Devoir surveillé n° 08
– Version 1 –
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. Combien existe-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$?

II. Étude asymptotique d'une suite définie par une intégrale (extrait et adapté du concours Ecricome 2005 - ECE).

On considère, pour tout entier naturel n, l'application φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_n(x) = (1-x)^n \mathrm{e}^{-2x},$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x)\mathrm{d}x.$$

On se propose de déterminer un développement asymptotique de I_n de la forme

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

1) Calculer I_0 et I_1.

2) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) Déterminer le signe de I_n, pour tout entier n.

4) Qu'en déduit-on pour la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

5) Majorer la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$ sur $[0, 1]$ et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

6) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n.$$

8) En déduire la limite de la suite $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

9) Déterminer la limite de la suite $(n(nI_n-1))_{n\in\mathbb{N}}$.

10) Conclure quant à l'existence et la valeur de a, b et c.

III. Endomorphismes de carré nul (extrait et adapté du concours E3A 2014 - MP B).

On désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit n un entier naturel non nul et soit $E=\mathbb{K}^n$.

Pour tout endomorphisme u de E, on note $\mathrm{Ker}(u)$ le noyau de u et $\mathrm{Im}(u)$ l'image de u.

1) Soit u et v deux endomorphismes de E qui commutent. Démontrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v.

Dans la suite de l'exercice, u désigne un endomorphisme de E tel que $u^2=0$.

2) Démontrer que $\mathrm{Im}(u)$ est inclus dans $\mathrm{Ker}(u)$.

3) Quelle inégalité obtient-on sur le rang de u ? On citera précisément le théorème utilisé.

4) On suppose ici que $n=2$, soit $E=\mathbb{K}^2$. On suppose ici u non nul.

- **a)** Démontrer qu'il existe une droite D de E telle que $\mathrm{Ker}(u)=\mathrm{Im}(u)=D$.
- **b)** Soit v un endomorphisme de E tel que $v^2\neq 0$ et $u\circ v=v\circ u$.
  - **i)** Démontrer que $v(D)\subset D$.
  - **ii)** Démontrer que $u\circ v=0$.
- **c)** Soit v et w deux endomorphismes de E tels que $v^2\neq 0$, $w^2\neq 0$, $u\circ v=v\circ u$ et $u\circ w=w\circ u$.

  Démontrer que $v\circ w=0$.

5) On revient au cas général. Soit $m\geqslant 2$ un entier naturel. Soit $u_1,\dots,u_m$ des endomorphismes de E tels que :

$$\forall (i,j)\in\{1,\dots,m\}^2\,,\ u_i^2=0 \text{ et } u_i\circ u_j=u_j\circ u_i.$$

On pose $F_1=\mathrm{Im}(u_1)$ et, pour chaque entier $2\leqslant i\leqslant m$,

$$F_i=\mathrm{Im}(u_1\circ u_2\circ\cdots\circ u_{i-1}\circ u_i).$$

- **a)** Démontrer que, pour tout entier $1\leqslant i\leqslant m-1$, F_i est un sous-espace vectoriel de E, stable par u_{i+1}.
- **b)** En déduire que, pour tout entier $1\leqslant i\leqslant m$, F_i est de dimension au plus $\dfrac{n}{2^i}$.
- **c)** Dans le cas où $n<2^m$, démontrer que $u_1\circ u_2\circ\cdots\circ u_m=0$.

— **FIN** —

Devoir surveillé n° 08
– Version 2 –

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Étude asymptotique de suites définies par une intégrale (extrait et adapté du concours E3A 2014 - MP B).

Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}$$

ainsi que

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 f_n.$$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir le tableau de variations de f_n sur $[0,1]$.

2) Représenter sur un même graphique les graphes des fonctions f_0, f_1 et f_2.

3) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite monotone (on précisera le sens de monotonie), qui converge vers 0.

4) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(\sqrt{1+x})^3}\mathrm{d}x.$$

5) En déduire un équivalent pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

6) Déterminer des nombres α_1, α_2 et α_3 tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+2)(n+1)u_n = \alpha_1(n+2) + \alpha_2 + \alpha_3\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(\sqrt{1+x})^5}\mathrm{d}x.$$

7) En déduire l'existence et la valeur de nombres α et β tels que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admette le développement asymptotique :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

8) Soit g une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $[0,1]$. On introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \int_0^1 x^n g(x)\mathrm{d}x.$$

Démontrer que, pour tout entier naturel non nul k, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet un développement asymptotique de la forme :

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \cdots + \frac{\beta_k}{n^k} + o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

9) Exprimer les nombres β_1 et β_2 en fonction de g.

10) Soit h une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$, soit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = n\int_0^1 x^n h(x)\mathrm{d}x.$$

Démontrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie et exprimer cette limite en fonction de h.

II. Endomorphismes cycliques.

Soit E un espace-vectoriel réel et $f \in \mathscr{L}(E)$.

On dit que f est *cyclique* s'il existe $a \in E$ tel que la famille $(f^k(a))_{k\in\mathbb{N}}$ engendre E. Dans cette situation, on dit que a est *associé* à f.

On note $\mathscr{C}(f) = \{\, g \in \mathscr{L}(E) \mid g\circ f = f\circ g \,\}$ l'ensemble des endomorphismes commutant avec f.

On note $\mathscr{P}(f) = \left\{ \alpha_0\mathrm{Id}_E + \alpha_1 f + \cdots + \alpha_k f^k \;\middle|\; k\in\mathbb{N},\ (\alpha_0,\ldots,\alpha_k)\in\mathbb{R}^{k+1} \right\}$ l'ensemble des polynômes en f.

Partie I : Questions préliminaires.

1) Démontrer que $\mathscr{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{L}(E),+,\cdot)$, contenant Id_E et stable par composition.

2) Soit $g \in \mathscr{C}(f)$, montrer que $\mathscr{P}(g) \subset \mathscr{C}(f)$.

Partie II : Étude en dimension finie.

On suppose dans cette partie que E est de dimension finie, égale à n, que f est cyclique et l'on considère $a \in E$ associé à f.

3) Justifier l'existence d'un plus grand entier naturel p tel que $(a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a))$ soit une famille libre.

4) Démontrer que $(a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a))$ est une base de E. Que vaut donc p ?

5) Soit $g \in \mathscr{C}(f)$, soit $\alpha_0,\ldots,\alpha_{n-1}$ tels que $g(a) = \alpha_0 a + \alpha_1 f(a) + \cdots + \alpha_{n-1}f^{n-1}(a)$. On note $h = \alpha_0\mathrm{Id}_E + \alpha_1 f + \cdots + \alpha_{n-1}f^{n-1}$. Démontrer que $g = h$.

6) En déduire que $\mathscr{C}(f) = \mathscr{P}(f)$.

7) Démontrer que $(\mathrm{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est une base de $\mathscr{P}(f)$.

Partie III : Dérivations discrète et formelle en dimension finie.

On suppose que $E = \mathbb{R}_n[X]$, soit a un réel non nul. On considère les endomorphismes D et Δ de $\mathbb{R}_n[X]$ définis par

$$D : P \to P' \qquad \text{et} \qquad \Delta : P \to P(X+a) - P(X).$$

8) Montrer que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ n'est pas constant, alors $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.

9) En déduire que Δ est cyclique. Quels sont les polynômes associés à Δ ?

10) Montrer que $D \in \mathscr{P}(\Delta)$.

11) Démontrer que D est cyclique.

12) Montrer que $\mathscr{C}(D) = \mathscr{C}(\Delta)$.

Partie IV : Étude de ces dérivations en dimension infinie.

On considère maintenant les endomorphismes D et Δ étendus à $\mathbb{R}[X]$. Soit $\varphi \in \mathscr{C}(\Delta)$.

13) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $P \in \mathbb{R}_n[X] \Leftrightarrow \Delta^{n+1}(P) = 0$.

14) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ.

15) Démontrer alors que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\varphi(P') = [\varphi(P)]'$.

16) Démontrer que $\mathscr{C}(\Delta) = \mathscr{C}(D)$.

17) Montrer que Δ n'appartient pas à $\mathscr{P}(D)$.

— FIN —