Feuille d'exercice n° 23 : **Probabilités – Correction**

Exercice 1 Soit (Ω, P) un espace probabilité fini modélisant le lancer successif de $n \in \mathbb{N}$ dés. Si $1 \leqslant i \leqslant n$, on note S_i l'événement «on obtient un 6 au i^e lancer».

On modélise : les événements $S_1, \dots, S_n$ sont mutuellement indépendants et tous de probabilité $\frac{1}{6}$.

L'événement «on obtient au moins un 6 lors des n lancers» est $S_1 \cup \dots \cup S_n$. Par indépendance mutuelle des S_i, sa probabilité est

$$P(S_1 \cup \dots S_n) = 1 - P(\overline{S_1 \cup \dots S_n}) = 1 - P(\bar{S}_1 \cap \dots \cap S_n) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

On pourrait résoudre l'inéquation $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geqslant \frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$ mais le résultat n'est pas explicite. Observons simplement que cette probabilité croît strictement en fonction de n et que

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216} > \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} < \frac{1}{2}.$$

Ainsi, il est nécessaire et suffisant de lancer au moins 4 dés pour obtenir au moins un 6 avec probabilité supérieur ou égale à $\frac{1}{2}$.

Exercice 2 On sait qu'il existe une telle probabilité si et seulement si

— $\forall k \in [\![1, 2n]\!]$, $ak + b \geqslant 0$;

— $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (ak + b) = 1$;

— $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (ak + b) = \frac{1}{4}$.

Or

$$\sum_{k=1}^{n} (ak + b) = a \sum_{k=1}^{n} k + b \sum_{k=1}^{n} 1 = a\frac{n(n+1)}{2} + bn.$$

De même,

$$\sum_{k=1}^{2n} (ak + b) = an(2n+1) + 2bn.$$

On commence donc par résoudre en a, b le système

$$\begin{cases} a\frac{n(n+1)}{2} + bn &= \frac{1}{4} \\ an(2n+1) + 2bn &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2n(n+1)a + 4nb &= 1 \\ n(2n+1)a + 2nb &= 1 \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -2n^2 a &= -1 \\ an(2n+1) + 2bn &= 1 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow 2nL_2 + (2n+1)L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -2n^2 a &= -1 \\ 4n^2 b &= -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a &= \frac{1}{2n^2} \\ b &= \frac{-1}{4n^2} \end{cases}$$

Remarquons que si $1 \leqslant k \leqslant 2n$,
$$\frac{k}{2n^2} - \frac{1}{4n^2} = \frac{2k-1}{4n^2} \geqslant 0.$$
Ainsi, il existe bien une telle probabilité si et seulement si $a = \dfrac{1}{2n^2}$ et $b = -\dfrac{1}{4n^2}$.

Exercice 3 On suppose bien entendu qu'il existe un e.p.f. (Ω, P) modélisant cette expérience. On note T l'événement « un trésor est placé » et, si $1 \leqslant i \leqslant n$, C_i l'événement « le coffre $n^{\text{o}}\, i$ contient le trésor ».

On modélise l'énoncé comme suit (voir tout de suite la remarque à la fin de l'exercice) :

— $P(T) = p$;

— si $1 \leqslant i \leqslant n$, $P_T(C_i) = \dfrac{1}{n}$ et $P_{\bar{T}}(C_i) = 0$;

— si $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, $P_T(C_i \cap C_j) = 0$.

1) Comme $(T, \bar{T})$ est un s.c.e, par la formule des probabilités totales,
$$P(C_i) = P(T)P_T(C_i) + P(\bar{T})P_{\bar{T}}(C_i) = \frac{p}{n}.$$

2) On veut déterminer
$$P_{\bar{C}_1\cap\cdots\cap\bar{C}_{n-1}}(C_n) = \frac{P(\bar{C}_1 \cap \cdots \cap \bar{C}_{n-1} \cap C_n)}{P(\bar{C}_1 \cap \cdots \cap \bar{C}_{n-1})}.$$
Tout d'abord,
$$P(\bar{C}_1 \cap \cdots \cap \bar{C}_{n-1}) = 1 - P(C_1 \cup \cdots \cup C_{n-1}).$$
par la formule des probabilités totales,
$$P(C_1 \cup \cdots \cup C_{n-1}) = P(T)P_T(C_1 \cup \cdots \cup C_{n-1}) + P(\bar{T})P_{\bar{T}}(C_1 \cup \cdots \cup C_{n-1}).$$
Comme pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $P_{\bar{T}}(C_i) = 0$, on a par la formule du crible :
$$P_{\bar{T}}(C_1 \cup \cdots \cup C_{n-1}) = 0.$$
De plus, comme pour tout $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, $P_T(C_i \cap C_j) = 0$, on a par la formule du crible :
$$P_T(C_1 \cup \cdots \cup C_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} P_T(C_i) = \frac{n-1}{n}.$$
On obtient donc
$$P(\bar{C}_1 \cap \cdots \cap \bar{C}_{n-1}) = 1 - p\frac{n-1}{n}.$$
De même,
$$P(\bar{C}_1 \cap \cdots \cap \bar{C}_{n-1} \cap C_n) = P(T)P_T(\bar{C}_1 \cap \cdots \cap \bar{C}_{n-1} \cap C_n) + P(\bar{T})P_{\bar{T}}(\bar{C}_1 \cap \cdots \cap \bar{C}_{n-1} \cap C_n).$$
Comme $\bar{C}_1 \cap \cdots \cap \bar{C}_{n-1} \cap C_n \subset C_n$ et comme $P_{\bar{T}}(C_n) = 0$, on a
$$P_{\bar{T}}(\bar{C}_1 \cap \cdots \cap \bar{C}_{n-1} \cap C_n) = 0.$$
Remarquons que
$$P_T(C_n) = P_T(C_n \cap (C_1 \cup \cdots \cup C_{n-1})) + P_T(C_n \cap \overline{(C_1 \cup \cdots \cup C_{n-1})})$$
Or
$$P_T(C_n \cap (C_1 \cup \cdots \cup C_{n-1})) = P_T((C_n \cap C_1) \cup \cdots \cup (C_n \cap C_{n-1})).$$
Comme pour tout $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $P_T(C_n \cap C_i) = 0$, on a immédiatement
$$P_T(C_n \cap (C_1 \cup \cdots \cup C_{n-1})) = 0.$$
Ainsi,
$$P_T(\bar{C}_1 \cap \cdots \cap \bar{C}_{n-1} \cap C_n) = P_T(C_n \cap \overline{(C_1 \cup \cdots \cup C_{n-1})}) = P_T(C_n) = \frac{1}{n}$$
On obtient donc
$$P_{\bar{C}_1\cap\cdots\cap\bar{C}_{n-1}}(C_n) = \frac{\frac{p}{n}}{1 - p\frac{n-1}{n}} \frac{p}{p + n(1-p)}.$$

