**Feuille d'entraînement n° 6, semaine du 18 au 20 mai**
Calcul matriciel

**Exercice 1** Soient $\alpha$ et $\beta$ deux réels vérifiant $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$. Soit $M$ la matrice $M = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{pmatrix}$

**1)** Montrer que $M^2$ est combinaison linéaire de $M$ et de $I$.

**2)** En déduire qu'il existe deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = a_n M + b_n I$.
Exprimer $a_n$ et $b_n$ en fonction de $\alpha$, de $\beta$ et de $n$.

**3)** Étudier les suites réelles définies par : $\begin{cases} u_{n+1} &= \alpha u_n + (1-\alpha)v_n \\ v_{n+1} &= (1-\beta)u_n + \beta v_n \end{cases}$ avec $u_0$ et $v_0$ fixés.

**Exercice 2** Pour $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, on introduit $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 3c & 3b \\ b & a & 3c \\ c & b & a \end{pmatrix}$ ainsi que $E = \{M(a,b,c) | (a,b,c) \in \mathbb{C}^3\}$.
On note aussi $U = M(0,1,0)$ et $v = M(0,0,1)$.

**1)** Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ dont $(\mathrm{Id}_3, U, V)$ est une base.

**2)** Déterminer $U^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

**3)** Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif.

**4)** Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$. Montrer que $A$ commute avec tous les éléments de $E$ si et seulement si $A \in E$.

**Exercice 3** Soient $E$ un espace vectoriel de dimension $n$, $f$ une application linéaire de $E$ dans lui-même et $x$ un élément de $E$ tel que la famille $f(x), ..., f^n(x)$ soit libre.

**1)** Montrer que la famille $x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)$ est une base de $E$. En déduire que $f$ est bijective.

**2)** On suppose que $f^n(x) = x$. Déterminer la matrice de $f$ dans la base $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$.

**Exercice 4** Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $u \neq 0$ et $u^2 = 0$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ relativement à laquelle la matrice de $u$ est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Exercice 5**
Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer la matrice de passage de la base $b_1$ à la base $b_2$ avec :

$$b_1 = (1,2,1), (2,3,3), (3,7,1)$$

$$b_2 = (3,1,4), (5,3,2), (1,-1,7)$$

**Exercice 6** Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Soient $e_1 = (-2,3)$ et $e_2 = (-2,5)$.

**1)** Montrer que $e = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $\mathrm{Mat}(f, e)$.

**2)** Calculer $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

**3)** Déterminer l'ensemble des suites réelles qui vérifient $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \dfrac{2}{3}y_n \\ y_{n+1} = -\dfrac{5}{2}x_n - \dfrac{2}{3}y_n \end{cases}$.