2.3 : Dim. d'1 somme de sev :

Formule de Grassmann : Soit E 1 ev (de dim quelconque, $\hat{=} \infty$), F, G 2 sev de E, F et G de dim finie (R : Si E est de dim finie, F et G le sont automatiquement, ce sera le cas le + fréquent).

Alors $F+G$ est de dim finie

et : $\boxed{\dim F+G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G}$ (A) en particulier, si F et G sont en somme directe, $F \cap G = \{0\}$, donc :

$$\dim F+G = \dim F + \dim G$$

d'ailleurs : dans tous les cas, $\dim F+G \leq \dim F + \dim G$

et l'égalité a lieu ssi F et G sont en somme directe.

Dém : démontrons le dernier point ; en admettant $(*)$

$\dim F \cap G \geq 0$ donc avec $(*)$.

$$\dim F+G \leq \dim F + \dim G$$

égalité ssi $\dim F \cap G = 0$

ssi $F \cap G = \{0\}$

ssi F et G sont en somme directe.

Montrons (A) :

1) 1er cas : F et G sont en somme directe.

F est de dim finie, soit $\mathcal{B}$ 1 base de F

G " " " " $\mathcal{C}$ 1 base de G

On sait que $\mathcal{B} \uplus \mathcal{C}$ est 1 base de $F \oplus G$ car F et G st en somme directe, dc $F \oplus G$ a

1 base de cardinal fini, dc $F+G$ est de dim finie, et :

$$\dim F+G = \#(\mathcal{B} \uplus \mathcal{C}) = \#\mathcal{B} + \#\mathcal{C} = \dim F + \dim G.$$

2) 2ème cas : cas général.

$F \cap G$ est 1 sev de F, et F est de dim finie, dc il a 1 supplémentaire dans F.

Soit S un sev de F tq :

$$F \cap G \oplus S = F$$

Donc avec le 1^{er} cas :

$$\dim(F \cap G) + \dim S = \dim F$$

Donc : $\dim S = \dim F - \dim F \cap G$.

Si on arrive à mq. $\dim S = \dim(F+G) - \dim G$
c'est gagné.

On sait que c'est le cas si $S \oplus G = F+G$
C'est ce qui se passe ! Montrons-le.

- $S \cap G = (\underbrace{S \cap F}_{=S}) \cap G$ car $S \subset F$

$= S \cap (F \cap G)$

$= \{0\}$ car S et $F \cap G$ sont en somme directe.

donc S et G sont en somme directe.

• $(F\cap G) \subset G$

donc $F+G = (\underbrace{S+F\cap G}_{=F}) + G$

$$= S+G$$

(en effet : • soit $x \in S+G$,

il existe $y\in S$, $z\in G$ tq. $x = y+z$

donc $x = (\underbrace{y}_{\in S} + \underbrace{0}_{\in F\cap G}) + \underbrace{z}_{\in G} \in (S+F\cap G)+G$

• Soit $x \in (S+F\cap G)+G$, il existe $y \in S$, $z\in F\cap G$,
$t\in G$

tq. $x = y + (\underbrace{\overset{\in F}{z} + \overset{\in F}{t}}_{\in F}) \in S+F$)

donc on a bien : $S \oplus G = F + G$

donc $\dim S + \dim G = \dim F + G$

donc : $\dim F - \dim F \cap G + \dim G = \dim F + G$.

$\square$

Ex : • On a mq avec plusieurs méthodes que si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ st 2 dtes du plan ne se coupant qu'en 0, alors $\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 = \mathbb{R}^2$.

Nlle démo : $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \{0\}$, donc $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ st en somme directe,

donc : $\dim(\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2) = \dim \mathcal{D}_1 + \dim \mathcal{D}_2 = 2$

Or $\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \subset \mathbb{R}^2$ et ils ont la même dim,

donc $\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 = \mathbb{R}^2$.

- de même, si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont 1 dte et 1 plan de $\mathbb{R}^3$ tq. $\mathcal{D} \not\subset \mathcal{P}$, (vectoriels)

  alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \{0\}$,

donc :
$$\dim \mathcal{D} \oplus \mathcal{P} = \dim \mathcal{D} + \dim \mathcal{P} = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

donc $\mathcal{D} \oplus \mathcal{P} = \mathbb{R}^3$.

Prop. 2.3.3 : Soit E 1 $\mathbb{K}$-ev et F et G 2 sev de dim finie de E.

Si $E = F \oplus G$, alors :

1) $F \cap G = \{0\}$

2) $E = F + G$

3) E est de dim finie et $\dim E = \dim F + \dim G$.

