

XXII Intégration

6 juin 2022

Dans tout ce chapitre, a et b sont deux réels tels que $a \leq b$.

1 Continuité uniforme.

Définition 1.0.1.

On dit que f est *uniformément continue* sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall (x, y) \in I^2 \\ |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Remarque 1.0.2. 1. C'est une notion qui n'a de sens que sur un intervalle, jamais en un point.

2. Comparer cette expression avec celle de f continue sur I :

$$\forall x \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall y \in I \\ |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

La différence essentielle est l'inversion d'un \forall avec un \exists .

Exemple 1.0.3.

La fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ n'est pas uniformément continue. Montrons la négation d'uniforme continuité :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \alpha > 0 \quad \exists (x, y) \in I^2 \\ |x - y| \leq \alpha \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon.$$

Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Soit $\alpha > 0$. Posons $x = \min(\alpha, 1)$ et $y = \frac{x}{2}$. On a $|x - y| = \frac{x}{2} \leq \alpha/2 < \alpha$. De plus $|1/x - 1/y| = |1/x - 2/x| = 1/x \geq 1 > \varepsilon$.

Théorème 1.0.4. 1. Toute fonction uniformément continue sur I est continue sur I .

2. Toute application lipschitzienne sur I est uniformément continue sur I .

Démonstration. 1. Facile : on réécrit f uniformément continue en fixant $y = a$, et on trouve f continue en a .

2. On fixe ε , on pose $\alpha = \frac{\varepsilon}{K}$. Et on déroule les définitions. □

Remarque 1.0.5.

Nous avons déjà vu que la fonction $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne. Ce théorème n'est-il pas contradictoire avec ce dernier point et avec 1.0.3 ?

Théorème 1.0.6 (de Heine).

Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

Démonstration.

(non exigible). On pose $I = [a, b]$. Soit f continue sur I .

Par l'absurde, supposons que f n'est pas uniformément continue. Alors il existe $\varepsilon > 0$ vérifiant

$$\forall \alpha > 0 \quad \exists (x, y) \in I^2 \quad |x - y| < \alpha \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon. \quad (1)$$

Soit alors $n \in \mathbb{N}$. D'après la propriété (1), il existe $(x_n, y_n) \in I$ vérifiant

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n+1}, \quad (2)$$

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon. \quad (3)$$

Or, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans le segment $[a, b]$, donc est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers une limite $\ell \in [a, b]$.

Posons alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = x_{\varphi(n)}$, $v_n = y_{\varphi(n)}$.

On a alors

$$u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{et } u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

Donc, par somme de limites :

$$v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

Or f est continue sur $[a, b]$ donc en ℓ , on a donc

$$f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell),$$

$$f(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell).$$

Ainsi,

$$|f(u_n) - f(v_n)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$|f(u_n) - f(v_n)| < \varepsilon/2,$$

ce qui est contradictoire avec (3). C'est donc absurde. \square

Remarque 1.0.7.

Attention : ce résultat est faux si l'ensemble de départ considéré pour f n'est pas un segment. Ainsi $]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue mais pas uniformément continue.

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

2 Construction de l'intégrale.

2.1 Fonctions en escalier sur un segment.

Définition 2.1.1.

On appelle *fonction en escalier* sur $[a, b]$ toute fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $n + 1$ réels $x_0 \dots x_n$ tels que :

- (i) $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$;
- (ii) pour tout $i \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ est constante.

L'ensemble $\{x_0, \dots, x_n\}$ est appelé une *subdivision* de $[a, b]$ *adaptée à f* . On note $\mathcal{E}([a, b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$. Alors $\mathcal{E}([a, b])$ est un sev et un sous-anneau de $\mathbb{R}^{[a, b]}$.

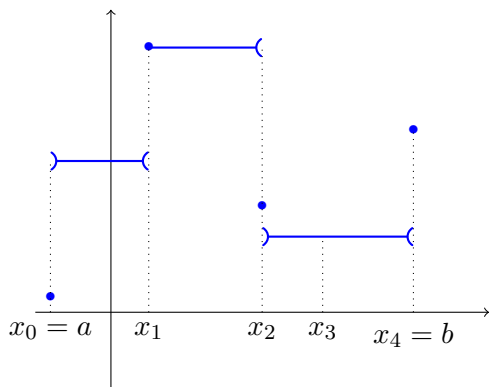


FIGURE 1 – Illustration de la définition d'une fonction en escalier.

Remarque 2.1.2.

Attention aux valeurs prises aux points de la subdivision : elles peuvent valoir n'importe quoi. Si on rajoute des points à une subdivision adaptée, elle est toujours adaptée. Pas si on en ôte.

Remarque 2.1.3.

Si S et T sont deux subdivisions de $[a, b]$, alors :

1. Si S est adaptée à une application en escalier f et $S \subset T$, alors T est adaptée à f .
2. Si S et T sont des subdivisions adaptées à des applications en escalier respectivement f et g , alors $S \cup T$ est adaptée à la fois à f et à g .

Définition 2.1.4 (Intégrale d'une fonction en escalier).

Soit $f \in \mathcal{E}([a, b])$ et $\{x_i\}_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ une subdivision adaptée à f . Alors on appelle *intégrale de f sur $[a, b]$* et on note $\int_{[a, b]} f$ ou $\int_a^b f$ ou $\int_{[a, b]} f(t) dt$ ou $\int_a^b f(t) dt$ le réel

$$\sum_{i=0}^{n-1} v_i \times (x_{i+1} - x_i)$$

où, pour $i \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, v_i est la valeur (constante) prise par f sur $]x_i, x_{i+1}[$ (on a en particulier $v_i = f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$).

Ce réel ne dépend pas de la subdivision choisie.

Démonstration.

La démonstration consiste à remarquer :

1. Que la valeur définie ci-dessus pour une subdivision S adaptée à f ne change pas si on ajoute un point à cette subdivision.
2. Que, par une récurrence immédiate, elle ne change pas si on rajoute un nombre fini de point et qu'en particulier, si on a deux subdivisions S et T avec $S \subset T$ et S adaptée à f , alors la valeur calculée pour S est la même que pour T .
3. Qu'enfin, si S et T sont deux subdivisions adaptées à f , alors la valeur calculée pour S est la même que pour $S \cup T$ et que celle calculée pour T est la même que pour $S \cup T$.

On se contentera de donner la démonstration du premier point : étant donné une subdivision $S = \{x_0, \dots, x_n\}$ adaptée à f en escalier sur $[a, b]$, et un point supplémentaire x' , comparons la valeur calculée pour la subdivision S et pour la subdivision $S \cup \{x'\}$. En notant i l'entier tel que $x_i < x' < x_{i+1}$ le terme $v_i(x_{i+1} - x_i)$ dans la somme pour la subdivision S est remplacée par la somme des deux termes $v_i(x' - x_i) + v_i(x_{i+1} - x')$ dans la somme obtenue pour la subdivision $S \cup \{x'\}$. Or ces deux valeurs sont les mêmes. \square

Remarque 2.1.5. 1. L'intégrale d'une fonction en escalier est bien la somme des aires algébriques des rectangles délimités par les subdivisions.

