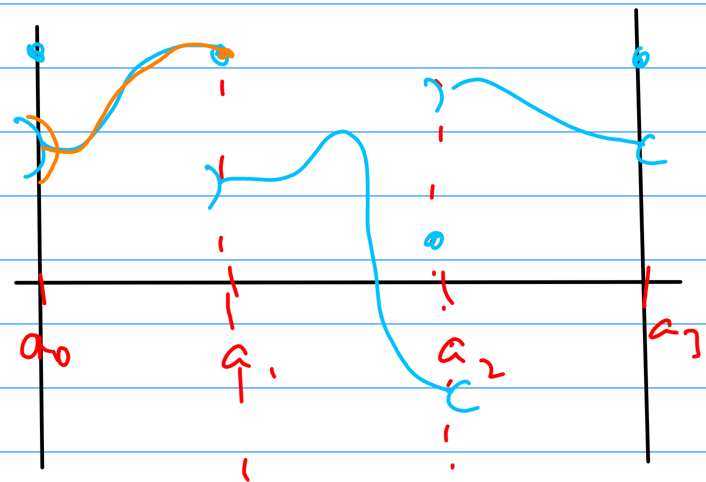
2.2 : **Déf :** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est cont. par morceaux si il existe une subdivision $(a_0, \dots, a_n)$ tq :

(i) $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $f|_{]a_i, a_{i+1}[}$ est continue

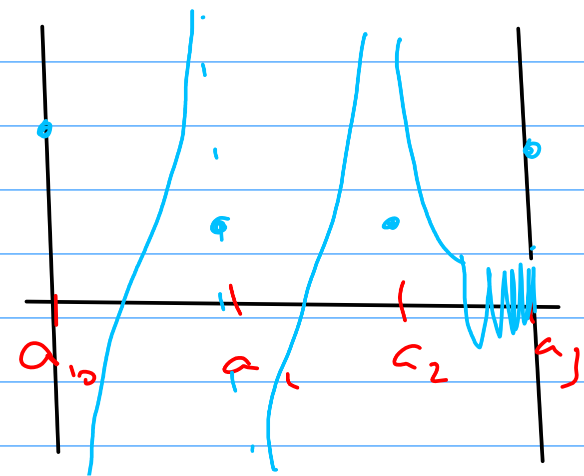
(ii) en tt pt a_i, f a 1 limite $\underset{\text{finie}}{\wedge}$ à gche et à dte

ie : $f|_{]a_i, a_{i+1}[}$ se prolonge par continuité en a_i et en a_{i+1}

ex :



non ex :

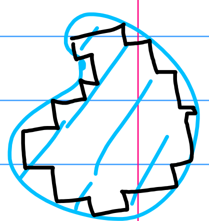


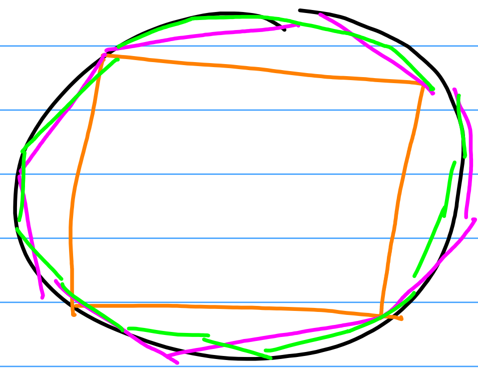
Les fonc. en esc. st cont. par morceaux

$\underline{\text{Rq}}$: $(\mathcal{C}_m([a,b]), \mathbb{R}), +, \cdot)$ est 1 sev de $\mathbb{R}^{[a,b]}$.

$\underline{\text{Th}}$: Soit $\varepsilon > 0$, $f \in \mathcal{C}_m([a,b]), \mathbb{R})$, alors il existe φ_ε^+ et φ_ε^- 2 fonc. en esc. tq. : $\cdot\ \varphi_\varepsilon^- \leq f \leq \varphi_\varepsilon^+$

$\cdot\ 0 \leq \varphi_\varepsilon^+ - f \leq \varepsilon$ $\quad \cdot\ 0 \leq f - \varphi_\varepsilon^- \leq \varepsilon$.





