Chapitre XXII : Dimension finie :

Déf : Si : E est un $\mathbb{K}$-ev, on dit qu'il est de dimension finie s'il admet une famille génératrice de cardinal fini.

Pb : ⚠ pour l'instant la dim de E n'existe pas !
Si E a plusieurs familles gén. finies, elles n'ont pas forcément toutes le même cardinal.

Ex : • $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$: les bases canoniques sont des familles gén. finies.

• $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dim. finie :

Supposons que $(P_0 \dots P_n)$ 1 famille de polynômes génératrice de $\mathbb{K}[X]$. notons $d = \max(\deg P_0, \dots, \deg P_n)$

alors si $P \in \mathrm{Vect}(P_0 \dots P_n)$, $\deg P \leq d$

donc $X^{d+1} \notin \mathrm{Vect}(P_0 \dots P_n)$: absurde.

⚠ Ne confondez pas cardinal et dimension.

$\mathbb{R}$ est infini (par ex. car $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$)

Mais $\mathbb{R} = \mathrm{Vect}(1)$, donc $\mathbb{R}$ est de dim. finie.

$\{1\}$ est fini mais Vect 1 est ∞.

dim $\{1\}$: n'existe pas. $\{1\}$ n'est pas 1 ev !!

Rq : $\{0\}$ est le seul ev. qui est fini.

Si $E \neq \{0\}$, il existe $x \neq 0$ ds E,

alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $nx \in E$ et les nx sont 2 à 2 distincts

donc E est ∞.

- $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est de dim. ∞ : " $\mathbb{R}[X] \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ "

identifié aux fonc. poly.

- A un ensemble, $E = \mathbb{K}^A = \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$.

c'est 1 ev. E est de dim finie ssi A est fini.

idée : Si $A = \{a_1 \dots a_n\}$, on pose $f_i : A \to \mathbb{K}$

tq. $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $f_i(a_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

A fini

$\mathrm{Vect}(f_1 \dots f_n) = E$, car si $f \in E$, $f : A \to \mathbb{K}$,

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(a_i) \times f_i$$

[même principe qu'avec les poly de Lagrange]

Si A est ∞, $\forall a \in A$, on pose $f_a : A \to \mathbb{K}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x = a \\ 0 \text{ si } x \neq a \end{cases}$$

par l'absurde, si E est de dim finie,

il existe $f_1 \dots f_n \in E$ tq. $E = \mathrm{Vect}(f_1 \dots f_n)$

<u>ex 2</u> : mq. c'est absurde. par ex l'1 des $f_a \notin \mathrm{Vect}(f_1 \dots f_n)$.

Rq : l'ex. 3 de 1.1.2 est difficile ! J'ai détaillé

le sens A fini $\Rightarrow$ E de dim finie.

L'implic° A ∞ $\Rightarrow$ E de dim ∞ : beaucoup plus délicate pas du tout indispensable pour le cours.

• 4) Si E est un ev, et $x_1 \dots x_n \in E$

par déf, $\mathrm{Vect}(x_1 \dots x_n)$ a 1 famille gén.

$(x_1 \dots x_n)$, qui est finie, donc $\mathrm{Vect}(x_1, \dots x_n)$

est de dim finie, même si E ne l'est pas.

<u>1.2</u> : Th fondamental (pas la dénomination officielle!)

(lemme de Steinitz).

Si E a 1 famille génératrice de n vecteurs,

alors toute famille de $n+1$ vecteurs est liée ; et donc aussi toute famille de plus de $n+1$ vecteurs est liée (car rappel : tte surfamille d'1 famille liée est liée ; si on a 1 famille liée de $(n+1)$ vect et qu'on lui rajoute des vecteurs, elle est encore liée).

Rq : il est fondamental car il va servir de pt de départ ds ce chapitre pour démontrer les autres résultats ; mais ce n'est pas forcé^t le résultat que l'on va le + utiliser en TD.

⚠ ne l'appelez pas comme ça ds vos copies, ce n'est pas 1 dénomina^o officielle.

<u>Démo</u> : un peu casse-pieds : se fait par récurrence sur n :

$\forall n \in \mathbb{N}$, posons (H_n) : si E est 1 ev. ayant 1 famille génératrice de n vecteurs, alors tte famille de $n+1$ vect est liée.

