

II Fonctions usuelles

15 novembre 2022

Dans tout ce chapitre, A désigne une partie de \mathbb{R} et f une fonction de A dans \mathbb{R} .

1 Rappels d'analyse.

On rappelle dans ce chapitre les notions fondamentales d'analyse réelle vues dans le secondaire.

1.1 Régularité de fonctions.

On rappelle succinctement ici les notions de continuité et de dérivabilité. Ces notions seront définies et travaillées en profondeur ultérieurement.

Définition 1.1.1 (Continuité).

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in A$. La fonction f est continue en a si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$.

La fonction f est continue sur A si f est continue en tout point de A .

Définition 1.1.2 (Dérivabilité).

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in A$. La fonction f est dérivable en a si la quantité $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie en a . Cette limite est notée $f'(a)$, i.e. si f est dérivable en a ,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a).$$

La fonction f est dérivable sur A si f est dérivable en tout point de A . La fonction f' est alors appelée *fonction dérivée de f* .

Si f est dérivable et si f' est dérivable, alors f est dite *deux fois dérivable*, et l'on note $f'' = (f')'$, que l'on appelle *fonction dérivée seconde de f* .

Remarque 1.1.3.

La quantité $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est la pente de la corde à la courbe de f reliant les points d'abscisses a et x .

Remarque 1.1.4.

On peut aussi dériver des expressions, avec le symbole $\frac{d}{d[\text{variable}]}$. On pourra par exemple écrire

$$\frac{d}{dx}(x^{42}) = 42x^{41},$$

ou

$$\frac{d}{dt}(3t^2 + 1515) = 6t.$$



On s'interdira absolument d'écrire un $'$ sur une expression pour signifier sa dérivation. Ainsi, $(\sin x)'$ ou $(x^2 + x - 1)'$ sont des écritures incorrectes, et on écrira $\sin'(x)$ ou $\frac{d}{dx}(x^2 + x - 1)$.

Remarque 1.1.5.

Lorsque l'on dérive une expression dépendant de plusieurs variables x, y, z, t, α etc, on pourra utiliser les symboles $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \alpha}$ etc, pour signifier que l'on dérive l'expression considérée par rapport à la variable notée, les autres variables étant supposées fixées (ce sont donc des constantes). On parle alors de *dérivation partielle* par rapport à une variable.

Bien entendu, il conviendra de se poser la question de la dérivabilité de ladite expression, par rapport à la variable considérée. Ces techniques seront détaillées en fin d'année.

Exemple 1.1.6.

Les deux dérivées partielles de l'expression $x^2y - e^{y-x}$ sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(x^2y - e^{y-x}) &= 2xy + e^{y-x} \\ \frac{\partial}{\partial y}(x^2y - e^{y-x}) &= x^2 - e^{y-x} \end{aligned}$$

Exercice 1.1.7.

Déterminer les dérivées partielles suivantes. On se reportera au besoin à la partie 3 pour les rappels sur les formules de dérivation.

- $\frac{\partial}{\partial x}(xe^{-(x^2+y^2)})$
- $\frac{\partial}{\partial t}(3xt^2 - xyt + 2x \sin(y))$

3. $\frac{\partial}{\partial z}(xe^y + ye^z + ze^x)$
4. $\frac{\partial}{\partial x}(\alpha \sin(y + z))$

Proposition 1.1.8.

Une fonction dérivable en un point est continue en ce point. Une fonction dérivable est donc continue.

Remarque 1.1.9.

Comme le montrent les exemples des fonctions « valeur absolue » et « racine carrée », la réciproque est fautive : il existe des fonctions continues, et non dérivables.

Proposition 1.1.10.

Soit $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables, soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1. La fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable et

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

2. La fonction fg est dérivable et

$$(fg)' = fg' + f'g.$$

Exemple 1.1.11.

$$\frac{d}{dx}(\cos(x) \sin(x)) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

1.2 Parité, imparité, périodicité.

Définition 1.2.1.

Soit $A \subset \mathbb{R}$, soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

1. On dit que f est *paire* si, pour tout $x \in A$,

$$-x \in A \quad \text{et} \quad f(-x) = f(x).$$

2. On dit que f est *impaire* si, pour tout $x \in A$,

$$-x \in A \quad \text{et} \quad f(-x) = -f(x).$$

Remarque 1.2.2 (Réduction du domaine d'étude).

Il suffit d'étudier une fonction paire ou impaire sur $\mathbb{R}_+ \cap A$ pour obtenir toutes les informations nécessaires sur cette fonction.



Une fonction n'est pas toujours paire ou impaire. Le contraire de « paire » n'est pas « impaire ».

Exemple 1.2.3.

Sur \mathbb{R} , $x \mapsto x^2$ est paire, $x \mapsto x^3$ est impaire et $x \mapsto x^2 + x$ n'est ni paire ni impaire.

Exercice 1.2.4.

Déterminer toutes les fonctions à la fois paires et impaires.

Remarque 1.2.5.

Une fonction impaire définie en 0 est forcément nulle en 0.

Proposition 1.2.6.

Soit $A \subset \mathbb{R}$, soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

1. Si f est paire, alors f' est impaire.
2. Si f est impaire, alors f' est paire.

Démonstration.

Dans le cas où f est impaire, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -f(-x)$.

La fonction f est la fonction $x \mapsto -f(-x)$ sont donc égales, et dérivables. Leurs dérivées sont donc égales. On dérive donc de part et d'autre : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -(-f'(-x)) = f'(-x)$.

On procède de même dans le cas où f est paire. \square

Définition 1.2.7.

Soit $A \subset \mathbb{R}$, soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, soit $T > 0$. On dit que f est T -périodique si, pour tout $x \in A$,

$$x + T \in A \quad \text{et} \quad f(x + T) = f(x).$$

Dans ce cas T est appelé **UNE** période de f .

La fonction f est périodique s'il existe $T > 0$ tel que f est T -périodique.

Remarque 1.2.8 (Réduction du domaine d'étude).

Si f est T -périodique et si $a \in A$, il suffit d'étudier f sur $A \cap [a, a + T]$ pour obtenir toutes les informations sur f .



Il n'y a jamais unicité de la période !

Exemple 1.2.9.

Les fonctions constantes, \cos , \sin , \tan , $x \mapsto x - [x]$, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont périodiques.

La fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$, qui vaut 1 sur \mathbb{Q} et 0 sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, est périodique. Tout rationnel strictement positif est une période pour cette fonction.

Toute fonction constante admet tout réel strictement positif comme période.

Proposition 1.2.10.

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $T > 0$ et soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et T -périodique.

Alors, f' est T -périodique.

Démonstration.

Il suffit d'écrire que, pour tout $x \in A$, $f(x) = f(x + T)$, puis de dériver de part et d'autre. \square

Exercice 1.2.11.

Déterminer l'allure de la fonction f paire, 4-périodique et telle que pour tout $x \in [0, 2]$, $f(x) = x$ (cela s'écrit $f|_{[0,2]} = \text{Id}_{[0,2]}$).

1.3 Monotonie.

Définition 1.3.1 (Monotonie au sens large).

Soit $A \subset \mathbb{R}$, soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

1. On dit que f est *croissante* si, pour tout $x, y \in A$, :

$$x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y).$$

2. On dit que f est *décroissante* si, pour tout $x, y \in A$, :

$$x \geq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

3. On dit que f est *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

Définition 1.3.2 (Monotonie stricte).

Soit $A \subset \mathbb{R}$, soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

1. On dit que f est *strictement croissante* si, pour tout $x, y \in A$, :

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

2. On dit que f est *strictement décroissante* si, pour tout $x, y \in A$, :

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

3. On dit que f est *strictement monotone* si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.



Une fonction n'est pas toujours croissante ou décroissante. Le contraire de croissant n'est pas décroissant.

Exemple 1.3.3.

La fonction carré n'est ni croissante, ni décroissante.

Exercice 1.3.4.

Déterminer toutes les fonctions qui sont à la fois croissantes et décroissantes.

Remarque 1.3.5.

Une fonction monotone strictement l'est bien entendu au sens large.

À chaque fois que l'on vous demande d'étudier la monotonie d'une fonction, on attend le résultat le plus précis possible. Si la fonction est croissante strictement mais que vous n'établissez que sa croissance, votre réponse ne pourra être considérée comme complète.

Proposition 1.3.6 (Injectivité d'une fonction strictement croissante).

Soit $A \subset \mathbb{R}$, soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ strictement monotone. Alors, pour tout $x, x' \in A$, si $x \neq x'$, alors $f(x) \neq f(x')$. Ceci est équivalent à dire que, pour tout $x, x' \in A$, si $f(x) = f(x')$, alors $x = x'$.

Notamment, si $y \in \mathbb{R}$, il existe au plus un $x \in A$ vérifiant $y = f(x)$.

Démonstration.

On traite le cas strictement croissant (le cas strictement décroissant se traite de la même manière, ou bien en étudiant $-f$).

Soit $x, x' \in A$ tels que $x \neq x'$. On a soit $x < x'$, dans ce cas $f(x) < f(x')$ par croissance stricte de f , ou $x > x'$, dans ce cas $f(x) > f(x')$. Dans les deux cas, $f(x) \neq f(x')$.

