IX Calcul matriciel

3 novembre 2021

n, m, p, q et r désignent des entiers naturels non nuls, et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définitions élémentaires

Définition 1.0.1.
On appelle *matrice de taille* $n \times p$ (ou à n lignes et p colonnes), à valeurs (ou coefficients) dans $\mathbb{K}$, toute famille de np éléments de $\mathbb{K}$, ces éléments étant notés $(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$, et présentés sous la forme d'un tableau de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

On note $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$, les $(a_{i,j})$ étant les *coefficients* de la matrice A, $a_{i,j}$ étant le coefficient de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne.

La matrice $(a_{i,j})_{1\leqslant j\leqslant n}$ est la i^{e} ligne de A, parfois notée $a_{i,*}$.

La matrice $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n}$ est la j^{e} colonne de A, parfois notée $a_{*,j}$.

Remarque 1.0.2.
Le premier indice indique toujours la ligne et le second indice indique toujours la colonne. En général (mais attention quand même), on les note respectivement i et j.

Exemple 1.0.3.
Donner la matrice $(i \times j)_{1\leqslant i\leqslant 3, 1\leqslant j\leqslant 5}$.

Définition 1.0.4 (symbole de Kronecker)**.**
Si i, j sont deux objets, on note

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}.$$

Définition 1.0.5.
- L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- On appelle *matrice carrée d'ordre* n toute matrice de taille $n \times n$. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n est noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- On appelle *matrice nulle d'ordre* n la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls. On la note simplement 0_n, ou 0 sans référence à sa taille s'il n'y a pas d'ambiguïté.
- On appelle *matrice identité d'ordre* n la matrice

$$I_n = (\delta_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- On appelle *matrice diagonale* toute matrice carrée $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ telle que pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.
- On appelle *matrice triangulaire supérieure* (resp. *inférieure*) toute matrice carrée $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ telle que pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ tells que $i > j$ (resp. $i < j$), $a_{ij} = 0$.

Remarque 1.0.6.
1. On note généralement les matrices par des lettres majuscules, et la famille des coefficients par la lettre minuscule correspondante.
2. On identifie les matrices colonnes de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec les éléments de $\mathbb{K}^n$.
3. On se gardera d'identifier les matrices lignes avec les éléments de $\mathbb{K}^n$ car on préfère les identifier avec d'autres objets mathématiques (on verra cela plus tard).

1.1 Opérations sur les matrices

Définition 1.1.1.
Soient $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ et $B = (b_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ deux matrices **de même taille**, et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire.

Addition On appelle *somme* de A et B la matrice $(a_{ij} + b_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$, notée $A + B$.

Produit par un scalaire On note λA la matrice $(\lambda a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$.

Attention aux tailles des matrices : on ne peut additionner n'importe quoi avec n'importe quoi.

Exemple 1.1.2.
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Définition 1.1.3 (Produit matriciel)**.**
Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On appelle *produit de A par B noté AB* la matrice de $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ de coefficients $\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right)$.

Gare aux dimensions, on ne peut pas multiplier n'importe quelle matrices.

Exemple 1.1.4. — On tâchera d'organiser les produits comme suit :

$$\begin{array}{cc} \text{Dim. OK} & \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}^{B} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}}_{A} & \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 12 \end{pmatrix}}_{=AB} \end{array}$$

— Le produit impossible :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce produit comporte plein de pièges.

Remarque 1.1.5.
Le produit matriciel n'est pas commutatif, par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et même pire, AB peut exister mais pas BA.

Remarque 1.1.6.
Le produit de deux matrices non nulles peut valoir la matrice nulle.

Par exemple, avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

alors $AA = 0$, $AB = 0$ et $BA \neq 0$.

Ainsi, on ne peut pas « simplifier » dans un produit. Ici : $A \times A = A \times B$ mais $A \neq B$.

Proposition 1.1.7.
Le produit matriciel est :

Associatif : si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, alors $(AB)C$ et $A(BC)$ sont dans $\mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et sont égales, notées ABC.

Bilinéaire : si A, B, C, D sont des matrices de taille convenable, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $(A + \lambda B)C = AC + \lambda BC$ et $A(C + \lambda D) = AC + \lambda AD$.

