



Feuille d'exercice n° 26 : **Espaces euclidiens**



**Exercice 1** () Sur  $\mathbb{R}_3[X]$ , on considère les formes bilinéaires suivantes. Dire lesquelles sont des produits scalaires.

- 1)  $\varphi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$
- 2)  $\chi(P, Q) = \int_{-1}^1 (P'(t)Q(t) + P(t)Q'(t)) dt$
- 3)  $\psi(P, Q) = \int_{-1}^1 P'(t)Q'(t) dt + P(0)Q(0).$



**Exercice 2** () À deux polynômes  $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$  et  $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$  de  $\mathbb{R}_2[X]$ , on associe

$$\langle P, Q \rangle = (a_0 + a_1)b_0 + (a_0 + 3a_1)b_1 + 3a_2b_2.$$

Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

**Exercice 3** ( ) Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $\|\cdot\|$  la norme associée. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $v_1, \dots, v_n \in E$ .

Montrer l'inégalité :  $\left\| \sum_{i=1}^n v_i \right\|^2 \leq n \sum_{i=1}^n \|v_i\|^2.$

**Exercice 4** ( ) Soit  $a < b$  deux réels.

- 1) Soient  $f$  et  $g$  deux applications continues de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que :

$$\left( \int_a^b f(t)g(t) dt \right)^2 \leq \int_a^b f^2(t) dt \int_a^b g^2(t) dt.$$

Étudier le cas d'égalité.

- 2) Soit  $f$  une application continue de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que :

$$\left( \int_a^b f(t) dt \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(t) dt.$$

Étudier le cas d'égalité.

**Exercice 5** ( ) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- 1) Montrer que, sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , l'application  $(A, B) \rightarrow \text{tr}(^tAB)$  est un produit scalaire.
- 2) Soit  $N$  la norme associée à ce produit scalaire (on l'appelle *norme de Frobenius*), montrer que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), N(AB) \leq N(A)N(B).$$


- 3) Montrer que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), |\text{tr}(A)| \leq \sqrt{n}N(A).$$


**Exercice 6** Soit  $E$  un espace euclidien, et  $(e_1, \dots, e_n)$  des vecteurs unitaires vérifiant :  $\forall x \in E$ ,  $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2$ .

- 1) Montrer que  $(e_1, \dots, e_n)$  est une famille orthogonale.
- 2) Montrer que  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormale.

*Remarque* : on ne suppose pas que la dimension de l'espace est  $n$ .


**Exercice 7** () Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Montrer les égalités suivantes.


- 1)  $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$
- 2)  $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
- 3)  $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

**Exercice 8** ()

On munit  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  du produit scalaire usuel :  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$ . Déterminer  $F^\perp$ , avec  $F = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$ . Que peut-on en conclure ?

*Indication* : si  $f \in F^\perp$ , on pourra s'intéresser à la fonction  $t \mapsto tf(t)$ .

**Exercice 9** () On sait que l'application  $(A, B) \mapsto \text{tr}(^tAB)$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est un produit scalaire. Calculer l'orthogonal de l'ensemble des matrices diagonales puis celui des matrices symétriques.

**Exercice 10** ()  $\mathbb{R}^3$  est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien. Vérifier que les vecteurs  $e_1 = (1, 0, 1)$ ,  $e_2 = (1, 0, 2)$  et  $e_3 = (1, 1, 1)$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$  et en déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt.

**Exercice 11** () On munit  $\mathbb{R}[X]$  du produit scalaire :  $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ . Existe-t-il  $A \in \mathbb{R}[X]$  tel que :  $\forall P \in \mathbb{R}[X], (P|A) = P(0)$  ?

**Exercice 12** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $p \in \mathcal{L}(E)$  un projecteur. Montrer que  $p$  est orthogonal (c'est-à-dire  $\text{Ker}(p) \perp \text{Im}(p)$ ) si et seulement si :  $\forall x \in E : \|p(x)\| \leq \|x\|$ .

