Feuille d'exercice n° 23 : **Probabilités – Exercices supplémentaires**

Exercices élémentaires

Exercice 1 On signale m soucoupes volantes dans le ciel américain. L'armée envoie nm missiles, ayant chacun une probabilité p d'atteindre leur objectif. (On suppose qu'un missile ne peut atteindre, avec une probabilité p, que sa cible, mais en aucun cas une autre cible. On suppose de plus que les missiles agissent indépendamment les uns des autres.)

On dispose de deux stratégies :

S1 on vise chaque soucoupe avec n missiles ;

S2 on laisse chaque missile se choisir une cible au hasard.

1) Quelle est la probabilité d'atteindre une soucoupe donnée avec chacune de deux stratégies ?

2) Que se passe-t-il lorsque m tend vers l'infini, n étant fixé ? Quelle stratégie choisir ?

Exercice 2

1) Déterminer $a \in \mathbb{R}_+^\star$ pour que l'on puisse définir une probabilité P sur $[\![0, n]\!]$ par $\forall k \in [\![0,]\!]$, $P(\{k\}) = \ln(a^k)$.

2) On considère alors sur $[\![0, n]\!]$ la variable aléatoire $X = \mathrm{Id}$ (c'est-à-dire que $\forall k \in [\![0, n]\!], X(k) = k$). Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 3 Une grenouille monte les marches d'un escalier en sautant :

— ou bien une seule marche, avec la probabilité p.

— ou bien deux marches, avec la probabilité $1 - p$.

On note X_n le nombre de marches franchies après n sauts. On note Y_n le nombre de fois où la grenouille a sauté une seule marche.

1) Déterminer la loi de Y_n . Exprimer X_n en fonction de Y_n . En déduire la loi de X_n , son espérance et sa variance.

2) On note Z_n le nombre de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser la n-ième marche. Exprimer, pour $n \geq 1$ et $k \geq 1$, la probabilité $P[Z_n = k]$ en fonction des probabilités des événements $[Z_{n-1} = k - 1]$ et $[Z_{n-2} = k - 1]$. En déduire que :

$$\mathbb{E}(Z_n) = p\mathbb{E}(Z_{n-1}) + (1 - p)\mathbb{E}(Z_{n-2}) + 1.$$

3) Comment déterminer a pour que la suite de terme général $u_n = \mathbb{E}(Z_n) - na$ soit récurrente linéaire d'ordre 2 ?

4) Calculer alors l'espérance de Z_n . Donner un équivalent de $\mathbb{E}(Z_n)$ quand n tend vers l'infini, et interpréter.

Exercice 4 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule dans l'urne, on relève son numéro, noté k, puis on la replace dans l'urne en ajoutant également k autres boules, toutes numérotées k. On tire une nouvelle fois dans l'urne. On note X_1 le numéro de la boule du premier tirage, et X_2 le numéro de la boule du second tirage.

1) Donner la loi de probabilité de X_1 , son espérance et sa variance.

2) Quelle est la loi de probabilité de X_2 ? Vérifier que $\sum_{k=1}^{n} P(X_2 = k) = 1$.

Exercice 5 On a p boules numérotés de 1 à p dans une urne. On en pioche une au hasard et on regarde son numéro : k. On la replace dans l'urne en remplaçant toutes les boules de numéro inférieur par une boule numérotée k. On recommence alors suivant le même protocole. On note X_n le numéro du n-ième tirage.

1) Quelle est la loi de X_1 ?

2) Montrer : $\forall k \in [\![1,p]\!], P(X_2 = k) = \dfrac{2k-1}{p^2}$

3) Montrer : $\forall n \geq 1, P(X_{n+1} = p) = \dfrac{p-1}{p} P(X_n = p) + \dfrac{1}{p}$

4) En déduire $P(X_n = p)$.

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. On tire au hasard un jeton dans une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. Le premier jeton tiré est placé dans une urne A_1, le second dans une urne A_2 et ainsi de suite n fois. Chaque jeton tiré est remplacé à l'identique avant chaque tirage.
On recommence le protocole avec des urnes $B_1, \dots B_n$.

1) **a)** Quelle est la probabilité qu'il y ait le même numéro dans toutes les urnes A_i ?

b) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait que des numéros différents dans toutes les urnes A_i ?

c) Soit X_n le nombre de fois où le numéro est le même dans A_i et B_i.
Déterminer sa loi, sa variance.

2) Cette fois il n'y a pas de remise entre les tirages. Y_n compte la même chose.

a) Déterminer $P(Y_n = n)$ et $P(Y_n = n-1)$

b) On considère $E_k = [$ il y a le même numéro dans A_k et $B_k]$.
Montrer $P(Y_n = 0) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$

Exercice 7 Une urne contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$. On choisit un entier $k \in [\![1; 2n]\!]$. On effectue un premier tirage avec remise.

