Lycée La Martinière Monplaisir — Année 2020/2021
MPSI - Mathématiques — Premier Semestre

Feuille d'exercice n° 06 : **Théorie des ensembles**

Exercice 1 Donner la liste des éléments de $\mathscr{P}\left[\mathscr{P}(\{1,2\})\right]$.

Exercice 2 Soit $E = \{x, y, z\}$ un ensemble. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier les réponses.

1) $x \in E$ **2)** $\{x\} \in E$ **3)** $\{x\} \subset E$ **4)** $\varnothing \in E$ **5)** $\varnothing \subset E$ **6)** $\{\varnothing\} \subset E$ **7)** $\{x, y\} \subset E$ **8)** $\{y, z\} \subset E \setminus \{x\}$

Exercice 3 Un ensemble est dit « décrit en compréhension » lorsqu'il réunit les éléments d'un ensemble vérifiant une propriété. Un ensemble est dit « décrit en extension » lorsqu'on cite ses éléments.

Par exemple, $\{\, n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k \,\}$ et $\{\, 2k \mid k \in \mathbb{Z} \,\}$ sont des descriptions respectivement en compréhension et en extension de l'ensemble des entiers pairs.

1) Décrire en compréhension et en extension l'ensemble $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$.

2) Décrire en compréhension et en extension l'ensemble $\{1, 10, 100, 1000, \ldots\}$.

3) Décrire en extension l'ensemble des nombres rationnels.

4) Décrire en compréhension l'ensemble $]0, 1]$. Pensez-vous qu'il soit possible de décrire cet ensemble en extension ?

5) Décrire en compréhension et en extension l'ensemble des valeurs prises par une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

6) Décrire en compréhension l'ensemble des antécédents d'un complexe y par une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Exercice 4 Montrer que si F et G sont des sous-ensembles de E :

$$(F \subset G \iff F \cup G = G), \quad (F \subset G \iff F \cap G = F) \quad \text{et} \quad (F \subset G \iff F^C \cup G = E).$$

En déduire que :

$$(F \subset G \iff F \cap G^C = \varnothing).$$

Exercice 5 Soit E un ensemble, A, B, C trois parties de E. Montrer les propriétés suivantes.

1) $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$

2) $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$

3) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

Exercice 6 Soient E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Résoudre dans $\mathscr{P}(E)$ les équations suivantes.

1) $X \cup A = B$ **2)** $X \cap A = B$ **3)** $X \backslash A = B$

Exercice 7 Soient E et F deux ensembles. Quelle relation y a-t'il

1) entre les ensembles $\mathcal{P}(E \cup F)$ et $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$?

2) entre les ensembles $\mathcal{P}(E \cap F)$ et $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$?

3) entre les ensembles $\mathcal{P}(E \times F)$ et $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$?

Exercice 8 (✎) Soient E, F, G trois ensembles. Montrer que $(E \times G) \cup (F \times G) = (E \cup F) \times G$.