# Feuille d'exercice n° 24 : **Matrices − Correction**

**Exercice 1** Soit $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j})$ deux matrices stochastiques. Tout d'abord, $AB \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Si $1 \leqslant i, k \leqslant n$, le coefficient d'indice $(i, k)$ de $AB$ est

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k} \geqslant 0.$$

Enfin, si $1 \leqslant i \leqslant n$, la somme des coefficients de la $i^{\text{e}}$ ligne de $AB$ est

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} b_{j,k}}_{j^{\text{e}} \text{ ligne de } B} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1}_{i^{\text{e}} \text{ ligne de } A}.$$

**Exercice 2** On raisonne par analyse-synthèse. Soit une telle matrice $M$, considérons $m$, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $M$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ non nul et $h$ une projection sur $\mathrm{Vect}(x)$. Notons $H$ la matrice de $h$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme $HM = MH$, on a $h \circ m = m \circ h$. Ainsi, $h(m(x)) = m(h(x)) = m(x)$. Notamment, $m(x) \in \mathrm{Vect}(x)$. Nous avons déjà vu en TD que cela implique que $m$ est une homothétie : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda I_n$.

Réciproquement, s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda I_n$, alors de manière élémentaire $M$ commute avec toute autre matrice.

Ainsi, l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), MH = HM$ est $\mathrm{Vect}(I_n)$.

On pouvait aussi prendre $H = E_{i,j}$ avec $i \neq j$ et considérer les coefficients d'indices $(i, j)$ puis $(i, i)$.

**Exercice 3**

**1)** Supposons $A \neq 0$ et $B \neq 0$. Soit $E = \mathbb{K}^n$, soit $u$ et $v$ associés canoniquements à $A$ et $B$, $Y$ et $Z$ dans $\mathbb{K}^n$ tels que $u(Y) \neq 0$ et $v(Z) \neq 0$. Il existe $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ tel que $\varphi(v(Z)) = Y$. Avec $X$ la matrice de $\varphi$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, $AXB$ est la matrice de $u \circ \varphi \circ v$, qui n'est pas nul, donc $AXB \neq 0$. Cela contredit l'énoncé.
Ainsi, $\boxed{A = 0 \text{ ou } B = 0.}$

**2)** $A$ est inversible si et seulement si $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, A$, supposons que $X \neq 0$.
Il existe donc $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_j| \neq 0$. On peut donc prendre $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_i|$ est maximal. Notamment, $|x_i| > 0$. Considérons la $i^{\text{e}}$ ligne de $AX$ :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = 0,$$

donc

$$a_{i,i} x_i = -\sum_{j \neq i} a_{i,j} x_j.$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$|a_{i,i}| \cdot |x_i| \leqslant \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \cdot |x_j|.$$

Par maximalité de $|x_i|$, on a alors

$$|a_{i,i}| \cdot |x_i| \leqslant |x_i| \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Comme $|x_i| > 0$, on a

$$|a_{i,i}| \leqslant \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|,$$

ce qui est absurde.
Ainsi, $\boxed{A \text{ est inversible.}}$

**3)** *Analyse :* Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ vérifiant $M^2 = 0$. On a alors $\operatorname{Im} M \subset \operatorname{Ker} M$ donc $\operatorname{rg} M \leqslant \dim(\operatorname{Ker} M)$. Par le théorème de rang, $\operatorname{rg}(M) + \dim(\operatorname{Ker} M) = 3$, donc $\operatorname{rg}(M) \leqslant 1$.
Si $\operatorname{rg} M = 0$, alors $M = 0$.
Sinon, les colonnes de $M$ appartiennent à une même droite vectorielle, donc sont colinéaires. Il existe donc $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ et $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ tels que

$$M = \begin{pmatrix} xa & ya & za \\ xb & yb & zb \\ xc & yz & zc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}.$$

*Remarque :* On pourrait remarquer que $a, b, c$ (ainsi que $x, y, z$) ne sont pas tous nuls, mais sinon on retombe sur le cas précédent.
Comme

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = ax + by + cz \in \mathbb{K},$$

on a

$$M^2 = (ax + by + cz)M.$$

Comme $M \neq 0$, on a $ax + by + cz = 0$.
*Synthèse :* Soit $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{K}$ vérifiant $ax + by + cz = 0$ et

$$M = \begin{pmatrix} xa & ya & za \\ xb & yb & zb \\ xc & yz & zc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}.$$

Le calcul précédent montre que $M^2 = (ax + by + cz)M = 0$.

