Matrices et applications linéaires - exercice supplémentaire

Exercice 1 (✎) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, que peut-on dire si $\operatorname{tr}({}^tAA) = 0$?

Exercice 2 (✎) On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X] \quad u(P) = P' + P$$

Écrire la matrice de u dans la base $1, X, X^2, X^3$.

Exercice 3 (🚲) On note M_a la matrice de $\varphi : P \to P(X+a)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que l'ensemble des matrices M_a lorsque a décrit $\mathbb{R}$ est un groupe multiplicatif.

Exercice 4 (🚲) Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, vérifiant $f^2 \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ et $f^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 (⛰) Soit $n \geqslant 2$.

1) Soit φ une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = \operatorname{tr}(AM).$$

2) En déduire que tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède au moins une matrice inversible.