

## I. Etude théorique

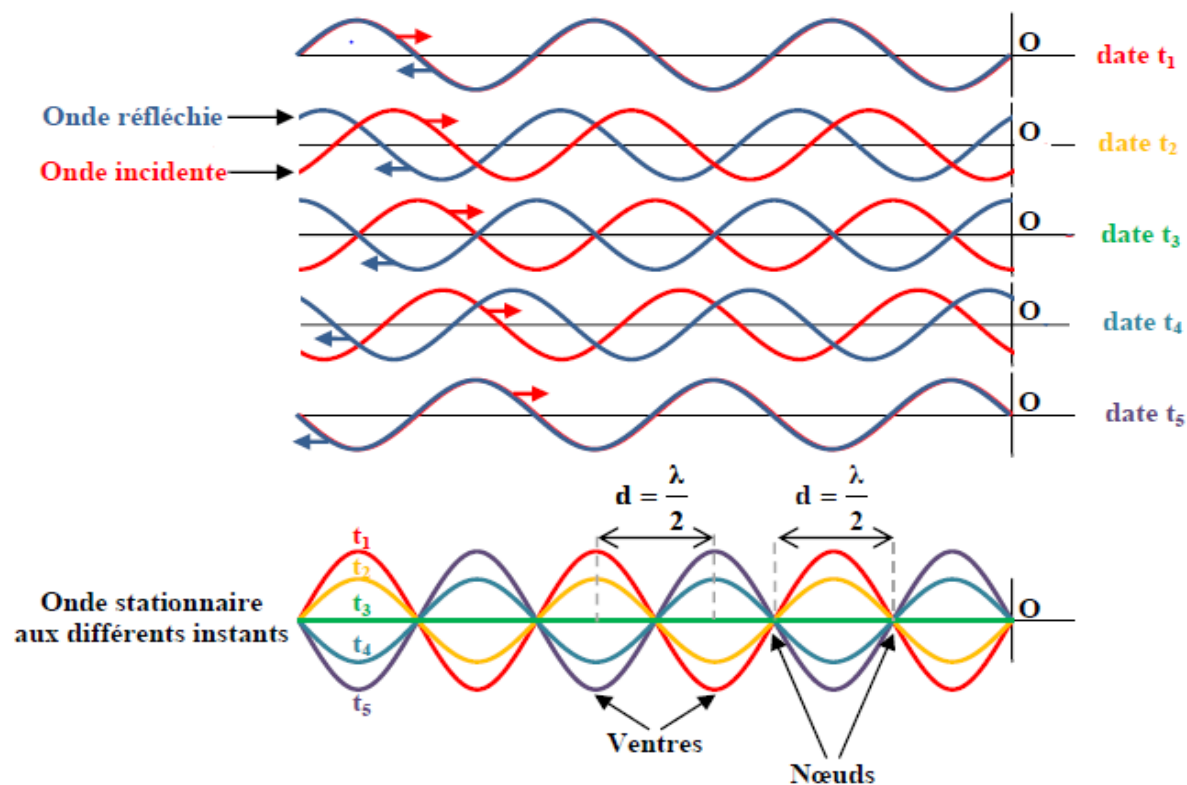
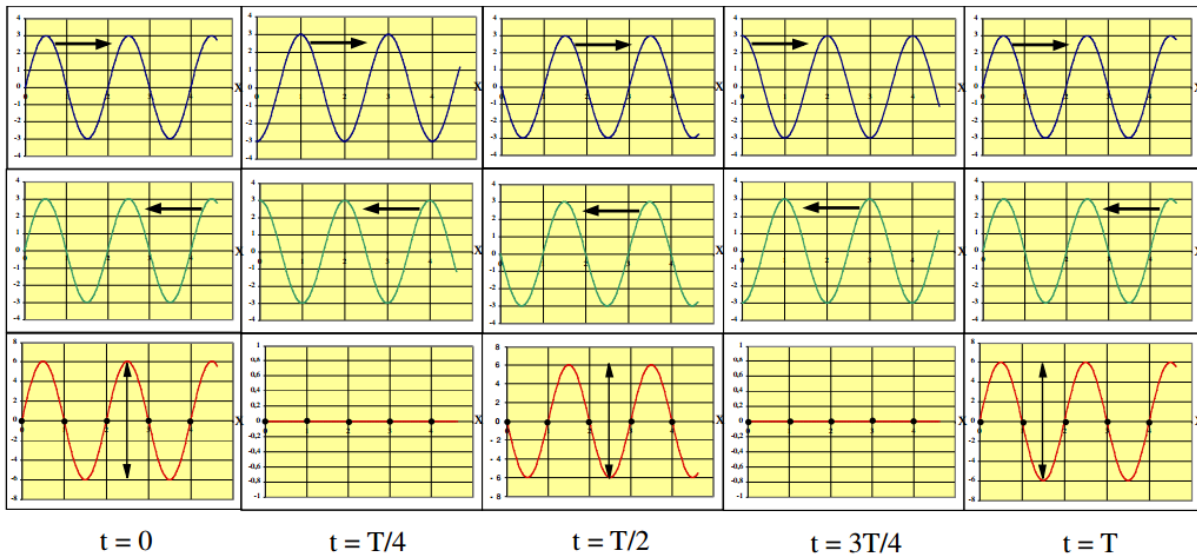
Une **onde stationnaire** est le nom que porte l'**addition** de deux **ondes** de **fréquence identique** se propageant dans un milieu dans des **sens différents**.

