Devoir surveillé n° 07

– Version 2 –

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Pseudo-inverse d'un endomorphisme.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et f un endomorphisme de E .
On dit que f est *pseudo-inversible* quand il existe g dans $\mathscr{L}(E)$ tel que les trois relations suivantes sont vérifiées

$$\text{(i) } f \circ g \circ f = f \qquad \text{(ii) } g \circ f \circ g = g \qquad \text{(iii) } f \circ g = g \circ f.$$

Dans ce cas, l'endomorphisme g de E est appelé un *pseudo-inverse* de f .

1) **a)** Soit$f$ un endomorphisme de E pseudo-inversible, de pseudo-inverses g et g' . Montrer que $f \circ g' = g \circ f$.

b) En déduire $g' = g$, et donc l'unicité du pseudo-inverse d'un endomorphisme pseudo-inversible de E .

2) Montrer que tout automorphisme f de E est pseudo-inversible et préciser son pseudo-inverse.

3) Montrer que tout projecteur p de E est pseudo-inversible et préciser son pseudo-inverse.

4) Si f est un endomorphisme pseudo-inversible de E, de pseudo-inverse g, prouver que pour tout réel non nul a, les endomorphismes g et af sont pseudo-inversibles, et préciser leurs pseudo-inverses.

5) Soit f un endomorphisme pseudo-inversible de E, de pseudo-inverse g.
Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, f^k est pseudo-inversible, et donner son pseudo inverse.

6) Soit f est un endomorphisme pseudo-inversible de E, de pseudo-inverse g.
Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

7) Soit f un endomorphisme de E tel que $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E.

a) Pour x fixé dans E, prouver l'existence et l'unicité d'un vecteur y de $\mathrm{Im}(f)$, que l'on notera $g(x)$, tel que $(f(y) - x) \in \mathrm{Ker}(f)$.

b) Montrer que l'application g qui à tout x de E associe le vecteur $g(x)$ défini ci-dessus est un endomorphisme de E.

c) Montrer que f est pseudo-inversible de pseudo-inverse l'endomorphisme g défini à la question **7)b)**.

8) Quels sont les endomorphismes de E pseudo-inversibles ?

II. Procédé d'extrapolation de Richardson.

Dans tout ce problème, lorsque ce n'est pas précisé, les notations d'analyse asymptotique seront exprimées au voisinage de 0.

On considère une fonction $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant un développement limité à tout ordre en 0.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe des réels $a_0, \dots, a_k$ vérifiant

$$A(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_k t^k + o(t^k) = \sum_{i=0}^{k} a_i t^i + o(t^k).$$

On se fixe enfin un réel $r > 1$ et l'on définit par récurrence $A_0 = A$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$A_n(t) = \frac{r^n A_{n-1}(t) - A_{n-1}(rt)}{r^n - 1}.$$

1) Questions préliminaires. On répondra en détail à ces questions.

a) Soit $\rho \in \mathbb{R}^*$, $s \in \mathbb{N}$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\varphi(t) = o((\rho t)^s)$.
Montrer, en le détaillant, que $\varphi(t) = o(t^s)$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\varphi(t) = o\left(t^k\right)$.

Déterminer la limite en 0 de $t \mapsto \dfrac{\varphi(t)}{t^{k-1}}$.

2) Soit $k, n \in \mathbb{N}$ vérifiant $k > n$.

a) Montrer que la fonction A admet une limite en 0, et la déterminer.

b) Montrer qu'il existe un réel $a_{1,2}$, que l'on déterminera, tel que le développement limité de A_1 à l'ordre k et en 0 soit

$$A_1(t) = a_0 + a_{1,2} t^2 + \cdots + o(t^k).$$

c) En déduire qu'il existe un réel $a_{n,n+1}$, que l'on ne demande pas de déterminer, tel que le développement limité de A_n à l'ordre k et en 0 soit
$$A_n(t) = a_0 + a_{n,n+1}t^{n+1} + \cdots + o(t^k).$$

d) Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que la suite $(A(r^{-m}t_0))_{m\in\mathbb{N}}$ converge.

