

# C4 : Modélisation cinématique des systèmes composés de chaînes de solides

## C4-4 : Cinématique du solide

Émilien DURIF

Lycée La Martinière Monplaisir Lyon  
Classe de MPSI  
5 Janvier 2021

# Plan

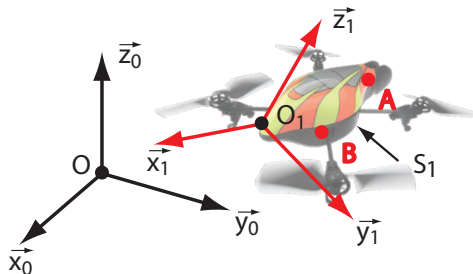
- 1 **Champ cinématique des solide**
  - Torseur cinématique
  - Propriétés
  - Composition des champs cinématiques
  - Champ de vecteur accélération des points d'un solide
  
- 2 **Mouvements particuliers**
  - Mouvement de translation
  - Mouvement de rotation
  - Mouvement de translation/rotation hélicoïdale
  - Mouvement plan

# Plan

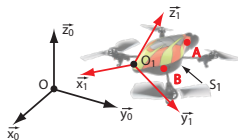
- 1 **Champ cinématique des solide**
  - Torseur cinématique
  - Propriétés
  - Composition des champs cinématiques
  - Champ de vecteur accélération des points d'un solide
- 2 **Mouvements particuliers**
  - Mouvement de translation
  - Mouvement de rotation
  - Mouvement de translation/rotation hélicoïdale
  - Mouvement plan

## Cinématique du solide : torseur cinématique

$$\vec{\Omega}(R_1/R_0) = \vec{\Omega}(S_1/R_0).$$



## Cinématique du solide : torseur cinématique

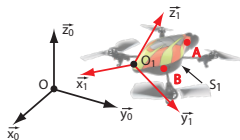


$$\left[ \frac{d\vec{AB}}{dt} \right]_{R_1} = \vec{0}.$$

$$\left[ \frac{d\vec{AB}}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d\vec{AB}}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(S_1/R_0) \wedge \vec{AB}.$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\vec{AB}}{dt} \right]_{R_0} &= \left[ \frac{d\vec{OB}}{dt} \right]_{R_0} - \left[ \frac{d\vec{OA}}{dt} \right]_{R_0} \\ &= \vec{V}(B/R_0) - \vec{V}(A/R_0) \end{aligned}$$

## Cinématique du solide : torseur cinématique

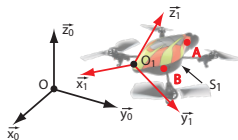


$$\left[ \frac{d\vec{AB}}{dt} \right]_{R_1} = \vec{0}.$$

$$\left[ \frac{d\vec{AB}}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d\vec{AB}}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(S_1/R_0) \wedge \vec{AB}.$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\vec{AB}}{dt} \right]_{R_0} &= \left[ \frac{d\vec{OB}}{dt} \right]_{R_0} - \left[ \frac{d\vec{OA}}{dt} \right]_{R_0} \\ &= \vec{V}(B/R_0) - \vec{V}(A/R_0) \end{aligned}$$

## Cinématique du solide : torseur cinématique



$$\left[ \frac{d\vec{AB}}{dt} \right]_{R_1} = \vec{0}.$$

$$\left[ \frac{d\vec{AB}}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d\vec{AB}}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(S_1/R_0) \wedge \vec{AB}.$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\vec{AB}}{dt} \right]_{R_0} &= \left[ \frac{d\vec{OB}}{dt} \right]_{R_0} - \left[ \frac{d\vec{OA}}{dt} \right]_{R_0} \\ &= \vec{V}(B/R_0) - \vec{V}(A/R_0) \end{aligned}$$

## Cinématique du solide : torseur cinématique

### Changement de point

- On obtient alors la **relation fondamentale de changement de point pour le champ cinématique** pour deux points  $A$  et  $B$  appartenant à un solide quelconque  $S$  :

$$\vec{V}(B/R_0) = \vec{V}(A/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{V}(A/R_0) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}(S/R_0).$$

- On peut étendre cette formule à **deux points quelconques**  $A$  et  $B$  (n'appartenant pas forcément à  $S$ ) avec l'utilisation des vitesses d'entraînement :

$$\vec{V}(B \in S/R_0) = \vec{V}(A \in S/R_0) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}(S/R_0). \quad (1)$$

- On peut parfois appeler cette relation, la **formule de Varignon**.

### Remarque

On remarque alors que les vecteurs vitesses des points d'un solide indéformable vérifient la relation de changement de point du moment d'un torseur. Nous pouvons alors définir le torseur cinématiques.



