LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I.

ANNÉE 2018 - 2019

C2 : MODÉLISATION DES SYSTÈMES ASSERVIS

TD 4 - Représentation des SLCI par les transformées de Laplace(C2-2)

25 Septembre 2018

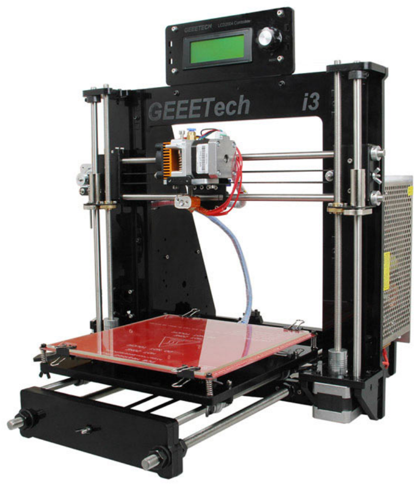
Compétences

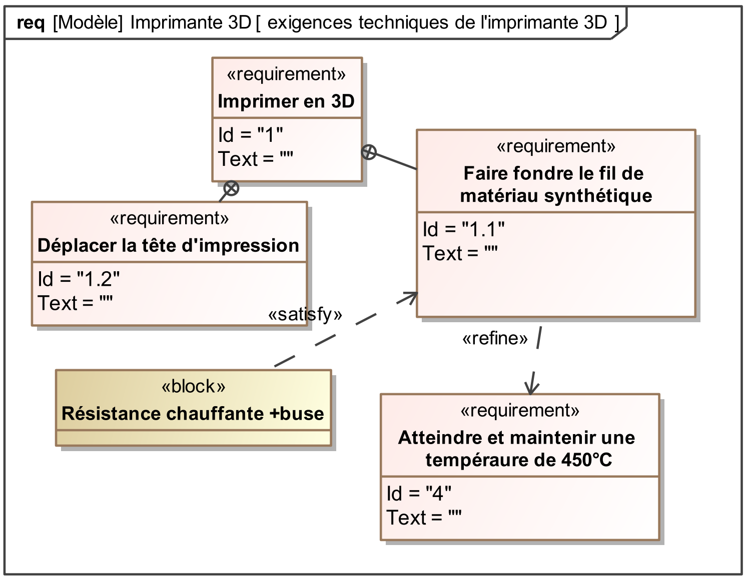
- **Analyser :** apprécier la pertinence et la validité des résultats.
- **Modéliser :** Proposer un modèle de connaissance et de comportement :
  - déterminer les fonctions de transfert des SLCI à partir d'équations physiques (modèle de connaissance);
  - caractériser les signaux canoniques d'entrée.

1 Modélisation du cycle de chauffe d'une imprimante 3D

a) Présentation du problème

On souhaite modéliser le cycle de chauffe d'une imprimante 3D utilisant le système FDM (Fused Deposition Modeling). Cette technique consiste à déposer un fil de matière synthétique (en matériau ABS). On peut alors construire un volume par addition de matière.





Les grandeurs d'entrée et de sortie du problème sont définies par :
- $e(t)$: température de consigne;
- $s(t)$: température effective dans la buse transportant le fil d'ABS;

Le comportement thermique au niveau de la tête de dépose de fil peut être décrit par l'équation différentielle suivante :

$$2\,\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 6\,\alpha \frac{ds(t)}{dt} + 4\,\alpha^2\, s(t) = K\, e(t) \qquad (1)$$

- α et K sont des constantes réelles positives.
- On suppose les conditions initiales nulles (cela revient à considérer que $e(t)$ et $s(t)$ sont les écarts de température par rapport à la température ambiante).

b) Analyse temporelle du problème vis-à-vis d'une entrée à un échelon.

Q 1 : Déterminer la transformée de Laplace de l'équation 1.
Q 2 : Déterminer $e(t)$ puis $E(p)$.
Q 3 : En déduire $S(p)$.
Q 4 : Déterminer l'expression de la fonction de transfert $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$.
Q 5 : La mettre sous forme canonique et en déduire son gain sa classe et son ordre.
Q 6 : Déterminer les limites de $s(t)$ en 0 et à l'infini.
Q 7 : déterminer la pente de la tangente à l'origine.
Q 8 : Que faut-il faire pour que système soit précis ?
Q 9 : Tracer l'allure de $s(t)$.

c) Modification de la consigne : utilisation d'une rampe puis d'une stabilisation

Imposer une entrée de type échelon peut s'avérer brutal pour les composants du système. On souhaite pour cela imposer une consigne progressive. On utilise alors l'évolution de $e(t)$ donnée par la figure 1.

