Informatique tronc commun
Devoir n° 3 – Partie rédigée

16 mars 2019

Durée : 60 minutes, documents interdits.

Vous écrirez les fonctions demandées dans le langage `Python` (version 3) et rendrez sur papier votre composition.

Vous rédigerez soigneusement la ou les fonctions `Python` que vous devrez écrire, sans oublier les indentations, chaînes de documentation et commentaires nécessaires.

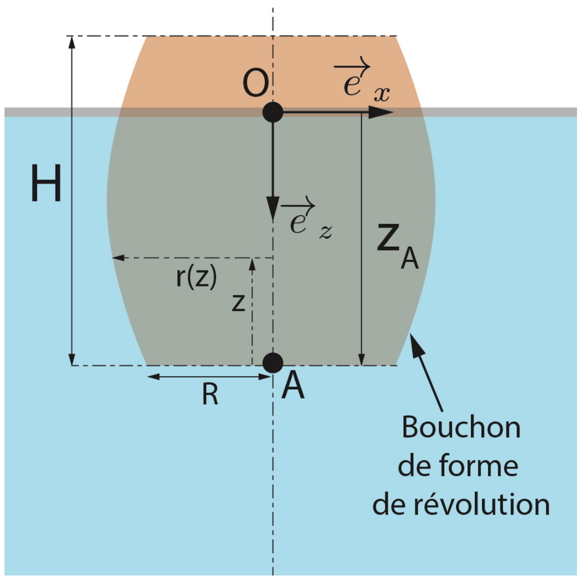
On numérotera chaque ligne de chaque bloc de code `Python`.

Lorsque vous écrivez une fonction `Python`, on ne vous demande pas de vérifier que les arguments donnés sont corrects. Cependant, il sera apprécié d'indiquer les préconditions vérifiées par ces arguments dans la chaîne de documentation de la fonction.

Les fonctions `Python` permettant de faire un calcul sur les listes (ex : `max`, `sum`, *etc.*) ne sont pas autorisées, hormis la fonction `len`.

I. Dynamique d'un bouchon flottant.

Ce sujet concerne la dynamique d'un bouchon en liège flottant dans un verre d'eau (voir figure suivante).



On note :

- R le rayon de la base du bouchon ;
- ρ_e la masse volumique de l'eau ;
- ρ_b la masse volumique du bouchon ;
- $z_A(t)$ la position verticale du bas du bouchon selon la direction $\overrightarrow{e}_z$ qui dépend du temps t par rapport à O (point situé sur la surface de l'eau) ;
- H la hauteur du bouchon.

Le bouchon possède une symétrie de révolution. Ainsi, son rayon, noté $r(z)$, dépend de la coordonnée z de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl} r: \ [0,H] & \to & \mathbb{R}, \\ z & \mapsto & R \cdot \left[1 + 0,1 \cdot \sin\left(\pi \cdot \dfrac{z}{H}\right)\right]. \end{array}$$

Le volume immergé du bouchon dépend de la position z_A et est donné par la relation suivante :

$$V_i(z_A) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad z_A < 0 \ ; \\ \pi \cdot \displaystyle\int_{z=0}^{z_A} (r(z))^2 \, \mathrm{d}z \quad \text{si} \quad 0 \leq z_A \leq H \ ; \\ \pi \cdot \displaystyle\int_{z=0}^{H} (r(z))^2 \, \mathrm{d}z \quad \text{si} \quad z_A > H. \end{cases}$$

On note V le volume total du bouchon correspondant à $V_i(H)$.
Le théorème de la résultante dynamique appliqué au bouchon selon la direction $\overrightarrow{e}_z$ donne :

$$M \cdot \frac{\mathrm{d}^2 z_A}{\mathrm{d}t^2}(t) = P - F_p\left(z_A(t)\right) + F_v\left(z_A(t), \frac{\mathrm{d}z_A}{\mathrm{d}t}(t)\right). \qquad (\mathscr{E})$$

Les grandeurs suivantes interviennent dans l'équation $(\mathscr{E})$.

- $M = \rho_b \cdot V$, la masse du bouchon (égale au produit de sa masse volumique avec son volume).
- $P = \rho_b \cdot V \cdot g$, le poids du bouchon.
- g, l'accélération de la pesanteur.
- F_p, la force de poussée. Elle est égale au produit de la masse volumique de l'eau (ρ_e) avec g et du volume immergé ($V_i(z_A(t))$), *i.e.*

$$F_p(z_A(t)) = \rho_e \cdot g \cdot V_i(z_A(t)).$$

- $F_v\left(z_A(t), \dfrac{\mathrm{d}z_A}{\mathrm{d}t}(t)\right)$ est la force de frottement visqueux. Elle est donnée par la formule

$$F_v\left(z_A(t), \frac{\mathrm{d}z_A}{\mathrm{d}t}(t)\right) = -\frac{1}{2}\rho_e \cdot C_x \cdot S\left(z_A(t), \frac{\mathrm{d}z_A}{\mathrm{d}t}(t)\right) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}z_A}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2.$$