## Cinématique du solide : torseur cinématique

### Changement de point

- On obtient alors la **relation fondamentale de changement de point pour le champ cinématique** pour deux points  $A$  et  $B$  appartenant à un solide quelconque  $S$  :

$$\vec{V}(B/R_0) = \vec{V}(A/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{V}(A/R_0) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}(S/R_0).$$

- On peut étendre cette formule à **deux points quelconques**  $A$  et  $B$  (n'appartenant pas forcément à  $S$ ) avec l'utilisation des vitesses d'entraînement :

$$\boxed{\vec{V}(B \in S/R_0) = \vec{V}(A \in S/R_0) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}(S/R_0).} \quad (1)$$

- On peut parfois appeler cette relation, la formule de Varignon.*

### Remarque

On remarque alors que les vecteurs vitesses des points d'un solide indéformable vérifient la relation de changement de point du moment d'un torseur. Nous pouvons alors définir le torseur cinématiques.

## Cinématique du solide : torseur cinématique

### Changement de point

- On obtient alors la **relation fondamentale de changement de point pour le champ cinématique** pour deux points  $A$  et  $B$  appartenant à un solide quelconque  $S$  :

$$\vec{V}(B/R_0) = \vec{V}(A/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{V}(A/R_0) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}(S/R_0).$$

- On peut étendre cette formule à **deux points quelconques**  $A$  et  $B$  (n'appartenant pas forcément à  $S$ ) avec l'utilisation des vitesses d'entraînement :

$$\boxed{\vec{V}(B \in S/R_0) = \vec{V}(A \in S/R_0) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}(S/R_0).} \quad (1)$$

- On peut parfois appeler cette relation, la **formule de Varignon**.

### Remarque

On remarque alors que les vecteurs vitesses des points d'un solide indéformable vérifient la relation de changement de point du moment d'un torseur. Nous pouvons alors définir le torseur cinématiques.

## Cinématique du solide : torseur cinématique

### Torseur cinématique

On définit le torseur cinématique du mouvement d'un solide indéformable  $S$  par rapport à un repère  $R_0$ , le torseur qui a pour résultante, le vecteur de rotation instantané  $\overrightarrow{\Omega}(S/R_0)$  et pour moment la vitesse en un point donné  $A$ , dans le mouvement de  $S$  par rapport à  $R_0$ ,  $\vec{V}([ \in A / ])SR_0$ . On le note alors :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S/R_0)} \right\} = {}_A \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{(S/R_0)} \\ \vec{V}([ \in A / ])SR_0 = \vec{V}_A(S/R_0) \end{array} \right\} \quad (2)$$

### Torseur

Un torseur est un outil mathématique qui présente deux composantes vectorielles :

- Une résultante qui est indépendante du point où on l'exprime et que l'on note  $\vec{R} = \overrightarrow{\Omega}_{(S/R_0)}$
- Un moment qui dépend du point où on l'exprime par la formule fondamentale de changement de point et que l'on note  $\vec{M}_A(\vec{R}) = \vec{V}([ \in A / ])SR_0 = \vec{V}_A(S/R_0)$

## Cinématique du solide : torseur cinématique

### Torseur cinématique

On définit le torseur cinématique du mouvement d'un solide indéformable  $S$  par rapport à un repère  $R_0$ , le torseur qui a pour résultante, le vecteur de rotation instantané  $\overrightarrow{\Omega}(S/R_0)$  et pour moment la vitesse en un point donné  $A$ , dans le mouvement de  $S$  par rapport à  $R_0$ ,  $\overrightarrow{V}([ \in A / ])SR_0$ . On le note alors :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S/R_0)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{(S/R_0)} \\ \overrightarrow{V}([ \in A / ])SR_0 = \overrightarrow{V}_A(S/R_0) \end{array} \right\} \quad (2)$$

### Torseur

Un torseur est un outil mathématique qui présente deux composantes vectorielles :

- Une résultante qui est indépendante du point où on l'exprime et que l'on note  $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{\Omega}_{(S/R_0)}$ .
- Un moment qui dépend du point où on l'exprime par la formule fondamentale de changement de point et que l'on note  $\overrightarrow{M}_A(\overrightarrow{R}) = \overrightarrow{V}([ \in A / ])SR_0 = \overrightarrow{V}_A(S/R_0)$ .