Remarque : il est plus naturel pour un étudiant « débutant » en probas de modéliser l'énoncé par $T = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_n$. C'est tout à fait raisonnable... mais abusif quand on travaille dans les règles de l'art en probabilités. En effet, on s'abstient le plus possible de mettre des hypothèses sur l'univers manipulé : toute la modélisation se fait sur des probabilités (souvent, sur des lois de variables aléatoires et sur des données de conditionnement et/ou d'indépendance). Avec l'hypothèse $T = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_n$, les calculs se mènent bien plus aisément !

Remarque : Si on écrit la réponse comme $\dfrac{\frac{p}{n}}{1-p+\frac{p}{n}}$, on l'interprète bien comme le rapport entre

— la fréquence des expériences où le trésor est placé dans le coffre $n^{\text{o}}\, n$;

— la fréquence des expériences où le trésor est placé dans le coffre $n^{\text{o}}\, n$ ou n'est pas placé du tout.

Exercice 4 Soit (Ω, P) un e.p.f. modélisant cette expérience. On considère les deux événements suivants :

— T : «on tire un dé pipé» ;

— S : «on lance un six».

On modélise l'énoncé comme suit :

— $P(T) = p$;

— $P_T(S) = \dfrac{1}{2}$;

— $P_{\bar{T}}(S) = \dfrac{1}{6}$.

Nous voulons déterminer $P_S(T)$. Par la formule de Bayes :

$$P_S(T) = P_T(S)\frac{P(T)}{P(S)} = \frac{p}{2P(S)}.$$

Comme $(T, \bar{T})$ est un s.c.e, on peut utiliser dessus la formule des probabilités totales :

$$P(S) = P(T)P_T(S) + P(\bar{T})P_{\bar{T}}(S) = \frac{p}{2} + \frac{1-p}{6}.$$

On obtient donc

$$P_S(T) = \frac{p}{2} \times \frac{1}{\frac{p}{2} + \frac{1-p}{6}} = \frac{3p}{2p+1}.$$

Exercice 5 Soit (Ω, P) un e.p.f. modélisant cette expérience. On définit pour chaque $1 \leqslant k \leqslant N$ l'événement S_k : «on tire un six au k^{e} lancer».

On modélise l'énoncé comme suit : $(S_1, \ldots, S_N)$ est une famille d'événement mutuellement indépendants et tous de probabilité $\dfrac{1}{6}$.

Remarquons que le joueur 1 ne joue qu'aux tours impairs et le joueur 2 ne joue qu'aux tours pairs.

Si $1 \leqslant k \leqslant N$, l'événement «le joueur qui joue au tour k gagne à ce tour» est $G_k = \bar{S}_1 \cap \cdots \cap \bar{S}_{k-1}\bar{S}_k$. Sa probabilité, par indépendance mutuelle des S_i, est

$$P(G_k) = P(\bar{S}_1)\ldots P(\bar{S}_{k-1})P(S_k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\frac{1}{6}.$$

Remarquons aussi que si $1 \leqslant k < \ell \leqslant N$, alors $G_\ell \subset \bar{S}_k$ et $G_k \subset S_k$, donc les événements G_k sont deux à deux disjoints.

Enfin, en notant $p = \left\lfloor \dfrac{N-1}{2} \right\rfloor$ (*i.e.* $N = 2p+1$ ou $N = 2p+2$), le joueur 1 joue aux tours 1 à $2p+1$ et avec $q = \left\lfloor \dfrac{N}{2} \right\rfloor$ (*i.e.* $N = 2q$ ou $N = 2q+1$), alors le joueur 2 joue aux tours 2 à $2q$.

