LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON
SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR
CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I.
ANNÉE 2021 - 2022

C3 : MODÉLISATION CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES COMPOSÉS DE CHAINES DE SOLIDES

C3-1 - Introduction à la modélisation des systèmes mécaniques

19 Octobre 2021

Table des matières

Compétences

- **Modéslier**
  - Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.
  - Proposer un modèle cinématique à partir d'un système réel ou d'une maquette numérique.
  - Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides.
- **Communiquer**
  - Utiliser un vocabulaire technique, des symboles et des unités adéquats.

I. Introduction et hypothèses

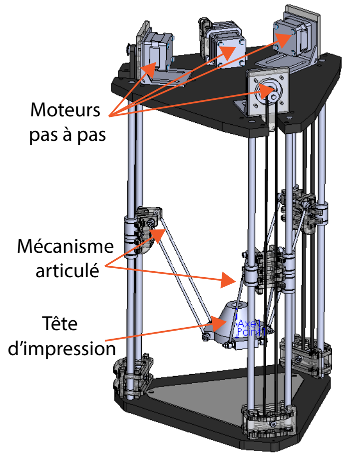
1 Introduction

Définition 1 : *Système mécanique*

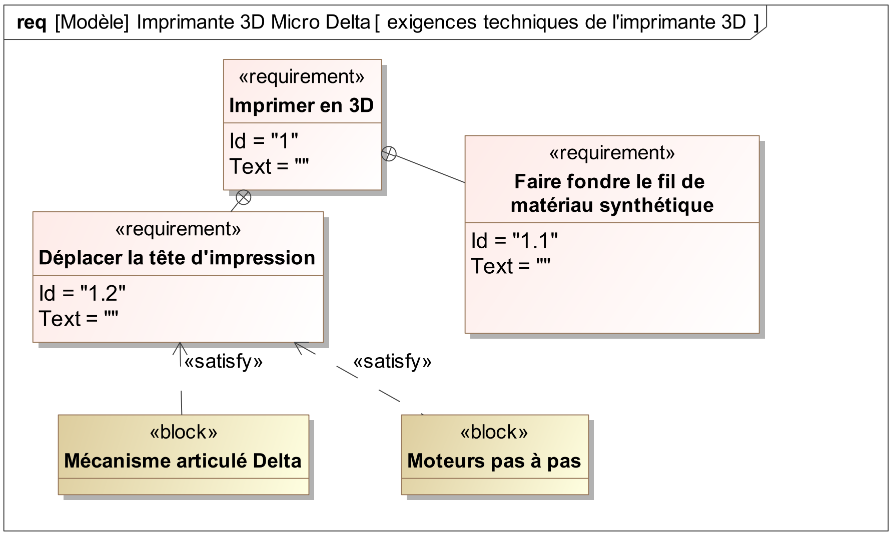
Un système mécanique est généralement constitué d'un ensemble de mécanismes. Ces mécanismes sont constitués d'un ensemble de solides agencés entre eux dans le but de réaliser une fonction.

Exemple 1 : *Imprimante 3D Micro-Delta*

Prenons par exemple l'imprimante 3D Micro-Delta. Le système global est constitué de **3 actionneurs** (moteurs pas-à pas) permettant de piloter les 3 degrés de liberté translation de la tête d'impression.



Le diagramme d'exigence partiel du système est donné ci-dessous :



On focalisera notre étude sur l'exigence technique qui permet de "**déplacer la tête d'impression**".

2 Objectifs de la modélisation mécanique

Les exigences techniques réalisées par un système se caractérisent bien souvent par une loi entrée/sortie en vitesse ou en effort. Ainsi, l'objectif de la modélisation mécanique est de **comprendre**, d'**analyser**, d'**améliorer** et de **valider** le comportement d'un système mécanique constituant d'un produit industriel.

