Devoir à la maison n° 19

À rendre le 1er juin

I. Calculs de déterminants.

On appelle $\mathbb{K}$: $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $a_0, \ldots, a_n$, x, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des éléments de $\mathbb{K}$. Calculer les déterminants de dimension $n+1$ suivants :

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1 & 0 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdot & \cdot & \alpha_n \\ \vdots & \alpha_2 & 0 & \alpha_3 & \cdot & \cdot & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \alpha_3 & 0 & \cdot & \cdot & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \alpha_4 & \ddots & \cdot & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \cdots & \alpha_n & 0 \end{vmatrix}.$$

II. Quelques propriétés de la comatrice.

On étudie dans ce problème quelques propriétés de la comatrice d'une matrice carrée. Les deux parties sont indépendantes.

Dans tout ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à deux et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Partie 1 : Comatrice de la comatrice.

Dans cette partie A est une matrice carrée d'ordre n.

1) Dans cette question uniquement, on suppose que A est inversible.
   - **a)** Quel est le rang de $\mathrm{com}\,(A)$?
   - **b)** Calculer $\mathrm{com}\,(\mathrm{com}\,(A))$.

2) On suppose que $\mathrm{rg}(A) \leqslant n-2$, calculer $\mathrm{com}\,(\mathrm{com}\,(A))$.

3) On suppose maintenant que $\mathrm{rg}(A) = n-1$. Montrer que $\mathrm{rg}\,(\mathrm{com}\,(A)) = 1$.

4) Montrer, dans le cas général, que $\mathrm{com}\,(\mathrm{com}\,(A)) = (\det(A))^{n-2}A$.
Remarque : on n'oubliera pas de traiter les cas particuliers pouvant survenir.

Partie 2 : Comatrice d'un produit.

Dans cette partie A et B sont deux matrices carrées d'ordre n.

5) Dans le cas où A et B sont inversibles, montrer que $\mathrm{com}\,(AB) = \mathrm{com}\,(A)\mathrm{com}\,(B)$.

6) Dans cette question, on ne suppose plus que A et B sont inversibles.

- **a)** Pour une matrice M carrée d'ordre n, que peut-on dire de la fonction $x \mapsto \det(M - x\mathrm{I}_n)$?
- **b)** En déduire que l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $A - \lambda\mathrm{I}_n$ ou $B - \lambda\mathrm{I}_n$ n'est pas inversible est fini.
- **c)** En déduire que $\mathrm{com}\,(AB) = \mathrm{com}\,(A)\mathrm{com}\,(B)$.

7) Montrer que si A et B commutent, alors $\mathrm{com}\,(A)$ et $\mathrm{com}\,(B)$ commutent aussi.

8) Montrer que, si A et B sont semblables, alors $\mathrm{com}\,(A)$ et $\mathrm{com}\,(B)$ le sont aussi.

— **FIN** —