## Cinématique du solide : torseur cinématique

### Torseur cinématique

On définit le torseur cinématique du mouvement d'un solide indéformable  $S$  par rapport à un repère  $R_0$ , le torseur qui a pour résultante, le vecteur de rotation instantané  $\overrightarrow{\Omega}(S/R_0)$  et pour moment la vitesse en un point donné  $A$ , dans le mouvement de  $S$  par rapport à  $R_0$ ,  $\overrightarrow{V}([ \in A / ])SR_0$ . On le note alors :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S/R_0)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{(S/R_0)} \\ \overrightarrow{V}([ \in A / ])SR_0 = \overrightarrow{V}_A(S/R_0) \end{array} \right\} \quad (2)$$

### Torseur

Un torseur est un outil mathématique qui présente deux composantes vectorielles :

- Une résultante qui est **indépendante** du point où on l'exprime et que l'on note  $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{\Omega}_{(S/R_0)}$ .
- Un moment qui **dépend du point** où on l'exprime par la **formule fondamentale de changement de point** et que l'on note  $\overrightarrow{M}_A(\overrightarrow{R}) = \overrightarrow{V}([ \in A / ])SR_0 = \overrightarrow{V}_A(S/R_0)$ .

## Cinématique du solide : torseur cinématique

### Torseur cinématique

On définit le torseur cinématique du mouvement d'un solide indéformable  $S$  par rapport à un repère  $R_0$ , le torseur qui a pour résultante, le vecteur de rotation instantané  $\overrightarrow{\Omega}(S/R_0)$  et pour moment la vitesse en un point donné  $A$ , dans le mouvement de  $S$  par rapport à  $R_0$ ,  $\overrightarrow{V}([ \in A / ])SR_0$ . On le note alors :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S/R_0)} \right\} = {}_A \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{(S/R_0)} \\ \overrightarrow{V}([ \in A / ])SR_0 = \overrightarrow{V}_A(S/R_0) \end{array} \right\} \quad (2)$$

### Torseur

Un torseur est un outil mathématique qui présente deux composantes vectorielles :

- Une résultante qui est **indépendante** du point où on l'exprime et que l'on note  $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{\Omega}_{(S/R_0)}$ .
- Un moment qui **dépend du point** où on l'exprime par la **formule fondamentale de changement de point** et que l'on note  $\overrightarrow{M}_A(\overrightarrow{R}) = \overrightarrow{V}([ \in A / ])SR_0 = \overrightarrow{V}_A(S/R_0)$ .

## Cinématique du solide : torseur cinématique

### Remarque

Le point A est lié au solide S. Deux cas peuvent se présenter.

- Lorsque le point appartient physiquement au solide (S), il est lié à tout instant à ce solide. On peut alors calculer sa vitesse avec le vecteur vitesse ou par dérivation vectorielle. On parlera alors de **point matériel**.
- Lorsque le point considéré est lié uniquement au solide à l'instant  $t$  où on calcule son vecteur vitesse, on ne peut calculer sa vitesse qu'en utilisant la loi de composition des vitesses. On parlera alors de **point géométrique**.

## Cinématique du solide : torseur cinématique

### Remarque

Le point A est lié au solide S. Deux cas peuvent se présenter.

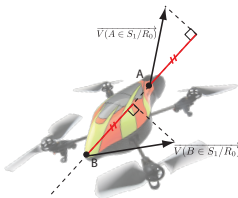
- Lorsque le point appartient physiquement au solide (S), il est lié à tout instant à ce solide. On peut alors calculer sa vitesse avec le vecteur vitesse ou par dérivation vectorielle. On parlera alors de **point matériel**.
- Lorsque le point considéré est lié uniquement au solide à l'instant  $t$  où on calcule son vecteur vitesse, on ne peut calculer sa vitesse qu'en utilisant la loi de composition des vitesses. On parlera alors de **point géométrique**.



## Cinématique du solide : torseur cinématique

### Equiprojectivité

$$\vec{V}([\in A/]S_1 R_0 \cdot \vec{AB} = \vec{V}([\in B/]S_1 R_0 \cdot \vec{AB} \quad (3)$$



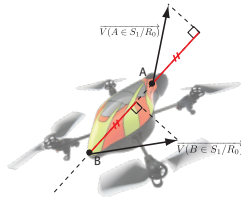
### Remarque

Utile pour les problèmes de cinématique graphique.

## Cinématique du solide : torseur cinématique

### Equiprojectivité

$$\vec{V}([\in A/]S_1 R_0) \cdot \vec{AB} = \vec{V}([\in B/]S_1 R_0) \cdot \vec{AB} \quad (3)$$



### Remarque

Utile pour les problèmes de **cinématique graphique**.

