3.2 : Théorème du rang :

Prop. 3.2.1 : Soit E, F 2 ev et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

Soit S tq. $S \oplus \ker u = E$.

Alors u est 1 isomorphisme de S dans $\operatorname{Im} u$

ie : $u_{|S}^{|\operatorname{Im} u} : \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \operatorname{Im} u \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$

est bijective (et linéaire).

Dém : On pose $v = u_{|S}^{|\mathrm{Im}\, u}$. u est linéaire donc v aussi.

- v injective : $\mathrm{Ker}\, v = \{x \in S, v(x) = 0\}$

$= \{x \in S, u(x) = 0\}$

$= \{x \in S, x \in \mathrm{Ker}\, u\}$

$\mathrm{Ker}\, v = S \cap \mathrm{Ker}\, u$ (classique)

$= \{0\}$ car S et $\mathrm{Ker}\, u$ sont en somme directe.

v est injective.

• <u>v surjective</u> : Soit $y \in \operatorname{Im} u$.

il existe $x \in E$ tq. $y = u(x)$

$E = S \oplus \operatorname{Ker} u$, donc il existe $t \in S$, $w \in \operatorname{Ker} u$

tq. $x = t + w$, donc $y = u(t+w)$

$$
\begin{aligned}
y &= u(t+w) \\
&= u(t) + \underbrace{u(w)}_{=0} \\
&= u(t) \\
&= v(t) \quad \text{car } t \in S
\end{aligned}
$$

v est surjective.

Th. du rang : E, F 2 $\mathbb{K}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

E est de dim. finie.

Alors : Im u est de dim finie et : $\boxed{\operatorname{rg} u + \dim \operatorname{Ker} u = \dim E}$

⚠ $\dim E$ pas $\dim F$!!

Démo : Puisque E est de dim finie, $\operatorname{Ker} u$ a un supplémentaire S dans E.

avec 3.2.1 : S est isomorphe à $\operatorname{Im} u$,
or S est de dim finie car $S \subset E$
et E est de dim finie, donc $\operatorname{Im} u$ est
de dim finie et :

$$\dim S = \dim \operatorname{Im} u \underset{\text{déf}}{=} \underline{\underline{\operatorname{rg} u}}$$

rang de u

de plus : $S \oplus \operatorname{Ker} u = E$

on a : $\dim S + \dim \operatorname{Ker} u = \dim E$:

$$\operatorname{rg} u + \dim \operatorname{Ker} u = \dim E. \quad \square$$

Ex. 3.2.4 : • $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ f. linéaire.

$\operatorname{Im}\varphi$ est 1 sev de $\mathbb{K}$, donc

$\dim \operatorname{Im}\varphi = \operatorname{rg}\varphi = 0$ ou 1.

$\operatorname{rg}\varphi = 0 \iff \operatorname{Im}\varphi = \{0\}$

$\iff \varphi$ est l'applic. nulle.

• $u : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x - y \quad - t \\ x \quad + z + t \\ x - y - z \quad 2t \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}(u(e_1), \dots, u(e_4))$

1ère méthode : Calculons $\mathrm{Im}\, u$:

$$\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}\left(u\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, u\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, u\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, u\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right)$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix} \right)$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \underbrace{\cancel{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}}}_{C_1+2C_2}, \underbrace{\cancel{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}}}_{C_3 - C_2} \right)$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}} \right)$$

c'est 1 base (elle est [illegible])

dc : $\dim \operatorname{Im} u = \dim \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right) = 2$

ie : $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right) = 2$.

<u>2ème méthode :</u> Calculons Ker u :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} u \text{ ssi : } \begin{cases} 2x - y - t = 0 \\ x + z + t = 0 \\ x - y - z - 2t = 0 \end{cases}$$

$$\text{ssi : } \begin{cases} 2x - y - t = 0 \\ x + z + t = 0 \\ \cancel{-x - z - t = 0} \end{cases} \qquad L_3 - L_1$$

$$SS : \begin{cases} x = -z - t & (L_2) \\ y = -2z - 3t & (L_1) \\ z = z \\ t = t \end{cases}$$

$$\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

dc : $\dim \operatorname{Ker} u = 2$

avec le th. du rang : $\operatorname{rg} u + \dim \operatorname{Ker} u = \dim \mathbb{R}^4$

$\operatorname{rg} u = 4 - 2 = 2.$

Rq : si l'énoncé demande de calculer Ker u et Im u, on peut qd même utiliser le th. du rang.

