XXI Applications linéaires et familles de vecteurs

22 septembre 2021

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'important est que $\mathbb{K}$ soit un corps, mais le programme se limite à $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Applications linéaires.

Soient E_1 et E_2 deux $\mathbb{K}$-ev ($\mathbb{K}$=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1.1 Définitions.

Définition 1.1.1.
On appelle *application linéaire* (ou *morphisme d'espaces vectoriels*) de E_1 dans E_2 toute application $\varphi : E_1 \to E_2$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in E_1^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y). \tag{1}$$

Autrement dit, l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images : une application linéaire préserve les combinaisons linéaires.

- L'ensemble des applications linéaires de E_1 dans E_2 est noté $\mathscr{L}(E_1, E_2)$.
- Une application linéaire de E_1 dans E_1 est appelé *endomorphisme*. On note $\mathscr{L}(E_1, E_1) = \mathscr{L}(E_1)$.
- Une application linéaire bijective est appelée *isomorphisme*. L'ensemble des isomorphismes de E_1 dans E_2 est noté $\mathscr{GL}(E_1, E_2)$.
- Un *automorphisme* est un endomorphisme qui est aussi un isomorphisme, on note $\mathscr{GL}(E_1) = \mathscr{GL}(E_1, E_1)$ l'ensemble des automorphismes de E_1, appelé *groupe linéaire*.
- Une application linéaire de E_1 dans $\mathbb{K}$ est une *forme linéaire*.

Remarque 1.1.2.
Une application linéaire φ de E_1 dans E_2 est un morphisme *de groupes* de $(E_1, +)$ dans $(E_2, +)$, avec une propriété supplémentaire vis-à-vis de la loi externe.

Remarque 1.1.3.
La propriété fondamentale des applications linéaires se généralise aux combinaisons linéaires d'un nombre quelconque de vecteurs : si $x_1, \dots, x_n \in E$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors $f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

De manière plus générale, pour toute famille $(x_i)_{i \in I}$ et toute famille à support fini $(\lambda_i)_{i \in I}$, on a

$$f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i)$$

Remarque 1.1.4 (Très utile en pratique)**.**
La propriété fondamentale des applications linéaires (1) est équivalente à

$$\forall (x,y) \in E_1^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \varphi(\lambda x + y) = \lambda \varphi(x) + \varphi(y) \tag{2}$$

ainsi qu'à

$$\forall (x,y) \in E_1^2, \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{et } \forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E_1, \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x).$$

La démonstration est analogue à celle pour les sev.

Exemple 1.1.5.
• Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Alors $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & u \cdot v \end{array}$ est une forme linéaire (on dit que le produit scalaire est linéaire à droite).
• Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{q,n}(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K}) \\ B & \mapsto & BA \end{array}$ est linéaire (on dit que le produit matriciel est linéaire à gauche).

Exemple 1.1.6.
$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (3x+y, 2z, x-y+z) \end{array}$ est un endomorphisme.

Remarque 1.1.7.
Toute application polynomiale (en plusieurs variables) faisant intervenir des termes de degrés différents de 1 n'est pas linéaire.

Exemple 1.1.8.
$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array}$ n'est pas une application linéaire, idem avec x^2 et $3x+2y+2$.

Exemple 1.1.9.
On note $\ell_{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles convergentes, c'est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \ell_{\mathbb{N}}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ (u_n) & \mapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \end{array}$ est une forme linéaire.

Exemple 1.1.10.
La dérivation, l'intégration sur un segment sont des opérations linéaires (en fonction de la fonction dérivée, de l'intégrande).

Exemple 1.1.11.
Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$.
L'application $\mathrm{ev}_a : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(a) \end{array}$ est une forme linéaire appelée *évaluation en a*.

Remarque 1.1.12 (Notations multiplicatives)**.**
Dans le cas des endomorphismes, on notera souvent uv pour signifier $u \circ v$.

De même, on notera souvent

$$u^k = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}},$$

où $k \in \mathbb{N}$, avec la convention $u^0 = \mathrm{Id}_E$.

Proposition 1.1.13.
Si $\varphi \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$, alors $\varphi(0_{E_1}) = 0_{E_2}$.

Démonstration.
Comme pour les morphismes de groupes : $\varphi(0_{E_1}) = \varphi(0_{E_1} + 0_{E_1}) = \varphi(0_{E_1}) + \varphi(0_{E_1})$. □

Montrons enfin un théorème central, qui permet de caractériser bon nombre d'applications linéaires.

Théorème 1.1.14.
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev, soit E_1, E_2 deux sev supplémentaires de E (*i.e.* $E = E_1 \oplus E_2$).

Soit $f_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$.

Alors, il existe une unique $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $f_{|E_1} = f_1$ et $f_{|E_2} = f_2$.

Démonstration.
On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $f_{|E_1} = f_1$ et $f_{|E_2} = f_2$, soit $x \in E$, $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ vérifiant $x = x_1 + x_2$. Alors

$$f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2).$$

Synthèse. Soit $x \in E$, soit $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ vérifiant $x = x_1 + x_2$. On pose $f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$. Tout d'abord, par définition et par linéarité de f_2,

$$f(x_1) = f(x_1 + 0_E) = f_1(x_1) + f_2(0_E) = f_1(x_1).$$

Ainsi, $f_{|E_1} = f_1$. De même, $f_{|E_2} = f_2$.

Vérifions donc la linéarité de f. Soit $x, y \in E$, $x_1, y_1 \in E_1$ et $x_2, y_2 \in E_2$ vérifiant $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors

$$\lambda x + \mu y = \underbrace{\lambda x_1 + \mu y_1}_{\in E_1} + \underbrace{\lambda x_2 + \mu y_2}_{\in E_2},$$

donc par définition

$$f(\lambda x + \mu y) = f_1(\lambda x_1 + \mu y_1) + f_2(\lambda x_2 + \mu y_2).$$

Par linéarité de f_1 et de f_2, on a donc

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= \lambda f_1(x_1) + \mu f_1(y_1) + \lambda f_2(x_2) + \mu f_2(y_2) \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y). \end{aligned}$$

Ainsi, f est linéaire. □

1.2 Opérations sur les applications linéaires.

Dans toute la suite, E_1, E_2 et E_3 sont des $\mathbb{K}$-ev.

Théorème 1.2.1.
1. $\mathscr{L}(E_1, E_2)$ est un sev de $(\mathscr{F}(E_1, E_2), +, \cdot)$.
2. Si $f \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$ et $g \in \mathscr{L}(E_2, E_3)$, alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E_1, E_3)$.
3. Soit $f \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$. Alors les applications

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E_2, E_3) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E_1, E_3) \\ g & \longmapsto & g \circ f \end{array} \right.$$

et

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E_3, E_1) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E_3, E_2) \\ g & \longmapsto & f \circ g \end{array} \right.$$

sont linéaires.

Démonstration.
Élémentaire. □

Remarque 1.2.2.
Ces résultats montrent, avec $E_1 = E_2 = E_3$, que $(\mathscr{L}(E_1), +, \circ)$ est un anneau.

En général, cet anneau n'est pas commutatif.

Exemple 1.2.3.
On pose $E_1 = \mathscr{C}^{+\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: c'est un sev de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (le montrer). On note

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E_1 & \to & E_1 \\ f & \mapsto & f' \end{array} \text{ et } \psi : \begin{array}{ccc} E_1 & \to & E_1 \\ f & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xf(x) \end{array} \right. \end{array}$$

On constate alors que $\psi \circ \varphi \neq \varphi \circ \psi$.

1.3 Noyau et image.

Théorème 1.3.1.
Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$, A un sev de E_1 et B un sev de E_2.

