Vademecum pour le futur taupin

25 février 2018

Ce document porte sur quelques points sur lesquels les nouveaux étudiants de sup ont régulièrement des lacunes en début d'année. Il pourra servir de support de révision durant l'été, avant l'entrée en sup. Il pourra aussi accompagner le nouveau taupin en début d'année.

Ce document ne se veut pas exhaustif et ne comporte pas de preuve, et peu de définitions. Pour tout cela, il conviendra de consulter le cours de terminale.

Si vous travaillez avec ce document, votre attention doit porter sur deux points en particulier :

- votre rédaction doit être détaillée, et suivre au plus près les modèles proposés ;
- les calculs (et leurs vérifications) doivent être faits à la main, sans calculatrice.

1 Rédaction et raisonnement déductif..

Un raisonnement ou une démonstration mathématique est avant tout un texte... comme tous les autres. Il doit être articulé logiquement. On y trouve cependant souvent des parties «techniques», écrites (on pourrait aussi dire «codées») en langage mathématiques, comme des équations par exemple.

Il convient de respecter quelques conventions.

- Deux «phrases mathématiques» doivent être coordonnées. Le plus souvent, on utilisera le mot «donc», qui signifie une déduction. En écrivant «A donc B», on dit que B est vrai,
- Toutes les variables mathématiques doivent être introduites, le plus souvent par le mot «soit».

Exemple 1.0.1.
Montrer que si un nombre entier est pair, alors son carré est pair.

On rédige comme suit.

Soit n un nombre entier pair. Il existe un entier k tel que

$$n = 2k.$$

Ainsi,

$$n^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$$

est bien un nombre pair, car $2k^2$ est un entier.

On aurait aussi pu rédiger comme suit.

Soit $n \in \mathbb{Z}$ un entier pair. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = 2k.$$

Ainsi,

$$n^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$$

est bien un nombre pair, car $2k^2 \in \mathbb{Z}$.

Exercice 1.0.2.
Montrer que si un nombre entier est impair, alors son carré est impair.

Exercice 1.0.3.
En utilisant une identité remarquable, montrer que si deux nombres complexes ont même carré, alors ils sont égaux.

Remarque 1.0.4.
Dans un travail mathématique, le symbole $\Leftrightarrow$ a un sens bien précis. Il convient pour l'instant de l'utiliser uniquement dans un contextes précis : placé entre deux équations ou inéquations, il signifie que ces dernières ont exactement les mêmes solutions. On passe d'une équation/inéquation à une autre équation/inéquation par des manipulations respectant l'ordre, c'est-à-dire en appliquant de part et d'autre une fonction strictement monotone (voir la partie 4 pour des rappels à ce sujet).

À la moindre hésitation, on préférera dresser des tableaux de signes/variations des fonctions mises en jeu.

2 Autour de la trigonométrie.

2.1 Cosinus et sinus.

Les valeurs suivantes doivent être connues sur le bout des doigts.

Les formules d'addition sont à connaître.

α	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1
π	-1	0

TABLE 1 – Valeurs remarquables des sinus et cosinus.

Proposition 2.1.1.
Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).$$

On a de plus

$$\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1.$$

Exercice 2.1.2.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$. En utilisant les formules précédentes, et les propriétés usuelles du sinus et du cosinus, montrer les formules suivantes.

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$
$$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$$

$$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$$
$$\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$$

Exercice 2.1.3.
Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant les formules précédentes, et les propriétés usuelles du sinus et du cosinus, montrer les formules suivantes puis les illustrer sur le cercle trigonométrique.

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$
$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$
$$\cos(x+\pi) = -\cos(x)$$
$$\sin(x+\pi) = -\sin(x)$$

En s'aidant des symétries observables sur le cercle trigonométrique, traduites par les formules précédentes, vous devez savoir obtenir tous les angles remarquables du cercle trigonométrique.

Exercice 2.1.4.
Déterminer les valeurs suivantes.

1. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
2. $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$
3. $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$
4. $\sin\left(\frac{21\pi}{4}\right)$

Exercice 2.1.5.
En utilisant les formules d'addition, déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2.2 Calculs sur les complexes.

Il convient de s'entraîner suffisamment pour pouvoir calculer efficacement sur des nombres complexes simples.

Exercice 2.2.1.
Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

1. $(3+i)(4-5i) + 7 - 2i$
2. $\frac{-5+3i}{1+i} + \frac{3+i}{1-i}$

3. $\dfrac{3+i}{1+i\sqrt{2}}+\dfrac{3-5i}{2-i}$
4. $(1+i)^3+(1-i)^3$

Exercice 2.2.2.
Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants.