Si $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$, $M^2 = 0$ si et seulement s'il existe $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{K}$ vérifiant $ax + by + cz = 0$ et

$$M = \begin{pmatrix} xa & ya & za \\ xb & yb & zb \\ xc & yz & zc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4** Dans ce type d'exercice, il est souvent judicieux de commencer par tracer un schéma représentant les applications linéaires et leurs représentations matricielles, comme fait en cours.

**1)** Avec $P = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\operatorname{Id}_E)$, on a

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}}(h) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}}(h \circ \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}}(h \circ \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(h)\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\operatorname{Id}_E) = AP.$$

Ainsi,

$$A_1 = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}}(h) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

**2)** Avec $Q = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{C}') = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}',\mathscr{C}}(\mathrm{Id}_F)$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(h) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(\mathrm{Id}_F \circ h) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{C}'}(\mathrm{Id}_F)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}}(h) = Q^{-1}A_1.$$

On calcule :

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2Q$$

Ainsi,

$$A_2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 5** Comme c'est une famille de $2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ vecteurs de $\mathbb{R}^2$, il suffit de montrer que c'est une famille libre. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda x + \mu\varphi(x) = 0$, en appliquant $\varphi$ et par linéarité de $\varphi$ on obtient $\lambda\varphi(x) + \mu\varphi^2(x) = 0$, donc $\lambda\varphi(x) = 0$. Comme $\varphi(x) \neq 0$, on a $\lambda = 0$. Ainsi, $\mu\varphi(x) = 0$ et de même $\mu = 0$. Ainsi, $(x, \varphi(x))$ est une libre, donc est une base de $\mathbb{R}^2$.

Enfin, comme $\varphi(x) = 0x + 1\varphi(x)$ et $\varphi(\varphi(x)) = 0 = 0x + 0\varphi(x)$, la matrice de $\varphi$ dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 6** La linéarité provient immédiatement de la bilinéarité du produit matriciel.

On ordonne la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ comme suit : $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$. Avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on calcule

$$AE_{1,1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = aE_{1,1} + cE_{2,1}.$$

De même,

$$AE_{1,2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = aE_{1,2} + cE_{2,2},$$

ainsi que

$$AE_{2,1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = bE_{1,1} + dE_{2,1},$$

et finalement

$$AE_{2,2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = bE_{1,2} + dE_{2,2}.$$

Ainsi, la matrice de $\varphi$ dans la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ est

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}.$$

**Exercice 7**

**1)** Soit $\mathscr{C}$ une base de $\mathrm{Im}\,\varphi$ et $\mathscr{D}$ une base de $\mathrm{Ker}\,\varphi$. Comme $E = \mathrm{Im}\,\varphi \oplus \mathrm{Ker}\,\varphi$, par concaténation de bases, $\mathscr{B} = \mathscr{C} \uplus \mathscr{D}$ est une base de $E$. Notons $p = \mathrm{rg}\,\varphi$. Comme $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$, on a

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

**2)** Soit $s$ une symétrie de $E$. Soit $\mathscr{C}$ une base de $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $\mathscr{D}$ une base de $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$. Comme $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$, par concaténation de bases, $\mathscr{B} = \mathscr{C} \uplus \mathscr{D}$ est une base de $E$. Notons $p = \dim \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$.On a