- $S\left(z_A(t), \dfrac{\mathrm{d}z_A}{\mathrm{d}t}(t)\right)$ est la surface apparente du bouchon vis-à-vis du fluide et est définie de la manière suivante.
  - ∗ Si le bouchon est totalement hors de l'eau, cette surface est nulle.
  - ∗ Si le bouchon descend et est (au moins partiellement) immergé :
    - — si $0 \leq z < H/2$, $S\left(z_A(t), \dfrac{\mathrm{d}z_A}{\mathrm{d}t}(t)\right) = \pi \cdot r(z)^2$,

— si $z \geq H/2$, $S\left(z_A(t), \dfrac{\mathrm{d}z_A}{\mathrm{d}t}(t)\right) = \pi \cdot r(H/2)^2$.

$*$ Si le bouchon remonte et est (au moins partiellement) immergé :

— si $0 \leq z < H/2$, $S\left(z_A(t), \dfrac{\mathrm{d}z_A}{\mathrm{d}t}(t)\right) = 0$.

— si $H/2 \leq z \leq H$, la surface à prendre en compte est celle de la couronne : $S\left(z_A(t), \dfrac{\mathrm{d}z_A}{\mathrm{d}t}(t)\right) = -\pi \cdot (r(H/2)^2 - r(z)^2)$

— si $z > H$, $S\left(z_A(t), \dfrac{\mathrm{d}z_A}{\mathrm{d}t}(t)\right) = -\pi \cdot r(H/2)^2$.

La force de frottement s'opposant au mouvement, si le bouchon remonte, la résultante de cette force selon la direction $\overrightarrow{e}_z$ est positive, d'où le signe $-$ placé ici.

- C_x est le coefficient de trainée aérodynamique.

Dans toute la suite de ce devoir, on pourra supposer que les grandeurs suivantes (et uniquement celles-ci) ont été définies.

```
R = 1E-2 # m, rayon minimum du bouchon de révolution
H = 4.5*1E-2 # m, hauteur du bouchon
rho_eau = 1000 # kg / m**3 masse volumique de l'eau
rho_b = 240 # kg / m**3, masse volumique du liège
g = 9.81 # m / s**2, accélération de la pesanteur en
Cx = 1 # Coefficient de trainée aérodynamique
N = 1000 # Nombre de trapèzes pour les calculs d'intégrales
```

Q1 Écrire la fonction `T(f,a,b,N)` permettant de donner l'estimation de $\displaystyle\int_{z=a}^{b} f(z)\mathrm{d}z$ par la méthode des trapèzes, avec N trapèzes sur le segment $[a, b]$.

Q2 Écrire une fonction `volume_immerge(z)` qui renvoie le volume immergé du bouchon en fonction de la profondeur du bas du bouchon (noté z) en utilisant la fonction définie à la question précédente.

Q3 Écrire l'instruction permettant de calculer le volume total du bouchon, que l'on affectera à la variable `V`.

Q4 Écrire une fonction `Fv(z,zp)` qui renvoie la force de frottement visqueux $F_v\left(z_A(t), \dfrac{\mathrm{d}z_A}{\mathrm{d}t}(t)\right)$.

Q5 Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}^2 z_A}{\mathrm{d}t^2}(t)$ en fonction de ρ_e, ρ_b, $V_i(z_A(t))$, $F_v\left(z_A(t), \dfrac{\mathrm{d}z_A}{\mathrm{d}t}(t)\right)$ et $z_A(t)$.

On souhaite résoudre cette équation différentielle (équation $\mathscr{E}$) avec pour conditions initiales :

$$\begin{cases} z_A(t=0) = -0,2 \\ \dfrac{\mathrm{d}z_A}{\mathrm{d}t}(t=0) = 0 \end{cases} \tag{CI}$$

Q6 Définir l'expression de $Z(t)$, Z_0 et de $F(Z(t),t)$ pour que l'équation différentielle $(\mathscr{E})$ avec les conditions initiales (CI) soit équivalente au problème de Cauchy d'ordre 1 :

$$Z'(t) = F(Z(t),t) \quad \text{et} \quad Z(0) = Z_0. \tag{$\mathscr{F}$}$$

Écrire une suite d'instructions permettant de définir une telle fonction `F(Z,t)` ainsi que la condition initiale `Z0`.

