LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I.

ANNÉE 2021 - 2022

C3 : MODÉLISATION CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES COMPOSÉS DE CHAINES DE SOLIDES

C3-2 - Calcul vectoriel

9 Novembre 2021

Table des matières

Compétences

- **Résoudre**
  - Caractériser le mouvement d'un repère par rapport à un autre repère.
- **Communiquer**
  - Utiliser un vocabulaire technique, des symboles et des unités adéquats.

I. Notions de bases et repères

1 Introduction

L'objet de ce cours est d'introduire les outils mathématiques et géométriques qui serviront aux diverses modélisations de phénomènes physiques que nous verrons tout au long de cette année et de l'année prochaine (*cinématique, statique, cinétique et dynamique*).

Nous n'utiliserons que les aspects *pratiques* des notions de "**vecteurs**" et "**d'espaces vectoriels**" dont les aspects plus poussés ont été développé lors des cours de mathématiques.

2 Base et repère

a) Base

Propriété 1 :

On se donne un espace vectoriel E^n de dimension n. Tout vecteur de E^npeut être exprimé par une **combinaison linéaire** d'un nombre limité de **vecteurs linéairement indépendants**.

En dimension 3, tout vecteur $\overrightarrow{V} \in E^3$ peut être exprimé comme une combinaison de 3 vecteurs linéairement indépendants, par exemple $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$:

$$\overrightarrow{V} = \alpha\,\overrightarrow{e_x} + \beta\,\overrightarrow{e_y} + \gamma\,\overrightarrow{e_z}$$

Remarque 1 :

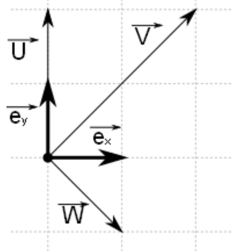
- En dimension 2, "*linéairement indépendants*" signifie "*non-colinéaires*".
- En dimension 3, "*linéairement indépendants*" signifie "*non-coplanaires*".

Définition 1 :

On appelle **dimension** n de l'espace vectoriel E^n le nombre minimum de vecteurs permettant d'engendrer n'importe quel vecteur $\overrightarrow{V} \in E^n$ par combinaison linéaire.

Exemple 1 :

Dans le plan, chaque vecteur peut-être exprimé comme une combinaison de deux vecteurs $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$.



Les vecteurs du plan constituent donc un espace vectoriel de dimension 2.

Définition 2 : *Base*

L'ensemble de ces n vecteurs linéairement indépendants, capables d'engendrer n'importe quel vecteur de E^n, forme ce que l'on appelle **une base** de l'espace vectoriel E^n. On la note par un n-uplet de vecteurs. Pour un espace E^3, nous la noterons par un triplet de vecteurs, par exemple :

$$\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$$

Attention :

Tout comme les vecteurs, une base n'est liée à **aucun** point.

Définition 3 : *Différents types de base*

- Une base est dite **orthogonale** (fig.1 (a)) si :

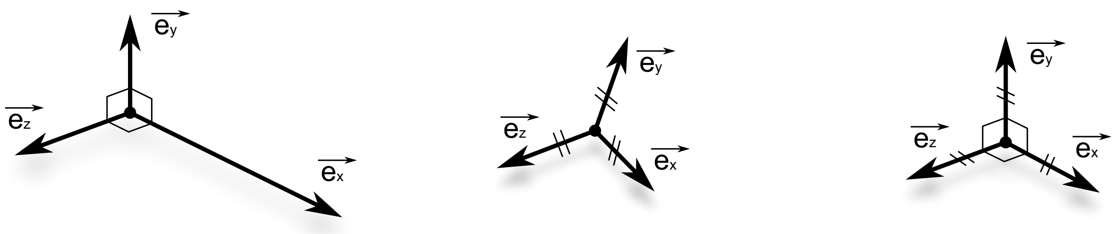
$$\boxed{\vec{e_x} \perp \vec{e_y} \perp \vec{e_z} \perp \vec{e_x}.} \tag{1}$$

- Une base est dite **normée** (fig.1 (b)) si :

$$\boxed{\|\vec{e_x}\| = \|\vec{e_y}\| = \|\vec{e_z}\| = 1.} \tag{2}$$

- Une base est dite **orthonormée** (fig.1 (c)) si elle est à la fois **orthogonale** et **normée**.
- Une base est dite **directe** si le trièdre $\left(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\right)$ est **direct**.

Remarque 2 :
La plupart du temps, on utilisera une base $\mathscr{B}$ **orthonormée directe**, même si cela n'est pas précisé.



(a) Base orthogonale (b) Base normée (c) Base orthonormée

FIGURE 1 – Types de bases remarquables

b) Repère

Définition 4 : *Repère*
Un repère R est l'association d'une base $\mathscr{B}$ avec un point A (fig.2) :

$$\boxed{R = \left(A, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\right)} \tag{3}$$

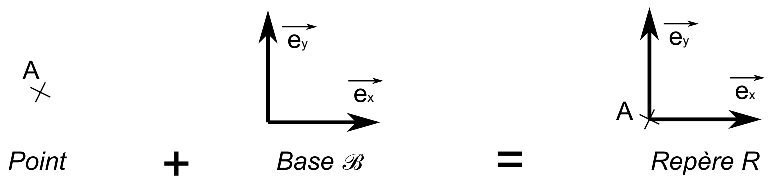


FIGURE 2 – Définition d'un repère.

c) Système de coordonnées

Soit $\overrightarrow{U}$ un vecteur de E^3 muni d'une base $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$. Ce vecteur peut donc être exprimé comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base :

$$\overrightarrow{U} = u_x\,\overrightarrow{e_x} + u_y\,\overrightarrow{e_y} + u_z\,\overrightarrow{e_z}$$

Définition 5 : ***Système de coordonnées***

- Les coefficients $\left(u_x, u_y, u_z\right)$ sont des réels appelés **coordonnées** de $\overrightarrow{U}$ dans la base $\mathscr{B}$.
- On notera ces coordonnées sous la forme d'un *vecteur colonne* comme ci-dessous :

$$\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} \tag{4}$$

Important :

L'écriture d'un vecteur colonne doit toujours faire apparaître la base dans laquelle il est exprimé (ici : $\mathscr{B}$)

Remarque 3 :

- Il est clair que selon la base choisie, les coordonnées ne seront pas les mêmes.
- On peut abusivement écrire un repère au lieu d'une base, au pied d'un vecteur colonne. Par exemple : $\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix}_R$ au lieu de $\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$

II. Opérations vectorielles

1 Introduction

Le paragraphe précédant a permis de définir la notion de vecteur dans une base. Nous allons maintenant introduire des opérateurs relatifs à ces vecteurs.

Pour tout ce qui suit, on se donne une base $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ et trois vecteurs :

$$\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}, \qquad \overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}, \qquad \overrightarrow{W} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}.$$

2 Opérations de base

a) L'addition

Définition 6 : *Addition de deux vecteurs*

L'addition de deux vecteurs est une application $E^3 \times E^3 \longmapsto E^3$ dont le résultat est un vecteur pour lequel les coordonnées sont simplement la somme des coordonnées de ces deux autres vecteurs (**à condition qu'ils soient exprimés dans la même base**) :

$$\vec{U} + \vec{V} = \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \\ u_z + v_z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} .$$

Propriété 2 :

- L'addition de deux vecteurs est **associative** (*i.e. "on peut déplacer les parenthèses"*) : $\left(\vec{U} + \vec{V}\right) + \vec{W} = \vec{U} + \left(\vec{V} + \vec{W}\right)$.
- L'addition de deux vecteurs est **commutative** (*i.e. "on peut inverser l'ordre de l'opération"*) : $\vec{U} + \vec{V} = \vec{V} + \vec{U}$.

b) La multiplication par un scalaire réel

Définition 7 : *Multiplication d'un vecteur par un scalaire*

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La multiplication d'un vecteur $\vec{U}$ par un scalaire λ est une application $\mathbb{R} \times E^3 \longmapsto E^3$ définie par :

$$\boxed{\lambda\, \vec{U} = \begin{pmatrix} \lambda\, u_x \\ \lambda\, u_y \\ \lambda\, u_z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} .} \tag{5}$$

