LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON
SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR
CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I.
ANNÉE 2020 - 2021

C3 : ANALYSE TEMPORELLE DES SYSTÈMES ASSERVIS

C3-1 - Analyse temporelle des systemes asservis du 1er ordre

13 Octobre 2020

Table des matières

Compétences

- **Modéliser**; Proposer un modèle de connaissance et de comportement : Modèles de comportement
- **Résoudre**; Procéder à la mise en oeuvre d'une démarche de résolution analytique : Réponses temporelle : systèmes du 1er et 2e ordre; intégrateur

I. Définitions

1 Système du premier ordre

Définition 1 : *Système du premier ordre*

On appelle **système du premier ordre** tout système linéaire, continu et invariant régi par une équation différentielle du premier degré de la forme :

$$\boxed{\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K\,e(t).} \quad (1)$$

Remarque 1 :
Pour la suite du cours, on considérera que les **conditions initiales de s(t) sont toujours nulles** :
- pour une équation différentielle du premier ordre : $s(t=0)=0$;
- pour une équation différentielle du deuxième ordre : $s'(t=0)=0$

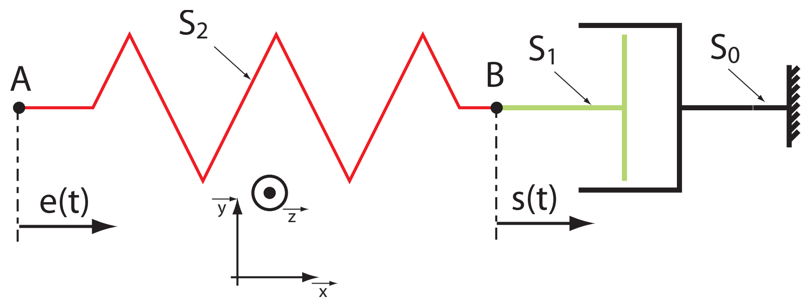
Propriété 1 :
La fonction de transfert de ces systèmes peut s'écrire sous la **forme canonique suivante** :

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{1+\tau p}} \tag{2}$$

où :
- τ : **constante de temps** (en s) ;
- K : **gain statique** (unité selon l'application).

2 Exemple du cours

Exemple 1 : *Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c*



On déplace l'extrémité A d'une longueur $e(t)$. Le point B répond à ce déplacement en se déplaçant d'une longueur $s(t)$. En isolant le solide S_1 de masse (m), on obtient le bilan des actions mécaniques extérieurs suivant $\vec{x}$:
- Le ressort S_2 de raideur k exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant $\vec{x}$,
$$F_r = -k(s(t)-e(t)).$$
- L'amortisseur S_0 de coefficient de viscosité c exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant $\vec{x}$,
$$F_c = -c \cdot \frac{ds(t)}{dt}.$$
- On néglige le poids du solide S_1.

En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique suivant la direction $\vec{x}$, on obtient :

$$F_r + Fc = m\frac{d^2s(t)}{dt^2}.$$

En négligeant la masse m (ce qui revient à négliger l'inertie), on obtient alors,

$$\boxed{c\frac{ds(t)}{dt} + ks(t) = ke(t).} \tag{3}$$

Cette équation différentielle de degré 1 caractérise **un système du premier ordre**. On considère que les conditions initiales sont nulles ($s(t=0)=0$).

Exemple 2 : ***Détermination dans le domaine de Laplace de la fonction de transfert associée***

II. Caractérisations de la réponse d'un système du premier ordre

1 Réponse à un échelon

a) Équation de la réponse

On cherche à calculer la réponse temporelle s(t) à un échelon e(t) d'amplitude e_0 :

$$e(t) = e_0 \cdot u(t).$$

Remarque 2 :
Si $e_0 = 1$, la réponse $e(t)$ est appelée **réponse indicielle**.

On cherche à calculer $s(t)$ à partir de $H(p)$ et $E(p)$:

$$\begin{aligned} E(p) &= \frac{e_0}{p} \\ S(p) &= H(p) \cdot E(p) \\ &= \left(\frac{K}{1+\tau p}\right)\frac{e_0}{p} \end{aligned}$$

La décomposition en élément simple donne :

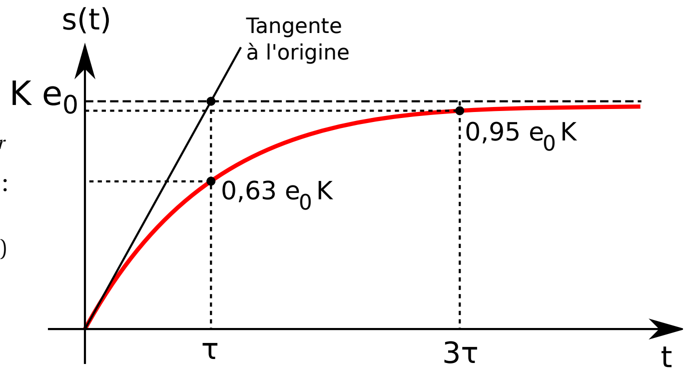
La transformée inverse donne :

On en déduit :

Théorème 1 :

