allures des réponses attendues;

I. Système du second ordre

1 Définition

Définition 1 : *Système du second ordre*

On appelle système du **deuxième ordre** *fondamental* tout système linéaire, continu et invariant régi par une équation différentielle de la forme :

$$\boxed{\frac{1}{{\omega_0}^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2}+\frac{2\xi}{\omega_0}\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=K\,e(t)} \tag{1}$$

Propriété 1 :

La fonction de transfert de ces systèmes peut s'écrire sous la **forme canonique suivante** :

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{\frac{1}{{\omega_0}^2}p^2 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + 1}.} \tag{2}$$

où :

- K est le **gain statique**,
- ξ est le **coefficient d'amortissement**,
- ω_0 est la **pulsation propre** (en $rad\ s^{-1}$).

Remarque 1 :

On parle de système du second ordre *fondamental* par opposition a un système *généralisé*, pour lequel le membre de droite de l'équation 1 est une équation différentielle du 1^{er} ordre. Dans ce cas, la fonction de transfert *généralisée* sera de la forme :

$$\boxed{H(p) = \frac{K\left(1+\tau p\right)}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}.} \tag{3}$$

Exemple 1 : ***Ressort et amortisseur avec prise en compte de la masse de la tige***

Reprenons l'exemple de la partie précédente mais sans négliger la masse m de la tige. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la tige donne maintenant :

$$k(e(t) - s(t)) - c \cdot \frac{ds(t)}{dt} = m\frac{d^2s(t)}{dt^2}$$

On obtient bien ici une équation différentielle de degré 2, ce qui montre que le **système est du deuxième ordre**. Avec les conditions initiales nulles ($s(t=0) = 0$ et $s'(t=0) = 0$), on peut écrire dans le domaine de Laplace :

$$m \cdot p^2 \cdot S(p) + c \cdot p \cdot S(p) + k \cdot S(p) = k \cdot E(p).$$

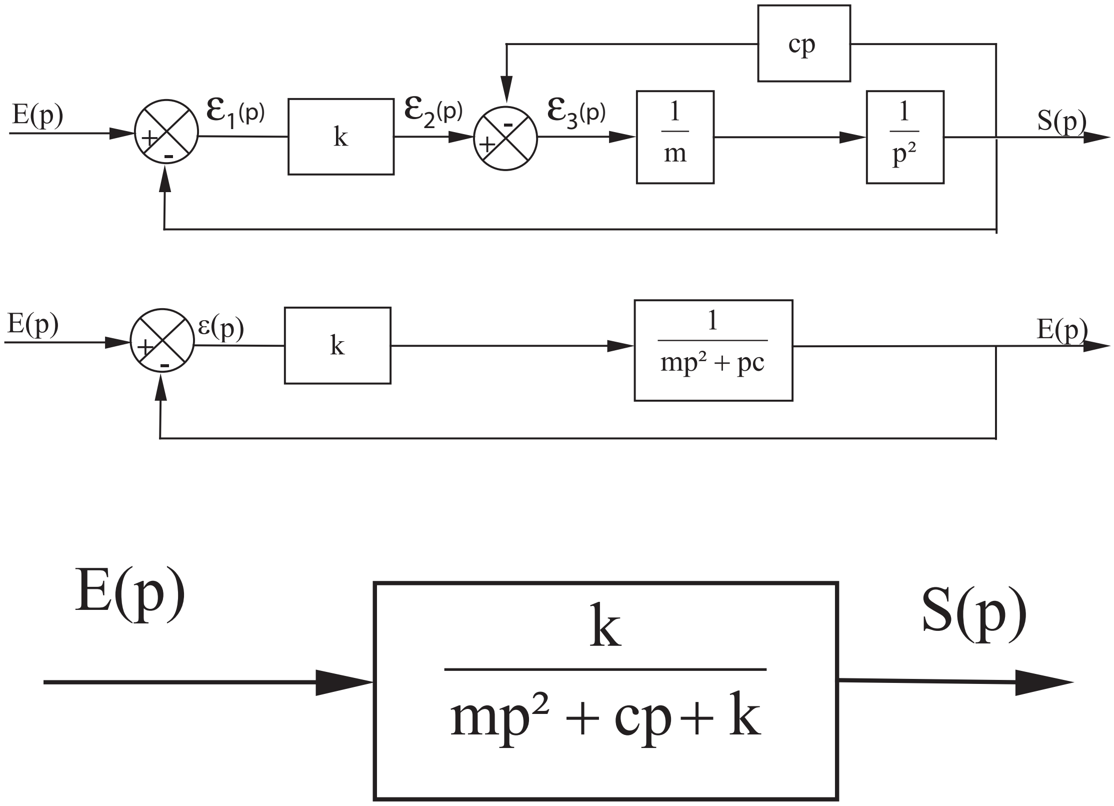
On obtient alors l'expression de la transmittance :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{1}{{\omega_0}^2}p^2 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + 1}.$$