### I.1. Résultats observés

(Simulation ondes physique)

Lorsque cette onde incidente rencontre un obstacle fixe (point O) il se crée une onde progressive sinusoïdale réfléchi de même fréquence  $f$ , de même célérité  $C$  et de même longueur d'onde  $\lambda$  que l'onde incidente.

A chaque instant  $t$ , l'onde résultante correspond à la superposition des ondes incidentes et réfléchies. On remarque que l'onde résultante semble « se gonfler » et se « dégonfler » sur place et que certains points semblent restés immobiles.



## I.2. Expression de la vibration résultante

- On recherche le résultat de la superposition de deux ondes sinusoïdales, planes, progressives de même pulsation  $\omega$  et de même amplitude  $A$ , se propageant en sens inverse dans le même milieu à la même célérité.

Ces ondes vont alors interférer.

Soit O un point origine :

$$u_1(0,t) = A \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$u_2(0,t) = A \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Soit Ox la direction de commune de propagation des deux ondes. L'onde 1 se propage selon les x croissants, l'onde 2 selon les x décroissants.

En un point M quelconque du champ d'interférences, chacune des ondes tend à provoquer une perturbation sinusoïdale :

$$u_1(M,t) = A \cos(\omega(t - \frac{x}{c}) + \varphi_1) = A \cos(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_1) = A \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_1)$$

$$u_2(M,t) = A \cos(\omega(t + \frac{x}{c}) + \varphi_2) = A \cos(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_2) = A \cos(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_2)$$

Si l'amplitude de A reste faible on applique le principe de superposition, la perturbation résultante est la somme des perturbations :

$$u(M,t) = u_1(M,t) + u_2(M,t)$$

$$u(M,t) = A \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_1) + A \cos(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_2)$$

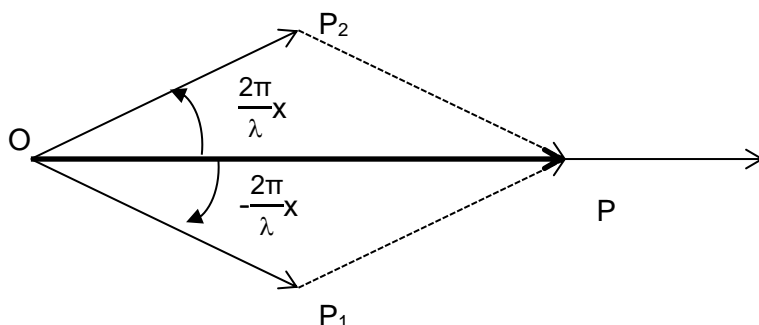
Avec la relation trigonométrique :  $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$  on obtient :

$$u(M,t) = 2A \cos(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}) \cos(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2})$$

Soit  $u(M,t) = \mathcal{A}(x) \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

On remarque que la phase  $(\omega t + \varphi)$  n'est plus comme dans le cas d'une onde progressive  $(\omega t - kx + \varphi)$  fonction de la position du point M. La phase en x à la date t ne progresse pas en  $x + \delta x$  à la date  $t + \delta t$ . L'onde résultant n'est pas progressive : elle est **stationnaire**.

