

Feuille d'exercice n° 22 : **EV de dimension finie - indications**

**Exercice 1** Pour chaque famille, commencer par déterminer si elle est libre, au besoin supprimer les vecteurs combinaison linéaire des autres.

**Exercice 2** 1) C'est une question de primitivation de polynôme.

**Exercice 3** C'est exactement le même travail que lorsque l'on vous demande de déterminer une représentation cartésienne de l'image d'une application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$ .

Pour déterminer une équation cartésienne de  $\text{Vect}(u, v)$ , on prend un vecteur  $(x, y, z)$  et on commence à résoudre en  $x, y, z$  le système  $(x, y, z) = au + bv$ , où  $a, b \in \mathbb{R}$ . s

**Exercice 4** 1) Commencer par compter le nombre de vecteurs. Entre montrer la liberté de la famille et son caractère générateur, l'un des deux est un peu plus simple que l'autre.

**Exercice 5** 1) Commencer par compter le nombre de vecteurs. N'utilisez pas l'exercice précédent, tout est ici donné par le cours sur les polynômes.

**Exercice 6** C'est une situation vue en cours.

**Exercice 7** C'est la même chose que dans l'exercice 1.

**Exercice 8** Pensez à utiliser les deux outils fondamentaux du cours : la comparaison des dimensions et le théorème du rang.

**Exercice 9** Commencez par revoir l'exercice 4 de la feuille n°19.

**Exercice 10** Pensez à utiliser le théorème du rang et la formule de Grassmann.

**Exercice 11** 1)  $\text{Im}(u + v) \subset \dots$   
2) C'est une inégalité triangulaire, qui se démontre comme telle.

**Exercice 12** Pour simplifier la rédaction, n'hésitez pas à poser des ev.  $E_{-1}$  et  $E_n$ , ainsi que des applications linéaires  $f_{-1}$  et  $f_n$  *ad hoc*.

**Exercice 13** 1) C'est un cadre vu en cours.  
2) Il convient de trouver comment utiliser le 1).

**Exercice 14** Pensez (toujours) à utiliser le cours. Vous pouvez vous inspirer des exemples de l'exercice 3 de la feuille n°19.

**Exercice 15** 1) Le plus simple est de construire l'endomorphisme sur une base bien choisie.

**Exercice 16** Commencez par revoir la question 1 de l'exercice 4 de la feuille n°19. La comparaison  $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$  se généralise aisément.

**Exercice 17** Vu en cours.

**Exercice 18** 1) C'est élémentaire en utilisant la formule de Grassmann.  
2) Partez de la définition d'hyperplan donnée dans le poly de cours.

**Exercice 19** Le résultat est donné par le cours sur les polynômes.

**Exercice 20** C'est élémentaire.