


## Probabilités - exercice supplémentaire

**Exercice 1** () Soit  $n$  un entier naturel non nul. On considère une urne contenant  $n$  boules, numérotées de 1 à  $n$ . On effectue, dans cette urne, un premier tirage, et l'on note  $X_1$  la variable aléatoire correspondant au numéro ainsi tiré. On procède ensuite comme ceci : on remet la boule tirée dans l'urne, et l'on y rajoute  $X_1$  nouvelles boules, portant toutes le même numéro  $X_1$ . On effectue ensuite un second tirage dans cette urne, et l'on note  $X_2$  la variable aléatoire correspondant au numéro ainsi tiré.

- 1) Déterminer la loi de  $X_1$ , ainsi que son espérance et sa variance.
- 2) Déterminer la loi de  $X_2$ .
- 3) Montrer que l'espérance de  $X_2$  vaut  $\mathbb{E}(X_2) = \frac{1-n}{2} + \frac{3n+1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ .
- 4) Déterminer un équivalent de  $\mathbb{E}(X_2)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .