Devoir à la maison n° 5

À rendre le 7 novembre

I. Un pentagone.

Dans tout ce problème, on pose $z_0 = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}$.

Partie I

1) Que vaut $S = 1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4$?

2) On pose $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$.

 a) Montrer que α et β sont des réels.

 b) Déduire de la question **1)** que α et β sont les deux racines de l'équation $Z^2+Z-1=0$.

3) Donner la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

Partie II

Le plan complexe est muni d'un repère orthonomé direct $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.
On désigne par A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 les points du plan d'affixes respectives 1, z_0, z_0^2, z_0^3 et z_0^4.

1) **a)** Par quelle transformation simple passe-t-on de A_0 à A_1 ? Puis de A_1 à A_2 ? Généraliser ce résultat.

 b) Quelle est l'abscisse du point H intersection de la droite (A_1A_4) avec l'axe des abscisses ?

2) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre Ω d'affixe $-\dfrac{1}{2}$ et passant par le point B d'affixe i.
On désigne par M et N les points où $\mathscr{C}$ rencontre l'axe des abscisses, M ayant une abscisse positive.

 a) Prouver que M a pour abscisse α et que N a pour abscisse β.

 b) Montrer que H est le milieu du segment $[OM]$.

 c) Déduire de ce qui précède la description d'une construction à la règle et au compas d'un pentagone dont on connaît le centre O et un sommet A_0.

 d) Effectuer cette construction à la règle et au compas sur une feuille blanche.

II. Une bissectrice.

Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{-1, 0, 1\}$. Soit $A(1)$, $A'(-1)$, $M(z)$, $M'\left(\dfrac{1}{z}\right)$, $P\left(\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)\right)$. Montrer que (MM') est bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PA'})$.

— FIN —