Barème.

- Barème : chaque question sur 4 points, total sur 124 points (version 1) ou 132 points (version 2), ramené sur 20 points, +55% (version 1) ou +140% (version 2).

Statistiques descriptives.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \min\left(\frac{1}{10}\lceil 10x\rceil\,;20\right)$.

	Problème (V1)	Problème (V2)	Note finale
Transformation	p_1	p_2	$\varphi\left(1,55\frac{20p_1}{124}+2,4\frac{20p_2}{132}\right)$
Note maximale	62	69	20+
Note minimale	13	11	$3,30$
Moyenne	$\approx 39,06$	$\approx 35,13$	$\approx 10,76$
Écart-type	$\approx 11,89$	$\approx 15,71$	$\approx 3,93$
Premier quartile	33	$22,5$	$8,15$
Médiane	36	35	$11,05$
Troisième quartile	46	41	$13,10$

Remarques générales.

- Certains ne font toujours pas l'effort de mettre en œuvre les consignes habituelles : introduire les variables, simplifier les expressions polynomiales (développer ou factoriser systématiquement) par exemple. C'est la même chose pour les consignes de présentation (encadrer les résultats, ne pas écrire dans les marges). C'est désespérant (mais ce n'est plus mon problème). Aux concours, cela vous fera perdre des points.

Exercice vu en TD.

Exprimer le déterminant d'une matrice antisymétrique en fonction de ses coefficients est franchement maladroit.
Pour la dimension 2, écrire $\det(A) = \det({}^tA) = (-1)^2\det(A) = \det(A)$ est inutile. Vous avez montré $\det(A) = \det(A)$: bravo ! Mais cela ne justifie rien.

Polynômes orthogonaux.

Le mot *unitaire* était introduit avant la structure euclidienne. Il n'y avait donc pas d'ambiguïté : cela s'entendait polynomialement (coefficient dominant valant 1).

1.a La forme $\left[(X^2-1)P\right]''$ était la plus pratique pour l'étude du degré.
$\deg(P'') = n-2$ est faux !
$\mathbb{R}_n[X]$ n'est pas stable par produit.
$\varphi(0) = 0$ ne fait pas partie de la définition de la linéarité, c'en est une conséquence.

1.b Il convenait de factoriser $n(n+3)+2$.

2.a Si P vérifie $\varphi(P) = \lambda P$, alors $P \in \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{Id})$. Cela ne justifie pas que $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{Id}) \neq \{0\}$: il faut travailler avec un polynôme non nul (car, ici, unitaire).

Les déterminants de polynôme (du type $\det(\varphi(P) - \lambda P)$ ou pire) n'ont aucun sens.

3.a Il n'y a qu'un polynôme unitaire constant : 1. Inutile, donc, de chercher P_0.

$\varphi(1) = 2$ et $\varphi(X) = 6X$ auraient dû être établis en **1.b**.

4.a L'implication $\langle f, f\rangle = 0 \Rightarrow f = 0$ a été très souvent mal justifiée. D'une part, vous devez utiliser la continuité et la positivité de $t \mapsto f^2(t)(1-t^2)$. D'autre part, on obtient que cette fonction est nulle sur $[-1, 1]$, donc f est nulle sur $]-1, 1[$. Il convient alors de conclure par un argument continuité en 1 et -1.

4.b Écrire $\displaystyle\int_{-1}^{1} XP(t)Q(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t$ n'a pas de sens. Vous n'écrivez pourtant pas $\displaystyle\int_{-1}^{1} XPQ(1-t^2)\,\mathrm{d}t$!

Vous pouviez écrire $\displaystyle\int_{-1}^{1} X(t)P(t)Q(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t$, même si c'est maladroit. L'écriture $\displaystyle\int_{-1}^{1} XPQ(1-X^2)\,\mathrm{d}X$ est abusive, mais je l'ai tolérée.

5.b Il convenait de justifier que si $\ell \neq k$, alors $(\ell+1)(\ell+2) \neq (k+1)(k+2)$: la fonction $x \mapsto (x+1)(x+2)$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$, donc injective.

6.d Certains laissent des résultats non simplifiés : $\dfrac{3}{15}, \dfrac{15}{35}$. Je ne le comprends pas. C'est bien entendu systématiquement sanctionné.

Sur l'exponentielle.

1.a Vous ne pouvez pas écrire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$.

1.b Il convenait d'écrire correctement l'ensemble des solutions.

La fonction exponentielle était solution évidente.

1.e Vous pouviez très bien utilier l'inégalité de Taylor-Lagrange, encore fallait-il le faire en assurant ses hypothèses. L'énoncé vous proposait une solution permettant de la contourner.

Théorème de d'Alembert-Gauss.

Il convenait de ne jamais utiliser une propriété découlant du théorème de d'Alembert-Gauss.

II.A.1.a La factorisation d'un polynôme réel en produit de facteurs irréductibles découle du théorème de d'Alembert-Gauss.

II.A.2.a Vous pouviez faire le travail pour v, il suffisait ensuite d'indiquer que u commute avec u.

II.A.2.b Le caractère *strict* des sev à trouver était primordial.

II.B.2 Vous pouviez observer que $\mathscr{F} = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus i\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et conclure par concaténation de bases.

II.B.3.a Il convenait de ne pas oublier la linéarité (au sens réel : $\mathscr{F}$ n'était bas un $\mathbb{C}$-ev).

II.B.3.b Là encore, vous ne pouviez pas exploiter de linéarité complexe.

II.B.3.c $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas intègre : $(A-(\lambda+i\mu)\mathrm{I}_n)M_0 = 0$ et $M_0 \neq 0$ n'implique pas que $A-(\lambda+i\mu)\mathrm{I}_n = 0$. Et puis, c'était un résultat trop fort (A n'est pas scalaire) !

II.C.I.1 C'était une question de cours !

II.D.1 Vous ne pouvez pas « poser $D_0 = 1$ » à votre convenance. Calculez plutôt D_1.