Ex : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ -2x + y - 5z \\ 3x - y + 7z \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}} \right)$$

$$c_2 - 2c_1 = -c_3$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$$

donc $\mathrm{rg}\, f = 2$, et avec le th. du rang :

$3 = 2 + \dim \ker f$, $\dim \mathrm{Ker}\, f = 1$.

il suffit de trouver ① vecteur non nul de $\mathrm{Ker}\, f$ pour avoir 1 base.

On note $C_1 = f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $C_2 = f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $C_3 = f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

On a vu dans le calcul de Im f que :

$$C_2 - 2C_1 = -C_3$$

donc : $2C_1 - C_2 - C_3 = 0$ (coefficients 2, -1, -1)

donc : $f\left(2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = 0$

donc $\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} \in \ker f$.

Rq : Si $aC_1 + bC_2 + cC_3 = 0$, $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in \ker f$.

$$\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Cor. 7.2.5 : E, F de dim finie, $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

(i) u est surjectif ssi $\operatorname{rg} u = \dim F$

(ii) u est injectif ssi $\operatorname{rg} u = \dim E$.

Dém : (i) on sait que u est surjectif ssi $\operatorname{Im} u = F$

ssi $\begin{cases} \operatorname{Im} u \subset F & \to \text{toujours vrai} \\ \operatorname{rg} u = \dim F \end{cases}$

ssi $\operatorname{rg} u = \dim F$.

(ii) u injectif ssi : $\ker u = \{0\}$

ssi : $\begin{cases} \{0\} \subset \ker u & \to \text{toujours vrai} \\ 0 = \dim \ker u \end{cases}$

ssi : $\dim \ker u = 0$

ssi : $\operatorname{rg} u + 0 = \dim E$ (th. du rang)

ssi : $\operatorname{rg} u = \dim E$.

Cor 3.2.6 : E $\mathbb{K}$-ev, $u \in \mathcal{L}(E)$

i.e. : $u : E \to E$ applic. lin. bijec.

Si F est 1 sev de E de dim finie, alors $u(F)$ est aussi de dim finie et $\dim u(F) = \dim F$.

Valable car $\dim F < +\infty$

Démo : $\mathcal{R}$: $u(F) = \mathrm{im}\,(u_{|F})$

th. du rang, appliqué à : $u_{|F} : F \to E$

$$\dim u(F) + \dim \mathrm{Ker}\, u_{|F} = \dim F \quad (*)$$

or $\mathrm{Ker}\, u_{|F} = \mathrm{Ker}\, u \cap F = \{0\}$

car $\mathrm{Ker}\, u = \{0\}$.

de : (A) donc : $\dim u(E) = \dim F$.

<u>Cor 2.2.7</u> : E, F 2 Kev et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

(i) si $\dim F < +\infty$ et u est injective, alors $\dim E < +\infty$ et $\dim E \leq \dim F$.

(ii) si $\dim E < +\infty$ et u est surjective, alors $\dim F < +\infty$ et $\dim F \leq \dim E$.

<u>Dém</u> : (i) $\dim F < +\infty$, u injective.

$\operatorname{Im} u \subset F$ donc $\operatorname{Im} u$ est de dim finie. Or $\operatorname{Im} u = u(E)$

et $v = u|^{\mathrm{Im}\,u} : E \to \mathrm{Im}\,u$

elle est surjective, et injective car u l'est.

Dc c'est 1 isomorphisme,

dc $\dim E = \dim \mathrm{Im}\,u \leq \dim F$.

(ii) $\dim E < +\infty$, th. du rang :

$$\dim \mathrm{Ker}\,u + \mathrm{rg}\,u = \dim E$$

Or u surjec dc $\mathrm{Im}\,u = F$

dc $\mathrm{rg}\,u = \dim F$

il reste : $\underbrace{\dim \mathrm{Ker}\,u}_{\geq 0} + \dim F = \dim E$

et $\dim E \geq \dim F$.

<u>Th. 3.2.8</u>: E, F 2 $\mathbb{K}$ ev, $\dim E < +\infty$,
$u \in \mathcal{L}(E,F)$.

(i) si : $v \in \mathcal{GL}(F)$, alors :

$$rg(v \circ u) = rg(u)$$

[et $\hat{=}$: $\operatorname{Ker} v \circ u = \operatorname{Ker} u$]

(ii) si : $w \in \mathcal{GL}(E)$, alors :
$$rg(u \circ w) = rg(u)$$

[et $\hat{m}$: $\operatorname{Im} u\circ w = \operatorname{Im} u$].

