Devoir à la maison n° 9

À rendre le 20 décembre

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que $\left(u_n + \dfrac{u_{2n}}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

1) On suppose que (u_n) converge. Montrer qu'elle converge vers $\dfrac{2}{3}$.

Dans toute la suite, on ne suppose plus que (u_n) converge.

2) **a)** Justifier qu'il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge. On notera ℓ sa limite.

b) Donner une sous-suite de (u_n) qui converge vers $\ell' = 2(1-\ell)$, et une sous-suite de (u_n) qui converge vers $2(1-\ell')$.

On étudie maintenant la suite récurrente définie par $x_0 = \ell$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = 2(1-x_n).$$

On pose également, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_n - \dfrac{2}{3}$.

3) **a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x_n.

b) Donner une relation de récurrence entre y_{n+1} et y_n.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $|y_n|$ en fonction de $|y_0|$.

d) Montrer que $(|y_n|)$ a une limite, et donner ses valeurs possibles.

e) En utilisant **3)a)**, montrer que si $\ell \neq \dfrac{2}{3}$, alors (u_n) n'est pas bornée. En déduire que toutes les sous-suites convergentes de (u_n) ont pour limite $\dfrac{2}{3}$.

4) On suppose maintenant que (u_n) diverge.

a) En revenant à la définition de limite, montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $(u_{\psi(n)})$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{\psi(n)} - \dfrac{2}{3}\right| > \varepsilon$.

b) En déduire qu'il existe une sous-suite de (u_n) qui a une limite autre que $\dfrac{2}{3}$.

c) Conclure.

Remarques : On appelle *valeur d'adhérence* d'une suite tout scalaire ℓ pour lequel il existe une sous-suite de (u_n) de limite ℓ.

— Le théorème de Bolzano-Weierstrass assure que tout suite réelle bornée a au moins une valeur d'adhérence.
— La question **3)** assure que (u_n) a une seule valeur d'adhérence.
— La question **4)** assure qu'une suite bornée ayant une seule valeur d'adhérence converge vers cette valeur.

— FIN —