Avec,

- $K = 1$,
- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$,
- $\xi = \frac{c\omega_0}{2k}$.

Exemple 2 : ***Représentation par des schéma blocs du comportement du ressort.***



a) Réponse à un échelon d'amplitude e_0

On reprend la transformée d'un échelon : $E(p) = \frac{e_0}{p}$. La sortie sera donc :

$$\begin{aligned}
S(p) &= H(p)\,E(p) \\
&= \frac{K\,e_0}{p\left(\frac{1}{\omega_0{}^2}p^2 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + 1\right)} \\
&= \frac{K\,e_0\,\omega_0^2}{p\left(p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2\right)}
\end{aligned}$$

• **Comportement asymptotique :** On cherche à déterminer le comportement asymptotique (valeur et dérivée) de la réponse $s(t)$ au voisinage de 0 et $+\infty$. Pour cela, on utilise les théorèmes des valeurs limites.

Au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} s(t) &= \lim_{p\to 0} p\,S(p) \\
&= \lim_{p\to 0} \frac{K\,e_0\,\omega_0^2\,p}{p\left(p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2\right)} \\
&= K\,e_0
\end{aligned}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{ds(t)}{dt} = 0$$

au final :

Au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} s(t) &= \lim_{p\to+\infty} p\,S(p) \\
&= \lim_{p\to+\infty} \frac{K\,e_0\,\omega_0^2\,p}{p\left(p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2\right)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{ds(t)}{dt} &= \lim_{p\to+\infty} p\left[\frac{K\,e_0\,\omega_0^2\,p}{p\left(p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2\right)}\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Propriété 2 :
La réponse d'une système du deuxième ordre sollicité par un échelon possède :
- une **asymptote horizontale** d'équation $s(t) = k\ e_0$ au voisinage de $+\infty$,
- une **tangente horizontale** au voisinage de 0.

• **Comportement temporel :** Pour calculer s(t), il faut décomposer S(p) en éléments simples. Cette opération débute par le calcul **des pôles** de la fonction de transfert.

Définition 2 : *pôles de la fonction de transfert*
On appelle **pôles de la fonction de transfert** les "zéros" du dénominateur (c'est à dire les racines).

Discriminant : $\Delta = (2\xi\omega_0)^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2\left(\xi^2 - 1\right)$
Trois cas sont possibles :

• **Cas où $\xi > 1 \rightarrow \Delta > 0$: 2 pôles réels :**

$$\left\{\begin{array}{ll} p_1 & = \omega_0\left(-\xi + \sqrt{\xi^2-1}\right) \\ p_2 & = \omega_0\left(-\xi - \sqrt{\xi^2-1}\right) \end{array}\right.$$

avec $p_1\ p_2 = \omega_0^2$. La sortie peut alors se décomposé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{K\ e_0\ \omega_0^2}{p\left(p-p_1\right)\left(p-p_2\right)} \\ &= K e_0 \omega_0^2\left(\frac{A}{p} + \frac{B}{\left(p-p_1\right)} + \frac{C}{\left(p-p_2\right)}\right) \end{aligned}$$

Il reste à identifier A, B et C :
- En multipliant par p et faisant $p = 0$, on obtient :

$$A = 1/\omega_0^2$$

.
- En multipliant par $p - p_1$ et faisant $p = p_1$, on obtient :

$$B = \frac{1}{p_1(p_1 - p_2)}$$

.
- En multipliant par $p - p_2$ et faisant $p = p_2$, on obtient :

$$C = \frac{1}{p_2(p_2 - p_1)}$$

.

