

**Feuille d'entraînement n° 1, semaine du 30 mars au 5 avril**  
Intégration et dénombrement

Ces exercices sont totalement facultatifs. Ils sont plutôt simples, et peu originaux, pour vous permettre de réviser le cours, et voir si vous êtes capables de résoudre des exercices d'application (presque) directe du cours.

**Exercice 1** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Montrer que  $\int_0^1 t^n f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

**Exercice 2** Déterminer les limites suivantes sans pour autant calculer les intégrales correspondantes :

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{-x}^x \sin t^2 dt$    b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t}$    c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t dt}{t}$ .

**Exercice 3** Pour tout entier  $n$  on pose  $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$ . Calculer  $I_0$  et  $I_1$ . Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, (3+2n)I_n = 2nI_{n-1}$ .

**Exercice 4** Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . On considère la fonction  $\psi : x \rightarrow \int_a^b f(x+t) \cos(t) dt$ . Étudier la continuité de  $\psi$  (on pourra poser  $u = x+t$ .)

**Exercice 5** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$ . Dénombrer les objets suivants :

- 1) L'ensemble des relations sur  $E$ .
- 2) L'ensemble des relations réflexives sur  $E$ .
- 3) L'ensemble des relations symétriques sur  $E$ .
- 4) L'ensemble des relations antisymétriques sur  $E$ .
- 5) L'ensemble des relations réflexives et symétriques sur  $E$ .
- 6) L'ensemble des relations réflexives et anti-symétriques sur  $E$ .

**Exercice 6** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$  et  $A$  une partie de  $E$  de cardinal  $p$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

- 1) Combien y a-t-il de parties de  $E$  à  $k$  éléments contenant un et un seul élément de  $A$  ?
- 2) Combien y a-t-il de parties de  $E$  à  $k$  éléments contenant au moins un élément de  $A$  ?