Ex. 3.2.13 : $a \in \mathbb{K} \setminus \{\pm i\}$

sol° de $\mathcal{E}$:

$y'' + ay' + by = 0$

$\chi_{P} : X^2 + aX + b$

a pour racines

$\alpha \pm 1$.

$E = \mathrm{Vect}(f, g)$

avec $f : x \longmapsto \cos x \, e^{\alpha x}$

$g : x \longmapsto \sin x \, e^{\alpha x}$.

$$d : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \varphi & \longmapsto & \varphi' \end{array}$$

: mq. c'est 1 automorphisme de E

- linéarité : facile.
- l'ens. d'arrivée est vraiment E ?

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\sin x\, e^{\alpha x} + \alpha \cos x\, e^{\alpha x}$

$= -g(x) + \alpha f(x)$

donc $f' \in E$.

de même, $g' \in E$.

donc : $\varphi(E) = \varphi(\text{Vect}(f, g))$

$= \text{Vect}(\underbrace{\varphi(f)}_{\in E}, \underbrace{\varphi(g)}_{\in E}) \subset E$.

- $\dim E \leq 2$: E a 1 famille gén. à 2 éléments.

donc $\dim E < +\infty$

dc : φ bijec $\Leftrightarrow$ φ injec $\Leftrightarrow$ φ surjec.

On a :

$$\varphi(E) = \mathrm{Vect}(\varphi(f), \varphi(g))$$

$$= \mathrm{Vect}(-g+\alpha f, f+\alpha g)$$

$$= \mathrm{Vect}((-g+\alpha f) - \alpha(f+\alpha g), f+\alpha g)$$

$C_1 - \alpha C_2$

$$= \mathrm{Vect}(-(1+\alpha^2)g, f+\alpha g)$$

$$= \mathrm{Vect}(g, f+\alpha g)$$ car $\alpha^2+1 \neq 0$ $(\alpha \neq \pm i)$

$= \mathrm{Vect}(g, f) = E$

$C_2 - a C_1$

donc φ est surjective, donc bijective.

application : avec $\alpha = 3$.

alors $f : x \longmapsto \cos x \, e^{3x}$

$f \in E$. donc $f \in \mathrm{Im}\,\varphi$, donc il existe

$h \in E$ tq. $\varphi(h) = h' = f$

donc il existe 1 primitive de f de la forme

$f : x \mapsto a\cos x\, e^{3x} + b \sin x\, e^{7x}$.

4 - Formes linéaires et hyperplans :

Déf 1 : (en dim quelconque) E 1 $\mathbb{K}$ev. et H 1 sev. de E. On dit que H est 1 hyperplan de E ssi H admet 1 supplémentaire de dim 1

ssi : $\exists x \in E, x \neq 0, H \oplus \mathrm{Vect}(x) = E$.

Rq : si dim E est finie, on la note n,
H est 1 hyperplan ssi $\dim H = n-1$.

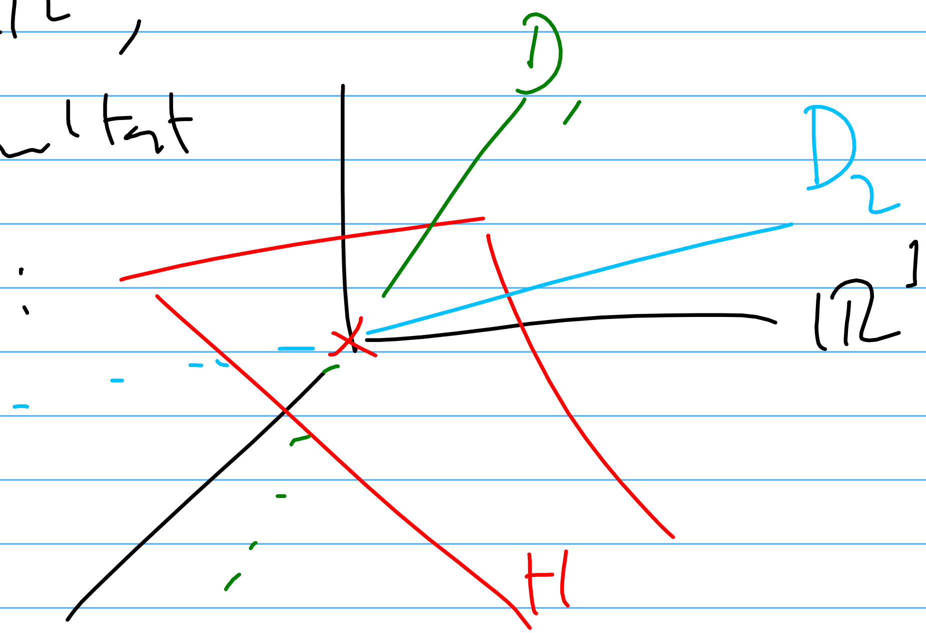
<u>Déf. 2</u> : (en dim finie) : si E est 1 ev
de dim $n \in \mathbb{N}$, on appelle
hyperplan de E tt sev. de dim $n-1$.