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}.}$$

**Exercice 8**

**1)** Par opérations sur les applications linéaires (dérivation, multiplication par un polynôme), $\varphi$ est linéaire. Il suffit de vérifier que $\varphi(\mathbb{R}_2[X]) \subset \mathbb{R}_2[X]$. Si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $\deg(P) \leqslant 2$, donc $\deg(P') \leqslant 1$ et $\deg(P'') \leqslant 0$. Ainsi, $\deg((X^2 + 2)P'') \leqslant 2$ et $\deg((X + 1)P') \leqslant 2$. Par addition de polynômes, $\deg(\varphi(P)) \leqslant 2$, donc $\varphi(\mathbb{R}_2[X]) \subset \mathbb{R}_2[X]$.
Ainsi, $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

**2)** On a $\varphi(1) = 1$, $\varphi(X) = 2X + 1$ et $\varphi(X^2) = 5X^2 + 2X + 4$. La matrice de $\varphi$ dans la base $(1, X, X^2)$ est donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

**3)** On calculer le noyau de $A - 5I_3$ :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(A - 5I_3) &= \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -12 & 0 & 14 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad [L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2] \\
&= \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 7 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad [L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1] \\
&= \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

*Remarque* : si cette résolution n'est pas claire pour vous, posez et résolvez le système $(A-5I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\mathrm{Ker}(\varphi - 5\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}) = \mathrm{Vect}(6X^2 + 4X + 7)$.
On calcule aussi $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(X + 1) = 2X + 2$.

**4)** La famille $(1, X+1, 6X^2+4X+7)$ est une famille échelonnée en degrés (donc libre) de $3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$ vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$ : c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
Dans cette base, par le calcul précédent, la matrice de $\varphi$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 9**

**1)** $\operatorname{Im} A \underset{C_2 \leftarrow C_2+3C_3}{=} \operatorname{Im}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{C_2=4C_1}{=} \operatorname{Im}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

$\operatorname{Ker} A \underset{L_2 \leftarrow L_2+L_1}{=} \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_2=L_3}{=} \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. On remarque alors que $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A$, or avec le théorème du rang ce noyau est de dimension 1, donc ce vecteur est une base de $\operatorname{Ker} A$.

**2)** Comme on nous demande à la fois le rang et une base de l'image, calculons une base de l'image, ce qui nous permettra de répondre à ces deux questions.

$\operatorname{Im} A \underset{C_3 \leftarrow \frac{1}{11}(C_3-7C_1), C_4 \leftarrow \frac{1}{2}(C_4-C_1) C_2+3C_3}{=} \operatorname{Im}\begin{pmatrix} -11 & 7 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Et donc $\operatorname{rg} A = 2$. Avec le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} A = 2$. Or nous avons remarqué dans le calcul précédent que $C_3 - 7C_1 = 11C_2$ et $C_4 - C_1 = 2C_2$, ou encore $7C_1 + 11C_2 - C_3 = 0$ et $C_1 + 2C_2 - C_4 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs du noyau. Comme ils ne sont pas colinéaires, ils forment une base du noyau.

Pour un équation de l'image : soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} A \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} -11\ a + 7\ b & = & x \\ b & = & y \\ a & = & z \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -11z + 7y.$$

**Exercice 10**

**1)** Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoninquement associé à $M$.
Faisons une analyse : soit $(I, J, K)$ une telle base. Alors $u(I) = I$, $u(J) = 2J$ et $u(K) = -2K$. Et donc $I \in \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id})$, $J \in \operatorname{Ker}(u - 2\operatorname{Id})$ et $K \in \operatorname{Ker}(u + 2\operatorname{Id})$.
En synthèse, cherchons donc des vecteurs non nuls dans ces noyaux. Des calculs tout ce qu'il y a de plus classiques et sans surprise assurent que $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et dans le premier de ces noyaux, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans le second, et $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ est dans le dernier. Appelons ces vecteurs $I, J, K$. Il reste à justifier qu'ils forment une base. Il y a plusieurs méthodes : on peut calculer leur rang, par exemple matriciellement. On peut aussi raisonner de la manière suivante : soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $aI + bJ + cK = 0$. Puisque $(u - \operatorname{Id}) \circ (u - 2\operatorname{Id}) = (u - 2\operatorname{Id}) \circ (u - \operatorname{Id})$ $I$ et $J$ sont dans le noyau de $(u - \operatorname{Id}) \circ (u - 2\operatorname{Id})$. Donc en appliquant cet endomorphisme à $0 = aI + bJ + cK$, nous obtenons $0 = (u - \operatorname{Id}) \circ (u - 2\operatorname{Id})(cK) = c(u - \operatorname{Id})(u(K) - 2K) = c(u - \operatorname{Id})(-4K) = -4c(-2K - K) = 12K$, car $u(K) = -2K$. Donc $c = 0$. On montre de la même manière que $a = b = 0$, donc $(I, J, K)$ est libre, et c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

