Devoir de révisions n° 1

Concours commun 2009 des écoles des mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes.
Épreuve spécifique de mathématiques (filière MPSI).

Problème 1.

On rappelle que le nombre $\mathrm{e} = \exp(1) \approx 2,72$, $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \approx 0,61$, $\sqrt{2} \approx 1,41$, $\ln(3) \approx 1,10$.

I – Étude d'une fonction.

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3x\exp(-x^2) - 1 = 3x\mathrm{e}^{-x^2} - 1$.

1) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, ainsi que les limites aux bornes du domaine de définition. Donner le tableau de variations de f. Préciser les branches infinies de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f.

2) Calculer $f''(x)$. Qu'en déduit-on pour le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0 ?

3) Donner l'équation de la tangente en 0. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la tangente au point d'abscisse 0. Quel résultat retrouve-t-on ?

4) Donner l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ de f.

5) **a)** Pourquoi f admet-elle des développements limités en 0 à n'importe quel ordre ?

b) Donner le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 5.

II – Étude d'une équation différentielle.

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Soit E_n l'équation différentielle $xy' - (n - 2x^2)y = n - 2x^2$. Soit H_n l'équation homogène (dite aussi sans second membre) associée à E_n.

6) Résoudre H_n sur $]0, +\infty$ et sur $]-\infty, 0[$.

7) En déduire les solutions de E_n sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

8) Donner toutes les fonctions f définies, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et solutions de E_n sur $\mathbb{R}$. On distinguera les cas $n = 1$ et $n > 2$.

III – Étude de deux suites.

On suppose désormais dans toute la suite du problème que l'entier naturel n est supérieur ou égal à 2. Soit $f_n(x) = 3x^n\mathrm{e}^{-x^2} - 1 = 3x^n\exp(-x^2) - 1$.

9) Quel est le signe de $f_n(0)$, de $f_n(1)$?

10) Étudier les variations de f_n sur l'intervalle $[0,+\infty[$. Donner la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire que f_n s'annule sur $[0,+\infty[$ en deux réel notés u_n et v_n, qui vérifient $u_n < 1 < v_n$.

11) Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$?

12) **a)** Calculer $\exp(-u_n^2) = \mathrm{e}^{-u_n^2}$ en fonction de u_n^n.

b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.

c) Déduire de ce qui précède la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$.

d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente. Soit ℓ sa limite.

13) Soit g_n définie sur $]0,+\infty[$ par : $\forall x > 0,\ g_n(x) = \ln 3 + n\ln x - x^2$.

a) Soit $t > 0$. Montrer que $g_n(t) = 0$ si et seulement si $f_n(t) = 0$.

b) On suppose que : $\ell \neq 1$. Trouver une contradiction en utilisant ce qui précède. Conclusion ?

c) Soit la suite $(w_n)_{n\geqslant 2}$ définie par : $\forall n \geqslant 2,\ w_n = u_n - 1$. Trouver en utilisant un développement limité de $g_n(1+w_n) = g_n(u_n)$ un équivalent simple de w_n.

IV – Étude d'une courbe paramétrée.

Soit $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé. Soit M la courbe paramétrée définie sur $]0,+\infty[$ tel que pour tout t strictement positif, $M(t)$ ait pour coordonnées dans le repère R, $(x(t), y(t))$ avec

$$\begin{cases} x(t) = g_2(t) & = & \ln 3 + 2\ln t - t^2 \\ y(t) & = & t - \dfrac{1}{3}t^3 \end{cases}$$

14) **a)** Étudier les variations de x et y ainsi que leurs limites aux bornes du domaine de définition.

b) Étudier les branches infinies de la courbe M.

c) Étudier la nature du point $M(1)$. Donner un vecteur directeur de la tangente en $M(1)$ à la courbe.

15) Tracer l'allure de la courbe M.

Problème 2.

On notera $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes et $\mathbb{C}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à n, où n est un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On confondra polynôme et fonction polynôme. On notera $\deg(P(X))$ le degré d'un polynôme P.

I – Étude d'un polynôme.

16) Soit $U(X)$ le polynôme de $\mathbb{C}_2[X]$ suivant : $U(X) = X^2 + (1-2i)X - 2i$.

- **a)** Donner les racines carrées de $-3+4i$.
- **b)** Trouver les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $U(X)$.

17) Soit le complexe z, $z = x+iy$ avec x et y réels.

- **a)** Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $U(z)$ en fonction de x et de y.
- **b)** Soit le plan rapporté un repère orthonormé $R = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. (On prendra $\|\overrightarrow{\imath}\| = \|\overrightarrow{\jmath}\| = 1$ cm.)
  - **i)** Soit Γ_1 l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) tels que $U(x+iy)$ est imaginaire pur. Donner la nature de Γ_1, son centre et son excentricité. Tracer Γ_1.
  - **ii)** Soit Γ_2 l'ensemble des points M des points M de coordonnées (x, y) tels que $U(x+iy)$ est réel. Donner sa nature et son centre. Tracer Γ_2 sur le même dessin que Γ_1.