On rappelle que $\frac{1}{p+a}$ est la transformée de Laplace de $e^{-at}u(t)$. Après résolution, on trouve :

$$\boxed{s(t) = K\ e_0\left[1 - \frac{1}{p_2 - p_1}\left(p_2\ e^{p_1\ t} - p_1\ e^{p_2\ t}\right)\right]\ u(t).} \tag{4}$$

Définition 3 :
Il s'agit d'un **régime apériodique**(voir fig.2).

• **Cas où $\xi = 1 \rightarrow \Delta = 0$: 1 pôle réel double :**

$$r_1 = r_2 = r = -\omega_0$$

La décomposition en éléments simple est alors :

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{K\,e_0\,\omega_0^2}{p\left(p-r\right)^2} \\ &= \frac{A}{p} + \frac{B}{(p-r)} + \frac{C}{(p-r)^2} \end{aligned}$$

On trouve au final :

$$\boxed{s(t) = K\,e_0\left[1-(1+\omega_0\,t)e^{-\omega_0\,t}\right]\,u(t).} \tag{5}$$

Définition 4 :
On parle alors de **régime apériodique critique** (voir fig.2).

• **Cas où $\xi =< 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes :** La décomposition en éléments simple est alors :

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{K\,e_0\,\omega_0}{p\left(p^2+2\xi\omega_0 p+\omega_0^2\right)} \\ &= \frac{A}{p} + \frac{Bp+C}{p^2+2\xi\omega_0 p+\omega_0^2} \end{aligned}$$

La résolution et le retour dans le domaine temporel donne alors :

$$\boxed{s(t) = K\,e_0\left[1-e^{-\xi\omega_0 t}\left(\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t\right)+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t\right)\right)\right]\,u(t).} \tag{6}$$

Remarque 2 :
En posant $\xi = \cos(\phi)$ et $\sqrt{1-\xi^2} = \sin(\phi)$, le résultat peut se simplifier sous la forme :

$$\boxed{s(t) = K\,e_0\left[1-\frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t+\phi\right)\right]\,u(t).} \tag{7}$$

Définition 5 :
Ce régime est dit **régime oscillatoire amorti** ou **pseudo-périodique** (voir fig.2).

Remarque 3 :
Pour un second ordre *généralisé*, le dénominateur de la fonction de transfert étant le même que pour le second ordre *fondamental*, la décomposition en éléments simples sera de la même forme et donc la réponse temporelle aura la même allure.

Dans ce dernier cas on peut considérer un certain nombre de grandeurs

Pseudo-pulsation	$\omega_p = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$	Dépassement relatif	$Dr = \frac{s_{max}-s_\infty}{s_\infty} = exp\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$
Pseudo-période	$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$	Temps de montée	$t_m = \dfrac{1}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}(\pi - Arccos(\xi))$
Temps de pic	$t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$	Temps de réponse à 5% pour $\xi = 0,7$	$t_{r5\%} \cong \frac{3}{\omega_0\xi}$

Les expressions littérales des caractéristiques de la colonne de droite seront démontrées en TD ou lors des travaux pratiques.

