XII Limite d'une fonction

20 décembre 2016

Dans tout ce chapitre, sauf mention expresse du contraire, I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$.

1 Préliminaires

Comme pour la notion de limite d'une suite, nous allons définir la notion de limite de fonction de manière naïve. Cela va nous ammener à répéter de nombreuses fois certains énoncés. Vous unifierez cela en spé, avec la notion de voisinage.

Nous nous permettons cependant de définir quelques raccourcis de langages qui simplifieront les énoncés.

Définition 1.0.1.
On dit qu'une propriété est vraie *au voisinage* d'un point $a \in \mathbb{R}$ s'il existe un intervalle ouvert contenant a sur lequel la propriété est vérifiée.

On dit qu'une propriété est vraie *au voisinage* de $+\infty$ (resp. de $-\infty$) s'il existe un intervalle de la forme $[A, +\infty[$ (resp. $]-\infty, A]$) sur lequel la propriété est vérifiée.

Remarque 1.0.2.
On pourrait (voire même devrait) donner ces définitions avec des intervalles ouvert : c'est équivalent.

Exemple 1.0.3.
• La fonction sinus est strictement positive au voisinage de $\pi/2$.
• La fonction Arctan est supérieure à $\pi/4$ au voisinage de $+\infty$.

Remarque 1.0.4.
Si $a \in \mathbb{R}$, si P est un prédicat portant sur les réels, P est vrai au voisinage de a si et seulement si

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall t \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon],\ P(t).$$

Si P n'est défini que sur un ensemble $I \subset \mathbb{R}$, la définition 1.0.1 doit alors être modifiée en remplaçant tous les intervalles par leurs intersections avec I, *i.e*

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall t \in I \cap [a-\varepsilon, a+\varepsilon],\ P(t),$$

ou encore

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall t \in I,\ t \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \Rightarrow P(t),$$

On a les mêmes écritures au voisinage de $\pm\infty$.

Exemple 1.0.5.
Si on s'intéresse à la propriété «$\frac{1}{x^2} - 1 \geqslant 0$», celle-ci n'a de sens que sur $D = \mathbb{R}^*$.

Dire que « $\frac{1}{x^2} - 1 \geqslant 0$ au voisinage de 0 » signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon] \cap \mathbb{R}^*,\ \frac{1}{t^2} - 1 \geqslant 0.$$

Proposition 1.0.6.
Si P et Q sont vraies au voisinage de a, alors « P et Q » est vraie au voisinage de a.

Démonstration.
Montrons le dans le cas $a \in \mathbb{R}$ (les autres sont laissés au lecteur).

Soit $\alpha, \beta > 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
— si $|x-a| \leqslant \alpha$, alors $P(x)$;
— si $|x-a| \leqslant \beta$, alors $Q(x)$.

Alors, avec $\gamma = \min(\alpha, \beta) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $|x-a| \leqslant \gamma$, on a bien simultanément $|x-a| \leqslant \alpha$ et $|x-a| \leqslant \beta$, donc $P(x)$ et $Q(x)$ sont vraies. □

Remarque 1.0.7.
Dire qu'une propriété est vraie au voisinage de a est vague car on ne précise pas sur quel ensemble elle est vraie mais très pratique car on ne précise pas sur quel ensemble elle est vraie !

C'est l'exact analogue du « à partir d'un certain rang » utilisé sur les suites.

Remarque 1.0.8.
Quand on parle de plusieurs propriétés vraies «au voisinage d'un point a», il faut bien comprendre que tous ces « voisinages » ne sont pas nécessairement les mêmes.

Par exemple, pour tout $\varepsilon > 0$, la propriété «$|x| \leqslant \varepsilon$» est vraie pour x au voisinage de 0 mais le « voisinage » en question dépend de ε (il s'agit de $[-\varepsilon, \varepsilon]$).

On peut remarquer d'ailleurs que, bien que pour tout $\varepsilon > 0$, la propriété «$|x| \leqslant \varepsilon$» soit vraie pour x au voisinage de 0, il est faux d'affirmer que la propriété «pour tout $\varepsilon > 0$, $|x| \leqslant \varepsilon$» est vraie pour x au voisinage de 0 (elle n'est vraie qu'en 0).

On va s'intéresser dans la suite à la notion de limite de fonction. Étant donné une partie E de $\mathbb{R}$, une fonction f définie sur E et $a \in \overline{\mathbb{R}}$, sans même connaître f, il est intuitivement clair que la notion de limite de f n'a pas de sens dans certains cas. Par exemple si $E = \mathbb{R}^-$, se questionner sur la limite de f en $+\infty$ ou en 1 n'a aucun sens. La définition ci-dessous va nous permettre, étant donné E, de définir précisément en quels points chercher si f admet une limite a un sens. Cet ensemble de points est appelé l'adhérence de E.

Exercice 1.0.9.
Pour les ensembles E suivants, quelles sont les valeurs sur lesquelles chercher si f admet une limite a un sens ?

1. $\mathbb{R}$
2. $[0, +\infty[$
3. $]0, +\infty[$
4. $]\pi, 42[$
5. $]\pi, 42]$
6. $\mathbb{R}^*$
7. $]-\infty, -7]\cup]6, 42]$
8. $\{0\}$

Définition 1.0.10 (HP – sera vu en MP)**.**
Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

1. On appelle *intérieur de* E et l'on note $\mathring{E}$ l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que E soit un voisinage de x, c'est-à-dire l'ensemble des x appartenant à E tels que E contienne un intervalle ouvert centré en x.
2. On appelle *adhérence de* E et l'on note $\overline{E}$ l'ensemble des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ limites de suites d'éléments de E.
3. On appelle *frontière de* E l'ensemble $\overline{E} \setminus \mathring{E}$

Exercice 1.0.11.
Vérifier que pour les exemples de l'exercice 1.0.9, cette définition donne bien la même chose.