<u>en dim finie</u> : Déf. 1 $\Leftrightarrow$ Déf. 2.

Prop 4.0.4 : Soit E de dim finie, H un hyperplan de E, et D 1 dte de E non incluse dans H.

Alors : $H \oplus D = E$.

Rq : dans $\mathbb{R}^3$, le résultat est connu :



Ds $\mathbb{R}^2$: comme ami : D_1, D_2 2 dtes.

si : $D_1 \cap D_2 = \{0\}$,

alors $D_1 \oplus D_2 = \mathbb{R}^2$.

L.O.h est 1 généralisation à ttes les dim finies.

Dém : Soit D une dte, $D \not\subset H$.

Soit $x \neq 0$ tq. $D = \mathrm{Vect}(x)$, donc $x \notin H$.

~~Appel~~ : pr mq. $D \oplus H = E$

on va mq :
1. $D \cap H = \{0\}$
2. $\dim D + \dim H = \dim E$.

(2) $\dim \mathcal{D} = 1$, $\dim E = n$, $\dim H = n-1$

or : $1 + (n-1) = n$

dc : $\dim \mathcal{D} + \dim H = \dim E$.

(1) $\mathcal{D} \not\subset H$ dc : $\mathcal{D} \cap H$ est 1 sev de $\mathcal{D}$, différent de $\mathcal{D}$: dc $\dim \mathcal{D} \cap H < \dim \mathcal{D}$

dc $\dim \mathcal{D} \cap H < 1$ dc : $\dim \mathcal{D} \cap H = 0$

dc $\mathcal{D} \cap H = \{0\}$.

On a fini. $\square$

Prop. 4.2.5 : E un $\mathbb{K}$-ev de dim finie.
et H 1 sev.

H est 1 hyperplan ssi H est le noyau d'1 forme lin. non nulle.

Dém : ($\Leftarrow$) Soit φ 1 f.l. non nulle.

On a vu que $rg(\text{forme lin}) = \begin{cases} 0 \text{ si la f.l. est nulle} \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$

dc ici : $rg\,\varphi = 1$

or avec le th. du rang : $\dim E = rg\,\varphi + \dim \ker \varphi$

dc : $\dim \operatorname{Ker} \varphi = \dim E - 1$

dc $\operatorname{Ker} \varphi$ est 1 hyperplan.

($\Rightarrow$) Soit H 1 hyperplan, et $x \notin H$.

alors, h.o.h : $H \oplus \operatorname{Vect}(x) = E$.

dc, si $t \in E$, $\exists ! h \in H, \exists ! \lambda \in \mathbb{K}$

tq. $t = h + \lambda x$.

Notons $\lambda(t)$ ce coeff λ.

On a dc construit 1 fonction

$$\lambda : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longmapsto \lambda(t) \end{array}$$

Mq. λ est 1 f. lin.

- son ens. d'arrivée est $\mathbb{K}$.
- Mq. λ est lin.:

Soit $t_1, t_2 \in E$, soit $\mu \in \mathbb{K}$.