La réponse d'un système du 1^{er} ordre à un échelon est de la forme :

$$\boxed{s(t) = K \cdot e_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \cdot u(t).} \quad (4)$$



Réponse indicielle d'un système du 1^{er} ordre

b) Comportement asymptotique

On cherche à déterminer le comportement asymptotique (valeur et dérivée) de la réponse s(t) au voisinage de 0 et $+\infty$. Pour cela, on peut utiliser les théorèmes des valeurs limites :

Au voisinage de $+\infty$:

Au voisinage de 0 :

c) Propriétés

Propriété 2 :

- La réponse indicielle à un système du 1^{er} ordre possède :
  - une **asymptote horizontale au voisinage de** $+\infty$ d'ordonnée à l'origine $K \cdot e_0$,
  - une **tangente à l'origine de coefficient directeur** $\frac{K \cdot e_0}{\tau}$.
- La **rapidité** d'une réponse à un échelon pour un premier ordre est quantifiée par le **temps de réponse à** 5% (noté t_r) :

$$\boxed{t_r \approx 3\,\tau.} \quad (5)$$

- La **Précision** de la réponse à un échelon peut être indiquée par **l'erreur statique**, noté ε_s. Elle s'obtient en recherchant l'écart au voisinage de $+\infty$:

$$\boxed{\varepsilon_s = \lim_{t \to +\infty} (e(t) - s(t))} \quad (6)$$

- L'erreur statique ε_s d'un système du 1^{er} ordre de **gain unitaire** soumis à un échelon est nulle :

$$\boxed{\varepsilon_s = 0.} \quad (7)$$

Démonstration 1 : *Rapidité*

Calculons le temps de réponse à 5% pour un premier ordre

Démonstration 2 : *Précision*

Pour illustrer cela, prenons un gain $K = 1$. D'après le raisonnement suivant :

Attention : *Précision*

Pour estimer la précision, il convient d'abord de vérifier que $e(t)$ et $s(t)$ soient **homogènes** pour être comparables! Cela prend en compte aussi bien la nature des entrées-sorties, mais également l'amplification de la sortie par rapport à l'entrée. On prendra donc soit un gain unitaire ($K = 1$), soit l'équation 6 légèrement modifiée :

$$\boxed{\varepsilon_s = \lim_{t\to+\infty} (K\,e(t) - s(t))} \tag{8}$$

2 Réponse à une rampe :

a) Équation de la réponse

Dans ce cas, l'entrée est une rampe :

$$e(t) = a\,t\,u(t)$$

On cherche à calculer $s(t)$ à partir de $H(p)$ et $E(p)$:

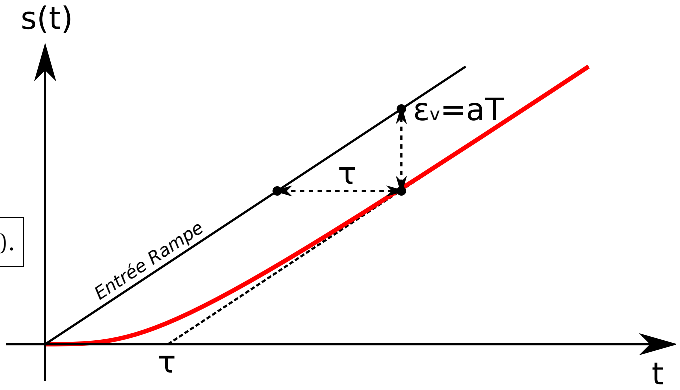
$$\begin{aligned}
E(p) &= \frac{a}{p^2} \\
S(p) &= H(p)E(p) \\
&= \left(\frac{K}{1+\tau p}\right)\frac{a}{p^2} \\
&= K\,a\left(\frac{1}{p^2} - \frac{\tau}{p} + \frac{\tau^2}{1+\tau p}\right)
\end{aligned}$$

Après transformée inverse, on obtient :

Théorème 2 :

La réponse d'un système du 1^{er} ordre soumis à une rampe est de la forme :

$$\boxed{s(t) = K\,a\left(t+\tau\left(e^{-t/\tau}-1\right)\right)\,u(t).} \tag{9}$$



Réponse à une rampe d'un système du 1er ordre (ici $K = 1$)

b) Comportement asymptotique

On cherche à déterminer le comportement asymptotique (valeur et dérivée) de la réponse s(t) au voisinage de 0 et $+\infty$. Pour cela, on utilise les théorèmes des valeurs limites.

Au voisinage de $+\infty$:

Au voisinage de 0 :

c) Propriétés

Propriété 3 :

- La réponse d'un système du 1^{er} ordre à une rampe possède :
  - **une tangente horizontale au voisinage de** 0,
  - **une asymptote oblique, de coefficient directeur** $K\,a$ car une asymptote oblique d'équation $y_{(t)} = a\,(t-\tau)$ au voisinage de $+\infty$.
- • **Précision :** Pour $K = 1$, on trouve :

$$\boxed{\varepsilon_v = a\,\tau.} \tag{10}$$

- • **Rapidité :** La rapidité d'une réponse à une rampe d'un système du 1er ordre peut se caractériser par un **retard de traînage** r_t :

$$\boxed{r_t = \tau.} \tag{11}$$