1) L'événement «le joueur 1 gagne» est $J_1^N = \bigcup_{k=0}^{p} G_{2k+1}$. On a une union disjointe, donc sa probabilité est

$$P(J_1^N) = \sum_{k=0}^{p} P(G_{2k+1}) = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{p}\left(\frac{5}{6}\right)^{2k} = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{p}\left(\frac{25}{36}\right)^{k}.$$

On reconnaît bien entendu une sommation géométrique et

$$P(J_1^N) = \frac{1}{6}\frac{1-\left(\frac{25}{36}\right)^{p+1}}{1-\frac{25}{36}} = \frac{1}{11}\left(6-6\left(\frac{25}{36}\right)^{p+1}\right).$$

L'événement «le joueur 2 gagne» est $J_2^N = \bigcup_{k=1}^{q} G_{2k}$. On a une union disjointe, donc sa probabilité est

$$P(J_2^N) = \sum_{k=1}^{q} P(G_{2k}) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{q}\left(\frac{5}{6}\right)^{2k-1} = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{q}\left(\frac{25}{36}\right)^{k} = \frac{5}{36}\sum_{k=0}^{q-1}\left(\frac{25}{36}\right)^{k}.$$

On reconnaît bien entendu une sommation géométrique et

$$P(J_2^N) = \frac{5}{36}\frac{1-\left(\frac{25}{36}\right)^{q}}{1-\frac{25}{36}} = \frac{1}{11}\left(5-5\left(\frac{25}{36}\right)^{q}\right).$$

2) L'événement «personne ne gagne» est $E^N = \bar{S}_1 \cap \cdots \cap \bar{S}_N$. On peut aussi remarquer que c'est $\overline{J_1^N \cup J_2^N}$, le montrer par le calcul est quelque peu fastidieux. Par indépendance mutuelle des S_i, sa probabilité est

$$P(E^N) = \left(\frac{5}{6}\right)^N.$$

3) On a immédiatement
- $P(J_1^N) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{6}{11}$;
- $P(J_2^N) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{5}{11}$;
- $P(E^N) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.

Remarque : l'année prochaine, vous serez en mesure de modéliser une infinité de tirages (c'est-à-dire que l'on attend que le jeu s'arrête). Vous interprèterez ces limite respectivement comme suit :
- le joueur 1 gagne avec probabilité $\frac{6}{11}$;
- le joueur 2 gagne avec probabilité $\frac{5}{11}$;
- le jeu s'arrête avec probabilité 1 (*i.e.* presque sûrement).

Exercice 6 Soit (Ω, P) un e.p.f. modélisant cette expérience. Si $1 \leqslant i \leqslant N$, on note S_i l'événement «on lance un six au i^{e} lancé» et B l'événement «on tire une boule blanche». On modélise l'expérience comme suit :
- les événements $S_1, \ldots, S_N$ sont mutuellement indépendants et tous de probabilité $\frac{1}{6}$;
- pour chaque $1 \leqslant i \leqslant n$, $P_{\bar{S}_1\cap\cdots\cap S_{i-1}\cap S_i}(B^N) = \frac{1}{i}$.

Pour la dernière probabilité, on pourra le justifier que l'événement

$$T_i = \bar{S}_1 \cap \cdots \cap S_{i-1} \cap S_i$$

est l'événement «on tire le premier six au i^{e} lancer» et en disant que, si T_i est réalisé, alors on a rajouté $i-1$ boules rouges à l'urne, qui contient donc i boules dont une seule blanche.

Remarquons que si $1 \leqslant k < \ell \leqslant N$, alors $T_k \subset S_k$ et $T_\ell \subset \bar{S}_k$, donc les T_i sont deux à deux disjoints. On peut aussi montrer que

$$\bigcup_{i=1}^{N} T_i = \bigcup_{i=1}^{n} S_i.$$

On peut le faire (de manière quelque peu délicate) par le calcul, ou bien le montrer par double inclusion. Pour l'inclusion de droite à gauche, il suffit d'introduire le plus petit k tel que $\omega \in S_k$.

Ainsi, avec $J^N = \overline{\bigcup_{i=1}^N S_i} = \bigcap_{i=1}^N \bar{S}_i$ (c'est l'événement : «on ne tire jamais de six»), $(T_1, \dots, T_N, J)$ est un système complet d'événements.

Remarque : comme souvent, la modélisation est plus aisée en introduisant des variables aléatoires. On peut par exemple prendre T la variable aléatoire qui vaut i si le premier six est tiré au i^{e} lancer et 0 si aucun six n'est tiré.

1) L'événement «s'arrêter au bout de N lancers au plus» est $\bigcup_{i=1}^N S_i = \bar{J}^N$, sa probabilité est, par indépendance mutuelle des S_i,

$$P(\bar{J}^N) = 1 - P(J) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^N \bar{S}_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^N P(S_i) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

2) On veut déterminer

$$P(B^N \cap \bar{J}^N) = P\left(\bigcup_{i=1}^N (B^N \cap T_i)\right).$$

Comme les T_i sont deux à deux disjoints, les $B^N \cap T_i$ le sont aussi. On a donc (on utilise ensuite la formule des probabilités composées) :

$$P(B^N \cap \bar{J}) = \sum_{i=1}^N P(B^N \cap T_i) = \sum_{i=1}^N P(T_i) P_{T_i}(B^N).$$

Or si $1 \leqslant i \leqslant N$, par indépendance mutuelle de $S_1, \dots, S_N$,

$$P(T_i) = \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \frac{1}{6}.$$

On a donc, par un décalage d'indice,

$$P(B^N \cap \bar{J}^N) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^N \frac{1}{i} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}$$

3) On a donc, par un décalage d'indice,

$$P(B^N \cap \bar{J}^N) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^N \frac{1}{i} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{i+1} \left(\frac{5}{6}\right)^{i} = \frac{1}{5} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{i+1} \left(\frac{5}{6}\right)^{i+1}$$

Si $0 \leqslant i \leqslant N-1$, on a

$$\frac{1}{i+1} \left(\frac{5}{6}\right)^{i+1} = \left[\frac{q^{i+1}}{i+1}\right]_{q=0}^{5/6} = \int_0^{5/6} q^i \,\mathrm{d}q.$$

On a donc

$$P(B^N \cap \bar{J}^N) = \frac{1}{5} \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^{5/6} q^i \,\mathrm{d}q = \frac{1}{5} \int_0^{5/6} \sum_{i=0}^{N-1} q^i \,\mathrm{d}q.$$