Les matrices nulles et identité jouent un rôle bien particulier. Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $q \in \mathbb{N}^*$, alors

Neutre à gauche : $I_n A = A$

Neutre à droite : $AI_p = A$

Mult. par 0 à gauche : $0_{q,n}A = 0_{q,p}$

Mult. par 0 à droite : $A0_{p,q} = 0_{n,q}$

Démonstration.
Bien qu'un peu technique, nous donnons ici la démonstration ; nous en verrons plus tard une autre.

1. $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$. Ainsi,

$$BC = \left(\sum_{k=1}^{q} b_{ik}c_{kj}\right)_{1\leqslant i\leqslant p, 1\leqslant j\leqslant r}$$

et

$$A(BC) = \left(\sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell} \times \left(\sum_{k=1}^{q} b_{\ell k}c_{kj}\right)\right)_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant r}.$$

Or, si $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant r$,

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell} \times \left(\sum_{k=1}^{q} b_{\ell k} c_{kj}\right) &= \sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell} \times \sum_{k=1}^{q} b_{\ell k} c_{kj} \\ &= \sum_{\ell=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} a_{i\ell} b_{\ell k} c_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{q} \sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell} b_{\ell k} c_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell} b_{\ell k}\right) \times c_{kj},\end{aligned}$$

qui est le coefficient i, j de $(AB)C$. D'où l'égalité voulue.

2. *idem*
3. $I_n A = \left(\sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} a_{kj}\right) = (\delta_{ii} a_{ij}) = (a_{ij}) = A.$
4. Direct.

□

Remarque 1.1.8.
Par associativité, il y a 5 manières de calculer $ABCD$ qui conduisent toutes au même résultat : $((AB)C)D = (A(BC))D = A((BC)D) = A(B(CD)) = (AB)(CD)$. Mais le temps de calcul est-il le même dans les 5 cas ? C'est le problème de la *multiplication matricielle enchaînée* (Matrix chain multiplication ou Matrix Chain Ordering Problem (MCOP) en anglais). Plus généralement, le problème est de savoir dans quel ordre effectuer les produits pour calculer le plus efficacement possible un produit de matrices $M_1.M_2.\cdots.M_n$. Ce problème peut se résoudre par programmation dynamique, ce qui est au programme en option informatique, mais même si ce n'est pas toujours la solution optimale, il vaut mieux commencer par les produits qui font apparaître des « petites » matrices.

Précisément, le produit d'une matrice $n \times p$ par une matrice $p \times q$ nécessite de l'ordre de $n \times p \times q$ opérations. Ainsi, si $A \in \mathscr{M}_{10,100}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{100,5}$ et $C \in \mathscr{M}_{5,50}$, le calcul de $(AB)C$ demande de l'ordre de $(10 \times 100 \times 5) + 10 \times 5 \times 50 = 7\,500$ opérations, alors que celui de $A(BC)$ en demande de l'ordre de $100 \times 5 \times 50 + 10 \times 100 \times 50 = 75\,000$.

Remarque 1.1.9.
Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}.$$

Alors, en notant $C_1,\ldots,C_p$ les colonnes de M, on a

$$MX = \sum_{k=1}^{p} x_k C_k.$$

En particulier, la matrice MX est une combinaison linéaire de la famille $(C_1, \ldots, C_n)$.

Remarque 1.1.10.
En reprenant les notations de la remarque précédente, si l'on note E_i la matrice colonne élémentaire de dimension p (tous ses coefficients sont nuls, sauf le i^{e} qui vaut 1), c'est-à-dire

$$E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (\delta_{i,k})_{1 \leqslant k \leqslant p},$$

le 1 se trouvant en i^{e} position.

On a alors

$$ME_i = M \begin{pmatrix} \delta_{1i} \\ \vdots \\ \delta_{pi} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{p} \delta_{ki} C_k = C_i.$$

1.2 Matrices carrées

Remarque 1.2.1.
Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, alors AB et BA sont définies et également de taille n. On dit que le produit matriciel est une *loi de composition interne* de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

De plus, $\mathrm{I}_n.A = A.\mathrm{I}_n = A$. On dit que I_n est le *neutre* de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ pour le produit matriciel.

Enfin, la propriété de bilinéarité montrée précédemment montre que $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ a une structure d'anneau, non commutatif.

