# Devoir à la maison n° 19

À rendre le 20 mai

## Des boules et des urnes

On a $r+1$ urnes : $U_0, \dots, U_r$. Pour $i \in [\![0, r]\!]$, l'urne $U_i$ contient $i$ boules noires et $r-i$ boules blanches.
On choisit une urne au hasard et l'on effectue $n$ tirages successifs avec remise.
On note $X$ est le nombre de boules noires tirées.

**1)** Déterminer la loi de $X$.

**2)** Calculer $\mathbb{E}(X)$

**3)** Montrer $P(X=k) \xrightarrow[r \to +\infty]{} \binom{n}{k} I_k$ avec $I_k = \displaystyle\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\mathrm{d}x$

**4)** Calculer $I_0$ et trouver une relation de récurrence entre $I_k$ et $I_{k+1}$

**5)** En déduire $I_k$.

## Inverses faible et généralisée d'une matrice

Soient $m, n, p \in \mathbb{N}^*$.
Soit $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
Le coefficient $a_{i,j}$ est dit *diagonal* si $i = j$.
La matrice $A$ est dite *diagonale* si tous ses coefficients non diagonaux sont nuls.
On note $u$ l'application linéaire canoniquement associée à $A$, *i.e.* l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ de matrice $A$ relativement aux bases canoniques.
On appelle *inverse faible* de $A$ toute matrice $B$ de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ vérifiant $ABA = A$.
On appelle *inverse généralisée* de $A$ toute matrice $B$ de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ vérifiant $ABA = A$ et $BAB = B$.

**1) Questions préliminaires :**

**a)** On suppose dans cette question seulement que $A$ est carrée, d'ordre $n$, et vérifie $A^2 = A$.

**i)** Montrer que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$.

**ii)** Montrer que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{tr}(A)$.

**b)** Soient $B \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{rg} BC \leqslant \min(\operatorname{rg} B, \operatorname{rg} C)$.

**2)** **a)** Montrer que si $A$ est carrée et inversible, elle a une unique inverse faible.

**b)** Montrer que si $D$ est une matrice diagonale de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, alors elle admet une inverse généralisée. Cette inverse est-elle unique ?

**3)** Nous revenons maintenant au cas général.

**a)** Montrer qu'il existe des matrices carrées inversibles $P$ et $Q$, d'ordres respectifs $n$ et $m$, telles que $Q^{-1}AP = D$, où $D$ est diagonale.
Montrer alors que $A$ admet une inverse généralisée.

**b)** **Exemple.** Déterminer une inverse généralisée de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**4)** **a)** Soit $B$ une inverse faible de $A$. Montrer que $\operatorname{rg}(B) \geqslant \operatorname{rg}(A)$. Peut-on avoir inégalité stricte ?

**b)** Soit $B$ une inverse généralisée de $A$. Montrer que $\operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg}(A)$.

**5)** Soit $B$ une inverse faible de $A$.

**a)** Que peut-on dire de $H = BA$ ? Montrer que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{tr}(H)$.

**b)** Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $AX = 0$, avec $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, est $\operatorname{Im}(H - \mathrm{I}_n)$.

**c)** Montrer que si l'équation $AX = Y$, où $Y \in \mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, admet une solution, alors l'ensemble des solutions de cette équation est $\{ BY + (H - I)Z \mid Z \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \}$.

— **FIN** —