Feuille d'entraînement n° 2, semaine du 6 au 12 avril
Dénombrement et dimension finie

Ces exercices sont totalement facultatifs. Ils sont plutôt simples, et peu originaux, pour vous permettre de réviser le cours, et voir si vous êtes capables de résoudre des exercices d'application (presque) directe du cours.

Exercice 1 Dans une urne, on place

— 1 boule noire, numérotée 1 ;
— 2 boules bleues, numérotées 2 et 3 ;
— 3 boules rouges, numérotées 4, 5 et 6 ;
— 4 boules vertes, numérotées 7, 8, 9 et 10.

On effectue 5 tirages avec remise. On considère les 5-listes données par les 5 numéros tirés. Combien y a-t-il de résultats contenant exactement deux boules rouges et au moins un huit ?

Exercice 2 Soit E un ensemble à $n \in \mathbb{N}^*$ éléments.

1) Calculer $\displaystyle\sum_{X \subset E} \mathrm{Card}(X)$.

2) Calculer $\displaystyle\sum_{X,Y \subset E} \mathrm{Card}(X \cap Y)$.

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre de triplets $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ solutions de l'équation $x + y + z = n$.

Exercice 4 Étudier l'indépendance linéaire des listes de vecteurs suivantes, et trouver à chaque fois une base du sous-espace engendré.

1) $(1, 0, 1)$, $(0, 2, 2)$, $(3, 7, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

2) $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

3) $(1, 2, 1, 2, 1)$, $(2, 1, 2, 1, 2)$, $(1, 0, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^5$.

4) $(2, 4, 3, -1, -2, 1)$, $(1, 1, 2, 1, 3, 1)$, $(0, -1, 0, 3, 6, 2)$ dans $\mathbb{R}^6$.

5) $(2, 1, 3, -1, 4, -1)$, $(-1, 1, -2, 2, -3, 3)$, $(1, 5, 0, 4, -1, 7)$ dans $\mathbb{R}^6$.

Exercice 5 Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6

Dans $\mathbb{R}^4$, montrer que $E = \{(x, y, z, t)/x + y + z + t = 0\}$ est un espace vectoriel. En donner un système générateur.

Exercice 7

Déterminer un supplémentaire de $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P'(1) = 0\}$ dans $\mathbb{R}_4[X]$.