Remarque 1.2.2.
Soit $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des nombres complexes. Alors,

$$\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n b_n \end{pmatrix}$$

Définition 1.2.3 (Puissances d'une matrice carrée)**.**
On les définit par récurrence : si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors, $M^0 = \mathrm{I}_n$, $M^1 = M$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^{k+1} = M \times M^k$ (on a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M^k = \underbrace{M \times M \ldots \times M}_{k \text{ fois}}$. Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $M^n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 1.2.4.
On remarque que les puissances d'une même matrice commutent entre elles :

$$\begin{aligned} M^k \times M^j &= \underbrace{M \times M \ldots \times M}_{k \text{ fois}} \times \underbrace{M \times M \ldots \times M}_{j \text{ fois}} \\ &= \underbrace{M \times M \ldots \times M}_{(k+j) \text{ fois}} \\ &= \underbrace{M \times M \ldots \times M}_{j \text{ fois}} \times \underbrace{M \times M \ldots \times M}_{k \text{ fois}} \\ &= M^j \times M^k. \end{aligned}$$

Théorème 1.2.5 (Formule du binôme de Newton)**.**
Elle est valable pour les matrices *carrées qui* ***commutent***.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AB = BA$. Alors,

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

Lemme 1.2.6.
Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AB = BA$. Alors, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, $A^p B^q = B^q A^p$.

Démonstration.
On fixe $q = 1$ et on montre par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p B = B A^p$.

On fixe alors $p \in \mathbb{N}$ et on utilise ce que l'on vient de montrer avec A^p à la place de B et B à la place de A. □

Démonstration (Formule du binôme de Newton)**.**
Reprendre la démonstration du binôme de Newton pour des complexes, en repérant bien à quel endroit le fait que les deux matrices commutent intervient, on utilise alors le lemme 1.2.6. □

Exemple 1.2.7.
Calculer A^2 avec

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= B + C. \end{aligned}$$

Calculer A^3 avec

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= B + C. \end{aligned}$$

1.3 Matrices inversibles

Définition 1.3.1.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est *inversible* s'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = \mathrm{I}_n$.

Dans ce cas B est unique, est appelée *l'inverse de* A et est notée A^{-1}.

On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ inversibles.

Démonstration (Unicité)**.**
Soit $B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux « inverses » de A. Alors,

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_n C = C.$$

□

Remarque 1.3.2.
Une matrice inversible commute toujours avec son inverse.

Exercice 1.3.3.
Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ étudiée précédemment n'est pas inversible.

Définition 1.3.4 (Puissances négatives d'une matrice inversible.)**.**
Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$, soit $p \in \mathbb{Z}$. On définit :

$$A^{-p} = (A^{-1})^p$$

Proposition 1.3.5.
Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p est inversible et

$$(A^p)^{-1} = A^{-p}.$$

Démonstration.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Comme A et A^{-1} commutent, $A^p(A^{-1})^p = (AA^{-1})^p = I_n^p = I_n$, de même de l'autre côté. ☐

Enfin, le cas particulier des matrices carrées d'ordre 2 est à connaître sur le bout des doigts.

Définition 1.3.6.
Le déterminant d'une matrice *carrée d'ordre* 2 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $\det A = ad - bc$.

Proposition 1.3.7.
Une matrice, carrée d'ordre 2, notée $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $\det A = ad - bc$ est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Le cas échéant, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Démonstration.
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a toujours (le vérifier par le calcul)

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = 0.$$

Alors, si $\det A \neq 0$, avec $B = \dfrac{1}{\det A}((a+d)I_2 - A)$, on a $AB = BA = I_2$ donc A est inversible, d'inverse B.

Réciproquement, si $\det A = 0$, alors $A(A - (a+d)I_2) = 0$. Si A est inversible, en multipliant par cet inverse on obtient que A est diagonale, puis que $a = 0$ ou que $d = 0$ ... Dans les deux cas, $A^2 = 0$ donc A ne peut être inversible (à vous de réfléchir pourquoi !). ☐

1.4 Matrices et opérations élémentaires

Dans toute cette partie, on considère des matrices carrées de dimension n. Nous allons définir pour les matrices des opérations sur les lignes similaires à celles déjà vues pour les systèmes linéaires. En ce qui concerne les matrices, nous pourrons aussi définir des opératinos analogues sur les colonnes. Nous verrons à la fin de ce chapitre en quoi ces opérations sont importantes pour la résolution des systèmes linéaires.

