Devoir à la maison n° 21

À rendre le 25 juin

Pour ce DM, vous rendrez, un exercice (au choix) si vous le rendez seul, deux exercices (au choix) si vous le rendez en binôme, trois exercices (au choix !) si vous le rendez en trinôme.

I. Premier exercice, calculatoire

On appelle $\mathbb{K}$: $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $a_0, \dots, a_n$, x, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des éléments de $\mathbb{K}$.
Calculer les déterminants de dimension $n+1$ suivants :

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1 & 0 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdot & \cdot & \alpha_n \\ \vdots & \alpha_2 & 0 & \alpha_3 & \cdot & \cdot & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \alpha_3 & 0 & \cdot & \cdot & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \alpha_4 & \ddots & \cdot & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \cdots & \alpha_n & 0 \end{vmatrix}.$$

II. Deuxième exercice, plus astucieux

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Calculer

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x_1 - x & \alpha - x & \cdots & \alpha - x \\ \beta - x & x_2 - x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha - x \\ \beta - x & \cdots & \beta - x & x_n - x \end{vmatrix}.$$

III. Troisième exercice, plus long

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On note $\mathscr{P}$ (respectivement $\mathscr{I}$) le sous-espace vectoriel de E constitué des polynômes pairs (respectivement impairs). Pour tous $P, Q \in E$, on pose :

$$(P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

1) Montrer que $(.|.)$ définit sur E un produit scalaire.

2) Démontrer que $\mathscr{P} \oplus \mathscr{I} = E$.

3) Montrer que $\forall P \in \mathscr{P}$, $\forall Q \in \mathscr{I}$, $(P|Q) = 0$.

4) Déterminer une famille orthogonale (P_1, P_2, P_3, P_4) de E.

5) Montrer, en utilisant le produit scalaire $(.|.)$, que :

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R},\ \left(\frac{ac}{3} + bd\right)^2 \leqslant \left(\frac{a^2}{3} + b^2\right) \times \left(\frac{c^2}{3} + d^2\right).$$

— FIN —