Devoir à la maison n° 10

À rendre le 6 janvier

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$, $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$.

1) Calculer u_0, v_0, u_1 et v_1.

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement monotones et que $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$. Conclusion ?

3) En déduire que la suite (S_n) converge vers une limite ℓ et que $\frac{1}{3} < \ell < \frac{1}{2}$.

4) **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, ℓ est comprise entre S_n et S_{n+1}.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|S_n - \ell| < \frac{1}{(n+1)!}$.

5) Dans cette question, on montre par l'absurde que ℓ est irrationnel. On suppose $\ell = \frac{p}{q}$, avec p, $q \in \mathbb{N}^\star$.

a) Soit $n \geqslant q$. Montrer que $|n!S_n - n!\ell| < \frac{1}{n+1}$ et que $n!S_n - n!\ell$ est un entier.

b) En déduire que pour tout $n \geqslant q$, on a $S_n = \ell$ et montrer que ceci est absurde.

6) On trouve maintenant la valeur de ℓ.

a) Montrer que, pour tout réel x, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{e}^{x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \mathrm{e}^{t} \frac{(x-t)^n}{n!} \, \mathrm{d}t.$$

b) Montrer que, pour tout réel x, la suite de terme général $\int_0^x \mathrm{e}^{t} \frac{(x-t)^n}{n!} \, \mathrm{d}t$ tend vers 0.

c) En déduire la valeur de ℓ.

— FIN —