1. L'image directe de A par φ est un sev de E_2.
2. L'image réciproque de B par φ est un sev de E_1.

Démonstration.
1. On a bien $\varphi(A) \subset E_2$ ainsi que $0_{E_2} \in \varphi(A)$, car $\varphi(0_{E_1}) = 0_{E_2}$ et $0_{E_1} \in A$.
   Soit $(y_1, y_2) \in \varphi(A)^2$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et soit $(x_1, x_2) \in A^2$ vérifiant $y_1 = \varphi(x_1)$ et $y_2 = \varphi(x_2)$. Alors, comme A est un sev de E_1, on a $x_1 + \lambda x_2 \in A$ et donc, par linéarité de φ, on a $y_1 + \lambda y_2 = \varphi(x_1) + \lambda\varphi(x_2) = \varphi(x_1 + \lambda x_2) \in \varphi(A)$. Ainsi, $\varphi(A)$ est un sev de E_2.
2. On a bien $\varphi^{-1}(B) \subset E_1$ ainsi que $0_{E_1} \in \varphi^{-1}(B)$, car $\varphi(0_{E_1}) = 0_{E_2}$ et $0_{E_2} \in B$.
   Soit $(x_1, x_2) \in \varphi^{-1}(B)^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, $\varphi(x_1) \in B$ et $\varphi(x_2) \in B$ et, par linéarité de φ, $\varphi(x_1 + \lambda x_2) = \varphi(x_1) + \lambda\varphi(x_2) \in B$, car B est un sev de E_2. Ainsi, $x_1 + \lambda x_2 \in \varphi^{-1}(B)$ et donc $\varphi^{-1}(B)$ est un sev de E_1.

□

Définition 1.3.2.
Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$.

1. On appelle *noyau* de φ noté $\operatorname{Ker}\varphi$, l'ensemble $\{ x \in E_1 \mid \varphi(x) = 0_{E_2} \}$
2. On appelle *image* de φ et on note $\operatorname{Im}\varphi$, l'ensemble $\{ \varphi(x) \mid x \in E_1 \}$.

Remarque 1.3.3.
Le théorème 1.3.1 assure ainsi que $\operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$ sont des sev.

Remarque 1.3.4.
Pour montrer qu'un ensemble est muni d'une structure d'ev, on essaiera TOUJOURS de l'identifier comme noyau ou image d'une application linéaire. Sinon, on essaiera de l'identifier directement comme sev. d'un ev. de référence.
Rappel : on ne revient JAMAIS à la définition générale d'un ev.

Théorème 1.3.5.
Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$.

1. φ est injective si et seulement si $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$.
2. φ est surjective si et seulement si $\operatorname{Im}\varphi = E_2$.

Démonstration.
1. Deux méthodes : refaire comme la démo analogue pour les morphismes de groupes, ou utiliser directement ce théorème : on choisit la deuxième méthode. Il suffit alors remarquer que $\operatorname{Ker}\varphi$ est le même que l'on adopte le point de vue «groupe» ou le point de vue «espace vectoriel».
   On peut aussi refaire la première méthode pour s'entraîner.

□

Remarque 1.3.6.
Les calculs de noyaux et d'images se ramènent souvent à des résolutions de systèmes linéaires.

Exemple 1.3.7.
Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$, avec

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x & + & 2y & + & 5z \\ & - & y & - & z \\ -x & + & y & - & 2z \end{pmatrix} \end{array} \right. .$$

Exemple 1.3.8.
Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ f & \mapsto & f \times \sin \end{array}$. On montre que φ est linéaire, puis que φ n'est pas injective, en trouvant une fonction f non nulle dans $\operatorname{Ker}\varphi$. Par exemple $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.
On montre enfin que $\psi = \varphi|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R})}$ est injective, en montrant que son noyau est réduit à $\{0\}$.

On peut maintenant unifier les résultats sur les structures des solutions de nombreux problèmes linéaires étudiés auparavant (systèmes linéaires, équations différentielles linéaires).

Proposition 1.3.9.
Soit $f \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$ et $a \in E_2$. Alors $f^{-1}(\{a\})$ est soit vide, soit un sea de E_1 de direction $\operatorname{Ker} f$.

Remarque 1.3.10.
$f^{-1}(\{a\})$ est l'ensemble des solutions de l'équations $f(x) = a$, avec $x \in E_1$.

Démonstration.
Reprendre chaque preuve effectuée lorsque l'on a rencontré ce type de structure de solution. □

Exemple 1.3.11.
L'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n_i n \mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n - 4$ est le sea de direction $\operatorname{Vect}((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, 1)$ et passant par $(4n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 1.3.12.
On retrouve ainsi que l'ensemble des solutions d'un système linéaire est soit vide soit un sea.

1.4 Isomorphismes.

Un isomorphisme transporte la structure d'ev, comme pour les groupes.

⚠ Dire que E_1 et E_2 sont isomorphes ne signifie pas que toute application linéaire de E_1 dans E_2 est un isomorphisme. On peut donner un exemple : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x, 0)$.

Théorème 1.4.1.
Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$.

1. Si φ est un isomorphisme, alors φ^{-1} aussi.
2. Une composée d'isomorphismes est un isomorphisme : si $\varphi \in \mathscr{GL}(E_1, E_2)$ et $\psi \in \mathscr{GL}(E_2, E_3)$, alors $\psi \circ \varphi \in \mathscr{GL}(E_1, E_3)$.
3. $(\mathscr{GL}(E_1), \circ)$ est un groupe appelé *groupe linéaire* (groupe des automorphismes).

Démonstration.
1. Soit $(y_1, y_2) \in E_2^2$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et soit $(x_1, x_2) \in E_1^2$ vérifiant $x_1 = \varphi^{-1}(y_1)$ et $x_2 = \varphi^{-1}(y_2)$. On a alors, par linéarité de φ, $\varphi(x_1 + \lambda x_2) = \varphi(x_1) + \lambda\varphi(x_2) = y_1 + \lambda y_2$, donc $\varphi^{-1}(y_1 + \lambda y_2) = \varphi^{-1}(y_1) + \lambda\varphi^{-1}(y_2)$. Ainsi, φ^{-1} est linéaire.
2. On a déjà vu que $\psi \circ \varphi$ est bijective et linéaire : c'est fini !
3. Montrons que c'est un sous-groupe du groupe des permutations de E_1 : $(S_{E_1}, \circ)$. L'application identité est bijective et linéaire, donc $\mathrm{Id}_{E_1} \in \mathscr{GL}(E_1)$. Les deux résultats précédents montrent que $\mathscr{GL}(E_1)$ est stable par passage à l'inverse et composition, ce qui permet de conclure.

□

Remarque 1.4.2.
Notation : Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{GL}(\mathbb{K}^n)$ est noté $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 1.4.3.

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x - y, x + 2y) \end{array} \in \mathscr{GL}_2(\mathbb{R})$$

On résout le système $\varphi(x, y) = (a, b)$, et cela montre que φ est bijective, et donne l'expression de φ^{-1}.

Remarque 1.4.4.
$\mathrm{GL}(E)$ ayant une structure de groupe, on utilise les notations multiplicatives usuelles.

Notamment, si u est un automorphisme de E et si $k \in \mathbb{N}$, on note

$$u^{-k} = (u^k)^{-1} = (u^{-1})^k = \underbrace{u^{-1} \circ \cdots \circ u^{-1}}_{k \text{ fois}}.$$

2 Familles de vecteurs.

Dans cette partie, sauf mention expresse du contraire, I désigne un ensemble et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E indexée par cet ensemble.

Définition 2.0.1.
Étant donné deux familles de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_j)_{j\in J}$, on note $(x_i)_{i\in I} \uplus (y_j)_{j\in J}$ leur concaténation.

Remarque 2.0.2.
Ce n'est pas une notation officielle et nous ne définirons pas formellement cette notion. On pourra aussi utiliser le symbole $\biguplus_{i=1}^{n}$ pour écrire la concaténation de n familles de vecteurs de E.

Exemple 2.0.3.
$(x_1, x_2, x_3) \uplus (y_1, y_2) = (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)$.

2.1 Image du sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.

On utilisera beaucoup le résultat suivant.