1. $\sqrt{7}-i\sqrt{7}$
2. $5+5i\sqrt{3}$.
3. $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{i}{4}$

3 Factorisation.

3.1 Expressions polynomiales.

Les identités remarquables sont à repérer à chaque fois qu'elles apparaissent, et fournissent des factorisations souvent précieuses.

Exercice 3.1.1.
Factoriser ou simplifier les expressions suivantes.

1. x^2-8
2. x^4-9
3. $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

Proposition 3.1.2.
Lorsqu'une fonction polynomiale de degré n :

$$P : x \mapsto a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

a une racine $\alpha \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire que $P(\alpha)=0$, alors il existe une fonction polynomiale Q de degré $n-1$ telle quelque, pour tout nombre x,

$$P(x)=(x-\alpha)Q(x).$$

Il arrive souvent de devoir factoriser des fonctions polynomiales, on commencera systématiquement par rechercher des racines évidentes (souvent parmis 0, 1, -1, i, $-i$, 2, -2). L'utilisation du discriminant est longue et n'est disponible que pour les équations de degré 2, on l'évitera donc autant que possible.

Pour les trinômes du second degré, on utilise très souvent le développement suivant.

Proposition 3.1.3.
Pour tout nombres α, β, x,

$$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta.$$

1. Si l'on connait $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$, on connait donc un trinôme du second degré dont α et β sont exactement les racines.
2. Si l'on connait une racine d'un trinôme du second degré, on obtient immédiatement l'autre racine sans calcul.

Exemple 3.1.4.
Factoriser l'expression polynomiale

$$P(x)=x^3-10x^2+23x-14.$$

On remarque que 1 est racine évidente ($P(1)=1-10+23-14=0$), il existe donc des nombres a_0, a_1, a_2 tels que, pour tout nombre x,

$$P(x)=(x-1)(a_2x^2+a_1x+a_0).$$

En considérant le terme de plus haut degré de P et le terme constant, on obtient immédiatement $a_2=1$ et $a_0=14$. En considérant le terme de degré 2 de P, on obtient (en développant par exemple) : $-a_2+a_1=-10$, donc $a_1=-9$.

On vérifie en développant pour obtenir le terme de degré 1 de P : $-a_1+a_0=23$, ce qui est exact.

On a donc, pour tout nombre x,

$$P(x)=(x-1)(x^2-9x+14).$$

On remarque que 2 est racine évidente du trinôme $x^2-9x+14$, que l'on factorise donc immédiatement en $(x-2)(x-7)$.

Exercice 3.1.5.
Factoriser les expressions suivantes sans jamais écrire de discriminant.

1. $x^4+2x^3-13x^2+10x$
2. x^3-3x^2+x-3
3. $x^3-5x^2-22x-16$
4. x^3-x^2-7x+7
5. x^4-4

3.2 Tableaux de signes.

Savoir dresser efficacement un tableau de signes est un savoir-faire important.

Remarque 3.2.1.
Dans un tableau de signes, on étudie le signe *strict*.

Le tableau de signes de base est celui d'une fonction strictement monotone (voir partie 4), avec un point d'annulation.

Proposition 3.2.2.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $\alpha \in I$ vérifiant $f(\alpha) = 0$.

1. Si f est strictement croissante, le tableau de variations de f sur I s'écrit comme suit.

x		α	
$f(x)$	$-$	0	$+$

2. Si f est strictement décroissante, le tableau de variations de f sur I s'écrit comme suit.

x		α	
$f(x)$	$+$	0	$-$

Un cas particulier à connaître sur le bout des doigts est celui des fonctions affines.

Corollaire 3.2.3.
Soit a, b deux réels, avec $a \neq 0$. Soit $f : x \mapsto ax+b$.

1. Si $a > 0$, la tableau de signes de f est

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$-\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2. Si $a < 0$, la tableau de signes de f est

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$-\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Enfin, on compose les tableaux de signes par la règle des signes.

La méthode universelle pour étudier le signe d'une expression est donc la suivante :

1. on détermine l'ensemble de définition de l'expression, s'il n'est pas donné ;
2. on commence par factoriser le plus possible l'expression ;
3. on réalise une étude de fonction pour chaque facteur dont le tableau de signes n'est pas donné par les règles précédentes.

