Feuille d'exercice n° 18 : **Développements limités - fiche d'entraînement - correction**

Exercice 1

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n^3}=0$ donc $n^3-\sqrt{n^2+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}n^3$. De même, $\ln n-2n^2\underset{n\to+\infty}{\sim}-2n^2$, donc $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{n^3}{-2n^2}=-n/2$.

2) $\ln(n^2+1)=\ln n^2+\ln(1+1/n^2)=2\ln n+\ln(1+1/n^2)\underset{n\to+\infty}{\sim}2\ln n$ et $n+1\underset{n\to+\infty}{\sim}n$ donc $v_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{2\ln n}{n}$.

3) $w_n=\dfrac{n\sqrt{n+1/n+1/n^2}}{n^{2/3}\sqrt[3]{1-1/n+1/n^2}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{n}{n^{2/3}}=n^{1/3}$.

4) $\cos(1/n)=1-\dfrac{1}{2n^2}+o(1/n^2)$ et $\mathrm{e}^{1/n}=1+1/n+o(1/n)$, donc :
$\cos(1/n)-\mathrm{e}^{1/n}=-1/n+o(1/n)\underset{n\to+\infty}{\sim}1/n$.

5) $y_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1/n^2}{1/n}\underset{n\to+\infty}{\sim}-1/n$.

6) $\ln(1+\sin(1/n))\underset{n\to+\infty}{\sim}\sin(1/n)$ car $\sin(1/n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}n+\infty 0$, et $\sin(1/n)\underset{n\to+\infty}{\sim}1/n$, donc : $\ln(1+\sin(1/n))\underset{n\to+\infty}{\sim}1/n$. Enfin, $1-\sqrt{1+1/n}=1-1-1/(2n)+o(1/n)\underset{n\to+\infty}{\sim}-1/(2n)$, d'où $z_n\underset{n\to+\infty}{\sim}-2$.

Exercice 2

1) $1-x+\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{11}{24}x^3+o\left(x^3\right)$

2) $\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{90}x^3+o\left(x^3\right)$

3) $1+\dfrac{1}{2}(x-1)-\dfrac{1}{12}(x-1)^2+o\Big((x-1)^2\Big)$

4) $\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{90}x^3+o\left(x^3\right)$

5) $1-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{12}x^2+\dfrac{1}{12}x^3-\dfrac{1}{144}x^4-\dfrac{1}{240}x^5+o\left(x^5\right)$

6) $\displaystyle\sum_{k=0}^{999}\frac{x^k}{k!}=e^x-\frac{x^{1000}}{1000!}+o(x^{1000})$ d'où :
$\displaystyle\ln\left(\sum_{k=0}^{999}\frac{x^k}{k!}\right)=\ln(e^x-\frac{x^{1000}}{1000!}+o(x^{1000}))=\ln(e^x)+\ln(1-\frac{x^{1000}e^{-x}}{1000!}+o(x^{1000}))=x-\frac{x^{1000}}{1000!}+o(x^{1000})$.

Exercice 3

$$6)\ \ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)=(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{45}x^6+o\left(x^7\right))$$

$$7)\ \ln\left(1+\operatorname{ch}x\right)=(\ln\left(2\right)+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{96}x^4+o\left(x^4\right))$$

$$8)\ \ln\left(\tan x\right)=(2\ \left(x-1/4\,\pi\right)+\frac{4}{3}\left(x-1/4\,\pi\right)^3+o\left(\left(x-1/4\,\pi\right)^4\right))$$

$$9)\ \arctan\left(\mathrm{e}^{\,x}\right)=(1/4\,\pi+\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^3+o\left(x^3\right))$$

$$10)\ \arctan\left(2\sin x\right)=(1/3\,\pi+\frac{1}{4}\left(x-1/3\,\pi\right)-3/16\,\sqrt{3}\left(x-1/3\,\pi\right)^2+\frac{3}{16}\left(x-1/3\,\pi\right)^3+o\left(\left(x-1/3\,\pi\right)^3\right))$$