(1) et 2) : c'est la déf, avec 1) et 2) on a 3) avec la formule de Grassmann).

Réciproquement, si 2 de ces 3 pts sont vérifiés, alors le 3ème pt aussi et $E = F \oplus G$.

Rq : on a plein de méthodes pr mq. 2 sev sont supplémentaires

- Analyse / synthèse pr mq. $\forall x \in E$ s'écrit de manière unique $\hat{c}$ 1 vect de F + 1 vect de G
  ↳ tjrs faisable, et quasi inévitable sur les cas "moins concrets", ie dès qu'on n'est pas ds 1 ev. de dim finie.

- déf : $F \cap G = \{0\}$, $F + G = E$
- En dim finie, on peut aussi utiliser 2.3.3 et en gal le pt 2) est le + pénible à montrer

car il faut réussir à décomposer 1 élt de E

comme 1 somme.

On préfère montrer 1) et 3).

- On montre qu'1 base de F $\uplus$ 1 base de G est 1 base de E (très efficace aussi).

Démo : • $E = F \oplus G \Rightarrow 1, 2, 3$: on l'a fait.

- Par déf, 1 et 2 $\Rightarrow E = F \oplus G \Rightarrow 1, 2, 3$

- Supposons 1 et 3 : $F \cap G = \{0\}$
  et $\dim F + \dim G = \dim E$

Or : $\dim F+G = \dim F + \dim G \overbrace{(-\dim F \cap G)}^{=0}$

$\underset{3)}{=} \dim E$

or $F+G \subset E$, dc $F+G = E$ et on a 2,

dc avec 1 et 2 : $E = F \oplus G$.

• Supposons 2 et 3 : $E = F+G$

et $\dim E = \dim F + \dim G$

or : $\dim E \underset{2)}{=} \dim (F+G) \underset{3)}{=} \dim F + \dim G$

dc : $\dim F \cap G = 0$ et $F \cap G = \{0\}$: c'est 1

dc avec 1 et 2 : $E = F \oplus G$. $\square$

<u>Cor</u> : Si E est de dim finie et F est 1 sev, tous les supp. de F ont pour dim $\dim E - \dim F$.

<u>Démo</u> : Soit S 1 sev tq. $F \oplus S = E$

Grassmann : $F \cap S = \{0\}$

donc $\dim F + \dim S = \dim E$

d'où $\dim S = \dim E - \dim F$.

<u>Ex</u> : $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{D} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{P}$: éq : $x - y + z = 0$.

1) <u>Par analyse-synthèse</u> : Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et

Analyse

$y \in D$, $z \in P$ tq. $X = y + z$.

$y \in D$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq. $y = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$

et si: $z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a: $x - y + z = 0$

dc: $z = \begin{pmatrix} x \\ x + z \\ z \end{pmatrix}$

dc on a: $X = y + z$

dc: $\begin{cases} a = \lambda + x \\ b = -\lambda + x + z \\ c = \lambda + z \end{cases}$

dc :
$$\begin{cases} \lambda + x = a \\ 2x + z = a + b & L_1 + L_2 \\ -x + z = -a + c & L_3 - L_1 \end{cases}$$

dc :
$$\begin{cases} \lambda + x = a \\ 2x + z = a + b \\ z = \frac{1}{3}(-a + b + 2c) & 2L_3 + L_1 \end{cases}$$

dc : $x = \frac{1}{2}(a + b - z) = \frac{1}{6}(4a + 2b - 2c)$

$$= \frac{1}{3}(2a + b - c)$$

et $y = x + z = \frac{1}{3}(a + 2b + c)$.

et $\lambda = a - x = \frac{1}{3}(a - b + c)$

d'où l'unicité de λ, x, y, z, de Y et Z.

donc : $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont en somme directe.

<u>Synthèse</u> : Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Posons $Y = \frac{1}{3}(a - b + c)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}$

et $Z = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2a+b-c \\ (2a+b-c)+(-a+b+2c) \\ -a+b+2c \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$ car la 2^{nd} coord $= 1^{\text{re}} + 3^{\text{e}}$

et de plus : $X = Y + Z$ (à vérifier).

donc : $\mathbb{R}^3 = P + D$.

cc : $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

2) déf : on se rend compte que pour mq. $\mathbb{R}^3 = P + D$, on doit faire l'analyse précédente pour trouver Y et Z : autant faire la méthode 1.

3) Mq. $P \cap D = \{0\}$ et $\dim P + \dim D = 3$.

. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P \cap D$. Dc $x - y + z = 0$ car $X \in P$

et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq. $X = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

dc : $x = \lambda$, $y = -\lambda$, $z = \lambda$

dc $0 = x - y + z = 4\lambda$ dc $\lambda = 0$, dc $X = 0$

et $P \cap D = \{0\}$.

Évidemment, $\dim D = 1$

et $\dim P = 2$ car on sait que P est 1 plan.

dc : $P \oplus D = \mathbb{R}^3$.

[Cette méthode est bcp + rapide que la méthode 1, par contre elle ne donne par la valeur de y et z

si $x = y + z$.

Si on veut juste $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$: pas de pb.

Si on a besoin des expr. de y et z

(ex. typique : donner l'expression de la projection de D sur P)

alors autant faire 1) ...].

4) Donner 1 base de P, 1 base de D et mq. c'est 1 base de $\mathbb{R}^3$.

base de D : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$$x - y + z = 0 \iff \begin{cases} x = x \\ y = x + z \\ z = z \end{cases}$$

$$\text{d'où } \quad P = \mathrm{Vect}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}_{\text{libre car échelonnée}}\Big)$$

1 base de P est $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

$$\mathrm{Vect}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}_{=\mathcal{B}}\Big) \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_3 + 2C_2}{=} \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$= \mathbb{R}^3$$

à écrire directement

d'où $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est 1 base de $\mathbb{R}^3$.

détaillons :

$\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right)$ est libre car échelonnée,

or elle a 3 vect, et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, dc avec l.h.g, c'est 1 base de $\mathbb{R}^3$.

dc : $\mathrm{Vect}\, \mathcal{F} = \mathbb{R}^3$.

dc : $\mathrm{Vect}\, \mathcal{B} = \mathrm{Vect}\, \mathcal{F} = \mathbb{R}^3$

dc $\mathcal{B}$ est génératrice, or elle a 3 vect et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, dc c'est 1 base.

Rq : le raisonnement prouve que :

sut très sut.

Si $(e_1 \dots e_n)$ est 1 famille de n vect.
et $\mathrm{Vect}(e_1 \dots e_n) = \mathrm{Vect}(f_1 \dots f_n)$
et $(f_1 \dots f_n)$ est 1 famille libre de n vect,
alors $(e_1 \dots e_n)$ est libre.

(indice : mq $(e_1 \dots e_n)$ et $(f_1 \dots f_n)$ st 2 bases de $\mathrm{Vect}(e_1 \dots e_n)$.).

Prop. 2.3.6 : et Grassmann avec n sev ?

généralisation partielle :

Si E est 1 $\mathbb{K}$-ev et $F_1 \dots F_n$ st des sev de dim finie, alors :

$F_1 + \dots + F_n$ est de dim finie et :

$$\dim(F_1 + \dots + F_n) \leq \sum_{i=1}^{n} \dim(F_i) \quad \text{(inégalité triangulaire)}$$

avec égalité ssi les F_i sont en somme directe.

Démo : $\forall n \in \cancel{\mathbb{N}}^*$ $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, (H_n) : si $F_1 \dots F_n$ sev ... ... l'inég. ...

- pour $n=1$: $\dim F_1 \leq \dim F_1$: oui

"F_1 en somme directe" : "oui"

- pour $n=2$: c'est 1 csqce directe de 2.3.1.

- Soit $n \geq 2$ tq. (H_n) est vrai.

Soit $F_1 \dots F_{n+1}$ des sev. de E.

$$\dim(F_1 + \dots + F_n + F_{n+1}) = \dim\big(\underbrace{(F_1 + \dots + F_n)}_{=F} + F_{n+1}\big)$$

$$\underset{G.}{=} \dim F + \dim F_{n+1} - \dim F \cap F_{n+1} \qquad (\star)$$

$$\leq \dim F + \dim F_{n+1}$$

$$\underset{\text{h.r.}}{\leq} \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \dim F_i}_{\geqslant \dim F}\right) + \dim F_{n+1} \qquad (\#)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n+1} \dim F_i \, .$$

avec $(*)$ et $(\#)$ en égalité

ssi
$$\begin{cases} \dim F \cap F_{n+1} = 0 & (*) \\ \dim F = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i & (\#) \end{cases}$$

ssi
$$\left(\begin{array}{l} F \text{ et } F_{n+1} \text{ sont en somme directe} \\ \text{les } F_i \ (i \text{ de } 1 \text{ à } n) \text{ sont en somme directe} \end{array}\right.$$

ssi $F_1 \dots F_{n+1}$ sont en somme directe

donc on a (H_{n+1}).

cf. 2.3.25 et 2.23.26

du chap. $\overline{\underline{XVII}}$.