

Devoir à la maison n° 13

À rendre le 3 février

Partie I

Soit F l'ensemble des applications continues f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y)f(x-y) = (f(x)f(y))^2$$

- 1) Déterminer un élément de F non constant et ne s'annulant pas sur \mathbb{R} .
- 2) Soit f un élément de F .
 - a) Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$ et montrer que f est l'application nulle si et seulement si $f(0) = 0$.
 - b) Montrer que si f s'annule en un point x , elle s'annule également en $\frac{x}{2}$.
 - c) Montrer que si f n'est pas l'application nulle, alors f ne s'annule pas et est de signe constant.

Partie II

Soit G l'ensemble des applications continues g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad g(x+y) + g(x-y) = 2(g(x) + g(y))$$

- 3) Montrer que l'on peut déterminer tous les éléments de G en fonction des éléments de F .
- 4) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels par

$$u_0 = 0 \text{ et } u_1 = \lambda$$
$$\text{et} \quad \forall n \geq 1 \quad u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = 2u_1$$

Préciser u_n en fonction de n et λ (on pourra chercher une solution particulière dont le terme général est un polynôme de degré 2 en n).

- 5) Soit $g \in G$ et $(\alpha, x) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $g(\alpha x)$ en fonction de α et de x (on commencera par le cas où α est entier, on continuera par le cas où α est rationnel, et on finira par le cas général).
- 6) Déterminer tous les éléments de G et en déduire ceux de F .

Partie III

Soit H l'ensemble des applications h de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad h(x + y) + h(x - y) &= 2(h(x) + h(y)) \\ \text{et} \quad \exists \alpha > 0 \quad \exists A \geqslant 0 \quad \forall x \in [-\alpha, \alpha] \quad |h(x)| &\leqslant A \end{aligned}$$

- 7) Soit $h \in H$. Montrer que pour tout entier n , h est bornée sur le segment $[-2^n\alpha, 2^n\alpha]$. En déduire que la restriction de h à un segment quelconque est bornée.
- 8) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h \in H$. Soit M_a un majorant de $|h|$ sur $[-1, 1] \cup [a - 1, a + 1]$. Montrer que

$$\forall u \in [-1, 1] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left| h(a + 2^{-n}u) - h(a) \right| \leqslant \frac{3 \cdot 2^n - 1}{4^n} M_a$$

- 9) En déduire que $H = G$.

— **FIN** —