Devoir surveillé n°8
Version n°2

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Densité de Schnirelmann.

Pour tout ensemble fini X, on note $\mathrm{Card}(X)$ son nombre d'éléments. Pour toute partie A de $\mathbb{N}$ et tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n(A) = \mathrm{Card}(A \cap \{1, 2, \cdots, n\})$$

et on appelle *densité de Schnirelmann* de A le réel

$$\sigma(A) = \inf \left\{ \frac{S_n(A)}{n} \;\middle|\; n \geqslant 1 \right\}.$$

Si A et B sont deux parties de $\mathbb{N}$, on pose

$$A + B = \{ \, a + b \mid a \in A \text{ et } b \in B \, \}.$$

1) **a)** Justifier la définition de $\sigma(A)$.
   b) Que vaut $\sigma(A)$ si $1 \notin A$?
   c) Sous quelle condition a-t-on $\sigma(A) = 1$?
   d) Si $A \subset B$, comparer $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$.

2) Calculer $\sigma(A)$ pour les parties suivantes.
   a) A est une partie finie de $\mathbb{N}$.
   b) A est l'ensemble des entiers naturels impairs.
   c) Si $k \geqslant 2$ est un entier fixé, A est l'ensemble des puissances k^{es} d'entiers : $A = \left\{ m^k, m \in \mathbb{N}^* \right\}$.

3) Soit A et B deux parties de $\mathbb{N}$ contenant 0 et $n \geqslant 1$ un entier. En considérant

$$C = \{ \, n - b \mid b \in \{0, 1, \cdots, n\} \cap B \, \},$$

montrer que

$$S_n(A) + S_n(B) \geqslant n \Rightarrow n \in A + B$$

4) **a)** Montrer que si $\sigma(A)+\sigma(B) \geqslant 1$ alors $A+B=\mathbb{N}$.

b) Montrer que si $0 \in A$ et $\sigma(A) \geqslant \frac{1}{2}$ alors tout nombre entier est la somme de deux éléments de A.

II. Résolution d'une équation fonctionnelle.

L'objet de ce problème est de résoudre dans certains cas l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)-\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = g(x), \tag{$\mathscr{E}$}$$

où f est une fonction inconnue supposée continue sur $\mathbb{R}$ et g une fonction donnée définie sur $\mathbb{R}$.

A- Dans cette partie on suppose que la fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que les fonctions f solutions de $(\mathscr{E})$ sont elles aussi deux fois dérivables et qu'elles vérifient l'équation :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x)-f(x) = g''(x). \tag{$\mathscr{F}$}$$

2) En déduire la solution de l'équation $(\mathscr{E})$ quand g est une fonction polynomiale de degré au plus 1.

On explicitera notamment le cas où la fonction g est nulle.

3) Déduire aussi que l'équation $(\mathscr{E})$ (que g soit dérivable ou non) a au plus une solution.

4) Montrer que les solutions de $(\mathscr{F})$ sont les fonction f de la forme :

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}}{2}\left[\int_0^x \mathrm{e}^{-t}g''(t)\,\mathrm{d}t + k_A\right]-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\left[\int_0^x \mathrm{e}^{t}g''(t)\,\mathrm{d}t + k_B\right].$$

5) Montrer que si la fonction f écrite ci-dessus vérifie les relations :

$$f(0)=g(0) \quad \text{et} \quad f'(0)=g'(0),$$

alors f est solution de $(\mathscr{E})$.

6) Expliciter la solution f de $(\mathscr{E})$ quand g est la fonction exponentielle ($g(x)=\mathrm{e}^{x}$).

B- Dans cette partie, on suppose que la fonction g est seulement continue.

On note E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

7) On définit l'application A qui à une fonction f de E associe la fonction (notée $A(f)$) définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ A(f)(x) = \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que l'application A est une application de E dans E injective.

8) Montrer que $A(f)$ est deux fois dérivable et donner l'expression de $(A(f))''$. Montrer également que $A(f)$ et $(A(f))'$ s'annnulent en 0.

On désigne par A^n la n^{e} itérée de l'application A : si $f \in E$, $A^0(f) = f$, $A^1(f) = A(f)$, $A^2(f) = A(A(f))$, et si $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n(f) = A(A^{n-1}(f)) = \underbrace{(A \circ \cdots \circ A)}_{n \text{ fois}}(f).$$

9) Montrer que pour tout $f \in E$, $A^2(f) : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{3!}(x-t)^3 f(t)\,\mathrm{d}t$.

10) Généraliser ce résultat à $A^n(f)$. Justifier votre réponse.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = A + A^2 + \cdots + A^n = \sum_{k=1}^{n} A^k.$$

Soit $U : f \mapsto U(f)$ l'application de E dans E définie par :

$$\forall f \in E,\ U(f) : x \mapsto \int_0^x \mathrm{sh}\,(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

11) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$ on a :

$$\left|\mathrm{sh}\,(u) - \sum_{k=1}^{n} \frac{u^{2k-1}}{(2k-1)!}\right| \leqslant \mathrm{ch}\,(u) \frac{|u|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

12) En déduire que pour tout réel x :

$$|U(f)(x) - U_n(f)(x)| \leqslant \mathrm{ch}\,(x) \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \left|\int_0^x |f(t)|\,\mathrm{d}t\right|.$$

13) Montrer les égalités : $U \circ A = A \circ U = U - A$.

14) Soit $I : f \mapsto f$ l'application identité de E dans E. Montrer que les application $I - A$ et $I + U$ sont des bijections de E dans E, réciproques l'une de l'autre.

En déduire la fonction de E solution de l'équation $(\mathscr{E})$.

15) Expliciter f pour la fonction g paire et telle que g est définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [0, 1[\\ 2 - x & \text{si} \quad x \in [1, 2[\\ 0 & \text{si} \quad x \geqslant 2 \end{cases}.$$

— **FIN** —