

2.1: Variables unabhängiges:

$X, Y$  v.a. a. u. v. a. d.  $E (r. X)$   
 $F (r. Y)$ .

Def: Man sagt, dass  $X$  und  $Y$  st. u. v. a. sind:

$\forall x \in E, \forall y \in F:$

$$P(X=x, Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y).$$

"X und Y sind st. u. v. a.":  $X$  und  $Y$  sind st. u. v. a.  $\Leftrightarrow$   $P(X=x, Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y)$ .

2.5.4:  $X$ : le n° de la 1<sup>re</sup> boule

$Y$ : le n° de la 2<sup>de</sup> boule.

$(X, Y)$  est à valeurs ds  $E = [1, n]^2 \setminus \{(a, a), a \in [1, n]\}$

et  $(X, Y) \subset \mathcal{U}(E)$ .

$$\# E = n^2 - n = n(n-1)$$

si  $a, b \in [1, n]$ :

$$P(X=a, Y=b) = \begin{cases} 0 & \text{si } a=b \\ \frac{1}{n(n-1)} & \text{si } a \neq b. \end{cases}$$

$$P(X=1, Y=1) = 0$$

$$P(X=1) = \frac{1}{n} \quad (X \subset U([1, n]))$$

$$P(Y=1) = P(Y=1 | X=1) \times P(X=1) \\ + P(Y=1 | X \neq 1) \times P(X \neq 1)$$

$$= 0 + \frac{1}{n-1} \times \frac{n-1}{n}$$

$$= \frac{1}{n}$$

$$(q: Y \subset U([1, n])).$$

$$\text{dc: } P(X=1, Y=1) \neq P(X=1) \times P(Y=1).$$

$X$  et  $Y$  ne sont pas ind.

Prop:  $X$  et  $Y$  st ind. (1)  $A, B$  st des ens

$$\text{ss: } \forall A \subset E, \forall B \subset F, \quad (2) \\ P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B).$$

Démo:  $(\Leftarrow)$  si on pose  $A = \{x\}$   
 $B = \{y\}$   
 $\uparrow$   
 suppose (2)

and (2):

$$P(X \in \{u\}, Y \in \{y\}) = P(X \in \{u\}) \cdot P(Y \in \{y\})$$

Thus:  $(X \in \{u\}) = (X = u)$

$$(Y \in \{y\}) = (Y = y)$$

Let on a (1).

$$( \Rightarrow ) \quad A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$$

$$B = \bigcup_{b \in B} \{b\}$$

$$A \times B = \bigcup_{a \in A} \left( \bigcup_{b \in B} \{(a, b)\} \right)$$

dc: Si on suppose (1):

$$P(X \in A, Y \in B) = P((X, Y) \in A \times B)$$

$$= P\left((X, Y) \in \bigcup_{a \in A} \left( \bigcup_{b \in B} \{(a, b)\} \right)\right)$$

$$= \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} P(X, Y = (a, b))$$

$$= \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} P(X=a, Y=b)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} \underbrace{P(X=a)}_{\text{no depd on } b} \times \underbrace{P(Y=b)}_{\text{no depd on } a}
 \end{aligned}$$

$$= \left( \sum_{a \in A} P(X=a) \right) \cdot \left( \sum_{b \in B} P(Y=b) \right)$$

$$= P\left(X \in \bigcup_{a \in A} \{a\}\right) \cdot P\left(Y \in \bigcup_{b \in B} \{b\}\right)$$

$$= P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$$

□

Ex. 2.5.6:  $X \subset \mathcal{U}([1, n])$ ,  $Y \subset \mathcal{U}([1, n])$ .

$X$  et  $Y$  ind.

$P(X \leq Y)$ .

$$\begin{aligned} (X \leq Y) &= \bigcup_{x=1}^n \bigcup_{y=x}^n (X=x, Y=y) \\ &= \bigcup_{y=1}^n \bigcup_{x=1}^y (X=x, Y=y) \end{aligned}$$



$$P(X \leq Y) = \sum_{y=1}^n \sum_{x=1}^y P(X=x, Y=y)$$

$$\stackrel{\text{ind.}}{=} \sum_{y=1}^n \sum_{x=1}^y P(X=x) \cdot P(Y=y)$$

$$\stackrel{X, Y \sim \mathcal{U}([1, n])}{=} \sum_{y=1}^n \sum_{x=1}^y \frac{1}{n^2}$$

$$= \sum_{y=1}^n \frac{y}{n^2}$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{y=1}^n y = \frac{n(n-1)}{2n^2} = \left\lfloor \frac{n-1}{2n} \right\rfloor$$

Prop 2.5.7: ("transfer")

$$\Omega \xrightarrow{X} E \xrightarrow{f} E'$$

$$\Omega \xrightarrow{\gamma} F \xrightarrow{g} F'$$

Si  $X$  et  $\gamma$  sont ind.,  $f(X)$  et  $g(\gamma)$

auront  $(\triangle) \begin{pmatrix} f(X) = f \circ X \\ g(\gamma) = g \circ \gamma \end{pmatrix}.$