On les note : $t_1 = h_1 + \lambda(t_1)\,x$

$$t_2 = h_2 + \lambda(t_2)\,x$$

avec $h_1, h_2 \in H$.

alors : $t_1 + \mu t_2 = (\underbrace{h_1 + \mu h_2}_{\in H}) + (\lambda(t_1) + \mu\lambda(t_2))x$ (1)

Or on sait qu'il existe un unique $h_3 \in H$ et 1 unique coeff de $\mathbb{K}$ noté $\lambda(t_1 + \mu t_2)$

tq. $t_1 + \mu t_2 = h_3 + \lambda(t_1 + \mu t_2)\, x$. (2)

Par unicité de cette écriture : on identifie (1) et (2)

$$\begin{cases} h_1 + \mu h_2 = h_3 \\ \underline{\lambda(t_1) + \mu \lambda(t_2) = \lambda(t_1 + \mu t_2)} \end{cases}$$

λ est linéaire.

$$x = \overbrace{0}^{\in H} + \overbrace{1}^{\lambda(x)} \times x$$

donc $\lambda(x) = 1 \neq 0$, donc λ est 1 f.l. non nulle.

Mq. $H = \ker \lambda$.

- Soit $t \in H$, alors : $t = \overbrace{t}^{\in H} + \overbrace{0}^{\lambda(t)} \times x$

donc $\lambda(t) = 0$ donc $t \in \ker \lambda$.

- Soit $t \in \ker \lambda$: $\exists h \in H$ tq :

$$t = h + \lambda(t) \cdot x$$
$$= h + 0 = h$$

donc $t \in H$. $\square$

Ex : Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto 2x + y - z.$$

φ est linéaire, non nulle car $\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$

donc $\operatorname{Ker} \varphi$ est 1 hyperplan de $\mathbb{R}^3$: c'est 1 plan.

$$\operatorname{Ker} \varphi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \ 2x + y - z = 0 \right\}$$

c'est le plan d'éq. $2x + y - z = 0$.

• Soit $H = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}\right)$ qui est 1 plan, donc 1 hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in H$ ssi $\exists\, a,b \in \mathbb{R}$,
$$\begin{cases} x = a - b \\ y = 2a \\ z = \ 3b \end{cases}$$

ssi $\exists\, a,b \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} a = y/2 \\ b = z/3 \\ x = y/2 - z/3 \end{cases}$ tjrs vrai ss : $\exists a, b \in \mathbb{R}, \quad x = y/2 - z/3$

ss : $6x = 3y - 2z$

ss : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker} \left(\underbrace{\begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto 6x - 3y + 2z \end{array}}_{\text{f. lin. non nulle.}} \right)$

Rq : il n'y a pas unicité de cette f. l.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto 18x - 9y + 6z$ convient aussi.

Lemme 4.0.6 : H 1 hyperplan de E, de dim finie.

Soit $e \neq 0$, $e \notin H$.

Soit u une f.l. tq. $\mathrm{Ker}\, u = H$.

On pose : $\varphi : E \to \mathbb{K}$

qui à tt vect. x de E associe l'unique scalaire $\varphi(x)$ tq. $x = h + \varphi(x) \cdot e$ avec $h \in H$.

[c'est la $\hat{=}$ fonction que λ ds la démo précédente, avec e au lieu de x].

Alors il existe $\mu \in \mathbb{K}$, $\mu \neq 0$, tq. $u = \mu \cdot \varphi$.

Dém : $D = \mathrm{Vect}(e)$, donc $H \oplus D = E$,

d'où la bonne définition de φ.

Soit $x \in E$: il existe $h \in H$ tq.

$$x = h + \varphi(x) \cdot e$$

donc : $u(x) = u(h) + u(\overbrace{\varphi(x) \cdot e}^{\in \mathbb{K}})$

$$= \underset{\substack{\text{car } H = \ker u \\ \text{et } h \in H}}{0} + \varphi(x) \cdot \underbrace{u(e)}_{\in \mathbb{K}}$$

$$= \underbrace{u(e)}_{= \mu} \times \varphi(x)$$

Si on pose $\mu = u(e)$, on a bien $u = \mu \varphi$. $\square$

<u>Cor</u> : Si u et v st 2 f. lin de même noyau, reprenons les notat° du lemme : $H = \ker u = \ker v$.
et φ l'applic. du lemme.

Alors : $\exists\, \mu \neq 0,\ \beta \neq 0$ tq :

$$u = \mu \varphi \quad ; \quad v = \beta \cdot \varphi$$

donc $u = \dfrac{\mu}{\beta} \times v$

u et v sont proportionnelles.

Ex : Si P est 1 plan de $\mathbb{R}^3$,

et $2x - y + z = 0$ en est 1

éq. cart.