**2)** En notant $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\mathscr{B} = (I, J, K)$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \mathscr{M}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$, nous avons par changement de base : $A = PDP^{-1}$. Une récurrence simple (et classique) assure alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$. Toujours par récurrence, et toujours classique, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$.

Et un calcul donne $P^{-1} = \dfrac{1}{19}\begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 6 & 5 & -4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Il reste à développer ce produit matriciel, nous trouvons :

$$A^n = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 6\times 2^n + 10\times(-2)^n + 3 & 5\times 2^n + 2\times(-2)^n - 7 & -4\times 2^n + 6\times(-2)^n - 2 \\ 6\times 2^n - 6 & 5\times 2^n + 14 & -4\times 2^n + 4 \\ -12\times 2^n + 15\times(-2)^n - 3 & -10\times 2^n + 3\times(-2)^n + 7 & 8\times 2^n + 9\times(-2)^n + 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 11**

• Effectuons le produit matriciel $\begin{pmatrix} 3 & 3 & c \\ 1 & -2 & d \\ a & b & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+3c \\ -3+3d \\ a+2b+3f \end{pmatrix}$. On en déduit que le vecteur $u = (1,2,3)$ appartient au noyau de $\varphi$ si et seulement si $\begin{cases} c &= -3 \\ d &= 1 \\ a+2b+3f &= 0 \end{cases}$

• Si les conditions ci-dessus sont satisfaites, le noyau de $\varphi$ contient le vecteur $u$ non nul donc $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) \geqslant 1$. Par la formule du rang, on en déduit que $\operatorname{rg}\varphi = \dim(\operatorname{Im}\varphi) \leqslant 2$. Or le sous-espace $\operatorname{Im}\varphi$ est engendré par les vecteurs $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$ et $\varphi(e_3)$, c'est-à-dire les trois vecteurs colonnes de la matrice $A$. Mais les deux premiers vecteurs colonnes ne sont pas colinéaires, donc $\operatorname{rg}\varphi \geqslant 2$. Ainsi $\operatorname{rg}\varphi = 2$.
Le sous-espace $\operatorname{Im}\varphi$ est alors engendré par les deux vecteurs $\varphi(e_1)$ et $\varphi(e_2)$, ou encore par les vecteurs $x = \varphi(e_1) = (3,1,a)$ et $y = \varphi(e_2 - e_1) = \varphi(e_2) - \varphi(e_1) = (0,-3,b-a)$ : en effet, ces deux derniers vecteurs sont non colinéaires et appartiennent à $\operatorname{Im}\varphi$, donc forment une base de $\operatorname{Im}\varphi$, qui est de dimension deux :