Proposition 2.1.1.
Soit E et F deux espaces vectoriels. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E et $f : \mathscr{L}(E, F)$. Alors l'image directe du sous-espace de E engendré par la famille $(x_i)_{i\in I}$ est le sous-espace de F engendré par la famille $(f(x_i))_{i\in I}$:

$$f\left(\operatorname{Vect}\left((x_i)_{i\in I}\right)\right) = \operatorname{Vect}\left((f(x_i))_{i\in I}\right)$$

Démonstration.
Posons $V = \operatorname{Vect}\left((x_i)_{i\in I}\right)$. $f(V)$ est un sous-espace vectoriel de F. Comme V contient tous les x_i pour $i \in I$, $f(V)$ contient tous les $f(x_i)$ pour $i \in I$. Donc il contient le sous-espace engendré par les $f(x_i)$: $\operatorname{Vect}\left((f(x_i))_{i\in I}\right) \subset f(V)$.

Réciproquement, soit y un élément de $f(V)$. y est l'image d'un élément x de V. Alors x est une combinaison linéaire $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ (où la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ est à support fini), donc on a

$$\begin{aligned}
y &= f(x) \\
&= f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i\right) \\
&= \sum_{i\in I} \lambda_i f(x_i) \\
&\in \operatorname{Vect}\left((f(x_i))_{i\in I}\right)
\end{aligned}$$

Donc $f(V) \subset \operatorname{Vect}\left((f(x_i))_{i\in I}\right)$. □

Exemple 2.1.2.
Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P' - XP'' \end{array}$. Donner $\operatorname{Im}\varphi$.

2.2 Sev engendré par une famille finie.

Dans cette sous-partie, on s'intéressera exclusivement au cas où $I = [\![1, n]\!]$. La famille $(x_i)_{i\in I}$ est donc le n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$.

Proposition 2.2.1.
$\operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \operatorname{Im}\psi$ où ψ est l'application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans E

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \end{array}$$

Proposition 2.2.2.
1. $\operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ n'est pas modifié si l'on permute deux vecteurs de $(x_1, \dots, x_n)$.
2. si pour un $i \in [\![1, n]\!]$ on a x_i qui est combinaison linéaire des autres vecteurs (en particulier, si $x_i = 0$), alors $\operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$, c'est-à-dire que l'on peut ôter x_i de la famille sans modifier le sev engendré.
3. $\operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ n'est pas modifié si l'on remplace un des x_i par une combinaison linéaire en $x_1, \dots, x_n$ dont le coefficient en x_i est non nul.

Démonstration.
1. C'est une conséquence directe du fait que $\operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \operatorname{Vect}\{ x_1, \dots, x_n \}$.
2. C'est une conséquence du fait que pour toutes parties X et Y de E, si $X \subset Y \subset \operatorname{Vect}(X)$, alors
$$\operatorname{Vect}(X) \subset \operatorname{Vect}(Y) \subset \operatorname{Vect}(\operatorname{Vect}(X)) = \operatorname{Vect}(X).$$
3. Quitte à permuter les vecteurs, on peut supposer que $i = n$. Considérons un vecteur x' obtenu par combinaison linéaire des x_k pour $k \in [\![1, n]\!]$ dont le coefficient de x_n est non nul. Posons $V = \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et $V' = \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1}, x')$ et montrons $V = V'$.

Posons $V'' = \text{Vect}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x')$. x' étant combinaison linéaire des x_k pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a $V'' = V$ d'après le point précédent.

De plus, le coefficient de x_n dans cette combinaison linéaire est non nul, donc x_n peut s'exprimer comme combinaison linéaire de x_1, …, x_{n-1} et x'. Donc, toujours d'après le point précédent, $V'' = V'$. On a donc $V = V'' = V'$.

□

Remarque 2.2.3.
0_E est toujours combinaison linéaire de toute famille de vecteurs : on peut donc « l'enlever » d'une famille sans modifier le sev engendré par cette famille.

Exemple 2.2.4.
Dans $\mathbb{R}^3$, avec $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 1, 0)$.

1.
$$\begin{aligned}\text{Vect}\,(u_1, u_2, u_3) &= \text{Vect}\,(u_1, u_2)\\ &= \text{Vect}\,(u_1, u_3).\end{aligned}$$

2. Déterminer une CNS sur $w \in \mathbb{R}^3$ pour que $\text{Vect}\,(u_1, u_2, u_3, w) \neq \text{Vect}\,(u_1, u_2, u_3)$.

Exemple 2.2.5.
On veut construire une base à partir de la base canonique :

$$\begin{aligned}\text{Vect}\,((1, 0), (0, 1)) &= \text{Vect}\,((2, 3), (0, 1))\\ &= \text{Vect}\,((2, 3), (1, 2)).\end{aligned}$$

La famille $((2, 3), (1, 2))$ est donc une base de $\mathbb{R}^2$.

C'est l'autre sens qui est le plus souvent utilisé, et qui fait apparaître un pivot de Gauss (encore et toujours) :

$$\begin{aligned}\text{Vect}\,((3, 4), (1, 5)) &= \text{Vect}\,((0, -11), (1, 5))\\ &= \text{Vect}\,((0, 1), (1, 5))\\ &= \text{Vect}\,((0, 1), (1, 0)).\end{aligned}$$

La famille $((3, 4), (1, 5))$ est donc une base de $\mathbb{R}^2$.

2.3 Familles génératrices.

Définition 2.3.1.
On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est *génératrice* ou qu'elle *engendre* le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E si $E = \text{Vect}_{\mathbb{K}}\left((x_i)_{i \in I}\right)$.

Remarque 2.3.2.
Ainsi, dans le cas où $I = [\![1, n]\!]$, $(x_i)_{i \in I}$ est génératrice si et seulement si l'application ψ de la proposition 2.2.1 est surjective.

Proposition 2.3.3.
La famille $(x_i)_{i \in I}$ est *génératrice* si et seulement si tout élément de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs de cette famille.

Démonstration.
On a $\text{Vect}_{\mathbb{K}}\left((x_i)_{i \in I}\right) \subset E$ puisque tous les éléments de $(x_i)_{i \in I}$ appartiennent à E. On a donc

$$E = \text{Vect}_{\mathbb{K}}\left((x_i)_{i \in I}\right) = E \iff E \subset \text{Vect}_{\mathbb{K}}\left((x_i)_{i \in I}\right)$$

Qui est exactement ce que dit la proposition. □

Exemple 2.3.4.
1. Dans $\mathbb{R}^3$, $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ est génératrice car $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = xe_1 + ye_2 + ze_3$. Se généralise à $\mathbb{R}^n$ avec base canonique.
2. Dans $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{R}$-ev, une famille génératrice est $\{1, i\}$.
3. Dans $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{C}$-ev, une famille génératrice est $\{z\}$, pour n'importe quel $z \neq 0$. On peut noter $\mathbb{C} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(1, i) = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(z)$.
4. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, la famille $\left(X^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}[X]$. Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$, la famille $\left(X^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}[X]$. En revanche, dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$, la famille $\left(X^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{C}[X]$ (car $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(X^k\right)_{k \in \mathbb{N}}\right) = \mathbb{R}[X] \neq \mathbb{C}[X]$.

5. Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}(X)$, d'après le cours sur la décomposition en élément simple, on obtient une famille génératrice de $\mathbb{C}(X)$ en regroupant les familles $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{(X-\alpha)^k}\right)_{(\alpha,k)\in\mathbb{C}\times\mathbb{N}}$.

Remarque 2.3.5.
On a aussi la notion de famille génératrice d'un sev F de E.

Remarque 2.3.6.
On appelle *droite vectorielle* tout sev engendré par un seul vecteur (non nul), qui est alors *vecteur directeur*. Correspond bien à ce qui se passe dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
Idem avec *plan vectoriel* et deux vecteurs.