On peut très bien en montrer la contraposée. Soit $x, x' \in A$ tels que $f(x) = f(x')$. On ne peut pas avoir $x < x'$ car sinon on aurait $f(x) < f(x')$, par croissance stricte de f , ni $x > x'$ car sinon $f(x) > f(x')$. Ainsi $x = x'$. \square

Exemple 1.3.7.

La fonction cosinus est strictement croissante sur $[\pi, 3\pi/2]$.

1.4 Lecture de tableaux de variations.

Définition 1.4.1.

Un intervalle est une partie « sans trou » de \mathbb{R} (plus formellement on appelle cela une partie *connexe*), i.e. c'est une partie I qui vérifie : pour tout $x, y \in I$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x \leq t \leq y \Rightarrow t \in I.$$

Le théorème suivant permet de relier le tableau de signes de la dérivée d'une fonction au tableau de variations de la fonction.

Théorème 1.4.2.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

1. f est croissante (resp. décroissante) si et seulement si $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$).
2. La fonction f est constante si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) = 0$.

Remarque 1.4.3.

On déduit de ce théorème que deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.



Il est essentiel que I soit un intervalle pour que l'implication de la droite vers la gauche soit vraie (en revanche pour l'autre implication ce n'est pas nécessaire).

- Exercice 1.4.4.**
1. Trouver une application f non croissante dérivable sur son ensemble de définition, de dérivée positive.
 2. Trouver une application g non constante dérivable sur son ensemble de définition, de dérivée nulle.
 3. Trouver une application h dérivable non décroissante sur son ensemble de définition, de dérivée négative.

Remarque 1.4.5.

Nous avons aussi : si f' est strictement positive (resp. négative), alors f est strictement croissante (resp. décroissante).

Attention, la réciproque est fautive ! Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur \mathbb{R} , bien que sa dérivée s'annule en 0.

Le théorème suivant traduit les flèches continues tracées dans les tableaux de variations.

Théorème 1.4.6 (Théorème de la bijection).

Soit $a < b$ deux réels, soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

1. Si f est strictement croissante, pour tout $y \in [f(a), f(b)]$, il existe un unique $x \in [a, b]$ vérifiant $y = f(x)$. On dit que f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.
2. Si f est strictement décroissante, pour tout $y \in [f(b), f(a)]$, il existe un unique $x \in [a, b]$ vérifiant $y = f(x)$. On dit que f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(b), f(a)]$.

On a des résultats analogues avec un intervalle semi-ouvert ou ouvert (de la forme $]a, b]$, $[a, b[$ ou $]a, b[$), même si a ou b valent $\pm\infty$, mais ces résultats font alors intervenir des limites.

Démonstration.

L'existence d'un tel x provient directement du théorème des valeurs intermédiaires : f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, y est entre $f(a)$ et $f(b)$, donc il existe $x \in [a, b]$ tel que $y = f(x)$.

L'unicité provient de la monotonie stricte, par la proposition 1.3.6. \square

Exercice 1.4.7.

Écrire le théorème 1.4.6 dans le cas où $a \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$.

Justifier, sans faire intervenir la notion de dérivée, que pour tout $y \geq 0$, il existe un unique $x \geq 0$ vérifiant $y = x^2$.

Exercice 1.4.8.

Chercher un contre-exemple au théorème 1.4.6 pour chaque hypothèse que l'on enlève.

Remarque 1.4.9.

L'étude du signe d'une expression se fera systématiquement en la factorisant. Ensuite, si le signe de l'un des facteurs n'est pas évident, il conviendra d'étudier ce facteur (par une étude de fonctions).

Exercice 1.4.10.

Déterminer l'ensemble de définition de $x \mapsto \frac{(x+1)^2}{e^x - 1}$ puis tracer son tableau de variations.

2 Effet d'une transformation sur le graphe.

Soit $A \subset \mathbb{R}$. On considère une application $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, dont on veut étudier les propriétés. Notamment, on peut vouloir représenter le graphe de cette fonction : c'est

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A \text{ et } y = f(x) \right\},$$

que l'on représente, lorsque c'est possible, par une « courbe ».

Proposition 2.0.1.

Soit $a \in \mathbb{R}_+$, on considère des graphes tracés dans le repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Le graphe de la fonction $x \mapsto f(x) + a$ s'obtient en translatant le graphe de f du vecteur $a\vec{j}$ (voir la figure 1).
- Le graphe de la fonction $x \mapsto f(x + a)$ s'obtient en translatant le graphe de f du vecteur $-a\vec{i}$ (voir la figure 2).

- Le graphe de la fonction $x \mapsto f(ax)$ s'obtient en dilatant le graphe de f suivant le vecteur \vec{i} et par le rapport $\frac{1}{a}$ (voir la figure 3).
- Le graphe de la fonction $x \mapsto af(x)$ s'obtient en dilatant le graphe de f suivant le vecteur \vec{j} et par le rapport a (voir la figure 4).
- Le graphe de la fonction $x \mapsto f(-x)$ s'obtient en prenant le symétrique du graphe de f par rapport à l'axe $O\vec{j}$ (voir la figure 5).
- Le graphe de la fonction $x \mapsto -f(x)$ s'obtient en prenant le symétrique du graphe de f par rapport à l'axe $O\vec{i}$ (voir la figure 6).
- Le graphe de la fonction $x \mapsto -f(-x)$ s'obtient en prenant le symétrique du graphe de f par rapport au point O (voir la figure 7).

Démonstration.

On montre le premier cas, les autres sont similaires. Notons Γ le graphe de f , Γ' celui de $x \mapsto f(x) + a$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $(x, y) \in \Gamma' \Leftrightarrow (x, y - a) \in \Gamma$, ce qui est bien le résultat demandé. \square

Remarque 2.0.2.

Le graphe de la fonction $x \mapsto f(a - x)$ s'obtient donc

- soit en translatant le graphe de f du vecteur $a\vec{i}$ puis en prenant le symétrique par rapport à $O\vec{j}$;
- soit en prenant le symétrique du graphe de f par rapport à $O\vec{j}$ puis en le translatant par le vecteur $-a\vec{i}$.

Proposition 2.0.3.

1. Le graphe d'une fonction paire présente une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
2. Le graphe d'une fonction impaire présente une symétrie par rapport à l'origine.
3. Le graphe d'une fonction T -périodique présente un motif de longueur T se répétant (plus formellement, il est invariant par la translation de vecteur $T\vec{i}$).

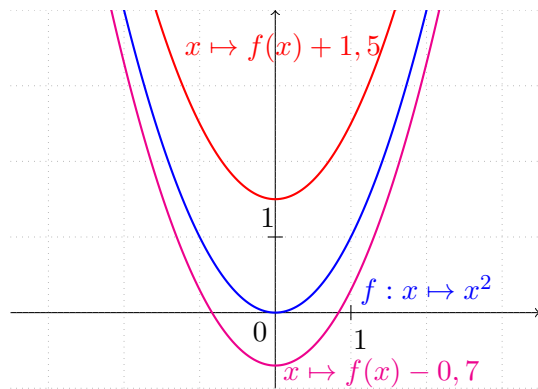


FIGURE 1 – Translation verticale du graphe.

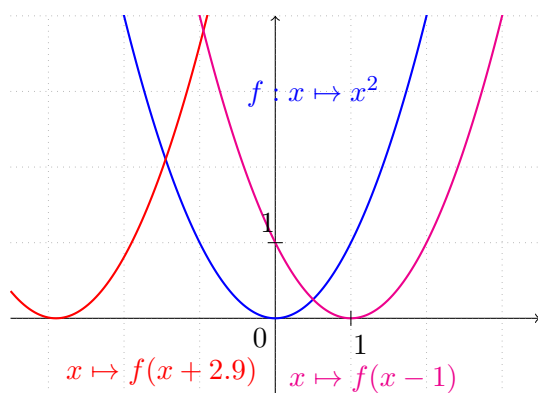


FIGURE 2 – Translation horizontale du graphe.

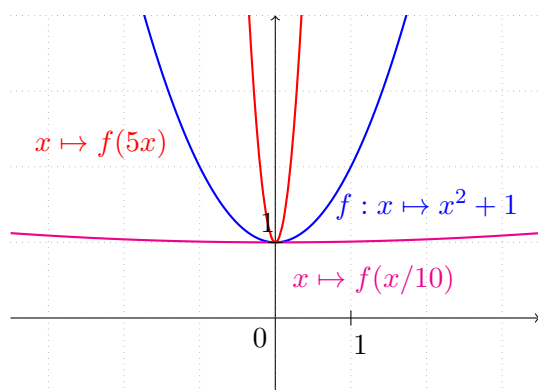


FIGURE 3 – Dilatation horizontale du graphe.

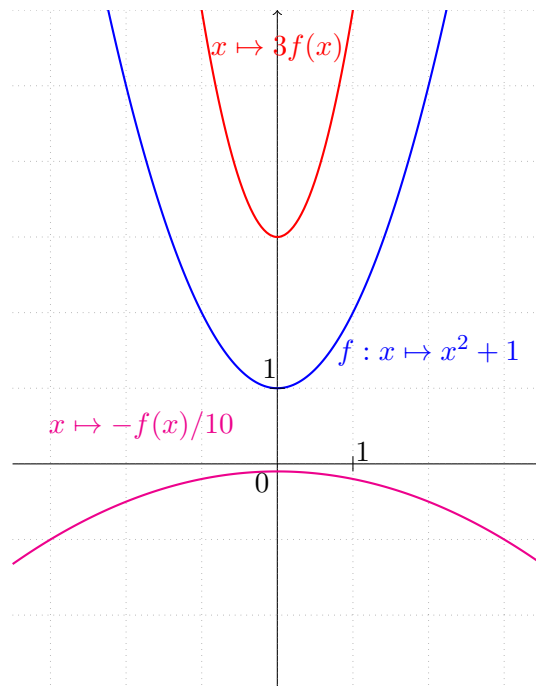


FIGURE 4 – Dilatation verticale du graphe.

