Devoir facultatif n° 01

Le but de ce problème est de présenter la méthode de Cardan pour la résolution des équations de degré 3.
Pour tout réel y, on notera $\sqrt[3]{y}$ l'unique réel x tel que $x^3 = y$.

A). Rappels sur les équations du second degré

Soit a et b deux complexes. On considère l'équation

$$z^2 + az + b = 0 \tag{1}$$

1) Démontrer que l'équation (1) admet exactement une ou deux solutions. On notera z_1 et z_2 les deux solutions (avec $z_1 = z_2$ s'il n'y a qu'une solution).

2) Montrer $z_1 + z_2 = -a$ et $z_1 z_2 = b$.

3) Montrer que pour tout couple de complexes (u, v), on a

$$\{\, u, v \,\} = \{\, z_1, z_2 \,\} \iff \begin{cases} uv = b \\ \text{et } u + v = -a \end{cases}$$

B). Réduction à une équation sans terme de degré 2

Soit $z \in \mathbb{C}$. On considère l'équation suivante d'inconnue z :

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0\ , \tag{2}$$

où a, b et c sont des complexes.

4) Montrer qu'en posant $z' = z + \alpha$, où α est une valeur bien choisie, l'équation (2) est équivalente à l'équation de Cardan, d'inconnue z' :

$$z'^3 + pz' + q = 0\ , \tag{3}$$

où p et q sont des complexes dépendants de α, a, b et c.

5) Résoudre l'équation (3) dans le cas $p = 0$.

C). Étude de l'équation de Cardan

Soit z_0 un complexe.

6) Montrer qu'il existe u et v vérifiant

$$\begin{cases} u+v &= z_0 \\ uv &= -\dfrac{p}{3} \end{cases}$$

On ne cherchera pas à calculer explicitement u et v.

7) Montrer alors que z_0 est solution de (3) si et seulement si u^3 et v^3 sont les deux solutions de

$$Z^2 + qZ - \frac{p^3}{27} = 0. \tag{4}$$

D). Cas réel

Dans cette partie, on considère l'équation (3) dans le cas où p et q sont *réels* et on cherche ses solutions *réelles*. Pour cela, on note Δ le discriminant de (4) et on considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^3 + px + q. \end{array}$$

Les solutions réelles de (3) sont les valeurs pour lesquelles f s'annule.

8) Étudier les variations de f dans le cas où $p < 0$. Remarquer en particulier que f admet un minimum local en un point α et un maximum local en un point β. On pose $m = f(\alpha)$ et $M = f(\beta)$.

9) Montrer que $mM = \Delta$.

10) Étudier les variations de f dans le cas où $p \geqslant 0$.

11) Déduire des trois questions précédentes que, quelle que soit la valeur de p, (3) admet une unique racine réelle si et seulement si $\Delta > 0$ ou $p = q = 0$.

12) Dans le cas où $\Delta > 0$, résoudre l'équation (3).

13) *Application* : déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$x^3 - 2x - 5 = 0 .$$

On ne prendra pas peur : l'expression des solutions est assez compliquée.

14) Combien l'équation (3) a t-elle de solutions dans le cas $\Delta \leqslant 0$?

Le cas $\Delta < 0$ a historiquement motivé l'introduction des complexes par Bombelli au XVI$^{\text{ème}}$ siècle, alors que les nombres négatifs ont prêté à controverse jusqu'au début du XIX$^{\text{ème}}$ siècle...

E). Résolution dans le cas complexe

On reprend donc l'équation (3) dans le cas où les coefficients sont complexes et l'on cherche ses solutions dans $\mathbb{C}$. On a résolu le cas $p = 0$ plus haut, on supposera donc $p \neq 0$. On considère donc l'équation (4). On notera U et V ses racines complexes.

15) Calculer UV. Montrer que $U \neq 0$ et $V \neq 0$.

16) Montrer que l'équation $u^3 = U$ admet trois solutions distinctes u_1, u_2, u_3 et exprimer par exemple u_2, u_3 en fonction de u_1 et de $j = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{3}\right)$.

17) Soit v_1 le complexe vérifiant $u_1 v_1 = -\dfrac{p}{3}$.
Justifier son existence et montrer que $v_1^3 = V$.
Donner toutes les autres solutions de l'équation $v^3 = V$ en fonction de v_1.

18) On pose $\begin{cases} z_1 = u_1 + v_1 \\ z_2 = u_1 j^2 + v_1 j \\ z_3 = u_1 j + v_1 j^2 \end{cases}$
Montrer que z_1, z_2, z_3 sont solutions de l'équation (3).

19) Montrer que réciproquement si z_0 est une racine de (3) alors z_0 est l'une des trois valeurs z_1, z_2 ou z_3.

F). Équation de Bombelli

En 1572, Bombelli s'intéresse à la résolution de l'équation

$$x^3 = 15x + 4 \tag{5}$$

Autrement dit, il s'agit de l'équation (3) dans le cas particulier $p = -15$ et $q = -4$. Il n'y a en fait pas besoin d'utiliser la méthode de Cardan pour la résoudre. Néanmoins, c'est un bon exemple pour comprendre pourquoi et comment le passage par les complexes peut-être utile pour résoudre sur $\mathbb{R}$ certaines équations de degré 3.

20) Comment peut-on résoudre directement (5) sur $\mathbb{R}$?

21) On applique maintenant la méthode de Cardan : on note U et V les racines de (4), en prenant U la racine de partie imaginaire positive. Calculer U et V.

22) On cherche maintenant à exprimer une racine cubique de U sous forme algébrique. Pour cela, on va chercher x et y entiers vérifiant

$$(x + iy)^3 = U \tag{6}$$

Soit donc x et y deux entiers relatifs vérifiant cette équation. Montrer qu'alors x vérifie une équation de degré 3 à coefficients entiers qu'on précisera. En déduire que x est pair. On posera alors $k = x/2$.

23) Donner une équation de degré 3 vérifiée par k. Remarquer que cette équation a une solution évidente, solution de l'équation de degré 3 sur x trouvée précédemment.

24) Montrer qu'on peut en tirer une solution de (6) et exprimer sous forme algébrique une racine cubique u de U.

25) Montrer qu'on retrouve ainsi les solutions de (5).

G). Un exemple

On s'intéresse à l'équation $x^3 - 7x + 6 = 0$.

26) Montrer comment la résoudre directement.

27) Appliquer la méthode de Cardan et vérifier qu'on retrouve les mêmes racines.

— **FIN** —