En pratique, on pourra essentiellement se contenter de la définition suivante, en se rappelant que l'adhérence (resp. l'intérieur) de l'union d'un nombre fini d'intervalles disjoints est l'union de leurs adhérences (resp. leurs intérieurs).

Remarque 1.0.12.
E est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\overline{E} = \overline{\mathbb{R}}$.

Définition 1.0.13.
Soit I un intervalle de la forme (a, b), avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, tels que $a \leqslant b$, et où les symboles (et) peuvent prendre la valeurs [ou].

1. On appelle *intérieur* de I, noté $\mathsf{Int}(I)$ ou $\mathring{I}$, l'intervalle $]a, b[$, c'est-à-dire I privé de ses extrémités. C'est le plus grand intervalle ouvert contenu dans I.
2. On appelle *fermeture* ou *adhérence* de I, noté $\overline{I}$, l'intervalle $[a, b]$, c'est-à-dire I augmenté de ses extrémités. C'est le plus petit intervalle fermé de $\bar{\mathbb{R}}$ contenant I.

Définition 1.0.14.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $a \in \overline{I}$, on dit que a *adhère* à I.

2 Définitions de la limite d'une fonction

Comme pour les suites, nous allons donner différentes définitions naïves de limites de fonctions : on peut considérer la limite d'une fonction en un point réel, en $+\infty$ et en $-\infty$; on peut considérer une limite réelle ou infinie. On traite donc séparément neuf cas différents.

La notion topologique de *voisinage*, que vous verrez l'année prochaine, permet d'unifier tout cela en un seul vocabulaire : quel gain en efficacité et en élégance !

2.1 Limite en un point

Définition 2.1.1 (Limite en un point réel)**.**
Soit $a \in \overline{I} \cap \mathbb{R}$, soit $\ell \in \mathbb{R}$.

• On dit que f *tend vers* ℓ *en* a et l'on note $f \underset{a}{\to} \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0, \forall x \in I, |x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon.$$

• On dit que f *tend vers* $+\infty$ *en* a et l'on note $f \underset{a}{\to} +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists\alpha > 0, \forall x \in I, |x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \geqslant A.$$

• On dit que f *tend vers* $-\infty$ *en* a et l'on note $f \underset{a}{\to} -\infty$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists\alpha > 0, \forall x \in I, |x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \leqslant A.$$

Remarque 2.1.2.
On préférera parfois écrire $|x-a| \leqslant \alpha$ sous la forme $x \in [a-\alpha, a+\alpha]$.

Le bloc $\forall x \in I, |x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow [...]$ s'écrit alors $\forall x \in I \cap [a-\alpha, a+\alpha]\,,\ [...]$.

On remarquera la structure commune :

$$\forall [...], \exists\alpha > 0, \forall x \in I, |x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \in [...].$$

Définition 2.1.3 (Limite en $+\infty$).
Supposons que $\sup I = +\infty$, soit $\ell \in \mathbb{R}$.
• On dit que f *tend vers* ℓ *en* $+\infty$ et l'on note $f \xrightarrow[+\infty]{} \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$ si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geqslant B \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon.$$

• On dit que f *tend vers* $+\infty$ *en* $+\infty$ et l'on note $f \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geqslant B \Rightarrow f(x) \geqslant A.$$

• On dit que f *tend vers* $-\infty$ *en* $+\infty$ et l'on note $f \xrightarrow[-\infty]{} -\infty$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geqslant B \Rightarrow f(x) \leqslant A.$$

Remarque 2.1.4.
On préférera parfois écrire $x \geqslant B$ sous la forme $x \in [B, +\infty[$.

Le bloc $\forall x \in I, x \geqslant B \Rightarrow [...]$ s'écrit alors $\forall x \in I \cap [B, +\infty[,\ [...]$.

On remarquera la structure commune :

$$\forall [...], \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geqslant B \Rightarrow f(x) \in [...].$$

Définition 2.1.5 (Limite en $-\infty$).
Supposons que $\inf I = -\infty$, soit $\ell \in \mathbb{R}$.
• On dit que f *tend vers* ℓ *en* $-\infty$ et l'on note $f \xrightarrow[-\infty]{} \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \ell$ si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leqslant B \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon.$$

• On dit que f *tend vers* $+\infty$ *en* $-\infty$ et l'on note $f \xrightarrow[-\infty]{} +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leqslant B \Rightarrow f(x) \geqslant A.$$

• On dit que f *tend vers* $-\infty$ *en* $-\infty$ et l'on note $f \xrightarrow[-\infty]{} -\infty$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leqslant B \Rightarrow f(x) \leqslant A.$$

Remarque 2.1.6.
On préférera parfois écrire $x \leqslant B$ sous la forme $x \in]-\infty, B]$.

Le bloc $\forall x \in I, x \leqslant B \Rightarrow [...]$ s'écrit alors $\forall x \in I \cap]-\infty, B],\ [...]$.

On remarquera la structure commune :

$$\forall [...], \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leqslant B \Rightarrow f(x) \in [...].$$

Remarque 2.1.7.
On peut aussi remarquer que les trois définitions de « f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ » ont en commun la structure suivante.

$$\forall\varepsilon > 0, \exists [...], \forall x \in I,\ x \in [...] \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$$

Exercice 2.1.8.
Dégager la structure commune des trois définitions de « f tend vers $+\infty$ ». Faire de même pour $-\infty$.

Remarque 2.1.9.
Comme dans le cas des suites, on obtient des propositions équivalents en remplaçant les inégalités

larges (ou certaines d'entre elles) par des inégalités strictes. En revanche, attention aux inégalités $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ qui doivent être conservées strictes.