Propriété 3 :

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

- La multiplication par un scalaire est **associative** :

$$\boxed{\lambda \left(\mu\, \vec{U}\right) = (\lambda\, \mu)\; \vec{U}.} \tag{6}$$

- La multiplication par un scalaire est **distributive** par rapport à l'addition (et inversement) :

$$\boxed{(\lambda + \mu)\left(\vec{U} + \vec{V}\right) = \lambda\, \vec{U} + \lambda\, \vec{V} + \mu\, \vec{U} + \mu\, \vec{V}.} \tag{7}$$

3 Produit scalaire

Définition 8 : *Produit scalaire*

Le produit scalaire de deux vecteurs est une application, définie ici par :

$$\begin{aligned} E^3 \times E^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \left(\vec{U}, \vec{V}\right) &\longmapsto \vec{U} \cdot \vec{V} = \left\|\vec{U}\right\| \left\|\vec{V}\right\| \cos\left(\widehat{\vec{U}, \vec{V}}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Propriété 4 :

Le produit scalaire peut se calculer directement à partir des composantes des vecteurs :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = u_x\, v_x + u_y\, v_y + u_z\, v_z.$$

Propriété 5 :

Soient $\left(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}\right) \in \left(E^3\right)^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

- Le produit scalaire d'un vecteur par lui même est sa norme au carré :

$$\begin{aligned} \vec{U} \cdot \vec{U} &= \left\|\vec{U}\right\|^2 \\ &= \vec{U}^2 && \text{(notation)} \\ &= u_x^2 + u_y^2 + u_z^2. \end{aligned}$$

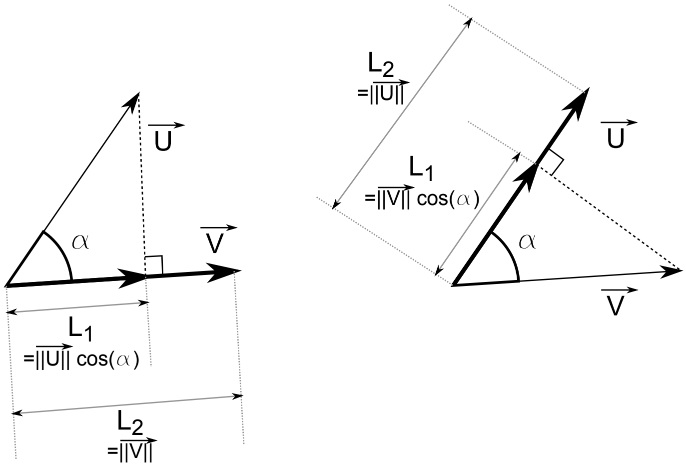
- Le produit scalaire est **commutatif** :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}.$$

- Le produit scalaire est **bilinéaire** (*i.e. linéaire sur chacun de ses termes*) ce qui signifie qu'il est :
  * **distributif** par rapport à l'addition : $\vec{U} \cdot \left(\vec{V} + \vec{W}\right) = \vec{U} \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \vec{W}$.
  * **associatif** avec la multiplication par une scalaire. $\lambda\left(\vec{U} \cdot \vec{V}\right) = \left(\lambda \vec{U}\right) \cdot \vec{V} = \vec{U} \cdot \left(\lambda \vec{V}\right)$.

Remarque 4 :

Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{V}$ correspond au produit des normes des projections sur l'un des deux (soit sur $\overrightarrow{U}$, soit sur $\overrightarrow{V}$) : $\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{V} = L_1\,L_2$



Théorème 1 :

Si $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ sont deux vecteurs de E^3, alors :

$$\boxed{\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{V} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{U}\perp\overrightarrow{V}.} \tag{9}$$

Remarque 5 : ***Système de coordonnées***

Grâce au produit scalaire, on peut redéfinir la notion de **coordonnées**. En effet, soit un vecteur $\overrightarrow{U}$ tel que :

$$\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}},$$

où $\mathscr{B}$ est une base orthonormée. Alors :

$$u_x = \overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{e_x}$$
$$u_y = \overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{e_y}$$
$$u_z = \overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{e_z}.$$