Proposition 2.3.7.
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces-vectoriels, soit V un sev de E, $f \in \mathscr{L}(E,F)$, soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de V. Alors, $(f(x_i))_{i\in I}$ est une famille génératrice de $f(V)$.

Démonstration.
C'est juste une réécriture de la proposition 2.1.1 □

Exercice 2.3.8.
Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x + 3y + 2z \\ x + 4y + z \\ y - z \end{pmatrix} \end{array}.$$

Déterminer une famille génératrice (la plus petite possible) de

$$f\left(\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)\right).$$

Corollaire 2.3.9.
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ avec f **surjective** et $(x_i)_{i\in I}$ une famille **génératrice** de E. Alors l'image de cette famille par f est une famille génératrice de F.

Démonstration.
C'est une conséquence directe de la proposition 2.1.1 :

$$\begin{aligned} F &= f(E) && \text{par surjectivité de } F \\ &= f\left(\mathrm{Vect}\left((x_i)_{i\in I}\right)\right) && \text{car } (x_i)_{i\in I} \text{ génératrice} \\ &= \mathrm{Vect}\left((f(x_i))_{i\in I}\right) && \text{par prop. 2.1.1} \end{aligned}$$

□

Exemple 2.3.10.
Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x - y \\ 2x + y + z \\ x + 3y + 2z \end{pmatrix} \end{array}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)) \\ &= \mathrm{Vect}((3,2,1), (-1,1,3), (0,1,2)) \\ &= \mathrm{Vect}((0,5,10), (-1,1,3), (0,1,2)) \\ &= \mathrm{Vect}((-1,1,3), (0,1,2)). \end{aligned}$$

Proposition 2.3.11.
1. Une famille génératrice à laquelle on ajoute des vecteurs est toujours génératrice.
2. On peut retirer tout vecteur qui est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille (c'est une condition suffisante mais elle est en fait aussi nécessaire).

Démonstration.
1. Découle du fait que l'inclusion de deux parties implique l'inclusion des sous-espaces engendrés.
2. Découle du fait que pour toutes parties X et Y de E, $X \subset Y \subset \mathrm{Vect}(X)$ implique $\mathrm{Vect}(X) = \mathrm{Vect}(Y)$.

□

Exemple 2.3.12.
1. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère $\mathscr{P}$ l'ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$\mathscr{P} : \begin{cases} x - y + 2t = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

où (x,y,z,t) sont les coordonnées dans $\mathbb{R}^4$. On trouve

$$\mathscr{P} = \mathrm{Vect}((1,0,1,-1/2), (0,1,1,1/2))$$

donc c'est bien un plan.

2. On considère l'ensemble S des suites réelles vérifiant $u_{n+2} + 2u_{n+1} - 3u_n = 0$. S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (le vérifier). On veut en donner une famille génératrice. On résout comme dans le cours, on trouve deux vecteurs générateurs. Ça marcherait pareil avec les solutions d'une équation différentielle.

Théorème 2.3.13.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors toute concaténation d'une famille génératrice de F et d'une famille génératrice de G est une famille génératrice de $F + G$.

Démonstration.
Soit $(x_i)_{i\in I_1}$ une famille génératrice de F et $(x_i)_{i\in I_2}$ une famille génératrice de G. Notons $(x_i)_{i\in I} = (x_i)_{i\in I_1} \uplus (x_i)_{i\in I_2}$

Toute combinaison linéaire d'éléments de la famille $(x_i)_{i\in I}$ est dans $F + G$.

Réciproquement, tout élément de $F + G$ s'écrit comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. Le premier est une combinaison linéaire d'éléments de la famille $(x_i)_{i\in I_1}$ et le second de la famille $(x_i)_{i\in I_2}$. Donc leur somme est une combinaison linéaire d'éléments de la famille $(x_i)_{i\in I}$ □

2.4 Familles libres et liées.

Définition 2.4.1.
On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est *libre* si toute combinaison linéaire d'éléments de $(x_i)_{i\in I}$ dont la valeur est 0_E est la combinaison triviale, c'est-à-dire n'a que des coefficients nuls. Formellement, la famille est libre si et seulement si, pour toute famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ à support fini, on a

$$\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in I \ \lambda_i = 0$$

Dans le cas où $I = [\![1, n]\!]$, cette condition s'écrit : pour tout n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de scalaires, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \Rightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$$

Une famille non libre est dite *liée*.

Remarque 2.4.2.
— Une famille est donc liée si et seulement s'il existe une combinaison linéaire de valeur nulle à coefficients non tous nuls.
— Si l'un des x_i est nul, la famille est liée.
— Si la famille comporte deux fois le même vecteur, elle est liée.

Remarque 2.4.3.
Ainsi, dans le cas où $I = [\![1, n]\!]$, $(x_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si l'application ψ de la proposition 2.2.1 est injective.

Proposition 2.4.4.
La famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si tout élément x de E s'écrit d'au plus une façon comme combinaison linéaire d'éléments de $(x_i)_{i\in I}$.

Démonstration.Sens direct Supposons que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre et montrons que tout élément x de E s'écrit d'au plus une façon comme combinaison linéaire d'éléments de $(x_i)_{i\in I}$.

Soit x un élément de E. Supposons qu'il existe deux familles de scalaires à support fini $(\lambda_i)_{i\in I}$ et $(\mu_i)_{i\in I}$ vérifiant

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i = \sum_{i\in I} \mu_i x_i$$

Alors on a

$$0_E = x - x = \sum_{i\in I} (\lambda_i - \mu_i) x_i.$$

Or la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre, donc pour tout $i \in I$, on a $\lambda_i - \mu_i = 0$.

Donc tout élément de E s'écrit d'au plus une façon comme combinaison linéaire d'éléments de $(x_i)_{i\in I}$.

Sens indirect Supposons que tout élément de E s'écrit d'au plus une façon comme combinaison linéaire d'éléments de E et montrons que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre.

Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires à support fini vérifiant

$$\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0_E.$$

Alors en posant $\mu_i = 0$ pour tout $i \in I$, on a aussi

$$\sum_{i\in I} \mu_i x_i = 0_E.$$

Ainsi, 0_E s'écrit de deux façons comme combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i\in I}$: les deux familles $(\lambda_i)_{i\in I}$ et $(\mu_i)_{i\in I}$ sont donc la même famille, donc

$$\forall i \in I \quad \lambda_i = 0$$

La famille $(x_i)_{i\in I}$ est donc libre.

□

Proposition 2.4.5.
La famille $(x_i)_{i\in I}$ est *libre* si et seulement si aucun élément de cette famille ne peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres éléments de la famille.

Démonstration.
On fera ici la démonstration dans le cas où $I = [\![1, n]\!]$ qui est le cas qu'on rencontrera le plus fréquemment par la suite. La démonstration n'est pas plus compliquée dans le cas général.

Montrons que la famille considérée est liée, c'est-à-dire qu'il existe une combinaison linéaire non triviale valant 0, si et seulement si au moins un élément de la famille s'écrit comme combinaison linéaire des autres éléments de la famille.

Sens indirect Supposons qu'il existe une combinaison linéaire non triviale de $(x_1, \dots, x_n)$ valant 0. Notons λ_1, ... λ_n ses coefficients. L'un d'eux au moins étant non nul, on peut supposer $\lambda_1 \neq 0$, quitte à permuter les vecteurs. Alors on a

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E,$$

donc

$$x_1 = \sum_{k=2}^{n} \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right) x_k.$$

Donc x_1 est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

Sens direct Supposons que x_1 s'écrive

$$x_1 = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k x_k,$$

où x_2, ..., x_n sont d'autres éléments de la famille et λ_1, ..., λ_k sont des scalaires. Alors, en posant $\lambda_1 = -1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0_E.$$

Cette combinaison linéaire n'est pas triviale puisque λ_1 n'est pas nul, donc la famille est liée.