Remarque 2.1.10.
On peut également remplacer les conditions $A \in \mathbb{R}$ par $A \in \mathbb{R}_+^*$ ou $A \in \mathbb{R}_-^*$ suivant les cas.

Remarque 2.1.11.
L'ordre des quantificateurs dans ces définitions est évidemment essentiel.

Remarque 2.1.12.
Sur les suites, le «$\forall n \geqslant n_0$» devait être compris comme portant sur un n entier, de façon à ce que u_n ait un sens.

C'est le «$\forall x \in I$» qui ici remplit ce rôle, de façon à ce que $f(x)$ soit bien défini.

Attention à ne pas l'oublier !

Remarque 2.1.13.
Remarquez que la caractérisation de la convergence d'une suite à l'aide de «$\forall\varepsilon\exists n_0 \ldots$» est très similaire à celle de l'existence d'une limite finie pour une fonction en $+\infty$, de même la caractérisation de la divergence vers $+\infty$ d'une suite est très similaire à celle du fait qu'une fonction tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Cette similarité n'est pas un hasard : regardez ce que donne la définition de limite de fonction (utilisant les voisinages) pour une fonction définie sur $\mathbb{N}$. Que constatez-vous ?

Remarque 2.1.14.
Pour donner la défition de limite en un point, nous avons dû traiter neuf cas différents, ce qui est assez fastidieux. Comme dans le cas des suites, la notion de voisinage permet de donner une définition unifiée, regroupant tous les cas en une seule définition. Cette défintion unifiée est la suivante :

Soit $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f *admet* ℓ *pour limite en* a et on note $f \underset{a}{\to} \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ si pour tout voisinage $V \in \mathscr{V}(\ell)$, il existe un voisinage $W \in \mathscr{V}(a)$ tel que $\forall x \in W \cap I \quad f(x) \in V$.

Cette définition étant plus abstraite et hors-programme, nous ne l'utiliserons pas en priorité dans ce cours, même si elle peut systématiquement être employée. Cependant, certaines démonstrations seront données sans la notion de voisinage, puis une seconde fois avec la notion de voisinage. Vous pourrez voir les simplifications que ces voisinages apportent et vous entraîner à réécrire d'autres démonstrations grâce aux voisinages.

Théorème 2.1.15.
Soit $a \in \overline{I}$, soit $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_1$ et $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_2$, alors $\ell_1 = \ell_2$.

Démonstration.
Par symétrie et en supposant que $\ell_1 \neq \ell_2$, on a trois cas possibles pour a ($a \in \mathbb{R}$, $a = +\infty$ et $a = -\infty$), et pour chaque choix de a on a quatre cas possibles :
- $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$;
- $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 = -\infty$;
- $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 = +\infty$;
- $\ell_1 = -\infty$ et $\ell_2 = +\infty$.

Cela donne donc douze cas à traiter. Nous ne les détaillerons pas tous, le lecteur saura les retrouver sans difficulté.

Supposons $a \in \mathbb{R}$, $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$. Posons $\varepsilon = \frac{1}{3}|\ell_1 - \ell_2| > 0$. Il existe donc $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ tels que, pour tout $x \in I$,
- si $|x - a| \leqslant \alpha_1$, alors $|f(x) - \ell_1| \leqslant \varepsilon$;
- si $|x - a| \leqslant \alpha_2$, alors $|f(x) - \ell_2| \leqslant \varepsilon$.

Soit $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2) > 0$. Comme a adhère à I, il existe $x \in I$ tel que $|x - a| \leqslant \alpha$. Les deux conditions précédentes sont donc vérifiées, et

$$\begin{aligned}|\ell_1 - \ell_2| &= |\ell_1 - f(x) - (\ell_2 - f(x))| \\ &\leqslant |\ell_1 - f(x)| + |(\ell_2 - f(x))| \\ &\leqslant \frac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2|.\end{aligned}$$

Cela contredit le fait que $\ell_1 \neq \ell_2$.

Supposons $a = +\infty$, $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 = -\infty$. Soit $A = \ell_1 - 1$ et $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Il existe donc $B_1, B_2 \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in I$,
- si $x \geqslant B_1$, alors $|f(x) - \ell_1| \leqslant \varepsilon$, notamment $f(x) \leqslant \ell_1 + \frac{1}{2} < A$;
- si $x \geqslant B_2$, alors $f(x) \geqslant A$.

Soit $B = \max(B_1, B_2)$. Comme $\sup I = +\infty$, il existe $x \in I$ tel que $x \geqslant B$. On a alors simultanément $f(x) < A$ et $f(x) \geqslant A$, ce qui est absurde. $\square$

Définition 2.1.16.
Soit $a \in \overline{I}$. S'il existe $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$, alors cet élément est appelé « limite de f en a » et est noté $\lim\limits_{a} f$ ou $\lim\limits_{t\to a} f(t)$.

Le symbole $\lim\limits_{x\to a}$ ne peut s'utiliser qu'après avoir montré l'existence de ladite limite. L'utiliser avant est une erreur grave. On préfèrera *systématiquement* utiliser l'écriture $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

Théorème 2.1.17.
Toute fonction possédant une limite ***finie*** en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est bornée au **voisinage** de a.

Démonstration.
Comme pour les suites. □

Remarque 2.1.18.
Si f admet une limite infinie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors f n'est pas bornée au voisinage de a.

Proposition 2.1.19.
Si $a \in I$ et si f tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a, alors $\ell = f(a)$.

Il s'agit bien d'être certain que a appartient à I (et pas seulement à $\bar{I}$!).