## Cinématique du solide : torseur cinématique

### Axe central

- Un **point central** d'un torseur est un point où le moment résultant a même direction que la résultante générale.
- L'**axe central** d'un torseur est la droite constituée par l'ensemble des points centraux. Il a même direction que la résultante du torseur. L'axe central n'existe que si la résultante du torseur n'est pas nulle.
- Supposons un torseur défini en un point  $A$  du mouvement de  $S_1/R_0$  :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_1/R_0)} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}} \\ \overrightarrow{V}([ \in A/ ]) S_1 R_0 \end{array} \right\}$$

- La projection du point  $A$  sur l'axe central  $H$  est obtenu par la relation suivante :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}} \wedge \overrightarrow{V}([ \in A/ ]) S_1 R_0}{\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}}^2} \quad (4)$$

## Cinématique du solide : torseur cinématique

### Axe central

- Un **point central** d'un torseur est un point où le moment résultant a même direction que la résultante générale.
- L'**axe central** d'un torseur est la droite constituée par l'ensemble des points centraux. Il a même direction que la résultante du torseur. L'axe central n'existe que si la résultante du torseur n'est pas nulle.
- Supposons un torseur défini en un point  $A$  du mouvement de  $S_1/R_0$  :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_1/R_0)} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}} \\ \overrightarrow{V}([ \in A/ ]) S_1 R_0 \end{array} \right\}$$

- La projection du point  $A$  sur l'axe central  $H$  est obtenu par la relation suivante :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}} \wedge \overrightarrow{V}([ \in A/ ]) S_1 R_0}{\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}}^2} \quad (4)$$

## Cinématique du solide : torseur cinématique

### Axe central

- Un **point central** d'un torseur est un point où le moment résultant a même direction que la résultante générale.
- L'**axe central** d'un torseur est la droite constituée par l'ensemble des points centraux. Il a même direction que la résultante du torseur. L'axe central n'existe que si la résultante du torseur n'est pas nulle.
- Supposons un torseur défini en un point  $A$  du mouvement de  $S_1/R_0$  :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_1/R_0)} \right\} = {}_A \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}} \\ \overrightarrow{V}([ \in A / ]) S_1 R_0 \end{array} \right\}$$

- La projection du point  $A$  sur l'axe central  $H$  est obtenu par la relation suivante :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}} \wedge \overrightarrow{V}([ \in A / ]) S_1 R_0}{\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}}^2} \quad (4)$$



## Cinématique du solide : torseur cinématique

### Axe central

- Un **point central** d'un torseur est un point où le moment résultant a même direction que la résultante générale.
  - L'**axe central** d'un torseur est la droite constituée par l'ensemble des points centraux. Il a même direction que la résultante du torseur. L'axe central n'existe que si la résultante du torseur n'est pas nulle.
- Supposons un torseur défini en un point  $A$  du mouvement de  $S_1/R_0$  :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_1/R_0)} \right\} = {}_A \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}} \\ \overrightarrow{V}([ \in A / ]) S_1 R_0 \end{array} \right\}$$

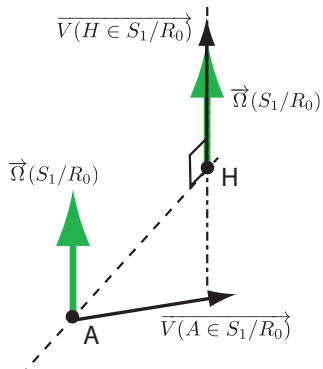
- La projection du point  $A$  sur l'axe central  $H$  est obtenu par la relation suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}} \wedge \overrightarrow{V}([ \in A / ]) S_1 R_0}{\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}}^2}} \quad (4)$$

## Cinématique du solide : torseur cinématique

### Axe central

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}} \wedge \overrightarrow{V([ \in A / ] ) S_1 R_0}}{\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}}^2}$$



## Cinématique du solide : composition des champs cinématiques

[ Composition des champs cinématiques] On peut décomposer un champ cinématique à l'aide des torseurs en effectuant une relation de Chasles par des solides successifs. Soit  $S_1, S_2, \dots, S_n$  un ensemble de solides indéformables :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_n/S_0)} \right\} = \left\{ \mathcal{V}_{(S_n/S_{n-1})} \right\} + \left\{ \mathcal{V}_{(S_{n-1}/S_{n-2})} \right\} + \dots + \left\{ \mathcal{V}_{(S_1/S_0)} \right\} \quad (5)$$

Il en découle une décomposition en :

- Vecteur rotation instantané :

$$\vec{\Omega}_{(S_n/S_0)} = \vec{\Omega}_{(S_n/S_{n-1})} + \vec{\Omega}_{(S_{n-1}/S_{n-2})} + \dots + \vec{\Omega}_{(S_1/S_0)} \quad (6)$$

