Feuille d'exercice n° 11 : **Groupes, anneaux, corps**

**Exercice 1** ( ) Soient $G_1$ et $G_2$ deux groupes, dont les lois sont notées multiplicativement. On considère l'ensemble produit $G_1 \times G_2$ sur lequel on considère la loi interne $\otimes$ suivante :

$$\forall((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in (G_1 \times G_2)^2 \quad (x_1, x_2) \otimes (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2).$$

Montrer que $(G_1 \times G_2, \otimes)$ est un groupe. Quel est son neutre ?

**Exercice 2** ( ) **– Un peu de sudoku –**

**1)** Soit $(G, *)$ un groupe, $a \in G$. Que peut-on dire de $\varphi_a : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & a * x \end{array}$ ?

**2)** Montrer qu'il existe une seule table possible pour un groupe d'ordre 3 (c'est-à-dire à trois éléments).

**3)** Est-ce vrai pour 4 ?

**Exercice 3** ( ) Soit $(G, \times)$ un groupe, $H$ et $K$ deux sous-groupes de $G$.

**1)** Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe de $G$.

**2)** Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de $G$ si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

**Exercice 4** ( ) Montrer que les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont exactement tous les $n\mathbb{Z}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 5** Quel est le plus petit sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ contenant 1 ? Contenant 2 ? Même question avec $(\mathbb{R}^*, \times)$.

**Exercice 6** On considère $A$ et $B$ deux sous-groupes de $(G, *)$ et l'on note :

$$A * B = \{ x \in G \mid \exists (a, b) \in A \times B,\ x = a * b \} = \{ a * b \mid (a, b) \in A \times B \}.$$

Montrer que $A * B$ est un sous-groupe de $(G, *)$ si et seulement si $A * B = B * A$.

*Indication :* pour le sens direct, on commencera par montrer $B * A \subset A * B$.

**Exercice 7** ( ) Soit $G$ un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{ 0 \}$. On pose $\alpha = \inf (\mathbb{R}_+^* \cap G)$

**1)** Montrer que si $\alpha > 0$, alors $G = \alpha\mathbb{Z} = \{ k\alpha \mid k \in \mathbb{Z} \}$.

**2)** Montrer que si $\alpha = 0$, alors $G$ est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que pour tout réel $x$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in G$ vérifiant $|x - g| \leqslant \varepsilon$.

**Exercice 8** Décrire tous les endomorphismes de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$. Déterminer ceux qui sont injectifs et ceux qui sont surjectifs.

**Exercice 9** ( ) Soit $G$ un groupe noté multiplicativement.
Pour $a \in G$, on note $\tau_a$ l'application de $G$ vers $G$ définie par $\tau_a : x \mapsto axa^{-1}$.

**1)** Soit $a \in G$, montrer que $\tau_a$ est un endomorphisme du groupe $(G, \times)$.

**2)** Vérifier que $\forall a, b \in G$, $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$

**3)** Soit $a \in G$, montrer que $\tau_a$ est bijective et déterminer son application réciproque.

**4)** En déduire que $\mathcal{T} = \{\tau_a \mid a \in G\}$ muni du produit de composition est un groupe.

**Exercice 10** Soit $A$ un anneau de Boole (c'est-à-dire que $\forall x \in A,\ x^2 = x$).

**1)** Calculer $(x+x)^2$ et en déduire : $\forall x \in A,\ x + x = 0$.

**2)** Calculer $(x+y)^2$ et en déduire que $A$ est commutatif.

**Exercice 11** Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On dit que $x \in A$ est *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$.

**1)** Deux identités universelles : soient $x$ et $y \in A$ tels que $\underline{xy = yx}$, et soit $n \in \mathbb{N}$.

**a)** Montrer la formule du binôme de Newton : $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

**b)** Montrer que : $x^n - y^n = (x-y) \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$.

**2)** **a)** Montrer que si $x$ est nilpotent alors $1 - x$ est inversible.

**b)** Montrer que si $x$ et $y$ sont nilpotents et commutent, alors $xy$ et $x + y$ sont nilpotents.

**3)** Un corps admet-il des éléments nilpotents non nuls ?

**Exercice 12** Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Soit $a$ un élément de $A$. On appelle racine carrée de $a$ dans $A$, tout élément $x$ de $A$ tel que $x^2 = a$.

**1)** Montrer que si $A$ est intègre, alors tout élément de $A$ admet au maximum 2 racines carrées.

**2)** Prenons maintenant $(A, +, \times) = (\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \times)$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 1$. Montrer que $f$ admet une infinité de racines carrées.