Il convient de suivre systématiquement ce programme

Exemple 3.2.4.
Dresser le tableau de signes de

$$f : x \mapsto -\mathrm{e}^{x}(x-1) + \mathrm{e}^{2x}(x-1) - \mathrm{e}^{x+2} + e^2.$$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= -\mathrm{e}^{x}(x-1) + \mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{x}(x-1) - \mathrm{e}^{2}(\mathrm{e}^{x}-1) \\ &= \mathrm{e}^{x}(x-1)(\mathrm{e}^{x}-1) - \mathrm{e}^{2}(\mathrm{e}^{x}-1) \\ \\ &= (\mathrm{e}^{x}-1)\Big((x-1)\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2}\Big). \end{aligned}$$

On définit sur $\mathbb{R}$

$$g : x \mapsto (x-1)\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2}$$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, si $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{x} + (x-1)\mathrm{e}^{x} \\ &= x\mathrm{e}^{x}. \end{aligned}$$

Comme $x\mathrm{e}^{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$, et comme

$$g(x) = (x-1)\mathrm{e}^{x-1}\mathrm{e} - \mathrm{e}^{2},$$

on a $g(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\mathrm{e}^{2}$. On a aussi $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{}$ $+\infty$.

On peut donc dresser le tableau de variations de g.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\mathrm{e}^2$	$\searrow$	$-\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi, g est strictement négative sur $\mathbb{R}_-$.

De plus, g et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $g(0)<0$ et $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, par le théorème de la bijection, g s'annule une fois exactement sur $\mathbb{R}_+$, et on a la solution évidente $g(2)=0$.

La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x - 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0.

On peut donc dresser le tableau de signes de f.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
e^x-1		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 3.2.5.
Dresser le tableau de signes des expressions suivantes.

1. $x^3 - x^2 - 5x + 5$
2. $x^4 - 6x^3 - 6x^2 - 6x - 7$
3. $\ln(x)^2 - \ln(x) - 6$
4.

4 Autour de la monotonie.

4.1 Définition et utilisation naïve.

Définition 4.1.1 (Sens de variations)**.**
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$.

1. La fonction f est croissante sur A si, pour tout x, y dans A :
$$\text{si } x \leqslant y, \text{ alors } f(x) \leqslant f(y).$$
2. La fonction f est strictement croissante sur A si, pour tout x, y dans A :
$$\text{si } x < y, \text{ alors } f(x) < f(y).$$
3. La fonction f est décroissante sur A si, pour tout x, y dans A :
$$\text{si } x \leqslant y, \text{ alors } f(x) \geqslant f(y).$$
4. La fonction f est strictement décroissante sur A si, pour tout x, y dans A :
$$\text{si } x < y, \text{ alors } f(x) > f(y).$$

Une fonction est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Exemple 4.1.2. — La fonction racine carrée ($\sqrt{\cdot}$) est strictement croissante, donc croissante.
— La fonction partie entière ($\lfloor\cdot\rfloor$) est croissante, mais pas strictement.
— La fonction carré ($x \mapsto x^2$) n'est pas monotone : elle n'est ni croissante, ni décroissante. Elle est cependant croissante strictement sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante strictement sur $\mathbb{R}_-$.
— La fonction inverse ($x \mapsto \dfrac{1}{x}$) n'est pas monotone : elle n'est ni croissante, ni décroissante. Elle est cependant décroissante strictement sur $\mathbb{R}_+$ ainsi que sur $\mathbb{R}_-$.

Exercice 4.1.3.
Déterminer les sens de variations des fonctions suivantes (ou dire si elles ne sont pas monotones).

Remarque 4.1.4.
En appliquant une fonction strictement monotone sur une inéquation, on obtient une inéquation équivalente (en renversant les inégalités si la fonction est strictement décroissante).

Remarque 4.1.5.
Pour mettre au carré ou passer à l'inverse d'une inéquation, il convient donc au préalable de comparer les membres de l'inéquation à 0.

Exercice 4.1.6.

Résoudre les inéquations suivantes.

On a souvent besoin de comparer des radicaux (racines carrées). Cela se fait systématiquement en passant les objets au carré, après avoir comparé leurs signes.

Exemple 4.1.7.
Comparer $1+\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.
Ces deux nombres sont positifs. On a

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^2 &= 1+2\sqrt{2}+2\\ &= 3+2\sqrt{2}\\ &> \sqrt{3}^2\end{aligned}$$

Par croissance stricte de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$,

$$1+\sqrt{2} > \sqrt{3}.$$

Exercice 4.1.8.
Comparer les couples de nombres suivants.

1.

Remarque 4.1.9.
On retiendra les encadrements suivants :

$$2 < \mathrm{e} < 3 \quad \text{et} \quad 3 < \pi < 4.$$

Exercice 4.1.10.
Comparer les couples de nombres suivants.

1.

4.2 Lien avec le signe de la dérivée.

4.3 Formules de dérivation.

4.4 Tableaux de variations.

5 TVI.

6 L'analyse, c'est l'encadrement.

6.1 Valeur absolue.

6.2 Limites