On reconnaît bien entendu une sommation géométrique (de raison différente de 1) et on a donc

$$P(B^N \cap \bar{J}^N) = \frac{1}{5} \int_0^{5/6} \frac{1 - q^N}{1 - q} \,\mathrm{d}q = \frac{1}{5} \int_0^{5/6} \frac{1}{1 - q} \,\mathrm{d}q - \frac{1}{5} \int_0^{5/6} \frac{q^N}{1 - q} \,\mathrm{d}q$$

Or

$$\int_0^{5/6} \frac{1}{1 - q} \,\mathrm{d}q = [-\ln(1 - q)]_{q=0}^{5/6} = \ln(6).$$

De plus, si $0 \leqslant q \leqslant \frac{5}{6}$, alors $1 - q \geqslant \frac{1}{6} > 0$ et $0 \leqslant q^N \leqslant \left(\frac{5}{6}\right)^N$. On a donc, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant \int_0^{5/6} \frac{q^N}{1 - q} \,\mathrm{d}q \leqslant 6 \int_0^{5/6} \left(\frac{5}{6}\right)^N \mathrm{d}q \leqslant 5 \left(\frac{5}{6}\right)^N.$$

Par encadrement, on a donc
$$\int_0^{5/6} \frac{q^N}{1-q}\,\mathrm{d}q \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$
et donc
$$P(B^N \cap \bar{J}^N) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{\ln(6)}{5}.$$

Remarque : l'année prochaine, vous pourrez modéliser directement le faire de procéder à une infinité de lancers de dés. Vous interpréterez alors comme suit les résultats obtenus ici :
— le jeu s'arrête presque sûrement ;
— la probabilité de tirer une boule blanche est égale à $\frac{\ln(6)}{5}$.

Exercice 7 Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini modélisant cette expérience. On ntoe QF l'événement «obtenir une quinte-flush» et T l'événement «l'adversaire a triché».

On montre aisément qu'en tirant 5 cartes sans remise dans un jeu de 52 cartes, la main tirée suit une loi uniforme sur les 5-arrangements de ces 52 cartes.

En effet, si on note $(C_1, \ldots, C_5)$ les 5 cartes tirées et $(c_1, \ldots, c_5)$ 5 cartes distinctes deux à deux, on a par modélisation
$$P(C_1 = c_1) = \frac{1}{52},$$
puis par la formule des probabilités composées et par modélisation,
$$P(C_1 = c_1, C_2 = c_2) = P(C_1 = c_1)P_{C_1=c_1}(C_2 = c_2) = \frac{1}{52} \times \frac{1}{51} = \frac{1}{52 \times 51}.$$
De même, par récurrence (ou par la formule des probabilités composées généralisée) :
$$\begin{aligned}P(C_1 = c_1, C_2 = c_2, C_3 = c_3, C_4 = c_4, C_5 = c_5) &= P(C_1 = c_1)P_{C_1=c_1}(C_2 = c_2)P_{[C_1=c_1]\cap[C_2=c_2]}(C_3 = c_3)\\ &\times P_{[C_1=c_1]\cap[C_2=c_2]\cap[C_3=c_3]}(C_4 = c_4)P_{[C_1=c_1]\cap[C_2=c_2]\cap[C_3=c_3]\cap[C_4=c_4]}(C_5 = c_5)\\ &= \frac{1}{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}.\end{aligned}$$
Il suffit ensuite de voir qu'une main tirée $\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$ correspond à 5! quintuplets, qui ont toutes même probabilités.

1) Comme la main tirée suit une loi uniforme, il suffit de dénombrer le nombre de quintes flush. Il y a $\binom{52}{5}$ mains distinctes.
Il y a 40 quintes flush possibles : pour chacune des 4 couleurs, il y a la quinte-flush commençant par 1, 2... 10. Alors
$$P(QF) = \frac{40}{\binom{52}{5}} = \frac{40 * 120}{52 * 51 * 50 * 49 * 48} = \frac{1}{64\ 974} \approx 1.5 * 10^{-5}.$$

2) Notons p_1 la probabilité trouvée précédemment. On modélise l'énoncé par : $P_T(QF) = \frac{9}{10}$, $P_{\bar{T}}(QF) = p_1$ et $P(T) = \frac{9}{10}$. On a Par la formule de Bayes et la formule des probabilités totales sur le sce $(T, \bar{T})$:
$$P_{QF}(T) = P_T(QF)\frac{P(T)}{P(QF)} = \frac{P(T)P_T(QF)}{P(T)P_T(QF) + P(\bar{T})P_{\bar{T}}(QF)}.$$
Il suffit ensuite de réaliser l'application numérique

Exercice 8 Cet exercice est à la limite du programme et n'est pas si simple à modéliser. Considérons un espace probabilisé fini (Ω, P) modélisant l'expérience jusqu'à la génération $n + 1$, *i.e.* avec lequel on pourra calculer $u_0, \ldots, u_n$.

1) L'événement «il n'y a plus de descendance à la génération 1» est l'événement «la fleur originelle n'a pas de descendant» et est donc de probabilité $u_0 = 1 - p$.

2) On considère les deux descendants de la première fleur. Notons O l'événement «la fleur originelle a deux descendantes», qui est donc de probabilité p. Notons F_1^n l'événement «la première descendante de la fleur originelle n'a plus de descendance à la $n+1^{\text{e}}$ génération» (*idem* pour F_2^n».

On modélise comme suit : $P(\bar{O} \cap (F_1^n \cup F_2^n)) = 0$; conditionnellement à O, F_1^n et F_2^n sont indépendantes et de probabilité u_{n-1}. Notons aussi E_n l'événement «la descendance est éteinte à la génération n».