Démo : pt central : Heine.

$f_i = f|_{]a_i, a_{i+1}[}$, $\tilde{f}_i$: le prolongt par cont. de f_i sur $[a_i, a_{i+1}]$

pt central

Construire : φ_i^+, φ_i^- en esc. tq :

(i) $0 \leq f - \varphi_i^- \leq \varepsilon$, (ii) $0 \leq \varphi_i^+ - f \leq \varepsilon$

facile

Qd on a tles $\varphi_i^\pm$, on les "recolle" en 1 fonc $\varphi_\varepsilon^\pm$

tq. $\forall i$, $\varphi_\varepsilon^\pm|_{]a_i, a_{i+1}[} = \varphi_i^\pm$ et $\varphi_\varepsilon^\pm(a_i) = f(a_i)$

Ds ce cas $\varphi_\varepsilon^\pm$ vont convenir.

Soit $\varepsilon > 0$. $\tilde{f}_i$ est cont. sur le segment $[a_i, a_{i+1}]$

donc avec le th. de Heine, elle est u^t continue.

donc : il existe $\alpha > 0$, tq :

$$\forall x, y \in [a_i, a_{i+1}], \quad |x-y| < \alpha \Rightarrow |\tilde{f}_i(x) - \tilde{f}_i(y)| < \varepsilon$$

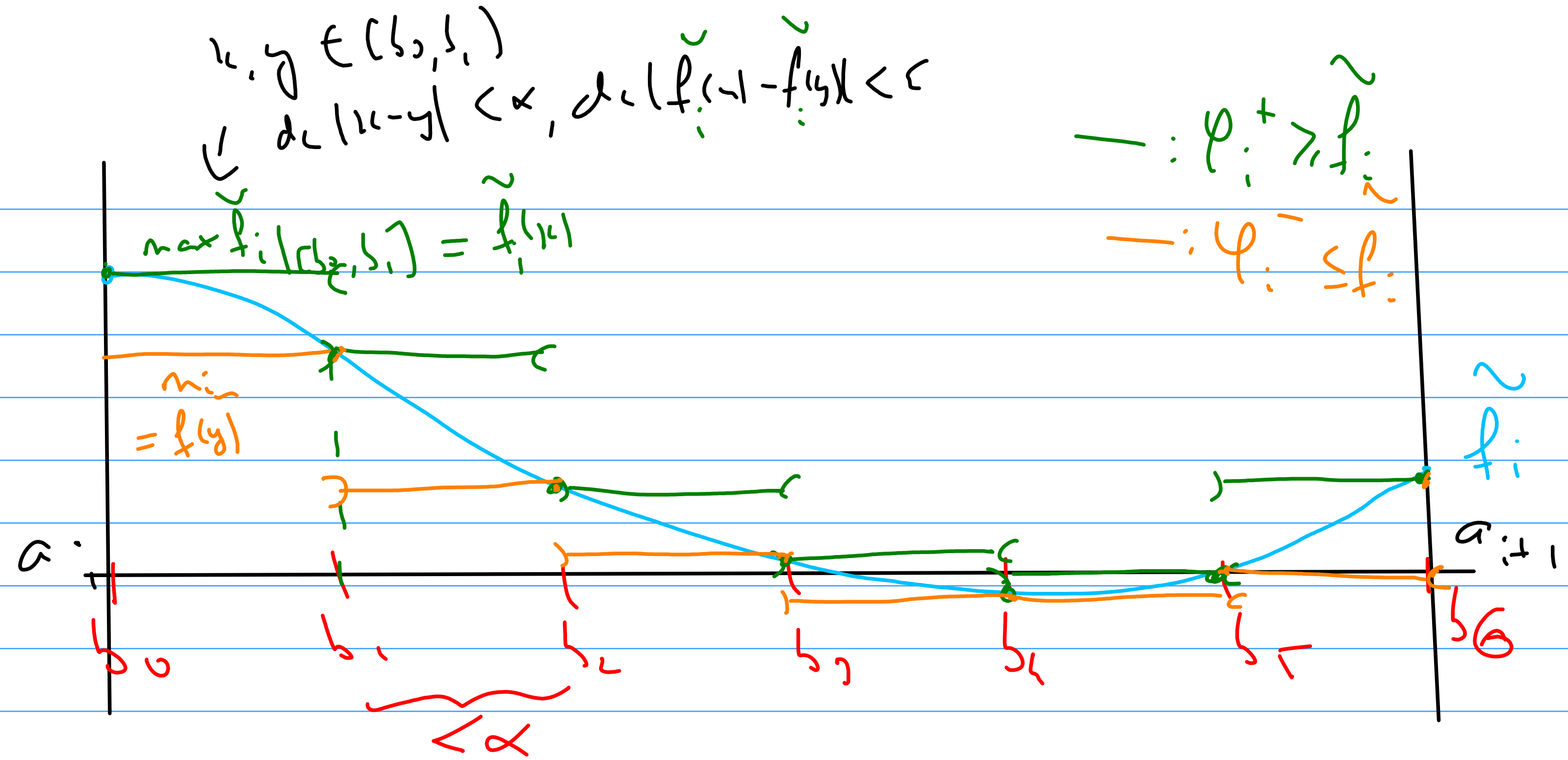
Il suffit de couper | subdiviser $[a_i, a_{i+1}]$ en petits segments de

