DS n° 02 : Fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom : Note :

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

Ensembles

Soit a et b deux réels, avec $a+1<b-1$. Déterminer

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[a+\frac{1}{n};b-\frac{1}{n}\right] = \qquad (1)$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left[a-\frac{1}{n};b+\frac{1}{n}\right] = \qquad (2)$$

Calculs algébriques

Soit $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$. Calculer (on donnera une forme simplifiée et factorisée) :

$$\prod_{i=2}^{5}\frac{i^2+2i+1}{i^2-2i+1} = \qquad (3)$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(i+j-1) = \qquad (5)$$

$$\sum_{k=0}^{5} 2\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\right) = \qquad (4)$$

$$\sum_{k=5}^{9}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \qquad (6)$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sin(kx+2) = \qquad (7)$$

Matrices et systèmes linéaires

Soit $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 2\\ -2 & 5 & 2\\ 2 & -3 & 0\end{pmatrix}$. Trouver deux réels a et b tels que $A^2+aA+b\mathrm{I}_3=0$:

$$a = \qquad ; \qquad b = \qquad (8)$$

En déduire l'inverse de A :

$$A^{-1} = \boxed{} \tag{9}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, trouver deux réels c_n et d_n tels que $A^n = c_n A + d_n \mathrm{I}_3$:

$$c_n = \boxed{} \quad ; \quad d_n = \boxed{} \tag{10}$$

Donc :

$$A^5 = \boxed{} \tag{11}$$

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Donner l'ensemble des solutions du système linéaire suivant, où les variables sont réelles :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & z & = & a \\ 2x & - & y & + & z & = & b \\ -x & + & y & - & z & = & c \end{array}\right. : \boxed{} \tag{12}$$

Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Alors :

$$B^{-1} = \boxed{} \tag{13}$$

Donner l'ensemble des solutions du système linéaire suivant, où les variables sont réelles :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -x & & & - & 2z & + & t & = & 4 \\ -4x & + & 2y & - & 3z & + & 3t & = & 13 \\ 3x & - & y & & & + & t & = & 0 \\ 3x & & & - & z & + & 4t & = & 9 \end{array}\right. : \boxed{} \tag{14}$$

— FIN —