Alors l'ens. des éq. cart. de P est :

$$\{ 2\lambda x - \lambda y + \lambda z = 0, \ \lambda \in \mathbb{R}^* \}.$$

Prop. 4.2.9 : Soit E de dim n, $\mathcal{B}$ 1 base

E. On note $(x_1, x_2 \dots x_n)$ les

coord. ds $\mathcal{B}$.

(i) Soit H 1 hyperplan de E. Alors il existe $(a_1 \dots a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ (i.e. les a_i sont non tous nuls) tq :

H est l'ens. d'éq : $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$

(ii) Réciproqt, si $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$, l'ens. d'éq. $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ est 1 hyperplan de E.

Avec 4.0.7, ce n-uplet $(a_1 \dots a_n)$ est unique à 1 c^{te} multiplicative près.

<u>Démo</u> : (ii) posons :

$$\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

φ est linéaire, donc c'est 1 f. lin.

$\varphi\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$ car les a_i ne sont pas tous nuls.

$\varphi \neq 0$, donc $\operatorname{Ker} \varphi$ est 1 hyperplan, et Ker φ est bien l'ens. d'éq.

$$\sum a_i x_i = 0.$$

(ii) Si H est 1 hyperplan,

il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ non nulle

tq. $H = \operatorname{Ker} \varphi$.

On utilise 3.1.1 : $(e_1 \dots e_n)$ 1 base de E

on pose $\forall i \in [\![1,n]\!]$: $a_i = \varphi(e_i)$

donc si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

alors : $\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \varphi\left(\sum x_i e_i\right)$

$= \sum x_i \varphi(e_i)$

$= \sum a_i x_i$.

$H = \ker \varphi = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \sum a_i x_i = 0 \right\}$

c'est bien l'hyp. d'éq. $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$.

<u>Ex</u> : cas particulier : ds $\mathbb{R}^3$ on a 1 prod. scal.

Soit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On pose $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

alors $\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = x + 2y + 3z$

et φ est 1 f. linéaire non nulle.

$\ker \varphi$ est le plan d'éq. $x + 2y + 3z = 0$

Or $\ker \varphi$ est l'ens. de tous les vect $\perp$ à v :
On dit v est 1 vect. normal à $\ker \varphi$.

<u>Réciproquet</u> : Soit H 1 plan.
Soit v 1 vect. normal à H.
alors : φ : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$u \longmapsto u \cdot v$
est 1 f. l. non nulle, qui a pr noyau
l'ens. des vect. $\perp$ à v, c-à-d : H.
On a trouvé 1 éq. de H

__ex__ : Si H est le plan (vectoriel) normal au vect $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans $\underline{1}$

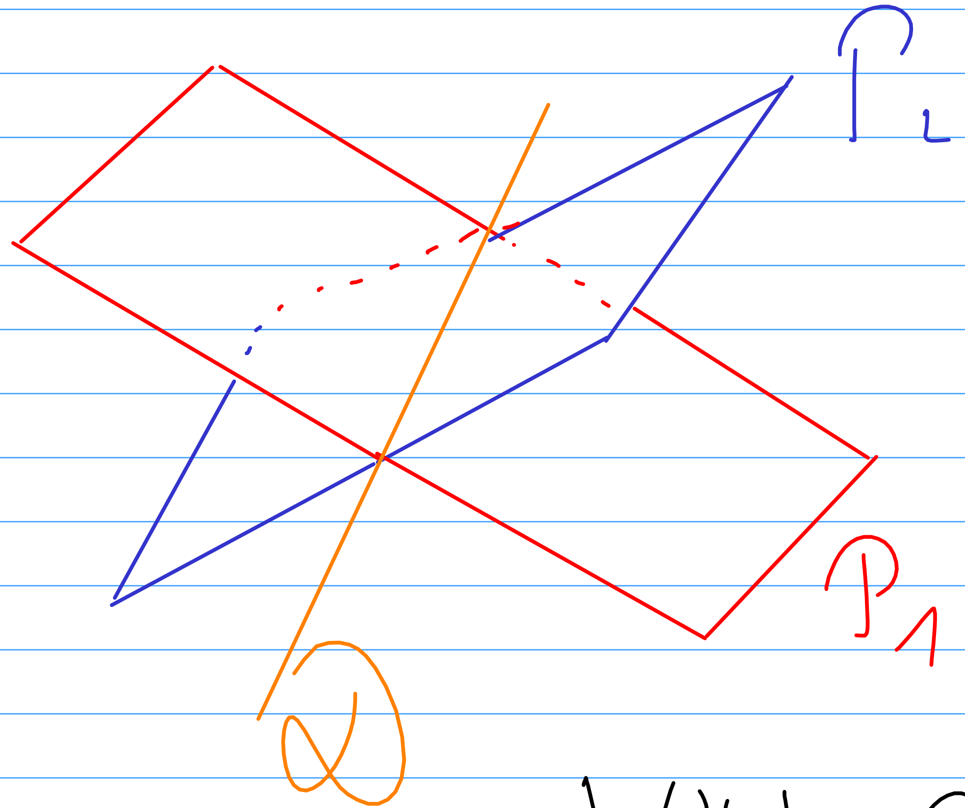
éq. de H est :