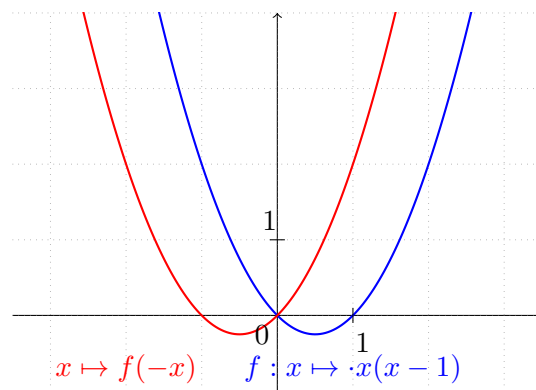


FIGURE 5 – Symétrie du graphe par rapport à l'axe vertical.

Exercice 2.0.4.

 Quelle symétrie la courbe d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow$
 \mathbb{R} vérifiant, pour un $a \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R} f(a-x) = f(x)$ présente-t-elle ?

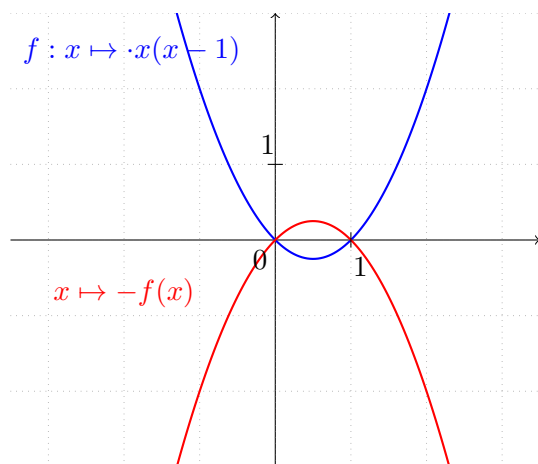


FIGURE 6 – Symétrie du graphe par rapport à l'axe horizontal.

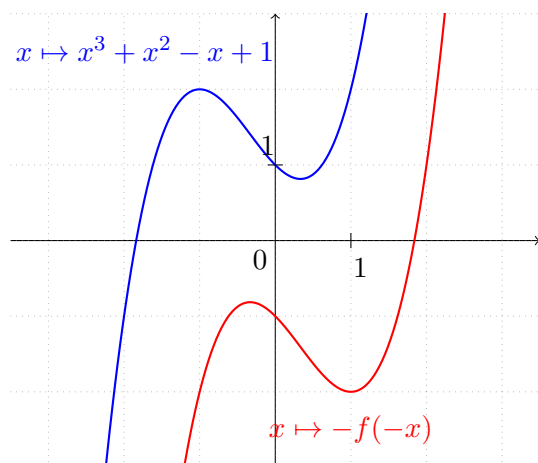


FIGURE 7 – Symétrie du graphe par rapport à l'origine.

3 Composée de fonctions, réciproque.

3.1 Rappels de dérivation.

On rappelle les formules de dérivation usuelles utilisées dans le secondaire.

Théorème 3.1.1.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

1. Soit n un entier strictement positif. La fonction $x \mapsto u^n(x)$ est dérivable sur A et, pour tout $x \in A$,

$$\frac{d}{dx}(u^n(x)) = nu'(x)u^{n-1}(x).$$

2. Soit n un entier strictement négatif. Si u ne s'annule pas, la fonction $x \mapsto u^n(x)$ est dérivable sur A et, pour tout $x \in A$,

$$\frac{d}{dx}(u^n(x)) = nu'(x)u^{n-1}(x).$$

3. Si u est strictement positive, la fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur A et, pour tout $x \in A$,

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{u(x)}) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

4. La fonction $x \mapsto \exp(u(x))$ est dérivable sur A et, pour tout $x \in A$,

$$\frac{d}{dx}(\exp(u(x))) = u'(x) \exp(u(x)).$$

5. Si u est strictement positive, la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur A et, pour tout $x \in A$,

$$\frac{d}{dx}(\ln(u(x))) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

3.2 Composée de deux fonctions.

Définition 3.2.1.

Soit $A, B \subset \mathbb{R}$, soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : B \rightarrow \mathbb{R}$.

Si, pour tout $x \in A$, $f(x) \in B$, alors on peut construire la fonction *composée* de f par g :

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}.$$

On pourra, pour s'aider, se rappeler du schéma de la figure 8.

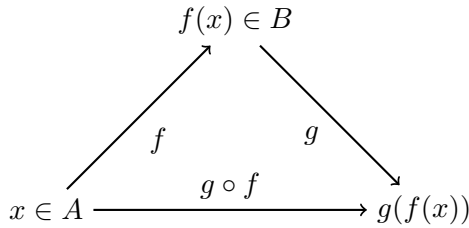


FIGURE 8 – Diagramme de composition de fonctions.

Exemple 3.2.2.

On peut donc écrire, sous réserve de validité,

$$(\exp \circ u)' = u' \times \exp \circ u \quad \text{et} \quad (\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}.$$

Remarque 3.2.3.

Pour déterminer le domaine de définition d'une composée $g \circ f$, il convient de déterminer dans l'ordre :

1. le domaine de définition de f , noté ici \mathcal{D}_f ;
2. puis le domaine de définition de g , noté ici \mathcal{D}_g ;
3. enfin, déterminer l'ensemble des $x \in \mathcal{D}_f$ pour lesquels $f(x) \in \mathcal{D}_g$.

En particulier, il est impossible de conclure sans avoir étudié l'ensemble d'arrivée de f !

Exercice 3.2.4.

Déterminer le domaine de définition de

$$x \mapsto \sqrt{x - 2 - \frac{2}{x - 3}}.$$

3.3 Propriétés d'une composée.
Théorème 3.3.1.

Soit $A, B \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $g \circ f$ soit définie.

1. Si f et g sont continues, alors $g \circ f$ est continue sur A .
2. Si f et g sont dérivables, alors $g \circ f$ est dérivable sur A et

$$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f.$$

Démonstration.

Cela sera démontré ultérieurement. □

Exercice 3.3.2.

Dériver les expressions suivantes :

1. $\sin(3x^2 + 2)$;
2. $\sqrt{1 + \ln(\cos(t))}$.

Remarque 3.3.3.

Sous réserve de définition, on a donc de manière générale

$$\frac{d}{dx}(f(ax + b)) = af'(ax + b).$$

Proposition 3.3.4.

Soit $A, B \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $g \circ f$ soit définie.

1. Si f est paire, $g \circ f$ est paire.
2. Si f est impaire et g est paire, $g \circ f$ est paire.
3. Si f et g sont impaires, $g \circ f$ est impaire.

Démonstration.

Soit $x \in A$. Si f est paire,

$$g \circ f(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = g \circ f(x).$$

Si f est impaire et g paire,

$$g \circ f(-x) = g(f(-x)) = g(-f(x)) = g(f(x)) = g \circ f(x).$$

Si f et g sont impaires,

$$g \circ f(-x) = g(f(-x)) = g(-f(x)) = -g(f(x)) = -g \circ f(x).$$

□

Proposition 3.3.5.

Soit $A, B \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ tels que $g \circ f$ soit définie.

1. Si f et g sont de même monotonie, $g \circ f$ est croissante.
2. Si f et g sont de monotonies opposées, $g \circ f$ est décroissante.

On a les mêmes résultats dans les cas de monotonie stricte.

Démonstration.

On traite le cas où f est croissante et g décroissante. Les autres sont semblables.

Soit $x, y \in A$, supposons que $x \leq y$. Par croissance de f , on a $f(x) \leq f(y)$ puis, par décroissance de g , on a $g(f(x)) \geq g(f(y))$. Ainsi, $g \circ f$ est décroissante. \square

Exercice 3.3.6.

Déterminer sans calculs le sens de variations de la fonction

$$x \mapsto \ln(1 + e^{-2x}).$$

3.4 Cas des bijections.

Définition 3.4.1.

Soit $E \subset \mathbb{R}$. On définit la fonction *identité sur E* comme

$$\begin{aligned} \text{Id}_E : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

On définit maintenant la réciproque d'une fonction dans le cadre restreint du théorème de la bijection. Nous étendrons cette notion ultérieurement.

Définition 3.4.2.

Soit $a < b$ deux réels, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement monotone. Soit x entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe donc un unique $t \in [a, b]$ tel que $x = f(t)$. On note ce réel $t = f^{-1}(x)$.

La fonction f^{-1} est appelée *réciproque* de f .

On a des résultats analogues avec un intervalle semi-ouvert ou ouvert (de la forme $]a, b]$, $[a, b[$ ou $]a, b[$), même si a ou b valent $\pm\infty$, mais ces résultats font alors intervenir des limites.

Proposition 3.4.3.

