Feuille d'exercice n° 19 : **Applications linéaires et familles de vecteurs - correction**

Exercice 1 1, 2, 3, 6 et 7 : non. Par exemple, $f(1+1) \neq f(1)+f(1)$, $g(0) \neq 0$ et $\theta((1,0)+(0,1)) \neq \theta(1,0)+\theta(0,1)$.
4, 5 et 8 : oui.

Exercice 2 Calcul du noyau : il s'agit de résoudre le système $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -x - 4y + 2z = 0 \\ 2x + 5y - z = 0 \end{cases}$. On trouve $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \operatorname{Vect}\left(f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) &&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}\right) \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}\right) &&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Exercice 3 Nous verrons le théorème du rang dans le chapitre sur la dimension des ev, mais nous pouvons d'ores et déjà l'énoncer dans le cas d'une fonction linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$: $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = 2$. Ainsi, il y a une contrainte forte sur la dimenion du noyau et de l'image : pour avoir $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} f$, nécessairement $\dim \operatorname{Ker} f = 0$ et $\dim \operatorname{Im} f = 2$ (et donc f est un isomorphisme), ou $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f = 1$.

1) comme nous l'avons vu, les endomorphismes vérifiant cela sont les isomorphismes. Par exemple : Id.

2) à l'inverse, les endomorphismes vérifiant cela sont ceux tels que $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ et $\dim \operatorname{Im} f = 0$, donc il n'y a que l'application nulle : 0.

3) cherchons par exemple un endomorphisme tel que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Alors f est nécessairement de la forme $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax+by\\0\end{pmatrix}$, où a et b sont deux réels. Mais si $f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0$, alors $a = 0$. Ainsi un exemple d'un tel endomorphisme est $f : \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}y\\0\end{pmatrix}$.

4) Les exemples des deux premières questions conviennent. Pour trouver un exemple différent, cherchons par exemple f tel que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Alors f est de la forme $f : \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\ax+by\end{pmatrix}$, et on doit avoir $a = 0$, donc un exemple est $f : \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$.

Exercice 7 On cherche à déterminer si $(-1,-1,1,-1)$ appartient à F ou non. Pour cela on cherche à résoudre l'équation $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\\-1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}-5\\-3\\1\\-5\end{pmatrix}$ d'inconnues a, b, c, ce qui conduit à la résolution d'un système à trois inconnues et quatre équations. Après un pivot de Gauss on trouve

comme solutions l'ensemble d'équations $\left\{\begin{array}{rcl} a-b-5c & = & -1 \\ -2b-3c & = & -1 \end{array}\right.$, donc et donc par exemple une solution est $a=3, b=-1, c=1$, donc $(-1,-1,1,-1)$ appartient à F.
De même, on cherche à déterminer si $(4,1,2,4)$ appartient à F ou non. Pour cela on cherche à résoudre l'équation $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ d'inconnues a, b, c, ce qui conduit à la résolution d'un système à trois inconnues et quatre équations. Après un pivot de Gauss on trouve comme solution l'ensemble d'équations $\left\{\begin{array}{rcl} a-b-5c & = & 4 \\ -2b-3c & = & 1 \end{array}\right.$, donc et donc par exemple une solution est $a=0, b=1, c=-1$, donc $(4,1,2,4)$ appartient à F.
Puisque les deux vecteurs d'une famille génératrice de G appartiennent à F, alors tout vecteur de G,qui est combinaison linéaire de ces deux vecteurs, appartient forcément à F. Ainsi on obtient $G \subset F$.
En raisonnant de la même manière en inversant les rôles de F et G, on voit que tout vecteur de la famille génératrice de F est dans G, et donc $F \subset G$.
Finalement, $\boxed{\text{F=G}}$.