On peut alors utiliser la formule des probabilités totales sur le sce $(O, \bar{O})$:

$$\begin{aligned} u_n &= P(E_n) \\ &= P(\bar{O})P_{\bar{O}}(E_n) + P(O)P_O(E_n) \\ &= P(\bar{O}) \times 1 + P(O)P_O(F_1^n \cap F_2^n) \\ &= 1 - p + +pu_{n-1}^2 P_O(F_1^n)P_O(F_2^n) \\ &= 1 - p + pu_{n-1}^2. \end{aligned}$$

3) On pourrait étudier la suite (u_n) comme vu dans le cours sur les suites. La modélisation probabiliste nous autorise ici à accepter deux propriétés :
— (u_n) est à valeurs dans $[0, 1]$;
— (u_n) est croissante.
Pour le deuxième point, il suffit en effet de dire que s'il n'y a pas de descendance à la génération $n+1$, il n'y en a pas non plus à la génération $n+2$. Il est toutefois difficile de justifier rigoureusement avec les outils de votre programme.

On peut aussi remarquer que l'on peut poser $u_{-1} = 0$: on a bien $u_0 = 1 - p = 1 - p + pu_{-1}^2$.

Ainsi, la suite (u_n) converge. Comme $f : x \mapsto (1-p) + px^2$ est continue sur $[0, 1]$ (et prend ses valeurs dans $[0, 1]$), (u_n) converge vers un point fixe de f.

Si $x \in [0, 1]$, on résout donc l'équation

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow 1 - p + px^2 = x \\ &\Leftrightarrow px^2 - x + 1 - p = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(px + p - 1) = 0. \end{aligned}$$

Cette équation a donc deux solutions sur $\mathbb{R}$: 1 et $\dfrac{1-p}{p}$. Remarquons que

$$\frac{1-p}{p} \leqslant 1 \Leftrightarrow 1 - p \leqslant p \Leftrightarrow p \geqslant \frac{1}{2}.$$

Comme $u_{-1} = 0$, (u_n) converge vers le plus petit point fixe de f supérieur ou égal à 0. Ainsi,
— si $p > \dfrac{1}{2}$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1-p}{p} < 1$;
— si $p \leqslant \dfrac{1}{2}$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
L'année prochaine, vous pourrez interpréter ces résultats comme suit :
— si $p > \dfrac{1}{2}$, la probabilité qu'il y ait extinction est de $\dfrac{1-p}{p} < 1$;
— si $p \leqslant \dfrac{1}{2}$, il y a presque-sûrement extinction.
On remarque que ces résultats sont assez intuitifs, sauf pour le cas $p = \dfrac{1}{2}$:
— si $p > \dfrac{1}{2}$, chaque fleur a en moyenne strictement plus de 1 descendant ;
— si $p < \dfrac{1}{2}$, chaque fleur a en moyenne strictement moins de 1 descendant.

Exercice 9 C'est une simple réécriture de ce que l'on appelle le «paradoxe de Monty Hall» (nous vous laissons faire vos propres recherches là dessus, internet regorge de ressources).

On note P : «on avait choisi la bonne porte au début», G : «gagner (aller au paradis)». On utilise à chaque fois la formule des probabilités totales sur le s.c.e. $(P, \bar{P})$. s

1) Dans la stratégie où l'on ne change pas :

$$P(G) = P_P(G)P(P) + P_{\bar{P}}(G)P(\bar{P}) = 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Ou mieux : $P = G$

Dans la stratégie où l'on change (c'est forcément 1 moins la première) :

$$P(G) = P_P(G)P(P) + P_{\bar{P}}(G)P(\bar{P}) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Ou mieux : $P = \bar{G}$.

2) Il faut considérer que si Saint-Pierre ouvre la porte du paradis, on doit quand même choisir une des deux portes restantes. On note E : Saint Pierre a ouvert une porte vers l'enfer. E et P ne sont pas (forcément) indépendants. On a

$$P(E) = P_P(E)P(P) + P_{\bar{P}}(E)P(\bar{P}) = 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Dans la stratégie où l'on ne change pas :

$$P_E(G) = P_E(P) = P_P(E) \times \frac{P(P)}{P(E)} = 1 \times \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Dans la stratégie où l'on change (c'est forcément 1 moins la première) :

$$P_E(G) = P_E(\bar{P}) = P_{\bar{P}}(E) \times \frac{P(\bar{P})}{P(E)} = \frac{1}{2} \times \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.$$

3) Si Satan le propose, c'est que la bonne porte a été choisie, il faut la garder !

4) On note S : Satan propose de changer. S et P ne sont pas (forcément) indépendants. On a

$$P(S) = P_P(S)P(P) + P_{\bar{P}}(S)P(\bar{P}) = \frac{p_2 + 2p_1}{3}.$$

Dans la stratégie où l'on ne change pas :

$$P_S(G) = P_S(P) = P_P(S)\frac{P(P)}{P(S)} = p_2 \times \frac{\frac{1}{3}}{\frac{p_2 + 2p_1}{3}} = \frac{p_2}{p_2 + 2p_1}.$$

Dans la stratégie où l'on change (c'est forcément 1 moins la première) :

$$P_S(G) = P_S(\bar{P}) = P_{\bar{P}}(S)\frac{P(\bar{P})}{P(S)} = p_1 \times \frac{\frac{2}{3}}{\frac{p_2 + 2p_1}{3}} = \frac{2p_1}{p_2 + 2p_1}.$$

Exercice 10

1) Pour calculer la probabilité de tirer une permutation : utiliser la formule des probabilités composées.