Démonstration.
Supposons $\ell = +\infty$. soit $A = f(a) + 1$. Il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in I \cap [a-\alpha, a+\alpha]$, $f(x) \geqslant A$. Or, $a \in I \cap [a-\alpha, a+\alpha]$, donc $f(a) \geqslant f(a)+1$, ce qui est absurde. De même, $\ell = -\infty$ est absurde, donc $\ell \in \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$, soit $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in I \cap [a-\alpha, a+\alpha]$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$. Or, on a toujours $a \in I \cap [a-\alpha, a+\alpha]$, car $a \in I$. Ainsi, $|f(a) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

On a donc : pour tout $\varepsilon > 0$, $|f(a) - \ell| \leqslant \varepsilon$. Cela implique bien que $f(a) = \ell$ (sinon, prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}|f(a) - \ell|$). □

Remarque 2.1.20.
Pour tous a et ℓ réels, on montre facilement que les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $f \xrightarrow[a]{} \ell$

(ii) $f - \ell \xrightarrow[a]{} 0$

(iii) $|f - \ell| \xrightarrow[a]{} 0$

(iv) $f(a+h) \xrightarrow[h\to 0]{} \ell$

Exemple 2.1.21.
Pour s'entraîner à manipuler la définition (mais ce n'est pas la meilleure méthode dans la pratique), considérons la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 + x \end{array}$ Montrons $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 2$.

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - 2 = (x-1)(x^2 + x + 2)$.

Si $x \in [0, 2]$, alors $|x| \leqslant 2$ et donc (inégalité triangulaire) $|x^2 + x + 2| \leqslant 8$.

Soit $\varepsilon > 0$. Si $x \in \left[1 - \frac{\varepsilon}{8}; 1 + \frac{\varepsilon}{8}\right]$, alors $|x - 1| \leqslant \frac{\varepsilon}{8}$.

Ainsi, avec $\alpha = \min\left(1; \frac{\varepsilon}{8}\right)$, si $|x-1| \leqslant \alpha$, on a simultanément $|x^2 + x + 2| \leqslant 8$ et $|x - 1| \leqslant \frac{\varepsilon}{8}$.

On a alors $|f(x) - 2| \leqslant \varepsilon$.

Donc on a bien

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x-1| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - 2| \leqslant \varepsilon.$$

Donc $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 2$.

2.2 Limites à gauche et à droite en un point

Définition 2.2.1.
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

(i) Si f est définie au voisinage de a à gauche, c'est-à-dire si $a \in \overline{I \cap]-\infty, a[}$, on dit que f *admet ℓ pour limite à gauche en a* (ou *tend vers ℓ à gauche en a*) si $f|_{I\cap]-\infty,a[}$ admet ℓ pour limite en a.
On note alors $f(x) \xrightarrow[x\to a^-]{} \ell$, $f(x) \xrightarrow[\substack{x\to a\\ x<a}]{} \ell$ ou encore $f \xrightarrow[a^-]{} \ell$.
Si elle existe, la limite à gauche est unique (puisque c'est une limite) et dans ce cas elle est notée $\lim\limits_{a^-} f$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$.

(ii) On définit de la même manière la notion de *limite à droite.*

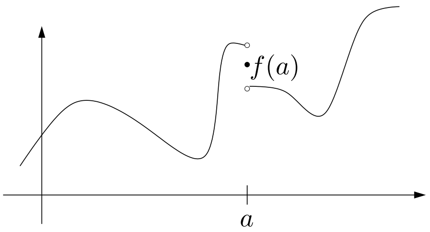

FIGURE 1 – Fonction f sans limite en a, ayant des limites à droite et à gauche en a différentes.

Dans la définition de limite à gauche, c'est la fonction $f|_{I\cap]-\infty,a[}$ qu'il faut considérer, et non la fonction $f|_{I\cap]-\infty,a]}$ (intervalle fermé en a). En effet, on veut que la fonction de la figure 1 ait une limite à gauche, ce qui n'est le cas qu'avec une restriction à un intervalle ouvert en a.

Remarque 2.2.2.
Comme pour les limites, l'existence d'une limite à gauche / droite s'écrit avec des ε. Par exemple, dans le cas où $a, \ell \in \mathbb{R}$, f admet ℓ pour limite à gauche en a si et seulement si on a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in I \qquad a - \alpha \leqslant x < a \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On a le même genre de proposition pour les 5 autres cas (il y a au total 6 cas suivant qu'il s'agit d'une limite à gauche ou à droite d'une part et que la limite est réelle, égale à $+\infty$ ou $-\infty$ d'autre part).

Exemple 2.2.3.
On a $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} +\infty$ et $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x < 0}]{} -\infty$.

Théorème 2.2.4.
Soit a un réel appartenant à I, à $\overline{I\cap]-\infty, a[}$ et à $\overline{I\cap]a, +\infty[}$. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors $f \underset{a}{\rightarrow} \ell$ si et seulement si on a simultanément

(i) $f \xrightarrow[a^-]{} \ell$

(ii) $f \xrightarrow[a^+]{} \ell$

(iii) $f(a) = \ell$.

Le point (iii) est indispensable, sinon la fonction de la figure 2 aurait une limite en a.

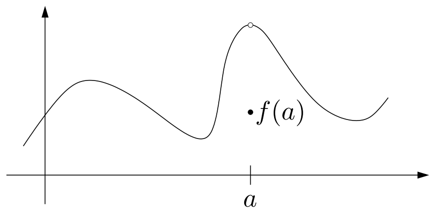

FIGURE 2 – Fonction f ayant des limites à gauche et à droite en a égales, mais pas de limite en a.

Démonstration. ($\Rightarrow$) Supposons d'abord $f \underset{a}{\rightarrow} \ell$. Nous avons déjà observé que $f(a) = \ell$ est nécessaire. Il est alors immédiat d'après les définitions que $f \xrightarrow[a^-]{} \ell$ et $f \xrightarrow[a^+]{} \ell$.