- On peut retrouver ce résultat par le diagramme de fresnel.



On retrouve que  $u(M,t) = 2A \cos(\frac{2\pi}{\lambda}x) \cos(\omega t)$

## I.3. Etude de l'amplitude

Contrairement à l'onde progressive, l'amplitude  $\mathcal{A}(x)$  de l'onde stationnaire est fonction de la position x. Pour simplifier l'étude dans un premier temps prenons  $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$

- Au point O  $x = 0$  on a  $\mathcal{A}(0) = 2A \cos(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot 0) = 2A$ .

L'amplitude de la perturbation sinusoïdale résultant de la superposition de deux ondes sinusoïdales en phase est maximale en O, on parle alors de **ventre** de la perturbation.

### Position des autres ventres par rapport au point O

Les ventres occupent des positions fixes telle que  $\mathcal{A}(x) = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) = \pm 2A$

Soit pour  $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) = \pm 1$

On a alors  $\frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi \Rightarrow x = n\frac{\lambda}{2}$

**Ainsi les ventres de perturbation (amplitude maximale) sont situés dans des plans parallèles équidistants ; la distance entre deux plans ventraux consécutifs est une demi-longueur d'onde :  $\frac{\lambda}{2}$ .**

- Recherche des points où l'amplitude est nulle on parle alors de **nœud** de la perturbation :

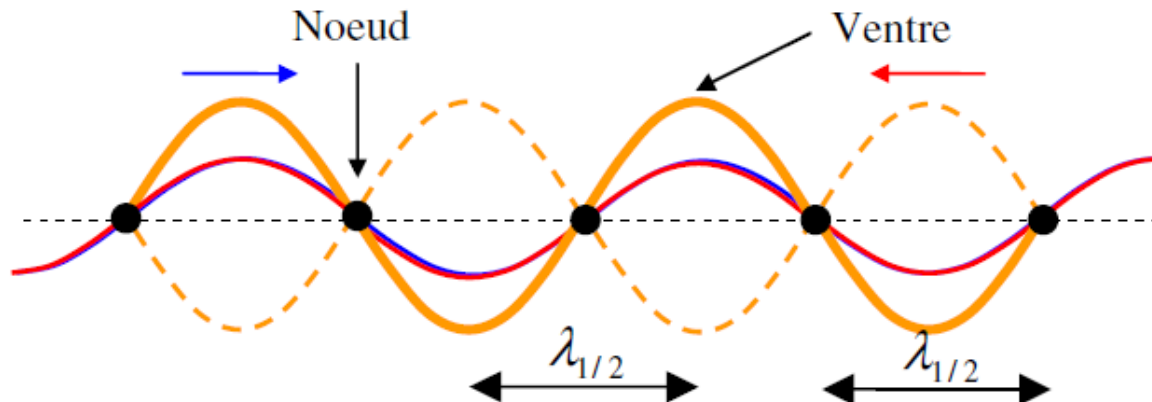
On a  $\mathcal{A}(x) = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) = 0$

Soit pour  $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) = 0$

On a alors  $\frac{2\pi}{\lambda}x = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$

