Devoir à la maison n° 7

À rendre le 30 novembre

L'objectif de ce problème est de construire la fonction « logarithme en base a ». On s'abstiendra donc d'utiliser tout objet découlant du logarithme (exponentielle, puissances non entières *etc.*). On pourra bien entendu utiliser la propriété de la borne supérieure et toutes celles en découlant, ainsi que les propriétés élémentaires des suites réelles.

On se fixe, dans tout ce problème, un nombre réel $a > 1$. L'objectif de ce problème est de montrer qu'il existe une unique fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$f \text{ est croissante}, \quad f(a) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ f(xy) = f(x) + f(y).$$

I - Question préliminaires.

1) Montrer l'inégalité de Bernoulli :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

2) Que peut-on dire concernant la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un entier $m \in \mathbb{Z}$ vérifiant $a^m \leqslant x \leqslant a^{m+1}$.

II - Analyse : unicité de la fonction solution.

Soit donc $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ croissante, vérifiant $f(a) = 1$ et $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ f(xy) = f(x) + f(y)$.
Pour chaque $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $A_x = \left\{ \dfrac{m}{n} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}^*,\ a^m \leqslant x^n \right\}$.

4) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $f(x^p) = pf(x)$.

5) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $p \in \mathbb{Z}$, $f(x^p) = pf(x)$.

6) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, A_x possède une borne supérieure.

7) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\frac{m}{n} \in A_x \quad \text{et} \quad \frac{m}{n} \leqslant f(x) \leqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{n}.$$

8) En déduire que $f(x) = \sup(A_x)$.

III - Synthèse : construction de la fonction solution.

Rappelons que, pour chaque $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a posé $A_x = \left\{ \dfrac{m}{n} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}^*,\ a^m \leqslant x^n \right\}$.
Rappelons aussi que l'on a montré que A_x possède une borne supérieure.
On pose donc

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sup(A_x) \end{array}$$

et l'on cherche à montrer que f est bien solution de notre problème.

9) Déterminer A_a et en déduire la valeur de $f(a)$.

10) Montrer que, si $z > 1$, alors $f(z) > 0$.

11) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $|f(xy) - f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{2}{n}$.

Indication : on pourra considérer m, m' tels que $\dfrac{m}{n} \in A_x$ et $\dfrac{m'}{n} \in A_y$.

12) En déduire que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $f(xy) = f(x) + f(y)$. Montrer de plus que f est strictement croissante.

— **FIN** —