2. L'intégrale de f ne dépend pas de la valeur de f aux points de la subdivision choisie.
3. Changer la valeur de $f \in \mathcal{E}([a, b])$ en un point seulement ne change pas la valeur de l'intégrale : il suffit de rajouter ce point dans la subdivision.
4. L'intégrale de la fonction constante λ sur $[a, b]$ vaut $\lambda(b-a)$, en utilisant la subdivision adaptée $\{a, b\}$.

Proposition 2.1.6 (Propriétés de l'intégrale). Soient $f, g \in \mathcal{E}([a, b])$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Linéarité : $\int_a^b (f + \lambda g) = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g$.
2. Positivité : $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$.
3. Croissance : $f \geq g \Rightarrow \int_a^b f \geq \int_a^b g$.
4. Relation de Chasles : si $c \in]a, b[$,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Démonstration. 1. Soit S une subdivision adaptée à f , T une subdivision adaptée à g , alors $S \cup T$ est adaptée à f et g . Notons $\{z_i \mid i \in \llbracket 0, q \rrbracket\}$ cette subdivision et

exprimons $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$:

$$\begin{aligned} & \int_a^b (f + \lambda g) \\ &= \sum_{k=0}^{q-1} (f + \lambda g) \left(\frac{z_{i+1} + z_i}{2} \right) \times (z_{i+1} - z_i) \\ &= \sum_{k=0}^{q-1} f \left(\frac{z_{i+1} + z_i}{2} \right) \times (z_{i+1} - z_i) \\ & \quad + \lambda \sum_{k=0}^{q-1} g \left(\frac{z_{i+1} + z_i}{2} \right) \times (z_{i+1} - z_i) \\ &= \int_a^b f + \lambda \int_a^b g. \end{aligned}$$

2. On exprime $\int_a^b f$ avec une subdivision adaptée à f : tous les termes sont positifs.
3. Appliquer le point précédent à $(f - g)$.
4. Soit S une subdivision adaptée à f . Ajoutons le point c et notons $\{z_i \mid i \in \llbracket 0, q \rrbracket\}$ la subdivision obtenue. Soit $s \in \llbracket 1, q-1 \rrbracket$ tel que $z_s = c$. Alors :

$$\begin{aligned} \int_a^b f &= \sum_{k=0}^{q-1} f \left(\frac{z_{i+1} + z_i}{2} \right) \times (z_{i+1} - z_i) \\ &= \sum_{k=0}^{s-1} f \left(\frac{z_{i+1} + z_i}{2} \right) \times (z_{i+1} - z_i) \\ & \quad + \sum_{k=s}^{q-1} f \left(\frac{z_{i+1} + z_i}{2} \right) \times (z_{i+1} - z_i) \\ &= \int_a^c f + \int_c^b f. \end{aligned}$$

\square

2.2 Fonctions continues par morceaux sur un segment.

Définition 2.2.1.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est continue par morceaux s'il existe une subdivision $\{x_0, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ telle que

1. $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$;
2. pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ est continue et prolongeable par continuité en x_i et en x_{i+1} .

L'ensemble $\{x_0, \dots, x_n\}$ est appelé une *subdivision* de $[a, b]$ adaptée à f . On note $\mathcal{C}_m([a, b])$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$. Alors $\mathcal{C}_m([a, b])$ est un sev et un sous-anneau de $\mathbb{R}^{[a, b]}$.

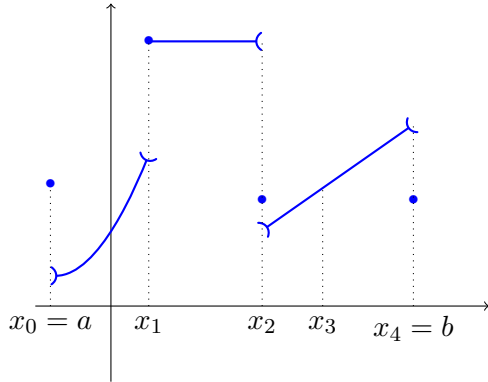


FIGURE 2 – Illustration de la définition d'une fonction continue par morceaux.

Remarque 2.2.2.

Attention aux valeurs prises aux points de la subdivision : elles peuvent valoir n'importe quoi.

Exemple 2.2.3. 1. Dessiner des exemples de fonctions continues par morceaux.

- La fonction tangente, prolongée en \mathbb{R} en lui donnant la valeur 0 là où elle n'est pas définie, n'est pas continue par morceaux car elle n'est pas prolongeable par continuité en les points de discontinuité.

- Idem pour $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$:

$$x \mapsto \sin 1/x$$

On construit l'intégrale d'une fonction continue par morceaux en approchant celle-ci par des fonctions en escaliers.

Théorème 2.2.4.

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, b])$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe φ_ε^+ et $\varphi_\varepsilon^- \in \mathcal{E}([a, b])$ telles que $\varphi_\varepsilon^- \leq f \leq \varphi_\varepsilon^+$ et $0 \leq \varphi_\varepsilon^+ - \varphi_\varepsilon^- \leq \varepsilon$.

Démonstration. Première étape On suppose que f est continue sur $]a, b[$ et prolongeable par continuité en a et en b . On appelle \tilde{f} ce prolongement. Alors f et \tilde{f} coïncident sur $]a, b[$, mais pas forcément en a ni en b . On utilise le théorème de Heine : \tilde{f} est uniformément continue sur $[a, b]$, donc il existe $\alpha > 0$ vérifiant

$$\forall x, y \in [a, b] \quad |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leq \varepsilon.$$

On choisit n tel que $h = \frac{b-a}{n} \leq \alpha$ et l'on pose pour $0 \leq k \leq n$:

$$x_k = a + kh.$$

Ainsi, $\{x_0, \dots, x_n\}$ est une subdivision régulière de $[a, b]$, et

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall x, y \in [x_i, x_{i+1}], |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leq \varepsilon$$

Soit $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, \tilde{f} est continue sur le segment $[a, b]$, donc est bornée et atteint ses bornes sur $[x_i, x_{i+1}]$.

On pose

$$\varphi_i^+ = \max_{[x_i, x_{i+1}]} \tilde{f}$$

$$\varphi_i^- = \min_{[x_i, x_{i+1}]} \tilde{f}$$

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon^+ : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \varphi_i^+ & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}[\\ \varphi_{n-1}^+ & \text{si } x = b \end{cases} \\ \varphi_\varepsilon^- : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \varphi_i^- & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}[\\ \varphi_{n-1}^- & \text{si } x = b \end{cases} \end{aligned}$$

On a bien $\varphi_\varepsilon^- \leq f \leq \varphi_\varepsilon^+$.