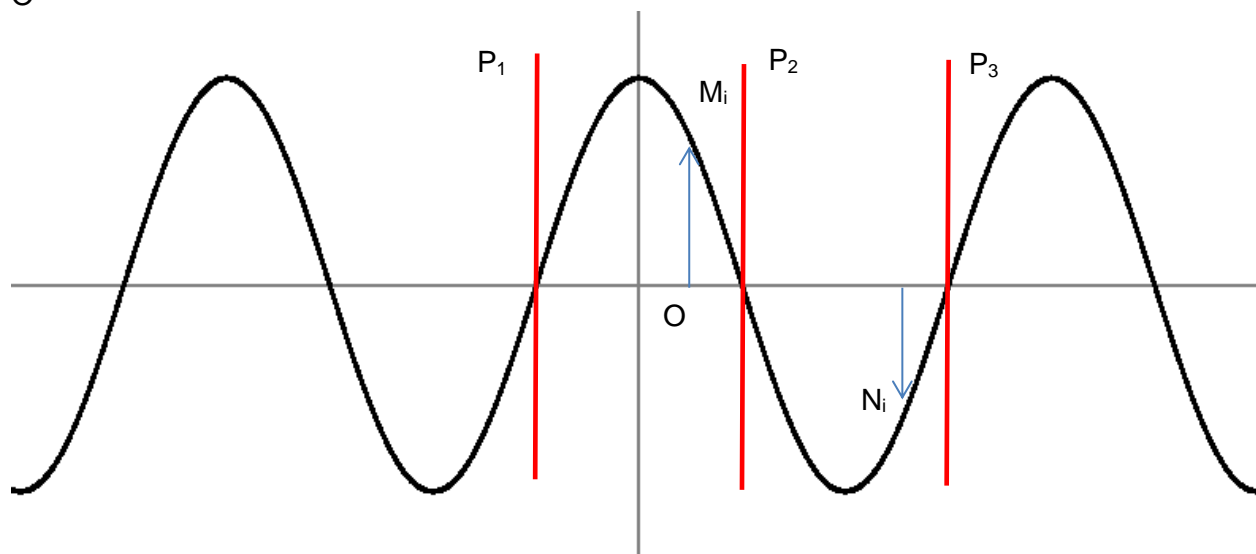
**Ainsi les nœuds de perturbation (amplitude minimale) sont situés dans des plans parallèles équidistants ; la distance entre deux plans nodaux consécutifs est une demi-longueur d'onde :  $\frac{\lambda}{2}$ .**

- Les plans nodaux et les plans ventraux sont régulièrement intercalés, un plan ventral est distant de  $\frac{\lambda}{4}$  des plans nodaux les plus proches



### I.4. Etude de la phase

Soit un point  $M_i$  situé entre deux plans nodaux consécutifs  $P_1$  et  $P_2$  encadrant pour fixer les idées le point  $O$



Ainsi d'après les résultats précédents  $-\frac{\lambda}{4} < x < \frac{\lambda}{4} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{\lambda}x < \frac{\pi}{2}$

On en déduit  $\mathcal{A}(x) = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) > 0$

Donc en  $M_i$  la perturbation peut s'écrire  $u(x,t) = |\mathcal{A}(x)| \cos(\omega t)$

La phase  $\varphi_M = \omega t$  est la même pour tous les points  $M_i$  entre les plans  $P_1$  et  $P_2$ , tous ces points vibrent en phase.

Soit un point  $N_i$  situé entre deux plans nodaux consécutifs  $P_2$  et  $P_3$  (voir schéma)

Ainsi  $\frac{\lambda}{4} < x < \frac{3\lambda}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{\lambda}x < \frac{3\pi}{2}$

On en déduit  $\mathcal{A}(x) = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) < 0$

Donc en  $N_i$  la perturbation peut s'écrire  $u(x,t) = -|\mathcal{A}(x)| \cos(\omega t) = |\mathcal{A}(x)| \cos(\omega t + \pi)$

La phase  $\varphi_N = \omega t + \pi$  est la même pour tous les points  $N_i$  entre les plans  $P_2$  et  $P_3$ , tous ces points vibrent en phase.

On remarque  $\varphi_N - \varphi_M = \pi$

A un instant  $t$  lorsqu'on franchit un plan nodal la phase varie brutalement de  $\pi$ .

## II Corde de Melde

### II.1. Cas d'une onde progressive sinusoïdale entre deux extrémités fixes

• Soit une onde transversale de célérité  $C$  qui se propage le long d'une corde de longueur  $L$  entre deux points fixes  $O_1$  et  $O_2$ . Cette onde se réfléchit d'abord en  $O_2$  puis en  $O_1$  puis de nouveau en  $O_2$  etc... en gardant la même célérité  $C$  si on néglige le phénomène d'amortissement.

