

Informatique tronc commun – TP n° 11

Équations différentielles et pendule simple

Jeudi 7 mars 2019

1. **Lisez attentivement tout l'énoncé avant de commencer.**
2. Commencez la séance en créant un dossier au nom du TP dans le répertoire dédié à l'informatique de votre compte.
3. Ayez toujours un crayon et un papier sous la main. Quand vous réfléchissez à une question, utilisez les !
4. Vous devez être autonome. Ainsi, avant de poser une question à l'enseignant, merci de commencer par :
 - relire l'énoncé du TP (beaucoup de réponses se trouvent dedans) ;
 - relire les passages du cours¹ relatifs à votre problème ;
 - effectuer une recherche dans l'aide disponible sur votre ordinateur (ou sur internet) concernant votre question.

Il est alors raisonnable d'appeler votre enseignant pour lui demander des explications ou une confirmation !

Cette séance de TP est consacrée à l'implantation des méthodes numériques de résolution d'équations différentielles vues en cours.

Instructions de rendu

Attention : suivez précisément ces instructions. Vous enverrez à votre enseignant un fichier d'extension `.py` (script Python) nommé

`tp11_durif_kleim.py`,

où les noms de vos enseignants sont à remplacer par ceux des membres du binôme. Le nom de ce fichier ne devra comporter ni espace, ni accent, ni apostrophe, ni majuscule. Dans ce fichier, vous respecterez les consignes suivantes.

- Écrivez d'abord en commentaires (ligne débutant par `#`), le titre du TP, les noms et prénoms des étudiants du groupe.
- Commencez chaque question par son numéro écrit en commentaires.

1. Dans le cas fort improbable où vous ne vous en souviendriez pas.

- Les questions demandant une réponse écrite seront rédigées en commentaires.
- Les questions demandant une réponse sous forme de fonction ou de script respecteront pointilleusement les noms de variables et de fonctions demandés.

Les figures demandées porteront toutes un nom du types `tp11_durif_kleim_num.png`, où les noms de vos enseignants sont à remplacer par ceux des membres du binôme et où

- `num` vaut `q4` pour la question 4 ;
- `num` vaut `q8` pour la question 8 ;
- `num` vaut `q11` pour la question 11 (facultatif) ;
- `num` vaut `q14` pour le graphe de θ de la question 14 ;
- `num` vaut `q15` pour le portrait de phase de la question 15 ;
- `num` vaut `q17` pour le graphe de θ de la question 17 ;
- `num` vaut `q18` pour le portrait de phase de la question 18.

1 Pour commencer

Avant toute chose, on prendra soin de recopier la fonction `euler(F,a,b,y0,h)` donnée dans le chapitre 11 du cours.

2 Oscillations libres d'un pendule

On considère les oscillations libres d'un pendule. L'angle que fait ce pendule avec la verticale au temps t sera noté $\theta(t)$ et l'on étudie les oscillations du pendule entre 0 et 10 secondes. L'équation vérifiée par la fonction θ est alors

$$\ddot{\theta} + \alpha \dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0, \quad (\mathcal{P})$$

où

- α (proportionnel au coefficient de frottements) est exprimé en s^{-1} ;
- ω_0 (la pulsation propre) est exprimé en s^{-1} .

Si le coefficient de frottement est nul, l'équation devient

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0. \quad (\mathcal{P}_{sf})$$

Enfin, on sait qu'au voisinage de 0 on a $\sin \theta = \theta + o(\theta^2)$. En supposant que les oscillations sont petites, on approche alors la dernière équation par

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0. \quad (\mathcal{P}_{po})$$

Q1 Pour quelle variable Θ et quelles fonctions F , F_{sf} et F_{po} les équations respectives (\mathcal{P}) , (\mathcal{P}_{sf}) et (\mathcal{P}_{po}) sont-elles équivalentes aux équations suivantes ?

$$\dot{\Theta} = F(\Theta, t), \quad \dot{\Theta} = F_{sf}(\Theta, t), \quad \dot{\Theta} = F_{po}(\Theta, t).$$

2.1 Approximation des petites oscillations par la méthode d'Euler

On suppose les oscillations petites et sans frottements, on prendra donc les valeurs numériques suivantes : $\alpha = 0s^{-1}$, $\omega_0 = \sqrt{2\pi}s^{-1}$. On étudiera les solutions sur un intervalle de temps de 10 secondes et l'on supposera que $\dot{\theta}(0) = 0s^{-1}$. Notamment, une méthode numérique effectuée avec n segments correspondra à un pas de $\frac{10}{n}$ secondes.

