1 - Inégalité de Cauchy-Schwarz et quelques identités

Th : Inégalité de Cauchy-Schwarz :

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un ev. préhilbertien. $\|\cdot\|$ est la norme associée.

Alors :

$$\boxed{\forall x, y \in E, \quad |\langle x | y \rangle| \leq \|x\| . \|y\|.}$$

il y a égalité ssi x et y sont colinéaires.

<u>Démo</u> : (ii) Soit $x, y \in E$.

- Si x ou y est nul, l'inégalité est évidente, et il y a égalité.

- Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$:

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \langle x + ty \mid x + ty \rangle \end{array}$$

donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \|x + ty\|^2$

et $\varphi(t) = \langle x \mid x + ty \rangle + t \langle y \mid x + ty \rangle$

$$= \langle x \mid x \rangle + t \langle x \mid y \rangle + t \langle y \mid x \rangle + t^2 \langle y \mid y \rangle$$

$$= (\|x\|^2) + t \times 2 \langle x \mid y \rangle + t^2 \cdot \|y\|^2$$

φ est 1 fonction polynomiale de degré 2.

or : $\forall t, \varphi(t) = \|x+ty\|^2 \geqslant 0$.

donc le discriminant de φ est ≤ 0 :

dc : $4 \langle x|y \rangle^2 - 4 \times \|y\|^2 . \|x\|^2 \leq 0$ (1)

ie : $\langle x|y \rangle^2 \leq \|x\|^2 . \|y\|^2$

dc : $|\langle x|y \rangle| \leq \|x\| . \|y\|$. (3)

• cas d'égalité : il y a égalité

ssi le discriminant est nul.

ssi φ a un point d'annulation

ssi $\exists t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \|x+ty\|^2 = 0$

ssi $\exists t \in \mathbb{R}, x+ty = 0$

ssi x et y sont colin.

(⚠ : $\Rightarrow$: vraie par déf. de colinéarité

$\Leftarrow$: vraie car $x \neq 0$ et $y \neq 0$.) .

Inégalité triangulaire (norme associée) :

$$\forall x, y \in E, \quad \| x+y \| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Il y a égalité ssi x et y sont colinéaires de même sens.

Rq : ce résultat implique :

$$\forall x, y \in E, \qquad \big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x+y\|.$$

il s'agit de mq :

Démo :

$$\|x+y\|^2 \leq (\|x\|+\|y\|)^2$$

or : $\|x+y\|^2 = \langle x+y | x+y \rangle$

$$= \underline{\|x\|^2} + 2\langle x|y\rangle + \underline{\|y\|^2}$$

et : $(\|x\|+\|y\|)^2 = \underline{\|x\|^2} + 2\|x\|\cdot\|y\| + \underline{\|y\|^2}$

il s'agit de de mq :

$$2\langle x|y\rangle \leq 2\|x\|\cdot\|y\|$$

C'est l'inégalité de C.S !

Cas d'égalité :

égalité ds l'inégalité triangulaire $\iff \langle x|y\rangle = \|x\|\cdot\|y\|$

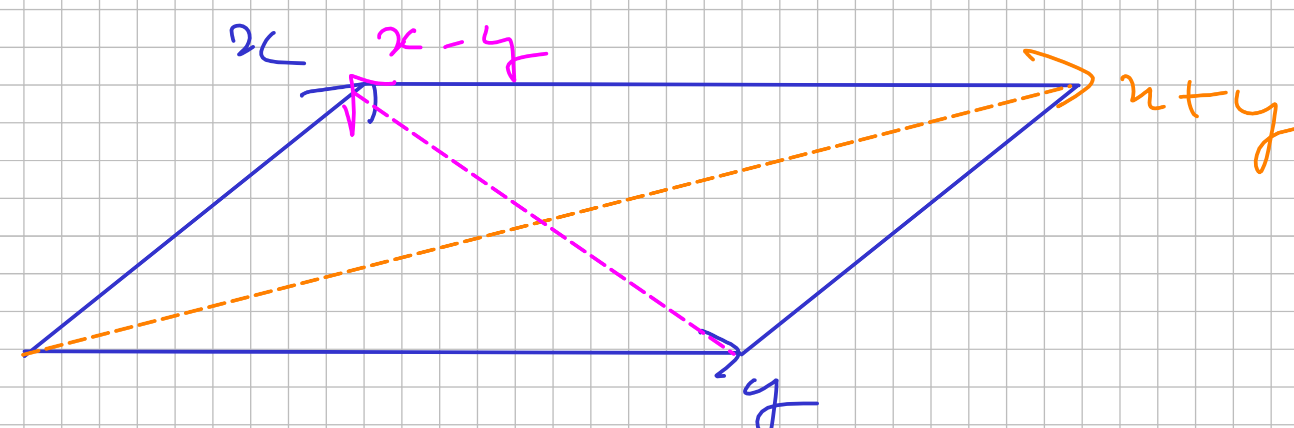
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |\langle x|y\rangle| = \overbrace{\|x\|\cdot\|y\|}^{\geqslant 0} \\ \underbrace{\langle x|y\rangle}_{\geqslant 0} = |\langle x|y\rangle| \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ égalité de C.S <u>et</u> $\langle x|y\rangle \geqslant 0$

$\Leftrightarrow$ x et y sont colinéaires de même sens.

<u>Th</u> : identité du parallélogramme :

$$\forall x,y \in E, \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right).$$



Dém : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$

$= \langle x+y \mid x+y \rangle + \langle x-y \mid x-y \rangle$

$= \|x\|^2 + 2\cancel{\langle x \mid y \rangle} + \|y\|^2$

$+ \|x\|^2 - 2\cancel{\langle x \mid y \rangle} + \|y\|^2$

$= 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$

Th : identités de polarisation : $\forall x, y \in E$:

(1) $\langle x \mid y \rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$

(2) $\langle x \mid y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$

Dém : simples développements.

Ex : Soit $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longmapsto \sqrt{(a+b)^2 + b^2}.$$

N est-elle associée à 1 p.s. ?

Analyse : Soit $\langle \cdot | \cdot \rangle$ 1 p.s. dont la norme associée est N.

Alors : si $x, y \in E$: $x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

$$\langle x | y \rangle = \frac{1}{4} \left(N(x+y)^2 - N(x-y)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{4} \Big((a+c+b+d)^2 + (b+d)^2 - (a-c+b-d)^2 - (b-d)^2 \Big)$$

$$= \frac{1}{4}\left(4ac + 4ad + 4bc + 8bd\right)$$

$$= ac + ad + bc + 2bd.$$

Synthèse : Soit :

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \longmapsto x_1 x_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2 y_1 y_2 .$$

On vérifie que :

- $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right\rangle = N \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}^2$
- $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est 1 p.s.

Donc : N est la norme associée à 1 p.s.