Si le numéro de la boule est strictement supérieur à k, on arrête, et on note le numéro de la boule. Sinon, on retire une boule et on note le numéro. On note X le numéro de la dernière boule tirée et Z le nombre de tirages effectués.

1) Trouver la loi conjointe de (X, Z).

2) Trouver la loi de X et calculer son espérance.

3) Trouver un entier k qui maximise $E(X)$.

4) En utilisant un point de vue qualitatif, déterminer le signe de $Cov(X, Z)$.

Exercice 8 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue dans cette urne deux tirages avec remise.

On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au plus petit (resp. au plus grand) numéro obtenu.

1) Déterminer la loi du couple (X, Y).

2) En déduire la loi marginale de X et la loi marginale de Y.

3) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 9 Soit $p \in [0,1]$, $m, n \in \mathbb{N}^*$. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé (Ω, P). On suppose que X suit la loi binomiale de paramètres (n,p) et Y suit la loi binomiale de paramètres (m,p).

Quelle est la loi de $X+Y$?

Indication : on pourra démontrer et utiliser la formule de Vandermonde $\displaystyle\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x}\binom{m}{z-x} = \binom{n+m}{z}$.

Exercices plus avancés

Exercice 10 Soit p un nombre premier, on considère l'univers $\Omega = [\![1, p]\!]$ muni de la probabilité uniforme.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante d'indépendance de deux événements.

Exercice 11

Loi hypergéométrique et approximation binomiale.

On considère une urne composée de $N \in \mathbb{N}^*$ boules dont une proportion $p \in]0, 1[$ de boules blanches. On effectue $n \in \mathbb{N}^*$ tirages d'une boule sans remise et l'on note X_N le nombre de boules blanches ainsi obtenues. Soit Y une v.a. de suivant une loi binômiale $\mathscr{B}(n, p)$.

1) Déterminer la loi de X_N.

2) Montrer que $\forall k \in \{0, \ldots, n\}$, $P(X_N = k) \xrightarrow[N\to+\infty]{} P(Y = k)$. *On dit que la suite* (X_N) *converge « en loi » vers v.a. binomiale.*

3) Que peut-on en déduire en pratique, par exemple lorsque l'on mène un sondage ?

Exercice 12

François prend le TGV, sans avoir eu le temps de réserver sa place. Il monte donc dans la première voiture, initialement vide, et s'assied à la première des N places disponibles. Il voir ensuite les passagers (munis de réservations) monter un à un. Lorsqu'un passager se présente avec une réservation pour la place occupée par François, celui-ci laisse sa place et va s'asseoir sur le siège vide le plus proche.

On suppose que les passagers arrivent l'un après l'autre et on modélise la place réservée par le passager qui arrive par une variable aléatoire uniforme parmi l'ensemble des places « libres » (c'est-à-dire les sièges vides plus la place où est assis François).

1) On suppose que $k \geqslant 0$ passagers avec réservation sont déjà installés. Quelle est la probabilité pour que le $(k+1)^{\text{ème}}$ passager ait réservé la place où est alors assis François ?

2) Pour tout $k \in \{1, \ldots, N-1\}$, quelle est la probabilité pour que François voie s'installer k passagers en ayant à se déplacer à chaque fois ? Sans avoir à se déplacer ?

3) Pour tout $k \in \{1, \ldots, N-1\}$, quelle est l'espérance du nombre de déplacements qu'a dû faore François après que k passagers se sont installés ?

4) Le train s'avère être complet et François finit par voyager debout. Quelle est l'espérance du nombre de déplacement qu'a dû faire François avant cela, en fonction de N ? En donner un équivalent lorsque $N \to +\infty$.

5) Quelle est la probabilité pour que François voie s'installer $k \in \{1, \ldots, N\}$ passagers en ayant à se déplacer exactement une fois ?

Exercice 13

Loi multinomiale.

Dans une urne, on dispose des boules numérotées 1 à m, dans des proportions respectives p_1 à p_m $(\sum_{i=1}^{m} p_i = 1)$.

On effectue $n \in \mathbb{N}$ tirages avec remises et l'on note, pour $1 \leqslant j \leqslant m$, N_j le nombre de boules j tirées. Quelle est la loi de $(N_1, \ldots, N_m)$?

On pourra utiliser commencer par les cas $m = 2$ et $m = 3$ et utiliser le symbole multinomial :

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdots k_m!} \text{ pour } (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{N}^m \text{ vérifiant } \sum_{i=1}^{m} k_i = n.$$

Exercice 14 Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé fini (Ω, P).

Trouver les réels $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ minimisant $\mathrm{E}\left[(Y - (aX + b))^2\right]$.