4 Produit vectoriel

Définition 9 : *Produit vectoriel*

Le **produit vectoriel** est une application définie par :

$$\begin{aligned} E^3 \times E^3 &\longmapsto E^3 \\ \left(\vec{U}, \vec{V}\right) &\longmapsto \vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}, \end{aligned} \tag{10}$$

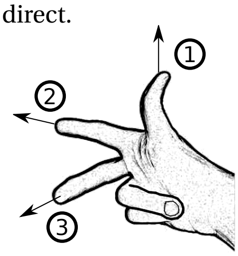
où $\vec{W}$ est défini par les conditions suivantes :

- **direction :** $\vec{W} \perp \vec{U}$ et $\vec{W} \perp \vec{V}$;
- **norme :** $\left\|\vec{W}\right\| = \left\|\vec{U}\right\| \left\|\vec{V}\right\| |\sin(\alpha)|$;
- **sens :** tel que $\left(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}\right)$ soit un **trièdre direct**.

Astuce 1 :

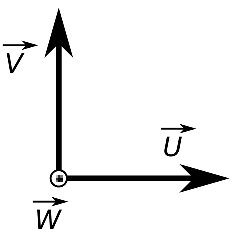
Pour savoir si $\left(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}\right)$ est direct, plusieurs méthodes existent.

- Si le 1^{er} vecteur *pointe* vers nous, les deux autres vecteurs *dans l'ordre* sont dans le sens directe.
- On peut utiliser la "*règle de la main droite*" : Si on représente respectivement $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ par le pouce, l'indexe et le majeur de la main droite, tels que représenté sur la figure ci-dessous, alors le trièdre est direct.

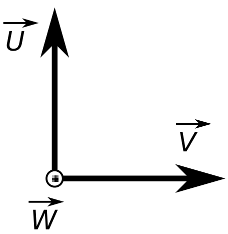


$$\begin{aligned} (①, ②, ③) &\equiv \left(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}\right) \\ &\equiv \left(\vec{W}, \vec{U}, \vec{V}\right) \\ &\equiv \left(\vec{V}, \vec{W}, \vec{U}\right). \end{aligned}$$

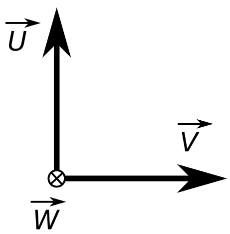
Exemple 2 :



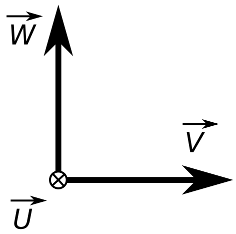
]Sens direct



]Sens indirect



]Sens direct



]Sens indirect

Les coordonnées de $\overrightarrow{W}$ dans la base $\mathscr{B}$ s'obtiennent par le calcul suivant :

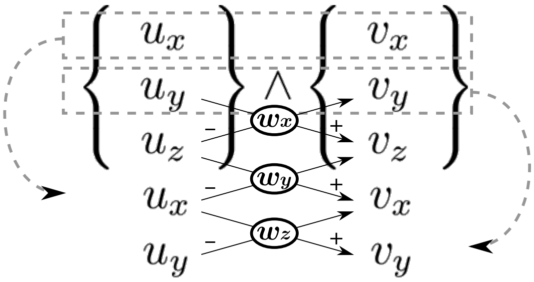
$$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}$$

$$\overrightarrow{W} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} \wedge \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$

$$\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} u_y\, v_z - u_z\, v_y \\ u_z\, v_x - u_x\, v_z \\ u_x\, v_y - u_y\, v_x \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} .$$

Astuce 2 :

Pour se rappeler de l'ordre de calcul des composantes, on peut faire une succession de produits croisés qui sont présentés sur la figure ci-dessous :



Il est à noter que cette méthode fonctionne tout le temps, mais qu'elle n'est pas forcément la plus judicieuse.