- Vecteur vitesse en un même point quelconque  $A$  :

$$\vec{V}(A \in S_n/S_0) = \vec{V}(A \in S_n/S_{n-1}) + \vec{V}(A \in S_{n-1}/S_{n-2}) + \dots + \vec{V}(A \in S_1/S_0) \quad (7)$$



## Cinématique du solide : champ d'accélération

### Champ d'accélération

Le relation de changement de point entre A et B pour un champ d'accélération d'un solide  $S_1$  par rapport à un repère  $R_0$  est donnée par :

$$\vec{a}(B/R_0) = \vec{a}(A/R_0) + \left[ \frac{d}{dt} \vec{\Omega}(S_1/R_0) \right]_{R_0} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}(S_1/R_0) \wedge \left( \vec{\Omega}(S_1/R_0) \wedge \overrightarrow{AB} \right).$$

### Attention

Un champ d'accélération n'est pas un champ de moment, c'est à dire qu'il ne vérifie pas les propriétés d'équiprojectivité et il ne peut pas être décrit par un torseur.

## Cinématique du solide : champ d'accélération

### Champ d'accélération

Le relation de changement de point entre A et B pour un champ d'accélération d'un solide  $S_1$  par rapport à un repère  $R_0$  est donnée par :

$$\vec{a}(B/R_0) = \vec{a}(A/R_0) + \left[ \frac{d}{dt} \vec{\Omega}(S_1/R_0) \right]_{R_0} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}(S_1/R_0) \wedge \left( \vec{\Omega}(S_1/R_0) \wedge \overrightarrow{AB} \right).$$

### Attention

Un champ d'accélération n'est pas un champ de moment, c'est à dire qu'il ne vérifie pas les propriétés d'équiprojectivité et il ne peut pas être décrit par un torseur.

# Plan

- 1 Champ cinématique des solide
  - Torseur cinématique
  - Propriétés
  - Composition des champs cinématiques
  - Champ de vecteur accélération des points d'un solide
- 2 Mouvements particuliers
  - Mouvement de translation
  - Mouvement de rotation
  - Mouvement de translation/rotation hélicoïdale
  - Mouvement plan

## Mouvements particuliers des solides : mouvement de translation

### Mouvement de translation

Un solide  $S_1$  est en mouvement de **translation** par rapport à  $R_0$  si l'ensemble des points de  $S_1$  ont la même vitesse à l'instant  $t$  par rapport à  $R_0$ .

Le vecteur de rotation instantané associé à ce torseur est nul :  $\overrightarrow{\Omega}(S_1/R_0) = \vec{0}$ . Il s'agit donc d'un **torseur couple** qui est indépendant du point où on l'exprime :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_1/R_0)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{V}([ \in A / ] ) S_1 R_0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{V}([ \in B / ] ) S_1 R_0 \end{array} \right\} \quad (8)$$

## Mouvements particuliers des solides : mouvement de translation

### translation rectiligne

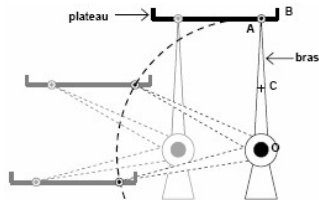
Un mouvement de translation de  $S_1$  par rapport à  $R_0$  est dit de **translation rectiligne** si la trajectoire de tous les points de  $S_1$  par rapport à  $R_0$  est une **droite**. Dans ce cas  $\vec{V}([ \in A / ])_{S_1 R_0}$  a pour direction la trajectoire du point A.

### Mouvement de translation circulaire

Un mouvement de  $S_1$  par rapport à  $R_0$  est dit de **translation circulaire** si la trajectoire de tous les points de  $S_1$  sont des **cercles**.



Translation rectiligne



Translation circulaire

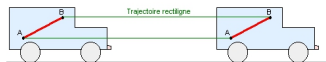
## Mouvements particuliers des solides : mouvement de translation

### translation rectiligne

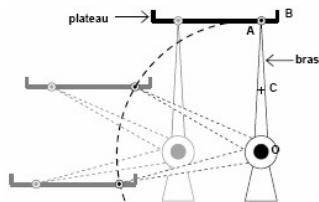
Un mouvement de translation de  $S_1$  par rapport à  $R_0$  est dit de **translation rectiligne** si la trajectoire de tous les points de  $S_1$  par rapport à  $R_0$  est une **droite**. Dans ce cas  $\vec{V}([ \in A / ])_{S_1 R_0}$  a pour direction la trajectoire du point A.