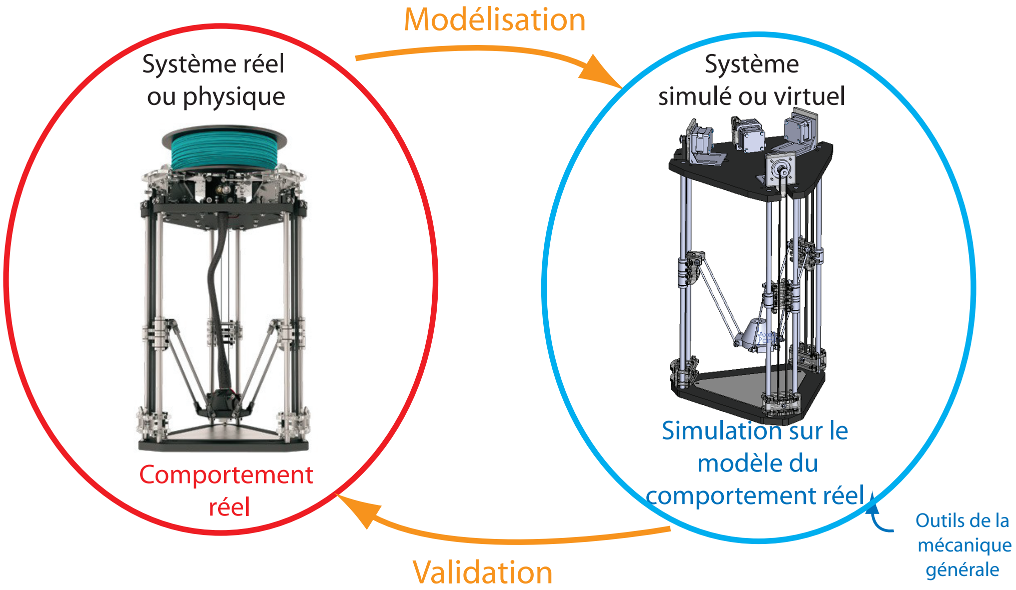


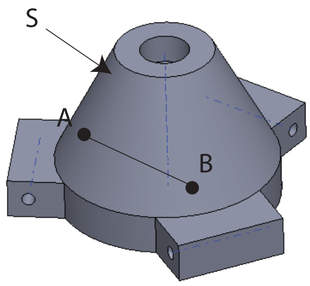
FIGURE 1 – Modélisation mécanique d'un système.

3 Solide indéformable

Définition 2 : *Solide indéformable*

- **Un point matériel** est une portion de l'espace pourvue de matière et suffisamment petite pour être considérée comme ponctuelle.
- **Un solide indéformable** est un ensemble de points matériels. S est un solide "**indéformable**" si, pour tout $(A,B) \in S^2$, et pour tout instant t :

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = cste} \quad (1)$$



Remarque 1 :

Dans la réalité, **aucun solide n'est indéformable**. La moindre sollicitation (effort, changement de température, etc...) modifie la géométrie de n'importe quel matériau. Cela n'est pas forcément visible à l'œil nu. Ainsi, sous certaines hypothèses (faibles efforts, faibles variations de température, grande rigidité, etc...), on *pourra considérer* qu'un solide est indéformable, mais cela n'est qu'un **modèle**.

Remarque 2 :

Dans la suite de ce cours, tous les solides seront considérés comme indéformables, même si cela n'est pas précisé.

4 Différents types de modélisations mécaniques

Différents types de modélisations mécaniques sont utilisées selon les phénomènes physique que l'on souhaite étudié sur un système.

- **la cinématique** : étude des mouvements et des vitesses;
- **la statique** : étude des actions mécaniques (types efforts) des solides "à l'équilibre";
- **la cinétique** : étude des quantités de mouvement et des inerties (programme de deuxième année);
- **la dynamique** : lien entre les mouvements et leurs causes (efforts mécaniques) (programme de deuxième année);
- **l'énergétique** : étude des mouvements et de leurs causes d'un point de vue énergétique (programme de deuxième année).

