Devoir à la maison n° 1

À rendre le 12 septembre

Dans tout ce problème, on pourra au besoin utiliser sans preuve l'encadrement

$$2,7 < \mathrm{e} < 2,8.$$

Première partie.

Soit λ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\lambda : x \mapsto -x^2 \mathrm{e}^{-x}.$$

1) Étudier λ.

2) Construire la courbe Γ représentant λ dans un plan muni d'un repère orthonormé.

3) L'étude des variations de λ fait apparaître trois intervalles D_1, D_2 et D_3 sur lesquels λ est monotone, avec

$$\forall x_1 \in D_1,\ \forall x_2 \in D_2,\ \forall x_3 \in D_3,\ x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3.$$

Pour chaque $1 \leqslant i \leqslant 3$, on note $D_i' = \lambda(D_i)$ et λ_i la restriction de λ à D_i (au départ) et D_i' (à l'arrivée).

Pour chaque $1 \leqslant i \leqslant 3$, montrer que λ_i est bijective et étudier sa bijection réciproque $\mu_i = \lambda_i^{-1}$.

Deuxième partie.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit l'application f_α de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f_\alpha : x \mapsto x^2 + \alpha \mathrm{e}^{x}.$$

On note C_α sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

4) Démontrer que par tout point du plan il passe une et une seule courbe C_α.

5) Démontrer que ceux des nombres $\mu_1(\alpha)$, $\mu_2(\alpha)$ et $\mu_3(\alpha)$ qui existent pour une valeur donnée de α sont les abscisses des points communs à C_α et à la droite $(O\vec{\imath})$.

6) Soit $J = [-4\mathrm{e}^{-2}, 0[$.

a) Montrer que $\mu_1(\alpha)$, $\mu_2(\alpha)$ et $\mu_3(\alpha)$ existent simultanément si et seulement si $\alpha \in J$.

b) Étudier les variations de f_α lorsque $\alpha \in J$ et esquisser C_α.
Indication : on pourra dresser le tableau de variations de f'_α.

7) On pose pour tout $\alpha \in J$:

$$I(\alpha) = \int_{\mu_1(\alpha)}^{\mu_3(\alpha)} f_\alpha(x)\mathrm{d}x.$$

a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'_\alpha(x) - f_\alpha(x) = 2x - x^2.$$

b) En déduire une expression de $I(\alpha)$ dépendant uniquement de $\mu_1(\alpha)$ et $\mu_3(\alpha)$.

c) En déduire que, pour tout $\alpha \in J$,

$$I(\alpha) > \frac{1}{3}\mu_3^3(\alpha) - \mu_3^2(\alpha).$$

Quel est le signe de $I(\alpha)$ si $\mu_3(\alpha) = 3$?

d) Donner une interprétation géométrique de $I(\alpha)$. Quel est le signe de $I(-4\mathrm{e}^{-2})$?

e) En utilisant cette interprétation, établir que I est une application strictement croissante.

f) Combient d'éléments contient l'ensemble

$$\{\, \alpha \in J \mid \ I(\alpha) = 0 \,\}?$$

— FIN —