2.2 : Produit cartésien :

Soit E et F deux ensembles finis,

$n = \# E$, $m = \# F$.

Calculons le cardinal de $E \times F$: $\#(E \times F) = (\# E) \times (\# F)$.

On note : $E = \{e_1 \dots e_n\}$, $F = \{f_1 \dots f_m\}$

Rappel : $E \times F = \{(e_i, f_j), i \in [\![1, n]\!], j \in [\![1, m]\!]\}$.

$$= \bigsqcup_{i=1}^{n} \underbrace{\{(e_i, f_j), j \in [\![1, m]\!]\}}_{F_i}$$

en effet : si $i \neq i'$: si $x \in F_i$: $\exists j$, $x = (e_i, f_j)$

si $x' \in F_{i'}$: $\exists j'$, $x' = (e_{i'}, f_{j'})$

comme $e_i \neq e_{i'}$ car $i \neq i'$, alors $x \neq x'$

donc $F_i \cap F_{i'} = \emptyset$: la réunion précédente est bien disjointe.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $F_i \subset E \times F$, donc $\bigsqcup_{i=1}^{n} F_i \subset E \times F$

et d'autre part, si $x \in E \times F$, $\exists i \in [\![1,n]\!]$, $j \in [\![1,n]\!]$

tq. $x = (e_i, f_j)$, donc $x \in F_i$, donc $E \times F \subset \bigsqcup_{i=1}^{n} F_i$

donc : $\boxed{E \times F = \bigsqcup_{i=1}^{n} F_i}$

donc : si les F_i sont finis, alors $E \times F$ aussi et :

$$\# E \times F = \sum_{i=1}^{n} \# F_i \quad \text{(union disjointe).}$$

$\forall i$, on pose : $\varphi_i : F \longrightarrow F_i$

$f \longmapsto (e_i, f)$

φ_i est 1 bijection : en effet soit $x \in F_i$, il existe un unique $j \in [\![1,n]\!]$

donc $x = (e_i, f_j)$, donc il existe un unique $f \in F$ tq. $x = (e_i, f)$

donc : $\#F_i = \#F$

donc : $\#E \times F = \sum_{i=1}^{n} \#F_i = \sum_{i=1}^{n} \#F$

$= n \times \#F = (\#E) \times (\#F)$ $\square$

<u>Généralisations</u> : Si $E_1 \dots E_n$ sont des ens finis :

① s'ils sont 2 à 2 disjoints : → sinon, on n'a que la formule du crible pour $\#\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)$

$$\#\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \#E_i$$ (on n'a pas le droit de l'utiliser)

② $$\#(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) = \prod_{i=1}^{n} (\#E_i)$$

Ces 2 pts se montrent facilement par récurrence.

__Ex__ : __2.2.3__ : "Avec remise" : qd on a tiré 1 carte, on la remet ds le jeu, dc on peut la retirer plus tard.

ici, le résultat d'1 tirage de 9 cartes parmi 32 __avec remise__ est 1 9-uplet de cartes :

dc l'ens. des tirages possibles est l'ens. des 9-uplets où chaque coord. est l'1 des 32 cartes : c'est $[\![1,32]\!]^9$ (en considérant que les cartes sont numérotées de 1 à 32).

il y en a dc $\#([\![1,32]\!]^9)$, ie : 32^9.

