Devoir surveillé n° 01

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ est croissante tandis que $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

II. Approximation et encadrement de π.

1) On pose $I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \frac{1}{3}(2\sin(x) + \tan(x)) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{3\sin(x)}{2+\cos(x)}.$$

On pose aussi, pour tout $x \in I$,

$$u(x) = f(x) - x \quad \text{et} \quad v(x) = g(x) - x.$$

a) Factoriser le polynôme $P = 2X^3 - 3X^2 + 1$ en produit de polynômes réels.

b) Justifier que u est dérivable sur I et que, pour tout $x \in I$,

$$u'(x) = \frac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}.$$

c) En déduire les variations de u sur I.

d) Justifier que v est dérivable sur I et déterminer un polynôme réel Q tel que, pour tout $x \in I$,

$$v'(x) = \frac{Q(\cos(x))}{(2+\cos(x))^2}.$$

e) En déduire les variations de v sur I.

f) Montrer que, pour tout $x \in I$, $g(x) < x < f(x)$.

2) **a)** En utilisant le fait que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

b) Déduire de la question **1)f)** un encadrement de π.

3) On pose, pour tout entier naturel n,

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) \quad \text{et} \quad b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right).$$

a) Justifier que, pour tout réel θ, $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - b_n}{2}} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + b_n}{2}}.$$

c) Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$9 \times 2^n \frac{a_n}{2 + b_n} < \pi < 2^n\left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right).$$

d) Justifier que les deux termes de l'encadrement précédent tendent vers π quand n tend vers $+\infty$.
Indication : On pourra déterminer la limite de (b_n) et, pour (a_n), utiliser la limite de $\frac{\sin(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0.

III. Simplification d'une fonction.

On considère la fonction définie sur $[-1, 1[$ par :

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}(x) - 2\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

On se propose de donner une expression simple de f par deux méthodes différentes.

1) Première méthode : Étude de fonction.

a) Montrer que f est bien définie sur $[-1, 1[$.

b) Déterminer sur quel intervalle f est dérivable.

c) Déterminer f'.

d) En déduire une expression simple de f.

2) Deuxième méthode : Avec des fonctions hyperboliques.

a) Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer un réel z simple dépendant de y tel que :

$$\frac{1 + \operatorname{th} y}{1 - \operatorname{th} y} = \mathrm{e}^{\,z}.$$

b) Montrer que tout réel $x \in]-1,1[$ s'écrit sous la forme $x = \operatorname{th} y$, pour un certain réel y.

c) Montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\sin\left(2 \operatorname{Arctan}\left(\mathrm{e}^{\,y}\right) - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\operatorname{Arcsin}(\operatorname{th} y)\right).$$

d) Que peut-on donc dire, pour tout $y \in \mathbb{R}$, des quantités $2 \operatorname{Arctan}\left(\mathrm{e}^{\,y}\right) - \dfrac{\pi}{2}$ et $\operatorname{Arcsin}(\operatorname{th} y)$?

e) Retrouver à partir de cela le résultat obtenu dans la question **1)d)**.

— **FIN** —