longueur $< \alpha$: on pose $n = \left\lfloor \frac{a_{i+1} - a_i}{\alpha} \right\rfloor + 1$

alors : $h = \frac{a_{i+1} - a_i}{n} < \alpha$.

On subdivise : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, on pose : $b_k = a_i + kh$

alors : $b_0 = a_i$, $b_n = a_{i+1}$, $\forall k$, $b_{k+1} - b_k = h$



On construit φ_i^- de la manière suivante :

- $\forall b_k$, $\varphi_i^-(b_k) = \tilde{f}_i(b_k)$
- $\forall k$, $\varphi_i^-\big|_{]b_k, b_{k+1}[} = \min\limits_{[b_k, b_{k+1}]} \tilde{f}_i = \tilde{f}_i(c_k)$ — le min est atteint

On construit de même φ_i^+ avec max.

$$\varphi_i^+\Big|_{]b_k, b_{k+1}[} = \max_{[b_k, b_{k+1}]} \tilde{f}_i = \tilde{f}_i(d_k) \quad \text{avec } d_k \in [b_k, b_{k+1}]$$

facile : $\varphi_i^- \leq \tilde{f}_i \leq \varphi_i^+$, et φ_i^-, φ_i^+ step. en esc.

avec Heine : $\forall k,\ c_k, d_k \in [b_k, b_{k+1}]$ or $|b_{k+1} - b_k| < \alpha$

donc $|d_k - c_k| < \alpha$, donc $|\tilde{f}_i(c_k) - \tilde{f}_i(d_k)| < \varepsilon$

donc :

$$\begin{cases} 0 \leq \tilde{f}_i - \varphi_i^- \leq \varepsilon \\ 0 \leq \varphi_i^+ - \tilde{f}_i \leq \varepsilon \end{cases} \quad \therefore \text{cqfd.}$$

Déf - th. 2.2.5 :

$$\mathcal{E}^+ = \{ h \in \mathcal{E}([a,b]),\ h \geq f \}$$
$$\mathcal{E}^- = \{ h \in \mathcal{E}([a,b]),\ h \leq f \}$$

$$I^+ = \left\{ \int_a^b h,\ h \in \mathcal{E}^+ \right\}$$
$$I^- = \left\{ \int_a^b h,\ h \in \mathcal{E}^- \right\}$$

$\int_a^b h$ existe car h en esc.

avec le th. précédent : $\mathcal{E}^+, \mathcal{E}^- \neq \emptyset$, donc $I^+, I^- \neq \emptyset$

On va mq : $\inf I^+$ et $\sup I^-$ existent et sont égaux : cette valeur commune sera appelée $\int_a^b f$.

