Devoir à la maison n° 14

À rendre le 18 mars

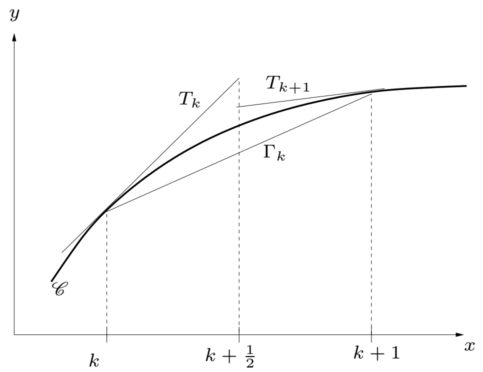
Le but de ce problème est de démontrer la formule de Stirling (James Stirling, mathématicien écossais 1692 - 1770), qui donne un équivalent de $n!$ quand n tend vers $+\infty$.
Cette formule est à la fois géométrique, arithmétique et analytique, de par la présence dans son expression de π, $n!$ et e, respectivement.

Partie I

1) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_1^n \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

On étudie dans la suite un encadrement de I_n à l'aide de considérations géométriques.
À cet effet on désigne par k un entier naturel non nul et on considère dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct :
- la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction ln ;
- le segment Γ_k dont les extrémités sont les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses k et $k+1$;
- la tangente T_k à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse k ;
- la tangente T_{k+1} à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $k+1$.

Tous ces différents objets sont représentés sur la figure suivante.



2) **a)** On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont les graphes sont T_k et T_{k+1}. Montrer que pour tout $x \in \left[k, k+\frac{1}{2}\right]$, $\ln x \leqslant f(x)$.

b) De même, montrer que pour tout $x \in \left[k+\frac{1}{2}, k+1\right]$, $\ln x \leqslant g(x)$.

c) Que peut-on dire de la position de T_k par rapport à $\mathscr{C}$ pour les points d'abscisse comprise entre k et $k+\frac{1}{2}$? De la position de T_{k+1} par rapport à $\mathscr{C}$ pour les points d'abscisse comprise entre $k+\frac{1}{2}$ et $k+1$? Justifier en utilisant les questions précédentes et non pas la figure, qui est peut-être fausse.

3) Montrer que Γ_k se situe sous $\mathscr{C}$ pour les points d'abscisse comprise entre k et $k+1$.

4) **a)** La figure précédente fait intervenir trois trapèzes, encadrant la courbe $\mathscr{C}$. En utilisant l'aire de ces trapèzes et l'aire sous la courbe $\mathscr{C}$, montrer l'encadrement :

$$\frac{1}{2}(\ln k + \ln(k+1)) \leqslant \int_k^{k+1} \ln t \,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}(\ln k + \ln(k+1)) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right).$$

b) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(n!) - \frac{1}{2}\ln(n) \leqslant I_n \leqslant \ln(n!) - \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

5) On considère la suite $u_n = \ln(n!) - \dfrac{1}{2}\ln(n)$.

a) Montrer que la suite $(I_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\dfrac{1}{8}$. Par conséquent cette suite converge vers une limite que nous noterons L.

b) Déduire des questions précédentes que $\dfrac{n^n\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{L-1}$, et enfin que $n! \sim \dfrac{n^n}{\mathrm{e}^n}\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{1-L}$.

Partie II

Le but de cette partie est de calculer la valeur de $K = \mathrm{e}^{L-1}$ afin d'en déduire la formule de Stirling.

On pose à cet effet pour tout entier naturel n : $w_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

6) **a)** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre w_{n+2} et w_n.

c) Calculer w_0.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

7) On se propose de déterminer un équivalent de w_n quand n tend vers $+\infty$, c'est-à-dire une suite v_n telle que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient équivalentes.

a) Établir l'égalité $w_{n+2} \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n$.

b) En déduire que w_n et w_{n+1} sont deux suites équivalentes, *i.e.* $w_n \sim w_{n+1}$.

c) Établir que $((n+1)w_{n+1}w_n)$ est constante : que vaut cette constante ?

d) Donner un équivalent de w_n.

8) Avec les deux questions **6)** et **7)**, montrer que $\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\sqrt{n\pi} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

9) Déterminer la valeur de K avec ce résultat et de la formule établie à la fin de la partie I : $n! \sim K\dfrac{n^n}{\mathrm{e}^n}\sqrt{n}$.

10) En déduire enfin un équivalent de $n!$ quand n tend vers $+\infty$ (formule de Stirling).

— **FIN** —