Q2 Résoudre littéralement l'équation (\mathcal{P}_{po}) .

Q3 Écrire une fonction `Fpo(Theta,t)` prenant en argument un vecteur `Theta` et un nombre `t` et renvoyant $F_{po}(\text{Theta}, t)$.

Q4 Écrire une fonction `trace_po(th0,n,nom_de_fichier)` enregistrant dans `nom_de_fichier` le tracé de la solution exacte de (\mathcal{P}_{po}) ($\theta(0) = \text{th0}$, $\dot{\theta}(0) = 0s^{-1}$) ainsi que, sur le même graphe, celui de la solution obtenue par la méthode d'Euler avec `n` segments.

Vous enverrez à l'enseignant la figure produite pour $\theta_0 = 10^{-1}$ et $n = 10^2$.

2.2 Facultatif : approximation des petites oscillations par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

Q5 Sur le modèle de la fonction `euler(F,a,b,y0,pas)`, écrire une fonction Python `rk4(F,a,b,y0,pas)` mettant en œuvre la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pour la fonction `F`, sur le segment $[a, b]$, avec un pas `pas` et la condition initiale `y0`. Cette fonction renverra un couple de tableaux.

Q6 Compléter la fonction `trace_po(th0,n,nom_de_fichier)` pour y superposer le tracé obtenu par la méthode de Runge-Kutta. Que remarque-t-on ?

2.3 Oscillations sans frottements

On suppose les oscillations sans frottements, mais pas forcément petites on prendra donc les valeurs numériques suivantes : $\alpha = 0s^{-1}$, $\omega_0 = \sqrt{2\pi}s^{-1}$. On étudiera les solutions sur un intervalle de temps de 10 secondes et l'on supposera que $\dot{\theta}(0) = 0s^{-1}$. Notamment, une méthode numérique effectuée avec n points correspondra à un pas de $\frac{10}{n}$ secondes.

Q7 Écrire une fonction `Fsf(Theta,t)` prenant en argument un vecteur `Theta` et un nombre `t` et renvoyant $F_{sf}(\text{Theta}, t)$.

On veut maintenant vérifier numériquement l'approximation des petites oscillations. On connaît déjà la solution exacte de (\mathcal{P}_{po}) , il ne nous reste plus qu'à obtenir une approximation de la solution de (\mathcal{P}_{sf}) .

Q8 Écrire une fonction `approx_po(th0,n,nom_de_fichier)` enregistrant dans `nom_de_fichier` le tracé de la solution exacte de (\mathcal{P}_{po}) ($\theta(0) = \text{th0}$, $\dot{\theta}(0) = 0s$) ainsi que, sur le même graphe, celui de la solution de (\mathcal{P}_{sf}) obtenue par la méthode d'Euler avec `n` segments. Que remarque-t-on ?

Vous enverrez à l'enseignant la figure produite pour $\theta_0 = 1$ et $n = 10^4$.

2.4 Facultatif : période des oscillations.

En dehors de la situation des petites oscillations, le mouvement du pendule est toujours périodique, mais sa période n'est pas $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Plus exactement, cette période dépend de la position initiale du pendule (le calcul précis n'est pas à votre portée). Nous allons tracer cette période en fonction de la position initiale du pendule.

Nous allons donc estimer la période de ces oscillations à partir d'une approximation obtenue par une méthode numérique.

On appelle *pic* d'un tableau un élément de ce tableau strictement plus grand que ses deux voisins. On considérera que le premier et le dernier élément d'un tableau ne sont pas des pics de ce tableau. On appelle alors *période* d'un tableau la moyenne des distances entre deux pics consécutifs.

Q9 Écrire une fonction `periode(L)` renvoyant la période du tableau `L`.

On estimera la période du pendule simple à partir de la période du tableau des valeurs successives de θ obtenues par la méthode de Runge-Kutta. Plus exactement, si la période de ce tableau est p , si ce tableau comporte m valeurs et si les oscillations ont été mesurées sur un intervalle de temps de longueur T , alors l'estimation de la période du pendule simple sera

$$T \times \frac{p}{m}.$$

Q10 Écrire une fonction `periode_pendule(n)` prenant en argument un entier `n` et renvoyant le tableau des estimations de la période du pendule, pour les conditions initiales $\dot{\theta}(0) = 0s^{-1}$ et $\theta(0) = \frac{k\pi}{2n}$, pour chaque $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On réfléchira à l'intervalle de temps utilisé ainsi qu'à la discrétisation utilisée dans la méthode de Runge-Kutta.