Q 10 : Proposer une décomposition du signal ci-dessus à l'aide de signaux canoniques (échelon, rampe) en complétant la figure 1.
Q 11 : Déterminer l'expression de $E(p)$.
Q 12 : En déduire l'expression de $S(p)$
Q 13 : Vérifier le comportement asymptotique de $s(t)$.
Q 14 : On donne la réponse obtenue par simulation sur la courbe (figure2). Que pouvez-vous en dire concernant la réponse du système. Déterminer les écarts entre performances attendues et réelles.

- On peut noté un retard dynamique égal à $10\ s$;
- Le comportement obtenu est bien conforme aux calculs effectués précédemment.

On obtient un valeur de 450řC en régime permanent pour $s(t)$ qui est bien conforme au cahier des charges.

2 Décomposition en éléments simples

Q 15 : Décomposer la fonction ci-dessous en éléments simples et donner son expression dans le domaine temporel en utilisant la table des transformées de Laplace.

1. $$S_1(p) = \frac{5}{(p+2)(p^2+6p+13)}.$$

2. $$S_2(p) = \frac{K\,p^2}{(p-1)^2(p+1)}.$$

3 Résolution des équations différentielles à l'aide d'un calcul symbolique

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 9\frac{ds(t)}{dt} + 20 s(t) = 0.$$

avec les conditions initiales : $s(0) = 1$ et $s'(0) = 3$
Indications : on rappelle que