*Indication* : pour montrer une des implications, avec  $k \in \text{Ker } p$  et  $i \in \text{Im } p$ , on pourra considérer le vecteur  $i + \lambda k$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ .


**Exercice 13**

- 1) Montrer qu'un parallélogramme est un rectangle si et seulement si ses diagonales sont de même longueur.
- 2) Montrer qu'un parallélogramme est un losange si et seulement si ses diagonales sont orthogonales.

**Exercice 14** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 2. Soit  $x$  et  $y \in E$ . Montrer les propriétés suivantes.

- 1) Si  $\|x\| = \|y\|$ , alors il existe un hyperplan  $H$  de  $E$  tel que  $y = s(x)$  où  $s$  est la symétrie orthogonale par rapport à  $H$ .
- 2) Si  $\langle x, y \rangle = \|y\|^2$ , alors il existe un hyperplan  $H$  de  $E$  tel que  $y = p(x)$  où  $p$  est la projection orthogonale sur  $H$ .
- 3) Les hyperplans trouvés précédemment sont-ils uniques ?

**Exercice 15** Déterminer  $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (e^x - (ax + b))^2 dx$ .

**Exercice 16** () Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . À tout couple  $(P, Q)$  de  $E$ , on associe  $\langle P, Q \rangle = \int_0^\pi P(\cos t)Q(\cos t)dt$ . On appelle  $k^e$  polynôme de Tchebychev le polynôme défini par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, P_k(\cos \theta) = \cos(k\theta).$$


1) Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définit un produit scalaire sur  $E$ .

2) Montrer que les polynômes de Tchebychev  $P_0, \dots, P_n$  constituent une base orthogonale de  $E$ .

*Bonus : si cela n'est pas clair, montrez l'existence et l'unicité de ces polynômes, déterminer le degré et le coefficient dominant de chacun.*

**Exercice 17** Soit  $E$  un espace euclidien,  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$  qui commutent. On suppose que les matrices de  $f$  et de  $g$  dans une base orthonormée sont respectivement symétriques et antisymétriques.

Montrer que  $\forall u \in E, \langle f(u), g(u) \rangle = 0$ , puis que  $\forall u \in E, \|(f - g)(u)\| = \|(f + g)(u)\|$ .

**Exercice 18** () Soit  $E = \mathbb{R}^3$ , muni de sa structure euclidienne usuelle, soit  $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Déterminer les matrices dans la base  $\mathcal{C}$  des transformations suivantes.

1) La symétrie et la projection orthogonale par rapport au plan d'équation  $x - 2y + 3z = 0$ .

2) La symétrie et la projection orthogonale par rapport à la droite engendrée par le vecteur  $e_1 - 4e_3$ .

**Exercice 19** Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ , et  $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$  une base orthonormale de  $E$ . Soit  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  tels que  $u = \sum_{i=1}^n a_i e_i$  est un vecteur unitaire de  $E$ .


1) Déterminer la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  de la projection orthogonale sur la droite  $D$  engendrée par  $u$ .

2) En déduire les matrices de la projection orthogonale sur  $D^\perp$ , de la symétrie orthogonale par rapport à  $D$  et de la symétrie orthogonale par rapport à  $D^\perp$ .

**Exercice 20** Soit  $f$  un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien  $E$ .

1) Montrer que  $\text{Ker}(f - \text{Id}) = \text{Im}(f - \text{Id})^\perp$ .


2) En déduire que si  $(f - \text{Id})^2 = 0$ , alors  $f = \text{Id}$ .

**Exercice 21** () Déterminer les natures et les éléments caractéristiques des transformations de  $\mathbb{R}^2$  dont les matrices dans la base canonique sont les suivantes.

1)  $A = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$

2)  $B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

3)  $C = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

**Exercice 22** () Caractériser les endomorphismes dont les matrices dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  sont les suivantes.

1)  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

2)  $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

**Exercice 23** Soient  $E$  un espace euclidien orienté de dimension 2,  $r$  une rotation de  $E$  et  $s$  une réflexion de  $E$ . Déterminer  $r \circ s \circ r$  et  $s \circ r \circ s$ .

