

Devoir à la maison n° 09

À rendre le 8 décembre

I. Une étude de fonction.

Étudier la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin} \sqrt{x - \frac{1}{x}}$ et donner l'allure de son graphe (on précisera les asymptotes et tangentes remarquables).

II. Identité de Frobenius.

Soit p un nombre premier.

- 1) Montrer que p divise $\binom{p}{k}$ pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$.
- 2) En déduire l'identité de Frobenius : $\forall x, y \in \mathbb{Z}, (x+y)^p \equiv x^p + y^p \pmod{p}$.
- 3) En déduire le petit théorème de Fermat.

III. Étude d'une suite définie implicitement.

- 1) Montrer que l'équation $e^x = x^n$ admet deux racines positives $u_n < v_n$, pour n assez grand.
- 2) Montrer que $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.
- 3) Montrer que u converge.
- 4) Trouver sa limite ℓ , montrer que $n(u_n - \ell)$ tend vers 1.

— FIN —