Calculs - un problème supplémentaire

Exercice 1 Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels λ et a :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} 3x+2y-z+t & = & \lambda \\ 2x+y-z & = & \lambda-1 \\ 5x+4y-2z & = & 2\lambda \\ (\lambda+2)x+(\lambda+2)y-z & = & 3\lambda+a \\ 3x-z+3t & = & -\lambda^2 \end{array}\right.$$

Exercice 2 Soient $n \in \mathbb{N}^*, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 2n \text{ et } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 4n$$

Montrer : $\forall 1 \in [\![1, n]\!] \quad x_i = 2$.

Exercice 3 Calculer $(1+i)^{4n}$ et en déduire les sommes suivantes :

$$S_n = \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \binom{4n}{2p} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p \binom{4n}{2p+1}.$$

Exercice 4 Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels λ et a :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} 3x+2y-z+t & = & \lambda \\ 2x+y-z & = & \lambda-1 \\ 5x+4y-2z & = & 2\lambda \\ (\lambda+2)x+(\lambda+2)y-z & = & 3\lambda+a \\ 3x-z+3t & = & -\lambda^2 \end{array}\right.$$

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\ldots(k+d)$$

Exercice 6 () Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2$.

Indice : on pourra s'intéresser au polynôme $(1-X^2)^n$.

Exercice 7 () — Formule d'inversion de Pascal —

Soit (u_n) une suite réelle. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k = u_n$.