II. Repères et référentiels liés à un solide

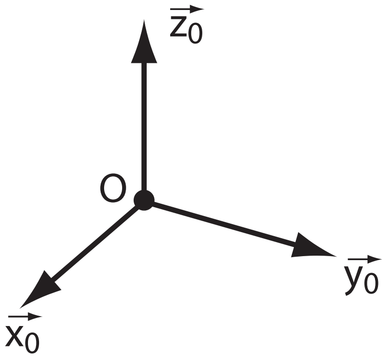
1 Repère de référence

Définition 3 : *Repère*

Un **repère** R_0 est l'association d'une base $\mathscr{B}$ formée de trois vecteurs unitaires $\left(\overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{y}_0, \overrightarrow{z}_0\right)$ avec un point O :

$$\boxed{R_0 = \left(O, \overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{y}_0, \overrightarrow{z}_0\right)} \qquad (2)$$

Le repère de référence se définit comme celui par rapport auquel les mouvements seront étudiés.



Remarque 3 :

On définira les repères comme étant **orthonormés directs**, c'est à dire que le triplet $\left(\overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{y}_0, \overrightarrow{z}_0\right)$ forme un **trièdre direct** et que chacun des vecteurs composant la base ($\overrightarrow{x}_0$, $\overrightarrow{y}_0$ et $\overrightarrow{z}_0$) sont **unitaires** et **orthogonaux** entre eux.

2 Référentiel

Définition 4 : *Référentiel*

Un "**référentiel**" est constitué

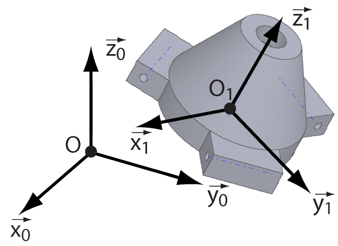
- d'un repère de référence (*ie* $R_0 = \left(O, \overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{y}_0, \overrightarrow{z}_0\right)$)
- d'une horloge qui servira de référence pour mesurer le temps (et dériver par rapport au temps).

Important :
Un mouvement n'a de sens que si il a un référentiel. A chaque fois que l'on définit un mouvement, il faut toujours préciser **dans quel référentiel** (i.e. par rapport à quel repère de référence et quelle base de temps).

3 Repères liés aux solides

Définition 5 : *Repères liés aux solides*

La position d'un solide S_1 par rapport à un repère de référence $R_0\left(O,\overrightarrow{x}_0,\overrightarrow{y}_0,\overrightarrow{z}_0\right)$, est définie par la position d'un repère $R_1\left(O_1,\overrightarrow{x}_1,\overrightarrow{y}_1,\overrightarrow{z}_1\right)$ qui lui est propre. C'est à dire que le repère R_1 est fixe par rapport au solide S_1. Le repère R_1 est défini par son origine O_1 et sa base $\left(\overrightarrow{x}_1,\overrightarrow{y}_1,\overrightarrow{z}_1\right)$.



Remarque 4 :
Nous devons donc définir la position du point O_1 donc être capable de définir la position d'un point quelconque. D'autre part nous devons définir l'orientation de la base $\left(\overrightarrow{x}_1,\overrightarrow{y}_1,\overrightarrow{z}_1\right)$ par rapport à la base $\left(\overrightarrow{x}_0,\overrightarrow{y}_0,\overrightarrow{z}_0\right)$. C'est ce qu'on appelle le paramétrage et c'est l'objet de la partie suivante.

III. Paramétrage d'un solide

1 Paramétrage de la position de l'origine du repère associé

Différents types de paramétrage peuvent être choisis pour repérer un point dans l'espace. Il s'agit des systèmes de coordonnées :

- **cartésiennes**,
- **cylindriques**,
- **sphériques**.