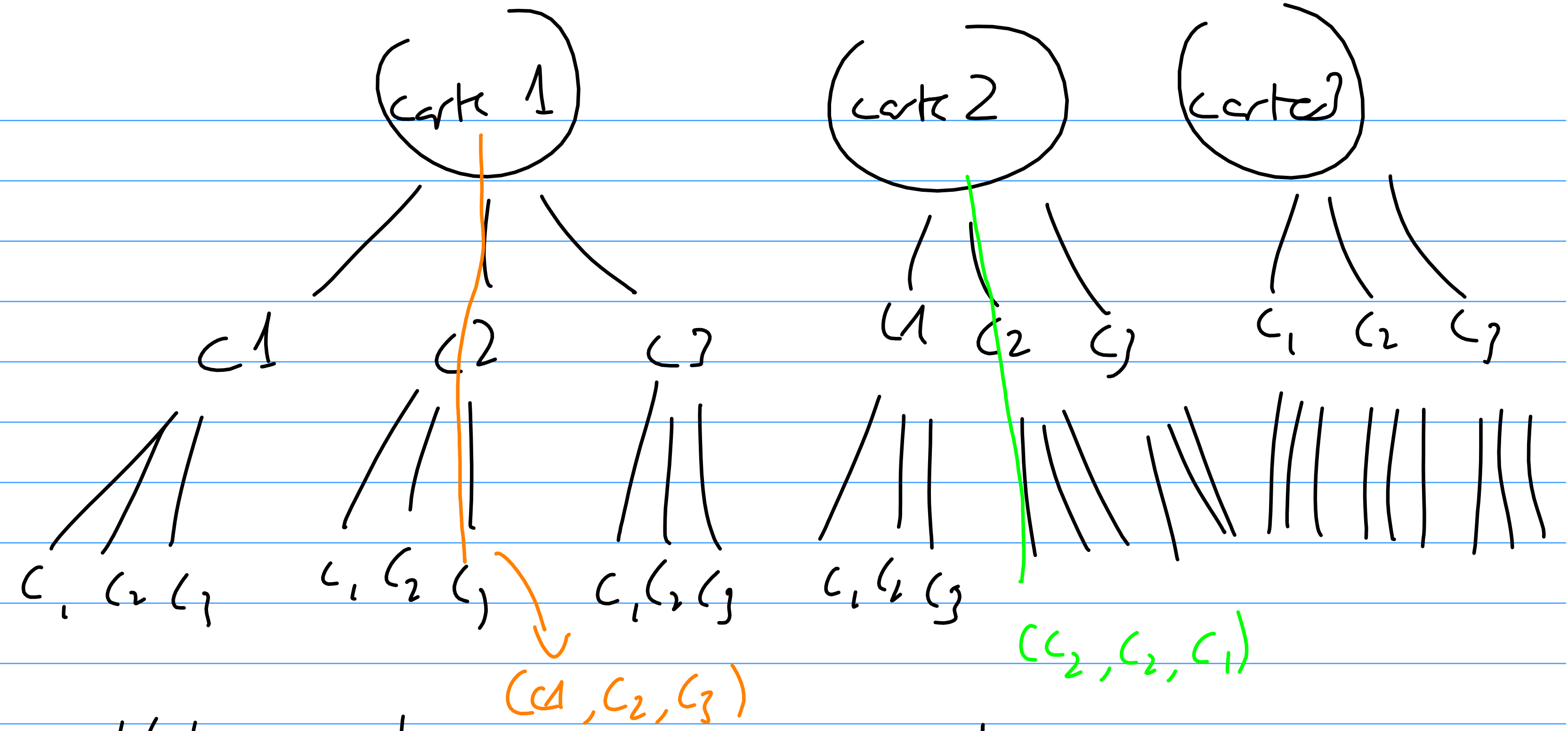
Autre manière de voir les choses : raisonner avec 1 arbre de possibilités.

(pr simplifier : prenons 1 jeu de 3 cartes, 3 tirages)

1er tirage :

2ème tirage :

3ème tirage :



1 branche de l'arbre, de haut en bas, correspond à 1 tirage.

il y a : $3 \times 3 \times 3 = 3^3$ (généralisation : tirer p cartes de 1 jeu de n cartes : $n \times n \times n \dots \times n = n^p$).

⚠ On a pris en compte l'ordre dans lequel on a tiré les cartes :

$(1,2,3,4,5,6,7,8,9) \neq (9,7,6,5,1,2,4,3,8)$.

2.3 : Fonctions :

Th : E, F 2 ens. finis.

$$\#(\mathcal{F}(E,F)) = \#F^{\#E}$$

(d'où $\mathcal{F}(E,F)$ est noté F^E).

Démo : explica° ("avec 1 ordre") : $E = \{e_1 \cdots e_n\}$

$F = \{f_1 \cdots f_m\}$

1 applica° de E ds F, c'est : 1 choix d'1 élé^t de F pr e_1

1 ___ pr e_2

___ e_3

$\vdots$

___ e_n

pr chacun de ces choix, on a $\#F$ possibilités, donc en tout il y a : $\overbrace{\#F}^{\text{choix de } f(e_1)} \times \overbrace{\#F}^{e_2} \times \#F \ldots \times \overbrace{\#F}^{e_n} = (\#F)^n$

$= (\#F)^{\#E}$.