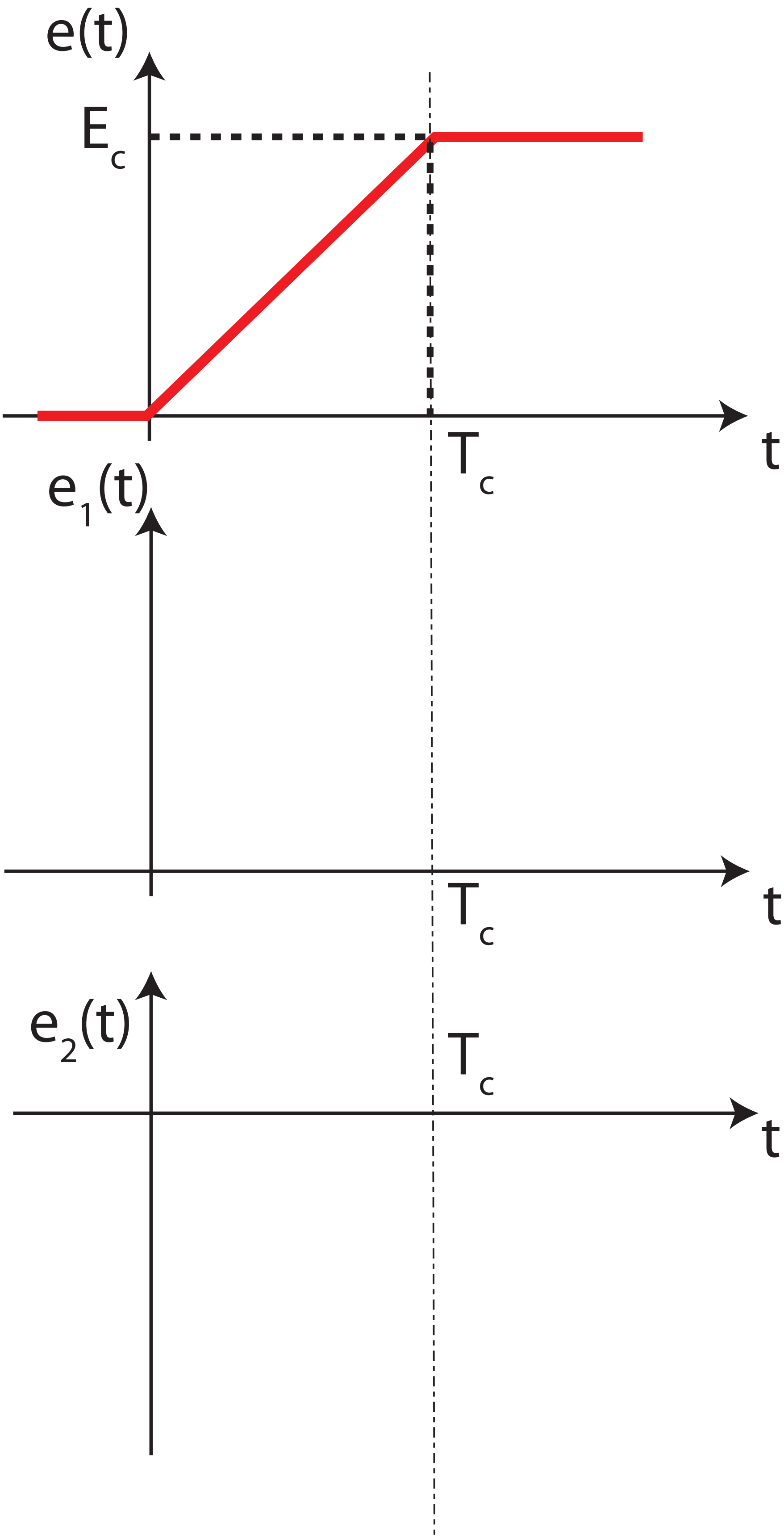


FIGURE 1 – Décomposition de la consigne d'entrée

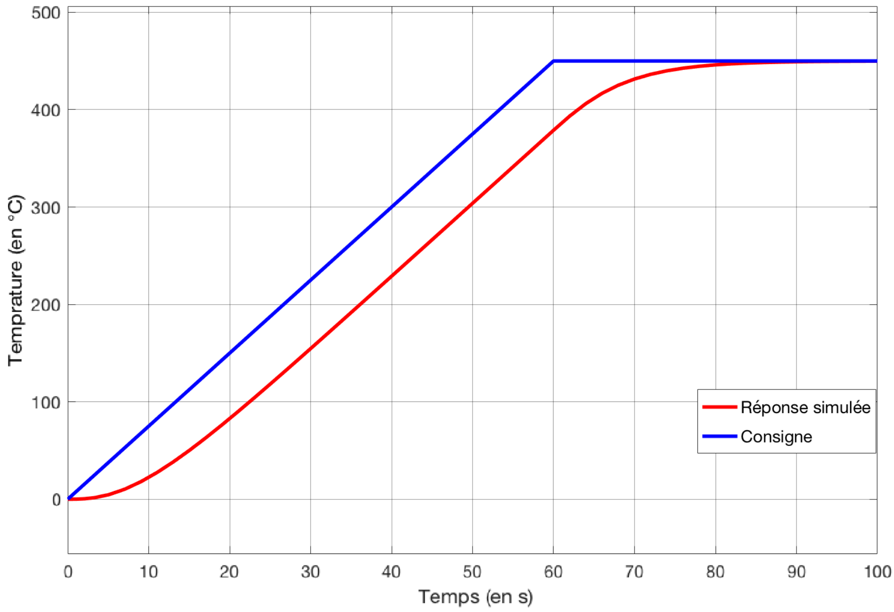


FIGURE 2 – Réponse à une montée progressive en consigne obtenue par simulation

$$\mathscr{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = p\,F(p) - f(0^+)$$

Q 16 : Écrire l'équation différentielle dans le domaine de Laplace. En déduire $S(p)$ et la décomposer en éléments simples. Repasser dans le domaine temporel.

Corrigé

---

1 Corrigé : Modélisation du cycle de chauffe d'une imprimante 3D

Q 1 : Déterminer la transformée de Laplace de l'équation 1.

$$2\cdot p^2\cdot S(p)+6\cdot\alpha\cdot p\cdot S(p)+4\cdot\alpha^2\cdot S(p)=K\cdot E(p)$$

On impose une consigne correspondante à un échelon d'amplitude E_c en entrée.
Q 2 : Déterminer $e(t)$ puis $E(p)$.

$$E(p)=\frac{E_c}{p}$$

Q 3 : En déduire $S(p)$

$$S(p)=\frac{K\cdot E_c}{p\cdot\left(2\cdot p^2+6\cdot\alpha\cdot p+4\cdot\alpha^2\right)}$$

Q 4 : Déterminer l'expression de la fonction de transfert $H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}$

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{2\cdot p^2+6\cdot\alpha\cdot p+4\cdot\alpha^2}$$

Q 5 : La mettre sous forme canonique et en déduire son gain sa classe et son ordre.

$$H(p)==\frac{\frac{K}{4\alpha^2}}{1+\frac{3}{2\alpha}\cdot p+\frac{1}{2\alpha^2}\cdot p^2}$$

- Classe : 0 ;
- ordre : 2 ;
- gain : $\frac{K}{4\alpha^2}$.