Puisque ces maximums et minimums sont atteints, pour chaque $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, il existe $y_i, z_i \in [x_i, x_{i+1}]$ tels que $\varphi_i^+ = \tilde{f}(y_i)$ et $\varphi_i^- = \tilde{f}(z_i)$. Ainsi, comme on a toujours $|y_i - z_i| \leq \alpha$,

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, 0 \leq \varphi_i^+ - \varphi_i^- = \tilde{f}(y_i) - \tilde{f}(z_i) \leq \varepsilon$$

donc nécessairement

$$0 \leq \varphi_\varepsilon^+ - \varphi_\varepsilon^- \leq \varepsilon.$$



φ_ε^+ et φ_ε^- conviennent pour \tilde{f} et non f : il suffit alors de changer leurs valeurs en a et b , en posant $\varphi_\varepsilon^+(a) = \varphi_\varepsilon^-(a) = f(a)$ et $\varphi_\varepsilon^+(b) = \varphi_\varepsilon^-(b) = f(b)$.

Deuxième étape On traite le cas général.

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, b])$ et $\{x_0, \dots, x_n\}$ une subdivision adaptée. Alors on définit des φ_ε^+ et φ_ε^- sur chaque morceau de la subdivision, et on recolle en définissant φ_ε^+ et φ_ε^- comme valant $f(x_i)$ en chaque x_i . \square

Définition 2.2.5 (Intégrale d'une fonction continue par morceaux).

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, b])$. On note :

- $\mathcal{E}^+(f) = \{ h \in \mathcal{E}([a, b]) \mid h \geq f \},$
- $\mathcal{E}^-(f) = \{ h \in \mathcal{E}([a, b]) \mid h \leq f \},$
- $I^+(f) = \left\{ \int_a^b h \mid h \in \mathcal{E}^+(f) \right\},$
- $I^-(f) = \left\{ \int_a^b h \mid h \in \mathcal{E}^-(f) \right\}.$

Alors $\sup I^-(f)$ et $\inf I^+(f)$ existent et sont égales. On appelle alors cette constante l'*intégrale* de f sur $[a, b]$, notée $\int_{[a, b]} f$ ou $\int_a^b f$ ou $\int_{[a, b]} f(t) dt$ ou $\int_a^b f(t) dt$.

Démonstration.

D'après le théorème d'approximation, il existe $\varphi^+ \in \mathcal{E}^+(f)$ et $\varphi^- \in \mathcal{E}^-(f)$, donc $\mathcal{E}^+(f)$ et $\mathcal{E}^-(f)$ ne sont pas vides, donc $I^\pm(f)$ non plus. De plus $I^+(f)$ est minorée par $\int_a^b \varphi^-$ et $I^-(f)$ est majorée par $\int_a^b \varphi^+$. Ainsi, avec le théorème de la borne sup, $\sup I^-(f)$ et $\inf I^+(f)$ existent, et $\sup I^-(f) \leq \int_a^b \varphi^+$.

Mais cette inégalité est valable pour tout $\varphi^+ \in \mathcal{E}^+(f)$, donc $\sup I^-(f) \leq \inf I^+(f)$.

Pour conclure, montrons l'inégalité inverse : soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $\varphi_\varepsilon^+ \in \mathcal{E}^+(f)$ et $\varphi_\varepsilon^- \in \mathcal{E}^-(f)$ telles que $\varphi_\varepsilon^+ - \varphi_\varepsilon^- \leq \varepsilon$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi_\varepsilon^+ &\leq \int_a^b \varphi_\varepsilon^- + \int_a^b \varepsilon \\ &\leq \int_a^b \varphi_\varepsilon^- + (b-a)\varepsilon. \end{aligned}$$

On obtient donc $\inf I^+(f) \leq \sup I^-(f) + (b-a)\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc par passage à la limite, on a : $\inf I^+(f) \leq \sup I^-(f)$. \square

Remarque 2.2.6.

Cette intégrale représente bien la notion « d'aire sous la courbe », même si la construction s'éloigne quelque peu d'une définition géométrique.

Remarque 2.2.7.

La notion d'intégrale de fonction continue par morceaux prolonge celle de fonction en escalier. En effet, si $f \in \mathcal{E}([a, b])$, alors $f \in \mathcal{E}^+(f) \cap \mathcal{E}^-(f)$,

et l'on voit directement que $\int_a^b f \in I^+(f) \cap I^-(f)$.

Remarque 2.2.8.

Changer la valeur de $h \in \mathcal{E}([a, b])$ en un point seulement ne change pas la valeur de son intégrale : il suffit de rajouter ce point dans la subdivision. On peut en déduire que changer la valeur de $f \in \mathcal{C}_m([a, b])$ en un point seulement ne change pas la valeur de son intégrale.

Exercice 2.2.9.

Le démontrer.

Proposition 2.2.10.

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m([a, b])$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Linéarité : $\int_a^b (f + \lambda g) = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g.$
2. Positivité : $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0.$
3. Croissance : $f \geq g \Rightarrow \int_a^b f \geq \int_a^b g.$
4. Continuité (ou inégalité triangulaire) : $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$
5. Inégalité de la moyenne : $\left| \int_a^b (fg) \right| \leq (\sup_{[a, b]} |f|) \times \int_a^b |g|.$
Cas particulier : $\left| \int_a^b f \right| \leq (b-a) \sup_{[a, b]} |f|.$
6. Relation de Chasles : si $c \in]a, b[$, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$

Remarque 2.2.11.

On appelle *moyenne* de f sur $[a, b]$ la quantité $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$. Faire un dessin avec les aires pour voir le rapport avec l'inégalité de la moyenne.

Démonstration. 1. a) Montrons d'abord que pour

$$\text{tout } \lambda \in \mathbb{R}_+, \int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

Il suffit pour cela de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\left| \int_a^b \lambda f - \lambda \int_a^b f \right| \leq \lambda(b-a)\varepsilon$$

et d'en déduire le résultat par passage à la limite.

Considérons donc $\varepsilon > 0$. Choisissons φ^- et φ^+ des applications en escaliers encadrant f vérifiant $0 \leq \varphi^+ - \varphi^- \leq \varepsilon$. Alors λf est encadrée par $\lambda\varphi^-$ et $\lambda\varphi^+$. On en déduit

$$\begin{aligned} \int_a^b \lambda f - \lambda \int_a^b f &\leq \int_a^b \lambda\varphi^+ - \lambda \int_a^b \varphi^- \\ &\leq \lambda \int_a^b (\varphi^+ - \varphi^-) \quad (\text{car } \varphi^+ \\ &\quad \text{et } \varphi^- \text{ sont en escalier}) \\ &\leq \lambda(b-a)\varepsilon \quad (\text{car } \varphi^+ - \varphi^- \leq \varepsilon). \end{aligned}$$

De même, on a

$$\int_a^b \lambda f - \lambda \int_a^b f \geq -\lambda(b-a)\varepsilon.$$

D'où le résultat.

b) On procède de la même manière pour le cas $\lambda \in \mathbb{R}_-$, en faisant attention aux changements de sens dans les inégalités dus au signe de λ .

c) Montrons ensuite que $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

Il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\left| \int_a^b (f+g) - \left(\int_a^b f + \int_a^b g \right) \right| \leq 2\varepsilon(b-a)$$

Soit donc $\varepsilon > 0$. Choisissons φ_f^- et φ_f^+ encadrant f et φ_g^- et φ_g^+ encadrant g et vérifiant $\varphi_f^+ - \varphi_f^- \leq \varepsilon$ et $\varphi_g^+ - \varphi_g^- \leq \varepsilon$.