A chaque phénomène de réflexion l'onde s'inverse et lorsqu'elle repasse en  $O_1$  elle a la même forme que l'onde initiale.

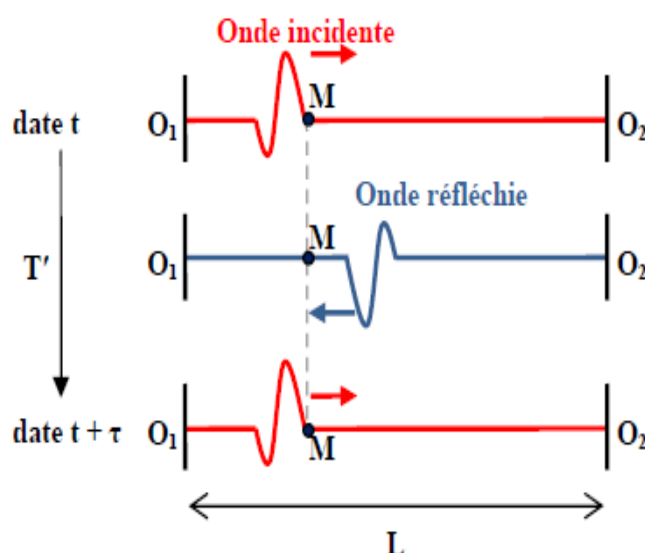
A la date  $t$ , l'onde incidente arrive au point  $M$  en se propageant de  $O_1$  vers  $O_2$ .

Après deux réflexions (en  $O_2$  puis en  $O_1$ ) l'onde arrive de nouveau au point  $M$  avec un retard  $\tau$  en se propageant dans le même sens que l'onde incidente.

Le point  $M$  se trouve alors dans le même état vibratoire qu'à la date  $t$ . Ce phénomène se

reproduira à l'identique et à intervalle de temps régulier  $\tau$ , c'est donc un **phénomène périodique de période  $\tau = T'$** .

En une période  $T'$ , l'onde progressive de célérité  $C$  aura parcouru un aller et un retour soit une distance  $2L$ .



Lorsqu'une onde progressive de célérité  $C$  se propage entre deux points fixes, la longueur  $L$  entre les deux points fixes impose un caractère périodique aux allers et retours de l'onde et la période  $T'$  est :

$$T' = 2L/C$$

• Lorsqu'une onde progressive sinusoïdale de célérité  $C$ , de fréquence  $f$  (ou de période  $T$ ) et de longueur d'onde  $\lambda$  se réfléchit entre deux points fixes  $O_1$  et  $O_2$ , la corde présente un aspect brouillée. Pour certaines valeurs de fréquences  $f$  ou de période  $T$  de l'onde sinusoïdale, on observe des fuseaux de grande amplitude : c'est une onde stationnaire résonante.

Les deux points fixes  $O_1$  et  $O_2$  constituent alors deux nœuds de vibration de l'onde stationnaire.

Un point  $M$  se trouvera dans le même état vibratoire uniquement si les deux périodes ( $T$  et  $T'$ ) sont multiples l'une de l'autre :

Soit  $n \cdot T = 2L/C$  avec  $n$  un entier

Or pour une onde sinusoïdale on a  $\lambda = C \cdot T$

En remplaçant  $n \cdot T = n \cdot \lambda / C = 2L/C$

Soit 
$$L = n \frac{\lambda}{2}$$

### II.2. Onde stationnaire et résonance

L'onde stationnaire observée peut s'écrire sous la forme :

$$y(x,t) = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \alpha\right) \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

où  $A$ ,  $\alpha$  et  $\varphi$  sont des constantes déterminées par les conditions imposées aux extrémités de la corde.

On repère la corde au repos par l'axe  $Ox$  avec  $O$  le point de la corde relié au vibreur. L'autre extrémité  $C$  de celle-ci est reliée à une poulie à l'abscisse  $x = L$ .

Ainsi  $y(x,t)$  représente l'élongation du point  $M$  d'abscisse  $x$ .