Définition 1.4.1 (matrice élémentaire)**.**
Si $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on définit la matrice

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & 1 & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = (\delta_{i,k}\delta_{j,\ell})_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n},$$

le 1 se trouvant sur la i^{e} ligne et la j^{e} colonne de M.

Remarque 1.4.2.
Si $M = (m_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors

$$M = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j} E_{i,j}.$$

Remarque 1.4.3.
On pourrait très bien considérer des matrices élémentaires qui ne soient pas carrées. Les résultats suivants sont alors valides, sous réserve de compatibilité des dimensions lors des produits, mais les notations deviennent alors plus lourdes.

Commençons par voir qu'une telle matrice élémentaire peut simplement s'écrire comme le produit d'une colonne élémentaire par une ligne élémentaire.

Lemme 1.4.4.
Si $1 \leqslant i, j \leqslant n$, notons Γ_i la matrice colonne de dimension n dont tous les coefficients sont nuls, sauf le i^{e} qui vaut 1, et Λ_j la matrice ligne de dimension n dont tous les coefficients sont nuls, sauf le j^{e} qui vaut 1 :

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (\delta_{i,k})_{1 \leqslant k \leqslant n},$$

le 1 se trouvant en i^{e} position, et

$$\Lambda_j = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = (\delta_{j,\ell})_{1 \leqslant \ell \leqslant n},$$

le 1 se trouvant en j^{e} position.

Alors, $E_{i,j} = \Gamma_i \Lambda_j$.

Remarque 1.4.5.
Cela signifie que la i^{e} ligne de $E_{i,j}$ est Λ_j, la j^{e} colonne de $E_{i,j}$ est Γ_i, les autres lignes et colonnes étant nulles.

Démonstration.
Cela peut s'observer en dessinant le produit $\Gamma_i \Lambda_j$.

On peut aussi l'observer sur la formule définissant $E_{i,j}$. Comme $\Gamma_i = (\delta_{i,k})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ et comme $\Lambda_j = (\delta_{j,\ell})_{1 \leqslant \ell \leqslant n}$, alors par la formule du produit matricielle on a $\Gamma_i \Lambda_j = (\delta_{i,k}\delta_{j,\ell})_{1 \leqslant k, \ell \leqslant n} = E_{i,j}$. ☐

Donnons maintenant deux résultats techniques, dont la maîtrise se révélera être importante : vous devrez savoir les retrouver efficacement.

Proposition 1.4.6 (produit de deux matrices élémentaires)**.**
On a

$$E_{i,j} E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell} = \begin{cases} E_{i,\ell} & \text{si} \quad j = k \\ 0 & \text{si} \quad j \neq k \end{cases}.$$

Nous pouvons donner trois démonstrations (ou plutôt, trois versions d'une même démonstration) de ce résultat. Le plus important est toutefois de savoir tracer le dessin du produit de ces deux matrices : le produit s'y lit immédiatement.

Tout d'abord, utilisons la remarque 1.1.10.

Démonstration.
Soit $\alpha \in [\![1, n]\!]$. La α^{e} colonne de $E_{ij} \times E_{k,\ell}$ est $E_{ij} C_\alpha$ où C_α est la α^{e} colonne de $E_{k,\ell}$ (c'est une colonne élémentaire).

Si $\alpha \neq \ell$, $C_\alpha = 0_{n1}$, donc toutes les colonnes de $E_{i,j} \times E_{k,\ell}$ sont nulles sauf peut-être la ℓ^{e}.

Cette ℓ^{e} colonne de $E_{k,\ell}$ est égale à Γ_k (colonne élémentaire introduite dans le lemme 1.4.4). Par la remarque 1.1.10, $E_{ij}\Gamma_k$ est la k^{e} colonne de E_{ij}. Celle-ci est nulle si $j \neq k$. Sinon, il s'agit de la colonne élémentaire Γ_i.

On en déduit le résultat. ☐

On peut également adopter une démonstration purement calculatoire.

Démonstration.
Notons $(m_{ab})_{(a,b) \in [\![1,n]\!] \times \in [\![1,q]\!]}$ les coefficients du produit $E_{ij} E_{kh}$. Alors, soit $(a, b) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!]$. On a

$$\begin{aligned} m_{ab} &= \sum_{c=1}^{p} (\delta_{ai}\delta_{cj})(\delta_{ck}\delta_{bh}) \\ &= (\delta_{ai}\delta_{cc})(\delta_{jk}\delta_{bh}) \\ &= \delta_{jk}(\delta_{ai}\delta_{bh}) \end{aligned}$$

m_{ab} est donc le coefficient de la ligne a, colonne b de $\delta_{jk} E_{ih}$. ☐

Utilisons maintenant le résultat du lemme 1.4.4 pour obtenir une forme différente de cette démonstration.