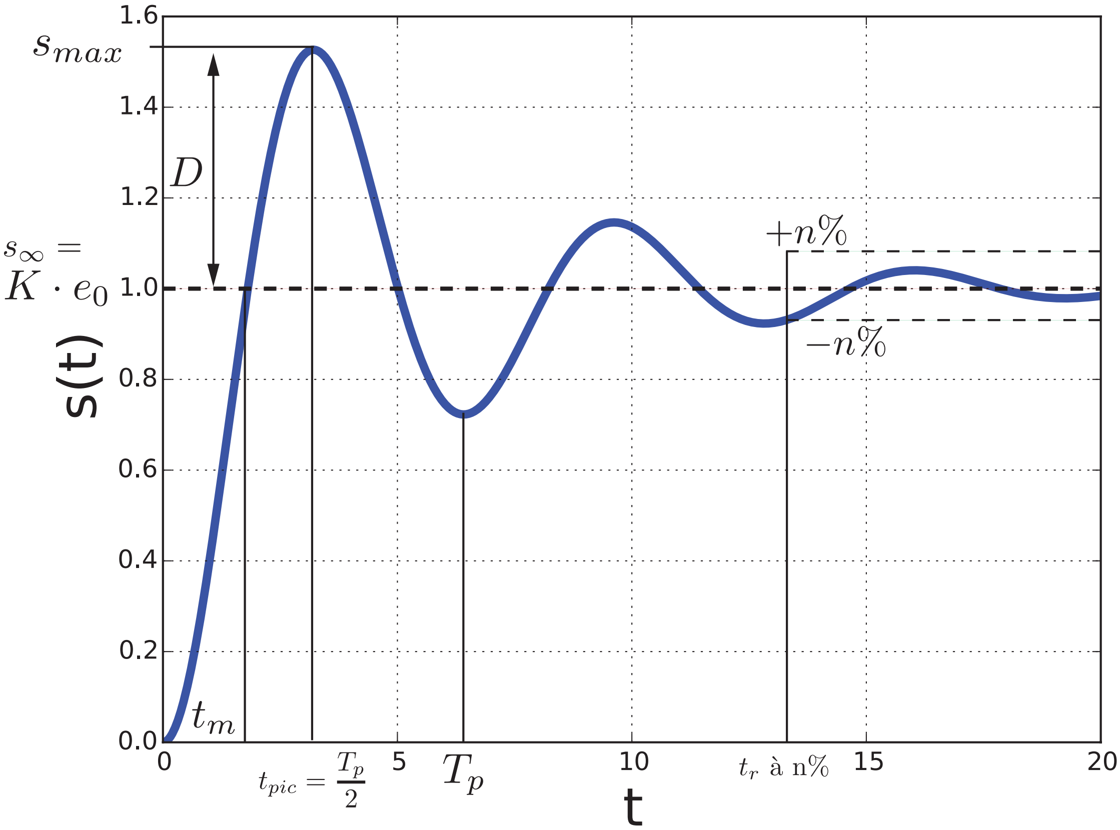


FIGURE 1 – Définition des différentes grandeurs pour un régime pseudo-périodique.

b) Quantification de la réponse indicielle d'un second ordre

Les courbes représentées sur la figure 2 permet de comparer les réponses indicielles pour un système du second ordre selon les valeurs de ξ et ω_0.

- Le paramètre ξ contribue à l'amortissement du système mais également la diminution de la rapidité.
- Le paramètre ω_0 augmente la rapidité du système mais contribue à augmenter l'instabilité car il diminue la période d'oscillation du régime pseudo-harmonique.
- Lorsque ξ augmente, le comportement du système se rapproche de celui d'un premier ordre.

• **Rapidité :** Le temps de réponse pour un système du second ordre dépend du coefficient d'amortissement ξ. Pour une valeur de ξ donnée, il existe une relation entre ω_0 et t_r . Cette relation est donnée par l'abaque figure 3.