Q 6 : Déterminer les limites de $s(t)$ en 0 et à l'infini.

$$\lim_{t\to 0} s(t) = \lim_{p\to+\infty} p\,S(p) = \lim_{p\to\infty}\left[p\cdot\frac{K\cdot E_c}{p\cdot\left(2\cdot p^2+6\cdot\alpha\cdot p+4\cdot\alpha^2\right)}\right] = \lim_{p\to\infty}\left[\frac{K\cdot E_c}{2\cdot p^2+6\cdot\alpha\cdot p+4\cdot\alpha^2}\right] = 0$$

$$\lim_{t\to+\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} p\,S(p) = \lim_{p\to 0}\left[p\cdot\frac{K\cdot E_c}{p\cdot\left(2\cdot p^2+6\cdot\alpha\cdot p+4\cdot\alpha^2\right)}\right] = \frac{K\cdot E_c}{4\cdot\alpha^2}$$

Q 7 : déterminer la pente de la tangente à l'origine.

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{ds(t)}{dt}\right) = \lim_{p\to+\infty}\left[p\cdot\left[p\cdot\frac{K\cdot E_c}{p\cdot\left(2\cdot p^2+6\cdot\alpha\cdot p+4\cdot\alpha^2\right)}\right]\right] = 0$$

Q 8 : Que faut-il faire pour que système soit précis ?

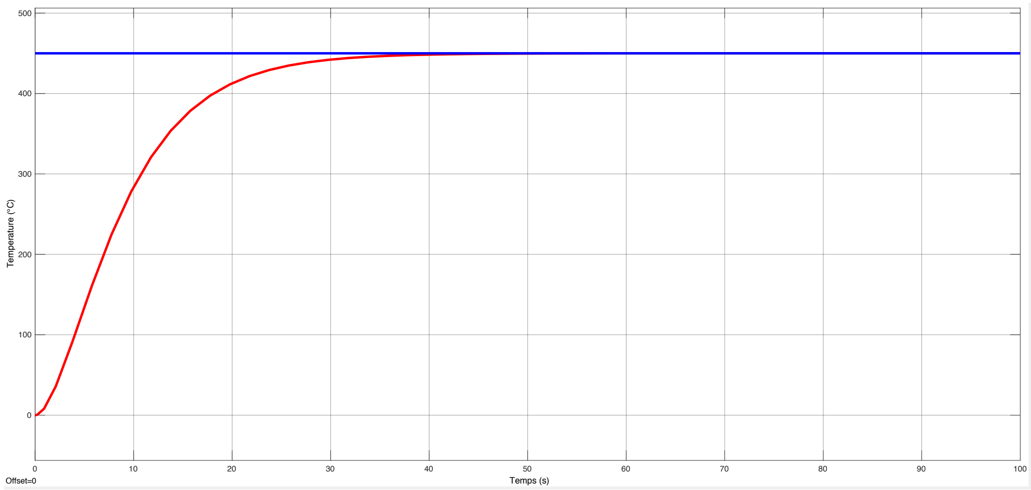
Pour que le système soit précis il faut que :

$$\frac{K\cdot E_c}{4\cdot\alpha^2} = E_c$$

On en déduit donc :