(le cas général fonctionne de même). □

Exemple 2.4.6.
1. Dans $\mathbb{R}^2$: une famille de deux vecteurs est liée si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires, donc une famille de deux vecteurs est libre si et seulement si c'est une base.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, une famille de 3 vecteurs est liée si et seulement si les 3 vecteurs sont coplanaires, donc une famille de trois vecteurs est libre si et seulement si c'est une base.

Remarque 2.4.7.
Dans $\mathbb{R}^n$, si on utilise la définition pour chercher si une famille est libre, on est ramené à la résolution d'un système linéaire (une fois de plus).

Exemple 2.4.8.
• Montrer que $((1, 0), (-1, 2), (2, 4))$ est liée dans $\mathbb{R}^2$.
• Montrer que $((1, 0, 0), (0, -1, 1), (1, 0, 2))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.
• $(x \mapsto \sin x, x \mapsto \sin 2x, x \mapsto \sin 3x)$ est libre.

Définition 2.4.9.
Soit x, y deux vecteurs de E. On dit que
- x est colinéaire à y s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda y$;
- x et y sont colinéaires si x est colinéaire à y ou si y est colinéaire à x.

Remarque 2.4.10.
Si x et y sont tous les deux non nuls, x est colinéaire à y si et seulement si x et y sont colinéaires.

Proposition 2.4.11.
La famille vide est toujours libre.

Soit x et y deux vecteurs de E.
1. (x) est libre si et seulement si $x \neq 0_E$.
2. (x, y) est libre si et seulement si x et y ne sont pas colinéaires.

Démonstration.
Élémentaire : à vous de le faire. □

Cet argument n'est valable que pour deux vecteurs, comme nous l'avons vu plus haut.

Proposition 2.4.12.
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ avec f **injective** et $(x_i)_{i\in I}$ une famille **libre** de E. Alors l'image de cette famille par f est libre.

Démonstration.
Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires à support fini tel que

$$\sum_{i\in I} \lambda_i f(x_i) = 0$$

Alors, par linéarité de f,

$$\sum_{i\in I} f(\lambda_i x_i) = 0.$$

Or f est injective donc

$$\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$$

Or $(x_i)_{i\in I}$ est libre, donc pour tout $i \in I$, $\lambda_i = 0$. □

Définition 2.4.13.
Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. Pour tout $J \subset I$, on dit que $(x_i)_{i\in J}$ est une sous-famille de $(x_i)_{i\in I}$ et que $(x_i)_{i\in I}$ est une sur-famille de $(x_i)_{i\in J}$.

Théorème 2.4.14.
1. Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
2. Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
3. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre, alors $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ est libre si et seulement si x_{n+1} n'est pas combinaison linéaire des $x_1, \dots, x_n$.

Démonstration.
1. Il existe une combinaison linéaire nulle non triviale de la sous-famille. Il suffit de la compléter par des 0 pour en obtenir une pour la sur-famille.
2. C'est la contraposée du point précédent.
3. Le sens direct est évident. Pour l'autre sens, par contraposée supposons que $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ est liée. Alors il existe une combinaison linéaire nulle non triviale de $x_1, \dots x_n$, x_{n+1}. Si le coefficient de x_{n+1} est nul, il s'agit d'une combinaison linéaire des $x_1, \dots,$ x_n. Sinon, on peut exprimer x_n comme combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_n$.

□

Exemple 2.4.15.
Dans $\mathbb{R}^2$, toute famille de trois vecteurs ou plus est liée : si les deux premiers vecteurs sont liés, la famille l'est aussi. Sinon, le troisième vecteur est combinaison linéaire des deux premiers, car les deux premiers forment une base.
Idem dans $\mathbb{R}^3$ avec les familles de plus de 4 vecteurs.

Proposition 2.4.16.
Soient F, G deux sev d'un $\mathbb{K}$-ev E, et $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ deux familles libres de F, G respectivement.

Si $F+G$ est directe, alors $\mathscr{F} \uplus \mathscr{G}$ est une famille libre.

Démonstration.
Notons $\mathscr{F} = (f_i)_{i\in I}$ et $\mathscr{G} = (g_j)_{j\in J}$.

Soit $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^I$, $(\mu_j) \in \mathbb{K}^J$ à support fini telles que

$$\underbrace{\sum_{i\in I} \lambda_i f_i}_{\in F} + \underbrace{\sum_{j\in J} \mu_j g_j}_{\in G} = 0_E.$$

Comme les $F+G$ est directe, on a

$$\sum_{i\in I} \lambda_i f_i = \sum_{j\in J} \mu_j g_j = 0_E.$$

Comme $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont libres, tous les λ_i, μ_j sont nuls. Ainsi, $\mathscr{F} + \mathscr{G}$ est libre. □

Enfin, terminons par un résultat bien pratique :

Définition 2.4.17.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{K}^n$. Soit $p \in [\![1,n]\!]$ et $(v_1, \cdots, v_p)$ une famille de vecteurs de E. Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, notons $(v_{i,j})_{j\in[\![1,n]\!]}$ les coordonnées du vecteur v_i. On dit que la famille $(v_1, \cdots, v_p)$ est *échelonnée* si :
1. pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ il existe $r_i \in [\![1,n]\!]$ tel que $v_{i,r_i} \neq 0$ et pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $j > r_i$, $v_{i,j} = 0$;
2. la suite des r_i est strictement croissante.

Exemple 2.4.18.
Dans $\mathbb{R}^5$, $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\0\\-3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\\-5\end{pmatrix}\right)$ est une famille échelonnée.
La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\0\\-3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\\-5\end{pmatrix}\right)$ n'en est pas une.

Remarque 2.4.19.
Avec les mêmes notations, si $0 \leqslant k < i \leqslant p$, alors $v_{k,r_i} = 0$.

Remarque 2.4.20.
Une famille échelonnée ne peut contenir de vecteur nul.

Proposition 2.4.21.
Toute famille échelonnée est libre.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{K}^n$. Soit $p \in [\![1, n]\!]$ et $(v_1, \cdots, v_p)$ une famille échelonnée de vecteurs de E.
Le résultat est assez intuitif et se voit facilement, par exemple en considérant le système $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i = 0$. En écrivant le système, on se rend compte qu'en remontant les lignes, les coefficients λ_i s'annulent les uns après les autres (le faire sur un exemple).
Donnons tout de même une démonstration propre, par récurrence sur le nombre de vecteurs. Pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, posons (H_p) : toute famille échelonnée de E ayant p vecteurs non nuls est libre.
Un vecteur non nul formant à lui seul une famille libre, (H_1) est immédiate.
Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$ tel que (H_p) soit vraie. Soit $(v_1, \cdots, v_{p+1})$ une famille échelonnée à vecteurs non nuls. Définissons les r_i comme dans la définition 2.4.17. Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_{p+1}$ des scalaires tels que $\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i v_i = 0$. La r_{p+1}-ème ligne de ce système s'écrit $\lambda_{p+1} v_{p+1, r_{p+1}} = 0$, puisque pour tout $i \leqslant p$, $v_{i, r_{p+1}} = 0$, par définition d'une famille échelonnée. Mais comme $v_{p+1, r_{p+1}} \neq 0$, alors $\lambda_{p+1} = 0$. Il reste alors $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i = 0$. Mais $(v_1, \cdots, v_p)$ est échelonnée, donc par hypothèse de récurrence elle est libre, ce qui implique que tous les λ_i sont nuls, d'où (H_{p+1}). $\square$

Remarque 2.4.22.
Par abus, les familles de vecteurs présentant des blocs de zéros dans d'autres « coins » que le « coin inférieur gauche » peuvent aussi être dites échelonnées. En tout cas, avec la même démonstration, elles sont également libres. Par exemple les familles $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$ sont libres.

2.5 Bases.

Définition 2.5.1.
Une famille $\left((x_i)_{i \in I}\right)$ est une *base* de E si elle est libre et génératrice.