• Soit $h^+ \in \mathcal{E}^+$, $h^- \in \mathcal{E}^-$,

dc : $h^- \leq f \leq h^+$, dc $h^- \leq h^+$

avec les prop. de l'intégrale des fonc. en esc :

$$\int_a^b h^- \leq \int_a^b h^+$$

Ceci est vrai $\forall h^+ \in \mathcal{E}^+$, dc : $\int_a^b h^-$ minore $\underline{I}^+$

de m. : $\int_a^b h^+$ majore $\underline{I}^-$

dc $\underline{I}^+$ et $\underline{I}^-$ sont non vides et resp. minoré et majoré

dc $\sup \underline{I}^-$ et $\inf \underline{I}^+$ existent.

• $\forall h^- \in \mathcal{E}^-$, $h^+ \in \mathcal{E}^+$: $\int_a^b h^- \leq \int_a^b h^+$

dc : si h^+ est fixé :

$$\forall h^- \in \mathcal{E}^-, \quad \int_a^b h^- \leq \int_a^b h^+$$

dc $\int_a^b h^+$ majore I^- dc : $\sup I^- \leq \int_a^b h^+$

donc, comme ceci est vrai qqsoit $h^+ \in \mathcal{E}^+$,

on peut dire que $\sup I^-$ minore I^+

et dc : $\boxed{\sup I^- \leq \inf I^+}$ (1)

- Mq $\sup I^- \geqslant \inf I^+$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $h^+ \in \mathcal{E}^+$ et $h^- \in \mathcal{E}^-$

tq. $0 \leq h^+ - h^- \leq \varepsilon$ (c'est le th. précédent) dc : $\underbrace{\ell^+}_{\text{esc}} \leq \overbrace{\underbrace{\ell^-}_{\text{esc}} + \underbrace{\varepsilon}_{c^{te}}}^{\text{esc}}$

dc avec les prop. de l'int. pr les fnc. en esc :

$$\inf I^+ \leq \underbrace{\int_a^b \ell^+}_{\in I^+} \leq \int_a^b (\ell^- + \varepsilon) = \underbrace{\int_a^b \ell^-}_{\in I^-} + (b-a)\cdot\varepsilon$$

dc : $\inf I^+ \leq \sup I^- + (b-a)\varepsilon$

et cette inégalité est valable $\forall \varepsilon > 0$, dc qd $\varepsilon \to 0$:

$$\boxed{\inf I^+ \leq \sup I^-} \quad (2)$$

avec (1) et (2) : $\inf I^+ = \sup I^- = \int_a^b f$.

Prop. 2.2.10 : $f, g \in \mathcal{C}_m([a,b])$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(i) **linéarité** : $\displaystyle\int_a^b f + \lambda g = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g$

(ii) **positivité** : si $f \geq 0$, $\displaystyle\int_a^b f \geq 0$

(⚠ ici $a < b$.

déf : si $a, b \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b f = - \int_b^a f$.

⚠ si $a > b$ et $f \geq 0$: $\displaystyle\int_a^b f \leq 0$)

(iii) **croissance** : si $f \geq g$ (et $a \leq b$) :

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g$$

(**dém** : avec (i) et (ii) : $f \geq g \Rightarrow \underbrace{f - g}_{\mathcal{C}_m} \geq 0$

$$\underset{(ii)}{\Rightarrow} \int_a^b (f-g) \geq 0$$

$$\underset{(i)}{\Rightarrow} \int_a^b f - \int_a^b g \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b f \geq \int_a^b g \quad)$$

(iv) continuité ou i.t : $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b \overbrace{|f|}^{\mathcal{C}_n}$

(v) inégalité de la moyenne : $\left| \int_a^b fg \right| \underset{(iv)}{\leq} \int_a^b |fg|$

or $|fg| \leq |f| \times \sup|g|$

donc avec (iii) : $\left| \int_a^b fg \right| \leq \int_a^b |fg|$

$$\leq \int_a^b (\sup|g|) \times |f|$$

$$\underset{(!)}{\leq} \sup|g| \times \int_a^b |f|$$

en particulier, avec $f = 1$:

$$\left|\int g\right| \leq \sup|g| \cdot \int_a^b 1$$

$$\leq (b-a) \times \sup|g|$$

pourquoi "inégalité de la moyenne" ?

qu : quelle est la fonction c^{te} λ

tq : $\int_a^b g = \int_a^b \lambda$??

