Devoir surveillé n° 03

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Soient E, F deux ensembles, soit $f : E \to F$. Montrer que f est injective si et seulement si :

$$\forall A, A' \in \mathscr{P}(E),\ f(A \cap A') = f(A) \cap f(A').$$

II. Étude de trois fonctions

On étudie dans ce problème les fonctions :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \tan^2(t) \end{array} \right. , \qquad g : x \mapsto \text{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right) \qquad \text{et} \qquad h : x \mapsto \text{Arctan}\left(\sqrt{x}\right).$$

1) Déterminer le domaine de définition de g et de h.

2) Étudier les variations de f.

3) Déterminer les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de f.

4) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (faire figurer les tangentes ou asymptotes remarquables).

5) Montrer que quel que soit $x \geqslant 0$, il existe un unique $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $x = f(t)$.

6) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Exprimer le réel $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $x = f(t)$ en fonction de x au moyen des fonctions usuelles.

7) Soit $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Montrer que $1 + \tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$.

8) On considère $x \geqslant 0$ et l'unique réel t correspondant obtenu à la question **6)**.
Écrire $g(x)$ en fonction de t, et simplifier cette expression. En déduire que les fonctions g et h sont égales sur l'intersection de leurs ensembles de définition.

9) Étudier les variations de h.

10) Déterminer les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de h.

11) Tracer la courbe représentative de h dans un repère orthonormé.

III. Une équation fonctionnelle

On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

- f est continue ;
- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(xy) = xf(y) + yf(x)$.

1) *Question préliminaire.*

a) Étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto \ln(x) + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ sur $]0, 1]$.

b) En déduire que $x \ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un élément de $\mathscr{E}$.

a) Déterminer $f(0)$ et $f(1)$.

b) En déduire que $f(-1) = 0$.

c) Montrer que f est impaire.

3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un élément de $\mathscr{E}$. On suppose dans cette partie uniquement que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

a) Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ xf'(x) - f(x) = f'(1)x.$$

b) Soit $k \in \mathbb{R}$, résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle

$$xy' - y = kx. \tag{1}$$

c) En déduire la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

d) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{R}$, il existe une unique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ élément de $\mathscr{E}$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifiant $f'(1) = k$.

4) Soit $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'unique élément de $\mathscr{E}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que $f'(1) = 1$.

a) La fonction f_1 est-elle dérivable en 0 ?

b) Étudier les variations de f_1.

c) Donner l'allure du graphe de f_1 (unité de longueur : 4 centimètres). On fera notamment attention au comportement de f_1 au voisinage de 0 et l'on tracera les tangentes remarquables à sa courbe.

5) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un élément de $\mathscr{E}$, que l'on suppose juste continue. Soit F l'unique primitive de f s'annulant en 0.

a) Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ F(xy) = x^2 F(y) + \frac{xy^2}{2} f(x).$$

b) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et en déduire $\mathscr{E}$.

— FIN —