- La source S à l'abscisse  $x = 0$  est animée d'un mouvement transversal induit par le vibreur :  
 $y(0,t) = Y_m \cos(\omega t)$

Or le point lié à la corde doit avoir le même mouvement :

$$y(0,t) = A \cdot \cos(\alpha) \cos(\omega t + \varphi) = Y_m \cos(\omega t)$$

Une solution acceptable est  $A \cos(\alpha) = Y_m$  et  $\varphi = 0$ .

- Le point C ( $x=L$ ) est au repos, nœud de déplacement quel que soit l'instant

$$y(L,t) = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}L + \alpha\right) \cdot \cos(\omega t) = 0$$

On en déduit  $A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}L + \alpha\right) = 0$

Soit 
$$\frac{2\pi}{\lambda}L + \alpha = (2n+1) \frac{\pi}{2}$$

En reportant dans le résultat précédent on obtient

$$|A| = \frac{Y_m}{|\cos \alpha|} = \frac{Y_m}{\left| \cos \left( (2n+1) \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{\lambda}L \right) \right|} = \frac{Y_m}{\left| \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda}L \right) \right|}$$

L'amplitude tend vers une valeur minimum égale à  $A$  lorsque  $L = (2p+1)\lambda/4$ . Elle tend théoriquement vers l'infini lorsque  $L = p\lambda/2$ , c'est à dire lorsque l'on est sur un mode propre de la corde fixée à ses deux extrémités. Le phénomène d'ondes stationnaires est alors nettement visible, la corde se séparant en  $p$  fuseaux de longueur  $\lambda/2$ ; on dit qu'il y a résonance.

### II.3. Les différents modes

**Ainsi la longueur  $L$  de la corde impose des valeurs quantifiées de longueurs d'onde  $\lambda_n$  et la condition d'existence des ondes stationnaires résonantes est :**

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \text{ ou } L = n \frac{\lambda_n}{2}$$

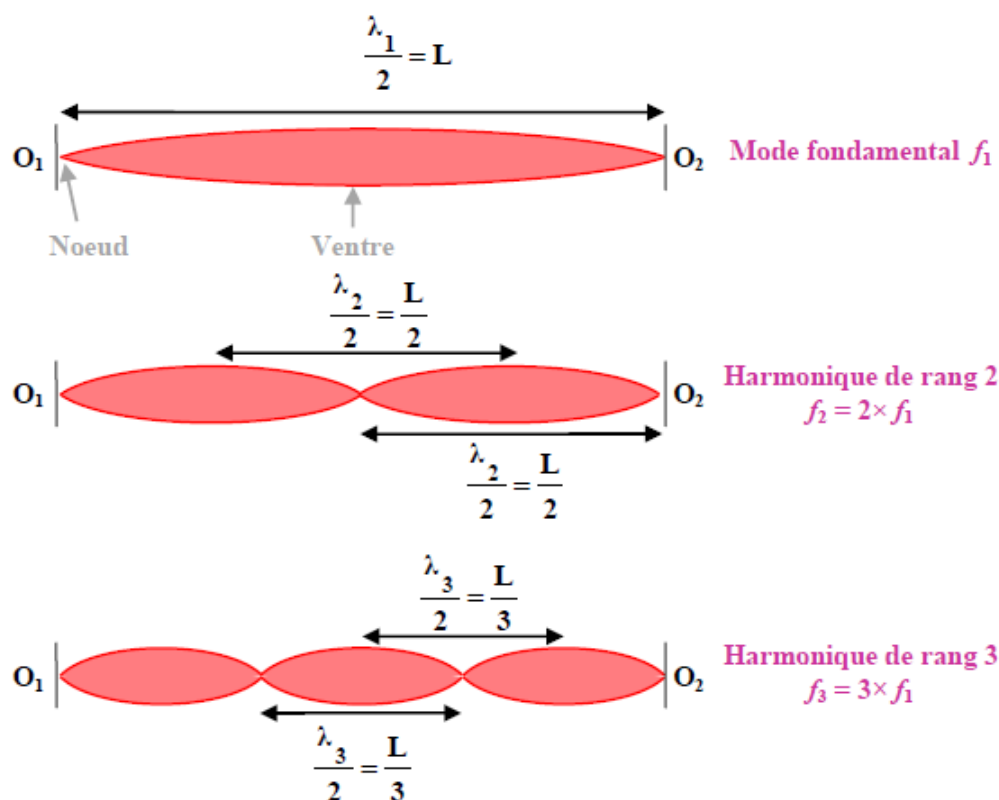
La longueur d'onde du mode fondamental a pour expression  $\lambda_1 = 2L$

