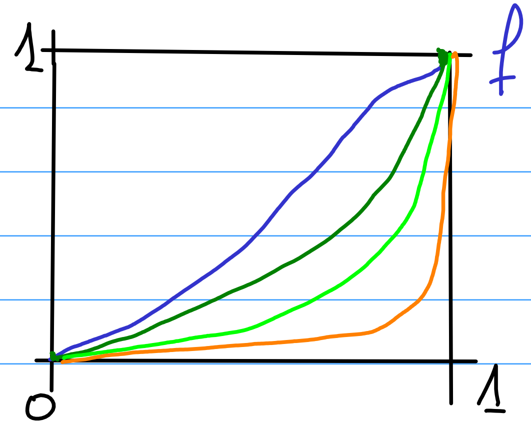
Ex. 10 :

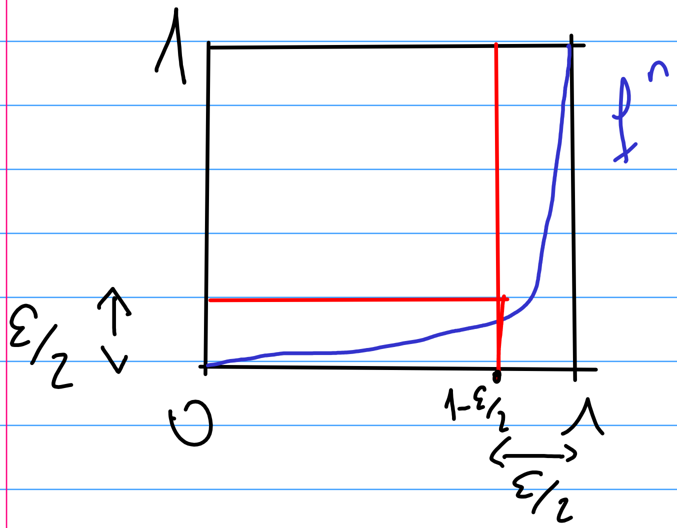


$\forall x \in [0,1[\,,\ x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

ici : si $x \in [0,1[$,

$f(0) \leq f(x) < f(1)$ donc : $f(x) \in [0,1[$

donc $\underset{\substack{\| \\ (f(x))^n}}{f^n(x)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $\quad (\triangle\ f^n = f \times \dots \times f)$



Soit $\varepsilon > 0$.

$\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) < 1$ donc $f\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) < 1$

d'où : $f^n\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tq : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow f^n\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$.

donc : $\forall x \in \left[0, 1-\frac{\varepsilon}{2}\right],\ f^n(x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

De plus : $\forall x \in [1-\frac{\varepsilon}{2}, 1]$, $f^n(x) \leq 1$

Posons : $\varphi : [0,1] \to [0,1)$

$$x \mapsto \begin{cases} \varepsilon/2 & \text{si } x \leq 1-\frac{\varepsilon}{2} \\ 1 & \text{si } x > 1-\varepsilon/2 \end{cases}$$

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $f^n \leq \varphi$

et donc : $\int_0^1 f^n \leq \int_0^1 \varphi$

$$\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2$$

$$\leq \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 f^n \leq \varepsilon$

donc $\int_0^1 f^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.