Dans la suite de ce problème, on suppose que pour $t_0 \neq 0$ et $r > 1$ fixé, on sait calculer les premiers termes de la suite $A(t_0)$, $A(r^{-1}t_0)$,..., $A(r^{-m}t_0)$.
Le *procédé de Richardson* consiste à extrapoler ces valeurs pour obtenir, grâce à un procédé d'accélération de convergence, la valeur de a_0.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $1 \leqslant q \leqslant p$, on note
$$A_{p,0} = A_0(r^{-p}t_0) \quad \text{et} \quad A_{p,q} = A_q(r^{-p}t_0).$$

3) **a)** Montrer que $A_{p,0} \underset{p\to+\infty}{=} a_0 + o(r^{-p})$.

b) Déterminer un réel $\alpha(p,q) > 0$, que l'on explicitera, tel que
$$A_{p,q} \underset{p\to+\infty}{=} a_0 + O\Big(r^{-\alpha(p,q)}\Big).$$

c) Montrer que, pour tout $p \geqslant 1$,
$$A_{p,1} = \frac{rA_{p,0} - A_{p-1,0}}{r-1}.$$

d) Montrer que, pour tout $1 \leqslant q \leqslant p$,
$$A_{p,q} = \frac{r^q A_{p,q-1} - A_{p-1,q-1}}{r^q - 1} = A_{p,q-1} + \frac{A_{p,q-1} - A_{p-1,q-1}}{r^q - 1}.$$

En pratique, on représente ces valeurs $A_{p,q}$ dans le tableau triangulaire suivant.
$$\begin{array}{lllll}
A_{0,0} & & & & \\
A_{1,0} & A_{1,1} & & & \\
A_{2,0} & A_{2,1} & A_{2,2} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
A_{m,0} & A_{m,1} & A_{m,2} & \ldots & A_{m,m}
\end{array}$$

4) Déterminer la plus petite valeur et la plus grande valeur de $\alpha(p,q)$ pour $0 \leq q \leq p \leq m$.
Lorsque $m \to +\infty$, de laquelle des valeurs $A_{p,q}$ du tableau peut-on attendre la meilleure approximation de a_0 (on pourra utiliser **1)b)** pour justifier la réponse) ?
On écrira cette valeur sous la forme $a_0 + O(r^{-\sigma(m)})$ lorsque $m \to +\infty$ et on précisera la valeur de l'entier $\sigma(m) > 0$.

On considère une fonction $g \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et l'on note

$$g(\alpha + h) = c_0 + c_1 h + \cdots + c_{2k} h^{2k} + O(h^{2k+1})$$

son développement limité à l'ordre $2k$ au voisinage de α.
Pour $h \neq 0$, on note

$$G(h) = \frac{g(\alpha + h) - g(\alpha - h)}{2h}.$$

5) **a)** Exprimer les coefficients c_p pour $0 \leq p \leq 2k$, en fonction de g et de ses dérivées successives.

b) Montrer que la fonction G est paire.

c) Montrer que G se prolonge par continuité en 0 par une valeur que l'on déterminera.
On note $\widetilde{G}$ la fonction G prolongée en 0 par cette valeur.

d) Exprimer à l'aide des coefficients c_p le développement limité de $\widetilde{G}$ à l'ordre $2k - 1$ au voisinage de 0.

Pour t réel positif, on considère dorénavant que

$$A(t) = \widetilde{G}(\sqrt{t}).$$

6) **a)** On choisit $h > 0$ et on considère la suite de valeurs $G(h)$, $G\left(\frac{h}{2}\right)$, $\ldots$, $G\left(\frac{h}{2^m}\right)$.
Déterminer un réel $t_0 > 0$ et un réel $r > 1$ tels que cette suite de valeurs soit $A(t_0)$, $A(r^{-1}t_0)$, $\ldots$, $A(r^{-m}t_0)$.

b) Quelle est la limite ℓ de $(A_{p,0})_{p\in\mathbb{N}}$? On exprimera ℓ à l'aide de la fonction g et de α.

7) On pose $g : x \mapsto \ln(x)$, $\alpha = 3$ et $h = 0,8$.
Écrire une suite d'instructions en langage `Python` qui calcule, en utilisant l'algorithme précédent, la meilleure approximation de ℓ parmi les $A_{p,q}$ pour $0 \leqslant q \leqslant p \leqslant 3$.

— FIN —