<u>Démo rigoureuse</u> : soit

$$\varphi : F^n \longrightarrow F^E$$
$$f = (f_1, \ldots, f_n) \longmapsto \left\{ \varphi_f : \begin{array}{l} E \to F \\ x \mapsto f_x \end{array} \right.$$

Si $f = (f_1 \ldots f_n) \in F^n$, φ_f est l'applicaᵒ de E ds F

telle : $\varphi_f(e_1) = f_1$, $\varphi_f(e_2) = f_2$ ...

Mq. φ est bijective.

Soit $\psi : F^E \longrightarrow F^n$

$$h \longmapsto (h(e_1), h(e_2) \ldots, h(e_n))$$

Vérifions que $\Psi \circ \varphi = id_{F^n}$ et $\varphi \circ \Psi = id_{F^E}$.

- Soit $(f_1 \dots f_n) \in F^n$, on pose $h = \varphi(f_1, \dots, f_n)$

donc : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $h(e_i) = f_i$

donc : $\Psi(h) = (h(e_1), \dots, h(e_n))$

$= (f_1, \dots, f_n)$

donc : $\Psi \circ \varphi(f_1 \dots f_n) = (f_1 \dots f_n)$.

- soit $h \in F^E$. $\Psi(h) = (h(e_1) \dots h(e_n))$

et par déf : $\varphi(\Psi(h))$ est l'applicaᵒ $\tilde{h}$ tq :

$\forall i$, $\tilde{h}(e_i) =$ la i^{e} composante de $\Psi(h)$

$= h(e_i)$

donc $\tilde{h} = h$ et $\varphi(\Psi(h)) = h$.

donc $\Psi = \varphi^{-1}$ et φ est bijective.

donc $\#(F^n) = \#(F^E)$

$$\begin{array}{c} \#(F^n) \\ \shortparallel \\ (\#F)^n \end{array} = (\#F)^{\#E}.$$

$\square$

<u>Def</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$, $p \in [\![1,n]\!]$.

<u>Rappel</u> : si E, F finis, si $\#E > \#F$, il n'y a pas d'injection de E ds F.

donc si $p > n$, il y a 0 injections de $[\![1,p]\!]$ ds $[\![1,n]\!]$.

Si $p \in [\![1,n]\!]$:

On appelle p-arrangement toute injection de $[\![1,p]\!]$ ds $[\![1,n]\!]$

<u>important</u> : 1 p-arrangement est de 1 manière de choisir p éléments parmi n éléments, en prenant en compte l'ordre des choix.

<u>Ex</u> : Combien y a-t-il de choix possibles d'1 menu à 3 éléments ds 1 restaurant proposant :

règles du resto :
• il faut dire ds quel ordre on veut les plats
• pas le droit de choisir 2 fois le m̂ plat

- carottes râpées ①
- dos de cabillaud ②
- crème brûlée ③
- paëlla d'Alicante ⑦
- poireau vinaigrette ④
- entrecôte ⑤
- tiramisu ⑥

1 menu possible : M_1 : (①, ⑦, ⑥) ; 1 autre : M_2 : (⑦, ⑥, ①)

On voit qu'1 choix de menu est 1 injection de $[\![1,3]\!]$ ds $[\![1,7]\!]$:

M_1 correspond à : φ_1 : $1 \longmapsto 1$; M_2 : φ_2 : $1 \longmapsto 7$

$2 \longmapsto 7$ $\quad\quad$ $2 \longmapsto 6$

$3 \longmapsto 6$ $\quad\quad$ $3 \longmapsto 1$

réciproquement, l'application : φ : $1 \mapsto 4$ correspond au menu

$2 \mapsto 5$ $\quad$ $((4), (5), (2))$

$3 \mapsto 2$

<u>Qu</u> : combien y a-t-il de p-arrangements ?

pas rigoureux : n possibilités pour le choix de l'image de 1

$(n-1)$ — — — 2

$(n-2)$ — — — 3

$\vdots$ $\quad\quad$ $\vdots$

$(n-p+1)$ — p

au total : $n \times (n-1) \times (n-2) \ldots \times (n-p+1)$ possibilités ie : $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ possibilités.

Ex : dans notre resto : $\dfrac{7!}{(7-3)!} = \dfrac{7!}{4!} = 7 \times 5 \times 6 = 210$.

Rq : 2.3.5 : Les p. arrange^t sont utilisés pour modéliser des tirages sans remise (en tenant compte de l'ordre des tirages).

Ex : course avec 10 chevaux.

