

Feuille d'exercice n° 20 : **Intégration - indications**

Exercice 1 Élémentaire, revenez aux définitions quantifiées.

Exercice 2 Très proche de l'exemple traité en cours (fonction inverse).

Exercice 3 Élémentaire sur chaque intervalle de la forme $[0, a]$ et $[a, +\infty[$. Il faut ensuite recoller les morceaux, mais cela ne se fait pas si simplement que ça !

Exercice 4 Sur un intervalle de longueur 1, la fonction f peut-elle descendre arbitrairement bas ?

Exercice 5 Dans le cas où $\int_a^b g > 0$, divisez par $\int_a^b g$. On veut démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \dots$. C'est un cadre connu !

Exercice 6 Il suffit de voir que $\frac{1}{2} = \int_0^1 g$, où g est une fonction bien connue et très utile chaque fois que l'on parle de point fixe.

Exercice 7 Traitez d'abord l'exercice n°2.2.14 du poly de cours (version en ligne). Ensuite, si f a au plus n zéros distincts, que peut-on dire de f entre deux zéros ?

Exercice 8 Vous pouvez toujours considérer $-f$. « f positive » équivaut à « $f = |f|$ ».

Exercice 9 Élémentaire, tout se fait directement.

Exercice 10 Commencez par faire un dessin. Cherchez à encadrer l'intégrale par deux fonctions en escalier.

Exercice 11 Commencez par faire un dessin. Cherchez à encadrer l'intégrale par deux fonctions en escalier.

Exercice 12 1 et 3 : un encadrement direct suffit.
2 : il va falloir faire une petite transformation !

Exercice 13 1) à 5) classique.

6) deux méthodes sont possibles : poser le changement de variable $x = \tan u$, ou remarquer que $\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{2} \cdot \frac{2x}{(1+x^2)^2}$ et faire une IPP pour le second membre.

Exercice 14 1) Remarquer que $\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \times e^{\operatorname{Arcsin} x} = x \times \left(\frac{e^{\operatorname{Arcsin} x}}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, ce qui permet de faire deux IPP différentes.

2), 3), 9), IPP.

4), écrire $x = \frac{1}{2}(2(x+2)) - 2$.

5), poser $u = \sqrt{1+x}$.

6), poser $u = \sqrt{x-1}$.

7), 8), changement de variable.

Exercice 15 Calcul brutal.

- Exercice 16** Ne cherchez pas de majorations trop compliquées.
- Exercice 17** Exercice assez élémentaire. Pensez à intégrer par parties.
- Exercice 18** Revenez explicitement au théorème fondamental du calcul différentiel.
- Exercice 19** 3b : il va falloir encadrer terme à terme.
- Exercice 20** Très proche des intégrales de Wallis traitées dans le DM n°14.
5 : commencez par montrer que $f(x) \sim f(x+1)$.
- Exercice 21** 1 : epsiloniser.
2 : se ramener au 1.
- Exercice 22** Il suffit de trouver deux points a et b entre lesquels appliquer la formule.
- Exercice 23** Passez par les complexes.
- Exercice 24** C'est un rappel de cours sur les fractions rationnelles.
- Exercice 25** Très proche de l'exercice n°7.1.5 du cours d'intégration. Veillez à le rédiger correctement.
- Exercice 26** Très proche de l'exercice n°7.1.5 du cours d'intégration. Veillez à le rédiger correctement.
- Exercice 27** Il y a un (petit) piège ! Vous savez résoudre cet exercice depuis le mois d'octobre.
- Exercice 28** On aimerait revenir à une somme et voir une somme de Riemann.
Pour l'équivalent, utilisez le résultat du cours : « si f est \mathcal{C}^1 , l'erreur d'approximation de \int_a^b par les sommes de Riemann est un $O(1/n)$ ».
- Exercice 29** On aimerait revenir à une somme et voir une somme de Riemann.
- Exercice 30** On veut déterminer un équivalent de u_n . Vous pouvez appliquer deux méthodes du cours.