Alors on a :

$$\begin{aligned} \int_a^b f &\geq \int_a^b \varphi_f^- \\ \int_a^b g &\geq \int_a^b \varphi_g^- \\ \int_a^b (f+g) &\leq \int_a^b (\varphi_f^+ + \varphi_g^+) \\ &\quad (\text{car } \varphi_f^+ + \varphi_g^- \in \mathcal{E}^+(f+g)) \\ \int_a^b (f+g) &\leq \int_a^b \varphi_f^+ + \int_a^b \varphi_g^+ \\ &\quad (\text{car } (\varphi_f^+, \varphi_g^+) \in \mathcal{E}([a,b])^2) \end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned} \int_a^b (f+g) - \left(\int_a^b f + \int_a^b g \right) &\leq \int_a^b \varphi_f^+ - \int_a^b \varphi_f^- + \int_a^b \varphi_g^+ - \int_a^b \varphi_g^- \\ &\leq 2\varepsilon(b-a). \end{aligned}$$

On montre de même

$$\int_a^b (f+g) - \left(\int_a^b f + \int_a^b g \right) \geq -2\varepsilon(b-a)$$

D'où le résultat.

2. Si $f \geq 0$, la fonction nulle est un élément de $\mathcal{E}^-(f)$ et donc $\int_a^b f \geq \int_a^b 0 = 0$.
3. La croissance découle directement de la positivité, appliquée à $f-g$.
4. Si f est continue par morceaux, alors $-f$, $|f|$ et $-|f|$ le sont aussi. Or $-|f| \leq f \leq |f|$, donc par croissance et linéarité de l'intégrale :

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$

$$\text{d'où } \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

5. On a $|fg| = |f| \cdot |g|$ et donc $|fg| \leq (\sup |f|) \cdot |g|$, donc par continuité, croissance et linéarité de l'intégrale on a bien : $\left| \int_a^b (fg) \right| \leq (\sup_{[a,b]} |f|) \times \int_a^b |g|$.
Le cas particulier s'obtient pour $g = 1$.
6. Soit $c \in]a, b[$.

Il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\left| \int_a^c f + \int_a^c f - \int_a^b f \right| \leq \varepsilon(b-a).$$

Soit donc $\varepsilon > 0$. Notons $I_1 = [a, c]$ et $I_2 = [c, b]$.

Alors pour $i = 1, 2$, il existe φ_i^- et φ_i^+ des applications en escalier sur I_i encadrant la restriction de f à I_i vérifiant

$$\varphi_i^+ - \varphi_i^- \leq \varepsilon.$$

Posons alors

$$\begin{aligned} \varphi^- : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \varphi_1^-(x) & \text{si } x < c \\ \varphi_2^-(x) & \text{si } x \geq c \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \varphi^+ : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \varphi_1^+(x) & \text{si } x < c \\ \varphi_2^+(x) & \text{si } x \geq c \end{cases} \end{aligned}$$

φ^- et φ^+ sont en escalier et on a :

$$\begin{aligned} & \int_a^c f + \int_c^b f \\ & \leq \int_a^c \varphi_1^+ + \int_c^b \varphi_2^+ \\ & \leq \int_a^c \varphi^+ + \int_c^b \varphi^+ \\ & \quad \left(\varphi_{|[a,c]}^+ \text{ et } \varphi_1^+ \text{ différent au plus en } c \right) \\ & \leq \int_a^b \varphi^+ \\ & \quad \left(\varphi^+ \text{ est en escalier.} \right) \end{aligned}$$

Or $\int_a^b f \geq \int_a^b \varphi^-$ car $(\varphi^- \in \mathcal{E}^-(f))$

Donc

$$\begin{aligned} & \int_a^c f + \int_c^b f - \int_a^b f \\ & \leq \int_a^b \varphi^+ - \int_a^b \varphi^- \\ & \quad \text{(par différence des inégalités précédentes)} \\ & \leq \int_a^b (\varphi^+ - \varphi^-) \\ & \quad \left(\varphi^- \text{ et } \varphi^+ \text{ sont en escalier} \right) \\ & \leq (b-a)\varepsilon \\ & \quad \left(\varphi^+ - \varphi^- \leq \varepsilon \right) \end{aligned}$$

De la même façon on montre

$$\int_a^c f + \int_c^b f - \int_a^b f \geq -(b-a)\varepsilon$$

On en déduit le résultat. \square

Théorème 2.2.12.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$, vérifiant $f \geq 0$. Alors :

- (i) s'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$, alors $\int_a^b f > 0$;
- (ii) si $\int_a^b f = 0$, alors $f = 0$.

Remarque 2.2.13.

Toutes les hypothèses sont indispensables : cherchez des contre-exemples !

Démonstration.

(ii) n'est que la contraposée de (i). Il suffit donc de montrer (i).

Si $f(x_0) > 0$ et f continue, alors il existe $\alpha > 0$ tel que $f > f(x_0)/2$ sur $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap [a, b]$. On note alors φ l'application prenant la valeur $f(x_0)/2$ sur $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap [a, b]$ et 0 ailleurs. φ est une fonction inférieure à f , donc $\int_a^b \varphi \leq \int_a^b f$. De plus elle φ est en escalier, elle est nulle sauf sur l'intervalle $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap [a, b]$ où elle a pour valeur $f(x_0)/2$. Son intégrale sur $[a, b]$ vaut donc $\ell \times f(x_0)/2$, où ℓ est la largeur de cet intervalle. Or celle-ci est non nulle (regarder les différents cas suivant que x_0 est intérieur à $[a, b]$ ou non), donc $\int_a^b \varphi > 0$, d'où le résultat. \square

$\alpha] \cap [a, b]$ et 0 ailleurs. φ est une fonction inférieure à f , donc $\int_a^b \varphi \leq \int_a^b f$. De plus elle φ est en escalier, elle est nulle sauf sur l'intervalle $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap [a, b]$ où elle a pour valeur $f(x_0)/2$. Son intégrale sur $[a, b]$ vaut donc $\ell \times f(x_0)/2$, où ℓ est la largeur de cet intervalle. Or celle-ci est non nulle (regarder les différents cas suivant que x_0 est intérieur à $[a, b]$ ou non), donc $\int_a^b \varphi > 0$, d'où le résultat. \square

Exercice 2.2.14. 1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant

$$\int_0^1 P^2 = 0. \text{ Montrer que } P = 0.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \int_0^1 P(t)t^k dt = 0 ?$$

2.3 Extension au cas où $b \leq a$.

Soit I un intervalle on dit qu'une application f est continue par morceaux sur I si elle est continue par morceaux sur tout segment non trivial de I .