Q11 Écrire une fonction `trace_periode(n,nom_de_fichier)` prenant en argument un entier `n` et enregistrant dans `nom_de_fichier` le tracé des points obtenus à la question précédente.

On placera en abscisse les $\theta(0) = \frac{k\pi}{2n}$ et en ordonnée les périodes estimées.

Vous enverrez à votre enseignant la figure produite pour $n = 100$.

3 Oscillations forcées d'un pendule avec frottements

On suppose les oscillations forcées, avec frottements. La variable θ suit alors l'équation différentielle suivante.

$$\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = \cos(\omega t). \quad (\mathcal{P}_f)$$

On prendra les valeurs numériques suivantes : $\alpha = 0,5s^{-1}$, $\omega_0 = \sqrt{2\pi}s^{-1}$ et $\omega = 1s^{-1}$. On étudiera les solutions sur un intervalle de temps de 10 secondes. Notamment, une méthode numérique effectuée avec n segments correspondra à un pas de $\frac{10}{n}$ secondes.

Q12 Pour quelle variable Θ et quelle fonction F_f l'équation (\mathcal{P}_f) est-elle équivalente à l'équation suivante ?

$$\dot{\Theta} = F_f(\Theta, t).$$

Q13 Écrire une fonction `Ff(Theta,t)` prenant en argument un vecteur `Theta` et un nombre `t` et renvoyant $F_f(\text{Theta}, t)$.

Q14 Écrire une fonction `trace_trajectoire_f(th0,thp0,n,nom_de_fichier)` prenant en argument deux nombres `th0`, `thp0`, un entier `n` ainsi qu'une chaîne `nom_de_fichier` et enregistrant dans `nom_de_fichier` la courbe de la trajectoire du pendule (c'est-à-dire des points $(t, \theta(t))$), obtenue en appliquant la méthode d'Euler avec `n` segments à l'équation (\mathcal{P}_f) , avec les conditions initiales $\theta(0) = \text{th0}$ et $\dot{\theta}(0) = \text{thp0}$.

Vous enverrez à l'enseignant les figures produites pour les conditions initiales $\theta(0) = 1$ et $\dot{\theta}(0) = 2$ et pour $n = 10^2$.

Q15 Écrire une fonction `trace_phase_f(th0,thp0,n,nom_de_fichier)` prenant en argument deux nombres `th0`, `thp0`, un entier `n` ainsi qu'une chaîne `nom_de_fichier` et enregistrant dans `nom_de_fichier` le portrait de phase du pendule (c'est-à-dire des points $(\theta(t), \dot{\theta}(t))$), obtenu en appliquant la méthode d'Euler avec `n` segments à l'équation (\mathcal{P}_f) , avec les conditions initiales $\theta(0) = \text{th0}$ et $\dot{\theta}(0) = \text{thp0}$.

Vous enverrez à l'enseignant les figures produites pour les conditions initiales $\theta(0) = 1$ et $\dot{\theta}(0) = 2$ et pour $n = 10^2$.

Q16 Écrire une fonction `odeint_f(th0,thp0,n)` prenant en argument deux nombres `th0` et `thp0` ainsi qu'un entier `n` et renvoyant le couple de listes `t_list`, `y_list` obtenu en appliquant la fonction `odeint` avec `n` segments à l'équation (\mathcal{P}_f) , avec les conditions initiales $\theta(0) = \text{th0}$ et $\dot{\theta}(0) = \text{thp0}$.

Q17 Écrire une fonction `trace_trajectoire_odeint(t_list,y_list,nom_de_fichier)` enregistrant dans `nom_de_fichier` la courbe de la trajectoire du pendule (c'est-à-dire des points $(t, \theta(t))$), où `t_list` et `y_list` sont supposées être les listes renvoyées par la fonction `odeint_f`.

Vous enverrez à l'enseignant les figures produites pour les conditions initiales $\theta(0) = 1$ et $\dot{\theta}(0) = 2$ et pour $n = 10^2$.

Q18 Écrire une fonction `trace_phase_odeint(t_list,y_list,nom_de_fichier)` enregistrant dans `nom_de_fichier` le portrait de phase du pendule (c'est-à-dire des points $(\theta(t), \dot{\theta}(t))$), où `t_list` et `y_list` sont supposées être les listes renvoyées par la fonction `odeint_f`.

Vous enverrez à l'enseignant les figures produites pour les conditions initiales $\theta(0) = 1$ et $\dot{\theta}(0) = 2$ et pour $n = 10^2$.