Demo. Soit  $A' \subset E'$ ,  $B' \subset F'$

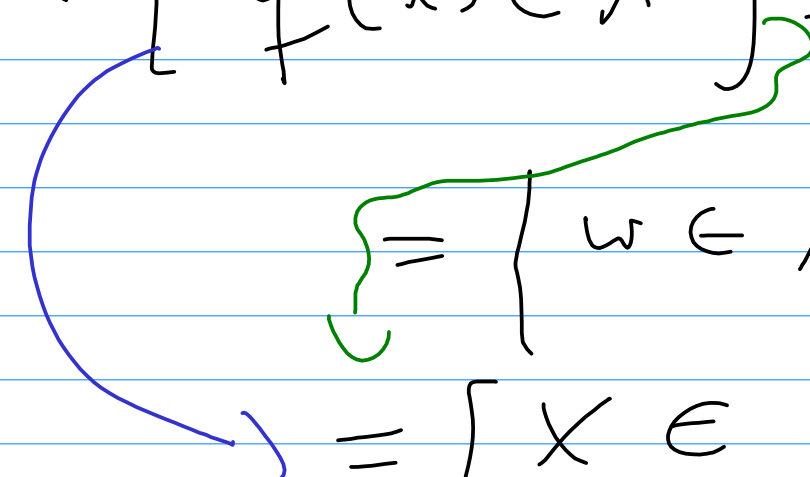
$$h_f. \quad P(f(x) \in A', g(y) \in B')$$

$$= P(f(x) \in A') \times P(g(y) \in B').$$

appel:  $[f(x) \in A'] = \{\omega \in \Omega, f \circ x(\omega) \in A'\}$

$= \{\omega \in \Omega, x(\omega) \in f^{-1}(A')\}$

$= [x \in f^{-1}(A')]$



$$\text{de } \hat{2}: [g(y) \in B'] = [y \in g^{-1}(B')]$$

$$\begin{aligned} & \left[ (f(x), g(y)) \in A' \times B' \right] \\ &= \left[ (x, y) \in f^{-1}(A') \times g^{-1}(B') \right] \end{aligned}$$

$$P(f(x) \in A', g(y) \in B')$$

$$= P(x \in f^{-1}(A'), y \in g^{-1}(B'))$$

$$\stackrel{\text{ind.}}{=} P(x \in f^{-1}(A')) \times P(y \in g^{-1}(B'))$$

$$= P(f(x) \in A') \times P(g(y) \in B').$$

ex: On time 2 di,  $X: n^0 \text{ du } 1^e \text{ di}$   
 $Y: n^0 \text{ du } 2^e \text{ di}$ .

Si X et Y stand, alors:

$$(n^0 \text{ du } 1^e \text{ di})^2 = X^2 = f(x)$$

alors:

$$f: 12 - 112$$

$$261 - 112^2$$

$$\text{et } (n^0 \text{ du } 2^e \text{ di}) + 1 = 9 + 1$$

Si std.

2. 5.8:

$$X_1 : \Omega \rightarrow E_1$$

$$X_2 : \Omega \rightarrow E_2$$

$\vdots$

$$X_n : \Omega \rightarrow E_n$$

Def:  $X_1, \dots, X_n$  it mult. val. f.:

$$\forall x_1 \in \underline{E_1}, x_2 \in \underline{E_2}, \dots, x_n \in \underline{E_n};$$

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) \\ = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i) \end{aligned}$$

! S:  $A_1, \dots, A_n$  st das ev,

ils st mit 2d. sei:

$$\forall I \subset [1, n],$$

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

On va voir ds 2.5.13 que

2.1.8  $\Rightarrow (X_1, \dots, X_n)$  mutind.

$\Rightarrow \forall u_i \in E_i, \forall I \subset [1, n],$

$$P\left(\bigcap_{i \in I} (X_i = u_i)\right) = \prod_{i \in I} P(X_i = u_i)$$

←  
trivial

en particulier, pour  $I = \{i, j\}$ :

$\gamma = X_i - X_j$  est mult. id,

$X_i$  et  $X_j$  sont id.

dc: mult. id  $\Rightarrow$  2 id.



2.5.10:  $\triangle$   $Z \sim 2$ . i.i.d.  $X$  not ind.

$$P(X=1) = P(X=-1) = \frac{1}{2}$$

$$P(Y=1) = P(Y=-1) = \frac{1}{2}$$

$$Z = XY$$

$Z$  ist i.i.d.  $\{1, -1\}$

$X$  et  $Y$  i.i.d.: per hyp.

$$(Z=1) = (X=1, Y=1) \sqcup (X=-1, Y=-1)$$

$$P(Z=1) = P(X=1, Y=1) + P(X=-1, Y=-1)$$

$$\stackrel{\text{ind.}}{=} \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$(Z = -1) \quad \xrightarrow{\quad} \quad (Z = 1)$$

$$\text{d.} \quad P(Z = -1) = 1 - P(Z = 1) \\ = \frac{1}{2}.$$

$$P(Z = 1 \mid X = 1) = \frac{P(Y = 1 \mid X = 1)}{P(Y = 1)} \\ \stackrel{\text{ind.}}{=} \frac{1}{2} = P(Z = 1)$$

$$\text{den: } P(z=1 | x=-1) = P(z=1)$$

$$P(z=-1 | x=\pm 1) = P(z=-1)$$

dc  $x$  et  $z$  st ind.

iden avec  $y$ :  $y$  et  $z$  st ind.

$x, y, z$  st 2 à 2 ind.

mut ind ??

$$P(x=1, y=1, z=-1) = 0$$

$$P(X=1) \times P(Y=1) \times P(Z=-1) = \frac{1}{8} \neq 0$$

Wn,  $X, Y, Z$  are st mut. ind.