($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons qu'on ait les trois conditions (i), (ii) et (iii). On a $f(a) = \ell$, donc $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha^-, \alpha^+ \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant

$$\begin{cases} \forall x \in I \quad a - \alpha^- \leqslant x < a \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \\ \forall x \in I \quad a < x \leqslant a + \alpha^+ \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

Posons alors $\alpha = \min\{\alpha^-, \alpha^+\}$ et montrons $\forall x \in I \quad |x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Soit $x \in I$ tel que $|x - a| \leqslant \alpha$, c'est-à-dire $a - \alpha \leqslant x \leqslant a + \alpha$. Alors

1. si $a - \alpha \leqslant x < a$, on a en fait $a - \alpha^- \leqslant x < a$ et donc $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$;
2. si $x = a$, $f(x) = f(a) = \ell$ et donc $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$;
3. si $a < x \leqslant a + \alpha$, on a en fait $a < x \leqslant a + \alpha^+$ et donc $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Dans tous les cas on a bien $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.
On a donc $f \underset{a}{\rightarrow} \ell$.

$\square$

Exemple 2.2.5.
Le théorème précédent permet de montrer que, l'application $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} e^x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 1-x & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$ tend vers 1 en 0.

Remarque 2.2.6.
On n'utilisera la caractérisation d'une limite par le théorème 2.2.4 que quand la fonction n'est pas définie de la même manière à gauche et à droite du point considéré. Sinon, cela n'a aucun intérêt et l'on travaillera directement avec la définition générale de limite, ou ses caractérisations.

Remarque 2.2.7.
On pourrait aussi définir, mais le besoin s'en fera rarement sentir, la notion de « limite épointée », que l'on noterait $f(x) \xrightarrow[x \neq a]{x \to a} \ell$, qui signifie $f_{|I \setminus \{a\}} \underset{a}{\to} \ell$.

De même, les notations $f(x) \xrightarrow[x \leqslant a]{x \to a} \ell$ et $f(x) \xrightarrow[x \geqslant a]{x \to a} \ell$ ne devraient pas vous faire peur.

3 Propriétés des limites de fonctions

3.1 Opérations sur les limites

Les résultats usuels valables pour les limites de suite restent valables :

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors

$$f \underset{a}{\to} \ell \iff f - \ell \underset{a}{\to} 0$$
$$f \underset{a}{\to} 0 \iff |f(x)| \xrightarrow[x \to a]{} 0$$
$$f \underset{a}{\to} \ell \iff |f(x) - \ell| \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

2. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Si f est bornée au voisinage de a et $g \underset{a}{\to} 0$, alors $f \times g \underset{a}{\to} 0$.

Exemple 3.1.1.
Le deuxième point permet de montrer $\dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

Pour les opérations usuelles (somme, produit et inverse), les résultats valables pour les limites de suites sont toujours valables pour les fonctions, et les démonstrations sont tout à fait similaires. Nous ne les redémontrerons donc pas, mais vous devez savoir les faire sans problème.

Voyons le théorème sur la composition de deux fonctions ayant une limite :

Théorème 3.1.2.
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux applications vérifiant $f(I) \subset J$ et soit $a \in \overline{I}$, $b \in \overline{J}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $f \underset{a}{\to} b$ et $g \underset{b}{\to} \ell$, alors $g \circ f \underset{a}{\to} \ell$.

Remarque 3.1.3.
L'hypothèse $b \in \overline{J}$ est superflue : si $f : I \to J$ a une limite b en a, alors automatiquement, $b \in \overline{J}$.

Démonstration.
On a vingt-sept cas à distinguer, selon si a, b et ℓ sont chacun réel, $+\infty$ ou $-\infty$. Nous ne détaillerons pas tous ces cas, le lecteur intéressé saura les retrouver facilement.

Si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$, posons $V_\ell = [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$. Il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $y \in J \cap V_b$, avec $V_b = [b - \alpha, b + \alpha]$, on a $g(y) \in V_\ell$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in I \cap V_a$, avec $V_a = [a - \eta, a + \eta]$, on a $f(x) \in V_b$. Soit $x \in I \cap V_a$. On a, d'une part, $f(x) \in V_b$ et, d'autre part, $f(x) \in J$. Donc $g(f(x)) \in V_\ell$. On a bien montré $g \circ f \underset{a}{\to} \ell$.

Si $a = +\infty$, $b = -\infty$ et $\ell = +\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}$, posons $V_\ell = [A, +\infty[$. Il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $y \in J \cap V_b$, avec $V_b =]-\infty, B]$, on a $g(y) \in V_\ell$. Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I \cap V_a$, avec $V_a = [A, +\infty[$, on a $f(x) \in V_b$. Soit $x \in I \cap V_a$. On a, d'une part, $f(x) \in V_b$ et, d'autre part, $f(x) \in J$. Donc $g(f(x)) \in V_\ell$. On a bien montré $g \circ f \underset{+\infty}{\to} +\infty$. ☐

Remarque 3.1.4.
La structure de la preuve précédente ne change pas en fonction des natures de a, b et ℓ, mais seulement les formes des intervalles V_a, V_b, V_ℓ.

À cause des vingt-sept cas à distinguer, cette démonstration est un exemple typique de démonstration où la notion de voisinage fait gagner du temps. Redémontrons donc ce résultat :

Démonstration.
Soit $V \in \mathscr{V}(\ell)$. Montrons qu'il existe un voisinage W de a vérifiant $(g \circ f)(W \cap I) \subset V$.

On a $g \underset{b}{\to} \ell$, donc il existe un voisinage W' de b vérifiant $g(W' \cap J) \subset V$.

Or $f \underset{a}{\to} b$, donc il existe un voisinage W de a vérifiant $f(W \cap I) \subset W'$.