### Mouvement de translation circulaire

Un mouvement de  $S_1$  par rapport à  $R_0$  est dit de **translation circulaire** si la trajectoire de tous les points de  $S_1$  sont des **cercles**.



Translation rectiligne



Translation circulaire

## Mouvements particuliers des solides : mouvement de rotation

### Mouvement de rotation

- Un solide  $S_1$  est en **mouvement de rotation** par rapport à  $R_0$  autour d'un axe  $(A, \vec{u})$  si tous les points appartenant à l'axe  $(A, \vec{u})$  ont une vitesse nulle par rapport à  $R_0$ .
- Le vecteur de rotation instantané  $(\vec{\Omega}(S_1/S_0))$  est alors colinéaire à la direction  $\vec{u}$  :

$$\vec{\Omega}(S_1/S_0) \wedge \vec{u} = \vec{0}$$

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_1/R_0)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(S_1/S_0) \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad (9)$$

$$\forall A \in \vec{u}.$$

- Ce torseur est alors "**un glisseur**" car il existe des points pour lesquels le moment du torseur cinématique est nul.
- Ces points appartiennent à l'axe de rotation qui est l'**axe central du torseur cinématique associé**.

## Mouvements particuliers des solides : mouvement de rotation

### Mouvement de rotation

- Un solide  $S_1$  est en **mouvement de rotation** par rapport à  $R_0$  autour d'un axe  $(A, \vec{u})$  si tous les points appartenant à l'axe  $(A, \vec{u})$  ont une vitesse nulle par rapport à  $R_0$ .
- Le vecteur de rotation instantané  $(\vec{\Omega}(S_1/S_0))$  est alors colinéaire à la direction  $\vec{u}$  :

$$\vec{\Omega}(S_1/S_0) \wedge \vec{u} = \vec{0}$$

$$\left\{ \gamma_{(S_1/R_0)} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}(S_1/S_0) \\ \vec{0} \end{matrix} \right\} \quad (9)$$

$$\forall A \in \vec{u}.$$

- Ce torseur est alors "un glisseur" car il existe des points pour lesquels le moment du torseur cinématique est nul.
- Ces points appartiennent à l'axe de rotation qui est l'axe central du torseur cinématique associé.



## Mouvements particuliers des solides : mouvement de rotation

### Mouvement de rotation

- Un solide  $S_1$  est en **mouvement de rotation** par rapport à  $R_0$  autour d'un axe  $(A, \vec{u})$  si tous les points appartenant à l'axe  $(A, \vec{u})$  ont une vitesse nulle par rapport à  $R_0$ .
- Le vecteur de rotation instantané  $(\vec{\Omega}(S_1/S_0))$  est alors colinéaire à la direction  $\vec{u}$  :

$$\vec{\Omega}(S_1/S_0) \wedge \vec{u} = \vec{0}$$

$$\left\{ \gamma_{(S_1/R_0)} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}(S_1/S_0) \\ \vec{0} \end{matrix} \right\} \quad (9)$$

$$\forall A \in \vec{u}.$$

- Ce torseur est alors "**un glisseur**" car il existe des points pour lesquels le moment du torseur cinématique est nul.
- Ces points appartiennent à l'axe de rotation qui est l'axe central du torseur cinématique associé.



## Mouvements particuliers des solides : mouvement de rotation

### Mouvement de rotation

- Un solide  $S_1$  est en **mouvement de rotation** par rapport à  $R_0$  autour d'un axe  $(A, \vec{u})$  si tous les points appartenant à l'axe  $(A, \vec{u})$  ont une vitesse nulle par rapport à  $R_0$ .
- Le vecteur de rotation instantané  $(\vec{\Omega}(S_1/S_0))$  est alors colinéaire à la direction  $\vec{u}$  :

$$\vec{\Omega}(S_1/S_0) \wedge \vec{u} = \vec{0}$$

$$\left\{ \gamma_{(S_1/R_0)} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}(S_1/S_0) \\ \vec{0} \end{matrix} \right\} \quad (9)$$

$$\forall A \in \vec{u}.$$

- Ce torseur est alors "**un glisseur**" car il existe des points pour lesquels le moment du torseur cinématique est nul.
- Ces points appartiennent à l'axe de rotation qui est **l'axe central du torseur cinématique associé**.