Démonstration.
Reprenons les notations du lemme 1.4.4. On a

$$E_{i,j} E_{k,\ell} = C_i \underbrace{L_j C_k}_{\in \mathbb{K}} L_\ell = (L_j C_k) C_i L_\ell = (L_j C_k) E_{i,\ell}.$$

Il suffit alors de considérer le produit

$$L_jC_k = \sum_{a=1}^{n} \delta_{j,a}\delta_{a,k}.$$

Remarquons que si $a \neq j$ ou si $a \neq k$, on a $\delta_{j,a}\delta_{a,k} = 0$.

Si $j \neq k$, on ne peut jamais avoir simultanément $a = j$ et $a = k$, donc on a toujours $\delta_{j,a}\delta_{a,k} = 0$, donc $L_kC_k = 0$.

Si $j = k$, on a $L_jC_k = \delta_{j,j}\delta_{k,k} = 1$.

En résumé, on a $L_jC_k = \delta_{j,k}$, donc $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$.

□

Lemme 1.4.7 (produit matrice - matrice élémentaire)**.**
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, dont on note les colonnes $C_1, \dots, C_n$ et dont on note les lignes $L_1, \dots, L_n$.

Soit $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

1. $ME_{i,j}$ est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles, sauf la j^{e} qui vaut C_i.
2. $E_{i,j}M$ est la matrice dont toutes les lignes sont nulles, sauf la i^{e} qui vaut L_j.

Démonstration.
Le plus efficace est de réaliser le dessin du produit matriciel. On peut aussi voir cela comme une traduction de la remarque (fondamentale) 1.1.10.

On peut aussi effectuer un calcul :

$$\begin{aligned} ME_{i,j} &= \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} m_{k,\ell}E_{k,\ell}E_{i,j} \\ &= \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} m_{k,\ell}\delta_{\ell,i}E_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} m_{k,i}E_{k,j}, \end{aligned}$$

ce qui est exactement le résultat annoncé.

On procède de même pour l'autre produit. □

Définition 1.4.8.
Il existe trois types d'opérations élémentaires sur les lignes et colonnes d'une matrice :

1. l'échange de deux lignes ou deux colonnes ;
2. la multiplication d'une ligne/colonne par un scalaire **non nul** ;
3. l'addition à une ligne/colonne d'une **autre** ligne/colonne multipliée par un scalaire.

Ces opérations sont notées respectivement :

1. $L_i \leftrightarrow L_j$ et $C_i \leftrightarrow C_j$;
2. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ **avec** $\lambda \neq 0$ (*idem* avec des colonnes) ;
3. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, avec $i \neq j$ (*idem* avec des colonnes).

Définition 1.4.9 (matrices d'opérations élémentaires)**.**
Soit $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. On appelle matrice d'échange de coefficients i, j la matrice $\varepsilon_{ij} = \mathrm{I}_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$ (la dessiner).
2. On appelle matrice de dilatation de coefficient i et de rapport λ la matrice $D_i(\lambda) = \mathrm{I}_n + (\lambda - 1)E_{ii}$ (la dessiner).
3. On appelle matrice de transvection de coefficients i, j et de rapport λ la matrice $T_{ij}(\lambda) = \mathrm{I}_n + \lambda E_{ij}$ (la dessiner).

Théorème 1.4.10.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et $i, j \in [\![1, n]\!]$.

1. L'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ est équivalente à la multiplication de la matrice A à sa gauche par la matrice ε_{ij}.
2. L'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$ est équivalente à la multiplication de la matrice A à sa gauche par la matrice $D_i(\lambda)$.
3. L'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ est équivalente à la multiplication de la matrice A à sa gauche par la matrice $T_{ij}(\lambda)$.
4. L'opération $C_i \leftrightarrow C_j$ est équivalente à la multiplication de la matrice A à sa droite par la matrice ε_{ij}.
5. L'opération $C_i \leftarrow \lambda C_i$ est équivalente à la multiplication de la matrice A à sa droite par la matrice $D_i(\lambda)$.
6. L'opération $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$ est équivalente à la multiplication de la matrice A à sa droite

par la matrice $T_{ij}(\lambda)$ (attention aux coefficients !).