Or $f(I) \subset J$, donc $f(W \cap I) \subset J$, donc $f(W \cap I) \subset W' \cap J$.

Donc $(g \circ f)(W \cap I) \subset g(W' \cap J) \subset V$.

On a donc bien $g \circ f \underset{a}{\to} \ell$. $\square$

Remarque 3.1.5.
On a vu (remarque 2.1.9) que la définition de la limite d'une suite n'est qu'un cas particulier de celle de fonction. Ce théorème de composition sur les fonctions a donc pour corollaire celui qu'on a énoncé au chapitre concernant les limites de suites sur la composition d'une fonction et d'une suite.

Exemple 3.1.6.
Ce théorème permet de montrer par exemple que $\ln\left(\tan x^2\right) \xrightarrow[x \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}]{} 0$.

Théorème 3.1.7 (Caractérisation séquentielle des limites)**.**
Soient $a \in \overline{I}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On a équivalence entre :

(i) $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$

(ii) pour toute suite (u_n) telle que $u_n \in I$ et $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$, on a $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.

Démonstration.
Traitons les cas a et ℓ finis (les autres cas se traitent de manière similaire).

(i)⇒(ii) C'est une conséquence immédiate du résultat de composition d'une application et d'une suite.

¬(i)⇒ ¬(ii) Supposons $f \underset{a}{\not\to} \ell$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ vérifiant

$$\forall \eta \in \mathbb{R}_+^* \exists x \in I \quad (x \in [a-\eta, a+\eta] \text{ et } |f(x) - \ell| > \varepsilon) \tag{1}$$

Soit alors $n \in \mathbb{N}$. Comme $\dfrac{1}{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$, d'après l'assertion (1), il existe $u_n \in I$ vérifiant

(a) $u_n \in [a - \frac{1}{n+1}, a + \frac{1}{n+1}]$

(b) et $|f(u_n) - \ell| > \varepsilon$.

On a donc construit une suite u d'éléments de I. Le point (a) nous assure qu'elle converge vers a, le second que $f(u_n)$ ne tend pas vers ℓ (une suite minorée par un réel strictement positif ne saurait tendre vers 0). $\square$

Exemple 3.1.8.
$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(1/x) \end{array}$ n'a pas de limite en 0.
Il suffit en effet de considérer la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{\pi/2 + n\pi}$ pour $n \in \mathbb{N}$ pour s'en convaincre.

3.2 Passage à la limite et relations d'ordre

Les théorèmes suivants sont analogues à des résultats déjà vu sur les suites.

Théorème 3.2.1.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et $(m, M, \ell) \in \mathbb{R}$.

Supposons $f \underset{a}{\to} \ell$ et $m < \ell < M$.

Alors, au voisinage de a, on a $m < f(x) < M$.

Démonstration.
On traite le cas $a \in \mathbb{R}$, les autres cas sont laissés au lecteur.

Soit $\varepsilon = \min(\ell - m, M - \ell) > 0$. On a bien $[\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon] \subset]m, M[$.

Ainsi, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in [a - \alpha, a + \alpha] \cap I$, on a $f(x) \in [\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon]$, donc $f(x) \in]m, M[$. $\square$

Avec les voisinages :

Démonstration.
$]m, M[$ est un intervalle ouvert contenant ℓ, c'est donc un voisinage de ℓ. Donc il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V \cap I$, on a $f(x) \in]m, M[$. $\square$

Remarque 3.2.2.
Le plus souvent, ce résultat s'applique sous la forme suivante :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ vérifiant $f \underset{a}{\to} \ell$. Alors

(i) Soit $M \in \mathbb{R}$ vérifiant $\ell < M$. Alors au voisinage de a, $f(x) < M$.

(ii) Soit $m \in \mathbb{R}$ vérifiant $m < \ell$. Alors au voisinage de a, $f(x) > m$.

Ce résultat est faux avec des inégalités larges : ainsi $x^2 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ et donc sa limite est négative. Mais dire que pour x au voisinage de 0 on a $x^2 \leqslant 0$ est *faux*.

Corollaire 3.2.3 (Passage à la limite dans une inégalité)**.**
Soit $a \in \overline{I}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ vérifiant $f \underset{a}{\to} \ell$. Soit $(m, M) \in \mathbb{R}^2$.

(i) Si M majore f au voisinage de a, alors $\ell \leqslant M$.

(ii) Si m minore f au voisinage de a, alors $m \leqslant \ell$.

Démonstration.
On traite le cas $a \in \mathbb{R}$, les autres cas sont laissés au lecteur.

(i) Supposons que M majore f sur l'intersection de I et d'un intervalle $V_1 = [a - \alpha, a + \alpha]$, avec $\alpha > 0$.
Par l'absurde, supposons $\ell > M$. D'après le théorème 3.2.1, il existe $\eta > 0$ tel que, avec $V_2 = [a - \eta, a + \eta]$, pour tout $x \in V_2 \cap I$, on a $f(x) > M$.
Pour tout $x \in V_1 \cap V_2 \cap I$, on a alors $f(x) > M$ et $f(x) \leqslant M$.
Or $V_1 \cap V_2 \cap I$ est non vide, c'est donc absurde.
On a donc $\ell \leqslant M$.

(ii) On constate qu'au voisinage de a, $-m$ majore $-f$ et l'on applique le résultat du (i) à $-f$, $-\ell$ et $-m$.

$\square$

Corollaire 3.2.4 (Passage à la limite dans une inégalité, deuxième version)**.**
Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et $(\ell, \ell') \in \mathbb{R}^2$.

Supposons $f \underset{a}{\to} \ell$, $g \underset{a}{\to} \ell'$ et $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a. Alors $\ell \leqslant \ell'$.

