Devoir surveillé n° 10 - Remarques

Barème.

Problèmes :chaque question sur 4 points, total v1 sur 144, total v2 sur 132, ramené sur 20 points.

Statistiques descriptives.

	v1	v2	Note finale
Note maximale	105	112	$37,5$
Note minimale	16	26	2
Moyenne	$\approx 69,27$	$\approx 40,27$	$\approx 12,17$
Écart-type	$\approx 20,55$	$\approx 24,28$	$\approx 5,18$

Les notes de la v2 sont assez ramassées : elles vont de 26 à 44 (qui est la deuxième meilleure note), avec la meilleure note à 112. Pour respecter cet énorme écart entre les deux premières notes, pour une fois la meilleure note n'est pas tronquée à 20, je lui ai mis la « vraie » note : 37,5/20 :)

Remarques générales.

Ces deux devoirs étaient plus représentatifs des sujets de concours que ceux que vous avaient pu rencontrer cette année. Dans un même devoir, il y aura souvent des parties portant sur des parties du programme très différentes. N'hésitez pas à commencer par traiter les parties qui portent sur vos points forts.
La numérotation des questions sur votre copie est aussi particulièrement importante ici : il y a plusieurs parties, et plusieurs questions portent le même numéro. À vous de bien indiquer au début de chaque question le bon numéro, complet, quitte à rajouter le numéro de la partie au début. Par exemple, A.I.2.a). Mais surtout, donnez un numéro, et le bon ! J'ai perdu pas mal de temps à essayer de deviner quelle question vous étiez en train de traiter, ce qui est très pénible.

Premier problème (v1).

Ce problème contenait beaucoup de questions très faciles. N'oubliez pas de parcourir rapidement le sujet au début de l'épreuve pour repérer ces questions. Le but aux concours est tout de même de ramasser le maximum de points et il serait dommage de passer 20 minutes sur une question quand il y en 5 faciles qui suivent. Ne tombez pas non plus dans l'excès inverse (ce que vous n'avez pas fait dans ce devoir), qui est de traiter les questions par ci par là dans n'importe quel ordre. Le résultat d'une question amenant à résoudre les suivantes, il faut tout de même garder une certaine cohérence dans le déroulement de votre copie. D'autant qu'il est très pénible pour le correcteur de lire une copie qui va dans tous les sens.

I.3. Tout d'abord, $\mathscr{C}^1$ ça n'est pas « dérivable », c'est « dérivable et la dérivée est continue » !
Et il fallait montrer que f était $\mathscr{C}^1$ en 0, mais aussi ailleurs. Ailleurs, cela se faisait classiquement par opérations. En 0, le plus simple était d'utiliser le DL de f en 0 : il existe à l'ordre 1, et donc f est dérivable en 0, et on a $f'(0) = 1/2$. Ensuite il fallait montrer que f' avait pour limite $1/2$ en 0.

I.4. Quand on demande de tracer le tableau de variation, il faut le tracer (avec les limites et tout et tout).

II.2. C'est une bête sommation géométrique, mais comme toujours il fallait justifier que la raison était différente de 1.

II.3. Donner l'expression de P' aurait permis de mieux comprendre vos calculs.

II.7. Remarque déjà faite dans un précédent devoir, exactement dans le même cas : on ne veut pas une conditon nécessaire, on veut une condition suffisante. Il ne faut pas conclure « donc $N = 99$ », mais « SI $N = 99$, alors ... ».

III.1. J'ai beaucoup lu que f était une somme ou un produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$. Mais moi je ne vois qu'un quotient, mais ni somme ni produit. Et il faut préciser que le quotient ne s'annule pas.

III.2. Que d'erreurs de calcul et d'expressions non simplifiées ...

Second problème (v1).

Il était plus facile que le premier et a souvent rapporté beaucoup de points.

I.3. Vous venez de montrer que $A \times A = \mathrm{I}_2$, donc ne calculez pas $\det A$ pour montrer que A est inversible.

I.4. Le piège : u est une symétrie n'a rien à voir avec le fait que A est une matrice symétrique. Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice d'un projecteur, pas d'une symétrie. Mais $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ est la matrice d'une symétrie. Il fallait aller puiser dans des très lontains souvenirs du mois de mars : u est une symétrie ssi $u \circ u = \mathrm{Id}$.

I.7. Il y avait deux cas à distinguer : $b = c$ ou $b = -c$. Mais attention, il y avait une deuxième condition. Certains se sont pris les pieds dans le tapis en confondant [(A et B) ou (C et D)] avec [(A ou B) et (C ou D)]. Dans le cas $b = c$, la deuxième condition se résumait à $1 = 1$. Dans le cas $b = -c$, elle devenait $(b-c)(a-d) = 0$, ou encore $b(a-d) = 0$. Et hop, on simplifie allégrement par b : HORREUR ! Et si $b = 0$? Alors dans ce cas c aussi et on est ramenés au premier cas. Donc on peut exclure le cas $b = 0$ du second cas, et simplifier.

I.8. Pour montrer qu'un ensemble est un sev, rien de plus rapide que de l'écrire sous la forme Vect(qqch). Surtout quand on demande une base après.

II.4. Pour donner ce sev, utilisez Vect (en plus comme ça on est sûr que c'est un sev). Et pour la dimension, il fallait montrer que la famille (I, S, S^2) était libre.

III.1. On attendait une équivalence, pas seulement une analyse.

Version 2 : première partie

A.2.a. L'aspect borné était simple. Par contre le fait que P atteint sa borne inférieure était largement hors-programme. Il fallait en particulier parler de fonction continue à variable complexe. Même si on pouvait le démontrer en utilisant des points au programme, cela demandait tout de même beaucoup de travail et d'intuition, donc cette question était pratiquement infaisable de manière rigoureuse.

Version 2 : deuxième partie

A.1.a. N'oubliez pas de citer le TVI !
Nous n'avons pas forcément $P(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$ et $P(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$: c'est l'inverse si le coefficient dominant de P est strictement négatif.

A.1.b. Il fallait utiliser la grosse formule et montrer précisément que le polynôme caractéristique était de degré exactement n.

A.1.c. Attention, lorsque λ est valeur propre, IL EXISTE $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$, mais cela n'est pas vrai POUR TOUT x.

A.2.b Dans « sev strict », vous pensez bien à $\dim > 0$, mais pas à « distinct de E ». Ce qui obligeait à distinguer le cas où u était une homothétie.

B.1. Dans le passage au conjugué, insistez bien sur le fait que les coefficients de la combinaison linéaire sont RÉELS, sinon le résultat est faux. Si vous ne le précisez au bon moment, même en ayant pris $\lambda \in \mathbb{R}$ quelques lignes plus haut, on ne sera pas sûr que vous avez vraiment vu le problème.

B.2. La famille est génératrice et libre : il fallait le montrer, les deux points nécessitaient un peu de travail et ne pouvaient en aucun cas être expédiés avec un « on voit que ».

B.3.a. Comme toujours dans ces questions, il faut démontrer la linéarité ET l'aspect « ENDO » morphisme.

B.3.a. et C.I.2. Attention au corps de base : dans la B.3.a. le corps de base est $\mathbb{R}$ et pour montrer la linéarité il fallait prendre $\lambda \in \mathbb{R}$; dans C.I.2, le corps de base est $\mathbb{C}$ et il fallait prendre $\lambda \in \mathbb{C}$