QCM n° 11

Un peu de calcul.

Échauffement n°1 Calculer les dérivées successives de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$.

Échauffement n°2 Donner une primitive **réelle** de $x \mapsto \dfrac{x^3-1}{(x^2+1)x}$.

QCM - cocher une case si la phrase qui suit est correcte.

Question n°1 Soit A un polynôme.

- ☐ Si $r_1, \cdots, r_n$ sont les racines de P, et qu'elles sont de multiplicité $m_1, \cdots, m_n$, alors $\deg P = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i$.
- ☐ Si λ est une racine de P de multiplicité m, alors λ est une racine de P' de multiplicité $m-1$.
- ☐ Si λ est une racine de P' de multiplicité m, alors λ est une racine de P de multiplicité $m+1$.

Question n°2 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \leqslant a, f(x) = f_1(x)$ et $\forall x > a, f(x) = f_2(x)$.

- ☐ Si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, alors f est continue sur $\mathbb{R}$.
- ☐ Si f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f_2'(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f_1'(x)$, alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f_2'(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f_1'(x)$, alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ Si f_1 est croissante sur $]-\infty, a]$ et f_2 est croissante sur $]a, +\infty[$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$.

Question n°3 Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $B \neq 0$, et soit la fraction rationnelle $R = \dfrac{A}{B}$.

- ☐ $\deg R' = \deg R - 1$;
- ☐ $\deg R' \leqslant \deg R - 1$;
- ☐ Les pôles de R sont les racines de B ;
- ☐ La partie entière de R est nulle si et seulement si $\deg R < 0$;
- ☐ $xR(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ si et seulement si $\deg R < 0$;
- ☐ $xR(x)$ a une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\deg R < 0$.

Question n°4 Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F et G deux sev de E.

- ☐ F et G sont en somme directe ssi $\forall\, x \in E$, $\exists!\, (f, g) \in F \times G$, $x = f + g$;
- ☐ F et G sont en somme directe ssi $\forall\, (f, g) \in F \times G$, $f + g = 0 \;\Rightarrow\; f = g = 0$;
- ☐ F et G sont en somme directe ssi $\forall\, f, f' \in F$, $g, g' \in G$, $f + g = f' + g' \;\Rightarrow\; f = f'$ et $g = g'$;
- ☐ F et G sont en somme directe ssi $F \cap G = \varnothing$.

Question n°5

- ☐ Pour tout réel x positif, $\dfrac{1}{x + \mathrm{e}^{\,t}} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
- ☐ Pour tout entier k, $(\ln x)^k \mathrm{e}^{\,-x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
- ☐ Pour tout entier k, $(\ln x)^k \mathrm{e}^{\,-x} \underset{x\to0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
- ☐ Pour tout réel x positif, $\dfrac{1}{(x + \mathrm{e}^{\,t})^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\,-t^2}$.

Question n°6 La fonction $x \longmapsto \sqrt{|x|}$.

- ☐ f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- ☐ f admet un développement limité en 0 d'ordre 2.
- ☐ f est une fonction paire.
- ☐ $\forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = x$

Question n°7 Soit $f \;: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

- ☐ f est continue en a si et seulement si f admet un DL en a à l'ordre 0 ;
- ☐ f est de classe $\mathscr{C}^0$ en a si et seulement si f admet un DL en a à l'ordre 0 ;
- ☐ f est dérivable en a si et seulement si f admet un DL en a à l'ordre 1 ;
- ☐ f est de classe $\mathscr{C}^1$ en a si et seulement si f admet un DL en a à l'ordre 1 ;
- ☐ f est deux fois dérivable en a si et seulement si f admet un DL en a à l'ordre 2.