$$\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Vect}(x,y)\ .$$

• Il reste à exprimer l'appartenance des vecteurs $v = (0,1,-3)$ et $w = (3,0,-5)$ à $\operatorname{Im}\varphi$ (auquel cas ils en formeront une base puisqu'ils sont linéairement indépendants).
Le vecteur $v$ appartient à $\operatorname{Im}\varphi$ si et seulement si la famille $(x,y,v)$ est de rang deux. On considère alors la matrice de cette famille de vecteurs dans la base canonique, à savoir $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ a & b-a & -3 \end{pmatrix}$. On ne change pas le rang de cette matrice en effectuant l'opération sur les colonnes $C_3 \leftarrow C_2 + 3C_3$ (*je laisse le lecteur écrire le résultat de cette opération*), et l'on a ainsi la condition $b - a - 9 = 0$ .
Procédant de même pour écrire que $w \in \operatorname{Im}\varphi$, c'est-à-dire que la famille de vecteurs $(x,y,w)$ est de rang deux, on obtient la condition $2a + b + 15 = 0$ .
De ces deux conditions, on tire $a = -8$ et $b = 1$ puis, en tenant compte de **(E)**, on a $f = 2$.
**Bilan :** $\boxed{a=-8,\ b=1,\ c=-3,\ d=1,\ f=2}$.

**Exercice 12** On trouve respectivement : 4, 4, 5 et 4.

**Exercice 13** Les cinq premières matrices se traitent sans astuce particulière.

**1)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **2)** $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ **3)** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ **4)** matrice non inversible (rang 3) **5)** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**6)** Soit $z \in \mathbb{C}$, notons pour alléger $t = 1 - |z|^2$. Appliquons l'algorithme habituel :

$$(S) : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \bar z & \bar z^2 & 1 & 0 & 0 \\ z & 1 & \bar z & 0 & 1 & 0 \\ z^2 & z & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \bar z & \bar z^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & t\bar z & -z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & -z & 1 \end{array}\right) \qquad L_2 \leftarrow L_2 - zL_1,\ L_3 \leftarrow L_3 - zL_2$$

Ainsi, si $t = 0$, c'est-à-dire si $|z| = 1$, la matrice n'est pas inversible et est de rang 1. Sinon, nous pouvons continuer les calculs :

$$(S) \underset{L_1 \leftarrow tL_1 - \bar{z}^2 L_3, L_2 \leftarrow L_2 - \bar{z} L_3}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} t & t\bar{z} & 0 & t & \bar{z}|z|^2 & -\bar{z}^2 \\ 0 & t & 0 & -z & 1+|z|^2 & -\bar{z} \\ 0 & 0 & t & 0 & -z & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - \bar{z} L_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} t & 0 & 0 & 1 & -\bar{z} & 0 \\ 0 & t & 0 & -z & 1+|z|^2 & -\bar{z} \\ 0 & 0 & t & 0 & -z & 1 \end{array}\right).$$

et donc l'inverse de la matrice est $\dfrac{1}{1-|z|^2}\begin{pmatrix} 1 & -\bar{z} & 0 \\ -z & 1+|z|^2 & -\bar{z} \\ 0 & -z & 1 \end{pmatrix}$.

**7)** On commence l'algorithme en renversant l'ordre des lignes et en faisant la même chose sur la matrice identité :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & \dots & a_n & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & & . & . & & . & . \\ . & . & & . & . & & . & . \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ . & & . & . & . & . & & . \\ . & & . & . & . & . & & . \\ 0 & \dots & a_{n-1} & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_n & 1 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right).$$

Donc si le rang de la matrice est égal au nombre de $a_i$ non nuls, et si aucun des $a_i$ n'est nul, l'inverse de la matrice est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1/a_1 \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ 0 & 1/a_2 & \dots & 0 \\ 1/a_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

**Exercice 14** Cette famille étant de cardinal 4, égal à la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$, il suffit de montrer qu'elle est de rang 3. Si $\mathscr{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, la matrice de cette famille dans la base $\mathscr{C}$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(M) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} && [C_2 \leftarrow C_2 - 2C_4] \\
&= 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} && [\text{car la 2ème ligne est indépendante des autres}] \\
&= 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} && [L_3 \leftarrow L_3 + L_1] \\
&= 2 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\
&= 3.
\end{aligned}$$