2) $B = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}$.

3) $\overline{B} = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Card}(\overline{B}) &= \mathrm{Card}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathrm{Card}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} (n-k)! \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)! \\
&= n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}
\end{aligned}$$

donc

$$P(\overline{B}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$$

donc

$$P(B) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k}}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{k!} \to \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

4) Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange : $\left| P(B) - \frac{1}{\mathrm{e}} \right| \leqslant \frac{1}{40!}$.

Exercice 11 On note Y_n le déplacement à l'instant n. Y_n suit la loi uniforme sur $-1, 1$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ sont mutuellement indépendantes.

On a $X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$, donc $EX_n = 0$ et $V(X_n) = V\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(Y_k)$ par indépendance mutuelle. Mais les Y_i suivent la même loi donc $V(X_n) = nV(Y_1)$. Mais $Y_1^2 = 1$ et $E(Y_1) = 0$ donc $V(X_n) = n$.

On pouvait aussi poser $Y_n' = \frac{1}{2}(Y_n + 1)$ qui vaut 1 si $Y_n = 1$ et 0 si $Y_n = -1$. Ainsi, Y_n' suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et $Y_1', \dots, Y_n'$ sont mutuellement indépendantes. Avec $X_n' = \sum_{k=1}^{n} Y_k' \hookrightarrow \mathscr{B}(n, \frac{1}{2})$, on a donc $X_n = 2X_n' - n$ et l'on retrouve les résultats précédents.

Enfin, soit $-n \leqslant k \leqslant n$. On a donc avec $p = \frac{k+n}{2}$

$$P(X_n = k) = P(X_n' = \frac{k+n}{2}) = \begin{cases} \binom{n}{p} \frac{1}{2^n} & \text{si } k+n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Exercice 12

1) On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[X\right] &= \sum_{k=1}^{n} kP(X=k)\\
&= \sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{k}1)P(X=k)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}P(X=k)\\
&= \sum_{i=1}^{n}P(X\geqslant i)\\
&= \sum_{k=1}^{n}P(X\geqslant k).
\end{aligned}$$

2) Notons $J_1,\dots,J_N$ les N numéros tirés. On suppose que $J_1,\dots,J_N$ sont mutuellement indépendantes et suivent chacune la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Alors X est à valeurs dans $[\![1,n]\!]$ et, si $1\leqslant k\leqslant n$, par indépendance mutuelle des J_i,

$$P(X\leq k)=P\left(\bigcap_{i=1}^{N}[J_i\leqslant k]\right)=\prod_{i=1}^{N}P(J_i\leqslant k)=\left(\frac{k}{n}\right)^N.$$

Remarquons que cette formule est valide pour $k=0$. Ainsi,

$$P(X=k)=P(X\leq k)-P(X\leq k-1)=\left(\frac{k}{n}\right)^N-\left(\frac{k-1}{n}\right)^N.$$

3) En utilisant la première question :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[X\right] &= \sum_{k=1}^{n}P(X\geqslant k)\\
&= \sum_{k=1}^{n}1-P(X\leqslant k-1)\\
&= n-\sum_{k=1}^{n}P(X\leqslant k-1)\\
&= n-\sum_{k=0}^{n-1}P(X\leqslant k)\\
&= n-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^N.
\end{aligned}$$

4) On reconnaît une somme de Riemann. Comme $x\mapsto x^N$ est continue sur $[0,1]$, par le théorème de convergence des sommes de Riemann,

$$\frac{\mathbb{E}(X)}{n}=1-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^N\xrightarrow[n\to+\infty]{}1-\int_0^1 t^N\mathrm{d}t=1-\frac{1}{N+1}=\frac{N}{N+1}.$$

Ainsi, $\mathrm{E}\left[X\right]\underset{n\to+\infty,N\text{ fixé}}{\sim}\dfrac{nN}{N+1}$.

5) On a immédiatement $\mathbb{E}(X)\xrightarrow[N\to+\infty,n\text{ fixé}]{}n$.

C'est intuitif : plus on se donne d'urnes dans lesquelles piocher, plus le plus grand numéro tiré sera proche du maximum possible n.

Exercice 13 On note N la variable aléatoire modélisant le numéro tiré : N suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

Si $1 \leqslant i \leqslant n$, conditionnellement à $[N = i]$, X suit la loi binomiale de paramètres i et $\dfrac{1}{6}$.

Par la formule des probabilités totales, si $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{i=1}^{n} P(N = i) P_{N=i}(X = k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=k}^{n} P_{N=i}(X = k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-k}. \end{aligned}$$

Ensuite (on contourne l'absence de la formule de l'espérance totale),

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k P(X = k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} k \left(\frac{1}{6}\right)^{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-k} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sum_{k=1}^{i} k \binom{i}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-k}}_{(*)}. \end{aligned}$$

Dans la somme $(*)$, on reconnaît l'espérance d'une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres i et $\dfrac{1}{6}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{6} \\ &= \frac{1}{6n} \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n+1}{12}. \end{aligned}$$

On fait de même pour calculer $\mathrm{E}(X^2)$ et l'on obtient la variance.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(X^2\right) &= \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X = k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} k^2 \left(\frac{1}{6}\right)^{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-k} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sum_{k=1}^{i} k^2 \binom{i}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-k}}_{(*)}. \end{aligned}$$

