Devoir surveillé n°10
Version 2

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

Ce probème étudie la géométrie d'une partie convexe de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: une sorte de polyèdre dans cet espace de dimension n^2 . Au fil des questions, on déterminera, entre autres, quels sont les sommets de ce polyèdre et quelle est la dimension du plus petit espace vectoriel le contenant.

On note S_n le groupe des permutations de $[\![1,n]\!]$, et I_n la matrice identité d'ordre n.

- ☐ Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients positifs $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est dite *bistochastique* si pour tous $i,j \in [\![1,n]\!]$ on a $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} = 1$. En d'autres termes, une matrice est bistochastique si la somme des coefficients sur une ligne ou une colonne est égale à 1.
- ☐ Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients positifs $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est dite *de permutation* s'il existe une permutation $\sigma \in S_n$ (c'est-à-dire une bijection de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$) telle que $A = \sum_{i=1}^{n} E_{\sigma(i),i}$ ou de manière équivalente telle que $a_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$ pour tous $i,j \in [\![1,n]\!]$, où δ désigne le symbole de Kronecker. On notera M_σ la matrice de permutation associée à la permutation σ.
- ☐ Si $A_1,\dots,A_q \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle *barycentre à coefficients positifs* de ces matrices toute matrice B s'écrivant

$$B = p_1A_1 + \cdots + p_qA_q,$$

où $p_1,\dots,p_q$ sont des réels positifs vérifiant $p_1 + \cdots + p_q = 1$.

Partie A – Sommets du polytope de Birkhoff

1) Montrer que I_n est bistochastique et de permutation ; préciser la permutation associée.
Exhiber une matrice bistochastique non inversible.

2) Vérifier que l'ensemble des matrices de permutation est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

3) **a)** Montrer que toute matrice de permutation est bistochastique.
Étudier la réciproque.

b) Supposons qu'une matrice de permutation M_σ s'écrive $\lambda A + (1-\lambda)B$ où A et B sont des matrices bistochastiques et $\lambda \in [0,1]$.
Montrer que A et B sont de permutation.

4) L'ensemble des matrices bistochastiques est-il stable par produit ? Et par combinaison linéaire ?

Partie B – Espace engendré par le polytope

Notons F le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par les matrices bistochastiques et G le sous-espace vectoriel des matrices dont la somme des coefficients sur chaque ligne et sur chaque colonne vaut 0.

5) Montrer qu'une matrice appartient à F si et seulement si il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que la somme des coefficients sur chaque ligne et sur chaque colonne vaut c.

6) Montrer que $F = \mathrm{Vect}(J_n) \oplus G$ où J_n est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

7) Montrer qu'une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de G est uniquement déterminée par ses coefficients $(m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1}$.
En déduire que

$$\dim G \leqslant (n-1)^2.$$

8) **a)** Montrer que l'intersection de p hyperplans d'un espace de dimension $N \geqslant p$ est au moins de dimension $N - p$.

b) Pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, notons L_i^* (respectivement C_j^*) la forme linéaire qui associe à une matrice la somme des coefficients de la ligne i (respectivement de la colonne j).
Montrer que

$$G = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\, L_i^* \cap \bigcap_{j=1}^{n-1} \mathrm{Ker}\, C_j^* \ ;$$

en déduire que

$$\dim G \geqslant (n-1)^2.$$

9) En déduire la dimension de F.

10) Notons U le vecteur-colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1 et H le sous-espace de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des vecteurs dont la somme des coefficients est nulle.

a) Montrer que $M \in F$ si et seulement si M laisse stable $\mathrm{Vect}(U)$ et H.

b) Retrouver la dimension de F.
Indication : on pourra montrer que les sous-espaces $\mathrm{Vect}(U)$ et H sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Partie C – Théorème de Birkhoff

L'objectif est de démontrer le théorème suivant :

Théorème de Birkhoff : *Toute matrice bistochastique est un barycentre à coefficients positifs d'un nombre fini de matrices de permutation.*

11) Décomposer la matrice $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ comme un barycentre à coefficients positifs de matrices de permutation.

12) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ tels que $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j} = 0$ pour toute permutation $\sigma \in S_n$.
Montrer qu'il existe I, J deux parties de $[\![1, n]\!]$ telles que la matrice extraite $(a_{i,j})_{i \in I, j \in J}$ soit nulle et $\operatorname{Card} I + \operatorname{Card} J = n + 1$.
Indication : on pourra raisonner par récurrence forte sur n.

13) En déduire que si la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est bistochastique, alors il existe une permutation $\sigma \in S_n$ telle que $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j} \neq 0$.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde et calculer la somme de tous les coefficients d'une matrice bistochastique.

14) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice bistochastique et σ une permutation associée à A telle que $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j} \neq 0$. Considérons

$$\alpha = \min \left\{ a_{\sigma(j),j},\ j \in [\![1, n]\!] \right\} > 0.$$

- **a)** Déterminer A dans le cas où $\alpha = 1$.
- **b)** Si $\alpha < 1$, montrer que $A - \alpha M_\sigma = (1 - \alpha) B$ où B est une matrice bistochastique qui admet strictement plus de coefficients nuls que A.

15) Montrer le théorème de Birkhoff.

— FIN —