Feuille d'exercice n° 09 : **Matrices - fiche d'entraînement**

Exercice 1 Dans chaque situation, déterminer si le produit AB est possible et, le cas échéant, le calculer. Procéder de même pour BA.

1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 5 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

3) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

4) $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = A^T$.

Exercice 2 Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Déterminer les dimensions ainsi qu'une expression simple de $X^T AY$.

Exercice 3 Pour chacune de ces matrices, déterminer si elle est inversible et, le cas échéant, donner son inverse.

1) $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ **2)** $B = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ **3)** $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 4 Pour chacune de ces matrices, déterminer si elle est inversible et, le cas échéant, donner son inverse.

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -9 \\ 1 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ **3)** $C = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 7 \\ 2 & -1 & -6 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ **5)** $E = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 8 \\ -4 & 6 & -7 \\ -1 & -6 & 6 \end{pmatrix}$

2) $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ **4)** $D = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & -7 \end{pmatrix}$ **6)** $F = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -7 & -10 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5 Pour chacune de ces matrices, déterminer si elle est inversible et, le cas échéant, donner son inverse.

1) $A = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 9 & 6 \\ -9 & -4 & -1 & 6 \\ 0 & -4 & -3 & -1 \\ 1 & -7 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ **2)** $B = \begin{pmatrix} 7 & -10 & -9 & 2 \\ 3 & -7 & -4 & 6 \\ -8 & 0 & -1 & -5 \\ -7 & 10 & 9 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 6 On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 7 On considère $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$. On rappelle que la suite de Fibonnaci (F_n) est déterminée par

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1) Comment peut-on définit F_{-1} pour que la relation soit correcte ?

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = F_n A + F_{n-1} I_2$.

3) Montrer que A est inversible, et déterminer A^{-1} en fonction de A et de I_2.

Exercice 8 On considère $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Exprimer A^2 en fonction de A et de I_2.

2) Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On exprimera notamment le résultat en fonction de A et de I_2.

3) La formule précédente est-elle valide pour $n \leqslant 0$?

Exercice 9 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Peut-on généraliser ceci pour $n \leqslant 0$?

3) Généraliser ceci dans le cas où A est la matrice de dimension $p \times p$, dont tous les coefficients valent 1.

Exercice 10 Dans chacun des cas suivant, déterminer la matrice sans procéder à aucun calcul matriciel, puis déterminer son inverse sans procéder à aucun calcul d'inverse.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$