Arithmétique et suites - exercices supplémentaires

✎ et ⛰

Arithmétique ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

Exercice 1 Démontrer que le nombre $7^n + 1$ est divisible par 8 si n est impair ; dans le cas n pair, donner le reste de sa division par 8.

Exercice 2 Trouver tous les entiers relatifs n tels que $n^2 + n + 7$ soit divisible par 13.

Exercice 3 Soient a et b deux entiers.

1) Démontrer que si a et b sont premiers entre eux, il en est de même des entiers $a + b$ et ab.

2) On revient au cas général. Calculer $\mathrm{pgcd}(a + b, \mathrm{ppcm}(a, b))$.

Exercice 4 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant :

$$S : \left\{ \begin{array}{rcl} x & \equiv & 3 \mod 6 \\ x & \equiv & 1 \mod 10 \end{array} \right.$$

On recherchera d'abord une solution particulière.

Exercice 5 Soient $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^\star$ et p un nombre premier. Montrer que p divise a si et seulement si p divise a^n.

Suites ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎ ✎

Exercice 6 Soit $(u_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Montrer que (u_n) converge si et seulement si (u_n) est stationnaire.

Exercice 7 Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}$ et x un réel.

1) Montrer que $x = \sup(A)$ ssi (x majore A et il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A qui converge vers x).

2) Énoncer un résultat analogue pour $\inf(A)$.

Exercice 8 Calculer, lorsqu'elles convergent, les limites des suites définies par :
$u_n = n - \sqrt{n^2 - n}$ $\quad u_n = \sqrt{n(n + a)} - n$ $\quad u_n = \dfrac{n}{2} \sin \dfrac{n\pi}{2}$ $\quad u_n = \dfrac{\sin n^2 - \cos n^3}{n}$.

Arithmétique

Exercice 9 Soit p un nombre premier.

1) Montrer que p divise $\binom{p}{k}$ pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$.

2) En déduire l'identité de Frobenius : $\forall x,\, y \in \mathbb{Z},\, (x+y)^p \equiv x^p + y^p\ [p]$.

3) En déduire le petit théorème de Fermat.

Exercice 10 On souhaite montrer que l'ensemble E des nombres premiers congrus à 3 modulo 4 est infini.
Pour cela on s'inspire de la démonstration du caractère infini de l'ensemble des nombres premiers. En raisonnant par l'absurde, on suppose E fini : on peut alors noter $p_1,\, p_2, \ldots,\, p_n$ la liste des éléments distincts de E. On introduit l'entier $N = 4p_1p_2 \ldots p_n - 1$. À vous de finir !

Suites

Exercice 11 On appelle *valeur d'adhérence* d'une suite (u_n) toute limite d'une suite extraite de (u_n).

On considère une suite réelle bornée (u_n). Montrer que (u_n) converge si et seulement si (u_n) possède une seule valeur d'adhérence.

Est-ce vrai si (u_n) n'est pas bornée ? Pas réelle ?