Dans la somme $(*)$, on reconnaît l'espérance du carré d'une variable aléatoire Y_i de loi binomiale de paramètres i et $\dfrac{1}{6}$, qui vaut

$$\mathrm{E}\left[Y_i^2\right] = V(Y_i) + \mathrm{E}\left[Y_i\right]^2 = \frac{5i}{36} + \frac{i^2}{36}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(X^2\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{5i+i^2}{36}\\
&= \frac{1}{36n}\left(\frac{5n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\
&= \frac{1}{36}\times\frac{15(n+1)+(n+1)(2n+1)}{6}.\\
&= \frac{1}{36}\times\frac{(n+1)(2n+16)}{6}\\
&= \frac{(n+1)(n+8)}{108}.
\end{aligned}$$

On a finalement

$$V(X) = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \mathrm{E}\left[X\right]^2 = \frac{(n+1)(n+8)}{108} - \frac{(n+1)^2}{144} = \frac{n+1}{36}\times\left(\frac{n+8}{3}-\frac{n+1}{4}\right) = \frac{(n+1)(n+29)}{432}.$$

Exercice 14

1) **a)** $[\![1;N]\!]$.

b) $P(T_n = 1) = N\times\dfrac{1}{N^n}$.
$P(T_n = n) = 0$ si $n > N$. Sinon,

$$P(T_n = n) = P(T_n = n\cap T_{n-1} = n-1) = P(T_n = n|T_{n-1} = n-1)P(T_{n-1} = n-1) = \frac{N-(n-1)}{N}P(T_{n-1}$$

et par récurrence, $P(T_n = n) = \dfrac{(N-1)!}{(N-n)!}.\dfrac{1}{N^{n-1}}$.
Pour $P(T_n = 2)$, le faire par dénombrement : choisir 2 nombres distincts puis les positions des deux nombres. On trouve $P(T_n = 2) = \dbinom{N}{2}.(2^n-2)$.

2) Appliquer la formule des probabilités totales en conditionnant par rapport à T_n. On trouve $P(T_{n+1} = k) = \dfrac{k}{N}P(T_n = k) + \dfrac{N-(k-1)}{N}P(T_n = k-1)$.

3) **a)** Injecter dans la relation précédente.

b) $E(T_n) = Q_n'(1)$, et dériver la relation précédente. On trouve $E(T_{n+1}) = 1+(1-\dfrac{1}{N})E(T_n)$. C'est une suite arithmético-géométrique. Avec $E(T_1) = 1$, on arrive à $E(T_n) - N = (1-\dfrac{1}{N})^{n-1}(1-N) = -N(1-\dfrac{1}{N})^n$, donc $E(T_n) = N(1-(1-\dfrac{1}{N})^n)$.

c) $\dfrac{E(T_N)}{N} = 1-(1-\dfrac{1}{N})^N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Exercice 15

1) (X,Y) est à valeurs dans $[\![1,n]\!]^2$. X suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.
Pour $1\leq k, i\leq k$, par la formule des probabilités composées,

$$P(X=k, Y=i) = P_{X=k}(Y=i)P(X=k) = \frac{1}{n}P_{X=k}(Y=i)$$

On modélise directement :

— si $i > k$, $P(X=k, Y=i) = 0$;
— si $i \leqslant k$, $P(X=k, Y=i) = \dfrac{1}{nk}$.

2) Y est à valeurs dans $[\![1,n]\!]$. Soit $1 \leq i \leq n$. $(X=k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales,

$$\boxed{P(Y=i) = \sum_{k=1}^{n} P_{X=k}(Y=i)P(X=k) = \frac{1}{n}\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{k}.}$$

Exercice 16 Une première démonstration : on sait que l'on peut construire un e.p.f. (Ω', P') sur lequel on peut définir des v.a. $X_1, \ldots, X_{n+m}$ i.i.d. suivant chacune la loi de Bernoulli de paramètre p.

Avec $X' = X_1 + \cdots + X_n$ et $Y' = X_{n+1} + \cdots + X_{n+m}$, alors X' et Y' sont indépendantes, $X' \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ et $Y' \hookrightarrow \mathscr{B}(m,p)$. Ainsi, (X,Y) et (X',Y') ont les mêmes lois jointes (les détailler, au besoin, si vous n'êtes pas convaincus). Comme la loi de $X+Y$ ne dépend que de la loi jointe de (X,Y), alors $X+Y$ et $X'+Y'$ ont la même loi. Or $X'+Y' = X_1 + \cdots + X_{n+m} \hookrightarrow \mathscr{B}(n+m,p)$. Ainsi, $X+Y$ suit la loi binomiale de paramètres $n+m$ et p.

Une deuxième démonstration : on peut aussi le retrouver par le calcul. $X+Y$ est à valeurs dans $[\![0, n+m]\!]$. Comme $[X=0], \ldots, [X=n]$ forme un système complet d'événements, par la formule des probabilités totales, si $0 \leqslant k \leqslant n+m$,

$$P(X+Y=k) = \sum_{\ell=0}^{n} P(X=\ell)P_{X=\ell}(X+Y=k) = \sum_{\ell=0}^{n} P(X=\ell)P_{X=\ell}(Y=k-\ell).$$

Par indépendance de X et de Y, on obtient donc

$$\begin{aligned}
P(X+Y=k) &= \sum_{\ell=0}^{n} P(X=\ell)P(Y=k-\ell) \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} p^{\ell}(1-p)^{n-\ell}\binom{m}{k-\ell}p^{k-\ell}(1-p)^{m-k+\ell} \\
&= p^k(1-p)^{n+m-k}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}\binom{m}{k-\ell}.
\end{aligned}$$

Par la form de Chu-Vandermonde, on a bien

$$P(X+Y=k) = \binom{n+m}{k}p^k(1-p)^{n+m-k},$$

donc $X+Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n+m,p)$.

Exercice 17

1) Par linéarité de l'espérance, $\mathrm{E}[\mu_n] = m$, par indépendance mutuelle des X_i, $V(\mu_n) = \dfrac{\sigma^2}{n}$.

2) Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev sur μ_n, avec $\epsilon = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n\alpha}}$ on obtient $I_X = [\mu_n - \varepsilon, \mu_n + \varepsilon]$.

3) Majorer σ^2 par $\dfrac{1}{4}$, on obtient $\varepsilon \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n\alpha}}$.

Exercice 18

1) Par indépendance mutuelle des X_i, $\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(\prod_{k=1}^{n} X_k) = \mathbb{E}(X_1)^n = (p-(1-p))^n = (2p-1)^n$
Comme Y_n est à valeurs dans $\{-1,1\}$, $Y_n^2 = 1$, donc $\mathbb{E}(Y_n^2) = 1$ et $V(Y_n) = 1 - (2p-1)^{2n}$

2) **a)** Loi de Y_2 : on utilise la FPT sur le sce $[X_1 = 1], [X_1 = -1]$:

$$\begin{aligned}
P(Y_2 = 1) &= P(X_1 = 1)P_{X_1=1}(X_1X_2 = 1) + P(X_1 = -1)P_{X_1=-1}(X_1X_2 = 1) \\
&= P(X_1 = 1)P_{X_1=1}(X_2 = 1) + P(X_1 = -1)P_{X_1=-1}(X_2 = -1) \\
&= P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) + P(X_1 = -1)P(X_2 = -1) \text{ car } X_1, X_2 \text{ ind.} \\
&= p^2 + (1-p)^2 = 2p^2 - 2p + 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, $P(Y_2=-1)=1-P(Y_2=1)=2p-2p^2=2p(1-p)$.
Loi de Y_3 : on utilise la FPT sur le sce $[Y_2=1],[Y_2=-1]$:

$$\begin{aligned}
P(Y_3=1) &= P(Y_2=1)P_{Y_2=1}(Y_2X_3=1)+P(Y_2=-1)P_{Y_2=-1}(Y_2X_3=1)\\
&= P(Y_2=1)P_{Y_2=1}(X_3=1)+P(Y_2=-1)P_{Y_2=-1}(X_3=-1)\\
&= P(Y_2=1)P(X_3=1)+P(Y_2=-1)P(X_3=-1) \text{ car } Y_2, X_3 \text{ ind.}\\
&= p(2p^2-2p+1)+2p(1-p)^2 = 4p^3-6p^2+3p
\end{aligned}$$

Ainsi, $P(Y_3=-1)=3p^2(1-p)+(1-p)^3$

b) De la même manière, en utilisant la FPT sur le sce $[Y_n=1],[Y_n=-1]$:

$$P(Y_{n+1}=1)=pp_n+(1-p)(1-p_n)=1-p+(2p-1)p_n.$$

C'est une relation de récurrence arithmético-géométrique, de raison $2p-1\neq 1$. On résout l'équation $a=1-p+a(2p-1) \iff a=1/2$.
D'où pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$p_n=1/2+(2p-1)^{n-1}(y_1-1/2)=1/2+(2p-1)^{n-1}(p-1/2)=\frac{1}{2}(1+(2p-1)^n)$$

3) **a)** Soit $n\in\mathbb{N}$. On calcule

$$P(Y_n=1,Y_{n+1}=1)=P(Y_n=1,X_{n+1}=1)=p((1+(2p-1)^n)/2)$$

et

$$P(Y_n=1)P(Y_{n+1}=1)=((1+(2p-1)^n)/2)(1+(2p-1)^{n+1})/2$$

Ainsi, Y_n et Y_{n+1} sont indépendantes pour tout $n\in\mathbb{N}$ si et seulement si pour tout $n\in\mathbb{N}$: $1+(2p-1)^n=0$ ou $p=(1+(2p-1)^{n+1})/2$. Le premier cas équivaut à $[(2p-1)=-1$ et n impair$]$, soit $[n$ impair et $p=0]$. Le deuxième cas équivaut à $(2p-1)^{n+1}=2p-1$ soit $p=1/2$; ou $(2p-1)^n=1$, soit $[p=0$ et n pair$]$ ou $p=1$.

Ainsi, Y_n et Y_{n+1} sont indépendantes pour tout $n\in\mathbb{N}$ si et seulement si $p=\frac{1}{2}$ ou $p=1$ ou $p=0$.

b) On reprend le calcul précédent, mais à n fixé. Ainsi, Y_n et Y_{n+1} sont indépendantes si et seulement si : $1+(2p-1)^n=0$ ou $p=(1+(2p-1)^{n+1})/2$.
— le premier cas équivaut à $(2p-1)=-1$ et n impair, soit n impair et $p=0$;
— le deuxième cas équivaut à $(2p-1)^{n+1}=2p-1$, c'est-à-dire $p=1/2$ ou $(2p-1)^n=1$, c'est-à-dire ($p=0$ et n pair) ou $p=1$.

Ainsi, Y_n et Y_{n+1} sont indépendantes si et seulement si $p=\frac{1}{2}$ ou $p=1$ ou $p=0$.

4) $Cov(Y_n,Y_{n+m})=E(Y_nY_{n+m})-\mathbb{E}(Y_n)\mathbb{E}(Y_{n+m})$
$\mathbb{E}(Y_n)=(2p-1)^n$ et $\mathbb{E}(Y_{n+m})=(2p-1)^{n+m}$
$\mathbb{E}(Y_nY_{n+m})=\mathbb{E}(Y_n^2\prod_{k=n+1}^{n+m}X_k)=(2p-1)^m$
Donc $Cov(Y_n,Y_{n+m})=(2p-1)^m(1-(2p-1)^{2n})$