

XVII Espaces vectoriels

17 février 2020

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . L'important est que \mathbb{K} soit un corps, mais le programme se limite à $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

1. Espaces vectoriels et combinaisons linéaires.

1.1. Définitions.

Définition 1.1.1.

On appelle \mathbb{K} -*espace vectoriel* ou *espace vectoriel sur \mathbb{K}* (noté \mathbb{K} -ev) tout triplet $(E, +, \cdot)$ où E est un ensemble muni d'une loi interne $+$ appelée addition et d'une loi externe \cdot , i.e. une application $\cdot : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$, vérifiant :

- (i) $(E, +)$ est un groupe commutatif dont le neutre est noté 0 ;
- (ii) En notant 1 (ou $1_{\mathbb{K}}$) le neutre de \mathbb{K} pour la multiplication, on a : $\forall x \in E \quad 1 \cdot x = x$;
- (iii) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall x \in E \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ (distributivité à droite) ;
- (iv) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x, y \in E \quad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ (distributivité à gauche) ;
- (v) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \quad (\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$ (associativité mixte).

Les éléments de E sont appelés *vecteurs*, et ceux de \mathbb{K} sont appelés *scalaires*.

Remarque 1.1.2.

Les vecteurs mathématiques étant des objets mathématiques comme les autres, on ne les marquera plus d'une flèche comme c'est traditionnellement l'usage dans le secondaire (cet usage est d'ailleurs réservé à la géométrie euclidienne, alors qu'on verra de nombreux exemples d'espaces vectoriels où les vecteurs ne sont ni ceux du plan, ni ceux de l'espace euclidien).

Remarque 1.1.3.

On omet souvent, pour alléger les notations, de noter le \cdot de la multiplication scalaire. Ainsi, on pourra écrire λx au lieu de $\lambda \cdot x$, pour un scalaire λ et un vecteur x .

Exemple 1.1.4. 1. L'ensemble des vecteurs du plan euclidien, celui des vecteurs de l'espace euclidien, ou de façon équivalente¹ $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ et $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, d'où les mots «vecteur» et «scalaire». De manière générale, tous les \mathbb{R}^n .

- 2. $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel. Remarquez que la loi \times est à la fois loi interne et externe sur \mathbb{R} (c'est aussi un \mathbb{Q} -espace vectoriel).
- 3. $(\mathbb{C}, +, \times)$ est à la fois un \mathbb{C} -espace vectoriel et un \mathbb{R} -espace vectoriel (et également un \mathbb{Q} -espace vectoriel).
- 4. \mathbb{N} , \mathbb{Z} et \mathbb{Q} ne sont pas des espaces vectoriels ni sur \mathbb{R} ni sur \mathbb{C} avec les opérations usuelles².
- 5. $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}(X)$ et $\mathbb{C}(X)$ sont des espaces vectoriels (sur quels corps ?)
- 6. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -ev.

Remarque 1.1.5.

Tout \mathbb{C} -espace vectoriel est aussi un \mathbb{R} -espace vectoriel. La réciproque fautive : \mathbb{R} n'est pas un \mathbb{C} -espace vectoriel, du moins pas avec les lois usuelles³.

Dans toute la suite, $(E, +, \cdot)$ désigne un \mathbb{K} -ev.

1.2. Règles de calcul.

Théorème 1.2.1 (Règles de calcul).

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$.

- (i) $\lambda \cdot x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E$ et, en particulier, $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$ et $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.
- (ii) $-x = (-1) \cdot x$ (l'opposé de x dans $(E, +)$ est égal à l'opposé de 1 dans $(\mathbb{K}, +, \times)$ multiplié par x).

1. Il conviendrait, en anticipant un peu, de dire plutôt : «de façon isomorphe».

2. En fait, c'est même vrai quelle que soit la loi qu'on essaie d'y définir. Pourquoi ?

3. Il y aurait moyen d'en définir une, qui serait complètement «tordue» en utilisant le fait que \mathbb{R} et \mathbb{C} peuvent être mis en bijection mais ça n'aurait vraisemblablement aucun intérêt.

- Démonstration.** (i) a) Remarquons tout d'abord qu'on a $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$ et donc par simplification dans $(E, +)$, donc $0 \cdot x = 0$.
- b) Remarquons ensuite qu'on a $\lambda \cdot 0 = \lambda(0 + 0) = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0$, d'où $\lambda \cdot 0 = 0$.
- c) On en déduit $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E \Rightarrow \lambda \cdot x = 0_E$.
- d) Réciproquement, supposons $\lambda \cdot x = 0$. Alors, si $\lambda \neq 0$, on a $x = 1 \cdot x = \left(\lambda \times \frac{1}{\lambda}\right) \cdot x = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) = \frac{1}{\lambda} \cdot 0 = 0$.
- (ii) On a $x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 - 1) \cdot x = 0 \cdot x = 0$.
Donc $(-1) \cdot x$ est bien l'opposé de x dans $(E, +)$. \square

1.3. Exemples.

Théorème 1.3.1 (Espace vectoriel produit).

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(E_1, +_1, \cdot_1) \dots (E_n, +_n, \cdot_n)$ des \mathbb{K} -ev. On considère l'ensemble produit $E = E_1 \times \dots \times E_n$ que l'on munit des deux lois $+$: $E \times E \rightarrow E$ et \cdot : $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$ définies, par les relations suivantes pour toutes familles $(x_k)_{k \in [1, n]}$ et $(y_k)_{k \in [1, n]}$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 +_1 y_1, \dots, x_n +_n y_n)$$

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda \cdot_1 x_1, \dots, \lambda \cdot_n x_n)$$

Alors, $(E, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -ev appelé *espace vectoriel produit*.

Démonstration.

Il suffit de vérifier les 5 points de la définition d'espace vectoriel :

- (i) $(E, +)$ est un groupe (cf. exercices sur les groupes produits vu en TD), et commutatif car tous les E_i le sont.
- (ii) Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E$, on a $1 \cdot (x_1, \dots, x_n) = (1 \cdot_1 x_1, \dots, 1 \cdot_n x_n) = (x_1, \dots, x_n)$.
- (iii) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $(x_1, \dots, x_n) \in E$. En posant

$$z = (\lambda + \mu) \cdot (x_1, \dots, x_n)$$

on a successivement :

$$\begin{aligned} z &= ((\lambda + \mu) \cdot_1 x_1, \dots, (\lambda + \mu) \cdot_n x_n) \\ &= (\lambda \cdot_1 x_1 + \mu \cdot_1 x_1, \dots, \lambda \cdot_n x_n + \mu \cdot_n x_n) \\ &= (\lambda \cdot_1 x_1, \dots, \lambda \cdot_n x_n) + (\mu \cdot_1 x_1, \dots, \mu \cdot_n x_n) \\ &= \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) + \mu \cdot (x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

- (iv) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $(x_1, \dots, x_n) \in E$ et $(y_1, \dots, y_n) \in E$. En posant

$$z = \lambda \cdot (x_1 +_1 y_1, \dots, x_n +_n y_n)$$

on a successivement :

$$\begin{aligned} z &= (\lambda \cdot (x_1 +_1 y_1), \dots, \lambda \cdot (x_n +_n y_n)) \\ &= (\lambda \cdot_1 x_1 + \lambda \cdot_1 y_1, \dots, \lambda \cdot_n x_n + \lambda \cdot_n y_n) \\ &= (\lambda \cdot_1 x_1, \dots, \lambda \cdot_n x_n) + (\lambda \cdot_1 y_1, \dots, \lambda \cdot_n y_n) \\ &= \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) + \lambda \cdot (y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

- (v) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E$. On a successivement :

$$\begin{aligned} (\lambda \times \mu) \cdot (x_1, \dots, x_n) &= ((\lambda \times \mu) \cdot_1 x_1, \dots, (\lambda \times \mu) \cdot_n x_n) \\ &= (\lambda \cdot_1 (\mu \cdot_1 x_1), \dots, \lambda \cdot_n (\mu \cdot_n x_n)) \\ &= \lambda \cdot (\mu \cdot_1 x_1, \dots, \mu \cdot_n x_n) \\ &= \lambda \cdot [\mu \cdot (x_1, \dots, x_n)]. \end{aligned}$$

\square

Remarque 1.3.2.