On joue au hasard : quelle est la proba d'avoir le tiercé ds l'ordre ?

⚠ podium possible est 1 3-arrangement de [[1, 10]]
il y en a donc : $\dfrac{10!}{(10-3)!} = \dfrac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$.

proba d'avoir le tiercé dans l'ordre : $\frac{1}{720}$.

Notation : le nb. de p-arrangements de $[\![1,n]\!]$ est noté A_n^p.

Cor : A_n^n ? A_n^n est le nb. d'injections de $[\![1,n]\!]$ ds $[\![1,n]\!]$.

Mais "$n=n$", si $f : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$,

f injective $\iff$ f bijective

dc A_n^n est aussi le nb. de bijection de $[\![1,n]\!]$ ds lui-même,

dc $A_n^n = \# S_n$ (rappel : S_n = ens. des bijec° de $[\![1,n]\!]$ ds $[\![1,n]\!]$)

permutation de $[\![1,n]\!]$ ←

ie : $\# S_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$

Rq : 1 permuta° de $[\![1, n]\!]$ peut être vue comme 1 manière de classer les entiers de 1 à n.

ie : comme 1 mélange de ces entiers.

2.4 : Qu : combien y a-t-il de manières de choisir p éléments ds 1 ensemble de n éléts sans remise, sans tenir compte de l'ordre ?

Facile : si $p < 0$, ou $p > n$: 0 possibilités.

ds la suite : $p \in [\![0, n]\!]$.

Rq : choisir p élém^ts différents 2 à 2, ds 1 ensemble E à n élém^ts, sans tenir compte de l'ordre, c'est choisir 1 partie de E à p éléments.

Ce nombre de possibilités est donc aussi le nb. de parties de E à p éléments. On le note $\binom{n}{p}$.

Dc : $\binom{n}{0} = 1$ ($\emptyset$ est la seule partie de E ayant 0 élém^ts)

$\binom{n}{n} = 1$ (E est la seule partie de E ayant n élém^ts).

Th : $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!.(n-p)!}$

Démo : 1ère démo : qd on choisit p élé^ts parmi n,

si on tient compte de l'ordre, il y a A_n^p possibilités

si on note $e_1 \dots e_p$ les p élé^ts choisis,

il y a p! possibilités de les ordonner.

dc à 1 partie de E à p élé^ts correspondent p!

p-arrangé^ts.

ex : avec $p=3$: si la partie est $\{e_1, e_2, e_3\}$,

(e_1, e_2, e_3), (e_1, e_3, e_2), (e_2, e_1, e_3), (e_2, e_3, e_1),

(e_3, e_1, e_2) et (e_3, e_2, e_1) sont les $3! = 6$

3-arrangé^ts qui "contiennent" les 3 élé^ts e_1, e_2, e_3...

il y a dc p! fois plus de p-arrangements que de p-combinaisons (1 p-combinaison = 1 choix de p éléts parmi n, sans remise, sans tenir compte de l'ordre).

Déf : # p-combinaisons $= \left(C_n^p \text{, ancienne notaᵒ} \right)$

$= \binom{n}{p}$ (notaᵒ officielle)

Déf : $A_n^p = p! \times \binom{n}{p}$ & $\binom{n}{p} = \frac{1}{p!} \times A_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

<u>2ème méthode :</u> On mq. $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ (<u>2.4.7</u>)

or cette relaᵒ de réc. est aussi vérifiée par $u_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

or : $u_{n,0} = 1 = \binom{n}{0}$ et $u_{n,n} = 1 = \binom{n}{n}$

Ici $\binom{n}{p}$ et $u_{n,p}$ sont 2 familles prenant les même valeurs "au bord", et vérifiant la même relation de récurrence.

i.e. : $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ et $u_{n,p} = u_{n-1,p-1} + u_{n-1,p}$

On peut donc montrer par récurrence (sur n) qu'elles sont égales.

$\forall n \in \mathbb{N}$: $P(n)$: "$\forall p \in [\![0,n]\!],\ u_{n,p} = \binom{n}{p}$".

(exo laissé au lecteur)

idée : On construit le triangle de Pascal pour ces 2 familles : elles prennent les même valeurs au départ, et la règle de construction des valeurs suivantes est la même pour les 2 suites : elles vont prendre les même valeurs.

<u>Prop. 2.4.7</u> : formule de Pascal.