$$4x - 5y + 2z = 0 .$$

__Rq__ : ds $\mathbb{R}^3$, l'éq. cart. d'1 droite est de la forme : $\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$

avec la 2ème ligne "indépendante" de la 1ère

car 1 dte est l'intersec° de 2 plans.



$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{D}$ ssi : $\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P_1 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P_2 \end{array} \right.$.

ssi : $\left\{ \begin{array}{l} \text{— éq de } P_1 \text{ —} \\ \text{— éq. de } P_2 \text{ —} \end{array} \right.$

Peut-on généraliser ?

Si $\dim E = n$, 2 qui :

(1) si F a pour éq :
$$\begin{cases} \sum a_i x_i = 0 \\ \sum b_i x_i = 0 \\ \vdots \\ \sum e_i x_i = 0 \end{cases}$$

peut-on donner la dim de F ?

(2) si $\dim F = \dim E - p$,

F a-t-il 1 équat. de la forme :

$$\begin{cases} \text{— éq n° } 1 \\ \vdots \\ \text{— éq n° } p \end{cases} \quad ?$$

(1) $\iff$ peut-on donner la dim de l'intersec° de p hyp·plans ?

(2) $\iff$ 1 sev de dimension $\dim E - p$ est-il l'intersec° de p hyp·plans ?

Lemme 4.0.12 : E de dim finie et F sev et H 1 hyperplan.

Alors $\dim F \cap H = \begin{cases} \dim F & \text{si } F \subset H \\ \dim F - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Démo : • Si $F \subset H$: $F \cap H = F$: évident.

• Si $F \not\subset H$, on a qd même : $H \cap F \subset F$.

On note S 1 supplémentaire de $H \cap F$ ds F :

$$S \oplus (H \cap F) = F$$

$S \neq \{0\}$, sinon $H \cap F = F$ donc $F \subset H$: absurde.

donc $\dim S \geq 1$.

et : $\dim S + \dim(H \cap F) = \dim F$ (A)

Mais : $S \cap H = \{0\}$ car $S \subset F$

et $S \cap H \cap F = \{0\}$

donc S et H sont en somme directe :

donc : $\dim(S+H) = \dim S + \dim H$

$\geq 1 + (\dim E - 1)$

$\geq \dim E$

or $S+H \subset E$ donc : $S+H = E$

et ^ : $S \oplus H = E$

d'où $\dim S + \dim H = \dim E$

d'où $\dim S = 1$

d'où avec (*) : $\dim H \cap F = \dim F - 1$.

$\square$

<u>Prop</u> : (i) Si $H_1 \dots H_p$ sont p hyperplans de E en dim finie,

alors : $\dim(H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_p) \geq n-p$

(ii) Si F est 1 sev. de dim $n-p$ il existe $H_1 \dots H_p$ des hyperplans tq. $F = \bigcap_{i=1}^{p} H_i$.

Dm : (i) on fait 1 récurrence avec le lemme :

- $\dim H_1 = n-1$
- $\dim(H_1 \cap H_2) \underset{\text{lemme}}{=} \dim H_1$ ou $\dim H_1 - 1$

$\geq \dim H_1 - 1$

$$\geq n-2.$$

On résume :

$$\dim (H_1 \cap \dots \cap H_k \cap H_{k+1})$$

$$= \dim (H_1 \cap \dots H_k) \underline{\text{ou}} \dim (H_1 \cap \dots \cap H_k) - 1$$

lemme

$$\geq \dim (H_1 \cap \dots H_k) - 1$$

$$\underset{\text{réc.}}{\geq} n - k - 1.$$

(ii) Soit S 1 supp. de F ds E :

$$S \oplus F = E$$

$(f_1 \ldots f_{n-p})$ 1 base de F

et $(f_{n-p+1}, \ldots, f_n)$ 1 base de S

dc $(f_1 \ldots f_n)$ est 1 base de E.