Cas particuliers :

- Déjà vu : \mathbb{R}^2 .
- Se généralise à tous les \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}^*$. Exemple de calcul dans \mathbb{R}^6 .

Théorème 1.3.3 (Espaces d'applications).

Soit X un ensemble non vide et E un \mathbb{K} -ev. On considère $\mathcal{F} = E^X$, que l'on munit de deux lois :

$$+ : \begin{cases} \mathcal{F} \times \mathcal{F} & \longrightarrow \mathcal{F} \\ (f, g) & \longmapsto \begin{cases} X & \rightarrow E \\ x & \mapsto f(x) + g(x) \end{cases} \end{cases}$$

et

$$\cdot : \begin{cases} K \times \mathcal{F} & \longrightarrow \mathcal{F} \\ (\lambda, f) & \longmapsto \begin{cases} X & \rightarrow E \\ x & \mapsto \lambda \cdot (f(x)) \end{cases} \end{cases}.$$

Alors $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -ev.

Démonstration.

Il suffit de vérifier les 5 points de la définition d'ev. On a déjà vu que $(E^X, +)$ était un groupe commutatif. Le lecteur saura vérifier les points (ii) à (v). \square

Exemple 1.3.4. 1. Soit I un intervalle, alors $(\mathbb{R}^I, +, \times)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel, $(\mathbb{C}^I, +, \times)$ est à la fois un \mathbb{R} -espace vectoriel et un \mathbb{C} -espace vectoriel.

2. L'ensemble des suites à valeurs réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel, celui des suites à valeurs complexes est à la fois un \mathbb{R} -espace vectoriel et un \mathbb{C} -espace vectoriel.

1.4. Combinaisons linéaires.

Définition 1.4.1.

Soient u_1, \dots, u_n des vecteurs de E , avec $n \in \mathbb{N}$. On appelle *combinaison linéaire* de u_1, \dots, u_n tout vecteur de la forme $u = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot u_k = \lambda_1 \cdot u_1 + \dots + \lambda_n \cdot u_n$, avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

Par convention la combinaison linéaire de 0 vecteur vaut 0_E .

Exemple 1.4.2. 1. 0 est toujours combinaison linéaire de deux vecteurs quelconques u et v car $0_E = 0_{\mathbb{K}}u + 0_{\mathbb{K}}v$.

2. Décomposition dans une base dans le plan ou l'espace.

Remarque 1.4.3.

Attention : il n'y a pas nécessairement unicité des λ_i . Exemple :

$$(1, 1) = 1 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (1, 3) + 1 \cdot (-1, -2)$$

$$(1, 1) = \frac{1}{2} \cdot (1, 0) + 0 \cdot (1, 3) - \frac{1}{2} \cdot (-1, -2)$$

Exemple 1.4.4.

Exemples menant, comme souvent, à la résolution d'un système :

1. $(3, -3, 0)$ est-il combinaison linéaire de $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 2)$ et $(1, 0, -3)$?
2. $(-1, 2, 3)$ est-il combinaison linéaire de $(1, 1, 0)$ et $(-1, 1, 3)$?
3. $(0, 3+3i)$ est-il combinaison linéaire de $(i, 1-i)$ et $(1-i, 1)$?

Remarque 1.4.5.

Pour la deuxième question, on sait y répondre avec le déterminant. Pour l'instant ce n'est possible que pour les vecteurs du plan mais bientôt... (à suivre).

On peut généraliser la définition précédente au cas des familles quelconques.

Définition 1.4.6.

Soit I un ensemble $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs indexées par I . On appelle *combinaison linéaire* de la famille $(x_i)_{i \in I}$ tout vecteur de la forme

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \cdot x_i$$

où $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille de scalaire à **support fini** c'est-à-dire telle que l'ensemble des $i \in I$ tels que $\lambda_i \neq 0$ **soit fini**.

Exemple 1.4.7.

Quelles sont les combinaisons linéaires de la famille $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$? et de la famille $(X^{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$?

Remarque 1.4.8 (Opérations sur les combinaisons linéaires).

Une combinaison linéaire de combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs est une combinaison linéaire des vecteurs de cette famille.

On montre en effet très simplement les points suivants.

- La somme de deux combinaisons linéaires d'une même famille est encore une combinaison linéaire de cette famille.
- Le produit par un scalaire d'une combinaison linéaire d'une famille est encore une combinaison linéaire de cette famille.

2. Sous-espaces vectoriels.

Dorénavant, nous omettrons d'écrire le \cdot de la multiplication scalaire.

2.1. Définitions.

Définition 2.1.1.

Soit $F \subset E$. On dit que F est un *sous-espace vectoriel* (sev) de E si :

- (i) $0 \in F$;
- (ii) F est stable par combinaisons linéaires quelconques de deux vecteurs, *i.e.* pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, et pour tous $x, y \in F$, $\lambda x + \mu y \in F$.

Remarque 2.1.2.

Il est clair que tout sous-espace vectoriel est stable par multiplication externe ainsi que par l'addition. Par récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, toute combinaison linéaire de n vecteurs d'un sous-espace vectoriel appartient encore à ce sous-espace vectoriel. Donc tout sous-espace vectoriel est stable par toute combinaison linéaire de ses vecteurs.

Proposition 2.1.3.

Soit $F \subset E$. Toutes les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) F est un sous-espace vectoriel de E ;
- (ii) F est non vide, stable par addition et par multiplication externe ;
- (iii) F est un sous-groupe de E stable par multiplication externe ;
- (iv) F est non vide et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \forall (x, y) \in F^2 \quad \lambda x + \mu y \in F$.
- (v) F est non vide et $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall (x, y) \in F^2 \quad \lambda x + y \in F$;
- (vi) $0_E \in F$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall (x, y) \in F^2 \quad \lambda x + y \in F$.

Démonstration.

On remarque successivement :

- (i) \Rightarrow (ii) Il suffit de prendre $\lambda = 1$ pour la stabilité par addition et $y = 0$ pour la stabilité par multiplication externe.
- (ii) \Rightarrow (iii) Supposons (ii). Alors F est stable par multiplication externe, donc en particulier $\forall x \in E \quad (-1) \cdot x \in F$. Donc F est stable par opposé. Par ailleurs, F est non vide et stable par addition, c'est donc un sous-groupe de E .
- (iii) \Rightarrow (iv) Supposons (iii). Alors F est un sous-groupe donc n'est pas vide. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $(x, y) \in F^2$. F est stable par multiplication externe, donc $\lambda x \in F$ et $\mu y \in F$. F est un sous-groupe de E , donc $\lambda x + \mu y \in F$.