<u>Démo</u> : pour que la 2ème démo du th. précédent ait un sens, il faut démontrer la formule de Pascal sans utiliser

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Faisons-le par dénombrement :

$\binom{0}{0}=1$			
$\binom{1}{0}=1$	$\binom{1}{1}=1$		
$\binom{2}{0}=1$	$\binom{2}{1}=2$	$\binom{2}{2}=1$	
$\binom{3}{0}=1$	3	3	$\binom{3}{3}=1$

m̃ tableau :

$u_{n,p} = \binom{n}{p}$

$u_{0,0}=1$			
$u_{1,0}=1$	$u_{1,1}=1$		
$u_{2,0}=1$	2	$u_{2,2}=1$	
$u_{3,0}=1$	3	3	$u_{3,3}=1$

__ex__ : $E = \{e_1, e_2, e_3\}$

les 2-arrangements de E sont : (e_1,e_2), (e_2,e_1), (e_1,e_3), (e_3,e_1), (e_2,e_3), (e_3,e_2)

(il y en a 6 : $\dfrac{3!}{(3-2)!}=6$)

les 2-combinaisons de E sont les parties (ensemble) à 2 élts

et non des couples (à 2 élts) : $\{e_1, e_2\}$, $\{e_1, e_3\}$, $\{e_2, e_3\}$

pour chaque 2-comb. il y a $(2!)$ 2-arrangements

ex : $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, il y a $\frac{4!}{(4-3)!} = 24$ 3-arrangements

donnons-en 6 : (e_1, e_2, e_3), (e_1, e_3, e_2), (e_2, e_1, e_3), (e_2, e_3, e_1),
(e_3, e_1, e_2), (e_3, e_2, e_1)

ces 6-là correspondent à 1 seule 3-combinaison : $\{e_1, e_2, e_3\}$

on peut regrouper les 3-arr 6 par 6, il y a 6 fois plus de 3 arr que de 3-comb.

retour sur la démo de la formule de Pascal, méthode combinatoire :

Mq $\forall p \in [\![0,n]\!]$: $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$

• si $\underline{p=0}$: $\binom{n}{p} = 1$, $\binom{n-1}{p-1} = 0$, $\binom{n-1}{p} = 1$

OK

• si $\underline{p=n}$: $\binom{n}{p} = 1$, $\binom{n-1}{p-1} = 1$, $\binom{n-1}{p} = 0$ $[p > n-1]$

OK

• si : $1 \leq p \leq n-1$: on pose $\mathcal{P}_p(E)$ l'ens des parties de E à p élts (E est 1 ensemble de n élts).

donc : $\binom{n}{p} = \# \mathcal{P}_p(E)$.

Soit $a \in E$. Une partie de E est de 2 cas de figure : • elle contient a • elle ne contient pas a.

autrement dit : $F \subset E$: • $F \not\subset E \setminus \{a\}$ • $F \subset E \setminus \{a\}$.

avec ce raisonnement :

$$\mathcal{P}_p(E) = \overbrace{\{F \subset E \text{ tq. } \#F = p \text{ et } F \not\subset E\setminus\{a\}\}}^{=A} \sqcup \underbrace{\{F \subset E, \#F = p \text{ et } F \subset E\setminus\{a\}\}}_{=B}$$

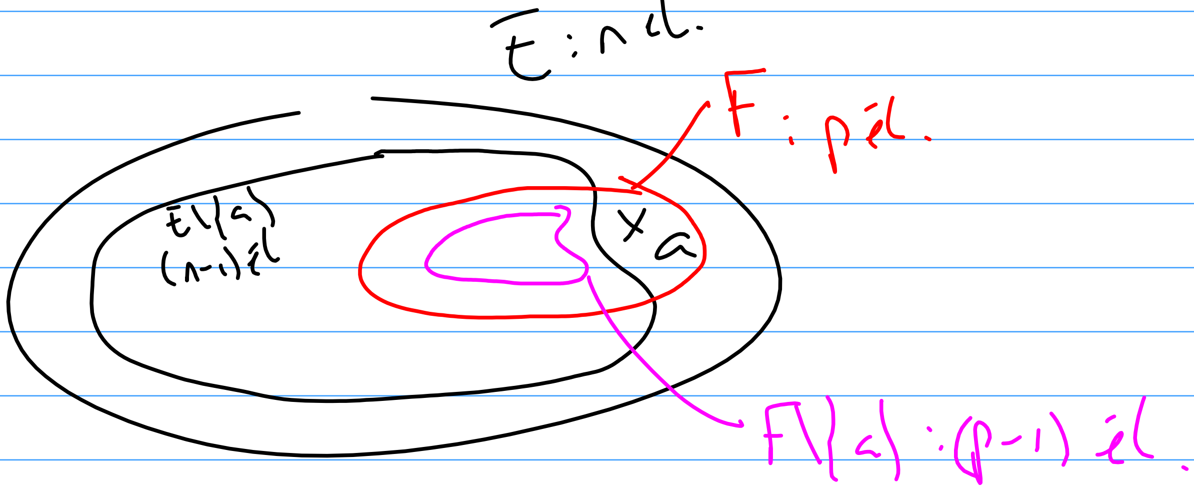
donc : $\#\mathcal{P}_p(E) = \#A + \#B$.