## Mouvements particuliers des solides : mouvement de translation/rotation hélicoïdale

### Mouvement de translation/rotation hélicoïdale

- Un mouvement de **translation/rotation hélicoïdale** est la superposition d'un mouvement de rotation autour d'un axe  $(A, \vec{u})$  et de translation suivant la direction  $\vec{u}$ .
- Ces deux mouvement sont liés par le paramètre  $p$  qui représente le **pas hélicoïdal** et s'exprime en  $m.rad^{-1}$ .
- Le torseur cinématique associé à ce mouvement pour un solide  $S_1$  par rapport à  $R_0$  est donné par :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_1/R_0)} \right\} = {}_A \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(S_1/S_0) = \Omega \cdot \vec{u} \\ \vec{V}([ \in A / ])_{S_1 R_0} = p \Omega \cdot \vec{u} \end{array} \right\} \quad (10)$$



## Mouvements particuliers des solides : mouvement de translation/rotation hélicoïdale

### Mouvement de translation/rotation hélicoïdale

- Un mouvement de **translation/rotation hélicoïdale** est la superposition d'un mouvement de rotation autour d'un axe  $(A, \vec{u})$  et de translation suivant la direction  $\vec{u}$ .
- Ces deux mouvement sont liés par le paramètre  $p$  qui représente le **pas hélicoïdal** et s'exprime en  $m.rad^{-1}$ .
- Le torseur cinématique associé à ce mouvement pour un solide  $S_1$  par rapport à  $R_0$  est donné par :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_1/R_0)} \right\} = {}_A \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(S_1/S_0) = \Omega \cdot \vec{u} \\ \vec{V}([ \in A / ])_{S_1 R_0} = p \Omega \cdot \vec{u} \end{array} \right\} \quad (10)$$

## Mouvements particuliers des solides : mouvement de translation/rotation hélicoïdale

### Mouvement de translation/rotation hélicoïdale

- Un mouvement de **translation/rotation hélicoïdale** est la superposition d'un mouvement de rotation autour d'un axe  $(A, \vec{u})$  et de translation suivant la direction  $\vec{u}$ .
- Ces deux mouvement sont liés par le paramètre  $p$  qui représente le **pas hélicoïdal** et s'exprime en  $m.rad^{-1}$ .
- Le torseur cinématique associé à ce mouvement pour un solide  $S_1$  par rapport à  $R_0$  est donné par :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_1/R_0)} \right\} = {}_A \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(S_1/S_0) = \Omega \cdot \vec{u} \\ \vec{V}([ \in A / ] )_{S_1 R_0} = p \Omega \cdot \vec{u} \end{array} \right\} \quad (10)$$

## Mouvements particuliers des solides : mouvement plan

Soit un solide  $S_1$ , de repère lié  $R_1$ , en mouvement dans un repère  $R_0$ .

### Mouvement plan

On dit que  $S_1$  a un **mouvement plan** dans  $R_0$  si chaque point  $M \in S_1$  se déplace parallèlement à un plan  $P_0$  lié à  $R_0$ . Autrement dit, si  $\vec{n}$  est la normale à  $P_0$ , alors :

$$\vec{V}([ \in M / ])_{S_1 R_0} \cdot \vec{n} = 0 \quad \forall M \in S_1$$

### Remarque

Dans le cas d'un mouvement plan (par exemple dans le plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ ), le torseur cinématique de  $S_1$  par rapport à  $R_0$  se ramène à :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_1/R_0)} \right\} = \underset{\forall M}{\left\{ \begin{array}{cc} 0 & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega_z & 0 \end{array} \right\}}_{R_0}$$

On remarquera ainsi que  $\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}} \perp \vec{V}([ \in M / ])_{S_1 R_0}$ , et donc que ce torseur est un glisseur.

## Mouvements particuliers des solides : mouvement plan

Soit un solide  $S_1$ , de repère lié  $R_1$ , en mouvement dans un repère  $R_0$ .

### Mouvement plan

On dit que  $S_1$  a un **mouvement plan** dans  $R_0$  si chaque point  $M \in S_1$  se déplace parallèlement à un plan  $P_0$  lié à  $R_0$ . Autrement dit, si  $\vec{n}$  est la normale à  $P_0$ , alors :

$$\vec{V}([ \in M / ]) S_1 R_0 \cdot \vec{n} = 0 \quad \forall M \in S_1$$

### Remarque

Dans le cas d'un mouvement plan (par exemple dans le plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ ), le torseur cinématique de  $S_1$  par rapport à  $R_0$  se ramène à :

$$\left\{ \gamma_{(S_1/R_0)} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega_z & 0 \end{array} \right\}_{R_0}$$

On remarquera ainsi que  $\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}} \perp \vec{V}([ \in M / ]) S_1 R_0$ , et donc que ce torseur est un glisseur.