Soit $a < b$ deux réels, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement croissante. On a alors

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$$

et on a les propriétés suivantes :

1. $f \circ f^{-1} = \text{Id}_{[f(a), f(b)]}$;

$$2. f^{-1} \circ f = \text{Id}_{[a, b]}.$$

Dans le cas où f est strictement décroissante, on a les mêmes résultats en remplaçant $[f(a), f(b)]$ par $[f(b), f(a)]$.

On a des résultats analogues avec un intervalle semi-ouvert ou ouvert (de la forme $]a, b]$, $[a, b[$ ou $]a, b[$), même si a ou b valent $\pm\infty$, mais ces résultats font alors intervenir des limites.

Démonstration.

Le domaine de définition de f^{-1} et son image sont évidents, par la définition de f^{-1} .

1. Soit $x \in [f(a), f(b)]$. Posons $t = f^{-1}(x)$. Par définition, $f(t) = x$, donc $f(f^{-1}(x)) = x$, d'où le résultat.
2. Soit $t \in [a, b]$, posons $x = f(t)$. Par croissance stricte de f , il y a unicité du réel $u \in [a, b]$ vérifiant $x = f(u)$, donc par définition $t = f^{-1}(x)$. On a donc $t = f^{-1}(f(t))$, d'où le résultat. \square

Proposition 3.4.4.

Soit $a < b$ deux réels, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement monotone. Alors, le graphe de f^{-1} est le symétrique du graphe de f par rapport à la droite d'équation $y = x$ (aussi appelée *première bissectrice du plan*).

Démonstration.

Soit $x \in [a, b]$, soit y entre $f(a)$ et $f(b)$. On a alors $y = f(x)$ si et seulement si $x = f^{-1}(y)$. Ainsi, le point de coordonnées (x, y) appartient au graphe de f si et seulement si celui de coordonnées (y, x) appartient au graphe de f^{-1} . Or, l'application qui échange les coordonnées est la symétrie par rapport à la première bissectrice du plan, d'où le résultat. \square

Le résultat suivant permet notamment d'obtenir le tableau de variations de la réciproque d'une fonction.

Théorème 3.4.5.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement monotone.

1. La fonction f^{-1} est strictement monotone, de même monotonie que f .

2. Si f est impaire, alors f^{-1} est aussi impaire..
3. La fonction f^{-1} est continue.
4. Si f dérivable et si f' ne s'annule pas, alors f^{-1} est aussi dérivable et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Démonstration.

On ne démontre que les deux premier points.

1. Dans le cas où f est strictement décroissante. Soit x, y des images par la fonction f , posons $a = f^{-1}(x)$ et $b = f^{-1}(y)$, de sorte que $a, b \in I$, $x = f(a)$ et $y = f(b)$.

Supposons que $x < y$. Si $a \leq b$, alors, par décroissance de f , $f(a) \geq f(b)$, i.e. $x \geq y$: c'est impossible. Ainsi, $f^{-1}(x) > f^{-1}(y)$, donc f^{-1} est strictement décroissante.

2. Soit x une image par la fonction f , on a par imparité de f

$$f(-f^{-1}(x)) = -f(f^{-1}(x)) = -x.$$

Ainsi, par définition, $f^{-1}(-x) = -f^{-1}(x)$, donc f^{-1} est impaire.

□

Remarque 3.4.6.

Une fois que l'on sait que f^{-1} est dérivable, la dernière formule peut se retrouver en dérivant $f \circ f^{-1} = \text{Id}$, ce qui donne :

$$(f^{-1})' \times f' \circ f^{-1} = 1.$$

Remarque 3.4.7.

Avec quelques considérations de limites, le théorème précédent permet de relier les tableaux de variations d'une fonction et de sa réciproque (voir figure 9 dans le cas où f est strictement décroissante).

Remarque 3.4.8.

Plus précisément, si $f'(x) = 0$, alors f^{-1} ne sera pas dérivable en $y = f(x)$.

En effet, le graphe de f possède une tangente horizontale au point de coordonnées (x, y) , donc par symétrie celui de f^{-1} possède une tangente verticale au point de coordonnées (y, x) .

Exemple 3.4.9.

On peut observer tous ces résultats sur les fonctions carré et racine carrée (voir figure 10).

x	a	b
$f(x)$	c	d
x	d	c
$f^{-1}(x)$	b	a

FIGURE 9 – Tableaux de variations d'une fonction et de sa réciproque.

La fonction carré est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ (mais pas sur \mathbb{R}), est continue, $0^2 = 0$ et $x^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Ainsi, la fonction carré réalise une bijection de \mathbb{R}_+ sur \mathbb{R}_+ . On appelle sa réciproque la fonction *racine carrée*, notée $\sqrt{\cdot}$: si $x \geq 0$, \sqrt{x} est l'unique réel $t \geq 0$ vérifiant $t^2 = x$. La fonction racine carrée est donc strictement croissante et $\sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

On a, pour tout $x \geq 0$, $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$, qui s'annule exactement en 0. La fonction racine carrée est donc dérivable sur \mathbb{R}_+^* , mais pas en 0, et pour tout $x > 0$,

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

4 Fonction valeur absolue

Définition 4.0.1.

Soit $x \in \mathbb{R}$ On appelle *valeur absolue* de x le réel $|x| = \sqrt{x^2}$. Il vaut x si $x \geq 0$ et $-x$ sinon (voir la figure 11).

Proposition 4.0.2.

C'est une fonction paire, continue sur \mathbb{R} et dérivable sur \mathbb{R}_-^* et \mathbb{R}_+^* , mais pas en 0. Si $x > 0$, on a $\frac{d}{dx}(|x|) = 1$ et si $x < 0$, $\frac{d}{dx}(|x|) = -1$.

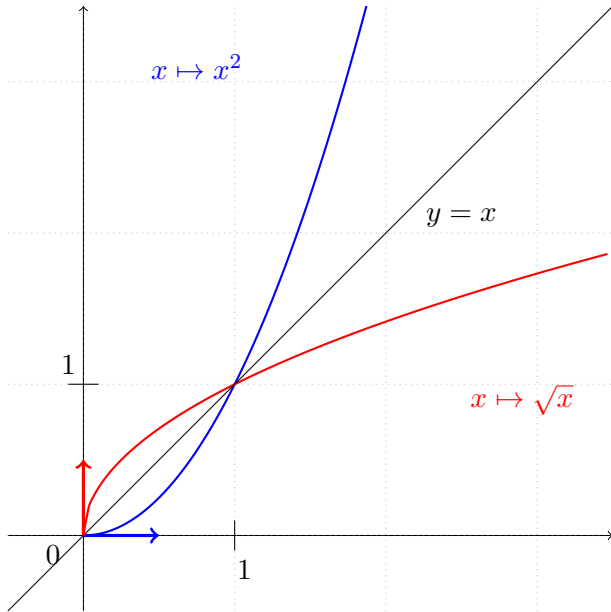


FIGURE 10 – Fonctions carré et racine carrée.

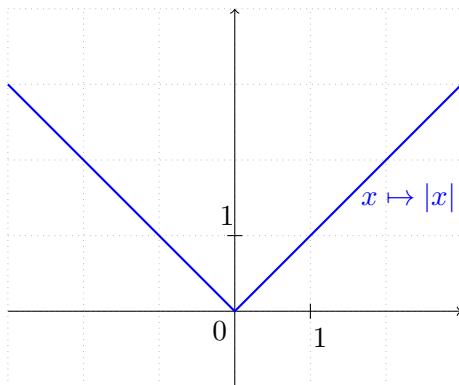


FIGURE 11 – Fonction valeur absolue.

Remarque 4.0.3.

Pour tout réel x , $|x| \geq 0$, et $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Remarque 4.0.4.

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

Théorème 4.0.5.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Alors, $|x| \leq y$ si et seulement si $-y \leq x \leq y$.

Démonstration.

Il suffit de discuter selon les signes de x et de y . \square

Proposition 4.0.6 (Inégalité triangulaire).

Soit $x, y \in \mathbb{R}$, alors :

1. $|x + y| \leq |x| + |y|$;
2. $||x| - |y|| \leq |x + y|$;
3. enfin, $|x + y| = |x| + |y|$ si et seulement si x et y sont de même signe.

Remarque 4.0.7.

L'inégalité triangulaire est celle du premier point, mais on trouve souvent sous cette appellation les deux premiers points résumés dans l'encadrement $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$. Le troisième point est le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire.

Le cas d'égalité du second point existe également : $||x| - |y|| = |x + y|$ si et seulement si x et y sont de signe opposés.

On retrouvera ces résultats pour les nombres complexes, car la valeur absolue et le module complexe coïncident sur \mathbb{R} . Le premier point sera démontré dans le chapitre correspondant. Le second point en découle facilement et peut être démontré dès maintenant. Nous donnons cependant une démonstration élémentaire des points (i) et (iii), valable uniquement pour des réels.

Démonstration. 1.

$$\begin{aligned} (|x| + |y|)^2 - |x + y|^2 &= (|x| + |y|)^2 - (x + y)^2 \\ &= 2(|xy| - xy) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

donc $|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$. On conclut par positivité de $|x + y|$ et de $|x| + |y|$.

3. Dans le raisonnement précédent, il y a égalité si et seulement si $|xy| = xy$, ce qui est équivalent à $xy \geq 0$, ce qui est bien équivalent à « x et y sont de même signe ».
2. En appliquant le premier point, $|x| = |(x + y) + (-y)| \leq |x + y| + |y|$ donc $|x| - |y| \leq |x + y|$. En permutant les rôles de x et y , nous avons également $|y| - |x| \leq |x + y|$, ce qui permet de conclure. \square

Remarque 4.0.8 (Interprétation en terme de distance).

