Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 point, total sur 28 points, ramené sur 5 points, +25%.
- Problèmes : exercice de TD sur 8 points, puis chaque question sur 4 points, total sur 104 points (V1) et 116 points (V2), ramené sur 15 points, +90% (V1) et +70% (V2).

Statistiques descriptives.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \min\left(\frac{1}{10}\lceil 10x \rceil\,;20\right)$.

	Calculs	Problème V1	Problème V2	Note finale
Transformation	c	p_1	p_2	$\varphi\left(1,25\frac{5c}{28}+1,9\frac{15p_1}{104}+1,7\frac{15p_2}{116}\right)$
Note maximale	24	41	68	$17,9$
Note minimale	4	11	28	$4,2$
Moyenne	$\approx 11,70$	$\approx 25,35$	$\approx 43,18$	$\approx 10,61$
Écart-type	$\approx 4,17$	$\approx 8,00$	$\approx 11,44$	$\approx 3,01$
Premier quartile	9	20	34	$8,75$
Médiane	12	25	43	$10,4$
Troisième quartile	14	$30,5$	48	$12,55$

Remarques générales.

• J'ai encore relevé des «la primitive de f». Quelle ☠HORREUR☠ ! Cela fait très mauvais effet, sur une copie ou à l'oral.
• Vous devez écrire des phrases en français. Par exemple, «la fonction f est $\mathscr{C}^0([1,1],\mathbb{C})$» n'est pas du plus bel effet. Pourquoi ne pas écrire «la fonction f est continue» ?
• Certains semblent penser que $\int_a^b fg = \int_a^b f \times \int_a^b g$. Quelle ☠HORREUR☠ ! En physique, ce ne serait pas homogène...
• Vos calculs ne doivent pas être rédigés en zig-zag. S'ils ne tiennent pas sur une ligne, rédigez-les uniquement en colonne. En cas de doute, préférez la présentation en colonne, elle est plus lisible.
• Quand vous sommez deux DL (ou plus), alignez-les.
• Les notations $f(x) \underset{x\to+\infty}{\leqslant} g(x)$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} g(x)$ me laissent perplexe : que veulent-elles dire ? Inventer des notations pour résoudre une question d'un simple «donc» est absurde : vous ne produisez rien de vrai, vous ne gagnez aucun point et vous épuisez immédiatement toute la confiance du correcteur.
• Les théorèmes ont (quasiment toujours) des hypothèses à citer. Il y a beaucoup de points dessus. C'est d'autant plus vrai en analyse, vu que les théorèmes ont parfois des hypothèses techniques et non triviales.

Feuille de calculs.

Beaucoup ont mis une représentation paramétrique là où l'on demandait une représentation cartésienne. Soyez vigilants. Lorsque l'on vous demande de donner une base, on attend en réponse une famille de vecteur. Répondre Vect(..., ...) n'est pas correct : vous avez donné un sev et non une famille de vecteurs.

Exercice vu en TD (V1).

Vous deviez montrer que F et G sont des sev de $\mathscr{C}([-1,1],\mathbb{C})$ (et non juste des ev). Dire «F et G sont des sev» n'est pas correct : il faut préciser de quel ev ce sont des sev.

Étude d'un endomorphisme (V1).

Il ne fallait surtout pas confondre T et $T(f)$, ni écrire $T(f(x))$, qui n'a aucun sens.
Ce problème était révélateur de la difficulté de certains à gérer et introduire correctement leurs variables. Les écritures «$T(f) = \int_0^x \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$», «$T(f)$ est une primitive de $\frac{f(t)}{1+t}$» ne sont pas correctes. Ici, T et $T(f)$ sont des fonctions (différentes !).

1 Écrire $T(f_1) : E \to \mathbb{R}$ montre bien une incompréhension de la nature de T. x est une fonction ?

3d) Il convenait de donner le développement en ordonnant les termes (par ordre croissant de précision).