Le choix du système de coordonnées repose généralement sur les symétries du problème à traiter. Selon le système de coordonnées considéré, on décomposera le vecteur position $\overrightarrow{OO_1}$ suivant trois vecteurs unitaires formant une base orthonormée directe $\left(\overrightarrow{u}_1,\overrightarrow{u}_2,\overrightarrow{u}_3\right)$:

$$\boxed{\overrightarrow{OO_1}=\alpha(t)\cdot\overrightarrow{u}_1+\beta(t)\cdot\overrightarrow{u}_2+\gamma(t)\cdot\overrightarrow{u}_3} \qquad (3)$$

Les paramètres $\alpha(t)$, $\beta(t)$ et $\gamma(t)$ sont les coordonnées et peuvent dépendre du temps.

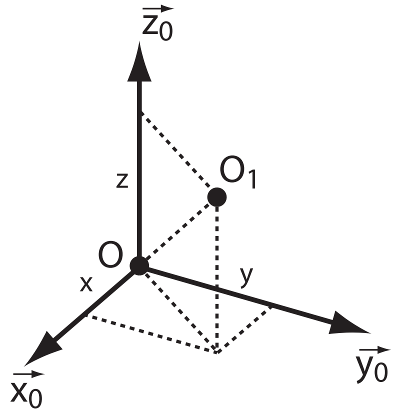
Remarque 5 :
Dans une modélisation 3D, il y aura toujours au moins 3 paramètres de position (coordonnées) qui s'expriment de différentes façon selon le système de coordonnées.

a) Coordonnées cartésiennes

Définition 6 : *Coordonnées cartésiennes*

Ici, les coordonnées x, y et z sont les projections orthogonales du vecteur $\overrightarrow{OO_1}$ suivant les directions respectives $\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{y_0}$ et $\overrightarrow{z_0}$.
On décompose alors le vecteur position $\overrightarrow{OO_1}$ selon :

$$\boxed{\overrightarrow{OO_1} = x \cdot \overrightarrow{x_0} + y \cdot \overrightarrow{y_0} + z \cdot \overrightarrow{z_0}.} \tag{4}$$



b) Coordonnées cylindriques

Définition 7 : *Coordonnées cylindriques*

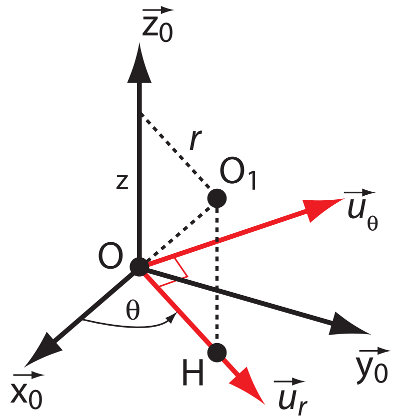
Ce système est construit à partir du point H, projection orthogonale de O_1 dans le plan $(O, \overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{y}_0)$.
Le vecteur $\overrightarrow{u_r}$ est unitaire et a pour direction OH. On repère ici la position du point O_1 par les coordonnées (r, θ, z) :

- $r = \|\overrightarrow{OH}\|$.
- $\overrightarrow{u_\theta}$ est obtenu en considérant que le trièdre $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ est direct.
- $\theta = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{u_r})$ est l'angle orienté par le vecteur $\overrightarrow{z_0}$.
- z est la projection orthogonale de $\overrightarrow{OO_1}$ sur l'axe $(O, \overrightarrow{z_0})$.

On décompose alors le vecteur position $\overrightarrow{OO_1}$ selon :

$$\boxed{\overrightarrow{OO_1} = r \cdot \overrightarrow{u_r} + z \cdot \overrightarrow{z_0}.} \tag{5}$$

Dans ce système de coordonnées, la décomposition se fait suivant la base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{z}_0)$ orthonormée direct.