Démonstration.
On appelle $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A et $C_1, \dots, C_p$ ses colonnes.

Tout est fondé sur le lemme 1.4.7.

$E_{i,j}A$ est la matrice nulle, sauf pour sa i^{e} ligne qui vaut L_j. On a alors immédiatement les effets demandés. □

Exemple 1.4.11.
Calculer

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 32 & 12 & 10 \\ 25 & 9 & 8 \end{pmatrix}$.

Théorème 1.4.12 (inversion des matrices d'opérations élémentaires)**.**
Soit $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, les trois matrices d'opérations élémentaires introduites ci-dessus sont inversibles et

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^{-1} &= \varepsilon_{ij}, \\ D_i(\lambda)^{-1} &= D_i(\lambda^{-1}), \\ T_{ij}(\lambda)^{-1} &= T_{ij}(-\lambda). \end{aligned}$$

Démonstration.
Il suffit d'utiliser le résultat précédent. Par exemple, effectuer le calcul

$$\varepsilon_{ij}^2 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} = I_n$$

revient à échanger deux fois les lignes i et j de I_n. On revient donc à la configuration de départ, et donc $\varepsilon_{ij}^2 = I_n$.

On procède de même pour les deux autres.

On peut aussi calculer directement, par exemple, comme I_n et λE_{ij} commutent :

$$\begin{aligned} T_{ij}(\lambda)T_{ij}(-\lambda) &= (I_n + \lambda E_{ij})(I_n - \lambda E_{ij}) \\ &= I_n^2 - \lambda^2 E_{ij}^2 \\ &= I_n. \end{aligned}$$

En effet, comme $i \neq j$, alors $E_{ij}^2 = \delta_{ij} E_{ij} = 0$. □

Remarque 1.4.13.
Si par opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice on arrive à I_n, on obtient donc rapidement l'inverse de cette matrice.

Exercice 1.4.14.
Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, montrer que A est inversible et calculer A^{-1} en procédant par opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes de A.

1.5 Transposition et matrices symétriques

Définition 1.5.1.
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})$. On appelle *transposée de* A la matrice de dimension $p \times n$ notée $A^\top$ et définie par

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \forall j \in [\![1, n]\!],\ ({}^tA)_{i,j} = a_{j,i}.$$

Remarque 1.5.2.
On trouvera parfois aussi la notation ${}^tA$.

Exemple 1.5.3.
$\begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On a aussi $I_n^\top = I_n$.

Proposition 1.5.4.
Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $(A + \lambda B)^\top = A^\top + \lambda\ B^\top$, *i.e.* $A \mapsto A^\top$ est linéaire.
2. Si $C \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(AC)^\top = C^\top A^\top$.
3. $(A^\top)^\top = A$.
4. Si A est inversible, alors $A^\top$ est inversible et $(A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1}$.

Démonstration.
1. Élémentaire.
2. $A = (a_{ij})$, $C = (c_{ij})$, $A^\top = (\alpha_{ij})$, $C^\top = (\gamma_{ij})$, avec $\alpha_{ij} = a_{ji}$, $\gamma_{ij} = c_{ji}$, et on conclut par calcul direct.
3. Élémentaire.

4. On a $AA^{-1} = I_n$, donc en transposant $(A^{-1})^\top \times A^\top = I_n^\top = I_n$.

$\square$

Remarque 1.5.5.
La transposition permet de transformer des résultats sur les colonnes en résultats sur les lignes, et inversement. Par exemple, une matrice est inversible si et seulement si ses lignes sont linéairement indépendantes.

Définition 1.5.6.
$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *symétrique (resp. antisymétrique)* si $A = A^\top$ (resp. $A = -A^\top$).

On note souvent $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de dimension n à coefficients dans $\mathbb{K}$, et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ celui des matrices antisymétriques.

Remarque 1.5.7.
Une matrice symétrique ou antisymétrique est toujours carrée.

Exemple 1.5.8.
$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique, pas $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 1.5.9.
$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ est anti-symétrique, pas $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 1.5.10.
Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$, on a $a_{ii} = -a_{ii}$ donc $a_{ii} = 0$. $\square$

Exercice 1.5.11.
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple (A, S) tel que
— $M = A + S$;
— $A \in A_n(\mathbb{R})$;
— $S \in S_n(\mathbb{R})$.