## Mouvements particuliers des solides : mouvement plan

### exemple

cas d'un mouvement dans le plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ , le torseur cinématique de  $S_1$  par rapport à  $R_0$  est donné par :



## Mouvements particuliers des solides : mouvement plan

### exemple

cas d'un mouvement dans le plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ , le torseur cinématique de  $S_1$  par rapport à  $R_0$  est donné par :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_1/R_0)} \right\} = \underset{\forall M}{\left\{ \begin{array}{cc} 0 & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega_z & 0 \end{array} \right\}}_{R_0}$$

## Mouvements particuliers des solides : mouvement plan

### exemple

cas d'un mouvement dans le plan  $(O, \vec{z}_0, \vec{x}_0)$ , le torseur cinématique de  $S_1$  par rapport à  $R_0$  est donné par :

## Mouvements particuliers des solides : mouvement plan

### exemple

cas d'un mouvement dans le plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ , le torseur cinématique de  $S_1$  par rapport à  $R_0$  est donné par :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_1/R_0)} \right\} = \underset{\forall M}{\left\{ \begin{array}{cc} 0 & V_x \\ \omega_y & 0 \\ 0 & V_z \end{array} \right\}}_{R_0}$$

## Mouvements particuliers des solides : mouvement plan

### exemple

cas d'un mouvement dans le plan  $(O, \vec{z}_0, \vec{x}_0)$ , le torseur cinématique de  $S_1$  par rapport à  $R_0$  est donné par :

## Mouvements particuliers des solides : mouvement plan

### exemple

cas d'un mouvement dans le plan  $(O, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , le torseur cinématique de  $S_1$  par rapport à  $R_0$  est donné par :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_1/R_0)} \right\} = \underset{\forall M}{\left\{ \begin{array}{cc} \omega_x & 0 \\ 0 & V_y \\ 0 & V_z \end{array} \right\}}_{R_0}$$

## Mouvements particuliers des solides : mouvement plan (C.I.R.)

### Centre instantané de rotation (C.I.R.)

On appelle “**centre instantané de rotation**” (noté familièrement “**C.I.R.**”) le point d’intersection entre l’axe central ( $\Delta$ ) et le plan du mouvement.

On désignera par “ $I_{10}$ ” le CIR du mouvement de  $S_1$  par rapport à  $R_0$  .

### Remarque

Pendant un instant  $\Delta t$  infiniment bref, le centre instantané de rotation représente le point autour duquel  $S_1$  a un mouvement de rotation. Cependant, à l’instant suivant, il peut avoir changé de position.

## Mouvements particuliers des solides : mouvement plan (C.I.R.)

### Centre instantané de rotation (C.I.R.)

On appelle “**centre instantané de rotation**” (noté familièrement “**C.I.R.**”) le point d’intersection entre l’axe central ( $\Delta$ ) et le plan du mouvement.

On désignera par “ $I_{10}$ ” le CIR du mouvement de  $S_1$  par rapport à  $R_0$  .

### Remarque

Pendant un instant  $\Delta t$  infiniment bref, le centre instantané de rotation représente le point autour duquel  $S_1$  a un mouvement de rotation. Cependant, à l’instant suivant, il peut avoir changé de position.

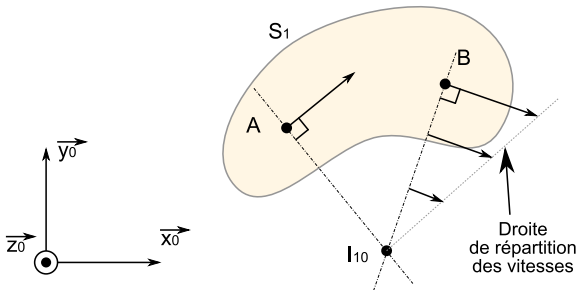
## Mouvements particuliers des solides : mouvement plan (C.I.R.)

### Propriétés

- Soit  $S_1$ , un solide en mouvement dans un repère  $R_0$ , et ayant pour CIR " $I_{10}$ ". Alors, pour tout  $P \in S_1$ , on a :

$$\vec{V}([ \in P / ] S_1 R_0 \cdot \overrightarrow{PI_{10}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V}([ \in P / ] S_1 R_0 \perp \overrightarrow{PI_{10}} \quad (11)$$

- La norme des vecteurs vitesse est proportionnelle à la distance au CIR.
- On en déduit que la vitesse sur le CIR est nulle.





## Mouvements particuliers des solides : cas des mouvements de translation

### cas des mouvements de translation

Lorsque le mouvement relatif des deux solides est une translation, le CIR **n'existe pas**. Cependant, on peut considérer qu'il est comme rejeté à l'infini, perpendiculairement à la direction de la translation.