Exemple 2 :

Relation entre système de coordonnées cartésiennes et cylindriques :

c) Coordonnées sphériques

Définition 8 : *Coordonnées sphériques*

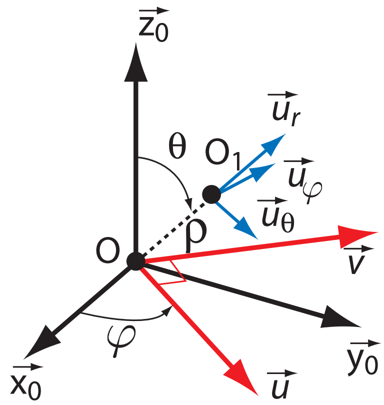
Ce système est également construit à partir du point H, projection orthogonale de O_1 dans le plan $\left(O, \overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{y}_0\right)$. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est unitaire et de direction OH. Le vecteur $\overrightarrow{v}$ est unitaire et est le troisième vecteur de la base othonormée directe $\left(\overrightarrow{z_0}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ (figure **??**). On repère ici la position du point O_1 par les coordonnées $\left(r, \theta, \varphi\right)$:

- $\rho = \|\overrightarrow{OO_1}\|$.
- $\theta = \left(\overrightarrow{z_0}, \overrightarrow{u_r}\right)$ est l'angle orienté par le vecteur $\overrightarrow{v}$. On l'appelle également la colatitude.
- $\varphi = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{u}\right)$ est l'angle orienté par le vecteur $\overrightarrow{z}$. On l'appelle également la longitude ou l'azimut.

On décompose alors le vecteur position $\overrightarrow{OO_1}$ selon :

$$\boxed{\overrightarrow{OO_1} = \rho \cdot \overrightarrow{u_r}.} \tag{6}$$

Dans ce système de coordonnées, la décomposition se fait suivant la base $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi}\right)$ orthonormée direct.

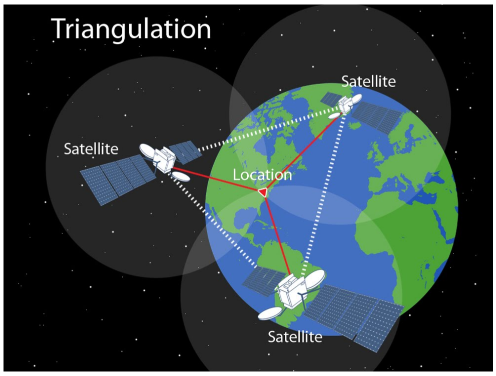


Exemple 3 :

Relation entre système de coordonnées cartésiennes et sphériques :

Remarque 6 : ***Système de positionnement par satellite (GPS)***

C'est le système de coordonnées employé par le système **GPS**



2 Paramétrage de l'orientation de la base

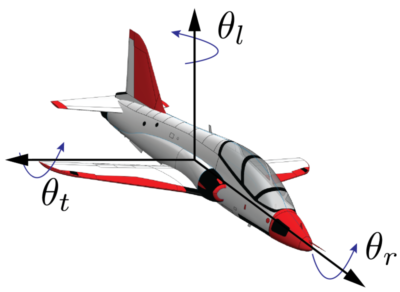
Pour paramétrer l'orientation d'une base dans l'espace il faut trois paramètres. On choisit habituellement la représentation par les angles de Cardan ou par les d'Euler.

a) Angles de cardan

Définition 9 : ***Angles de Cardan***

Dans le cas des angles de **cardan**, les trois angles qui sont utilisés généralement dans le domaine aéronautique portent les noms suivant :

- angle de **lacet** : θ_l orienté par la direction verticale,
- angle de **roulis** : θ_r orienté par l'axe longitudinal,
- angle de **tangage** : θ_t orienté par l'axe transversal.

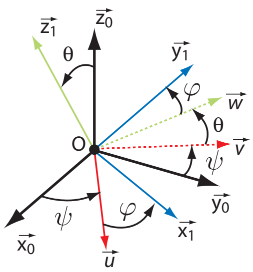


b) Angles d'Euler

Définition 10 : ***Angles d'Euler***

Dans le cas des angles d'**Euler**, les trois angles qui sont utilisés dans l'étude du mouvement gyroscopique portent les noms suivant :

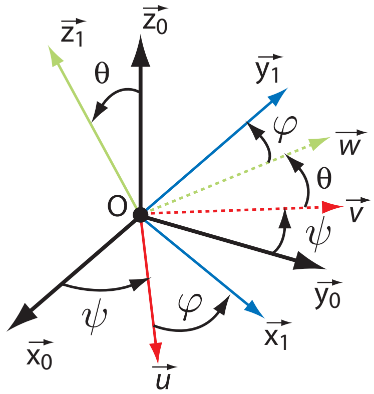
- angle de précession : $\psi = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{u}\right)$ orienté par $\overrightarrow{z_0}$,
- angle de nutation : $\theta = \left(\overrightarrow{z_0}, \overrightarrow{z_1}\right)$ orienté par $\overrightarrow{u}$,
- angle de rotation propre : $\varphi = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{x_1}\right)$ orienté par $\overrightarrow{z_1}$.



c) Figures planes de projection

On peut considérer que les angles d'Euler correspondent à trois rotations planes successives qui permettent de faire coïncider la base $(\vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ avec $(\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$.

1. Rotation de précession : $(\vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0}) \xrightarrow{Rot(\vec{z_0},\psi)} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{z_0})$.
2. Rotation de nutation : $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z_0}) \xrightarrow{Rot(\vec{u},\theta)} (\vec{u}, \vec{w}, \vec{z_1})$.
3. Rotation propre : $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z_1}) \xrightarrow{Rot(\vec{z_1},\varphi)} (\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$.



Chacune de ces rotations peut être représentée par une figure plane de projection (figure 2).

> **Remarque 7 :**
> On veillera à représenter les figures planes de projection systématiquement de la même manière avec un angle orienté positivement et le vecteur normal au plan sortant. Les angles doivent être représentés avec une valeur inférieure à 30° pour éviter les confusions avec cos et sin.

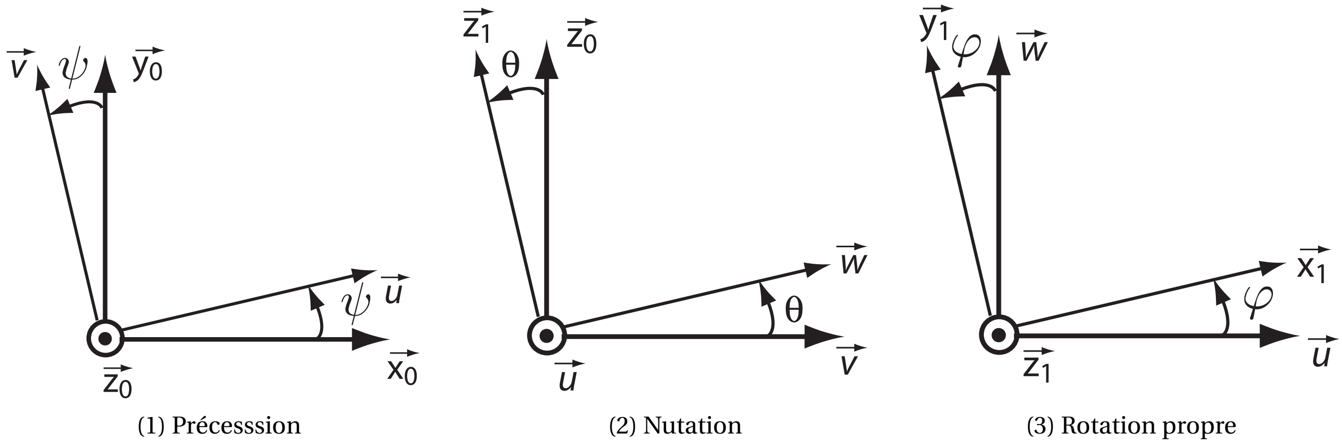


FIGURE 2 – Figures planes de projection pour la définition des différents angles d'Euler