Si $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y|$ est la distance entre x et y . On peut alors écrire, avec $(x, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2$, les intervalles

$$\begin{aligned} [x - \varepsilon, x + \varepsilon] &= \{ y \in \mathbb{R} \mid |y - x| \leq \varepsilon \}, \\]x - \varepsilon, x + \varepsilon[&= \{ y \in \mathbb{R} \mid |y - x| < \varepsilon \}. \end{aligned}$$

5 Fonctions puissances entières, polynomiales et rationnelles

5.1 Fonctions puissances entières

Définition 5.1.1.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. On appelle x *puissance* n le réel $x \times \dots \times x$ (n fois), noté x^n .

Par convention $x^0 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, même 0.

Si n est un entier strictement négatif, et si $x \neq 0$, on pose $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$.

Remarque 5.1.2.

Cela peut se définir rigoureusement par récurrence.

Proposition 5.1.3.

Soit $m, n \in \mathbb{Z}$, de manière générale :

$$\begin{aligned} x^{m+n} &= x^m x^n, \\ x^{mn} &= (x^m)^n, \\ (xy)^n &= x^n y^n, \\ \frac{x^n}{y^n} &= \left(\frac{x}{y} \right)^n. \end{aligned}$$

De plus, $x \mapsto x^n$ a la même parité que n . C'est une fonction continue, dérivable, de dérivée $x \mapsto nx^{n-1}$.

Les allures des courbes dans tous les cas (n pair, impair, positif, négatif) sont données dans les figures 12 et 13.

Proposition 5.1.4 (Comparaisons de puissances).

Soit $x \in]0, 1]$, alors

$$0 < x^4 \leq x^3 \leq x^2 \leq x \leq 1 \leq 1/x \leq 1/x^2 \dots$$

Plus formellement, la suite $(x^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est décroissante (strictement si $0 < x < 1$).

Soit $x \in [1, +\infty[$, la suite $(x^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est croissante (strictement si $x > 1$).

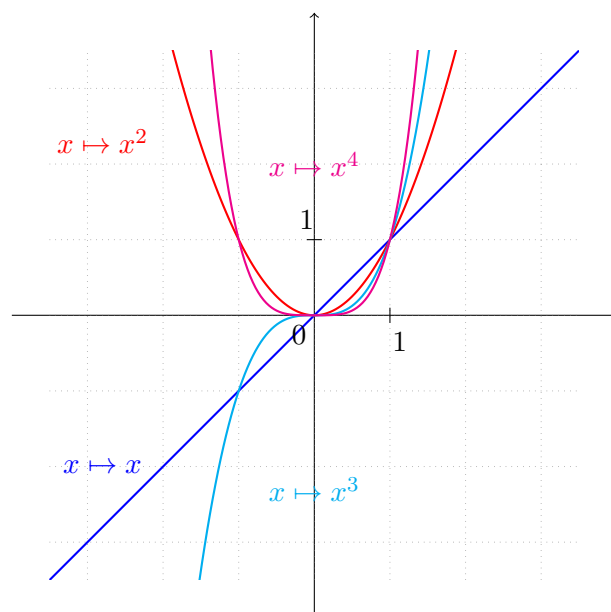


FIGURE 12 – Quelques fonctions puissance, exposants positifs.

5.2 Fonctions polynomiales et rationnelles

Définition 5.2.1.

On appelle fonction polynomiale toute fonction de la forme

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \underbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n}_{\sum_{k=0}^n a_k x^k} \end{aligned}$$

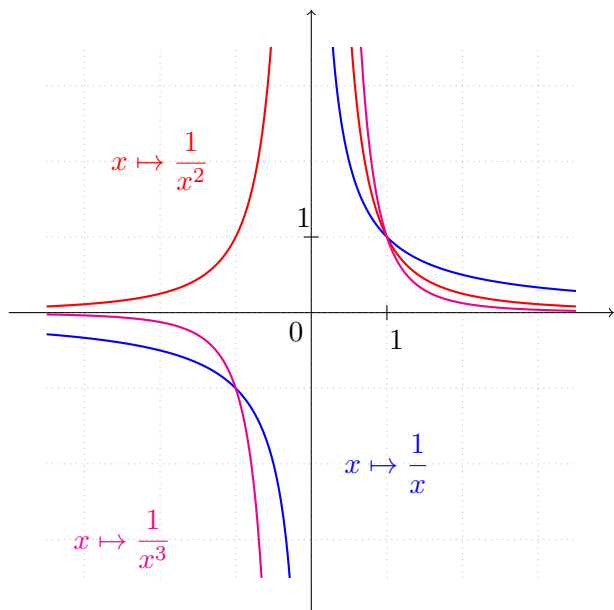


FIGURE 13 – Quelques fonctions puissance, exposants négatifs.

où $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et où $a_n \neq 0$.

Dans ce cas, n est appelé le degré de f , a_n est le coefficient dominant (ou de plus haut degré) de f et a_0 est le coefficient constant de f . Le terme $a_n x^n$ est le monôme dominant de f .

Proposition 5.2.2.

Toute fonction polynomiale est continue et dérivable sur \mathbb{R} .

De plus, avec les notations précédentes, $f(x)$ et $a_n x^n$ ont même limite en $\pm\infty$.

Démonstration.

On factorise $a_n x^n$:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n \left(\frac{a_0}{a_n x^n} + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + 1 \right) \\ &= a_n x^n \left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n x^{n-k}} \right). \end{aligned}$$

Il suffit de voir que, si $0 \leq k \leq n-1$,

$$\frac{a_k}{a_n x^{n-k}} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0.$$

□

Définition 5.2.3.

On appelle *fonction rationnelle* toute fonction de la forme $f : x \mapsto \frac{g(x)}{h(x)}$ où g et h sont des fonctions polynomiales. Si $a_n x^n$ et $b_m x^m$ sont les monômes dominants de g et h , alors $f(x)$ et $\frac{a_n x^n}{b_m x^m}$ ont même limite en $\pm\infty$.

Remarque 5.2.4.

L'ensemble de définition d'une telle fonction est au moins inclus dans l'ensemble des réels sur lesquels h ne s'annule pas. Nous l'étudierons précisément dans le chapitre dédié aux fractions rationnelles. Sur cet ensemble, toute fraction rationnelle est continue et dérivable.

6 Fonctions exponentielles, logarithmes et puissances quelconques

6.1 Exponentielle et logarithme

Définition 6.1.1.

On appelle *logarithme népérien* la primitive, notée \ln , de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}_+^* valant 0 en 1.

Proposition 6.1.2.

La fonction \ln est continue, dérivable sur \mathbb{R}_+^* , strictement croissante (donc injective) et bijective de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} .

$$\text{Si } x \in \mathbb{R}_+^*, \text{ on a } \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Démonstration.

Les outils pour cela seront vus plus tard, mais il suffit de dire que c'est la primitive d'une fonction continue et positive. □

Définition 6.1.3.

On appelle fonction *exponentielle* notée \exp la réciproque de \ln . On a donc $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$.

Proposition 6.1.4.

La fonction \exp est continue, dérivable sur \mathbb{R} , et égale à sa dérivée.

Démonstration.

Utiliser les propriétés de la réciproque. \square

- Graphes : voir la figure 14.

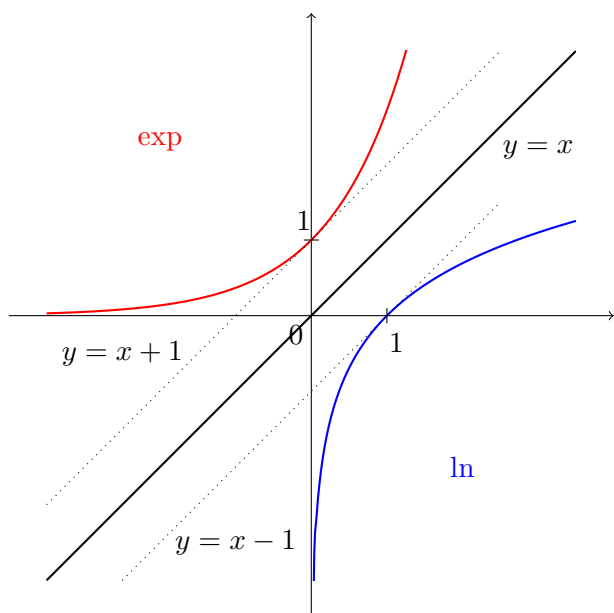


FIGURE 14 – Logarithme et exponentielle.

Proposition 6.1.5.

L'exponentielle est partout strictement positive, elle est strictement croissante et bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+^* .

Démonstration.

Utiliser les propriétés de la réciproque. \square

Proposition 6.1.6.

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$.

Démonstration.

Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$, étudions $f_y : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(xy)$. C'est une fonction dérivable, comme composée de fonctions dérivables, et si $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'_y(x) = y \left(\frac{1}{xy} \right) = \frac{1}{x}$. Ainsi, f_y est

une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$, donc diffère de \ln d'une constante. Avec $x = 1$, on obtient cette constante : pour tout $x > 0$, on a bien $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

L'autre identité s'en déduit en observant que \exp est la réciproque de \ln :

$$\begin{aligned} \ln(\exp(x) \exp(y)) &= \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) \\ &= x + y. \end{aligned}$$

Par définition de l'exponentielle, $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$. \square

Exemple 6.1.7.

