

Devoir à la maison n° 6

À rendre le 12 novembre

On note \mathcal{E} l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- f est continue ;
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(xy) = xf(y) + yf(x)$.

1) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un élément de \mathcal{E} .

- a) Déterminer $f(0)$ et $f(1)$.
- b) En déduire que $f(-1) = 0$.
- c) Montrer que f est impaire.

2) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un élément de \mathcal{E} . On suppose dans cette partie uniquement que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

a) Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, xf'(x) - f(x) = f'(1)x.$$

b) Soit $k \in \mathbb{R}$, résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation différentielle

$$xy' - y = kx. \quad (1)$$

c) En déduire la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

d) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{R}$, il existe une unique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ élément de \mathcal{E} , dérivable sur \mathbb{R}_+^* et vérifiant $f'(1) = k$.

3) Soit $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'unique élément de \mathcal{E} dérivable sur \mathbb{R}_+^* et telle que $f'(1) = 1$.

- a) La fonction f_1 est-elle dérivable en 0 ? (*on étudiera la limite en 0^+ du taux d'accroissement de f_1 en 0.*)
- b) Étudier les variations de f_1 .
- c) Donner l'allure du graphe de f_1 (unité de longueur : 4 centimètres). On fera notamment attention au comportement de f_1 au voisinage de 0 et l'on tracera les tangentes remarquables à sa courbe.

4) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un élément de \mathcal{E} , que l'on suppose juste continue. Soit F l'unique primitive de f s'annulant en 0.

a) Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, F(xy) = x^2F(y) + \frac{xy^2}{2}f(x).$$

b) En déduire que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et en déduire \mathcal{E} .

— FIN —