(iv) \Rightarrow (v) Direct avec $\mu = 1$.

(v) \Rightarrow (vi) Supposons (v). Alors F est non vide et contient donc un élément x_0 , donc contient 0_E car $0_E = (-1) \cdot x_0 + x_0$. On en déduit (vi).

(vi) \Rightarrow (i) Supposons (vi). Alors, pour tout $(x, y) \in F^2$ et pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda x = \lambda x + 0$ donc $\lambda x \in F$. De plus, $\lambda x + \mu y = \mu y + (\lambda x)$, qui appartient donc bien à F avec (vi), et l'on a (i). □

Remarque 2.1.4.

En pratique pour montrer qu'un sous-ensemble de E est un sous-espace vectoriel, on utilisera (iv) ou (v), qui est généralement le plus rapide à démontrer.

Exemple 2.1.5.

E et $\{0\}$ sont des sev de E , dits *triviaux*.

Exemple 2.1.6.

L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène dont la variable est une fonction de I dans \mathbb{R} est un sev de \mathbb{R}^I .

Théorème 2.1.7.

Soit F un sous-ensemble de E . Alors F muni des lois induites de E est un \mathbb{K} -espace vectoriel si et seulement si F est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration. — Supposons que F muni des lois de E soit un \mathbb{K} -espace vectoriel. Alors $(F, +)$ est un groupe abélien donc c'est un sous-groupe de $(E, +)$. De plus, F est stable par multiplication externe, donc c'est bien un sous-espace vectoriel de E .
— Réciproquement, si F est un sous-espace vectoriel de E , on sait qu'il s'agit d'un sous-groupe de $(E, +)$, donc $(F, +)$ est un groupe abélien. De plus, F est stable par multiplication externe, donc la multiplication externe de E induit bien une multiplication externe sur F . On peut aisément vérifier que les propriétés (ii) à (v) des espaces vectoriels sont alors vérifiées par les lois induites sur F . □

Remarque 2.1.8.

En pratique, pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, il est plus rapide de montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel plus gros : on le fera donc quasiment **TOUJOURS**, et l'on ne reviendra presque **JAMAIS** à la définition complète.

2.2. Exemples.

Exemples géométriques :

Droites dans \mathbb{R}^2 Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$. À quelle condition la droite d'équation $ax + by = c$ est-elle un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 ?

Plans dans \mathbb{R}^3 Même question pour un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.

Cercles dans \mathbb{R}^2 Même question pour un cercle dans le plan.

Exemples avec polynômes et fractions rationnelles : quels sont les liens entre \mathbb{R} , \mathbb{C} , $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathbb{C}_n[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}(X)$ et $\mathbb{C}(X)$?

2.3. Opérations sur les sous-espaces vectoriels.

Dans toute la suite du chapitre, F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E .

a. Intersection.

Théorème 2.3.1. 1. $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E .

2. $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Démonstration. 1. On a évidemment $0 \in F \cap G$. On vérifie aisément que pour tout $(x, y) \in (F \cap G)^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda x + y \in F \cap G$.

2. Si un des deux espaces vectoriels est inclus dans l'autre, alors $F \cup G$ est trivialement un sous-espace vectoriel de E .

Supposons à l'inverse qu'aucun des deux sous-espaces vectoriels ne soit inclus dans l'autre et montrons qu'alors $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel. $F \setminus G$ contient au moins un élément x , et $G \setminus F$ au moins un élément y . Posons alors $z = x + y$. Si z appartenait à F , on aurait $y = z - x \in F$ ce qui n'est pas le cas. De même, on ne peut avoir $z \in G$. Donc $z \notin F \cup G$, donc $F \cup G$ n'est pas stable par addition. \square

Exemple 2.3.2.

Dans l'espace, toute droite passant par 0 est l'intersection de deux plans passant par 0, donc est un sous-espace vectoriel.

Cette propriété se généralise en fait à une intersection d'une famille quelconque de sous-espaces vectoriels :

Théorème 2.3.3.

Soit $(F_i)_{i \in I}$ (resp. \mathcal{F}) une famille (resp. un ensemble) de sous-espaces vectoriels de E . Alors

$$\bigcap_{i \in I} F_i \quad \text{resp.} \quad \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$$

est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration.

Remarquons que le cas de l'intersection d'un ensemble se traite comme le cas particulier d'une famille : il s'agit de l'intersection de la famille des $(F_i)_{F \in \mathcal{F}}$ où $I = \mathcal{F}$ et pour tout $G \in I$, $F_G = G$.

La démonstration s'effectue alors comme la précédente. Notons F l'intersection des F_i pour $i \in I$.

1. On a évidemment $0 \in F_i$ pour tout $i \in I$, donc $0 \in F$.
2. Pour tout $(x, y) \in F^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a successivement :

$$\begin{aligned} \forall i \in I \quad (x, y) &\in F_i^2 \\ \forall i \in I \quad \lambda x + y &\in F_i^2 \\ \lambda x + y &\in \bigcap_{i \in I} F_i \end{aligned}$$

\square

Un exemple important d'intersection a priori infinie est donnée dans la partie suivante.

b. Sous-espace vectoriel engendré par une partie.

Définition 2.3.4 (Sous-espace vectoriel engendré par une partie).

Soit X une partie (quelconque) du \mathbb{K} -espace vectoriel E . On appelle \mathbb{K} -sous-espace vectoriel engendré par X et on note $\text{Vect}_{\mathbb{K}}(X)$ (ou $\text{Vect}(X)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant X (« plus petit » est à entendre au sens de l'inclusion).

Démonstration.

Cette définition présuppose qu'un tel sous-espace existe et

qu'il est unique. L'unicité sous réserve d'existence du plus petit élément d'un ensemble muni d'une relation d'ordre est connue. Montrons l'existence.

Notons \mathcal{F} l'ensemble des F tels que :

1. F est un sous-espace vectoriel de E ;
2. et $X \subset F$.

On veut montrer que cet ensemble \mathcal{F} possède un plus petit élément pour l'inclusion.

Posons alors

$$V = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$$

et montrons que V est ce plus petit élément.

Pour cela montrons tout d'abord $V \in \mathcal{F}$.

Pour tout $F \in \mathcal{F}$, on a $X \subset F$, donc

$$X \subset \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = V$$

De plus, V est une intersection de sous-espaces vectoriels de E donc c'est un sous-espace vectoriel de E .

Donc on a $V \in \mathcal{F}$.

Il suffit donc maintenant de montrer que V est un mineur de \mathcal{F} , c'est-à-dire que pour tout $F \in \mathcal{F}$, on a $V \subset F$.

Soit $F \in \mathcal{F}$. On a

$$V = \bigcap_{G \in \mathcal{F}} G$$

donc tout élément de V appartient à tout élément de \mathcal{F} , donc en particulier à F . On a donc $V \subset F$.

V minore donc \mathcal{F} pour l'inclusion.

V est donc un élément de \mathcal{F} qui minore \mathcal{F} : c'est donc son plus petit élément. \square

Remarque 2.3.5. 1. Tout sous-espace vectoriel de E contenant X contient donc $\text{Vect}(X)$.

2. Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors F est le plus petit sous-espace vectoriel contenant F , donc $\text{Vect}(F) = F$.

Remarque 2.3.6.

Soit I un ensemble et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . On notera $\text{Vect}((x_i)_{i \in I})$ le sous-espace $\text{Vect}(\{x_i \mid i \in I\})$. En particulier si I est de la forme $\llbracket 1, n \rrbracket$, on notera $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ le sous-espace $\text{Vect}(\{x_1, \dots, x_n\})$.

Le procédé de construction de $\text{Vect}(X)$ présenté plus haut est très élégant et peut s'utiliser dans de nombreuses situations. En revanche, il est assez peu concret. Heureusement, le théorème suivant nous dit très précisément ce que contient $\text{Vect}(X)$.

Théorème 2.3.7.

Soit X une partie de E . Alors $\text{Vect}(X)$ est exactement l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de X . Autrement dit :

1. Toute combinaison linéaire d'éléments de X appartient à $\text{Vect}(X)$.
2. Pour tout élément x de $\text{Vect}(X)$, il existe une famille de coefficients $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in X}$ à support fini telle qu'on a

$$x = \sum_{\alpha \in X} \lambda_\alpha \alpha.$$

Dit autrement : il existe un entier $n \in \mathbb{N}$, des vecteurs u_1, \dots, u_n de X ($\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_k \in X$) et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels qu'on a

$$x = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k.$$

Démonstration.

Notons V l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X .

Pour montrer $V = \text{Vect}(X)$, nous allons montrer que V est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant X .

1. V est un sous-espace vectoriel de E . En effet :

- a) il contient 0_E (combinaison linéaire de 0 vecteur de X) ;
- b) il est stable par addition car la somme d'une combinaison linéaire de p vecteurs de X et d'une combinaison linéaire de q vecteurs de X est une combinaison linéaire (d'au plus) $p + q$ vecteurs de X ;
- c) il est stable par multiplication par un scalaire car le produit par un scalaire λ d'une combinaison linéaire de n vecteurs de X est la combinaison linéaire de ces mêmes vecteurs où les coefficients ont tous été multiplié par λ .

2. V contient X . En effet pour tout $x \in X$, x est la combinaison linéaire $1 \cdot x$, donc appartient à V . Donc $X \subset V$.

3. V minore l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E contenant X . En effet, soit F un sous-espace vectoriel de E contenant X . Montrons $V \subset F$.

Soit $x \in V$ alors x est combinaison linéaire d'éléments de X . Or F contient X et est un sous-espace-vectoriel donc est stable par combinaison linéaire. Il contient donc x en particulier. On a donc $\forall x \in V \quad x \in F$.

Donc $V \subset F$.

Donc V est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant X . \square

Remarque 2.3.8.

En particulier, pour toute famille finie de vecteurs x_1, \dots, x_n , $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est l'ensemble

$$\left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

Exemple 2.3.9. 1. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note

$$f_\alpha : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{\alpha x} \end{cases}.$$

Alors $\text{Vect}((f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ qui contient les fonctions sh, ch mais pas sin ni th (indication : il suffit de remarquer que les seules fonctions bornées de ce sous-espace vectoriel sont les fonctions constantes).

2. En géométrie dans \mathbb{R}^2 , si (\vec{i}, \vec{j}) est une base, tout vecteur de \mathbb{R}^2 est combinaison linéaire de \vec{i} et \vec{j} , donc $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}(\vec{i}, \vec{j})$.

3. Dans \mathbb{R}^3 , si \mathcal{D} est une droite vectorielle de vecteur directeur u , alors $\mathcal{D} = \{ \lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K} \} = \text{Vect}(u)$. Si \mathcal{P} est un plan vectoriel de vec-

teurs directeurs $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$,

alors en écrivant une équation paramétrique de \mathcal{P} , on voit que tout point P de l'espace est dans \mathcal{P} si et seulement s'il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tel que $P = t_1 u + t_2 v$, donc $\mathcal{P} = \text{Vect}(u, v)$. Exemple avec $2x - y + z = 0$.

4. $\mathbb{R} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(1)$ et $\mathbb{C} = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(1) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(1, i)$.

5. $E = (\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un ev. On note les fonctions suivantes, définies sur \mathbb{R} par $\exp : x \mapsto e^x$; $\widetilde{\exp} : x \mapsto e^{-x}$; $f : x \mapsto x \sin(2x)$ et $g : x \mapsto x \sin(3x)$. Avec $F = \text{Vect}(\exp, \widetilde{\exp})$ et $G = \text{Vect}(f, g)$, on a $\text{ch} \in F$ mais $\sin \notin G$.

6. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = 0$ est $\text{Vect}(f, g)$ avec $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-2x}$ et $g = \exp$.

Proposition 2.3.10.

Soit X et Y deux parties de E . Alors :

1. $X \subset Y \Rightarrow \text{Vect}(X) \subset \text{Vect}(Y)$;
2. $\text{Vect}(\text{Vect}(X)) = \text{Vect}(X)$.

Démonstration. 1. Supposons $X \subset Y$. Alors $X \subset Y \subset \text{Vect}(Y)$. Donc $\text{Vect}(Y)$ est un sous-espace vectoriel de E contenant X donc contient $\text{Vect}(X)$.

2. Posons $F = \text{Vect}(X)$. F est un sous-espace vectoriel de E . Donc d'après la remarque faite plus haut, $\text{Vect}(F) = F$. \square

c. Somme.

Définition 2.3.11.

On appelle *somme de F et G* l'ensemble de E noté $F + G$ défini par $F + G = \{ x + y \mid x \in F, y \in G \}$.

Théorème 2.3.12. 1. $F + G$ est un sev de E .

2. $F + G$ est le plus petit sev qui contient F et G :

$$F + G = \text{Vect}(F \cup G).$$

Démonstration. 1. Immédiat.

2. Montrons d'abord que $F \subset F + G$: soit $f \in F$, alors $f = f + 0$, et $0 \in G$, donc $f \in F + G$. On montre bien sûr de même que $G \subset F + G$. On a donc $(F \cup G) \subset (F + G)$.

Il suffit ensuite de montrer que pour tout sous-espace vectoriel H de E contenant $F \cup G$, on a $(F + G) \subset H$. Soit H un sous-espace vectoriel de E . Supposons $F \subset H$ et $G \subset H$. Montrons $(F + G) \subset H$.

Soit $z \in F + G$. Alors il existe $x \in F$ et $y \in G$ vérifiant $z = x + y$. On a alors $x \in H$ et $y \in H$ donc $x + y \in H$, donc $z \in H$.

Donc $F + G \subset H$. \square

Remarque 2.3.13.

Si $A = F + G$ et $a \in A$, il n'y a pas forcément unicité de la décomposition $a = f + g$, avec $f \in F$ et $g \in G$, loin de là ! Considérer par exemple le cas $F + F$.

Exemple 2.3.14.

Si $F \subset G$, alors $F + G = G$.



$F + G \neq F \cup G$ (sauf si $F \subset G$ ou $G \subset F$).

Exemple 2.3.15.

Soit \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites du plan passant par 0 et non confondues. Alors $\mathbb{R}^2 = \mathcal{D} + \mathcal{D}'$.

Exercice 2.3.16.

Soit \mathcal{P}_1 le plan de représentation cartésienne $x + 3z = 0$ et \mathcal{P}_2 le plan de représentation cartésienne $x + y + z = 0$.

Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$.

Lemme 2.3.17.

Soit X et Y des parties de E . Alors

$$\text{Vect}(X) + \text{Vect}(Y) = \text{Vect}(X \cup Y).$$

Démonstration.

$\text{Vect}(X \cup Y)$ est un sous-espace vectoriel contenant $X \cup Y$, donc contient X . Or tout espace vectoriel contenant X contient $\text{Vect}(X)$, donc $\text{Vect}(X \cup Y)$ contient $\text{Vect}(X)$. De même, il contient $\text{Vect}(Y)$. $\text{Vect}(X \cup Y)$ est donc un espace vectoriel contenant les deux sous-espaces vectoriels $\text{Vect}(X)$ et $\text{Vect}(Y)$, donc il contient leur somme. On a donc $\text{Vect}(X) + \text{Vect}(Y) \subset \text{Vect}(X \cup Y)$.

Par ailleurs, $\text{Vect}(X) + \text{Vect}(Y)$ contient $\text{Vect}(X)$, donc contient X . De même, il contient Y . Il contient donc $X \cup Y$. Or $\text{Vect}(X) + \text{Vect}(Y)$ est un sous-espace vectoriel, donc il contient $\text{Vect}(X \cup Y)$. On a donc $\text{Vect}(X \cup Y) \subset \text{Vect}(X) + \text{Vect}(Y)$.

On a donc $\text{Vect}(X \cup Y) = \text{Vect}(X) + \text{Vect}(Y)$. \square

Proposition 2.3.18. 1. Étant donné deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de E , on a

$$F_1 + F_2 = F_2 + F_1 = \text{Vect}(F_1 \cup F_2).$$

2. Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$ et F_1, \dots, F_n des sous-espaces vectoriels de E , on pose

$$F_1 + \dots + F_n = \text{Vect}(F_1 \cup \dots \cup F_n).$$

Alors

$$F_1 + \dots + F_n = (F_1 + \dots + F_{n-1}) + F_n$$

et la façon de parenthéser cette expression n'a pas d'importance. De plus,

$$F_1 + \dots + F_n = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \mid x_1 \in F_1, \dots, x_n \in F_n \right\}.$$

Démonstration. 1. En remarquant que $\text{Vect}(F_i) = F_i$ pour $i = 1, 2$, on a :

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 &= \text{Vect}(F_1) + \text{Vect}(F_2) \\ &= \text{Vect}(F_1 \cup F_2) \\ &= \text{Vect}(F_2 \cup F_1) \\ &= F_2 + F_1. \end{aligned}$$

2. Ce point se démontre par récurrence sur le nombre de sous-espaces vectoriels considérés. On sait déjà $\text{Vect}(F_1) = F_1$, ce qui montre la propriété dans le cas où $n = 1$ (on aurait même pu commencer à zéro, en considérant que la somme de 0 sev est $\{0_E\}$ qui est aussi $\text{Vect}(\emptyset)$).

La propriété d'hérédité se montre en posant $S = F_1 + \dots + F_n + F_{n+1}$ et en écrivant

$$\begin{aligned} S &= \text{Vect}(F_1 \cup \dots \cup F_n) + \text{Vect}(F_{n+1}) \\ &= \text{Vect}(F_1 \cup \dots \cup F_n \cup F_{n+1}). \end{aligned}$$

\square

d. Somme directe.

Étant donné des sous-espaces vectoriels F_1, \dots, F_n de E , $F_1 + \dots + F_n$ est l'ensemble des vecteurs x de E pouvant s'écrire au moins d'une façon sous la forme $x_1 + \dots + x_n$ avec, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i \in F_i$. On va s'intéresser ici au cas où, pour tout x , la décomposition est unique.

Définition 2.3.19 (Somme directe).

Étant donnés $n \in \mathbb{N}^*$ et F_1, \dots, F_n des sous-espaces vectoriels de E , on dit que F_1, \dots, F_n sont *en somme directe* ou que la somme $F_1 + \dots + F_n$ est *directe* si tout élément x de $F_1 + \dots + F_n$ se décompose de manière unique sous la forme $x_1 + \dots + x_n$ avec, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i \in F_i$.

Dans ce cas, le sous-espace vectoriel $F_1 + \dots + F_n$ est noté

$$F_1 \oplus \dots \oplus F_n$$

ou

$$\bigoplus_{i=1}^n F_i.$$

Dans la suite de cette partie, n désigne un entier naturel et F_1, \dots, F_n des sous-espaces vectoriels de E .

Proposition 2.3.20.

Les propositions suivantes sont équivalentes.

- (i) F_1, \dots, F_n sont en somme directe.
- (ii) La seule décomposition possible du vecteur nul sous la forme $x_1 + \dots + x_n$ avec $x_i \in F_i$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ est la décomposition triviale $0 + \dots + 0$.
- (iii) Tout élément de E s'écrit au plus d'une façon sous la forme $x_1 + \dots + x_n$ avec $x_i \in F_i$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Démonstration.(i) \Rightarrow (ii) Supposons que F_1, \dots, F_n sont en somme directe. Le vecteur nul appartient à $F_1 \oplus \dots \oplus F_n$, donc se décompose d'une et une seule façon comme somme d'éléments de F_1, \dots, F_n . Or il s'écrit sous la forme $0 + \dots + 0$, qui est donc la seule décomposition possible de x .

(ii) \Rightarrow (iii) Supposons que la seule décomposition du vecteur nul sous la forme d'une somme d'éléments de F_1, \dots, F_n soit sous la forme $0 + \dots + 0$.

Soit alors x un élément de E . Supposons que x s'écrive à la fois $x_1 + \dots + x_n$ et sous la forme $y_1 + \dots + y_n$ où, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $x_i \in F_i$ et $y_i \in F_i$. Alors on a

$$0 = x - x = (x_1 - y_1) + \dots + (x_n - y_n).$$

Or pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i - y_i \in F_i$, donc on a trouvé une décomposition du vecteur nul. Or on sait que cette décomposition est nécessairement la décomposition triviale, donc pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $x_i - y_i = 0$.

On a donc $x_i = y_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, c'est-à-dire $(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$.

Donc x se décompose d'au plus une façon.

Donc tout élément de E s'écrit au plus d'une façon sous la forme $x_1 + \dots + x_n$ avec $x_i \in F_i$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

(iii) \Rightarrow (i) Supposons (iii) et montrons (i). Soit $x \in F_1 + \dots + F_n$. Alors x se décompose d'au moins une façon comme sous la forme $x_1 + \dots + x_n$ avec, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i \in F_i$.

De plus, d'après (iii), x se décompose au plus d'une façon sous cette forme.

Il se décompose donc de façon unique sous cette forme.

Donc la somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe. \square

Remarque 2.3.21.

La somme $F_1 + \dots + F_n$ est donc directe si et seulement si l'application $F_1 \times \dots \times F_n \rightarrow E$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \dots + x_n$ est injective. C'est évidemment un morphisme (de groupes, mais aussi d'ev. comme nous le verrons plus tard). La proposition précédente revient à étudier le noyau de ce morphisme.

Proposition 2.3.22 (Somme directe de deux sous-espaces vectoriels).

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels.

Alors la somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Démonstration.

Montrons la double implication.