En particulier, $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$, $\ln(1/x) = -\ln x$ et $\ln(x^n) = n \ln x$.

Remarque 6.1.8.

On définit $e = \exp(1)$, dont une valeur approchée à 10^{-3} près est 2,718.

Proposition 6.1.9 (inégalités fondamentales).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x \geq 1 + x$$

et pour tout $x > -1$,

$$\ln(1 + x) \leq x.$$

Démonstration.

Il suffit d'étudier les fonctions $x \mapsto e^x - 1 - x$ et $x \mapsto \ln(1 + x) - x$, en dressant leurs tableaux de signes/variations. \square

Remarque 6.1.10.

Ces inégalités s'observent aisément sur la figure 14.

Elles découlent immédiatement de la propriété de convexité de l'exponentielle et de la propriété de concavité du logarithme.

Remarque 6.1.11.

Les dérivées de l'exponentielle en 0 et du logarithme en 1 donnent les limites suivantes, fort

utiles :

$$\frac{\exp(x) - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1,$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

6.2 Exponentielle de base quelconque

Définition 6.2.1.

Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \in \mathbb{R}$. On appelle « x puissance a » (ou exponentielle de base x), noté x^a , le réel $x^a = \exp(a \ln x)$.



x^a n'est qu'une notation pour $\exp(a \ln x)$.



x^a n'est pas défini avec $x \leq 0$, avec cette définition.

Remarque 6.2.2.

- Si $a \in \mathbb{N}$, cette définition coïncide avec la définition donnée précédemment.
- On a alors pour tout $x > 0$, $\exp(x) = e^x$. La notation e^x est alors utilisée pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour désigner $\exp(x)$.
- Cas particuliers :
 1. $a \in \mathbb{N}$: x^a défini sur \mathbb{R} .
 2. $a \in \mathbb{Z}$: x^a défini sur \mathbb{R}^* .
 3. $a \in \mathbb{R}^+$: prolongeable en 0 par continuité.
 4. $a = \frac{1}{q} \in \mathbb{Q}$, $q > 0$: définie sur \mathbb{R}_+ , donc prolongeable en zéro, comme réciproque de la fonction $x \mapsto x^q$. Et même prolongeable sur \mathbb{R} si q impair.
- Pour traiter un exercice avec des puissances quelconques, il faut quasiment toujours repasser par l'écriture exponentielle.

Proposition 6.2.3.

Soit $x, x' \in \mathbb{R}_+^*$ et $y, y' \in \mathbb{R}$, on a :

1. $(xx')^y = x^y \cdot x'^y$.
2. $x^{y+y'} = x^y \cdot x^{y'}$.
3. $x^{(yy')} = (x^y)^{y'}$.
4. $x^{-y} = \frac{1}{x^y} = \left(\frac{1}{x}\right)^y$.

Démonstration.

Revenir à la définition via l'exponentielle. \square

- On peut dériver x^a en utilisant directement sa définition. On remarquera notamment que

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^a) \neq \frac{\partial}{\partial a}(x^a).$$



On n'utilisera jamais le symbole ' pour dériver une expression, mais plutôt $\frac{d}{d\heartsuit}$ ou $\frac{\partial}{\partial \heartsuit}$, où \heartsuit est la variable par rapport à laquelle on dérive l'expression (les autres étant fixées).

Exemple 6.2.4.

Que veut dire $(x^y)'$?

Proposition 6.2.5.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On note $f_a : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$.

$$x \mapsto x^a$$

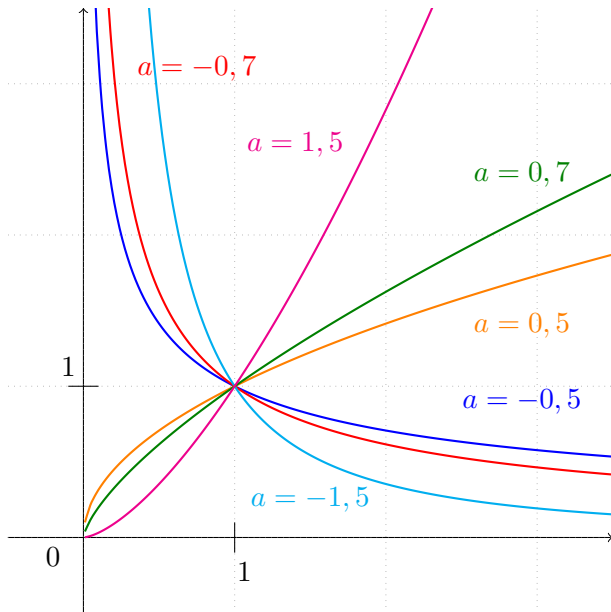
1. La fonction f_a est continue, dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'_a(x) = ax^{a-1}$.
2. Si $a \neq 0$, f_a est bijective de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R}_+^* . Sa réciproque est $f_{1/a}$.
3. Soit $a < a'$: si $x > 1$, $x^a < x^{a'}$, si $x \in]0, 1[$, $x^a > x^{a'}$.

Démonstration. 1. Il suffit de dériver dans la définition.

2. Il suffit de vérifier que $(x^a)^{1/a} = (x^{1/a})^a = x$.

3. Il suffit de discuter suivant le signe de $\ln(x)$. \square

- Graphes : voir la figure 15.


 FIGURE 15 – Quelques fonctions de la forme $x \mapsto x^a$.

Définition 6.2.6 (Logarithme de base a).

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. La fonction « puissance en base a », $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto a^x$, est bijective. Sa réciproque est le logarithme de base a

$$\log_a : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)}. \end{cases}$$

- Remarque 6.2.7.** 1. Cas particuliers utiles : \log_{10} et \log_2 . Ils donnent le nombre de chiffres dans l'écriture d'un entier en base 10 ou 2 : si $10^{p-1} \leq n < 10^p$, alors n s'écrit avec p chiffres en base 10 et $\lfloor \log_{10} n \rfloor = p - 1$.
2. Propriétés fondamentales : $\log_{10}(10^x) = x$ et $10^{\log_{10} x} = x$.

6.3 Racines énièmes.

Définition 6.3.1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto x^n$ est continue.

- Si n est pair, $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ et réalise une bijection de \mathbb{R}_+ sur \mathbb{R}_+ . Sa réciproque sur \mathbb{R}_+ est appelée « racine n^e », notée $\sqrt[n]{\cdot}$.
- Si n est impair, $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur \mathbb{R} et réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} . Sa réciproque sur \mathbb{R} est appelée « racine n^e », notée $\sqrt[n]{\cdot}$.

Démonstration.

Il suffit de montrer la croissance stricte. Cela peut se faire en dérivant, ou bien en factorisant $x^n - y^n$ (la formule sera vue bientôt).

Notamment, pour $n = 2$, $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ donne directement la croissance stricte de $x \mapsto x^2$ sur \mathbb{R}_+^* . \square

Exemple 6.3.2.

$(-2)^3 = -8$, donc $-2 = \sqrt[3]{-8}$, et $(\sqrt{3})^4 = (-\sqrt{3})^4 = 9$, donc $\sqrt[4]{9} = \sqrt{3}$.

Proposition 6.3.3.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, alors $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

Démonstration.

On a bien $x^{1/n} > 0$ et, d'après les règles de manipulation des puissances, $(x^{1/n})^n = (x^n)^{1/n} = x$. \square

6.4 Croissances comparées

Exercice 6.4.1.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\exp(x) \geq 1 + x + x^2/2$. En déduire la limite de $\exp(x)/x$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Proposition 6.4.2 (Croissances comparées des exponentielles, puissances et logarithmes).

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :

1. l'exponentielle l'emporte sur les puissances :

$$x^a e^{bx} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0 \quad \text{et} \quad \frac{e^{bx}}{x^a} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty ;$$

2. les puissances l'emportent sur les logarithmes :

$$x^a \cdot |\ln x|^b \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad \frac{x^a}{(\ln x)^b} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty ;$$

3. l'exponentielle l'emporte sur les logarithmes (repasser par les deux premiers points).

Démonstration. 1. On utilise le résultat de l'exercice 6.4.1, en factorisant

$$\frac{e^{bx}}{x^a} = \left(\frac{e^{bx/a}}{x} \right)^a = \left(\frac{b}{a} \right)^a \cdot \left(\frac{e^{bx/a}}{bx/a} \right)^a.$$

2. En composant la limite de l'exercice 6.4.1 par $\ln(x)$, on a directement $\frac{x}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Puis, en composant par $\frac{1}{x}$, on obtient $x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.
Ensuite, on factorise

$$\frac{x^a}{(\ln x)^b} = \left(\frac{x^{a/b}}{\ln x} \right)^b = \left(\frac{a}{b} \right)^b \left(\frac{x^{a/b}}{\ln(x^{a/b})} \right)^b.$$

On obtient l'autre limite par composition.

3. Repasser par les deux premiers points. \square

Exercice 6.4.3.

Déterminer la limite de la suite de terme général

$$\frac{3^n - n^2 + \ln^2(n)}{n^e + \sqrt{e^n} - 2 \ln(n)}$$

7 Fonctions circulaires réciproques

7.1 Arccos et Arcsin



La fonction cosinus n'est pas bijective : pour tout $x \in [-1, 1]$, il n'existe pas un unique $t \in \mathbb{R}$ vérifiant $x = \cos(t)$.

