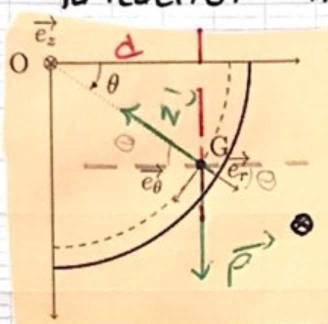
THEOREME du MOMENT CINETIQUE

Exercice 1

Referentiel : $\mathcal{R}$ Galileen
Systeme : L'enfant $G(m)$
Forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$
la reaction $\vec{N}$

1. Schéma



2. Theoreme du moment cinetique

• Le moment cinetique $\vec{L_O} = \vec{OG} \wedge m\vec{v}$
dans la base polaire $\vec{L_O} = r\vec{e_r} \wedge mr\dot{\theta}\vec{e_\theta} = mr^2\dot{\theta}\vec{e_z}$

• La derivée : $\frac{d\vec{L_O}}{dt} = mr^2\ddot{\theta}\vec{e_z}$ $\vec{e_z}$ est un vecteur fixe

• Le moment des forces
$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{N}) = \vec{OG} \wedge \vec{N} = \vec{0}$ C'est pour cela que nous avons choisi O
$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \vec{OG} \wedge m\vec{g}$
$= r\vec{e_r} \wedge mg(\cos\theta\,\vec{e_\theta} + \sin\theta\,\vec{e_r})$
$= mrg\cos\theta\,\vec{e_z}$
ou avec le bras de levier : $d = r\cos\theta$
+ regle de la main droite

Theoreme $\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{\mathcal{M}_O}$

Projection sur $\vec{e_z}$: $mr^2\ddot{\theta} = mrg\cos\theta$
Soit $\boxed{\ddot{\theta} - \frac{g}{r}\cos\theta = 0}$

La vitesse
on multiplie par $\dot{\theta}$: $\ddot{\theta}.\dot{\theta} - \frac{g}{r}\cos\theta.\dot{\theta} = 0$
Soit $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{g}{r}\sin\theta\right)$

d'où $\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{r} \sin\theta + K$

<u>Conditions initiales</u> : à $t = 0$ $\theta = \theta_0$ $\dot{\theta} = 0$

d'où $\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{r} (\sin\theta - \sin\theta_0)$

or $\boxed{\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e_\theta} = \sqrt{2gr(\sin\theta - \sin\theta_0)}\ \vec{e_\theta}}$

3. Vitesse maximale

$v = v_{max}$ si $\theta = 90°$ $(\sin\theta = 1)$

$\boxed{v_{max} = 6{,}0 \text{ m/s} = 22 \text{ km/h}}$

La valeur est élevée mais on n'a pas pris en compte les frottements.