Devoir surveillé n° 8
– Version 2 –
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Inégalité de Wirtinger.

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ à valeurs réelles. Soit a et b deux réels tels que

$$a < b \leqslant a + \pi \quad \text{et} \quad f(a) = f(b) = 0.$$

Le but de ce problème est de démontrer l'*inégalité de Wirtinger* :

$$\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t,$$

et d'étudier le cas d'égalité.
Soit φ la fonction définie dans $]a,b[$ par :

$$\forall\ t \in]a,b[:\ \varphi(t) = f(t)\,\mathrm{cotan}(t-a) = f(t) \times \frac{\cos(t-a)}{\sin(t-a)}\ .$$

1) Montrer que l'on peut toujours prolonger φ par continuité en une fonction définie dans $[a,b]$. Préciser, suivant les cas, les valeurs de $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.

Dans toute la suite, φ désignera la fonction continue prolongée dans $[a,b]$. Il est clair que φ est dérivable et à dérivée continue dans l'ouvert $]a,b[$. En revanche, la question de la dérivabilité en a et b n'est pas abordée.

2) Soit u et v deux réels tels que $a < u < v < b$.
Montrer que

$$f(v)\varphi(v) - f(u)\varphi(u) = \int_u^v f'^2(t)\,\mathrm{d}t - \int_u^v f^2(t)\,\mathrm{d}t - \int_u^v \left(\varphi(t) - f'(t)\right)^2\,\mathrm{d}t$$

3) La relation

$$0 = \int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b \left(\varphi(t) - f'(t)\right)^2\,\mathrm{d}t$$

est-elle valide ? Le justifier soigneusement.

4) Montrer que

$$\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t$$

5) On suppose maintenant que l'inégalité de la question **4)** est une égalité.

a) Montrer que, pour tout $t \in [a,b]$, $f'(t) = \varphi(t)$.

b) Montrer qu'il existe un réel λ tel que, pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) = \lambda \sin(t-a)$.

II. Involutions dans un ensemble fini.

Soit E un ensemble. On note $\mathcal{I}(E)$ l'ensemble des *involutions* de E, c'est-à-dire des applications $f : E \to E$ telles que $f \circ f = \mathrm{id}_E$:

$$\mathcal{I}(E) = \{ f : E \to E \mid f \circ f = \mathrm{id}_E \} .$$

1) Montrer qu'une involution est bijective.

2) Soit E et F deux ensembles équipotents, c'est-à-dire tels qu'il existe une bijection $\varphi : E \to F$. Montrer qu'il existe une bijection entre les ensembles $\mathcal{I}(E)$ et $\mathcal{I}(F)$.

Lorsque l'ensemble E est fini de cardinal n, on note I_n le nombre d'involutions de E, c'est-à-dire

$$I_n = \mathrm{Card}(\mathcal{I}(E)).$$

3) Déterminer I_1 et I_2.

On suppose désormais que $E = \{1, \ldots, n\}$, où $n \geqslant 3$. On note :

$$\mathcal{I}_k = \{ f \in \mathcal{I}(E) \mid f(n) = k \} .$$

4) **a)** Est-il restrictif de faire ce choix pour E, plutôt qu'un ensemble quelconque à n éléments ?

b) Proposer une majoration simple de I_n.

5) Montrer que la famille $(\mathcal{I}_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ forme une partition de $\mathcal{I}(E)$.

6) Montrer qu'il existe une bijection entre $\mathcal{I}_n$ et $\mathcal{I}(E)$, puis qu'il existe une bijection entre $\mathcal{I}_k$ et $\mathcal{I}(\{1, \ldots, n-2\})$, pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

On se contentera d'exhiber ces bijections et de vérifier qu'elles sont bien définies, sans faire en détail les preuves qu'elles sont bijectives.

7) Exprimer, pour tout $n \geqslant 3$, I_n en fonction de I_{n-1}, I_{n-2} et n.

8) On considère la suite de terme général $u_n = \dfrac{I_n}{n!}$.

a) Que représente u_n ?

b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, $u_n = \dfrac{u_{n-1} + u_{n-2}}{n}$.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \dfrac{2}{n}$. En déduire la nature de la suite $(u_n)_n$.

9) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$I_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^k\, k!} \binom{2n}{2k} \qquad \text{et} \qquad I_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^k\, k!} \binom{2n+1}{2k}.$$

— **FIN** —