Définition 7.1.1 (Arc cosinus).

Pour tout $x \in [-1, 1]$, il existe un unique $t \in [0, \pi]$ tel que $x = \cos(t)$. On dit que ce t est l'arc cosinus de x (noté $t = \text{Arccos}(x)$).

Plus formellement : la fonction cosinus est bijective de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Sa fonction réciproque est appelée arc cosinus et noté Arccos.

Démonstration.

La fonction cosinus est continue, strictement décroissante sur $[0, \pi]$, $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$. On conclut par le théorème de la bijection. \square

Proposition 7.1.2.

La fonction arc cosinus est strictement décroissante, continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $] -1, 1[$, de dérivée $x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, c'est-à-dire que pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$\text{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Son graphe est représenté sur la figure 16.

Démonstration.

Tout découle du tableau de variations du cosinus et des théorèmes généraux précédents.

Comme $\cos'(0) = 0$ et $\cos'(\pi) = 0$, Arccos n'est pas dérivable en $\cos(0) = 1$ et en $\cos(\pi) = -1$. La dérivée du cosinus ne s'annule pas sur $]0, \pi[$, donc Arccos est dérivable sur $] -1, 1[$. Ensuite, si $-1 < x < 1$,

$$\text{Arccos}'(x) = \frac{1}{\cos'(\text{Arccos } x)} = \frac{-1}{\sin(\text{Arccos } x)}.$$

Il suffit d'utiliser le résultat du théorème 7.1.6 pour obtenir $\sin(\text{Arccos } x) = \sqrt{1-x^2}$. \square

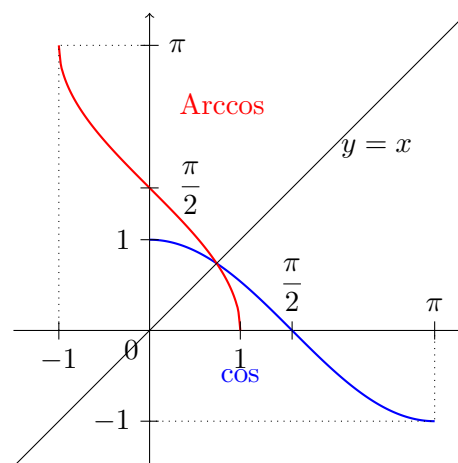


FIGURE 16 – Fonctions cos et Arccos.



La fonction sinus n'est pas bijective : pour tout $x \in [-1, 1]$, il n'existe pas un unique $t \in \mathbb{R}$ vérifiant $x = \sin(t)$.

Définition 7.1.3 (Arc sinus).

Pour tout $x \in [-1, 1]$, il existe un unique $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $x = \sin(t)$. On dit que ce t est l'arc sinus de x (noté $t = \text{Arcsin}(x)$).

Plus formellement : la fonction sinus est bijective de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$. Sa fonction réciproque est appelée arc sinus et noté Arcsin .

Démonstration.

La fonction sinus est continue, strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. On conclut par le théorème de la bijection. \square

Proposition 7.1.4.

La fonction arc sinus est strictement croissante, impaire, continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $] -1, 1[$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, c'est-à-dire que pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Son graphe est représenté sur la figure 17.

Démonstration.

C'est la même chose que pour l'arc cosinus.

Pour l'imparité, si $x \in [-1, 1]$, posons $t = \text{Arcsin}(x)$, donc $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ et $\sin(t) = x$. Par imparité du sinus, $\sin(-t) = -x$, et $-t \in [-\pi/2, \pi/2]$, donc par définition $-t = \text{Arcsin}(-x)$. On vient de montrer que $\text{Arcsin}(-x) = -\text{Arcsin}(x)$. \square

Exercice 7.1.5.

Déterminer les arc cosinus et arc sinus des valeurs usuelles : $0, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ et ± 1 .

Théorème 7.1.6.

Pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned} \sin(\text{Arccos } x) &= \cos(\text{Arcsin } x) \\ &= \sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

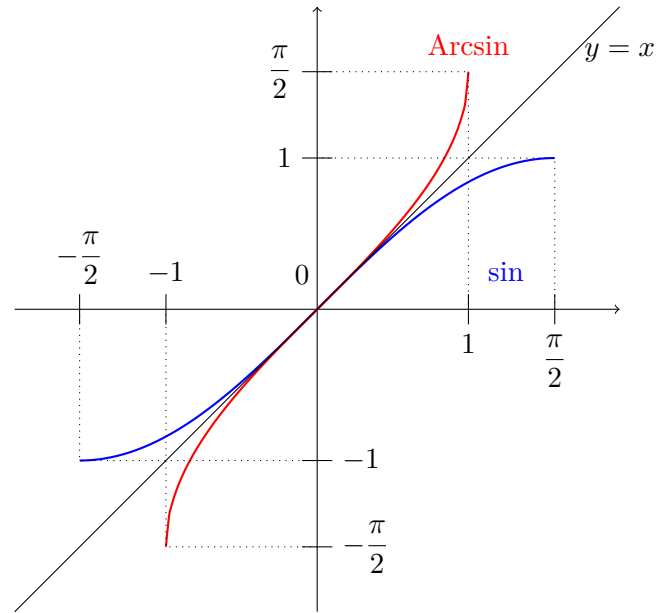


FIGURE 17 – Fonctions sin et Arcsin.

Démonstration.

On a $\cos \circ \text{Arccos} = \text{Id}_{[-1,1]}$, c'est-à-dire que, par définition, pour tout $x \in [-1, 1]$, $\cos(\text{Arccos } x) = x$.

Ainsi, si $x \in [-1, 1]$, on a

$$\sin^2(\text{Arccos } x) = 1 - \cos^2(\text{Arccos } x) = 1 - x^2.$$

Pour finir, on remarque que le sinus est positif sur $[0, \pi]$, or la fonction Arccos prend ses valeurs dans $[0, \pi]$, donc $\sin(\text{Arccos } x) \geq 0$. \square



$\text{Arccos} \circ \cos \neq \text{Id}_{\mathbb{R}}$, on a juste que pour tout $x \in [0, \pi]$, $\text{Arccos}(\cos(x)) = x$.

Exercice 7.1.7.

Calculer $\text{Arccos}\left(\cos \frac{17\pi}{7}\right)$.

Exercice 7.1.8.

Résoudre l'équation $\text{Arcsin } x = \text{Arccos } \frac{4}{5}$, d'inconnue $x \in [-1, 1]$.



Toujours faire attention aux signes des objets, et aux ensembles auxquels ils appartiennent.

Proposition 7.1.9.

Pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \pi/2$.

Démonstration.

Notons $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x$. Il suffit de montrer que f est constante sur $[-1, 1]$, de valeur $\pi/2$. Pour cela on peut vérifier les trois points suivants :

1. f est constante sur $] -1, 1[$. En effet, f est dérivable sur $] -1, 1[$ et d'après ce qui précède sa dérivée est nulle. Notons C sa valeur sur $] -1, 1[$.
2. f est constante sur $[-1, 1]$. En effet, on a $\forall x \in] -1, 1[$ $f(x) = C$, donc f admet une limite à droite en -1 et $f(x) \xrightarrow[x > -1]{x \rightarrow -1} C$. Or f est continue en -1 car Arcsin et Arccos le sont. Donc $f(x) \xrightarrow[x > -1]{x \rightarrow -1} f(-1)$.
Donc $f(-1) = C$.
De même $f(1) = C$.
On a donc $\forall x \in [-1, 1]$ $f(x) = C$.
3. La valeur de f sur $[-1, 1]$ est $\pi/2$. En effet, en 0 , f vaut $\operatorname{Arcsin} 0 + \operatorname{Arccos} 0$, qui est égal à $0 + \pi/2$.

□

7.2 Arctangente



La fonction tangente n'est pas bijective : pour tout $x \in \mathbb{R}$, il n'existe pas un unique $t \in \mathbb{R}$ vérifiant $x = \tan(t)$.

Définition 7.2.1 (Arc tangente).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ tel que $x = \tan(t)$. On dit que ce t est l'arc tangente de x (noté $t = \operatorname{Arctan}(x)$).

Plus formellement, la fonction tangente est bijective de $] -\pi/2, \pi/2[$ sur \mathbb{R} . Sa fonction réciproque est appelée arctangente et noté Arctan (parfois atan).

Proposition 7.2.2.

La fonction arc tangente est continue sur \mathbb{R} , dérivable sur \mathbb{R} de dérivée $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, impaire et strictement croissante. Son graphe est donné figure 18 (noter les asymptotes).

Démonstration.

Tout découle du tableau de variations de la tangente et des théorèmes généraux précédents.