$\to$ $\underline{n=0}$: $\emptyset$ est 1 famille gén. de E : $E = \mathrm{Vect}\,\emptyset = \{0\}$

Soit $x \in E$: $x = 0$, dc $\{x\}$ est liée.

$\to$ Soit $n \in \mathbb{N}$ tq. (H_n) est vraie.

$E = \mathrm{Vect}(g_1 \ldots g_{n+1})$, et $\tilde{f} = (v_1 \ldots v_{n+2})$.

Mq $\tilde{f}$ est liée.

$\forall i \in [\![1, n+2]\!]$, $v_i \in E$
$\in \mathrm{Vect}(g_1 \ldots g_{n+1})$

il existe $\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2} \ldots \alpha_{i,n+1} \in \mathbb{K}$ tq. $v_i = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_{ik}\, g_k$.

__1__

__1^{er} cas :__ $\forall i,\ \alpha_{i1} = 0$ (ie : $v_1 = 0 \times g_1 + \alpha_{1,2}\, g_2 \cdots$

$v_2 = 0 \times g_1 + \alpha_{22}\, g_2 \cdots$

$v_3 = 0 \times g_1 + \alpha_{32}\, g_2 \cdots$)

dc : $$v_i = \sum_{k=2}^{n+1} \alpha_{i,k}\, g_k \in \underbrace{\mathrm{Vect}(g_2 \cdots g_{n+1})}_{=F}$$

F a 1 famille gén. de n vect : $g_2 \cdots g_{n+1}$

et $\tilde{\mathcal{F}}$ est 1 famille de F de $n+2$ vect dc avec l'hyp. de récurrence, elle est liée.

__$2^{ème}$ cas :__ $\exists i \in [\![1, n+2]\!],\ \text{tq.}\ \alpha_{i,1} \neq 0$. Par ex, $\alpha_{1,1} \neq 0$

dc $$v_1 = \underbrace{\alpha_{11}}_{\neq 0}\, g_1 + \alpha_{12}\, g_2 + \alpha_{13}\, g_3 \cdots$$

dc : $g_1 = \frac{1}{\alpha_{11}} \left(v_1 - \sum_{k=2}^{n+1} \alpha_{1k} g_k \right)$ $(*)$

dc, pr $i = 2$ à $n+1$, ds la somme : $v_i = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_{ik} g_k$

on va remplacer g_1 par $*$:

$$v_i = \alpha_{i1} \times \frac{1}{\alpha_{11}} \left(v_1 - \sum_{k=2}^{n+1} \alpha_{1k} g_k \right) + \sum_{k=2}^{n+1} \alpha_{ik} g_k$$

$$= \frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{11}} v_1 + \sum_{k=2}^{n+1} \left(- \frac{\alpha_{1k} \alpha_{i1}}{\alpha_{11}} + \alpha_{ik} \right) g_k$$

dc : $\underbrace{v_i - \frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{11}} v_1}_{= w_i} = \sum_{k=2}^{n+1} \left(\alpha_{ik} - \frac{\alpha_{1k} \alpha_{i1}}{\alpha_{11}} \right) g_k$

dc : $w_2, w_3, \dots, w_{n+2} \in \mathrm{Vect}(g_2 \dots g_{n+1})$

$\mathrm{Vect}(g_2 \dots g_{n+1})$ a 1 famille gén. de n élé^{ts}

$w_2 \dots w_{n+2}$ est 1 famille de $(n+1)$ vect de cet ev,

de avec (H_n), elle est liée.

dc : il existe $\lambda_2 \dots \lambda_{n+2} \in \mathbb{K}$, non tous nuls, tq :

$$0 = \sum_{i=2}^{n+2} \lambda_i w_i = \sum_{i=2}^{n+2} \lambda_i \left(v_i - \frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{11}} v_1 \right)$$

$$= \left(\sum_{i=2}^{n+2} - \frac{\lambda_i \alpha_{i1}}{\alpha_{11}} \right) v_1 + \sum_{i=2}^{n+2} \lambda_i v_i$$

l'1 des λ_i n'est pas nul (#)

avec la tq (#) la c.l. nulle de la ligne précédente n'est pas triviale, et c'est 1 c.l. en $v_1 \dots v_{n+2}$, dc $(v_1 \dots v_{n+2})$ est liée.