1.6 Inversion de matrices triangulaires.

Lemme 1.6.1.
Le produit de deux matrices triangulaires de même type est aussi une matrice triangulaire, de même type.

Démonstration.
On réalisera bien entendu un dessin.

On le démontre pour deux matrices triangulaires supérieures, on obtient par transposition le résultat désiré sur les matrices triangulaires inférieures.

Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices triangulaires supérieures, soit $1 \leqslant j < i \leqslant n$. Le coefficient d'indice (i, j) de AB est

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

Considérons $k \in [\![1, n]\!]$. Si $k > j$, on a $b_{k,j} = 0$, car B est trianglaire supérieure. Sinon, on a $k \leqslant j$, donc $k < i$, donc on a $a_{i,k} = 0$, car A est trianglaire supérieure.

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = 0$, donc AB est triangulaire supérieure. $\square$

Théorème 1.6.2.
Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si aucun de ses coefficients diagonaux n'est nul.

Le cas échéant, l'inverse d'une matrice triangulaire est triangulaire, de même type.

On donne ici une preuve élémentaire de ce résultat, nous en donnerons une plus abstraite (et plus efficace) au second semestre.

Démonstration.
Quitte à transposer, il suffit de considérer une matrice $T = (t_{i,j})$ triangulaire supérieure.

Supposons que pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, $t_j \neq 0$. On effectue pour tout j allant de n à 1 et pour chaque $1 \leqslant i \leqslant j - 1$ l'opération

$$L_i \leftarrow L_i - t_{i,j} L_j,$$

puis l'opération

$$L_j \leftarrow \frac{1}{t_{j,j}} L_j,$$

on obtient la matrice identité. Or, toutes les matrices d'opérations élémentaires utilisées sont triangulaires supérieures. Il existe donc des matrices triangulaires supérieures $T_1 \dots T_p$ telles que

$$T_1 \dots T_p T = I_n.$$

Ainsi, avec $T' = T_1 \dots T_p$, on a

$$T'T = I_n.$$

Il suffit d'observer qu'avec les mêmes opérations sur les colonnes, dans l'ordre inverse, on obtient

$$TT' = I_n.$$

Comme produit de matrices triangulaires supérieures, T' est triangulaire supérieure. Ainsi, T est inversible et $T' = T^{-1}$ est triangulaire supérieure.

Réciproquement, supposons qu'il existe $1 \leqslant i \leqslant n$ tel que $t_{i,i} = 0$. Notons k le plus grand tel indice i. Alors, en effectuant les mêmes opérations que précédemment, il existe une matrice T' inversible telle que

$$T'T = \begin{pmatrix} * & \dots & * & * & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \\ * & \dots & * & * & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

les coefficients non inscrits étant nuls. Or, une matrice possédant une ligne nulle ou une colonne nulle n'est pas inversible : si une matrice A a sa i^{e} ligne nulle, alors pour toute matrice B la i^{e} ligne de AB sera nulle, donc $AB \neq I_n$.

Ainsi, $T'T$ n'est pas inversible, donc T' étant inversible, T ne l'est pas. ☐

2 Systèmes linéaires

2.1 Généralités

Rappel 2.1.1.
On appelle *système linéaire à n équations et p inconnues* tout système de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ . & & . & & . & & \\ . & & . & & . & & \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{cases}$$

où les a_{ij} et les b_i sont dans $\mathbb{K}$, et les x_i sont les inconnues.
On dit que le système est *compatible* s'il admet une solution.
Le *système homogène associé* est le système :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & 0 \\ . & & . & & . & & \\ . & & . & & . & & \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & 0 \end{cases}$$

Dans la suite nous noterons S le premier système et S_H son système homogène associé, et nous noterons Sol et Sol_H leurs ensembles de solutions respectifs.

Remarque 2.1.2.
Le système S peut aussi s'écrire sous forme matricielle $AX = B$, avec $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.
S_H s'écrit alors $AX = 0$.

Définition 2.1.3.
Cette matrice A est appelée *matrice du système S*.