Démonstration.
On a $(g - f)(x) \geqslant 0$ pour x au voisinage de a et $g - f \underset{a}{\to} \ell' - \ell$. Donc d'après le corollaire 3.2.3, on a $\ell' - \ell \geqslant 0$, donc $\ell \leqslant \ell'$. $\square$

Les inégalités strictes ne sont pas conservées par passage à la limite. Par exemple, au voisinage de $+\infty$ on $\mathrm{e}^{-x} > 0$, mais on a $\mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

4 Théorèmes d'existence

4.1 Théorèmes des gendarmes et de minoration/majoration

On retrouve sur les limites de fonctions les mêmes théorèmes d'encadrement que pour les suites.

Théorème 4.1.1 (Théorème d'encadrement, ou théorème des gendarmes)**.**
Soit $f, m, M : I \to \mathbb{R}$ trois applications, $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

Supposons qu'on a $m \underset{a}{\to} \ell$ et $M \underset{a}{\to} \ell$ et qu'au voisinage de a on a $m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x)$.

Alors, f tend vers ℓ en a.

Démonstration.
On traite le cas $a \in \mathbb{R}$. Les autres cas sont laissés au lecteur, la structure de la démonstration de changeant pas.

Soit $\varepsilon > 0$, posons $V_\ell = [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$. Il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que, pour tout $x \in I$,
— si $x \in V_a$, alors $m(x) \in V_\ell$;
— si $x \in V_a'$, alors $M(x) \in V_\ell$;
avec $V_a = [a - \alpha, a + \alpha]$ et $V_a' = [a - \beta, a + \beta]$. Soit enfin $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, si $x \in I \cap V_a''$, avec $V_a'' = [a - \eta, a + \eta]$, alors $m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x)$. Il suffit de remarquer que, si $x \in I \cap V_a \cap V_a' \cap V_a''$, alors $m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x)$ et $m(x), M(x) \in V_\ell$, donc $f(x) \in V_\ell$, car V_ℓ est un intervalle. On a donc bien $f \underset{a}{\to} \ell$. $\square$

Théorème 4.1.2 (Théorème de minoration)**.**
Soit $f, m : I \to \mathbb{R}$ deux applications, $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

Supposons qu'on a $m \underset{a}{\to} +\infty$ et qu' au voisinage de a, on a $m(x) \leqslant f(x)$.

Alors, f admet une limite en a et cette limite vaut $+\infty$.

Démonstration.
On traite le cas $a = -\infty$. Les autres cas sont laissés au lecteur, la structure de la démonstration de changeant pas.

Soit $A \in \mathbb{R}$, posons $V_{+\infty} = [A, +\infty[$. Il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, avec $V_a =]-\infty, B]$, si $x \in V_a$, alors $m(x) \in V_{+\infty}$. Soit enfin $C \in \mathbb{R}$ tel que, avec $V_a' =]-\infty, C]$, pour tout $x \in I$, si $x \in V_a'$, alors $m(x) \leqslant f(x)$. Il suffit de remarquer que, si $x \in I \cap V_a \cap V_a'$, alors $m(x) \leqslant f(x)$ et $m(x) \in V_\ell$, donc $f(x) \in V_\ell$. On a donc bien $f \underset{a}{\to} +\infty$. $\square$

Théorème 4.1.3 (Théorème de majoration)**.**
Soit $f, M : I \to \mathbb{R}$ deux applications, $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

Supposons qu'on a $M \underset{a}{\to} -\infty$ et qu'au voisinage de a, on a $f(x) \leqslant M(x)$.

Alors, f admet une limite en a et cette limite vaut $-\infty$.

Démonstration.
Il suffit d'appliquer le théorème de minoration à $-f$. $\square$

Corollaire 4.1.4.
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux applications et $a \in \overline{I}$. Si au voisinage de a on a $|f| \leqslant g$ et si $g \underset{a}{\to} 0$, alors $f \underset{a}{\to} 0$.

Démonstration.
Il suffit de remarquer qu'au voisinage de a, on a $-g \leqslant f \leqslant g$. $\square$

4.2 Théorème de la limite monotone

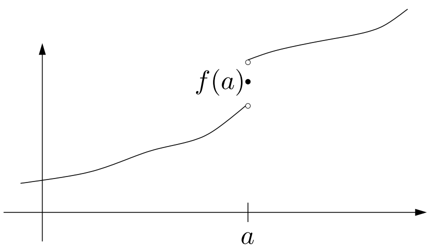

FIGURE 3 – Illustration de limite monotone : à retenir !

Théorème 4.2.1.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application croissante. On note α et β les bornes inférieures et supérieures de I dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors :

(i) f possède une limite à gauche (resp. à droite) en tout point a de $]\alpha, \beta]$ (resp. $[\alpha, \beta[$) et l'on a, pour chaque a où ces limites ont un sens,

$$f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x < a}}{\longrightarrow} \sup_{I \cap]-\infty, a[} f$$

ainsi que

$$f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x > a}}{\longrightarrow} \inf_{I \cap]a, +\infty[} f .$$

(ii) Soient $a, b \in \mathring{I}$ tels que $a < b$. Alors,

$$\lim_{a^-} f \leqslant f(a) \leqslant \lim_{a^+} f \leqslant \lim_{b^-} f \leqslant f(b) \leqslant \lim_{b^+} f.$$

(iii) Dans $\overline{\mathbb{R}}$, f admet une limite à droite en α. Si f est minorée, cette limite est finie, sinon elle vaut $-\infty$.

(iv) Dans $\overline{\mathbb{R}}$, f admet une limite à gauche en β. Si f est majorée, cette limite est finie, sinon elle vaut $+\infty$.

Si f est décroissante, on a bien sûr des résultats analogues.