Sens direct Supposons $F + G$ en somme directe. Comme $F \cap G$ est un espace vectoriel, on a évidemment $\{0_E\} \subset F \cap G$. Il suffit donc de montrer $F \cap G \subset \{0_E\}$ pour conclure qu'on a $F \cap G = \{0_E\}$.

Soit $x \in F \cap G$. On a alors $0_E = x + (-x)$ et $x \in F$ et $-x \in G$. Or F et G sont en somme directe donc cette décomposition est nécessairement la décomposition nulle : on a donc $(x, -x) = (0, 0)$ donc $x = 0$.

Sens indirect Supposons $F \cap G = \{0_E\}$. Alors montrons que 0 a la décomposition triviale pour seule décomposition comme somme d'un élément de F et de G . Supposons que 0 s'écrive sous la forme $x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$. Alors $x = -y \in G$, donc $x \in F \cap G = \{0\}$, donc $x = 0$ et $y = -x = 0$.

0 admet donc pour seule décomposition la décomposition triviale. \square

Remarque 2.3.23.


Ce résultat n'est valable que pour la somme de deux sous-espaces vectoriels, pas plus.

Exercice 2.3.24.

Trouver trois sous-espaces vectoriels F, G, H de \mathbb{R}^2 tels qu'on a $F \cap G \cap H = \{0\}$ (ou même tels

que $F \cap G = G \cap H = H \cap F = \{0\}$ bien que F , G et H ne soient pas en somme directe.

En revanche, on a le résultat suivant :

Proposition 2.3.25.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit F_1, \dots, F_n n sous-espaces vectoriels de E . On pose $F = F_1 + \dots + F_p$ et $G = F_{p+1} + \dots + F_n$.

Alors la somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1. la somme $F_1 + \dots + F_p$ est directe ;
2. la somme $F_{p+1} + \dots + F_n$ est directe ;
3. la somme $F + G$ est directe.

Démonstration.

Montrons la double implication.

Sens direct Supposons que la somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe. Alors

1. Montrons que la somme $F_1 + \dots + F_p$ est directe. Considérons une décomposition du vecteur nul sous la forme $x_1 + \dots + x_p$ où $x_i \in F_i$ pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. En posant, pour $i \in \llbracket p+1, n \rrbracket$, $x_i = 0_E$, on a

$$0_E = x_1 + \dots + x_p + x_{p+1} + \dots + x_n.$$

Or la somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe, donc pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i = 0$, donc pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $x_i = 0$.

2. De même, la somme $F_{p+1} + \dots + F_n$ est directe.
3. Montrons que la somme $F + G$ est directe. Supposons que 0_E s'écrive sous la forme $x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$. On a $x \in F$, donc x s'écrit sous la forme $x_1 + \dots + x_p$ où pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $x_i \in F_i$. De même y s'écrit sous la forme $x_{p+1} + \dots + x_n$ où pour tout $i \in \llbracket p+1, n \rrbracket$, $x_i \in F_i$.

On a donc

$$0_E = x_1 + \dots + x_p + x_{p+1} + \dots + x_n.$$

Or la somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe, donc pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i = 0$. Ainsi, $x = 0$ et $y = 0$.

La seule décomposition de 0_E comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est donc la décomposition triviale. Donc la somme $F + G$ est directe.

Sens indirect Supposons que les trois conditions sont vérifiées et montrons que la somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe.

Considérons une décomposition de 0_E sous la forme

$$0_E = x_1 + \dots + x_p + x_{p+1} + \dots + x_n,$$

où $x_i \in F_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Alors, en posant $x = x_1 + \dots + x_p$ et $y = x_{p+1} + \dots + x_n$, on a $0_E = x + y$ et $x \in F$ et $y \in G$. Or F et G sont en somme directe donc $x = 0_E$ et $y = 0_E$. On a donc

$$0_E = x_1 + \dots + x_p.$$

Or F_1, \dots, F_p sont en somme directe donc pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $x_i = 0_E$. De même pour tout $i \in \llbracket p+1, n \rrbracket$, $x_i = 0_E$.

Donc 0_E admet la décomposition triviale pour seule décomposition comme somme d'éléments de F_1, \dots, F_n . Donc la somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe.

□

On peut donc mettre en place de nombreuses stratégies pour montrer qu'une somme de n sous-espaces vectoriels est directe. En pratique, on raisonne de proche en proche en ajoutant les sous-espaces vectoriels le plus souvent un à un, en utilisant le résultat suivant.

Corollaire 2.3.26.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et F_1, \dots, F_{n+1} $n+1$ sous-espaces vectoriels de E . Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. la somme $F_1 + \dots + F_{n+1}$ est directe ;
2. la somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe et la somme de $F_1 \oplus \dots \oplus F_n$ et de F_{n+1} est directe ;
3. la somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe et

$$(F_1 \oplus \dots \oplus F_n) \cap F_{n+1} = \{0_E\}.$$

Démonstration.

L'équivalence des deux premiers points découle de la propriété précédente (avec $p = n$). Celle des deux derniers, de la caractérisation de la somme directe de deux sous-espaces vectoriels.

□

Définition 2.3.27.

On dit que F est **un** supplémentaire de G (ou que F et G sont *supplémentaires*) si

$$E = F \oplus G,$$

i.e. si les deux conditions suivantes sont remplies :

1. la somme $F + G$ est directe ;
2. $E = F + G$.

Proposition 2.3.28.

F et G sont supplémentaires si et seulement si tout élément de E s'écrit *de manière unique* comme somme d'un élément de F et d'un élément de G .

Démonstration.

Direct d'après les définitions. \square

Exemple 2.3.29.

Montrons que dans \mathbb{R}^2 , deux droites passant par 0 et non confondues sont toujours supplémentaires.

Exercice 2.3.30.

Dans \mathbb{R}^2 , on note $\mathcal{D} : x + y = 0$, $\mathcal{D}' : x - y = 0$ et $\mathcal{D}'' : x - 2y = 0$.

1. Montrer $\mathbb{R}^2 = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}'$
2. Montrer $\mathbb{R}^2 = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}''$

Remarquez qu'il n'y a donc pas unicité du supplémentaire (croire le contraire est une faute classique et très grave !).

Remarque 2.3.31.

On peut montrer de même que dans \mathbb{R}^3 , un plan et une droite passant par 0 et tel que le plan ne contienne pas la droite sont toujours supplémentaires.

Exemple 2.3.32.

$\mathcal{P} : x - y + z = 0$ et $\mathcal{D} : x = t + 1, y = 0, z = 2t + 2$. On montre que $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est une base de \mathbb{R}^3 , avec \vec{I} vecteur directeur de \mathcal{D} et (\vec{J}, \vec{K}) base de \mathcal{P} .

Exemple 2.3.33.

\mathbb{R} et $i\mathbb{R}$ dans \mathbb{C} .

Exercice 2.3.34.

On note E l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , I celui des applications impaires, et P celui des applications paires.

Montrer $E = I \oplus P$.

3. Translations, sous-espaces affines.

Les sous-espaces affines (sea) généralisent la notion de sev, en s'affranchissant de la contrainte « passer par 0 ». Ainsi, dans la théorie des ev, un sev passe toujours par 0.

Là encore on pourra identifier points et vecteurs, mais on essaiera de noter les points avec des majuscules et les vecteurs avec des minuscules, comme en géométrie, mais nous passerons souvent d'un point de vue à l'autre.

Définition 3.0.1.

