



Matrices et applications linéaires - exercices supplémentaires, le retour

Exercice 1 () Soit E le sous ensemble de $M_3(\mathbb{R})$ défini par $E = \left\{ M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

- 1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ stable pour la multiplication des matrices. Calculer $\dim(E)$.
- 2) Soit $M(a, b, c)$ un élément de E . Déterminer, suivant les valeurs des paramètres a, b et $c \in \mathbb{R}$ son rang. Calculer (lorsque cela est possible) l'inverse $M(a, b, c)^{-1}$ de $M(a, b, c)$.
- 3) Donner une base de E formée de matrices inversibles et une autre formée de matrices de rang 1.

Exercice 2 () Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ non constante et vérifiant $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), f(AB) = f(A)f(B)$.

- 1) Déterminer $f(I_n)$ et $f(0_n)$.
- 2) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), A \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow f(A) \neq 0$.