II – Définition d'une application.

Soit n un entier naturel non nul fixé pour toute la suite du problème. Soit $T(X)$ un polynôme fixé de $\mathbb{C}[X]$ de degré n. Soit f l'application définie sur $\mathbb{C}[X]$ qui à tout $P(X)$ de $\mathbb{C}[X]$ associe $Q(X)+XR(X)$ où $Q(X)$ et $R(X)$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $P(X^2)$ par $T(X)$. (On a fonc $P(X^2) = Q(X)T(X)+R(X)$ avec $\deg(R(X)) < \deg(T(X))$). On notera f_n la restriction de f à $\mathbb{C}_n[X]$.

18) Montrer que f est une application linéaire.

19) Montrer que f_n est un endomorphisme de l'espace vectoriel $(\mathbb{C}_n[X], +, \cdot)$.

20) Dans cette question uniquement $n = 2$ et $T(X) = X^2$.

- **a)** Donner la matrice A de f_2 sur la base canonique $(1, X, X^2)$.
- **b)** Calculer A^2. En déduire que f_2 est bijective et donner son application réciproque. En déduire la nature de f_2.

21) Dans cette question uniquement $n = 2$ et $T(X) = (X-1-i)(X+i)$. Donner l'image du polynôme $U(X) = X^2 + (1-2i)X - 2i$ par l'application f.

III – Étude d'un cas particulier.

Soit a un complexe fixé. Dans cette partie uniquement, $n = 3$ et $T(X) = X^3 + X^2 + a$.

22) Montrer que f_3 a pour matrice sur la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{C}_3[X]$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -a-1 \\ 1 & 0 & a+1 & 1+a+a^2 \\ 0 & 0 & -a & -a-1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix}.$$

23) Calculer le déterminant de f_3.

24) Donner les valeurs de a pour lesquelles f_3 n'est pas bijective.

25) Dans cette question $a = -1$.

- **a)** Donner un base de $\operatorname{Ker} f_3$, le noyau de f_3.

b) Donner une base de $\operatorname{Im} f_3$, l'image de f_3.

c) Le noyau et l'image de f_3 sont-ils supplémentaires ?

IV – Étude du noyau.

26) Soit $P(X)$ un polynôme non nul de degré p tel que $2p < n$. Montrer que $f(P(X))$ est non nul.

27) Soit $P(X)$ un polynôme. Montrer qu'il appartient au noyau de f si et seulement s'il existe un polynôme $R(X)$ de degré strictement inférieur à n tel que : $P(X^2) = R(X)(1-XT(X))$.

28) En déduire que si $P(X)$ est un élément du noyau de f alors il appartient à $\mathbb{C}_n[X]$.

29) Déduire de la question **27)** que pour tout élément P du noyau de f et que pour tout k de $\mathbb{N}$ tel que $\deg(P(X)) + k \leqslant n$ alors $X^k P(X)$ appartient au noyau de f.

30) On suppose dans cette question que le noyau de f n'est pas réduit au polynôme nul. Soit I l'ensemble des entiers naturels k tel qu'il existe un polynôme du noyau de f qui a pour degré k.

a) Montrer que I possède un plus petit élément d.

b) Soit $P_0(X)$ un polynôme du noyau ayant pour degré d. Soit $P_1(X)$ un autre polynôme du noyau ayant pour degré d. Monter qu'il existe c de $\mathbb{C}$ tel que $P_1(X) = cP_0(X)$.

c) Montrer qu'un polynôme $P(X)$ appartient au noyau de f si et seulement s'il existe un polynôme $S(X)$ de degré inférieur ou égal à $n-d$ tel que $P(X) = S(X)P_0(X)$.

31) On suppose dans cette question que $T(X) = X^3 + X^2 - 1$. Donner le noyau de f.

V – Étude d'un produit scalaire.

Dans cette partie on prendra $T(X) = X^2$ et on considérera $g = f_2$ la restriction de f à $\mathbb{R}_2[X]$.

32) Montrer que g est bien un endomorphisme de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)$. Donner sa matrice A sur la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

33) Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur $\mathbb{R}_2[X]^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (U(X), V(X)) \in \mathbb{R}_2[X]^2,\ \langle U(X), V(X) \rangle = U(1) \times V(1) + U'(1) \times V'(1) + U''(1) \times V''(1).$$

(Où $U'(X)$ et $V'(X)$ sont les fonctions polynômes dérivées de $U(X)$ et $V(X)$ et $U''(X)$ et $V''(X)$ sont les fonctions polynômes dérivées secondes de U et V).

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)$.

34) Montrer que la matrice A de g sur la base canonique est une matrice orthogonale. (C'est-à-dire que $A \times {}^tA = I_3$, où ${}^tA$ est la matrice transposée de A et I_3 la matrice identité.)

35) L'application g est-elle une isométrie vectorielle pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$?
On pourra calculer $\langle 1, 1 \rangle$ et $\langle g(1), g(1) \rangle$.

— **FIN** —