Les vect. de F sont exact^t ceux de la forme :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-p} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ex : ds $\mathbb{R}^3$, si $F = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$S = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$

1 éq de F : $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

dc :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-p} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, x_1 \dots x_{n-p} \in \mathbb{K} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_{n-p+1} = x_{n-p+2} = \dots = x_n = 0 \right\}$$

1 éq. de F

Syst. : $\begin{cases} x_{n-p+1} = 0 \\ x_{n-p+2} = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$

On note, $\forall k \in [\![1, p]\!]$:

H_k l'hyperplan d'éq. :

$$x_{n-p+k} = 0$$

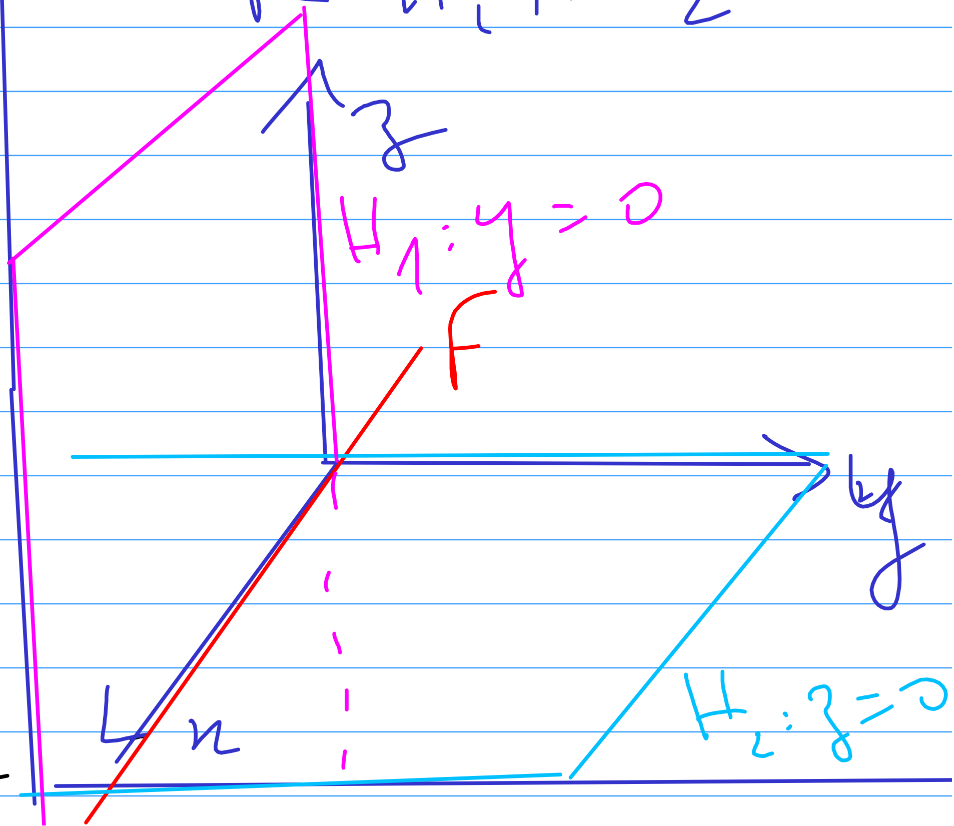
Alors : $F = \bigcap_{k=1}^{p} H_k$

On pose :

H_1 le plan d'éq. $y = 0$

H_2 le plan d'éq. $z = 0$

alors $F = H_1 \cap H_2$



La partie 4 est très géométrique.
Si on ne le voit pas, elle est compliquée.
Pas de panique : elle sert très peu dans ce chapitre.

Le + important c'est : hyperplan = noyau d'1 f. l. non nulle.

La fin est 1 peu anecdotique ici, mais on s'en resservira ds le chapitre sur les matrices pour les résolutions de syst. lin.