4a) C'est la décomposition réelle qui était utile par la suite.

6a) Nulle continuité de l'intégrale ici, il suffisait de voir $T(f)$ comme une primitive.
La linéarité a parfois posé problème, il ne fallait pas (essayer de) montrer que «$T(f)(\lambda x + \mu y) = \lambda T(f)(x) + \mu T(f)(y)$».
Il ne s'agissait pas de montrer que $E = \mathbb{R}^I$!

6b) Certains ont encore du mal à écrire proprement des dérivées, cela mène à des erreurs. Erreur classique (où g est une primitive de $t \mapsto \frac{f(t)}{t+1}$) : $[T(f)(x)]' = (g(x) - g(0))' = g'(x) - g'(0) = \frac{f(x)}{x+1} - f(0)$.
Ici, $(g(0))'$ est une dérivée de constante, donc est nulle ! Énième rappel : on n'écrit pas $[T(f)(x)]'$ mais $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}T(f)(x)$ ou, mieux, $T(f)'(x)$. Soyez vigilants.
Il ne faut pas confondre $T(f)'$ et $T(f')$.
J'ai lu plusieurs fois : «L'intégrale de f est dérivable». Une intégrale est un nombre ! Vous devez mémoriser précisément l'énoncé du théorème fondamental de l'analyse.
La notation T' n'a pas de sens.

6c) Écrire «Soit $x \in I$. $f \in \operatorname{Ker} T$ si et seulement si $\int_0^x \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$» est une erreur préoccupante. La proposition «$f \in \operatorname{Ker} T$» ne dépend pas de x, il convient de quantifier x à l'intérieur. Il est inquiétant de voir de telles erreurs à ce stade de l'année : c'est tout le travail du premier semestre qui n'a pas été bien fait. Si c'est votre cas : mettez-vous y **VITE**.

7a) Quand on borne f, on majore $|f|$. Il est maladroit de minorer et de majorer f.

7b) J'ai lu «Soit $x > 0$, $\ln(x) \leqslant t \leqslant x$ dont par encadrement $t \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$» (ou des variations de cela). Cela n'a aucun sens, et le travail du premier semestre sur la gestion des variables devrait vous conduire à bannir cela.

7c) Il convenait d'appliquer l'inégalité triangulaire (au moins sur $\int$, éventuellement sur $+$, dans le bon ordre).
Attention à la gestion des inégalités, écrire $|T(f)(x)| \leqslant \left| M \int_0^{\ln x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t} + \alpha(x) \int_{\ln x}^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} \right|$ est une erreur grave, qui montre que vous n'avez pas bien compris comment manipuler les inégalités.

Endomorphismes pseudo-inversibles (V2).

L'unicité était montrée à la question **1b**. Pour les questions **2** à **4**, l'analyse devait se faire au brouillon. Il suffisait d'exhiber le candidat pseudo-inverse (et de justifier).

1b) De $g \circ f = g' \circ f$ vous ne pouviez pas passer directement à $g = g'$: f n'est pas supposée inversible, $\mathscr{L}(E)$ n'est pas intègre.

4) Inutile de manipuler des éléments ici, vous pouviez directement faire le calcul sur af et $a^{-1}g$.

5) Il convenait d'observer que si f et g commutent, alors toutes leurs puissances commutent aussi (vu en cours).

7a) Il ne fallait pas oublier de montrer l'unicité de y.

Procédé d'extrapolation de Richardson (V2).

Dans ce problème, on manipulait des o et des O. Il convenait de ne pas les mélanger (et de les noter distinctement).
Il n'y avait aucune hypothèse de régularité sur A, vous ne pouviez ni dériver A, ni utiliser la formule de Taylor-Young.
L'écriture $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + O(x^{n+1})$ est bien un DL à l'ordre n.

1) Il fallait revenir aux définitions des objets manipulés, notamment des o.

5a) Ce n'est pas parce que le DL en 0 d'une fonction est paire que cette fonction est paire.