Soit donc $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux.

Soit a et b deux réels quelconques de I . Si $a < b$, on a vu comment définir $\int_a^b f$.

Si $b < a$, alors on définit $\int_a^b f$ comme étant le réel $-\int_b^a f$.

Si $a = b$, on pose $\int_a^b f = 0$.

L'intérêt principal de cette définition est de généraliser la relation de Chasles aux cas où les points a, b et c sont dans un ordre quelconque.

Proposition 2.3.1 (Relation de Chasles).

Soit I un intervalle et f continue par morceaux sur I . Alors, pour tout $(a, b, c) \in I^3$, on a

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Démonstration.

Remarquons tout d'abord que nous avons déjà démontré ce résultat proposition 2.2.10 dans le cas où $a < c < b$.

Notons que ce résultat est trivial si $a = c$ ou $c = b$. On a donc le résultat pour $a \leq c \leq b$.

Remarquons ensuite que pour tout m, x, y appartenant à I , avec $m \leq x$ et $m \leq y$, on a

$$\int_x^y f = \int_m^y f - \int_m^x f.$$

En effet, si $x \leq y$, il suffit de remarquer que

$$\int_m^y f = \int_m^x f + \int_x^y f$$

et, si $x \geq y$, de remarquer que

$$\int_m^x f = \int_m^y f + \int_y^x f = \int_m^y f - \int_x^y f.$$

En posant $m = \min(a, b, c)$ on a alors successivement :

$$\begin{aligned} \int_a^c f + \int_c^b f &= \int_m^c f - \int_m^a f + \int_m^b f - \int_m^c f \\ &= \int_m^b f - \int_m^a f \\ &= \int_a^b f. \end{aligned}$$

□

Exercice 2.3.2.

Que deviennent les résultats de la proposition 2.2.10 si on remplace les hypothèses $a < b$ et $f, g \in \mathcal{C}_m([a, b])$ par I est un intervalle, $f, g \in \mathcal{C}_m(I)$ et a et b sont des éléments quelconques de I ?

3 Le théorème fondamental du calcul différentiel.

Dans toute la suite, I est un intervalle de \mathbb{R} .

3.1 Primitives.

Définition 3.1.1.

Soit f une application de I dans \mathbb{R} . On appelle primitive de f sur I toute application $F \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ telle que $F' = f$.

Théorème 3.1.2.

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ a une primitive F , alors l'ensemble des primitives de f est $\{F + \lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Démonstration.

Déjà fait dans le chapitre sur les fonctions usuelles. □

Remarque 3.1.3.

Il ne faut donc JAMAIS parler de LA primitive de f , sous peine de se faire lourdement châtier.

3.2 Existence de primitives.

Remarque 3.2.1.

Commençons par une première remarque : toutes les fonctions n'ont pas de primitive.

Exemple 3.2.2.

Posons

$$\begin{aligned} f : [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Par l'absurde supposons que f admet une primitive F . Alors $F' = 0$ sur $[-1, 0[$ et $]0, 1]$, donc $F = a$ sur $[-1, 0[$ et b sur $]0, 1]$. Mais F est dérivable donc continue, donc les limites à gauche et à droite en 0 doivent être égales, i.e. $a = b$. Mais alors F est constante sur $[-1, 1]$, donc F' est nulle partout, et ainsi $F' \neq f$.

Remarque 3.2.3.

En revanche, la fonction f de l'exemple 3.2.2 a une **intégrale**, et l'application

$$\begin{aligned} F : [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_{-1}^x f(t) dt \end{aligned}$$

est bien définie.



Il ne faut donc pas confondre primitive et intégrale.

Remarque 3.2.4.

De manière plus générale, le théorème de Darboux (HP, mais c'est une conséquence simple du théorème de Rolle) montre qu'une fonction dérivée vérifie toujours la propriété des valeurs intermédiaires. Une fonction ne vérifiant pas cette propriété (comme celle de l'exemple 3.2.2) ne peut donc admettre de primitive.

Théorème 3.2.5 (Théorème fondamental du calcul différentiel).

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, et $a \in I$.

1. f a une primitive, par exemple la fonction

$$F : I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

2. Soit $A \in \mathbb{R}$. Alors f admet une unique primitive valant A en a . Il s'agit de la fonction

$$F : I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x f(t) dt + A$$

3. Soient $a, b \in I$ et \tilde{F} une primitive de f sur I . Alors $\int_a^b f = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a)$. Cette quantité est aussi notée $[\tilde{F}]_a^b$, ou $[\tilde{F}(t)]_{t=a}^b$.

Remarque 3.2.6.

C'est souvent le deuxième ou le troisième point que l'on appelle théorème fondamental du calcul différentiel, mais en fait le point le plus important est le premier, les deux autres en découlent facilement.

Démonstration. 1. Montrons que F est dérivable et $F' = f$.

Soit $x_0 \in I$, montrons que F est dérivable en x_0 , de dérivée $f(x_0)$.

Soit alors $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en x , alors on peut trouver $\alpha > 0$ tel que

$$\forall y \in I, |x_0 - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x_0) - f(y)| \leq \varepsilon$$

$|f - f(x_0)|$ est alors majorée par ε sur $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

Soit $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap I \setminus \{x_0\}$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{\int_a^x f - \int_a^{x_0} f}{x - x_0} - f(x_0) \right| \\ &= \left| \frac{\int_{x_0}^x f}{x - x_0} - \frac{\int_{x_0}^x f(x_0)}{x - x_0} \right| \\ &= \frac{\left| \int_{x_0}^x (f - f(x_0)) \right|}{|x - x_0|} \\ &\leq \frac{|x - x_0| \varepsilon}{|x - x_0|} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

On a montré que pour ε fixé, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in I \quad |x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \leq \varepsilon,$$

donc $\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \neq x_0]{x \rightarrow x_0} f(x_0)$, d'où le résultat.

2. Facile.

3. Il existe K tel que $\tilde{F}(x) = \int_a^x f + K$, la suite est laissée en exercice. □

Exemple 3.2.7. 1. Calculer l'intégrale

$$\int_1^2 \frac{1}{(x+1)^n} dx.$$

2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{(2+t)^n} dt$.

4 Méthodes de calcul.

Se référer au chapitre sur les équations différentielles.

5 Formules de Taylor.

Nous allons maintenant voir deux nouvelles formules de Taylor, mais qui sont cette fois des résultats *globaux*, alors que la formule de Taylor-Young est un résultat *local*.

Théorème 5.0.1 (Formule de Taylor avec reste intégral).

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ et $(a, b) \in I^2$. Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b-t)^n dt. \quad (*)$$

Remarque 5.0.2.