Démonstration. **(i)** On ne montre le résultat que pour la limite à gauche.
Soit $a \in]\alpha, \beta]$. On pose $V = f(I \cap]-\infty, a[) = \{ f(x) \mid x < a \}$. L'ensemble V est non vide puisque $I \cap]-\infty, a[$ est non vide. Posons $\ell = \sup_{\substack{x \in I \\ x < a}} f(x)$.
On a $\ell = +\infty$ ou $\ell \in \mathbb{R}$. Distinguons ces deux cas :

a) $\ell = +\infty$. Alors soit M un réel fixé, il existe $y \in I \cap]-\infty, a[$ tel que $f(y) \geqslant M$.
Alors, puisque f est croissante, pour tout $x \in]y, a[\cap I$, on a $f(x) \geqslant M$.
Donc f prend ses valeurs dans $[M, +\infty[$ sur au voisinage de a, à gauche.
On a donc bien $f \underset{a-}{\longrightarrow} +\infty$.

b) $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, soit $\varepsilon > 0$. Il existe $y \in I \cap]-\infty, a[$ tel que $f(y) \geqslant \ell - \varepsilon$.
Alors, pour tout $x \in]y, a[\cap I$, on a $f(x) \geqslant \ell - \varepsilon$, f étant croissante, et $f(x) \leqslant \ell$ par définition de ℓ.
On en déduit qu'au voisinage à gauche de a, f prend ses valeurs dans $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$.
f admet donc pour limite ℓ en a à gauche.

(ii) Remarquons tout d'abord que, f étant croissante $\{ f(x) \mid x \in I \cap]-\infty, a[\}$ est majoré par $f(a)$, donc d'après le point (i), on a $\lim_{a^-} f \leqslant f(a)$.
De la même façon, on a $f(a) \leqslant \lim_{a^+} f$, $\lim_{b^-} f \leqslant f(b)$ et $f(b) \leqslant \lim_{b^+} f$.
Par ailleurs, $\lim_{b-} f$ majore $f(]a, b[)$ et $\lim_{a+}$ minore ce même ensemble, qui est non vide. Donc $\lim_{a^+} f \leqslant \lim_{b^-} f$.
On a donc le résultat.

(iii) (iii) (resp. (iv)) sont des conséquences immédiates de (i), l'existence d'un minorant (resp. majorant) étant équivalente au fait que la borne inférieure (resp. supérieure) soit finie.

Pour le cas d'une fonction décroissante, il suffit d'appliquer le résultat sur les fonctions croissantes à $-f$. $\square$

5 Cas des fonctions à valeurs complexes

Dans cette partie, on considère une application complexe $f : I \to \mathbb{C}$.

Notons tout de suite que les notions de fonction complexe majorée, minorée ou monotone n'ont **aucun sens**, car il n'y a pas de relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{C}$. Cependant, on peut définir la notion de fonction complexe bornée.

Définition 5.0.1.
On dit que f est *bornée* s'il existe $K \in \mathbb{R}^*$ tel que pour tout $x \in I$ on ait $|f(x)| \leqslant K$.

Remarque 5.0.2.
f est bornée si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont bornées.

Définition 5.0.3.
Soit $a \in \mathbb{C}$. Une propriété P est vraie au voisinage de a s'il existe $r > 0$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $|z - a| \leqslant r$, alors $P(z)$ est vraie.

Remarque 5.0.4.
La notion bidimensionnelle de voisinage complexe donnée ici généralise assez bien la notion unidimensionnelle de voisinage réel, néanmoins d'autres définitions seraient possibles : on pourrait utiliser, à la place de disques fermés, des disques ouverts ou bien des rectangles (fermés ou ouverts).

Définition 5.0.5.
Soit $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que f *admet* ℓ *pour limite en* a, ou f *tend vers* ℓ *en* a, si $|f(x) - \ell| \xrightarrow[x \to a]{} 0$.

On note bien entendu ceci $f \underset{a}{\to} \ell$ ou encore $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

Remarque 5.0.6.
Ceci nous ramène au cas d'une limite d'une fonction à valeurs réelles.

Remarque 5.0.7.
La définition quantifiée de « f tend vers ℓ en a » s'écrit comme pour une fonction réelle :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Théorème 5.0.8.
Soit $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $f \underset{a}{\to} \ell$;

(ii) $\operatorname{Re}(f) \underset{a}{\to} \operatorname{Re}(\ell)$ et $\operatorname{Im}(f) \underset{a}{\to} \operatorname{Im}(\ell)$.

Démonstration.
Cette démonstration s'effectue comme celle du théorème équivalent concernant les suites complexes. □

Exemple 5.0.9.

$$\frac{\mathrm{e}^{ix}}{1 + x^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Théorème 5.0.10.
Si f a une limite en un point de $\overline{I}$, cette limite est unique.

Démonstration.
Deux démonstrations sont possibles : ou bien on utilise le théorème 5.0.8, ou bien on reprend la démonstration donnée dans le cas réel (il suffit alors essentiellement de changer des $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$). □

Certains autres résultats établis pour les fonctions réelles sont toujours valables pour les fonctions complexes :

1. toute fonction à valeurs complexes ayant une limite en un point est bornée au voisinage de ce point,
2. les limites à gauche et à droite en un point peuvent être également définies,
3. la caractérisation séquentielle de la limite est maintenue,
4. la corollaire 4.1.4 du théorème des gendarmes se généralise aux fonctions f à valeurs complexes, ce qui permet également de montrer que le produit d'une fonction bornée au voisinage d'un point a par une fonction de limite

nulle en a est une fonction de limite nulle en a.

5. les opérations sur les limites ne faisant pas intervenir de limite infinie demeurent.

Les grands théorèmes ne se généralisent pas, de nouveau à cause du manque de relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{C}$.