Feuille d'exercice n° 19 : **Applications linéaires et familles de vecteurs - indications**

Exercice 3 Pour la question 3, vous pouvez par exemple chercher une condition pour que $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ soit un vecteur du noyau et de l'image. Posez-vous les question suivantes : si $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est de la forme $\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}$, à quelles conditions sur a, b, c, d le vecteur $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ est-il dans le noyau ? dans l'image ?

Exercice 4 Les deux premières questions se traitent sans surprise : il faut connaître le cours et appliquer rigoureusement les méthodes habituelles.
Pour la dernière question, pour démontrer le sens indirect, il faut savoir décomposer un vecteur de E comme la somme d'un vecteur de $\operatorname{Im} f$ et d'un vecteur de $\operatorname{Ker} f$. Faites donc une analyse pour vous mettre sur la piste d'une décomposition qui convient (attention : elle ne sera a priori pas unique). Et n'oubliez pas de bien exploiter toutes les hypothèses.

Exercice 5 Dans cet exercice, nous rencontrons pour la première fois le fait suffisant, absolument primordial : si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}) \Leftrightarrow f(x) = \lambda x.$$

Il faudra utiliser cela dans cet exercice.
Pour la dernière question, comme (presque) toujours dans les décompositions en supplémentaires : analyse - synthèse !