Ex 8 : $F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$

$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto x_1 + x_2 + x_3 + x_4$: $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$

$F = \operatorname{Ker} \varphi$: c'est 1 sev.

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in F$ ssi : $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

ssi : $\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = \quad x_2 \\ x_3 = \qquad x_3 \\ x_4 = -x_1 - x_2 - x_3 \end{cases}$ ssi : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

ssi : $\exists a, b, c \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

ssi : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \operatorname{Vect} \underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)}_{F}$

$F = \mathrm{Vect}\,\tilde{\mathcal{F}}$: c'est 1 sev, $\tilde{\mathcal{F}}$ en est 1 famille génératrice.

$\tilde{\mathcal{F}}$ est échelonnée, elle est libre et c'est 1 base de F.