Devoir surveillé n°8
Version n°1
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit E un ensemble à n éléments.

1) Soit $p \in [\![0, n]\!]$, soit X une partie à p éléments de E. Combien y a-t-il de parties Y de E disjointes de X ?

2) Combien y a-t-il de couples (X, Y) formés de parties disjointes de E ?

II. Calcul d'une intégrale.

Partie A : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x+1}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

1) Montrer que l'équation $x + 1 + \ln x = 0$ admet sur $\mathbb{R}_+^*$ une solution unique α, comprise entre 0 et 1.

2) **a)** La fonction f est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en ce point ?

b) Étudier les variations de f et préciser sa limite en $+\infty$.

c) Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentant f dans un repère orthonormé du plan. Déterminer les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ et de la droite d'équation $y = -x$.
Représenter $(\mathscr{C})$.

L'objet de la suite du problème est le calcul de l'intégrale

$$I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x \ln x}{x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Partie B : Limite d'une suite réelle

On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

3) Déterminer un réel a tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^\pi at^2 \cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Indication : on pourra procéder par intégrations par parties.

4) Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer S_n à l'aide d'une intégrale.

5) Démontrer que, pour tout réel t différent de $2p\pi$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

6) On considère la fonction g définie sur $[0, 2\pi[$ par $g(t) = \dfrac{t^2}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ si $t \in]0, 2\pi[$ et $g(0) = 0$.

Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 2\pi[$.

7) **a)** Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t.$$

b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que si h est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\int_0^\pi h(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|h(0)|}{n+\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}\max_{t\in[0,\pi]}|h'(t)|.$$

c) En déduire l'existence et la valeur de la limite de la suite (S_n).

Partie C : Calcul de I.

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}_+$ par : $f_k(x) = x^k \ln x$ si $x > 0$ et $f_k(0) = 0$.

8) **a)** Étudier la continuité de f_1 sur $[0, 1]$.

b) Pour $k \geqslant 2$, montrer que f_k est dérivable sur $[0, 1]$ et exprimer sa dérivée à l'aide de f_{k-1}.

9) Pour tout entier $k \geqslant 1$, calculer l'intégrale $I_k = \displaystyle\int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x$.

10) On pose $m = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| I - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k \right| \leqslant m \int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x.$$

11) En déduire la valeur de I.

III. Nombre de dérangements

Soit E un ensemble, on appelle *dérangement* de E une permutation E sans aucun point fixe, *i.e.* une application $\sigma : E \to E$ bijective vérifiant $\forall x \in E,\ \sigma(x) \neq x$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de dérangements d'un ensemble à n éléments, et on pose $d_0 = 1$.

1) *Question préliminaire*

a) Montrer que, pour tout $n, \ell \in \mathbb{N}$ vérifiant $\ell \geqslant n$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-\ell} (-1)^k \binom{n+1-\ell}{k} = (-1)^{n-\ell}.$$

b) En déduire que, pour tout $n, \ell \in \mathbb{N}$ vérifiant $\ell \geqslant n$, on a

$$\sum_{k=\ell}^{n} \binom{k}{n+1} (-1)^{k-\ell} \binom{k}{\ell} = (-1)^{n-\ell} \binom{n+1}{\ell}.$$

c) Montrer la formule d'inversion de Pascal : pour tout $u, v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k,$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k.$$

Indication : on pourra mettre en œuvre un raisonnement par récurrence.

2) Soit $1 \leqslant k \leqslant n$ et $A \subset E$ de cardinal k. Combien y a-t-il de permutations de E ayant exactement pour ensemble de points fixes A ?

3) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k.$$

4) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

5) Montrer que

$$d_n \sim \frac{n!}{\mathrm{e}}.$$

— **FIN** —