Soit $A, B \in E$, on note $\overrightarrow{AB} = B - A$.

Remarque 3.0.2.

La loi + des ev permet de donner un sens à $B - A$, vus comme points, qui vaut alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

3.1. Translations.

Définition 3.1.1.

Soit un vecteur $u \in E$. On appelle *translation* de vecteur u l'application $E \rightarrow E$:

$$x \mapsto x + u$$

3.2. Sous-espaces affines.

Définition 3.2.1.

On appelle *sous-espace affine* de E toute partie de E qui est le translaté d'un sev de E , i.e. toute partie \mathcal{F} de la forme $\mathcal{F} = u + F = \{u + x \mid x \in F\}$, où F est un sev de E et u est un vecteur de E , ensemble que l'on note aussi $u + F$.

L'ensemble $\{b - a \mid (a, b) \in \mathcal{F}^2\}$ est appelé la *direction* de \mathcal{F} et ses éléments sont appelés les *vecteurs directeurs* de \mathcal{F} .

Proposition 3.2.2.

Soit $u \in E$, F un sous-espace vectoriel de E . Alors la direction du sous-espace affine $u + F$ est F . En particulier cette direction est un espace vectoriel.

Démonstration.

Notons D la direction de $u + F$.

On a

$$\begin{aligned} D &= \{b - a \mid (a, b) \in \mathcal{F}^2\} \\ &= \{(u + x) - (u + y) \mid (x, y) \in F^2\} \\ &= \{x - y \mid (x, y) \in F^2\}. \end{aligned}$$

Or on a directement

$$F \subset \{x - 0 \mid x \in F\} \subset \{x - y \mid (x, y) \in F^2\} \subset D, \text{ donc } D = F. \quad \square$$

Remarque 3.2.3.

Notation fréquente : \mathcal{F} étant un sea de E , on note F ou $\vec{\mathcal{F}}$ sa direction.

Exemple 3.2.4.

Tout sev est un sea.

Exemple 3.2.5.

Dessin dans l'espace.

Exemple 3.2.6.

$E = \mathbb{R}^2$. On considère l'équation différentielle $y' + 3y = x^2$ (E). Montrer que l'ensemble \mathcal{S}_0 des solutions de l'équation homogène forme un sev de E , et l'ensemble \mathcal{S} des solutions de (E) forme un sea de direction \mathcal{S}_0 .

Théorème 3.2.7.

Soit \mathcal{F} un sea de direction F .

- (i) \mathcal{F} est le translaté de sa direction par n'importe lequel de ses points : $\forall a \in \mathcal{F} \quad \mathcal{F} = a + F$.

- (ii) Soit $a \in \mathcal{F}$ et $b \in E$. Alors on a

$$b \in \mathcal{F} \iff a - b \in F.$$

Démonstration.

\mathcal{F} est de la forme $c + F$, où $c \in E$.

- (i) Soit $a \in \mathcal{F}$. On a alors $a \in c + F$, il existe donc $u \in F$ tel que $a = c + u$.

Si $v \in F$, alors $a + v = c + (u + v) \in c + F$, donc $a + F \subset \mathcal{F}$.

Réciproquement, si $v \in F$, alors $c + v = a + (v - u) \in a + F$, donc $\mathcal{F} \subset a + F$.

Ainsi, $a + F = \mathcal{F}$.

- (ii) On a donc $\mathcal{F} = a + F$.

Si $b \in \mathcal{F}$, alors par définition de la direction $a - b \in F$.

Réciproquement, si $a - b \in F$, alors $b - a \in F$ et $b = a + (b - a) \in a + F$, donc $b \in \mathcal{F}$.

On a donc bien $b \in \mathcal{F} \iff a - b \in F$. □

Remarque 3.2.8.

Tout sea contenant 0 est donc un sev.

Corollaire 3.2.9.

Deux sea sont égaux si et seulement s'ils ont même direction et un point en commun.

Démonstration.

\Rightarrow : évident.

\Leftarrow : soient \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 de même direction F et $a \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. Alors d'après le théorème précédent, $\mathcal{F}_1 = a + F = \mathcal{F}_2$. □

Définition 3.2.10.

Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux sea de directions F et G .

- (i) On dit que \mathcal{F} est parallèle à \mathcal{G} si $F \subset G$.
 (ii) On dit que \mathcal{F} et \mathcal{G} sont parallèles si $F = G$.



Vocabulaire : « être parallèle à » n'est pas une relation symétrique.

Exemple 3.2.11.

Une droite est parallèle à un plan, mais certainement pas l'inverse.

Théorème 3.2.12 (Intersections de sea).

Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux sea de directions F et G . Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, alors on dit que \mathcal{F} et \mathcal{G} sont *concourants* ou *sécants*, et dans ce cas $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sea de direction $F \cap G$.

Démonstration.

Supposons $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, alors il existe $a \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Donc $\mathcal{F} = a + F$ et $\mathcal{G} = a + G$.

Montrons alors que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = a + F \cap G$:

Soit $b \in E$. On a successivement :

$$\begin{aligned} b \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} &\iff b \in \mathcal{F} \text{ et } b \in \mathcal{G} \\ &\iff b - a \in F \text{ et } b - a \in G \\ &\iff b - a \in F \cap G \\ &\iff b \in a + F \cap G \end{aligned}$$

D'où le résultat. \square

Théorème 3.2.13 (Parallélisme et intersection).

Si \mathcal{F} est parallèle à \mathcal{G} , alors soit $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$, soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

En particulier si \mathcal{F} et \mathcal{G} sont parallèles, alors soit $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$, soit $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

Démonstration.

Supposons $F \subset G$. Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, alors il existe $a \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, donc $\mathcal{F} = a + F$, or $F \subset G$, donc $a + F \subset a + G = \mathcal{G}$.

Dans le cas particulier où \mathcal{F} et \mathcal{G} sont parallèles, on a $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ et $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, d'où $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. \square

3.3. Barycentres (hors programme)

Le barycentre est maintenant hors-programme. Cette partie ne sera pas nécessairement traitée en cours mais est laissée :

- à titre culturel ;
- parce qu'elle peut être utile en sciences physiques.

Définition 3.3.1.

• On appelle *système pondéré* toute famille de la forme $((A_1, \lambda_1), \dots, (A_n, \lambda_n))$, où chaque élément (A_i, λ_i) est appelé *point pondéré*, avec $n \in \mathbb{N}^*$, A_1, \dots, A_n n points de E , et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ n scalaires de \mathbb{K} .

• Avec les notations précédentes, on pose $\Lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k$.

- (i) Si $\Lambda = 0$, alors le vecteur $\sum_{k=1}^n \lambda_k \overrightarrow{MA_k}$ ne dépend pas du point M .

- (ii) Si $\Lambda \neq 0$, il existe un unique point G tel que $\sum_{k=1}^n \lambda_k \overrightarrow{GA_k} = 0$. Ce point est appelé le *barycentre* du système pondéré $(A_i, \lambda_i)_{i \in [1, n]}$ et il vérifie $G = \frac{1}{\Lambda} \sum_{k=1}^n \lambda_k A_k$.