$\int_a^b \lambda = \lambda.(b-a)$, cette c^{te} c'est $\lambda = \dfrac{\int_a^b g}{b-a}$

<u>Analogie</u> : $\int$ fonc en esc = c'est 1 somme.

dc : $\int$ fonc $\mathscr{C}_m$ = la limite d'1 somme

bcp de prop des sommes qui ont 1 analogue avec les $\int$

très clair : (i), (ii), (iii), (iv) - -

ça marche aussi pr des Σ : $\sum_i (f_i + g_i) = \sum_i f_i + \sum_i g_i$

(i) $\sum \lambda f_i = \lambda \sum f_i$

(ii) si $\forall i, f_i \geqslant g_i$, $\sum f_i \geqslant \sum g_i$

(iv) $\left| \sum f_i \right| \leq \sum_i |f_i|$

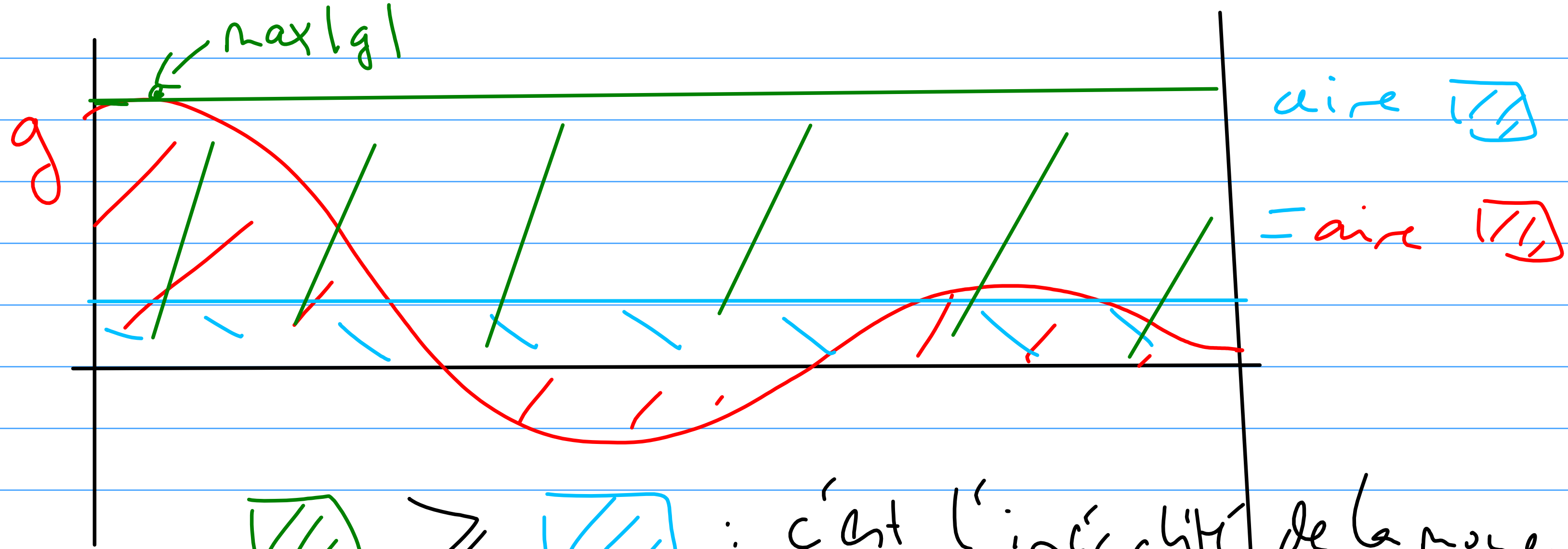
moyenne d'1 somme : $(f_1 - - - f_n)$: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i$

analogue pour $\int$: moyenne de f sur $[a,b]$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

moyenne s d'1 somme $\sum f_i$: $\sum_{i=1}^{n} s = \sum_{i=1}^{n} f_i$

moyenne s d'1 $\int f$: $\int_a^b s = \int_a^b f$



$\geq$: c'est l'inégalité de la moyenne.