Théorème 2.1.4.
1. Sol_H contient toujours l'élément $(0, \dots, 0)$ et est stable par combinaison linéaire.
2. L'ensemble Sol est :
   • soit vide ;
   • soit non vide, et dans ce cas, si $X_0 = (x_1, \dots, x_p)$ est un élément de Sol, alors Sol$= \{X_0 + X_H,\ X_H \in \text{Sol}_H\}$, ce que l'on note $\text{Sol}_H + (x_1, \dots, x_p)$.
   Par conséquent, Sol contient 0, 1 ou une infinité d'éléments.

Démonstration.
On utilise les notations matricielles, le système S s'écrivant $S : AX = B$, avec $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Le système homogène associé à S est $S_H : AX = 0$. Soit $X, Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a bien

$$A \times \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc le vecteur nul est solution du système homogène. De plus, si X et Y sont solutions de S_H, alors

$$A(\lambda X + \mu Y) = \lambda AX + \mu AY = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notamment, si X est une solution de S_H, tous les vecteurs colinéaires à X seront aussi solution de S_H, donc S_H est infini.

Ensuite, soit $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ solution de S. On a

$$\begin{aligned} X \in \mathrm{Sol} &\Leftrightarrow AX = B \\ &\Leftrightarrow AX = AX_0 \\ &\Leftrightarrow A(X - X_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow X - X_0 \in \mathrm{Sol}_H, \end{aligned}$$

ce qui montre bien que $\mathrm{Sol} = \{ X_0 + X_H \mid X_H \in \mathrm{Sol}_H \}$. □

Remarque 2.1.5.
Si $\mathrm{Sol}_H \neq \{(0, \dots, 0)\}$, alors Sol_H est infini.

Exemple 2.1.6.
On considère le système

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 3y & & & = & 2 \\ & & 2y & + & z & = & 1 \end{array} \right.$$

Le système homogène associé est

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 3y & & & = & 0 \\ & & 2y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 3y & & & = & 0 \\ & & 2y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions homogènes est une droite vectorielle dirigée par le vecteur de coordonnées $(-3, 1, -2)$.

De même, si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 3y & & & = & 2 \\ & & 2y & + & z & = & 1 \end{array} \right. \\ &\qquad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions du système est une droite passant par le point de coordonnées $(2, 0, 1)$ et dirigée par le vecteur de coordonnées $(-3, 1, -2)$.

2.2 Systèmes et matrices inversibles

L'inversibilité des matrices d'opérations élémentaires est la raison pour laquelle le pivot de Gauss est bien une méthode de résolution des systèmes linéaires.

On a en effet le résultat élémentaire suivant.

Lemme 2.2.1.
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, soit $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, soit $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Considérons une matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Alors,

$$AX = B \Leftrightarrow (MA)X = MB.$$

Démonstration.
Il suffit de multiplier par M ou par M^{-1}, dans un sens ou dans l'autre. □

Proposition 2.2.2.
Effectuer une opération élémentaire sur les lignes d'un système linéaire donne un système équivalent.

Démonstration.
Effectuer une opération élémentaire sur les lignes d'un système linéaire revient à multiplier à gauche la matrice de ce système ainsi que le membre de droite par une matrice d'opération élémentaire, qui est inversible. Par le lemme 2.2.1, les deux systèmes sont équivalents. □

Le cas particulier où la matrice du système est carrée et inversible (on parle de *système de Cramer*) est simple.

Proposition 2.2.3.
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, soit $X, B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors,

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Démonstration.
Il suffit de multiplier par A ou par A^{-1}, dans un sens ou dans l'autre. On peut aussi voir cela comme une conséquence du lemme 2.2.1. □

Ce point est toutefois le départ de la méthode efficace d'inversion de matrices. Anticipons un peu un résultat que nous étudierons ultérieurement.

Théorème 2.2.4.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si pour tout $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution.

Démonstration.
Cela sera démontré au second semestre. □

Remarque 2.2.5.
Le cas échéant, on utilise la proposition 2.2.3 pour lire l'expression de A^{-1}.

Exemple 2.2.6.
Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$. Soit $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. On résout le système suivant.

$$
\begin{aligned}
AX = B &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = a \\ -2x - 3y = b \end{cases} \\
&\underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 2y = a \\ y = 2a + b \end{cases} \\
&\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = -3a - 2b \\ y = 2a + b \end{cases} \\
&\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} B
\end{aligned}
$$

Ainsi, A est inversible, et on lit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.2.7.
Pour chacune des matrices suivantes, déterminer si elle est inversible et, le cas échéant, donner son inverse.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -5 \\ 4 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$