Comme  $\lambda = C \cdot T = C/f$  on a alors  $\lambda_n = C/f_n$  ce qui implique que l'existence d'ondes stationnaires résonantes n'est possible que pour certaines fréquences  $f_n$ , qui sont les fréquences propres de vibration.

On a donc 
$$f_n = \frac{nC}{2L} = n f_1$$

avec  $f_1$  fréquence propre du mode fondamental,  $C$  la célérité des ondes sur la corde,  $L$  la longueur de la corde et  $n$  le rang de l'harmonique.

Les extrémités fixes des ondes stationnaires sont des nœuds de vibration et il apparaît  $n$  fuseaux de longueur égale à  $\lambda_n/2$



## II.4. Corde vibrante

- Lorsqu'une corde est soumise à une force de tension  $F$ , la célérité de l'onde résultante est donnée par

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

avec  $\mu$  la masse linéique de la corde (masse d'une unité de longueur)

Ainsi la longueur d'onde s'exprime en fonction de la tension :

$$\lambda = \frac{c}{N} = \frac{1}{N} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

En notant  $N$  la fréquence pour ne pas faire de confusion avec la force de tension

En reportant dans la relation qui donne la longueur de la corde :

$$L = \frac{n}{2N} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Une corde tendue entre deux points fixes peut osciller librement selon ses fréquences propres quantifiées  $N_n$  lorsqu'elle est déséquilibrée :

$$N_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Dans la pratique ces oscillations libres sont complexes et correspondent à priori à la superposition des différentes modes de vibration possibles. (vidéo)

La valeur  $n = 1$  correspond au son le plus grave que la corde puisse émettre, c'est le son fondamental, la corde vibre alors en un seul fuseau.

Aux valeurs  $n = 2, 3 \dots$  correspondent des sons plus aigus appelés harmoniques

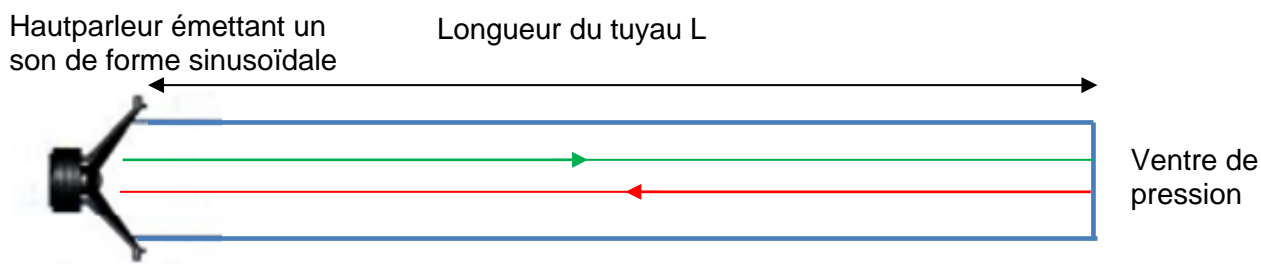
La formule des cordes vibrantes montre que

- La fréquence du son fondamental augmente avec la tension de la corde (propriété utilisée pour accorder les instruments ;
- Plus la masse linéique est grande, plus la fréquence du son émis est faible, donc le son est plus grave, pour une tension et une longueur données ;
- Plus la corde est courte, plus la fréquence est élevée, donc plus le son est aigu, pour une tension et une masse linéique données

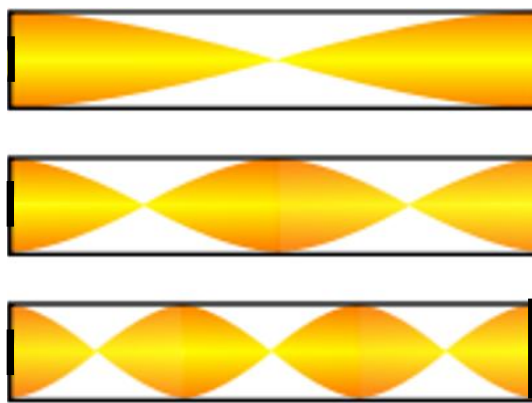
Remarque : tout système élastique limité dans l'espace peut être considéré comme oscillateur mécanique présentant un nombre (presque) infini de fréquences propres.

