

Feuille d'exercice n° 18 : **Analyse asymptotique - correction**

Exercice 5 1) $\frac{1}{n}$; 2) $\left(\pi - \frac{\pi^2}{2}\right) \frac{1}{n^2}$; 3) 4 ; 4) $\frac{e^{-n}}{2}$; 5) $\frac{\pi}{\sqrt{n}}$; 6) $-\frac{1}{n}$; 7) $\frac{8}{n^2}$;
8) ne^{1-n} ; 9) 1 ; 10) $\frac{1}{4n^2}$; 11) e^{1-n}

Exercice 14

1) 0

2) $\frac{1}{6}$

3) $e^{e^{-1}}$

4) e^{-1}

5) $\frac{2}{3}$

6) $\frac{a^3}{b^3}$

7) -1

8) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

9) \sqrt{e}

10) $\frac{1}{\pi}$

11) 1

12) $\frac{\sqrt{2}}{8x^3}$

13) $\frac{x^2}{2}$

14) $-\frac{3}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

15) $-x$

Exercice 15 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\ln x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{\ln(\cos x)} + \frac{2}{x^2} \sin^2 x \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin^2 x)}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} = -\frac{16 \ln 2}{\pi^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin^2 x)}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{x} \tan \left(\frac{2\pi x}{4x+3} \right) = \frac{8}{3\pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \tan(\ln(1+x)) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow e} (\ln x)^{\tan \frac{\pi x}{2e}} = e^{-\frac{2}{\pi}}$$

Exercise 17

- 1) $\ln(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6)$
- 2) $\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$
- 3) $\sin(\tan(x)) = x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 + o(x^5)$
- 4) $(\ln(1+x))^2 = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4)$
- 5) $\exp(\sin(x)) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$
- 6) $\sin^6(x) = x^6 - x^8 + o(x^9)$

Exercise 18

- 1) $\sqrt{x+1} = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{8x^{3/2}} + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$;
- 2) $x \ln(x+1) - (x+1) \ln x = 1 - \ln(x) - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$;
- 3) $\left(\frac{x+1}{x}\right)^x = e - \frac{1}{2} \frac{e}{x} + \frac{11}{24} \frac{e}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$;
- 4) $\operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$.

Exercise 19

- 1) $\frac{\arctan x - x}{\sin x - x} = 2 - \frac{11}{10}x^2 + o(x^2)$;
- 2) $\ln \sin x = \ln(\sqrt{2}/2) + (x - \pi/4) - (x - \pi/4)^2 + \frac{2}{3}(x - \pi/4)^3 + o((x - \pi/4)^3)$;
- 3) $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3\right) + o(x^3)$;
- 4) $x(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Exercise 22

- 1) $\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2} = x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}\right) = 1 + \frac{1}{8x^3} + o(1/x^3)$.
- 2) $\ln(\sqrt{1+x}) = \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2x} + o(1/x)$.

Exercise 23

- 1) a) $\frac{\cos x}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \frac{49x^4}{384} + o(x^4)$

- b) $\frac{\sqrt{1+x}}{\cos x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \frac{5x^3}{16} + \frac{41x^4}{384} + o(x^4)$
- c) $\frac{\ln(1+x)}{\cos x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$
- d) $\frac{1+\cos x}{2+\sin x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{16} + o(x^4)$
- e) $\frac{\sin(x/2)}{e^{2x}} = \frac{x}{2} - x^2 + \frac{47x^3}{48} - \frac{5x^4}{8} + o(x^4)$
- f) $\frac{\ln(1+x)}{2-\cos x} = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$
- 2) a) $\frac{\sin(2x-\pi/4)}{\cos x} = 1 + 3(x-\frac{\pi}{4}) + \frac{3}{2}(x-\frac{\pi}{4})^2 + \frac{3}{2}(x-\frac{\pi}{4})^3 + \frac{19}{8}(x-\frac{\pi}{4})^4 + o((x-\frac{\pi}{4})^4)$
- b) $\frac{\cos(x-1)}{\ln(1+x)} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{2(\ln 2)^2}(x-1) + \frac{1}{\ln 2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{8\ln 2} + \frac{1}{4(\ln 2)^2} \right) (x-1)^2 + o((x-1)^2)$
- c) $\frac{e^{x-1}}{\ln x} = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{2} + \frac{11}{12}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2 + \frac{71}{720}(x-1)^3 + \frac{41}{1440}(x-1)^4 + o((x-1)^4)$

Exercice 24

- 1) $e-1$
- 2) $-\frac{1}{2}$
- 3) $-\frac{e}{2}$
- 4) $\frac{1}{12}$
- 5) $-\frac{1}{6}$
- 6) $-\frac{1}{2}$

Exercice 28 En 0 : $\ln(1+x+x^2) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

En 1 : posons $h = x-1$, donc $1+x+x^2 = 1+(1+h)+(1+h)^2 = 3+3h+h^2 = 3\left(1+h+\frac{h^2}{3}\right)$. Et on développe quand $h \rightarrow 0$. On obtient :

$$\ln(1+x+x^2) = \ln 3 + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{6}.$$

La tangente en 1 pour équation $y = \ln 3 + (x-1)$ et au voisinage de 1 elle se trouve au-dessus du graphe de f .

Exercice 29

- 1) f est définie sur \mathbb{R} , donc elle n'a que deux branches infinies : une en $+\infty$, l'autre en $-\infty$.

En $+\infty$ en $-\infty$, f est équivalente à $\frac{x^2\pi}{2}$. Donc le graphe de f est asymptotique à la parabole

d'équation $y = \frac{x^2\pi}{2}$. Et comme $|\operatorname{Arctan}| < \frac{\pi}{2}$, il se trouve en-dessous.

- 2) Grâce à un tableau de signes, nous voyons que g est définie sur $] -\infty, -1/3[\cup]1, +\infty[$. En $-1/3$ elle tend vers $-\infty$ donc elle a une branche infinie d'asymptote d'équation $x = -1/3$.

En 1, elle tend vers 0, donc ce n'est pas une branche infinie.

$$\text{En } \pm\infty : g(x) = x \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{x}}{3 + \frac{1}{x}}} = \frac{x}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{3x}}}.$$

Nous cherchons un développement asymptotique de la forme $ax + b +$ un terme non nul. On peut donc viser un développement en $o(1/x)$. Mais en faisant cela on s'aperçoit que le terme en $1/x$ s'annule, donc il faut aller plus loin :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{-1/2} \\ &= \frac{x}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{16x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \left(1 - \frac{1}{6x} + \frac{1}{24x^2} - \frac{5}{16x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\ &= \frac{x}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{2}{3x} - \frac{1}{4x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\ &= \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{3}x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

Le graphe de g est donc asymptotique à la droite d'équation $y = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{3}}$, et il se trouve en-dessous.