Devoir à la maison n° 12

À rendre le 6 février

1) Soit $u = (u_n)_{n \geqslant 1}$ la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

a) En s'aidant des suites (u_{2n}) et (u_{2n-1}), montrer que que la suite u converge.

b) Justifier que $\forall n \geqslant 1,\ u_n < 0$.

2) Soit un entier naturel $n \geqslant 2$, on introduit le polynôme

$$P_n = -1 + X + \frac{1}{2}X^2 + \cdots + \frac{1}{n}X^n = -1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{X^k}{k}.$$

a) Déterminer les racines du polynôme dérivé P'_n, en séparant, selon la parité de n, les racines réelles des racines complexes non réelles.

b) Montrer que tout racine **réelle** de P_n est simple.

3) **a)** Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, le polynôme P_n admet une unique racine (réelle !) dans l'intervalle $[0, +\infty[$. On note x_n cette racine : vérifier que $x_n \in [0, 1]$.

b) Pour $n \geqslant 2$, déterminer le signe de $P_{n+1}(x_n)$. En déduire la monotonie de $(x_n)_{n \geqslant 2}$ puis sa convergence. On note ℓ la limite de $(x_n)_{n \geqslant 2}$.

4) On pose, pour $n \geqslant 2$,

$$G_n : \left\{ \begin{array}{rcl} [0,1[& \to & \mathbb{R}; \\ x & \mapsto & -1 - \ln(1-x) - P_n(x). \end{array} \right.$$

a) Calculer la valeur exacte de $C = x_2$ et comparer C et 1.

b) Calculer et simplifier G'_n.

c) En déduire que, pour tout $x \in [0, C]$ et pout tout $n \geqslant 2$, $|G'_n(x)| \leqslant \frac{C^n}{1-C}$ puis que $|G_n(x)| \leqslant |x| \frac{C^n}{1-C}$.

5) **a)** Justifier que, pour $n \geqslant 2$, $x_n \in [0, C]$.

b) En déduire que, pour $n \geqslant 2$, $|1 + \ln(1 - x_n)| \leqslant \frac{C^{n+1}}{1-C}$.

c) Déterminer la valeur de ℓ.

— FIN —