## II.5. Autre exemple d'ondes stationnaires

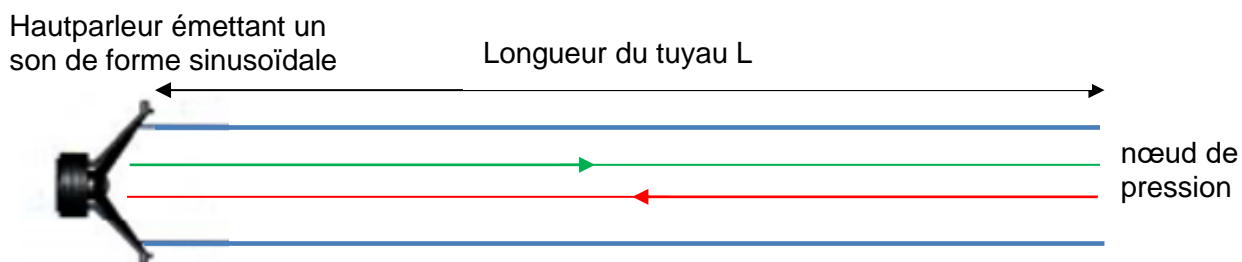
### • Tuyau sonore fermé par une paroi rigide



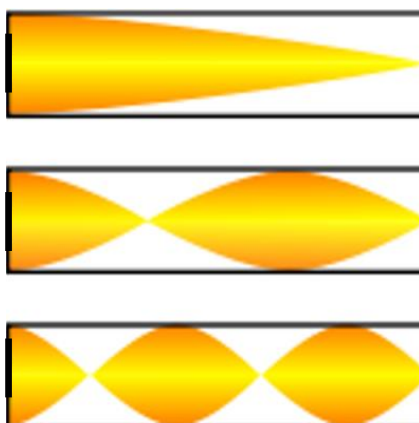
Il y a interférence entre l'onde incidente et l'onde réfléchi sur la paroi  $\Rightarrow$  onde sonore stationnaire.  
Remarque : la paroi impose un ventre de pression acoustique (niveau sonore maximum).



### • Tuyau sonore ayant une extrémité ouverte



Il y a interférence entre l'onde incidente et « l'onde réfléchi »  $\Rightarrow$  onde sonore stationnaire.  
Remarque : L'extrémité ouverte impose un nœud de pression acoustique (niveau sonore minimum)



### • Equation de l'onde

L'onde stationnaire s'écrit mathématiquement sous la forme  $s(x,t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \alpha)$ .  
Il suffit d'appliquer les conditions aux limites pour trouver A,  $\varphi$  et  $\alpha$  ainsi que les conditions de résonance.



## ONDES STATIONNAIRES MECANQUES

<u>I. Etude théorique</u> .....	<u>1</u>
<u>I.1. Résultats observés</u> .....	<u>1</u>
<u>I.2. Expression de la vibration résultante</u> .....	<u>2</u>
<u>I.3. Etude de l'amplitude</u> .....	<u>2</u>
<u>I.4. Etude de la phase</u> .....	<u>4</u>
<u>II Corde de Melde</u> .....	<u>5</u>
<u>II.1. Cas d'une onde progressive sinusoïdale entre deux extrémités fixes</u> .....	<u>5</u>
<u>II.2. Onde stationnaire et résonance</u> .....	<u>5</u>
<u>II.3. Les différents modes</u> .....	<u>6</u>
<u>II.4. Corde vibrante</u> .....	<u>7</u>
<u>II.5. Autre exemple d'ondes stationnaires</u> .....	<u>8</u>