Démonstration. (i) Supposons $\Lambda = 0$. Soit $(M, N) \in E^2$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \lambda_k \overrightarrow{MA_k} &= \sum_{k=1}^n \lambda_k \overrightarrow{MA_k} + \sum_{k=1}^n \lambda_k \overrightarrow{NM} \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k (\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MA_k}) \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k \overrightarrow{NA_k} \end{aligned}$$

- (ii) Supposons $\Lambda \neq 0$. On a successivement :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \lambda_k \overrightarrow{GA_k} = 0 &\iff \sum_{k=1}^n \lambda_k (A_k - G) = 0 \\ &\iff \sum_{k=1}^n \lambda_k A_k - \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) G = 0 \\ &\iff G = \frac{1}{\Lambda} \sum_{k=1}^n \lambda_k A_k \end{aligned}$$

\square

Définition 3.3.2.

Soit I un ensemble. On appelle *partition finie* de I tout k -uplet, pour $k \in \mathbb{N}$, (I_1, \dots, I_k) où les I_i sont des ensembles vérifiant $I_j \cap I_i = \emptyset$ si $i \neq j$ et $\bigcup_{1 \leq i \leq k} I_i = I$. Autrement dit, une partition est un ensemble de parties de I deux à deux disjointes, dont la réunion est I (on parle aussi de recouvrement de I par des parties deux à deux disjointes).

Exemple 3.3.3. — La partition de l'Europe par le traité de Verdun en 843 est une partition à trois éléments de l'ensemble des points de l'empire de Charlemagne.

- Notons C_0, C_1 et C_2 les parties de \mathbb{Z} contenant respectivement les entiers congrus à 0, 1 et 2 modulo 3. Alors (C_0, C_1, C_2) est une partition de \mathbb{Z} .

Théorème 3.3.4 (Associativité du barycentre). Soient I un ensemble non vide, $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ un système de points pondérés de somme non nulle, et soit (I_1, \dots, I_n) une partition de I . Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $\Lambda_k = \sum_{i \in I_k} \lambda_i$, on suppose que Λ_k est non nul et on note alors G_k le barycentre du système pondéré $(A_i, \lambda_i)_{i \in I_k}$.

Alors le barycentre G de $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ est aussi le barycentre du système pondéré $(G_k, \Lambda_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.

Démonstration.

On sait que $G = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i \in I} \lambda_i A_i$ et $\Lambda_k G_k = \sum_{i \in I_k} \lambda_i A_i$, donc

$$G = \frac{1}{\Lambda} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i \in I_k} \lambda_i A_i \right) = \frac{1}{\Lambda} \sum_{k=1}^n \Lambda_k G_k, \text{ et } \Lambda = \sum_{k=1}^n \Lambda_k. \quad \square$$

Exercice 3.3.5.

En déduire :

1. que les médianes d'un triangle sont concourantes au centre de gravité ;
2. que les droites reliant les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre et les droites reliant le centre de gravité des faces au sommet opposé sont toutes concourantes en un même point qu'on précisera.

Centre de gravité d'un triangle (ABC) = iso-barycentre. Si I est le milieu de $[A, B]$, alors $G = \text{bar}((C, 1), (I, 2))$.

Théorème 3.3.6.

Un sea contient tous les barycentres obtenus à partir de ses points.

Démonstration.

Soit \mathcal{F} un sea, $A_1 \dots A_n$ n points de \mathcal{F} , et $\lambda_1 \dots \lambda_n$ les poids correspondants, $\Lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k \neq 0$. On note $G = \text{bar}((A_k, \lambda_k))$.
 $A_1 \in \mathcal{F}$ donc $\mathcal{F} = A_1 + F$. Donc $G \in \mathcal{F}$ ssi $G - A_1 \in F$.

Or $G - A_1 = \frac{1}{\Lambda} \sum_{k=1}^n \lambda_k (A_k - A_1)$, et tous les membres de cette somme sont dans F . \square

Théorème 3.3.7.

Réciproquement, tout sous-ensemble non vide de E stable par barycentre (et même seulement par barycentre de deux points) est un sea.

Démonstration.

Soit \mathcal{F} un sous-ensemble non vide de E et a un de ses points. Posons $F = \{b - a \mid b \in \mathcal{F}\}$. On a $\mathcal{F} = a + F$, il suffit donc de montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .

F est une partie de E non vide car $0 \in F$.

Soit $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $a + x$ et a sont deux éléments de \mathcal{F} , donc leur barycentre $\lambda(a + x) + (1 - \lambda)a$ appartient aussi à \mathcal{F} . Or ce barycentre est $a + \lambda x$, donc $\lambda x \in F$. F est donc stable par multiplication externe.

Soit $(x, y) \in F$. Alors, \mathcal{F} étant stable par barycentre, $\frac{1}{2}((a + x) + (a + y)) \in \mathcal{F}$, donc $a + \frac{1}{2}(x + y) \in \mathcal{F}$, donc $\frac{1}{2}(x + y) \in F$. D'après ce qui précède, on a alors $x + y = 2 \times \frac{1}{2}(x + y) \in F$. Donc F est stable par addition.

Donc F est un sous-espace vectoriel de E . Donc \mathcal{F} est un sous-espace affine de E . \square

3.4. Convexité (hors programme)

Cette partie est laissée à titre culturel mais ne sera pas nécessairement traitée en cours.

Dans ce paragraphe, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 3.4.1.

On appelle *segment* de E tout ensemble de la forme $\{\lambda A + (1 - \lambda)B, \lambda \in [0, 1]\}$ avec $A, B \in E$. Ce segment est noté $[AB]$ ou $[A, B]$.

Remarque 3.4.2.

$[AB]$ est l'ensemble des barycentres de A et B avec des poids positifs (facultatif : dont la somme est 1). Faire un dessin.

Définition 3.4.3.

Soit \mathcal{P} une partie de E . On dit que \mathcal{P} est *convexe* si $\forall (A, B) \in \mathcal{P}^2 \quad [AB] \subset \mathcal{P}$.

Exemple 3.4.4.

Faire des dessins dans \mathbb{R}^2 , puis dans \mathbb{R}^3 .

Théorème 3.4.5.

Tout sea est convexe.

Démonstration.

Immédiat avec le théorème 3.3.6. \square

Exemple 3.4.6.

On reprend un exemple ancien : pour montrer qu'un cercle n'est pas un sea (ou un sev), on peut montrer qu'il n'est pas convexe.



La réciproque est fausse, même si le convexe contient 0. Par exemple, considérons $[-1, 1]$ dans \mathbb{R} .

Exemple 3.4.7.

Dans \mathbb{C} , tout disque (fermé ou ouvert) est convexe.

Se fait avec inégalité triangulaire en revenant à la définition.

Théorème 3.4.8.

Toute intersection de convexes est convexe.

Démonstration.

Soit I un ensemble et $(\mathcal{P}_i)_{i \in I}$ une famille de convexes.

Posons $\mathcal{P} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{P}_i$ l'intersection de cette famille et montrons qu'elle est convexe, c'est-à-dire

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}^2 \quad [AB] \subset \mathcal{P}$$

Soit $(A, B) \in \mathcal{P}^2$. Il suffit de montrer que pour tout $i \in I$, $[AB] \subset \mathcal{P}_i$.

Soit $i \in I$. On a $A \in \mathcal{P}$, donc $A \in \mathcal{P}_i$. De même $B \in \mathcal{P}_i$. Donc $[AB] \subset \mathcal{P}_i$.

On a donc $\forall i \in I \quad [AB] \subset \mathcal{P}_i$, donc $[AB] \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{P}_i$. \square