Devoir surveillé n° 9
– Version 2 –
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Base duale.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n non nulle. L'ensemble $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ des formes linéaires de E est un $\mathbb{K}$-ev appelé le *dual* de E et noté E^*. Le dual de E^* est appelé le *bidual* de E et noté E^{**}. On a ainsi $(E^*)^* = E^{**}$.
Soit $\mathscr{B} = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note e_i^* l'unique forme linéaire de E définie par la relation :

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases},$$

où δ est appelé *symbole de Kronecker*.
La famille $(e_k^*)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est alors notée $\mathscr{B}^*$.

1) Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, e_k^* est appelée l'*application coordonnée d'indice* k de $\mathscr{B}$. Justifier cette appellation en montrant que pour tout $x \in E$ on a

$$x = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x)e_k.$$

2) **a)** Montrer que $\mathscr{B}^*$ est une base de E^*, appelée la *base duale de* $\mathscr{B}$.

b) Soit $f \in E^*$, montrer que le n-uplet des coordonnées de f dans $\mathscr{B}^*$ est $(f(e_1),\dots,f(e_n))$.

3) Pour tout $x \in E$ on note ev_x l'application $\begin{array}{ccc} E^* & \to & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & f(x) \end{array}$, appelée *évaluation de f en x.*

a) Soit $x \in E$. Montrer que ev_x appartient à E^{**}.

b) Montrer que l'application $ev : \begin{array}{ccc} E & \to & E^{**} \\ x & \mapsto & ev_x \end{array}$ est un isomorphisme de E sur E^{**}.

c) Quelle est l'application e_i^{**} ?

II. Allumettes de Banach.

Deux urnes A et B, initialement vides, peuvent contenir respectivement au plus n et m boules ($n \geqslant 1,\ m \geqslant 1$).
On s'intéresse au protocole suivant :

— on choisit l'urne A avec la probabilité $p \in]0\,;1[$, l'urne B avec la probabilité $q = 1 - p$;
— on met une boule dans l'urne choisie;
— on répète cette épreuve autant de fois qu'il est nécessaire pour que l'une des urnes A ou B soit pleine, c'est-à-dire contienne n boules pour l'urne A ou contienne m boules pour l'urne B, les choix des urnes étant mutuellement indépendants.

Dans le cas où $n = m$ et $p = q = \dfrac{1}{2}$, ce processus est connu sous le nom de *problème des allumettes de Banach*.

Partie I : Préliminaires.

On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{\sqrt{n}\binom{2n}{n}}{4^n}.$$

1) Calculer a_1 et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, le rapport $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

2) Démontrer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n \leqslant \sqrt{\frac{n}{2n+1}}.$$

3) Donner le sens de variation de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et montrer qu'elle converge vers un réel ℓ tel que :

$$\frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

4) Montrer alors que $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Partie II : Étude du cas symétrique.

Dans cette partie **seulement**, on prend $m = n$ et $p = q = \dfrac{1}{2}$.

On note R_n la variable aléatoire égale au nombre (éventuellement nul) de boules contenues dans l'urne qui n'est pas pleine, à l'issue de l'expérience.

5) Dans ces questions, on n'oubliera pas de justifier ses calculs.

a) Donner les lois de R_1 et de R_2.

b) Donner la loi de R_3.

6) Calculer l'espérance et la variance de R_1, R_2 et R_3.

Dans toute la suite de la partie, on suppose que $n \geqslant 2$.

7) Quel est l'ensemble $R_n(\Omega)$ des valeurs prises par la variable R_n ?

8) Soit k appartenant à $R_n(\Omega)$.

a) Calculer la probabilité, qu'à l'issue de la $(n-1+k)^{\text{e}}$ épreuve, l'urne A contienne $n-1$ boules et l'urne B contienne k boules.

b) Donner alors la probabilité $P(R_n = k)$.

9) Vérifier que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad 2(k+1)\,P(R_n = k+1) = (n+k)\,P(R_n = k).$$

10) **a)** Déduire de la question précédente que

$$\mathrm{E}(R_n) = n - (2n-1)\,P(R_n = n-1).$$

b) En déduire une expression de $\mathrm{E}(R_n)$ en fonction de n.

c) Donner alors un équivalent de $n - \mathrm{E}(R_n)$ quand n tend vers plus l'infini.

11) **a)** De façon analogue, montrer que

$$\mathrm{E}\left(R_n^2\right) = (2n+1)\,\mathrm{E}(R_n) - n(n-1).$$

b) En déduire l'expression de $V(R_n)$ en fonction de n et $\mathrm{E}(R_n)$.

Partie III : Retour au cas général.

On **abandonne** les conditions $m = n$ et $p = q = \dfrac{1}{2}$.

12) En utilisant un argument probabiliste, montrer que

$$q^m \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m-1+k}{m-1} p^k + p^n \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n-1+k}{n-1} q^k = 1.$$

13) **a)** En utilisant la question précédente, montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{M} \binom{n-1+k}{n-1} q^k\right)_{M \geqslant 0}$ converge.

b) Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, donner un équivalent de $\binom{m-1+k}{m-1}$ lorsque m tend vers $+\infty$.

c) En déduire l'existence et la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{m \to +\infty} q^m \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m-1+k}{m-1} p^k.$$

d) Prouver alors que

$$\sum_{k=0}^{M} \binom{n-1+k}{n-1} q^k \xrightarrow[M \to +\infty]{} \frac{1}{p^n}.$$

— **FIN** —