• On rq. B correspond à l'ens. des parties de $E\setminus\{a\}$ ayant p éléments : il y en a donc $\binom{n-1}{p}$ car $\# E\setminus\{a\} = n-1$

- Si $F \in A$: $\# F = p$, $a \in F$.

alors : $F \setminus \{a\}$ a $p-1$ éléments, et $F \setminus \{a\} \subset E \setminus \{a\}$

On rq : $F \in A \iff F \setminus \{a\}$ est 1 partie de $E \setminus \{a\}$ ayant $p-1$ éléments.



On peut aussi montrer que si $\mathcal{P}_{p-1}(E \setminus \{a\})$ est l'ens. des parties de $E \setminus \{a\}$ ayant $p-1$ éléments, alors :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{p-1}(E \setminus \{a\}) & \longrightarrow & A \\ G & \longmapsto & G \cup \{a\} \end{array}$$ est 1 bijection.

dc : $\# A = \# \mathcal{P}_{p-1}(E \setminus \{a\}) = \binom{n-1}{p-1}$

dc : $\# \mathcal{P}_p(E) = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$

$\# \mathcal{P}_p(E) = \binom{n}{p}$

$\square$

Newton, démo combinatoire :

$(x+y)^n$: on développe :

$(x+y) \times (x+y) \times \dots \times (x+y)$:

on a tous les termes développés est de la forme : $x^t y^b$

comme il y a n parenthèses, si on a choisi t fois x,

donc il reste $(n-t)$ fois y dc : $b = n - t$

donc $(x+y)^n$ est de la forme : $\sum_{k=0}^{n} X_k \, x^k y^{n-k}$

que vaut X_k ? X_k est le nb. de possibilités de choisir x comme terme dans k parenthèses parmi les n :

$$X_k = \binom{n}{k}$$ $\square$

Pr : Si E est fini, $\mathcal{P}(E)$ aussi et $\# \mathcal{P}(E) = 2^{\# E}$.

Dém : Si $F \in \mathcal{P}(E)$, $\# F \in [\![0, n]\!]$ (avec $n = \# E$)

donc $\mathcal{P}(E) = \bigsqcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k(E)$ [$\mathcal{P}_k(E)$ = les parties de E ayant k élts]

$\underline{ex}$: $E = \{a, b, c\}$, $\mathcal{P}(E) = \{\overbrace{\emptyset}^{0 \text{ él.}}, \overbrace{\{a\}, \{b\}, \{c\}}^{1}, \overbrace{\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}}^{2}, \overbrace{E}^{3}\}$

$= \{\emptyset\} \sqcup \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\} \sqcup \{\dots\} \sqcup \{E\}$

$= \mathcal{P}_0(E) \sqcup \mathcal{P}_1(E) \sqcup \mathcal{P}_2(E) \sqcup \mathcal{P}_3(E)$.

dc : $\#\mathcal{P}(E) = \sum_{k=0}^{n} \# \mathcal{P}_k(E)$

$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k}$

$= (1+1)^n = 2^n = 2^{\#E}$.

$\square$

$\underline{\text{Ex 2.4.6}}$: 10 chevaux, 1 tiercé dans le désordre = 1 partie de $[\![1, 10]\!]$ à 3 élts.

de tiercés dans le désordre : $\binom{10}{3}$

i.e : $\dfrac{10!}{3!\cdot 7!} = \dfrac{10\times 9\times 8}{3\times 2} = 10\times 3\times 4 = 120$

Rappel : de l'ordre : 720

Ex 2.4.10 : réfléchissez-y pour lundi.