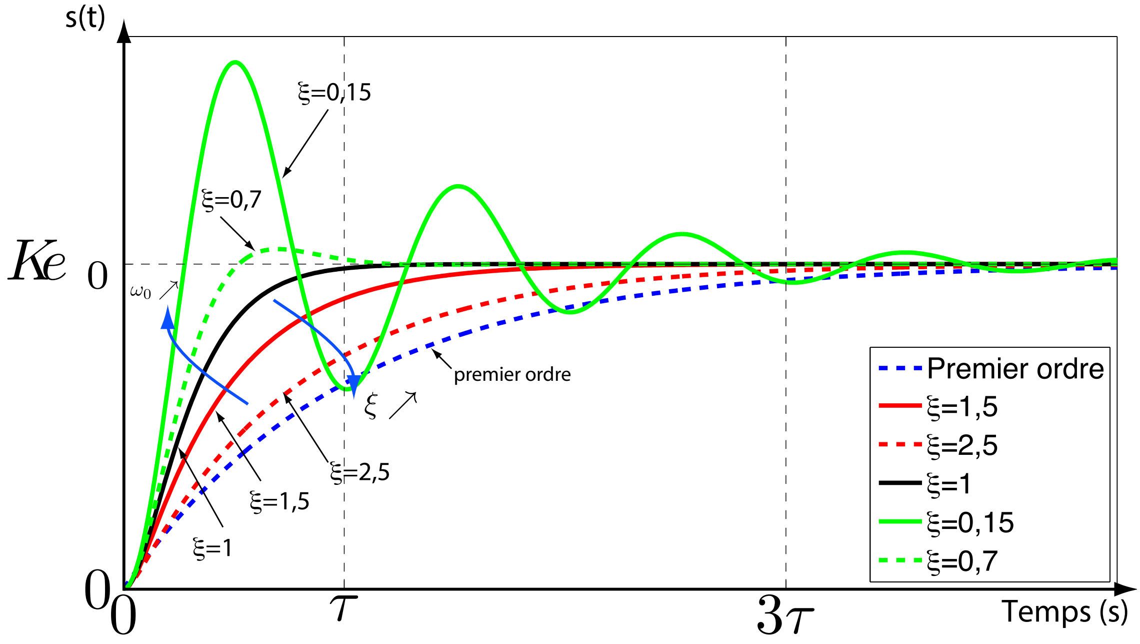


FIGURE 2 – Illustration des différents régimes en fonctions de l'amortissement ξ.

Remarque 4 :

On retiendra en particulier :
- le temps de réponse minimum obtenu pour $\xi = 0,7$ avec $t_r\,\omega_0 \approx 3$,
- le temps de réponse en régime apériodique critique ($\xi = 1$) : $t_r\,\omega_0 \approx 5$

• **Précision :** Là encore, elle est définie par l'erreur statique :

$$\varepsilon_s = \lim_{t\to\infty} |e(t) - s(t)|$$

(toujours en faisant attention à l'homogénéité des grandeurs.)