Si f est un polynôme de degré n , alors pour tout $k > n$, $f^{(k)} = 0$, et ainsi, en appliquant Taylor à un ordre supérieur à n , on retrouve la formule de Taylor pour les polynômes.

Démonstration.

Soit f une application de I dans \mathbb{R} et $(a, b) \in I^2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ l'assertion « si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$, alors on a $(*)$ ».

Alors :

— Montrons $P(0)$, c'est-à-dire si $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, alors

$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt$. C'est tout simplement le théorème fondamental de l'analyse.

— Montrons $\forall n \in \mathbb{N} (P(n) \Rightarrow P(n+1))$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$. Montrons $P(n+1)$. Pour cela, supposons $f \in \mathcal{C}^{n+2}(I, \mathbb{R})$. Alors $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ donc, puisqu'on a $P(n)$, on a

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b-t)^n dt.$$

Calculons alors $\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b-t)^n dt$ grâce à une intégration par parties. On dérive $f^{(n+1)}$ (qui est bien \mathcal{C}^1) et on intègre $\frac{(b-t)^n}{n!}$, qui est bien continue. On obtient :

$$\begin{aligned} & \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b-t)^n dt \\ &= \left[f^{(n+1)}(t) \left(-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right) \right]_a^b \\ & \quad - \int_a^b f^{(n+2)}(t) \left(-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right) dt \\ &= 0 + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} \\ & \quad + \int_a^b f^{(n+2)}(t) \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt. \end{aligned}$$

On a donc bien $\forall n \in \mathbb{N} P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

On a donc $P(0)$ et $\forall n \in \mathbb{N} P(n) \Rightarrow P(n+1)$, donc on a $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$. On a donc le résultat cherché. \square

Corollaire 5.0.3 (Inégalité de Taylor-Lagrange).

Avec les mêmes notations et hypothèses,

$$\begin{aligned} \left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \\ \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a,b] \cup [b,a]} |f^{(n+1)}|. \end{aligned}$$

Démonstration.

Faisons la démonstration dans le cas $a < b$ (le cas $a > b$ se traite de la même manière, en faisant attention au signe). On a alors $[a, b] \cup [b, a] = [a, b]$.

La formule de Taylor donne :

$$\begin{aligned} \underbrace{\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right|}_A &= \left| \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b-t)^n dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f^{(n+1)}(t)| \frac{|b-t|^n}{n!} dt. \end{aligned}$$

$f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[a, b]$, donc bornée, donc on a :

$$\begin{aligned} A &\leq \int_a^b \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}| \frac{|b-t|^n}{n!} dt \\ &\leq \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}| \int_a^b \frac{|b-t|^n}{n!} dt \\ &\leq \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}| \left[\frac{-(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_a^b \\ &\leq \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}| \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

\square

Exercice 5.0.4.

En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction exponentielle en zéro, montrer que pour

$$\text{tout } x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x.$$

Exercice 5.0.5.

Déterminer une valeur approchée rationnelle à 10^{-3} près de $\frac{1}{e}$. En déduire un encadrement décimal de e , le plus précis possible.

6 Cas des fonctions à valeurs complexes.

Définition 6.0.1.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $g = \operatorname{Re}(f)$ et $h = \operatorname{Im}(f)$. Donc $g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $f = g + ih$. On suppose g et h de classe \mathcal{C}_m . Soient $a, b \in I$. On appelle *intégrale de f de a à b* , notée $\int_{[a,b]} f$ ou $\int_a^b f$ ou $\int_{[a,b]} f(t) dt$ ou $\int_a^b f(t) dt$, le **complexe** $\int_a^b f = \int_a^b g + i \int_a^b h$.

Remarque 6.0.2.

- On a donc $\operatorname{Re}\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b \operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b \operatorname{Im}(f)$.
- « L'aire sous la courbe » n'a plus aucun sens dans le cas d'une fonction à valeurs dans \mathbb{C} , et ne peut donc pas servir à interpréter l'intégrale d'une fonction à valeurs dans \mathbb{C} .

Théorème 6.0.3.

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$ et $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$.

1. La linéarité et la relation de Chasles sont toujours valables pour les fonctions à valeurs complexes.
2. Continuité : $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.
3. Inégalité de la moyenne : $\left|\int_a^b (fg)\right| \leq (\sup_{[a,b]} |f|) \times \int_a^b |g|$.

Démonstration. 1. Se démontre comme pour les fonctions réelles.

2. On note $\theta = \arg\left(\int_a^b f\right)$, i.e. $e^{-i\theta} \int_a^b f = \left|\int_a^b f\right|$.
On pose pour $a, x \in I$:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ et } G(x) = \operatorname{Re}(e^{-i\theta} F(x)).$$

Alors

$$\begin{aligned} G(b) &= \operatorname{Re}(e^{-i\theta} F(b)) \\ &= \operatorname{Re}\left(e^{-i\theta} \int_a^b f(t) dt\right) \\ &= \operatorname{Re}\left|\int_a^b f(t) dt\right| \\ &= \left|\int_a^b f(t) dt\right|. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} G(b) &= \operatorname{Re}\left(\int_a^b e^{-i\theta} f(t) dt\right) \\ &= \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f(t)) dt \\ &\leq \int_a^b |\operatorname{Re}(e^{-i\theta} f(t))| dt. \end{aligned}$$

On peut alors utiliser l'inégalité classique :

$$|\operatorname{Re}(e^{-i\theta} f(t))| \leq |e^{-i\theta} f(t)|,$$

donc

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f(t) dt\right| &= G(b) \\ &\leq \int_a^b |e^{-i\theta} f(t)| dt \\ &\leq \int_a^b |f(t)| dt. \end{aligned}$$

3. D'après ce qui précède, $\left|\int_a^b fg\right| \leq \int_a^b (|f| \times |g|)$. Il suffit alors d'utiliser les résultats sur les applications à valeurs réelles. \square

Exemple 6.0.4.

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{1+it} &= \int \frac{1-it}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{1}{1+t^2} dt - i \int \frac{t}{1+t^2} dt \\ &= \operatorname{Arctan} t - \frac{i}{2} \ln(1+t^2) + K, \quad K \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

7 Approximation d'intégrales.

On cherche maintenant à approcher des intégrales par des formes géométriques simples : rectangles à bases régulières d'abord, trapèzes ensuite.

7.1 Sommes de Riemann.

Théorème 7.1.1 (Sommes de Riemann).

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note alors, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$. Les $\{x_k\}_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ forment alors une subdivision régulière de $[a, b]$ (i.e. tous les sous-intervalles sont de la même longueur). En posant

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \text{ et } S'_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k),$$

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et (S'_n) convergent toutes deux vers $\int_a^b f$.

Si de plus f est lipschitzienne sur $[a, b]$, alors

$$\begin{aligned} \left| S_n - \int_a^b f \right| &= O\left(\frac{1}{n}\right), \\ \left| S'_n - \int_a^b f \right| &= O\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que dans les deux cas l'erreur de l'approximation est un $O(1/n)$.