(vi) <u>Chasles</u>: si $c \in [a,b]$:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

cas général : si $c, d, e \in [a,b]$:

$$\int_c^e f = \int_c^d f + \int_d^e f$$

<u>Démo</u> : (i) Mq. $\forall f, g \in \mathcal{C}_m$, $\int_a^b f + \lambda g = \int_a^b f + \int_a^b g$.

2 <u>parties</u> : * $\int f + g = \int f + \int g$

* $\int \lambda f = \lambda \int f$ (distinguer 2 cas : $\lambda > 0$, $\lambda < 0$
cas : $\lambda = 0$: trivial)

* soit $\varphi_f^+, \varphi_f^-, \varphi_g^+, \varphi_g^-$ en esc

t.q. $\varphi_f^- \leq f \leq \varphi_f^+$, $\varphi_f^+ - \varphi_f^- \leq \varepsilon$

idem avec g.

dc, par déf. de $\int_a^b f$: $\underbrace{\int_a^b \varphi_f^-}^{\in I^-} \leq \underbrace{\int_a^b f}^{\inf I^+ = \sup I^-} \leq \underbrace{\int_a^b \varphi_f^+}^{\in I^+}$

idem avec g.

dc : $\int_a^b \varphi_f^- + \int_a^b \varphi_g^- \leq \int_a^b f + \int_a^b g \leq \int_a^b \varphi_f^+ + \int_a^b \varphi_g^+$

or : $\int_a^b \varphi_f^- + \int_a^b \varphi_g^- = \int_a^b \varphi_f^- + \varphi_g^-$ car φ_f^-, φ_g^- en esc

de + : $\varphi_f^- + \varphi_g^- \leq f+g$ dc $\int_a^b \varphi_f^- + \varphi_g^- \in I^-(f+g)$

si $h \in \mathcal{C}_m$: $\underline{I}^-(h) = \left\{ \int_a^b \varphi,\ \varphi \text{ en esc et } \varphi \leq h \right\}$

idem avec $\underline{I}^+$.

donc : $$\underbrace{\int_a^b \varphi_f^- + \varphi_g^-}_{\in \underline{I}^-(f+g)} \leq \underbrace{\int_a^b (f+g)}_{= \sup \underline{I}^-(f+g)}$$

dc : $$\int_a^b \varphi_f^- \leq \int_a^b (f+g) - \int_a^b \varphi_g^-$$

ceci valable $\forall \varphi_f^- \in \underline{I}^-(f)$

dc : $\int_a^b (f+g) - \int_a^b \varphi_g^-$ majore $\underline{I}^-(f)$

dc $$\int_a^b (f+g) - \int_a^b \varphi_g^- \geqslant \sup \underline{I}^-(f) = \int_a^b f$$

donc : $\int_a^b f \leq \int_a^b f+g - \int_a^b \varphi_g^-$

donc : $\int_a^b \varphi_g^- \leq \int_a^b f+g - \int_a^b f$

on raisonne avec $\underline{I}^-(g)$:

$$\int_a^b g = \sup \underline{I}^-(g) \leq \int_a^b f+g - \int_a^b f$$

donc : $\int_a^b f + \int_a^b g \leq \int_a^b f+g \quad (1)$

on fait pareil avec $\underline{I}^+$, φ_f^+, φ_g^+ ...

on a : $\int_a^b f+g \leq \int_a^b f + \int_a^b g \quad (2)$

avec (1) et (2) : $\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$

ts les autres pts se démontrent avec le principe :

- on encadre avec des fnc. en esc.
- on utilise la prop voulue pour les fnc en esc
- on passe au sup et à l'inf.