Feuille d'exercice n° 27 : **Séries numériques**

Exercice 1 On considère deux séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$, à termes positifs.

1) Démontrer que si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors la série de terme général $\sqrt{u_n v_n}$ converge aussi.

2) On suppose maintenant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{1+n^2 u_n}$.

- **a)** Exprimer $\sqrt{u_n v_n}$ en fonction de v_n et de n.
- **b)** En déduire que $\sum v_n$ et $\sum u_n$ ne peuvent pas converger toutes les deux.

Exercice 2 (🚲) Comment choisir deux réels a et b tels que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge, avec $u_n = \ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$? Dans le cas de convergence, donner la valeur de la somme.

Exercice 3 Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle décroissante de limite nulle. On suppose que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général $v_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right) - n u_n$ est bornée. On veut montrer que la série $\sum u_n$ converge.

1) Montrer que (v_n) est croissante, puis convergente. On note ℓ sa limite.

2) Exprimer $u_k - u_{k+1}$ en fonction de v_k et v_{k+1}.

3) En sommant l'égalité précédente de n à $+\infty$, montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}(\ell - v_n)$.

4) En déduire que $n u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et enfin que la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 4 (🚲) On étudie la suite (u_n) définie par : $u_0 \in]0, \pi/2[$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1) Montrer que (u_n) est une suite à termes positifs, et qu'elle est convergente.

2) Déterminer la limite de (u_n).

3)
- **a)** Donner un DL à l'ordre 3 de u_{n+1} en fonction de u_n, quand n tend vers $+\infty$. En déduire un équivalent de u_n^3 en fonction de $(u_n - u_{n+1})$.
- **b)** Déterminer la nature de la série de terme général u_n^3.

4) Déterminer la nature de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

5)
- **a)** Donner un équivalent de $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ en fonction de u_n, quand n tend vers $+\infty$.
- **b)** En déduire la nature des séries de termes généraux u_n^2 et u_n.

Exercice 5 Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \begin{cases} 1/n \text{ si } n \text{ est un carré} \\ 1\big/n^2 \text{ sinon} \end{cases}$.

Exercice 6 ( ) Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants.

1) $u_n = \dfrac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} 2n}$

2) $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

3) $w_n = \mathrm{e} - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

4) $\alpha_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

5) $\beta_n = \dfrac{1}{n \cos^2 n}$

6) $\gamma_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

7) $a_n = \dfrac{2^n n}{n!}$

8) $b_n = \left(\dfrac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}\right)^n$

9) $c_n = \dfrac{3n^3+2n-1}{(n+1)(n^2+n+1)}$

Exercice 7 Calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, après avoir montré son existence.

Exercice 8 Sachant $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!}$.

Exercice 9 ( ) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$, après avoir montré son existence.

Exercice 10 ( ) **– Transformation d'Abel –**

Soit (a_n) une suite positive décroissante de limite nulle et (S_n) une suite bornée.

1) Montrer que la série $\sum (a_n - a_{n+1})S_n$ est convergente.

2) En déduire que la série $\sum a_{n+1}(S_{n+1} - S_n)$ est convergente.

3) Établir que, pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$, la série $\displaystyle\sum \frac{\cos(nx)}{n}$ est convergente.

Exercice 11 Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{(\ln 2)^2 + \cdots + (\ln n)^2}$.

Exercice 12 ( ) Soit $\alpha > 1$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$ et $R_N = \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Étudier, selon α, la nature de la série $\displaystyle\sum_{N \geqslant 1} \frac{R_N}{S_N}$.

Exercice 13 ( ) Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, telle que $f(0) = 0$ et $|f'(0)| < 1$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $|u_0| < \alpha$, la série de terme général u_n converge absolument.

Exercice 14 (✎) Déterminer les natures des séries suivantes.

1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n^{42}}$ **2)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n n^2+3n}{\mathrm{e}^{\,n}}$ **3)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(n)}{\mathrm{sh}(n)}$

Exercice 15 (🚲) **– Critère spécial des séries alternées –**

Soit (u_n) une suite décroissante de réels positifs, convergeant vers zéro.

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ converge.

Indication : Avec (S_N) la suite des sommes partielles de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$, montrer que (S_{2N}) et (S_{2N+1}) sont adjacentes.

2) Est-ce que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}u_n$ converge forcément ?

3) *Application :* déterminer les natures des séries suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ **c)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1-2!+\cdots+(-1)^n n!}{(n+1)!}$

b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$ **d)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-\ln(n))^n}{n^{\ln(n)}}$.