Devoir surveillé n°9
Version n°2
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Borne de Cramér-Rao pour un estimateur sans biais.

On se donne un réel $p \in [0,1]$ et un entier naturel $n \geqslant 1$. Sur un espace probabilisé fini (Ω, P), on définit n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes, de loi de Bernoulli de paramètre p.

L'objectif de ce problème est la construction d'un estimateur de p appelé *estimateur du maximum de vraisemblance*, de l'étude de sa consistance et enfin de son optimalité au sens du critère quadratique.

I – Estimateur du maximum de vraisemblance.

On fixe n valeurs $x_1, \dots, x_n$ dans $\{0,1\}$. On définit aussi la fonction de vraisemblance par

$$\mathscr{L}(p\ ;\ x_1, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$

et la fonction de log-vraisemblance par

$$L(p\ ;\ x_1, \dots, x_n) = \ln(\mathscr{L}(p\ ;\ x_1, \dots, x_n)).$$

1) Exprimer $P(X_1 = x_1)$ en fonction de x_1 et de p, uniquement.

2) En déduire que $L(p\ ;\ x_1, \dots, x_n) = \ln(p) \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k + \ln(1-p)\left(n - \sum_{k=1}^{n} x_k\right)$.

3) En déduire que $\mathscr{L}$ admet un maximum et l'atteint en une unique valeur $\hat{p}$, que l'on précisera.

II – Moyenne empirique.

On considère la variable aléatoire

$$\hat{p}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

4) Déterminer $\mathrm{E}[\hat{p}_n]$.

5) Déterminer aussi $V(\hat{p}_n)$ et en déduire l'existence et la valeur de la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\mathrm{E}[(\hat{p}_n - p)^2]$.

6) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|\hat{p}_n - p| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

III – Borne de Cramér-Rao.

Soit $T : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ telle que

$$\mathrm{E}[T(X_1, \ldots, X_n)] = p.$$

On reprend les notations de la partie **1)** en prenant pour n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ la variable aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$. La fonction de vraisemblance est donc maintenant une variable aléatoire, que l'on notera toujours $\mathscr{L}(p\,;\ X_1, \ldots, X_n)$. La fonction de log-vraisemblance est donc maintenant la variable aléatoire

$$L(p\,;\ X_1, \ldots, X_n) = \ln(\mathscr{L}(p\,;\ X_1, \ldots, X_n)) = \ln(p)\sum_{k=1}^{n} X_k + \ln(1-p)\sum_{k=1}^{n}(1 - X_k).$$

On définit la variable aléatoire de *score* du modèle comme la dérivée de la log-vraisemblance par rapport à p :

$$S(p\,;\ X_1, \ldots, X_n) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} L(p\,;\ X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{\mathscr{L}(p\,;\ X_1, \ldots, X_n)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathscr{L}(p\,;\ X_1, \ldots, X_n).$$

On définit enfin l'information de Fisher comme

$$I(p) = \mathrm{E}\left[S(p\,;\ X_1, \ldots, X_n)^2\right]$$

7) *Question préliminaire :* soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur (Ω, P). En étudiant le trinôme $V(X + tY)$, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\mathrm{Cov}(X, Y)| \leqslant \sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}.$$

8) Montrer que $\mathrm{E}[S(p\,;\ X_1, \ldots, X_n)] = 0$.
Indication : on pensera à utiliser la formule de transfert.

9) Montrer que $\mathrm{Cov}(S(p\,;\ X_1, \ldots, X_n), T(X_1, \ldots, X_n)) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathrm{E}[T(X_1, \ldots, X_n)]$.

10) En déduire l'inégalité de Cramér-Rao :

$$V(T(X_1, \ldots, X_n)) \geqslant \frac{1}{I(p)}.$$

11) Calculer l'information de Fisher $I(p)$.

12) Discuter des résultat obtenus dans cette partie et dans la partie précédente.

II. Endomorphismes cycliques et dérivations.

Soit E un espace-vectoriel réel et $f \in \mathscr{L}(E)$.

On dit que f est *cyclique* s'il existe $a \in E$ tel que la famille $(f^k(a))_{k\in\mathbb{N}}$ engendre E. Dans cette situation, on dit que a est *associé* à f.

On note $\mathscr{C}(f) = \{ g \in \mathscr{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g \}$ l'ensemble des endomorphismes commutant avec f.

On note $\mathscr{P}(f) = \left\{ \alpha_0 \mathrm{Id}_E + \alpha_1 f + \cdots + \alpha_k f^k \;\middle|\; k \in \mathbb{N},\ (\alpha_0, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^{k+1} \right\}$ l'ensemble des polynômes en f.

Partie I : Questions préliminaires.

1) Démontrer que $\mathscr{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{L}(E), +, \cdot)$, contenant Id_E et stable par composition.

2) Soit $g \in \mathscr{C}(f)$, montrer que $\mathscr{P}(g) \subset \mathscr{C}(f)$.

Partie II : Étude en dimension finie.

On suppose dans cette partie que E est de dimension finie, égale à n, que f est cyclique et l'on considère $a \in E$ associé à f.

3) Justifier l'existence d'un plus grand entier naturel p tel que $(a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a))$ soit une famille libre.

4) Démontrer que $(a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a))$ est une base de E. Que vaut donc p ?

5) Soit $g \in \mathscr{C}(f)$, soit $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ tels que $g(a) = \alpha_0 a + \alpha_1 f(a) + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(a)$. On note $h = \alpha_0 \mathrm{Id}_E + \alpha_1 f + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$. Démontrer que $g = h$.

6) En déduire que $\mathscr{C}(f) = \mathscr{P}(f)$.

7) Démontrer que $(\mathrm{Id}_E, f, \ldots, f^{n-1})$ est une base de $\mathscr{P}(f)$.

Partie III : Dérivations discrète et formelle en dimension finie.

On suppose que $E = \mathbb{R}_n[X]$, soit a un réel non nul. On considère les endomorphismes D et Δ de $\mathbb{R}_n[X]$ définis par

$$D : P \to P' \qquad \text{et} \qquad \Delta : P \to P(X+a) - P(X).$$

8) Montrer que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ n'est pas constant, alors $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.

9) En déduire que Δ est cyclique. Quels sont les polynômes associés à Δ ?

10) Montrer que $D \in \mathscr{P}(\Delta)$.

11) Démontrer que D est cyclique.

12) Montrer que $\mathscr{C}(D) = \mathscr{C}(\Delta)$.

Partie IV : Étude de ces dérivations en dimension infinie.

On considère maintenant les endomorphismes D et Δ étendus à $\mathbb{R}[X]$. Soit $\varphi \in \mathscr{C}(\Delta)$.

13) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $P \in \mathbb{R}_n[X] \Leftrightarrow \Delta^{n+1}(P) = 0$.

14) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ.

15) Démontrer alors que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\varphi(P') = [\varphi(P)]'$.

16) Démontrer que $\mathscr{C}(\Delta) = \mathscr{C}(D)$.

17) Montrer que Δ n'appartient pas à $\mathscr{P}(D)$.

— FIN —