Démonstration.

Traisons le cas de S'_n . Comme $S_n = S'_n + \frac{(b-a)}{n}(f(b) - f(a))$, les choses se passent exactement de la même manière pour S_n .

On a par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= \int_{x_0}^{x_n} f(t) dt \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt. \end{aligned}$$

Or pour chaque $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) dt &= f(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} 1 dt \\ &= f(x_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{b-a}{n} f(x_k). \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\left| \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) - \int_a^b f(t) dt \right| = \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x_k) - f(t)) dt \right|.$$

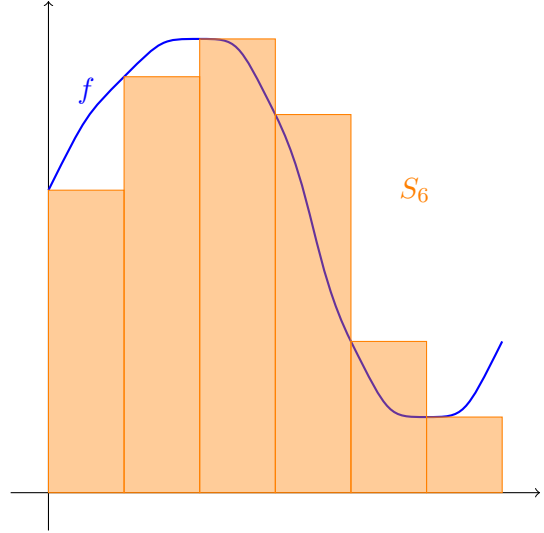


FIGURE 3 – Exemple de somme de Riemann pour une fonction f , pour S_6 .

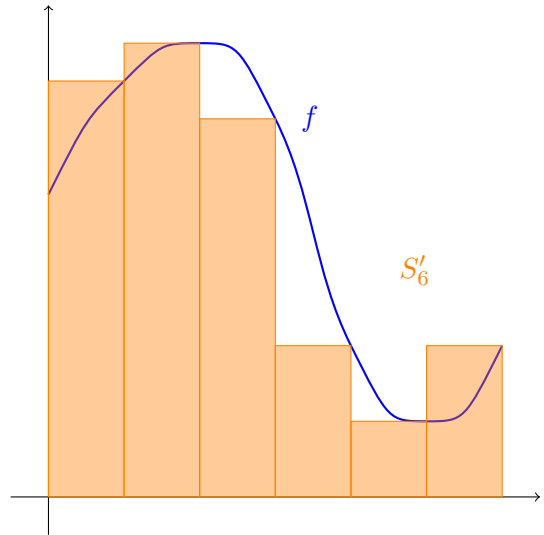


FIGURE 4 – Exemple de somme de Riemann pour une fonction f , pour S'_6 .

Ainsi, par l'inégalité triangulaire,

$$\left| S'_n - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x_k) - f(t)| dt. \quad (\heartsuit)$$

Mais f est continue sur le segment $[a, b]$, donc d'après le théorème de Heine, elle y est uniformément continue. Si

l'on considère $\varepsilon > 0$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [a, b], \quad |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{b-a}{N} < \alpha$. Pour tout $n \geq N$, on a donc $\frac{b-a}{n} < \alpha$.

Par conséquent, si $n \geq N$ et si l'on note encore $\{x_k\}$ la subdivision de l'énoncé associée à ce n , on a, pour tout $t \in [x_{k-1}, x_k]$,

$$|t - x_k| \leq |x_k - x_{k-1}| = \frac{b-a}{n} < \alpha.$$

Dans ce cas, on obtient de (♥) :

$$\begin{aligned} \left| S'_n - \int_a^b f(t) dt \right| &\leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varepsilon dt \\ &\leq \varepsilon \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} \\ &\leq \varepsilon(b-a). \end{aligned}$$

Ainsi, par définition,

$$\left| S'_n - \int_a^b f(t) dt \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Soit $K > 0$ tel que f est K -lipschitzienne sur $[a, b]$. On obtient alors de (♥) :

$$\begin{aligned} \left| S'_n - \int_a^b f(t) dt \right| &\leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} K|x_k - t| dt \\ &\leq K \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - t) dt \\ &\leq K \sum_{k=1}^n \left[-\frac{1}{2}(x_k - t)^2 \right]_{x_{k-1}}^{x_k} \\ &\leq \frac{K}{2} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})^2 \\ &\leq \frac{K}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 \\ &\leq \frac{K}{2} n \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 \\ &\leq \frac{K(b-a)^2}{2} \times \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

donc par définition

$$\left| S'_n - \int_a^b f(t) dt \right| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

□

Remarque 7.1.2.

Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, alors f est lipschitzienne sur $[a, b]$ (on peut prendre comme constante de Lipschitz $K = \sup_{[a,b]} |f'|$).

Alors, l'erreur d'approximation obtenue en approchant \int_a^b par S_n ou S'_n est un $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 7.1.3.

Montrer que la première partie du résultat reste vraie si on suppose seulement f de classe \mathcal{C}_m .

Remarque 7.1.4.

Quand f est continue, on peut toujours écrire

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \\ &= (b-a) \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g\left(\frac{k}{n}\right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (b-a) \int_0^1 g, \end{aligned}$$

avec $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(a + t(b-a))$.

Exercice 7.1.5.

Faire apparaître une somme de Riemann dans

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + 3n^2}$$

puis étudier la convergence de (S_n) .

Exercice 7.1.6.

Déterminer pour tout $p \in \mathbb{N}$ un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$S_n^p = \sum_{k=1}^n k^p.$$

7.2 La méthode des trapèzes.

La méthode d'approximation des sommes de Riemann est couramment appelée *méthode des rectangles*. Sa convergence n'est pas très rapide car elle est seulement en $O(1/n)$. Une amélioration possible est la méthode qui suit : la *méthode des trapèzes*.

Théorème 7.2.1.

On reprend les mêmes notations que dans le théorème 7.1.1, mais cette fois f est de classe \mathcal{C}^2 . Alors :

$$\left| \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right) - \int_a^b f(t) dt \right| = O(1/n^2).$$

Remarque 7.2.2.

Ce résultat est admis, mais remarquons tout de même les choses suivantes :

1. la somme des aires des trapèzes obtenus avec la subdivision $\{x_k\}$ vaut

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\text{base}} \times \underbrace{\frac{f(x_{k+1}) + f(x_k)}{2}}_{\text{moyenne des deux hauteurs}} \\ &= \frac{b-a}{2n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) + \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \right) \\ &= \frac{b-a}{2n} \left(\sum_{k=1}^n f(x_k) + \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \right) \\ &= \frac{b-a}{2n} \left(f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right) \\ &= \frac{b-a}{2n} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right). \end{aligned}$$

2. il est aisé de voir que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers l'intégrale, et que la différence entre T_n et sa limite est un $O(1/n)$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \frac{1}{2}(S_n + S'_n)$.