Propriété 6 :

- Le produit vectoriel est **antisymétrique** :

$$\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = -\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{U}.$$

- Le produit vectoriel est **bilinéaire** :

$$\overrightarrow{U} \wedge \left(\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}\right) = \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} + \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{W};$$
$$\left(\lambda \overrightarrow{U}\right) \wedge \overrightarrow{V} = \overrightarrow{U} \wedge \left(\lambda \overrightarrow{V}\right) = \lambda \left(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}\right).$$

- Pour des vecteurs colinéaires (en incluant les vecteurs nuls) :

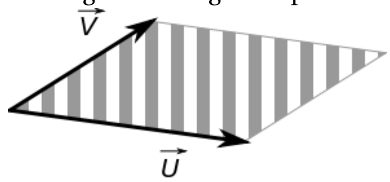
$$\overrightarrow{U} // \overrightarrow{V} \qquad \Leftrightarrow \qquad \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}.$$

Propriété 7 : ***Norme du produit vectorielle***

- La norme du produit vectorielle est donnée par :

$$\boxed{\|\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}\| = \|\overrightarrow{U}\| \cdot \|\overrightarrow{V}\| \cdot |\sin\left(\widehat{\overrightarrow{U},\overrightarrow{V}}\right)|.} \tag{11}$$

- Elle correspond à l'aire du parallélogramme engendré par les deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$.



Remarque 6 : ***Calcul du produit vectoriel***

Pour calculer un produit vectoriel, on déterminera la **direction** et le **sens** du vecteur obtenu avec les propriétés de cette opération vectorielle et sa **norme** avec la formule énoncée précédemment (équation 11)

5 Produit mixte

Définition 10 : ***Produit mixte***

Le **produit mixte** est une application définie par :

$$\begin{aligned} E^3 \times E^3 \times E^3 &\longmapsto \mathbb{R} \\ \left(\overrightarrow{U},\overrightarrow{V},\overrightarrow{W}\right) &\longmapsto \left(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}\right)\cdot\overrightarrow{W}. \end{aligned} \tag{12}$$

Propriété 8 :

Le produit mixte est **invariant par permutation circulaire** :

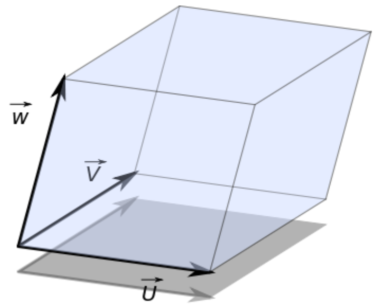
$$\left(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}\right)\cdot\overrightarrow{W} = \left(\overrightarrow{W} \wedge \overrightarrow{U}\right)\cdot\overrightarrow{V} = \left(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W}\right)\cdot\overrightarrow{U}.$$

Si la permutation n'est pas circulaire, le produit mixte change de signe :

$$\left(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}\right)\cdot\overrightarrow{W} = -\left(\overrightarrow{W} \wedge \overrightarrow{V}\right)\cdot\overrightarrow{U} = -\left(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{W}\right)\cdot\overrightarrow{V}.$$

Remarque 7 :

Le produit mixte $\left(\vec{U} \wedge \vec{V}\right) \cdot \vec{W}$ représente le volume orienté (*i.e.* positif si $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$ est direct) du parallélépipède oblique engendré par ses trois vecteurs.



6 Changement de base

Soit une base orthonormée directe $\mathscr{B}_1 = \left(\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1}\right)$ et un repère associé $\mathbb{R}_1 = \left(O, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1}\right)$.
On définit une nouvelle base orthonormée directe $\mathscr{B}_2 = \left(\vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2}\right)$ et un repère associé $\mathbb{R}_2 = \left(O, \vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2}\right)$.
$\mathbb{R}_2$ se déduit de $\mathbb{R}_1$ par une rotation d'un angle θ_{12} autour de l'axe $\left(O, \vec{z_{1,2}}\right)$.