**Exercice 15** Les deuxième et troisième colonnes ne sont pas colinéaires, donc $\mathrm{rg}\, A \geqslant 2$.
Plus précisément :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}\, A = &\ \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & a-5 & b-2 \\ 1 & 2 & 8 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && [\ C_1 \leftarrow C_3, C_2 \leftarrow (C_2 + 4C_3)/2, C_3 \leftarrow C_1 + 5C_3, C_4 \leftarrow C_4 + 2C_3] \\
= &\ \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & a-1 & b-3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && [\ C_3 \leftarrow C_3 - 4C_2, C_4 \leftarrow C_4 + C_2]
\end{aligned}$$

donc $\mathrm{rg}\, A = 2$ si et seulement si les deux dernières colonnes de cette dernière matrice sont nulles, si et seulement si $a = 1$ et $b = 3$.

**Exercice 16** Dans tous ces calculs, nous allons effectuer des opérations de pivot de Gauss sur les lignes des matrices : ces opérations préservent les noyaux. Pour simplifier les calculs, il faut faire apparaître le moins de $\lambda$ possible. Pour cela, on utilise en priorité comme pivots les lignes sans $\lambda$. L'inconvénient est de faire apparaître les colonnes de 0 dans n'importe quel ordre : à la fin nous obtenons bien une colonne avec 3 zéros en bas, une autre avec 2 zéros en bas et une dernière avec 1 zéro en bas, mais la matrice n'est pas triangulaire pour autant. C'est moins visuel et moins pratique, mais tout aussi correct.

**1)** $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ \lambda & 3 & -2 & 0 \\ -4 & -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ \lambda & 5 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda+20 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Si $\lambda \neq -20$, $A$ est inversible et son noyau est $\{0\}$. Sinon :

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

**2)** $\operatorname{Ker} B = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & \lambda-1 \\ -10 & 0 & -4 \\ -6 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & \lambda-1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$ $\{0\}$.

**3)** $\operatorname{Ker} C = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1+\lambda & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ \lambda-3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-3 \end{pmatrix}.$

Si $\lambda \neq 3$, $C$ est inversible et son noyau est $\{0\}$.

Sinon, $\operatorname{Ker} C = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$

**Exercice 17**

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -10 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & . & . & a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 & . & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & a \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [\forall i,\ C_{i+1} \leftarrow C_{i+1} - aC_i]$$

Pour la dernière, réaliser $L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}$ pour chaque $1 \leqslant i \leqslant n-1$, en partant du début, puis itérer ces opérations une seconde fois.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & . & . & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & . & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 18** Facilement, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Et on remarque que $\operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A = \mathbb{R}^2$.

Commençons par une analyse : soit $X$ une solution. Alors $A = (X + \mathrm{I}_2)X$. Puisque $\operatorname{Ker} X \subset \operatorname{Ker}[(X+\mathrm{I}_2)X]$, alors $\operatorname{Ker} X \subset \operatorname{Ker} A$. Ainsi, suivant que cette inclusion est stricte ou pas, $X$ est de rang 1 ou 2.
Traitons le premier cas : dans ce cas $\operatorname{Ker} X = \operatorname{Ker} A$ par inclusion et égalité des dimensions. Mais aussi, $A = X(X + \mathrm{I}_2)$, et $\operatorname{Im}[X(X+\mathrm{I}_2)] \subset \operatorname{Im} X$, donc $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Im} X$, et donc là encore $\operatorname{Im} X = \operatorname{Im} A$. En particulier, $X\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $X\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Soit $u \in \mathbb{R}^2$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $u = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors $A(u) = 2b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X(u) = \mu b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $X = \dfrac{\mu}{2}A$ : $X$ et $A$ sont proportionnelles.
Dans le second cas, $X$ est inversible, et comme $A = X(X + \mathrm{I}_2)$, $1 = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(X + \mathrm{I}_2)$. Comme précédemment nous avons donc $\operatorname{Ker}(X + \mathrm{I}_2) = \operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im}(X + \mathrm{I}_2) = \operatorname{Im} A$, donc ces deux matrices sont proportionnelles.

Finissons par une synthèse :
Premier cas : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X = \lambda A$. Alors $X + X^2 = \lambda A + \lambda^2 A^2 = (\lambda + 2\lambda^2)A$. Donc $X$ est solution si et seulement si $\lambda + 2\lambda^2 = 1$, si et seulement si $\lambda = -1$ ou $\lambda = \dfrac{1}{2}$.
Second cas : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X = \lambda A - \mathrm{I}_2$. Alors $X + X^2 = \lambda A - \mathrm{I}_2 + \lambda^2 A^2 - 2\lambda A + \mathrm{I}_2 = (2\lambda^2 - \lambda)A$. Donc $X$ est solution si et seulement si $2\lambda^2 - \lambda = 1$, si et seulement si $\lambda = 1$ ou $\lambda = -\dfrac{1}{2}$.

Finalement les solutions sont les matrices $-A$, $\dfrac{1}{2}A$, $A - \mathrm{I}_2$ et $-\dfrac{1}{2}A - \mathrm{I}_2$, ou encore $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

**Exercice 19** Pour le premier système : 2 si $m = \pm 1$, 1 sinon.
Pour le second système : 2 si $m = 1$, 1 si $m = -2$, 3 sinon.

**Exercice 20**

**1)** On sait que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $([T_n = x], [T_n = y], [T_n = z])$ forme un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= P(T_{n+1} = x) \\ &= P(T_n = x)P_{T_n=x}(T_{n+1} = x) + P(T_n = y)P_{T_n=y}(T_{n+1} = x) + P(T_n = z)P_{T_n=z}(T_{n+1} = x) \\ &= \frac{8}{10}x_n + \frac{2}{10}y_n + \frac{3}{10}z_n. \end{aligned}$$

On trouve de même

$$y_{n+1} = \frac{1}{10}x_n + \frac{7}{10}y_n + \frac{1}{10}z_n$$

et

$$z_{n+1}=\frac{1}{10}x_n+\frac{1}{10}y_n+\frac{6}{10}z_n.$$

Avec

$$A=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}8&2&3\\1&7&1\\1&1&6\end{pmatrix},$$

on a bien pour tout $n\in\mathbb{N}$ : $X_{n+1}=AX_n$.

**2)** Soit $X\in\mathbb{R}^3$ non nul. On montre aisément que $\mathrm{Vect}(X)$ est stable par $\varphi$ si et seulement si $\varphi(X)\subset\mathrm{Vect}(X)$, *i.e* si et seulement si

$$\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \varphi(X)=\lambda X.$$

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$, on étudie donc le système

$$\begin{aligned}
AX=\lambda X &\Leftrightarrow (A-\lambda I_3)X=0\\
&\Leftrightarrow (10A-10\lambda I_3)X=0\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl}(8-10\lambda)x&+&2y&+&3z&=&0\\ x&+&(7-10\lambda)y&+&z&=&0\\ x&+&y&+&(6-10\lambda)z&=&0\end{array}\right.\\
&\underset{L_2\leftarrow L_2-L_3}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl}(8-10\lambda)x&+&2y&+&3z&=&0\\ &&(6-10\lambda)y&+&(-5+10\lambda)z&=&0\\ x&+&y&+&(6-10\lambda)z&=&0\end{array}\right.\\
&\underset{L_1\leftarrow L_1-(8-10\lambda)L_3}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl}&-&(6-10\lambda)y&-&(45-140\lambda+100\lambda^2)z&=&0\\ &&(6-10\lambda)y&+&(-5+10\lambda)z&=&0\\ x&+&y&+&(6-10\lambda)z&=&0\end{array}\right.\\
&\underset{L_1\leftarrow L_1+L_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl}&&&-&(45-135\lambda+90\lambda^2)z&=&0\\ &&(6-10\lambda)y&+&(-5+10\lambda)z&=&0\\ x&+&y&+&(6-10\lambda)z&=&0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl}&&&&(\lambda-1)(2\lambda-1)z&=&0\\ &&(6-10\lambda)y&+&(-5+10\lambda)z&=&0\\ x&+&y&+&(6-10\lambda)z&=&0\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Nous avons donc un système triangulaire (il suffit d'échanger la première et la dernière ligne). Si tous les coefficients diagonaux sont non nuls, alors ce système n'admet qu'une seule solution : la solution nulle.