□

<u>Ex</u> : • ds $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$

dc tte famille de 3 vect est liée :

3 vect du plan sont coplanaires.

• ds $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ dc tte famille de 4

vecteurs est liée.

• ds $\mathbb{R}_n[X] = \text{Vect}(\underbrace{1, X^1, \dots, X^n}_{n+1 \text{ vect.}})$, tte famille de $(n+2)$

polynômes est liée.

<u>Cor</u> : c'est lui LE résultat le + important :

ds 1 ev de dim. finie, ttes les bases sont finies et ont le même cardinal. <u>Dém</u>: Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ 2 bases d'1 e.v. E de dim. finie.

∃ a 1 famille gén. $\mathcal{F}$ finie et $\mathcal{B}_1$ est libre, donc elle a au plus $\#\mathcal{F}$ vecteurs grâce au lemme f^al, donc elle est finie. Idem pour $\mathcal{B}_2$.

Et ensuite: $\mathcal{B}_1$ est gén. et $\mathcal{B}_2$ est libre.

donc par contraposée du lemme fondamental,

$$\boxed{\#\mathcal{B}_2 \leq \#\mathcal{B}_1}$$

(lemme f^al : si $\#\mathcal{F} > \#\mathcal{B}_1$, alors $\mathcal{F}$ est liée).

On inverse les rôles:

$\mathcal{B}_2$ est gén. et $\mathcal{B}_1$ est libre, donc de même:

$$\boxed{\#\mathcal{B}_2 \geq \#\mathcal{B}_1}$$

$\square$

ξ : il reste à mq. tt ev. de dim finie a 1 base.

1.3 : Existence de bases :

<u>idées</u> : 1) soit $\mathcal{F}$ 1 famille. Si elle est liée, l'1 de ses vect. est c.l. des autres.
On l'enlève : la nouvelle famille est notée $\mathcal{F}'$,
et on a vu que $\mathrm{Vect}\,\mathcal{F}' = \mathrm{Vect}\,\mathcal{F}$.
On réitère tant que la famille est liée.
À la fin on a 1 famille $\hat{\mathcal{F}}$ tq. $\mathrm{Vect}\,\hat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$
et $\hat{\mathcal{F}}$ est libre.

2) Soit $\mathcal{F}$ 1 famille libre d'1 ev. E.

Si $\operatorname{Vect} \mathcal{F} \neq E$, il existe $v \in E$ tq.

$v \notin \operatorname{Vect} \mathcal{F}$, dc $\mathcal{F} \uplus \{v\}$ est encore libre.

Si on la note $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}'$ est libre et :

$$\operatorname{Vect} \mathcal{F} \subsetneq \operatorname{Vect} \mathcal{F}' \subset E$$

On fait grossir $\operatorname{Vect} \mathcal{F}$ au maximum, et on espère arriver à $\operatorname{Vect} \mathcal{F} = E$.

1) : extraire 1 base d'1 famille génératrice.

2) Compléter 1 famille libre en 1 base.

Soit $(x_1 \dots x_n)$ 1 famille de E.

Lemme 1.3.1 : on a vu que :

(*) $(x_1 \dots x_n)$ est liée ssi l'1 des vect de la famille est c.l. des autres.

m̂ idée, variante :

(#) $(x_1 \dots x_n)$ est liée ssi $\exists k \in [\![1, n-1]\!]$ tq. x_{k+1} est c.l. de $x_1 \dots x_k$.

il est clair si on a (#) on a (*).

Pb : on a (*) et on veut (#) ...

<u>démo de (#)</u> : ($\Leftarrow$) évident, grâce à (*)

($\Rightarrow$) On suppose que $x_1 \dots x_n$ est liée.
il existe $\lambda_1 \dots \lambda_n$ non tous nuls tq :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$$

On pose $I = \{ k \in [\![1, n]\!], \ \lambda_k \neq 0 \}$.