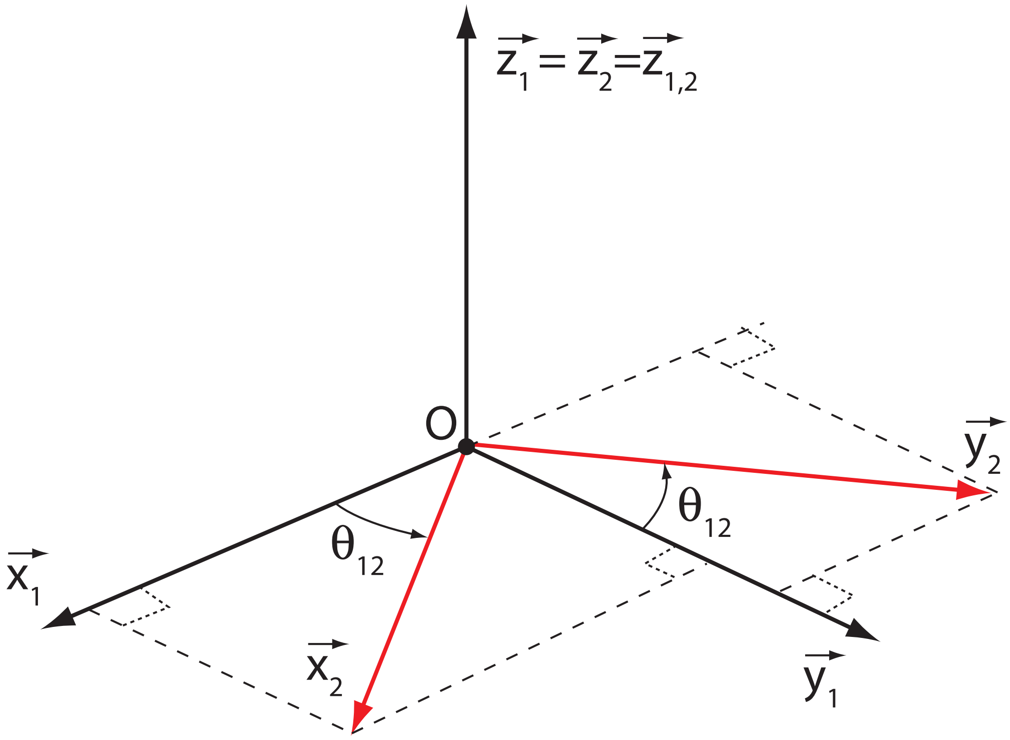
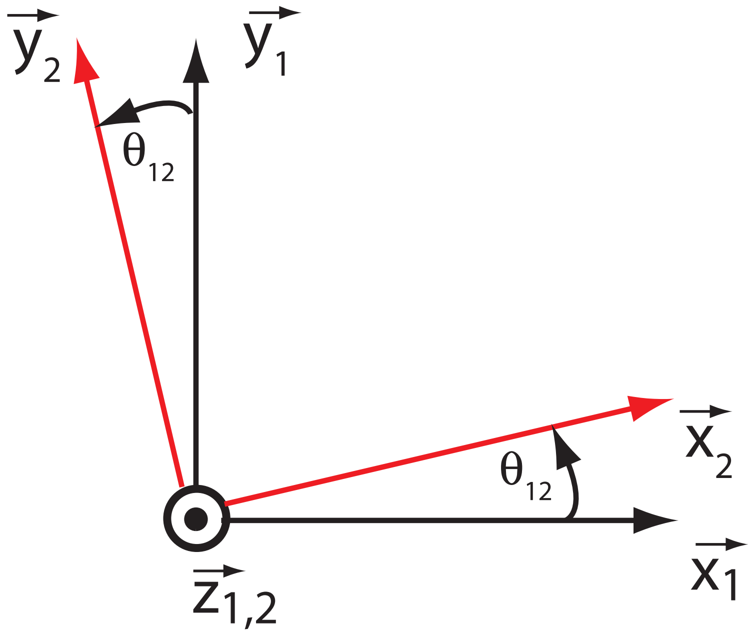


FIGURE 3 – Rotation de la base $\mathscr{B}_2$ par rapport à la base $\mathscr{B}_1$.

Remarque 8 :
En pratique, on travaillera toujours à partir d'une figure plane de projection qui sera toujours représenté avec un angle θ_{12} positif et à peu près égal à 20°.



- On peut alors exprimer les vecteurs de la nouvelle base $(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ en fonction des vecteurs de la base de départ $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$:

- On peut alors exprimer les vecteurs de la base de départ $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ en fonction des vecteurs de la nouvelle base $(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$: