Devoir à la maison n° 5

À rendre le 5 novembre

I. Complexes et géométrie

Ce sont trois questions indépendantes. Dans chacune d'elles, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque. On construit quatre points M, N, P, Q de façon que les triangles AMB, BNC, CPD et DQA soient rectangles isocèles directs (les angles droits étant en M, N, P, Q respectivement). Exprimer les affixes m, n, p, q des points M, N, P, Q en fonction des affixes a, b, c, d des points A, B, C, D. En déduire que les segments $[MP]$ et $[NQ]$ sont perpendiculaires et de même longueur. Faire un schéma.

2) Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan, d'affixes a, b, c, d. On suppose que

$$a + ib = c + id \qquad \text{et} \qquad a + c = b + d\ .$$

Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un carré (*penser aux propriétés des diagonales* $[AC]$ *et* $[BD]$). Étudier la réciproque.

3) Soient a, b, c trois nombres complexes distincts, affixes des sommets A, B, C d'un triangle. Soit z un nombre complexe. On pose

$$f(z) = \frac{z-a}{b-c}\ ; \quad g(z) = \frac{z-b}{c-a}\ ; \quad h(z) = \frac{z-c}{a-b}\ .$$

Montrer que, si deux des trois expressions ci-dessus est imaginaire pure, alors la troisième l'est aussi. Interprétation géométrique ?

II. Calculs

Pour chacune de ces questions, on détaillera tous les calculs menés, notamment en explicitant les théorèmes utilisés et en vérifiant consciencieusement leurs hypothèses.

1) Déterminer une primitive de $x \mapsto (x^2 + 2x)\ln(x)$.

2) En procédant par changement de variable, calculer $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Indication : on pourra déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \notin \{-1, 1\}$,

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}.$$

3) Résoudre le problème de Cauchy : $y' + y\tan(x) = \sin(2x)$; $y(0) = 2$.

4) Résoudre le problème de Cauchy : $y'' - 3y' + 2y = x\mathrm{e}^{x} - 1$; $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$.

— **FIN** —