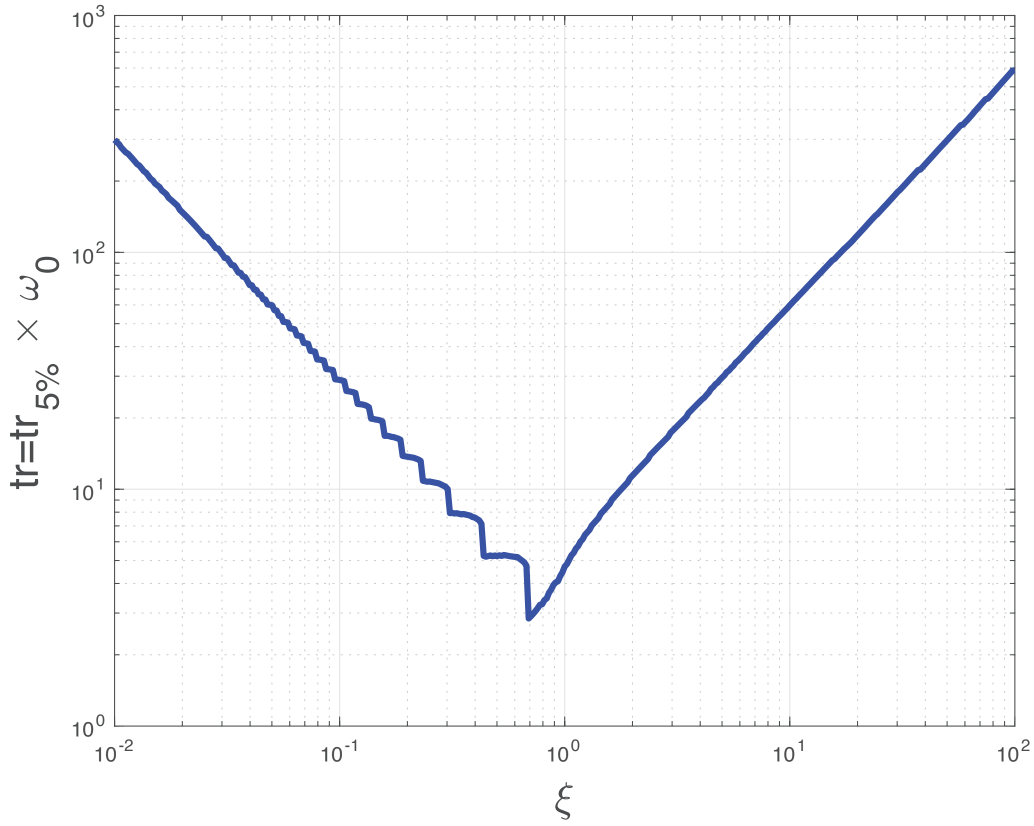


FIGURE 3 – Temps de réponses réduit en fonction de ξ

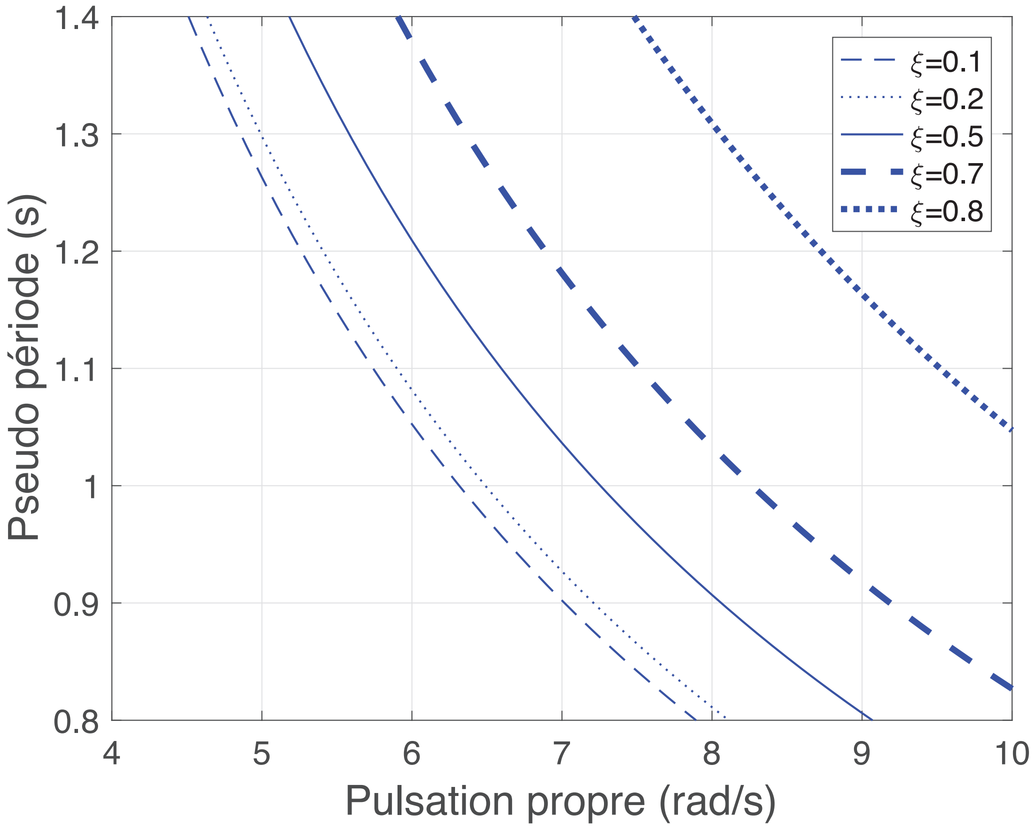


FIGURE 4 – Pseudo-période en fonction de la pulsation propre.