Devoir à la maison n° 1

À rendre le 10 septembre

Dans tout le problème, $(\mathscr{C})$ désigne la courbe d'équation $y = \ln x$ représentant la fonction logarithme népérien dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine O et d'unité graphique 4 cm.

Dans ce problème, on s'autorisera à utiliser librement le résultat suivant :

> *Soit g une fonction continue sur un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$. S'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in [a, b], |g(t)| \leqslant k$, alors $\left|\int_a^b g(t)\, dt\right| \leqslant k(b-a)$.*

On traitera ce problème sans utiliser la calculatrice. Seul l'usage de `Python` sera autorisé, et uniquement aux questions **4)c)** et **10)f)**. On pourra toutefois utiliser sans justification l'encadrement suivant :

$$0,69 < \ln(2) < 0,7.$$

Question préliminaire : Tracer avec soin mais sans étude de la fonction, la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x$.

Partie A

1) **a)** Déterminer une équation de la tangente (Δ) à $(\mathscr{C})$ au point I, point de l'axe (Ox) d'abscisse 1.

b) Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = x - 1 - \ln x.$$

c) En déduire la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à Δ.

2) **a)** Déduire de la question précédente la valeur minimale prise par $x - \ln x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

b) Soit $x \in]0, +\infty[$ et M et N les points de même abscisse x des courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$ respectivement.

Déterminer la plus petite valeur (exprimée en cm) prise par la distance MN lorsque x décrit l'intervalle $]0, +\infty[$.

Partie B

3) Soit $x \in]0,+\infty[$ et M le point d'abscisse x de la courbe $(\mathscr{C})$. Exprimer la distance OM de l'origine à M en fonction de x.

4) *Étude de la fonction auxiliaire u définie sur* $]0,+\infty[$ *par* $u(x) = x^2 + \ln x$:

a) Justifier les limites de u en 0 et en $+\infty$ ainsi que le sens de variations de u.

b) Montrer qu'il existe un réel α et un seul tel que $u(\alpha) = 0$.
Montrer que α est compris entre 0,5 et 1.

c) En utilisant le logiciel `Python` et en explicitant la démarche utilisée, donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

d) Déterminer le signe de $u(x)$ lorsque x parcourt $]0,+\infty[$.

5) *Étude de la fonction g définie sur* $]0,+\infty[$ *par* $g(x) = x^2 + (\ln x)^2$:
Calculer g' et vérifier que $g'(x) = \dfrac{2}{x}u(x)$.
En déduire le tableau de variations de g.

6) Déduire des questions précédentes la valeur exacte de la plus courte distance de l'origine aux points de la courbe $(\mathscr{C})$.

7) A étant le point d'abscisse α de $(\mathscr{C})$, démontrer que la tangente à $(\mathscr{C})$ en A est perpendiculaire à la droite (OA).

Partie C - Étude d'une suite

8) Montrer que le réel α défini dans la partie **B** est solution de l'équation $h(x) = x$, où h est la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$h(x) = x - \frac{1}{4}\left(x^2 + \ln x\right).$$

9) **a)** Calculer h' et étudier son signe sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

b) Prouver que $h\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

c) Calculer h'' et étudier son signe sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

d) En déduire que, pour tout x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, on a

$$0 \leqslant h'(x) \leqslant \frac{3}{10}.$$

10) On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = h(u_n).$$

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$, et que la suite (u_n) est décroissante.

b) Soit $a, b \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ tels que $a < b$. Grâce à une intégration, montrer que

$$h(b) - h(a) \leqslant \frac{3}{10}(b - a)$$

c) Soit $a, b \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Montrer que

$$|h(b) - h(a)| \leqslant \frac{3}{10}|b - a|$$

d) Montrer que l'on a pour tout entier naturel n,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{3}{10}|u_n - \alpha|.$$

e) En déduire une majoration de $|u_n - \alpha|$ ne dépendant que de n et montrer que la suite (u_n) converge vers α.

f) Déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-5} près. On pourra ensuite utiliser `Python` pour donner une valeur explicite de cet entier ainsi qu'une valeur de u_{n_0}.

— FIN —