On a $\tan' = 1 + \tan^2$, donc pour tout $x \in] -\pi/2, \pi/2[$, $\tan'(x) \geq 1$. La dérivée de la tangente ne s'annule pas sur $] -\pi/2, \pi/2[$, donc Arctan est dérivable sur \mathbb{R} . Ensuite, si $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{\tan'(\operatorname{Arctan} x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\operatorname{Arctan} x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

L'imparité s'obtient comme pour l'arc sinus. □

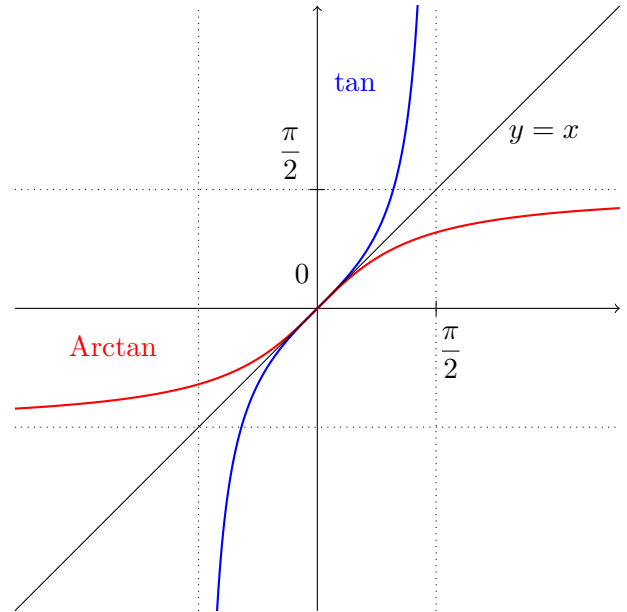


FIGURE 18 – Fonctions \tan et Arctan .

Proposition 7.2.3.

À nouveau, remarquer que $\tan \circ \operatorname{Arctan} = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}}$, mais pas $\operatorname{Arctan} \circ \tan$: ce n'est l'identité que sur $] -\pi/2, \pi/2[$.

Exercice 7.2.4.

Résoudre l'équation $\operatorname{Arctan}(2x) + \operatorname{Arctan}(3x) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 7.2.5.

Étudier la fonction

$$f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right).$$

7.3 Coordonnées polaires

Soit (x, y) un couple de coordonnées cartésiennes d'un point M du plan. On veut un couple de coordonnées polaires de M . On cherche un tel couple sous la forme (r, θ) avec $r \geq 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$. On a $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. On doit avoir $x = r \cos \theta =$ et $y = r \sin \theta$, donc $\cos \theta = x/r$ et $\sin \theta = y/r$ (on écarte le cas $r = 0$, on dit par convention que toutes les $(0, \theta)$ conviennent).

On distingue deux cas :

Premier cas $y \geq 0$, donc M appartient au demi-plan supérieur, donc $\theta \in [0, \pi]$ et donc $\theta = \text{Arccos}(x/r)$.

Second cas $y < 0$, alors $\theta \in]-\pi, 0[$, donc $-\theta \in]0, \pi[$, donc $-\theta = \text{Arccos}(x/r)$, d'où $\theta = -\text{Arccos}(x/r)$.

Remarque 7.3.1.

On aurait aussi pu utiliser Arcsin en distinguant les cas $x \geq 0$ ($\theta = \text{Arcsin}(y/r)$) et $x < 0$ ($\theta = \pi - \text{Arcsin}(y/r)$).

Exemple 7.3.2.

Un couple de coordonnées polaires de $(4, -3)$ est $(5, -\text{Arccos} \frac{4}{5})$.

Remarque 7.3.3.

Trouver le module et un argument d'un nombre complexe est le même problème que de déterminer un couple de coordonnées polaires d'un point du plan. Il se résout avec les mêmes méthodes.

8 Fonctions hyperboliques

8.1 ch, sh et th

Définition 8.1.1.

On appelle :

1. *Sinus hyperbolique* et on note sh l'application

$$\begin{aligned} \text{sh} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

2. *Cosinus hyperbolique* et on note ch l'application

$$\begin{aligned} \text{ch} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Proposition 8.1.2. 1. La fonction ch est continue et dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est sh. De plus, ch est paire.

2. La fonction sh est continue et dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est ch. De plus, sh est impaire.

3. Les graphes de ch et sh sont donnés dans la figure 20.

4. $\text{ch} + \text{sh} = \exp$.

5. $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$.

Démonstration. 1. On calcule ch' , et $\text{ch}(-x)$.

2. Idem.

3. On dresse le tableau de variations de signes / variations suivant (voir figure 19), en partant du fait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) > 0$. On rajoute :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{ch}(x)$	+		
$\text{sh}(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{sh}(x)$	-	0	+
$\text{ch}(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

FIGURE 19 – Variations de ch et de sh.

$\text{ch}(x) - \text{sh}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc les graphes de ch et de sh sont asymptotiques l'un de l'autre.

4. Simple calcul.

5. On factorise, en utilisant la parité de ch et l'imparité de sh et le résultat précédent : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) &= (\text{ch}(x) + \text{sh}(x))(\text{ch}(x) - \text{sh}(x)) \\ &= (\text{ch}(x) + \text{sh}(x))(\text{ch}(-x) + \text{sh}(-x)) \\ &= \exp(x) \exp(-x) \\ &= 1.\end{aligned}$$

□

Remarque 8.1.3.

On a l'inégalité suivante : pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$,

$$u + \frac{1}{u} \geq 2,$$

avec égalité si et seulement si $u = 1$. Cela permet de retrouver que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) \geq 1$.

Exercice 8.1.4.

Démontrer l'inégalité précédente de deux manières différentes.

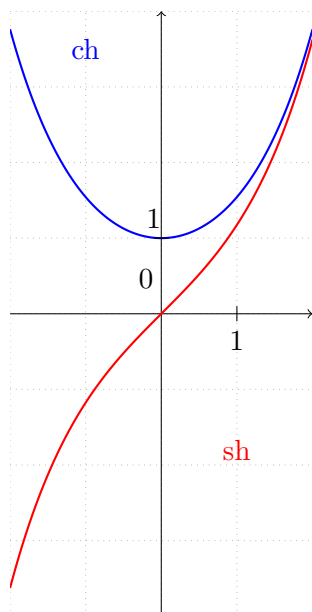


FIGURE 20 – Fonctions ch et sh .

Définition 8.1.5.

On appelle *Tangente hyperbolique* et on note $\text{th} =$

$\frac{\text{sh}}{\text{ch}}$, soit l'application

$$\begin{aligned}\text{th} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.\end{aligned}$$

Proposition 8.1.6.

La fonction th est continue et dérivable sur \mathbb{R} et

$$\text{th}' = 1 - \text{th}^2 = \frac{1}{\text{ch}^2}.$$

De plus, th est impaire et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 < \text{th}(x) < 1$. Voir son graphe figure 21.

Démonstration.

Par le calcul de $\text{ch} - \text{sh}$, on obtient que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$-\text{ch}(x) < \text{sh}(x) < \text{ch}(x)$$

et $\text{ch}(x) > 0$, donc th est bien définie et à valeurs dans $] -1, 1[$. En tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, th est dérivable. On dérive th facilement. Les limites de th s'obtiennent aisément : on notera les deux asymptotes horizontales à son graphe.

□

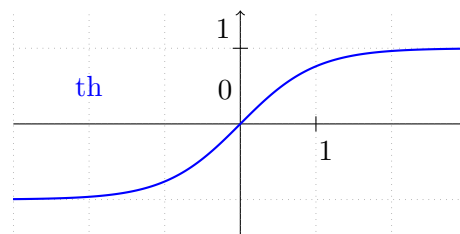


FIGURE 21 – Fonction th .

Remarque 8.1.7.

Pourquoi fonctions «hyperboliques» et «circulaires» ? Car $x^2 + y^2 = 1$ est l'équation du cercle trigonométrique \mathcal{C} , donc $(x, y) \in \mathcal{C}$ ssi $\exists t \in \mathbb{R} \quad x = \cos t$ et $y = \sin t$.

De même, $x^2 - y^2 = 1$ est l'équation de l'hyperbole équilatère \mathcal{H} d'asymptotes $x = \pm y$. Donc $(x, y) \in \mathcal{H}$ ssi $\exists t \in \mathbb{R} \quad x = \text{ch } t$ et $y = \text{sh } t$.

Remarque 8.1.8.

Toutes les formules de trigonométrie circulaire ont une analogue hyperbolique. Par exemple :

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(a+b) &= \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b, \\ \operatorname{sh}(a+b) &= \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b.\end{aligned}$$

Ces formules ne sont pas à connaître.

Remarque 8.1.9.

Les dérivées du sinus et du cosinus hyperboliques en 0 donnent les limites suivantes, fort utiles :

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sh}(x)}{x} &\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1, \\ \frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{x} &\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.\end{aligned}$$

On a remarqué que ch est paire, sh est impaire et $\exp = \operatorname{ch} + \operatorname{sh}$. Cela se généralise comme suit.

Définition 8.1.10.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Supposons que A est centré ($\forall x \in A, -x \in A$). Alors, il existe deux uniques fonctions $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : A \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- g est paire ;
- h est impaire ;
- $f = g + h$.

On dit que g est la *partie paire* de f et h sa *partie impaire*.

Démonstration.

On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : On suppose que l'on a g et h qui conviennent et l'on essaie d'obtenir des informations dessus. *Indice* : si $x \in A$, calculer $f(x) + f(-x)$.

On a en fait montré l'unicité de g et de h .

Synthèse : On vérifie que les fonctions trouvées dans la phase d'analyse conviennent.

On a alors montré l'existence de g et de h .

□

Exemple 8.1.11.

Les fonctions cosinus et sinus hyperboliques, sont les parties paires et impaires de la fonction exponentielle.

8.2 Fonctions hyperboliques inverses

Elles sont hors-programme. :(

Mais vous pouvez très bien les retrouver, ainsi que leurs propriétés, en tant qu'exercice ! :)