Sinon (*i.e.* si $\lambda\in\left\{1,\frac{3}{5},\frac{1}{2}\right\}$), ce système admet au moins une solution non nulle.

— Si $\lambda=1$, on obtient et résout donc

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl}&-&4y&+&5z&=&0\\ x&+&y&-&4z&=&0\end{array}\right. \underset{L_2\leftarrow 4L_2+L_1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl}&-&4y&+&5z&=&0\\ 4x&&&-&11z&=&0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow X\in\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}11\\5\\4\end{pmatrix}.$$

— Si $\lambda=\frac{3}{5}$, on obtient et résout donc

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl}&&&-&\frac{4}{25}z&=&0\\ &&&+&z&=&0\\ x&+&y&&&=&0\end{array}\right. \Leftrightarrow X\in\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

— Si $\lambda = \frac{1}{2}$, on obtient et résout donc

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & y & & & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} & - & y & & & = & 0 \\ x & & & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les trois droites stables par $\varphi$ sont $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Posons $u = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. On pourrait montrer élémentairement que $(u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On peut aussi profiter ce que l'on vient de démontrer : $\varphi(u) = u$, $\varphi(v) = \frac{3}{5}v$ et $\varphi(w) = \frac{1}{2}w$.
Soit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$, par réccurence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi^n(\lambda u + \mu v + \nu w) = \lambda u + \left(\frac{3}{5}\right)^n v + \left(\frac{1}{2}\right)^n w \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda u.$$

Ainsi, si $\lambda u + \mu v + \nu w = 0$, alors par linéarité de $\varphi$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^n = 0$, et comme $u \neq 0$, alors $\lambda = 0$. Comme $v, w$ sont deux vecteurs non colinéaires, $(v, w)$ est libre, donc $\mu = \nu = 0$.
Ainsi, $(u, v, w)$ est une famille de $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ vecteurs de $\mathbb{R}^3$, c'en est donc une base.
Par construction,

$$\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

**3)** Par une récurrence assez immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \varphi^n(X)$. Soit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ vérifiant $X_0 = \lambda u + \mu v + \nu w$, on vient de voir que

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda u.$$

Remarquons que, comme la somme des coefficients de $v$ et de $w$ s'annule, $x_0 + y_0 + z_0 = 20\lambda = 1$, donc $\lambda = \frac{1}{20}$. Ainsi,

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Remarquons aussi que $\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ définit une loi de probabilité sur $\{x, y, z\}$ !
Ainsi, quelle que soit $X_0$, $(X_n)$ converge vers une même «loi limite».
*N.B.* C'est un phénomène assez général quand on étudie ce type de processus (appelé *chaîne de Markov*). Sous quelques hypothèses sur le graphe de transition (ici vérifiées), on peut montrer qu'il existe une unique «loi stable» et que la chaîne de Makov converge «en loi» vers cette loi stable.

**4)** Notons $(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. La matrice de passage de $(e_1, e_2, e_3)$ vers $(u, v, w)$ est

$$P = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On calcule

$$P^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -15 & 5 \\ 4 & 4 & -16 \end{pmatrix}.$$

Par la formule de changement de base, avec $D = \mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(\varphi) = \mathrm{Diag}\left(1, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}\right)$,

$$A = PDP^{-1}.$$

Par récurrence (la faire au besoin), pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = PD^nP^{-1},$$

donc

$$X_n = PD^nP^{-1}X_0$$

et

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (3/5)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/2)^n \end{pmatrix}.$$

Un dernier calcul (fastidieux) donne l'expression exacte de $X_n$ en fonction des coefficients de $X_0$.