$I \subset \mathbb{N}$, $I \neq \emptyset$ car $(x_1 \dots x_n)$ est liée,

I est majoré par n : I a 1 max, p.

dc : $0 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ (si $i > p$, $\lambda_i = 0$)

d'où $0 = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i + \underbrace{\lambda_p}_{\neq 0} x_p$

d'où $x_p = \sum_{i=1}^{p-1} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_p}\right) x_i$

x_p est c.l. de $x_1 \dots x_{p-1}$, on a (#).

<u>Cor</u>: Si $(x_1 \dots x_p)$ est 1 famille libre de E et $x \in E$, alors :
$(x_1 \dots x_p, x)$ est liée $\Leftrightarrow x \in \mathrm{Vect}(x_1 \dots x_p)$

Dém : $(\Leftarrow)$: évident.

$(\Rightarrow)$: avec (#), si $(x_1 \dots x_p, x)$ est liée,

notons-le x_{p+1}

il existe $k \in [\![1, p+1]\!]$ tq.

$x_k \in \text{Vect}(x_1 \dots x_{k-1})$

Rq : Si : $\left(0, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$, elle est liée,

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ n'est pas c.l. de 0

mais : $0 \in \text{Vect}$ (des vect. précédents $\in \text{Vect}(\emptyset) = \{0\}$).

donc : si $k \leq p$: donc $(x_1 \dots x_k)$ est libre

donc $(x_1 \dots x_p)$ aussi : absurde,

donc $k = p+1$, et cqfd. $\square$

<u>Ex</u> : si on a : $\overbrace{2}^{\lambda_1} \cdot x_1 + \overbrace{0}^{\lambda_2} \cdot x_2 - \overbrace{3}^{\lambda_3} x_3 + \overbrace{2}^{\lambda_4} x_4 + 0 \cdot x_5 = 0$

$\lambda_1 \neq 0$ donc : $x_1 = \frac{3}{2} x_3 - \frac{2}{2} x_4$

donc $x_1 \in \mathrm{Vect}(x_3, x_4)$: pas équivalent.

$\lambda_1 \neq 0$ c'est le + gd indice k : $\lambda_k \neq 0$

Ici : $x_4 = -\frac{2}{2} x_1 + \frac{3}{2} x_3$

donc $x_4 \in \mathrm{Vect}(x_1, x_3)$

$\in \mathrm{Vect}(x_1, x_2, x_3)$: Oui

Th. de la base incomplète :

Version courte : Soit E de dim. finie, alors toute famille libre de E peut être complétée en 1 base.

(ie : on peut lui ajouter des vect. de E et on obtient 1 base).

Version concrète + précise : si $\tilde{F} = (f_1 \dots f_n)$ est 1 famille génératrice de E, et si $\mathcal{L}$ est 1 famille libre de E, on peut rajouter des vect. de F à $\mathcal{L}$ pour en faire 1 base.

Algo : $\mathcal{L}$ est libre, $\mathrm{Vect}\,\mathcal{L} \subset E$

$i = 1$

Tant que ($\mathrm{Vect}\,\mathcal{L} \subsetneq E$ et $i < n$) :

 si $f_i \notin \mathrm{Vect}\,\mathcal{L}$,

 on pose $\mathcal{L} = \mathcal{L} \uplus \{f_i\}$

 $i = i + 1$

Renvoyer $\mathcal{L}$.

Variant : i

i augmente de 1 strictement à chaque tour de boucle, et dans la condi° du "Tant que" on a : $i<n$: on est sûr que la boucle va s'arrêter.

invariant : $\mathcal{L}$ est libre et $f_1 \dots f_i \in \mathrm{Vect}\, \mathcal{L}$.
en sortie de boucle.

tout à la fin : $\mathcal{L}$ est libre

le tant que s'est arrêté si :

1) $\mathrm{Vect}\, \mathcal{L} = E$: donc $\mathcal{L}$ est 1 base.

ou : 2) $i = n$:

$f_1 \dots f_n \in \mathrm{Vect}\, \mathcal{L}$

donc $\underbrace{\mathrm{Vect}(f_1 \dots f_n)}_{=E} \in \mathrm{Vect}\, \mathcal{L}$

donc $\mathrm{Vect}\, \mathcal{L} = E$.

Dans tous les cas, $\mathcal{L}$ est 1 base.