8 Comparaison série-intégrale.**Proposition 8.0.1.**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue par morceaux et décroissante.

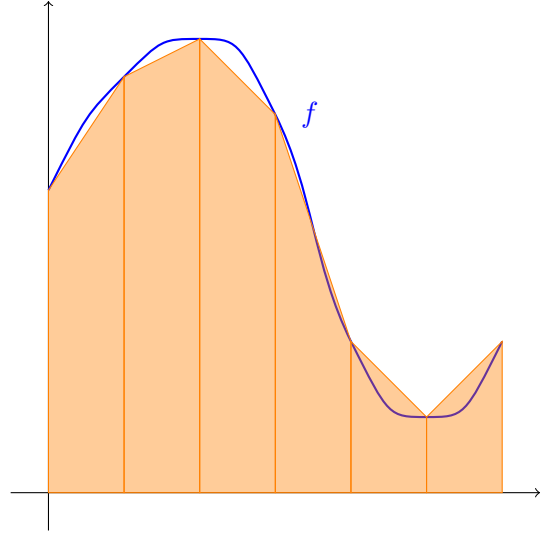


FIGURE 5 – Exemple de la méthode des trapèzes pour une fonction f , avec 6 subdivisions.

Alors la suite $\left(\sum_{k=0}^n f(k) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_0^n f(t) dt \right)$ est convergente.

De plus la suite définie par $u_n = \sum_{k=0}^n f(k) - \int_0^n f(t) dt$ converge.

Démonstration.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Par décroissance de f , on a :

$$\forall t \in [k, k+1], 0 \leq f(k+1) \leq f(t) \leq f(k).$$

Puis, par intégration de cet encadrement sur $[k, k+1]$,

$$0 \leq f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \quad (4)$$

et, par sommation, pour $n \geq 1$,

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \leq \int_0^n f(t) dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k),$$

ou encore

$$0 \leq \sum_{k=0}^n f(k) - f(0) \leq \int_0^n f(t) dt \leq \sum_{k=0}^n f(k) - f(n).$$

Les suites $\sum_{k=0}^n f(k)$ et $\int_0^n f(t) dt$ ont donc la même nature. De plus, il vient

$$0 \leq f(n) \leq \sum_{k=0}^n f(k) - \int_0^n f(t) dt$$

soit $0 \leq u_n$. Ainsi (u_n) est minorée. Enfin, on a

$$u_{n+1} - u_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t) dt \leq 0.$$

La suite (u_n) est donc décroissante et minorée et converge donc. \square

Remarque 8.0.2.

L'encadrement 4 est à rapprocher de la méthode des rectangles.

Exercice 8.0.3.

Retrouver la nature de la suite $\left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \right)_{N \in \mathbb{N}}$, pour $\alpha > 0$.

Exemple 8.0.4.

On pose $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$. On sait alors que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^n f(k) - \int_0^n f(t) dt = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ converge, vers une limite notée γ et nommée *constante d'Euler*.

9 Annexes.

9.1 Règles de Bioche.

Ces règles sont explicitement hors-programme et ne sont pas exigibles.

Soit f une expression rationnelle en $\sin t$ et $\cos t$, c'est-à-dire qu'il existe deux polynômes P et Q tels que $f(t) = \frac{P(\sin t, \cos t)}{Q(\sin t, \cos t)}$. Les règles de Bioche indiquent suivant certains cas, quel changement de variable poser pour pouvoir calculer $\int f(t) dt$. On pose $W(t) = \int f(t) dt$. Alors, si :

1. W est pair¹, un changement de variable judicieux est $u = \cos t$.

¹. Attention : W n'est pas une application, on considère que $W(-t) = \int f(-t) d(-t) = -\int f(-t) dt$.

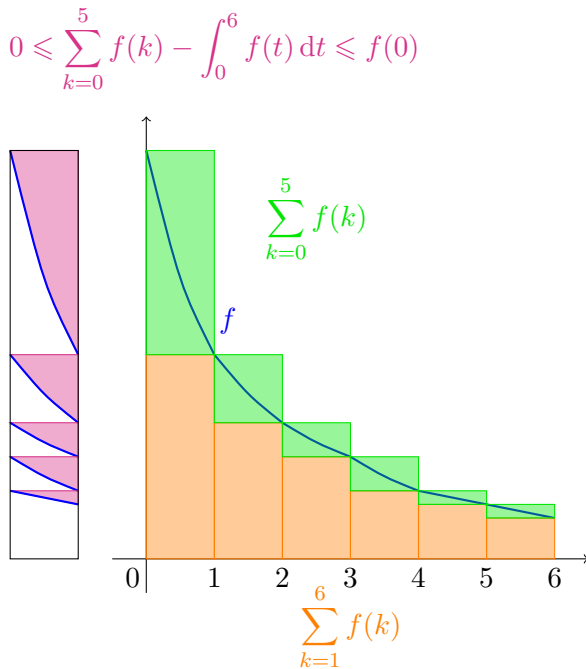


FIGURE 6 – Exemple de comparaison série-intégrale pour une fonction f décroissante, positive.

2. $W(\pi - t) = W(t)$, un changement de variable judicieux est $u = \sin t$.
3. $W(\pi + t) = W(t)$, un changement de variable judicieux est $u = \tan t$.
4. Si 2 des 3 relations précédentes sont vraies (dans ce cas les 3 relations sont vraies), un changement de variable judicieux est $u(t) = \cos(2t)$.
5. Dans les autres cas, le changement de variable $u(t) = \tan(t/2)$ s'avère souvent judicieux.

Exemple 9.1.1.

Calculer $\int \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt$ et $\int \frac{1}{\cos^2 t(1 + \tan t)} dt$.

9.2 Fonctions dont la variable intervient dans les bornes d'une intégrale (cas particulier d'intégrales dépendant d'un paramètre).

Théorème 9.2.1.

Soit $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1(I, J)$ où I et J sont deux intervalles de \mathbb{R} , et soit $f \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{R})$. Alors la fonction

$$\Gamma : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt \end{cases}$$

est de classe \mathcal{C}^1 , et sa dérivée est

$$\gamma : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{aligned} &\psi'(x) \times (f \circ \psi)(x) \\ &- \varphi'(x) \times (f \circ \varphi)(x) \end{aligned} \end{cases}.$$

Démonstration.

f étant continue, elle admet une primitive F . On a alors, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt = F(\psi(x)) - F(\varphi(x)) \\ &= F \circ \psi(x) - F \circ \varphi(x). \end{aligned}$$

Mais F , ψ et φ étant de classe \mathcal{C}^1 , Γ l'est aussi et on a

$$\begin{aligned} \Gamma' &= (F \circ \psi - F \circ \varphi)' \\ &= \psi' \times (F' \circ \psi) - \varphi' \times (F' \circ \varphi) \\ &= \psi' \times (f \circ \psi) - \varphi' \times (f \circ \varphi) \\ &= \gamma. \end{aligned}$$

□