Q7 Écrire une fonction `euler(F, tmin, tmax, Z0, h)` prenant en argument la fonction `F` définie précédemment, `tmin` et `tmax` définissant l'intervalle de résolution, le vecteur `Z0` définissant les consitions initiales ainsi que `h` le pas de discrétisation temporelle et permettant de résoudre de manière approchée l'équation $(\mathscr{F})$ par la méthode d'Euler.

On donne sur la figure 1 le résultat de l'application de la méthode d'euler pour simuler le comportement de la chute libre d'un bouchon à partir de 20 cm au dessus du niveau de l'eau.

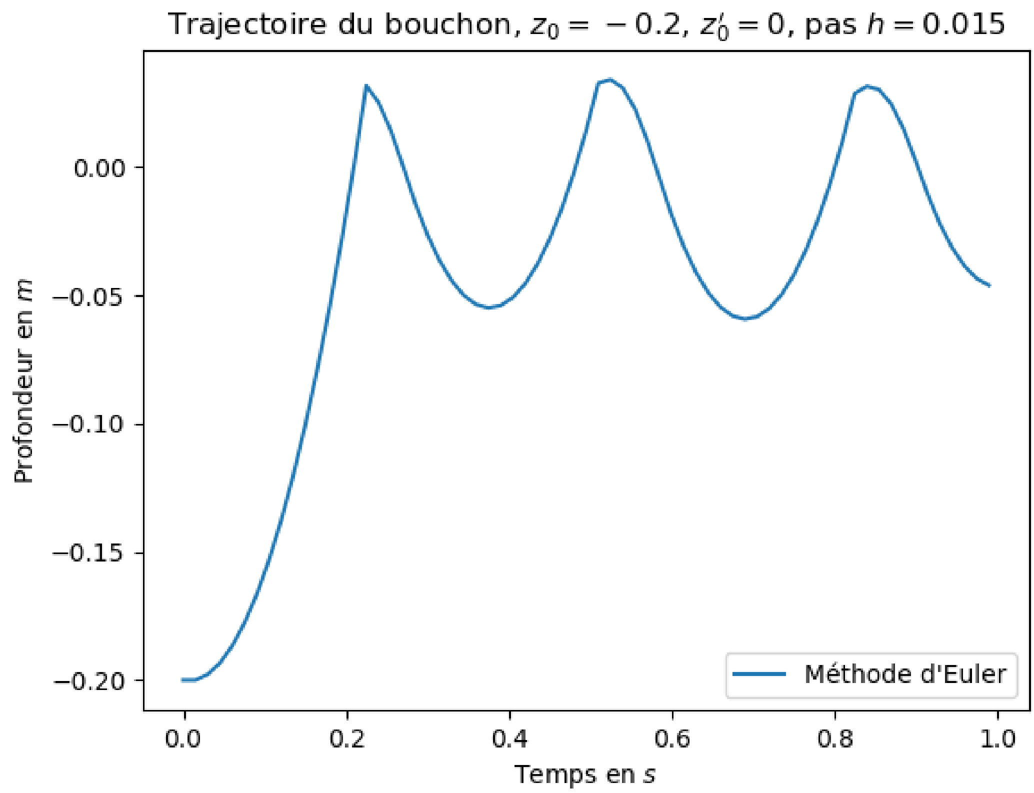


FIGURE 1 – Trajectoire du bouchon au cours du temps.

Q8 Commenter brièvement la cohérence physique d'une telle courbe. Pouvez-vous fournir une explication et une solution au problème observé, tout en restant dans le cadre de la méthode d'Euler ?

II. Un exercice de complexité.

On considère le code suivant, qui crée une liste aléatoire `L` et qui la trie ensuite par ordre croissant par la méthode du «tri par insertion».

```
1  from random import randrange
2  
3  def liste_triee(n):
4      """Renvoie une liste d'éléments de range(100), de longueur n,
5         triée par ordre croissant """
6      L = []
7      for i in range(n):
8          L.append(randrange(100))
9      for i in range(1,n):
10         # Inv : L[:i] est triée par ordre croissant
11         # Idée : on fait redescendre L[i] pour l'insérer au bon endroit
12         j = i
13         while j >= 1 and L[j] < L[j-1]:
14             # On échange L[j-1] et L[j]
15             L[j], L[j-1] = L[j-1], L[j]
16             j = j-1
17     return L
```

Un appel de `randrange(100)` renvoie un nombre tiré aléatoirement et uniformément dans $[\![0, 100[\![$ et a une complexité en $O(1)$.

Q9 Peut-on donner explicitement et exactement une complexité pour la boucle `while` des lignes 13 à 16 ? Que peut-on quand même proposer comme type de complexité pour cette boucle ?

Donner dans ce cas la complexité de cette boucle en fonction de `i`.

Q10 Donner dans ce cas la complexité d'un appel de `liste_triee(n)` en fonction de `n`.