Devoir surveillé n°2

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(y - f(x)) = 2 - x - y.$$

II. Calcul approché de π.

L'objectif de ce problème est d'étudier une technique d'approximation de l'arctangente par des fonctions polynomiales.

À la fin du problème, vous serez notamment capables de calculer à la main des décimales de π, par la formule de Machin (vue en TD et admise ici) :

$$\pi = 16\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - 4\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right).$$

Pour chaque entier naturel n et chaque réel x, on considère

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

ainsi que

$$f_n(x) = S_n(x) - \mathrm{Arctan}(x).$$

Dans tout ce problème, on considère un réel $x \in]0,1[$ et un entier naturel n fixés.

1) Rappeler la formule de sommation géométrique.

2) Justifier que f_n est dérivable, et déduire de la formule précédente que

$$f_n'(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

3) Dresser les tableaux de signes et de variations de f_n sur $]-1,1[$.

4) En déduire une comparaison de $\mathrm{Arctan}(x)$ et de $S_n(x)$, en fonction notamment de la parité de n.

5) Exprimer $S_{n+1}(x)$ en fonction de $S_n(x)$, de n et de x. On exprimera le résultat en fonction de la parité de n.

6) Déduire des deux questions précédentes que

$$|\mathrm{Arctan}(x) - S_n(x)| \leqslant \frac{x^{2n+3}}{2n+3}.$$

7) Vérifier que $S_1\left(\frac{1}{5}\right)$ est une valeur approchée rationnelle à 5.10^{-4} près de $\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$, et donner une valeur approchée rationnelle à 5.10^{-4} près de $\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)$.

8) En déduire une valeur approchée rationnelle à 10^{-2} près de π.

III. Représentation de Zeckendorf d'un entier.

On définit la *suite de Fibonnaci* (F_n) par les données suivantes :

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

Dans tout ce problème, si des récurrences sont mises en œuvre, on prêtera une attention particulière au choix du type de ces récurrences, ainsi qu'à leur rédaction.

1) Calculer F_2, F_3, F_4, F_5 et F_6.

2) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n \in \mathbb{N}^*$.

3) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $F_{n+1} \geqslant 1 + F_n$. Que dire de la monotonie de (F_n) ?

4) Proposer (et justifier) une minoration de F_n, et l'utiliser pour montrer que $F_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Nous allons montrer le théorème de Zeckendorf (1972), qui s'énonce comme suit :

Pour tout entier naturel non nul N, il existe une unique suite finie d'entiers $u_0 < \cdots < u_p$, supérieurs ou égaux à 2, non deux à deux consécutifs et vérifiant

$$N = F_{u_0} + \cdots + F_{u_p} = \sum_{k=0}^{p} F_{u_k}.$$

Une telle écriture est appelée *représentation de Zeckendorf* de N. Par exemple, $1 = F_2$, tandis que $4 = F_2 + F_4$.

Remarquons que la condition « $u_0 < \cdots < u_p$ est une suite d'entiers non deux à deux consécutifs » s'écrit

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ u_i \geqslant u_{i+1} - 2.$$

5) Donner les représentations de Zeckendorf de 5, 6, 7 et 8.

6) <u>Démonstration de l'existence</u>

Soit $N \geqslant 1$.

- **a)** Justifier qu'il existe un plus grand entier $p \geqslant 2$ vérifiant $F_p \leqslant N$.
  Indication : on exploitera pour cela l'étude de la suite (F_n) menée au début du problème.
- **b)** On considère l'entier p de la question précédente. Justifier que pour tout entier $i \geqslant 2$, si $F_i \leqslant N - F_p$, alors $i \leqslant p - 2$.
- **c)** En déduire par un raisonnement par récurrence l'existence de la représentation de Zeckendorf de l'entier N.

7) La démonstration précédente suggère un algorithme pour le calcul de cette représentation. Donner la représentation de Zeckendorf de 44.

8) <u>Démonstration de l'unicité</u>

- **a)** Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{p} F_{2k} < F_{2p+1} \text{ et } \sum_{k=1}^{p} F_{2k+1} < F_{2p+2}.$$

- **b)** Soit $N \in \mathbb{N}^*$ de représentation de Zeckendorf :

$$N = F_{u_0} + \cdots + F_{u_p}.$$

  Montrer que $F_{u_p} \leqslant N < F_{1+u_p}$.
- **c)** En déduire l'unicité de la représentation de Zeckendorf.

— FIN —