<u>Dém</u> : (i) $\operatorname{Im}(v\circ u) = v\circ u(E)$

$= v(u(E))$

$= v(\operatorname{Im} u)$.

avec 7.2.6, directement : $g(v\circ u) = g(u)$

[Ex : mq. $\operatorname{Ker}(v\circ u) = \operatorname{Ker} u$
de avec le th. du g, on retrouvera
$g(v\circ u) = g(u)$]

(ii) $\mathrm{Im}(u \circ w) = u(\mathrm{Im}\, w)$

$= u(E)$ car $w : E \to E$ surjective

$= \mathrm{Im}\, u$.

<u>Prop</u>: E, F 2 ev de dim finie,

$\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.

Si φ est 1 isomorphisme, on a :

(i) φ est injective

(ii) φ est surjective

(iii) $\dim E = \dim F$.

Réciproquement : si on a 2 de ces 3 pts, alors φ est 1 isomorphisme (et on a le 3ème pt).

Démo : seule la réciproque est nouvelle.

- Si on a (i) et (ii) : facile.
- Si on a (i) et (iii) :

avec le th. du rang :

$$\operatorname{rg}\varphi + \underbrace{\dim\operatorname{Ker}\varphi}_{=0 \text{ avec (i)}} = \dim E \underset{\text{(iii)}}{=} \dim F$$

donc $\operatorname{rg}\varphi = \dim F$, or $\operatorname{Im}\varphi \subset F$

Donc $\operatorname{Im} \varphi = F$, et on a (ii).

- S : on a (ii) et (iii) :

$$\underbrace{\operatorname{rg} \varphi}_{= \dim F \text{ avec (ii)}} + \dim \operatorname{Ker} \varphi = \dim E \underset{(iii)}{=} \dim F$$

Donc $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 0$ donc $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$

et on a (i).

$\square$

En pratique, pour mq. φ est un isomorphisme, on a 2 nouvelles méthodes : montrer (i) et (iii) on montre (ii) et (iii)

et en général (iii) est le plus simple.

<u>Ex</u> : $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0 \dots x_n \in \mathbb{K}$.

$$\varphi : \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$$
$$P \longmapsto (P(x_0), \dots, P(x_n))$$

Mq. φ est 1 isomorphisme.

- linéarité : facile car l'év. en 1 pt est linéaire.
- $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1 = \dim \mathbb{K}^{n+1}$.

il reste à choisir : montrer que φ est injective
ou surjective.

injective : Soit $P \in \ker \varphi$.

alors : $P(x_0) = \dots = P(x_n) = 0$

donc P a au moins $(n+1)$ racines,

or $\deg P \leq n$, donc $P = 0$

et $\ker \varphi = \{0\}$.

surjective : "facile" avec les polynômes de Lagrange.

Cor 3.2.12 : c'est 3.2.1, ds le cas $E = F$.

Cor. 3.2.14 : ⚠ définition : $\varphi \in \mathcal{L}(E)$

est inv. ssi il existe $\psi \in \mathcal{L}(E)$

$\text{tq.}\ \varphi \circ \psi = id_E$ ET $\psi \circ \varphi = id_E$!

Bonne nouvelle :

si $\dim E < +\infty$, φ est inversible ①

$\Leftrightarrow \exists\, \psi \in \mathcal{L}(E),\ \varphi \circ \psi = id_E$ ②

$\Leftrightarrow \exists\, \psi \in \mathcal{L}(E),\ \psi \circ \varphi = id_E$ ③

Pas besoin de vérifier les 2, un suffit !

<u>Démo</u> : (1) $\Rightarrow$ (2) et (1) $\Rightarrow$ (3)

par déf.

(2) + (3) $\Rightarrow$ (1) idem

il suffit de mq. (2) $\Rightarrow$ (1) et (3) $\Rightarrow$ (1)

Supposons (2) : Soit ψ tq. $\varphi \circ \psi = id_E$

Donc $\varphi \circ \psi$ est surjective

(exo classique : Donc φ est surjective

donc avec 7.2.12 elle est bijective
et on a 1.

Si on a 3, soit ψ tq. $\psi \circ \varphi = id_E$,
donc $\psi \circ \varphi$ est injective
donc φ est injective (Wochlingue)
donc avec 7.2.12 on a 1.