Remarque 2.5.2.
Ainsi, dans le cas où $I = [\![1, n]\!]$, $(x_i)_{i \in I}$ est une base si et seulement si l'application ψ de la proposition 2.2.1 est un isomorphisme.

Exemple 2.5.3.
Les bases canoniques des $\mathbb{R}^n$.

Remarque 2.5.4.
On a aussi la notion de base d'un sev de E.

Remarque 2.5.5.
Comme pour les familles libres et génératrices, on peut permuter l'ordre des vecteurs d'une base, et on a toujours une base.

Proposition 2.5.6.
Soit $\mathscr{B} = (x_i)_{i \in I}$ une famille de E. Alors $\mathscr{B}$ est une base si et seulement si pour tout $y \in E$, il existe une unique famille de scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$ à support fini telle que

$$y = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i.$$

En particulier dans le cas où $I = [\![1, n]\!]$, $\mathscr{B}$ est une base si et seulement si pour tout $y \in E$, il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

Démonstration.
On a déjà vu que cette famille de scalaires existe si et seulement si $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice et est unique sous réserve d'existence si et seulement si $(x_i)_{i\in I}$ est libre. On en déduit le résultat. □

Définition 2.5.7.
Soit $\mathscr{B} = (x_i)_{i\in I}$ une base de E et $y \in E$. Alors l'unique famille de scalaires (à support fini) $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que $y = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ est appelée *famille des coordonnées* de y dans $\mathscr{B}$.

Dans le cas où $I = [\![1, n]\!]$, cette famille est un n-uplet, appelé *n-uplet des coordonnées.*

Exercice 2.5.8 (Classique)**.**
Montrer que $((1, 0, 1), (2, -1, 0), (0, 1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, donner les coordonnées d'un vecteur dans cette base (mais attention, les coordonnées des vecteurs dans cette base et dans la base canonique ne sont pas les mêmes !).

Exemple 2.5.9.
Donner une base de $\mathscr{P} \subset \mathbb{R}^3$ où $\mathscr{P} = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0 \,\}$.

On a $(x, y, z) \in \mathscr{P}$ si et seulement si $x = x$, $y = y$ et $z = x + 2y$ si et seulement s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y, z) = \alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, 2)$ si et seulement si $(x, y, z) \in \mathrm{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 2))$. Ces deux vecteurs sont non colinéaires, donc forment une famille libre.

Une base de $\mathscr{P}$ est donc $((1, 0, 1), (0, 1, 2))$.

Exemple 2.5.10.
Trouver une base de

$$\mathscr{E} = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 0 \right\}.$$

Le polynôme caractéristique est $X^2 + X - 2$ de racine 1 et -2. Donc tout élément de $\mathscr{E}$ est combinaison linéaire de la suite $(v_n) = (1)$ et $(w_n) = ((-2)^n)$. Donc $((v_n), (w_n))$ est génératrice. On montre qu'elle est aussi libre.

Remarque 2.5.11.
Une famille libre est toujours une base du sous-espace vectoriel qu'elle engendre.

Remarque 2.5.12.
Si E est un $\mathbb{K}$-ev admettant une base $\mathscr{B}$ à n vecteurs, alors l'application qui à un vecteur de E associe le n-uplet de ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ est un ismorphisme de E dans $\mathbb{K}^n$. L'injectivité découle de l'unicité du n-uplet des coordonnées dans une base donnée.

Proposition 2.5.13.
L'image d'une base par une application linéaire injective est une base de l'image.

L'image d'une base par un isomorphisme est une base de l'espace d'arrivée.

Démonstration.
Vient directement des résultats des parties précédentes. □

Théorème 2.5.14.
Soit E_1 et E_2 deux $\mathbb{K}$-ev, et soit $(f_i)_{i\in I}$ une base de E_1 et $(g_i)_{i\in I}$ une famille **quelconque** de E_2. Alors il existe une **unique** application linéaire $\varphi : E_1 \to E_2$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(f_i) = g_i$.

Démonstration. **Analyse** Soit φ une telle application. Soit $x \in E$. Alors x s'écrit $\sum_{i\in I} \lambda_i f_i$, donc

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{i\in I} \lambda_i \varphi(f_i) \\ &= \sum_{i\in I} \lambda_i g_i \end{aligned}$$

où $(\lambda_i)_{i\in I}$ est la famille des coordonnées de x dans la base $(f_i)_{i\in I}$.

$\varphi(x)$ est donc déterminé de façon unique.

Donc φ est déterminée de façon unique.

Synthèse Considérons l'application qui à tout élément x de E associe $\sum_{i\in I} \lambda_i g_i$, où $(\lambda_i)_{i\in I}$ est la famille des coordonnées de x dans la base $(f_i)_{i\in I}$.

On montre que φ est une application linéaire. De plus on peut montrer qu'elle vérifie les conditions demandées : $\forall i \in I\ \varphi(f_i) = g_i$.

Conclusion Il existe bien une unique application répondant à la question posée.

□

Proposition 2.5.15.
Soit E_1 et E_2 deux $\mathbb{K}$-ev, et soit $(f_i)_{i\in I}$ une base de E_1. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$.

1. φ est injective si et seulement si $(\varphi(f_i))_{i\in I}$ est une famille libre.
2. φ est surjective si et seulement si $(\varphi(f_i))_{i\in I}$ est une famille génératrice de E_2.
3. φ est un isomorphisme si et seulement si $(\varphi(f_i))_{i\in I}$ est une base de E_2.

Démonstration.
On traite le cas où $I = [\![1, n]\!]$.

1. Si φ est injective, par la proposition 2.4.12 la famille $(\varphi(f_i))_{i\in I}$ est libre.
   Réciproquement, si $(\varphi(f_i))_{i\in I}$ est libre, soit $x \in \operatorname{Ker}\varphi$. Il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$.
   Par linéarité de φ, $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi(f_k) = 0_{E_2}$. Par liberté de la famille $(\varphi(f_i))_{i\in I}$, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, donc $x = 0_{E_1}$. Ainsi, $\operatorname{Ker}\varphi = \{0_{E_1}\}$, donc φ est injective.
2. Si φ est surjective, par le corollaire 2.3.9 la famille $(\varphi(f_i))_{i\in I}$ engendre E_2.
   Réciproquiement, si $(\varphi(f_i))_{i\in I}$ engendre E_2, $\varphi(E_1) = \varphi(\operatorname{Vect}(f_1, \ldots, f_n)) = \operatorname{Vect}(\varphi(f_1), \ldots, \varphi(f_n)) = E_2$, donc φ est surjective

□

Exemple 2.5.16.
Montrer qu'il existe une unique application linéaire $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^2$ vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= (1,2) \\ \varphi(X+1) &= (2,3) \\ \varphi(X^2+1) &= (0,1) \end{aligned}$$

Cette application linéaire est-elle injective ? Surjective ? Un isomorphisme ?

Théorème 2.5.17.
Soient F, G deux sev d'un $\mathbb{K}$-ev E, de bases respectifs $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

Alors, F et G sont en somme directe si et seulement si $\mathscr{B} \uplus \mathscr{C}$ est une base de $F + G$.

Notamment, F et G sont supplémentaires si et seulement si $\mathscr{B} \uplus \mathscr{C}$ est une base de E.

Démonstration. ($\Rightarrow$) Découle directement de 2.3.13 et 2.4.16.

($\Leftarrow$) Si $\mathscr{B} \uplus \mathscr{C}$ est une base de $F+G$, soit $(f, g) \in F \times G$ tel que $f + g = 0_E$. On note $\mathscr{B} = (b_i)_{i\in I}$ et $\mathscr{C} = (c_j)_{j\in J}$. Soit $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^I$ et $(\mu_j) \in \mathbb{K}^J$ à supports finis tels que $f = \sum_{i\in I} \lambda_i f_i$ et $g = \sum_{j\in J} \mu_j g_j$.
On a alors

$$\sum_{i\in I} \lambda_i f_i + \sum_{j\in J} \mu_j g_j = 0_E$$

Comme $\mathscr{B} \uplus \mathscr{C}$ est une base, la famille $(\lambda_i) \uplus (\mu_j)$ est nulle, et donc $f = g = 0_E$.
Ainsi, $F + G$ est directe.

□

Enfin, terminons par un outil bien pratique.

Définition 2.5.18.
Une famille de polynômes $(P_0, \ldots, P_n)$ est dite échelonnée en degrés si $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \deg P_k = k$.

Une famille de polynômes $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est dite échelonnée en degrés si $\forall k \in \mathbb{N},\ \deg P_k = k$.

Proposition 2.5.19.
Toute famille de polynômes $(P_0, \ldots, P_n)$ échelonnée en degrés est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Toute famille de polynômes $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ échelonnée en degrés est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration.
On démontre le deuxième cas, le premier s'y ramenant (il suffit de rajouter les polynômes X^k pour $k \geqslant n+1$).

Soit $(\lambda_k) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ à support fini telle que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k P_k = 0.$$

S'il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda_i \neq 0$, prenons le plus grand tel i (il existe, la famille étant à support fini). On a alors

$$P_i = -\sum_{k=0}^{i-1} \frac{\lambda_k}{\lambda_i} P_k \in \mathbb{K}_{i-1}[X],$$

ce qui est une contradiction. Ainsi, les λ_i sont tous nuls, donc la famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre.

On montre maintenant par récurrence simple que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X] \subset \text{Vect}((P_k)_{k\in\mathbb{N}})$.

Pour $n = 0$, c'est immédiat car P_0 est constant non nul.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathbb{K}_n[X] \subset \text{Vect}((P_k)_{k\in\mathbb{N}})$ et montrons que $\mathbb{K}_{n+1}[X] \subset \text{Vect}((P_k)_{k\in\mathbb{N}})$. Il suffit pour cela de montrer que $X^{n+1} \in \text{Vect}((P_k)_{k\in\mathbb{N}})$. Comme P_{n+1} est de degré $n+1$, il existe $a \neq 0$ et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$P_{n+1} = aX^{n+1} + Q.$$

On a donc

$$X^{n+1} = \frac{1}{a}P_{n+1} - \frac{1}{a}Q \in \text{Vect}((P_k)_{k\in\mathbb{N}}),$$

par hypothèse de récurrence. Ainsi, $((P_k)_{k\in\mathbb{N}})$ engendre bien $\mathbb{K}[X]$. □

2.6 Bases canoniques.

Les espaces vectoriels de référence viennent souvent avec des bases «par construction», que l'on appellera *canoniques*. Elles n'ont pas de propriétés particulières, mais vous pouvez les utiliser sans justifier leur caractère de base.

Proposition 2.6.1 (Base canonique de $\mathbb{K}^n$)**.**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ posons

$$e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i^{\text{ème}}\text{ position}}, 0 \dots, 0).$$

Alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée *base canonique* de $\mathbb{K}^n$.

Proposition 2.6.2 (Bases canoniques de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}[X]$)**.**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors la famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée *base canonique* de $\mathbb{K}_n[X]$.

La famille $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, appelée *base canonique* de $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 2.6.3.
Une famille de polynômes non nuls de degrés distincts deux à deux est libre.

Démonstration.
Ce résultat peut très bien se démontrer en n'utilisant que des considérations de degré : c'est un bon exercice, classique, et laissé au lecteur.
Mais démontrons-le en utilisant des coordonnées dans la base canonique.
Soit $\mathscr{F}$ une telle famille. Nous pouvons toujours supposer que les polynômes de cette famille sont classés de telle sorte que la suite de leurs degrés soit strictement croissante. Notons n le degré maximum de ces polynômes. Cette famille est donc une famille de $\mathbb{K}_n[X]$. La famille des $(n+1)$-uplets des coordonnées des polynômes de $\mathscr{F}$ dans la base canonique $\mathscr{B}$ est donc une famille échelonnée de $\mathbb{K}^{n+1}$: elle est donc libre. Par conséquent, $\mathscr{F}$ aussi. □

Proposition 2.6.4 (Base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)**.**
Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$, posons $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la ligne i et la colonne j, qui vaut 1.

Alors $(E_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée *base canonique* de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

3 Endomorphismes particuliers.

3.1 Homothéties.

Définition 3.1.1.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. On appelle *homothétie de rapport* λ l'application

$$h_\lambda = \lambda \text{Id}_E : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \lambda x \end{array}$$

Remarque 3.1.2.
Cas particuliers : $\lambda = 1$: identité ; $\lambda = -1$, symétrie de centre 0.

Théorème 3.1.3.
Toute homothétie est un automorphisme de E, et $(h_\lambda)^{-1} = h_{\lambda^{-1}} = h_{1/\lambda}$.

Démonstration.
• Linéarité : simple.
• Bijectivité et réciproque : calculer $h_\lambda \circ h_{\lambda^{-1}}$ et $h_{\lambda^{-1}} \circ h_\lambda$. □

Proposition 3.1.4.
Soit $\mathscr{H}(E)$ l'ensemble des homothéties de E. Alors $(\mathscr{H}(E), \circ)$ est un sous-groupe de $\mathscr{GL}(E)$.

Démonstration.
• $\mathscr{H}(E) \subset \mathscr{GL}(E)$ d'après le théorème précédent.
• $\mathrm{Id} \in \mathscr{H}(E)$.
• Stable par passage à l'inverse d'après le théorème précédent.
• et on remarque que pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}^\star$, $h_\mu \circ h_\lambda = h_{\mu\lambda}$, donc on a la stabilité par produit. □

Remarque 3.1.5.
$\mathscr{GL}(E)$ n'est pas un sous-groupe commutatif, mais $\mathscr{H}(E)$ l'est. En fait il est isomorphe à $\mathbb{K}^\star$ via $\lambda \mapsto h_\lambda$.

3.2 Projecteurs.

Dans toute la suite, on suppose que F et G sont deux sev supplémentaires, *i.e.* $E = F \oplus G$.

Définition 3.2.1.
On appelle *projection* sur F parallèlement à G l'endomorphisme $p_{F\|G}$ de $\mathscr{L}(E)$ défini par :

$$\forall y \in F,\ \forall z \in G \quad p_{F\|G}(y+z) = y. \qquad (3)$$

Remarque 3.2.2.
Voir le dessin sur la figure 1. Exemple dans $\mathbb{R}^3$ avec $F = \{x = 0\}$ et $G = \{x + y = 0, y + z = 0\}$.

Démonstration.
Il convient de montrer que cette définition est correcte, c'est-à-dire qu'il existe une unique application vérifiant les conditions demandées.

Analyse Soit $p_{F\|G}$ un endomorphisme vérifiant les conditions demandées. Alors pour tout $x \in E$, $p_{F\|G}(x) = y$ où (y, z) est l'unique couple[1] de $F \times G$ tel que $x = y + z$. $p_{F\|G}$ est donc déterminé.

Synthèse Soit $p_{F\|G}$ l'application associant à tout $x \in E$ l'unique valeur[2] y telle que x s'écrive $y+z$ avec $y \in F$ et $z \in G$.
La proposition (3) est manifestement vérifiée. On peut par ailleurs montrer que $p_{F\|G}$ est une application linéaire.

Conclusion Il existe une unique application vérifiant les conditions demandées

□

Théorème 3.2.3.
$p_{F\|G} \in \mathscr{L}(E)$, $\mathrm{Ker}\, p_{F\|G} = G$, $\mathrm{Im}(p_{F\|G}) = F$.

Démonstration.
• Linéarité : élémentaire.
• Soit $x = y + z \in E$, $y \in F$, $z \in G$, donc $x \in \mathrm{Ker}\, p_{F\|G}$ si et seulement si $y = 0$ si et seulement si $x = z$ si et seulement si $x \in G$.
$x \in \mathrm{Im}\, p_{F\|G}$ si et seulement si il existe $x' = y' + z'$ tel que $x = y'$ si et seulement si $x \in F$. □

Remarque 3.2.4.
• Cas particuliers : $F = \{0_E\}$ et $G = E$: $p_{F\|G} = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
• $G = \{0_E\}$ et $F = E$: $p_{F\|G} = \mathrm{Id}$. Hormis ce dernier cas, une projection n'est jamais injective, ni surjective.
• $p_{F\|G} + p_{G\|F} = \mathrm{Id}$, $p_{F\|G}|_G = 0$, $p_{F\|G}|_F = \mathrm{Id}_F$.

Définition 3.2.5.
On appelle *projecteur* tout endomorphisme f tel que $f \circ f = f$.

Théorème 3.2.6.
Toute projection est un projecteur.

Démonstration.
Il s'agit essentiellement d'utiliser que si $x = y + z$ $p_{F\|G}(p_{F\|G}(x)) = p_{F\|G}(y) = p_{F\|G}(y + 0_E) = y$. □

Théorème 3.2.7 (Réciproque)**.**
Soit f un projecteur. Alors $\mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f = E$, et f est la projection sur $\mathrm{Im}\, f$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, f$.

1. Il existe et est unique puisque $E = F \oplus G$.

2. Voir remarque précédente.

Démonstration.
Soit $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. Alors il existe y tel que $x = f(y)$. Or $f(x) = 0$ mais $f(x) = f(f(y)) = f(y) = x$, donc $x = 0$. $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont donc en somme directe.
Montrons que $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$.
Analyse : soient $y \in \operatorname{Im} f$ et $z \in \operatorname{Ker} f$ tels que $x = y + z$. Alors il existe u tel que $y = f(u)$. Donc $f(x) = f(f(u)) + f(z) = f(f(u)) = f(u) = y$. Donc on a $y = f(x)$ et donc $z = x - f(x)$.
Synthèse : on pose $y = f(x)$ et $z = x - f(x)$. Alors on a bien $x = y + z$. de plus $f(y) = f(f(x)) = f(x) = y$, donc $y \in \operatorname{Im} f$, et $f(z) = f(x - f(x)) = f(x) - f(f(x)) = f(x) - f(x) = 0$, et ainsi $z \in \operatorname{Ker} f$. On a bien le résultat voulu.
Mais si l'on note $x = y + z$ la décomposition associée à $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$, alors $\forall x$, $f(x) = y$, donc f est bien la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$. □

Remarque 3.2.8.
1. Si f est un projecteur, alors $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$: on utilise que $x \in \operatorname{Im} f$ si et seulement si $f(x) = x$ si et seulement si $f(x) - x = 0_E$ si et seulement si $(f - \operatorname{Id})(x) = 0_E$.
2. Si $E = F \oplus G$, alors $p_{F\|G} + p_{G\|F} = \operatorname{Id}$, et $p_{F\|G} \circ p_{G\|F} = p_{G\|F} \circ p_{F\|G} = 0_{\mathscr{L}(E)}$. En effet, si $x = y + z$, alors $p_{F\|G}(x) = y$ et $p_{G\|F}(x) = z$. Et $p_{F\|G}(z) = p_{G\|F}(y) = 0_E$.

Exercice 3.2.9.
Montrer que l'ensemble des fonctions paires et celui des fonctions impaires sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Donner l'expression des projections sur l'un de ces deux ensembles parallèlement au second.

3.3 Symétries.

Définition 3.3.1.
On appelle *symétrie par rapport à F et parallèlement à G* l'endomorphisme $s_{F\|G}$ de $\mathscr{L}(E)$ défini par :

$$\forall y \in F,\ \forall z \in G \quad s_{F\|G}(y + z) = y - z. \qquad (4)$$

Démonstration.
Comme pour une projection, on montre que ceci définit bien une fonction, qui est linéaire. □

Remarque 3.3.2.
Voir le dessin sur la figure 1. Même exemple que pour la projection.

Théorème 3.3.3.
$s_{F\|G} \in \mathscr{GL}(E)$, et on a $s_{F\|G}^2 = \operatorname{Id}_E$, *i.e.* $s_{F\|G} = s_{F\|G}^{-1}$.

Remarque 3.3.4.
On dit que $s_{F\|G}$ est une *involution linéaire.*

Démonstration.
On a déjà observé la linéarité.
Soit $x \in E$, soit $y \in F$ et $z \in G$ vérifiant $x = f + g$. Alors

$$s_{F\|G}(s_{F\|G}(x)) = s_{F\|G}(y - z) = y + z = x.$$

□

Théorème 3.3.5 (Réciproque)**.**
Toute involution linéaire est une symétrie, plus précisément, si f est une involution linéaire, on a :
1. $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id}) = E$.
2. f est la symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id})$.

Démonstration.
1. • Analyse : si $x = y + z$ avec $y \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$ et $z \in \operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id})$, alors $f(y) = y$ et $f(z) = -z$. Donc $f(x) = y - z$. D'où : $f(x) + x = 2y$ et $x - f(x) = 2z$. Donc $y = \dfrac{1}{2}(f(x) + x)$ et $z = \dfrac{1}{2}(x - f(x))$.
   • Synthèse.
2. On vient de voir que si la décomposition de x dans $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id})$ $x = y + z$, alors $f(x) = y - z$. CQFD.

□

Remarque 3.3.6.
On peut aussi montrer que $\operatorname{Ker}(s_{F\|G} - \operatorname{Id}) = \operatorname{Im}(s_{F\|G} + \operatorname{Id})$ et $\operatorname{Ker}(s_{F\|G} + \operatorname{Id}) = \operatorname{Im}(s_{F\|G} - \operatorname{Id})$.
Montrons la première égalité :
• $x \in \operatorname{Im}(s_{F\|G} + \operatorname{Id}) \Rightarrow x = s_{F\|G}(x') + x'$. Donc $(s_{F\|G} - \operatorname{Id})(x) = s_{F\|G}(s_{F\|G}(x') + x') - s_{F\|G}(x') - x' = x' + s_{F\|G}(x') - s_{F\|G}(x') - x' = 0$.
• $x \in \operatorname{Ker}(s_{F\|G} - \operatorname{Id}) \Rightarrow s_{F\|G}(x) = -x$. On

pose alors $x' = (s_{F\|G} - \mathrm{Id})(-1/2x)$. Alors $x' = -\dfrac{1}{2}(-x-x) = x$, donc $x' = x$, or $x' \in \mathrm{Im}(s_{F\|G} - \mathrm{Id})$.

Remarque 3.3.7.
On peut enfin montrer que $s_{G\|F} + s_{F\|G} = 0_{\mathscr{L}(E)}$, $s_{F\|G} \circ s_{G\|F} = -\mathrm{Id} = s_{G\|F} \circ s_{F\|G}$, et $p_{F\|G} = \dfrac{1}{2}(s_{F\|G} + \mathrm{Id})$. Faire un dessin.

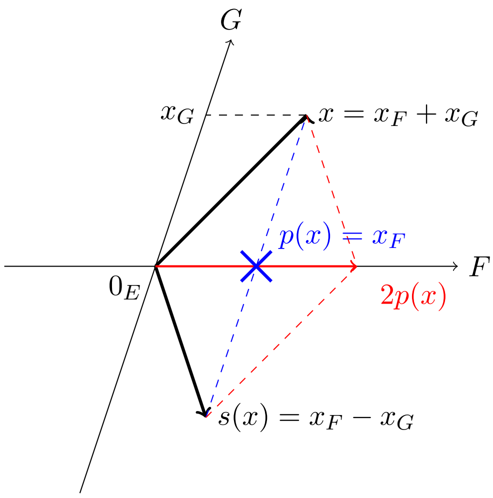

FIGURE 1 – Représentation de la projection et de la symétrie sur F, parallèlement à G.