

LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I.

ANNÉE 2017 - 2018

C2: MODÉLISATION DES SYSTÈMES ASSERVIS

Fiche méthode 1 - Décomposition en Eléments Simples(C2-2)

26 septembre 2017

1 Décomposition

Soit une fonction rationnelle:

$$Y(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

où N(p) et D(p) sont des dénominateur.

Supposons que D(p) se factorise **au maximum** sous la forme :

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{\left(p + a_1\right)^{n_1} \left(p + a_2\right)^{n_2} \cdots \left(p^2 + b_1 p + c_1\right)^{m_1} \left(p^2 + b_2 p + c_2\right)^{m_2} \cdots}$$

(où les facteurs d'ordre 2 n'ont pas de racine réelle, et ne sont donc pas factorisables dans \mathbb{R}). On montre que cette fraction peut se décomposé en une somme de fractions (dit **éléments simples**) :

$$\begin{split} \frac{N(p)}{D(p)} &= \frac{A}{p+a_1} + \frac{B}{\left(p+a_1\right)^2} + \frac{C}{\left(p+a_1\right)^3} + \dots + \frac{D}{\left(p+a_1\right)^{n_1}} \\ &+ \frac{E}{p+a_2} + \frac{F}{\left(p+a_2\right)^2} + \frac{G}{\left(p+a_2\right)^3} + \dots + \frac{H}{\left(p+a_2\right)^{n_2}} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{Ip+J}{p^2+b_1p+c_1} + \frac{Kp+L}{\left(p^2+b_1p+c_1\right)^2} + \frac{Mp+N}{\left(p^2+b_1p+c_1\right)^3} + \dots + \frac{Op+P}{\left(p^2+b_1p+c_1\right)^{m_1}} \\ &+ \frac{Qp+R}{p^2+b_2p+c_2} + \frac{Sp+T}{\left(p^2+b_2p+c_2\right)^2} + \frac{Up+V}{\left(p^2+b_2p+c_2\right)^3} + \dots + \frac{Wp+X}{\left(p^2+b_2p+c_2\right)^{m_1}} \\ &+ \dots \end{split}$$

Ce qui précède se base sur les remarques suivantes :



Remarque 1 :

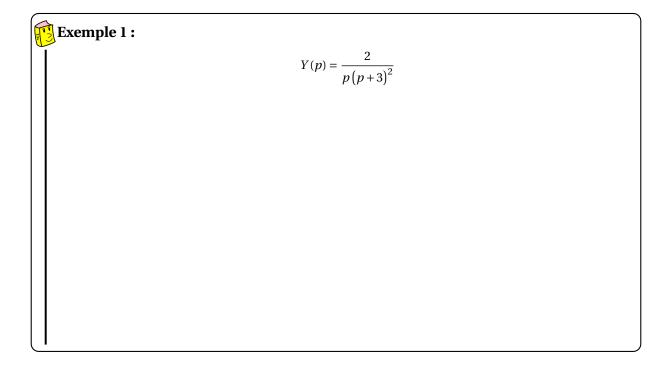
- Les facteurs multiples (à la puissance n) engendreront n éléments simples, dont les dénominateurs seront à la puissance $1, 2, \cdots$ jusqu'à n.
- Les facteurs d'ordre 2 (trinômes du 2^{nd} degrés qui n'ont pas de racines réelles) engendreront des éléments simples dont le dénominateur sera un binôme du 1^{er} degrés.

2 Détermination des inconnues

Plusieurs méthodes sont possibles pour déterminer les inconnus des numérateurs.

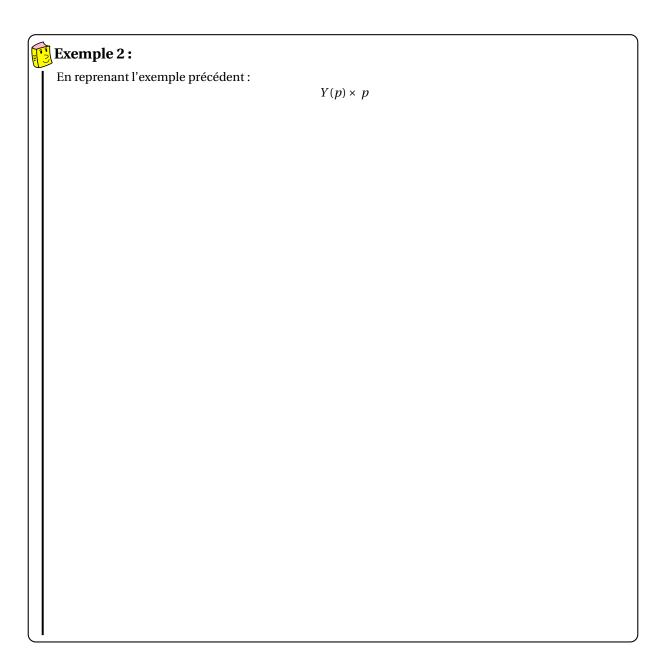
a) Identification du numérateur : la bouée de secours!

La méthode consiste à remettre tous les éléments simples au même dénominateur pour ré-obtenir une seule fraction rationnelle. Le numérateur sera donc un polynôme, fonction de toutes les inconnues. Les numérateurs peuvent alors être identifiés, coefficient.



b) Recherche de solution par limites :

Une méthode efficace consiste à venir multiplier la fonction Y(p) par l'un des facteurs, puis à faire tendre la variable p vers sa racine.



Pour ce qui est la recherche des inconnues issues des éléments simples dont les dénominateurs est d'ordre 2, La méthode est similaire, à la différence que l'on fait tendre la variable p vers la racine complexe. Le résultat sera alors un nombre complexe, dont on pourra identifier partie imaginaire et partie réelle.