$$\frac{K}{4\cdot\alpha^2} = 1$$

Q 9 : Tracer l'allure de $s(t)$

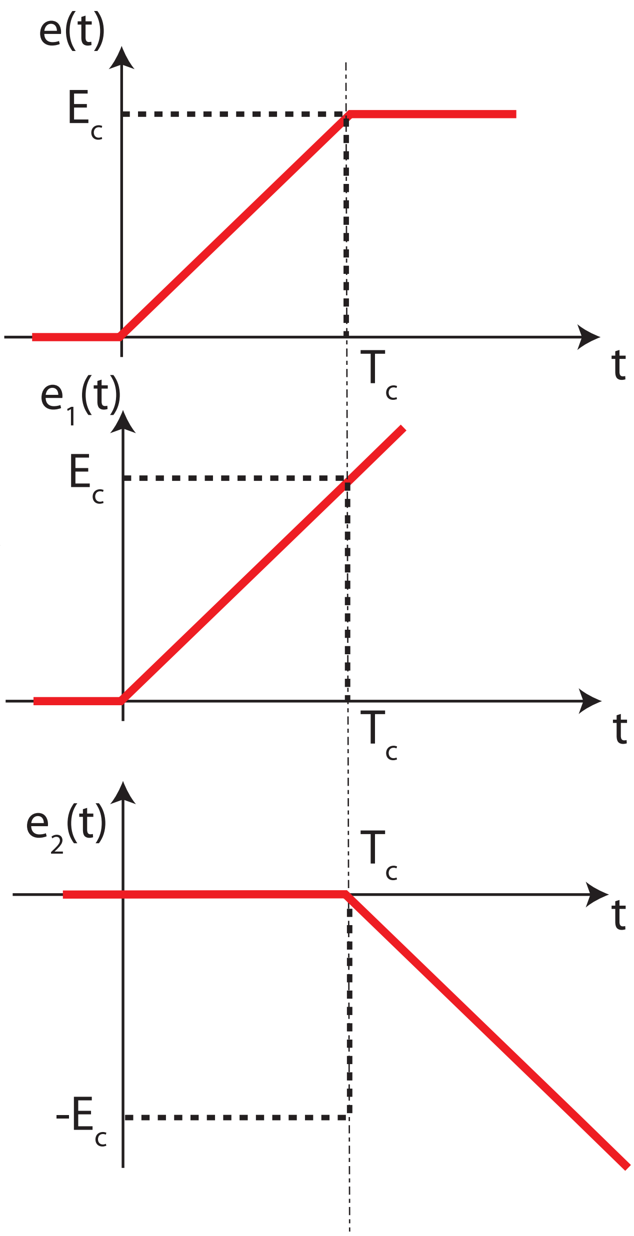


Tracé avec $K = 0,1$ et $a = 0,1581$

Q 10 : Proposer une décomposition du signal ci-dessus à l'aide de signaux canoniques (échelon, rampe).

On peut décomposer le signal $e(t)$ en deux signaux $e_1(t)$ et $e_2(t)$ de la façon suivante :

$$e(t) = e_1(t) + e_2(t) = \frac{E_c}{T_c} \cdot t \cdot u(t) - \frac{E_c}{T_c} \cdot (t - T_c) \cdot u(t - T_c)$$



Q 11 : Déterminer l'expression de $E(p)$.

- Transformée de Laplace de $e_1(t)$:

$$\mathscr{L}\left[e_1(t)\right] = E_1(p) = \mathscr{L}\left[\frac{E_c}{T_c} \cdot t \cdot u(t)\right] = \frac{E_c}{T_c \cdot p^2}$$

- Transformée de Laplace de $e_2(t)$:

$$\mathscr{L}\left[e_2(t)\right] = E_2(p) = \mathscr{L}\left[-\frac{E_c}{T_c} \cdot (t - T_c) \cdot u(t - T_c)\right] = -\mathscr{L}\left[e_1(t - T_c)\right]$$

  Or le théorème du retard donne :

$$\mathscr{L}\left[e_1(t - T_c)\right] = E_1(p) \cdot e^{-T_c \cdot p}$$

  On en déduit :

$$E_2(p) = -\frac{E_c \cdot e^{-T_c \cdot p}}{T_c \cdot p^2}$$

- On en déduit la transformée de Laplace de $e(t)$:

$$\mathscr{L}\left[e(t)\right] = E_1(p) + E_2(p) = \frac{E_c}{T_c \cdot p^2}\left(1 - e^{-T_c \cdot p}\right)$$

Q 12 : En déduire l'expression de $S(p)$
La modification de l'entrée du système ne modifie pas la fonction de transfert. On en déduit :

$$S(p) = H(p)\cdot E(p) = \frac{K\cdot E_c}{T_c\cdot p^2\left(2\cdot p^2+6\cdot\alpha\cdot p+4\cdot\alpha^2\right)}\cdot\left(1-e^{-T_c\cdot p}\right)$$

Q 13 : Vérifier le comportement asymptotique de $s(t)$.

- Limite de $s(t)$ en 0 :

$$\lim_{t\to 0} s(t) = \lim_{p\to+\infty} p\, S(p) = \lim_{p\to\infty}\left[p\cdot\frac{K\cdot E_c}{T_c\cdot p^2\left(2\cdot p^2+6\cdot\alpha\cdot p+4\cdot\alpha^2\right)}\cdot\left(1-e^{-T_c\cdot p}\right)\right] = 0$$

- Limite de $s(t)$ en $+\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} p\, S(p) = \lim_{p\to 0}\left[p\cdot\frac{K\cdot E_c}{T_c\cdot p^2\left(2\cdot p^2+6\cdot\alpha\cdot p+4\cdot\alpha^2\right)}\cdot\left(1-e^{-T_c\cdot p}\right)\right] = \lim_{p\to 0}\left[\frac{-K\cdot E_c}{T_c\left(2\cdot p^2+6\cdot\alpha\cdot p+4\cdot\alpha^2\right)}\cdot\frac{e^{-T_c\cdot p}-1}{p}\right]$$

Or, on reconnaît la limite du taux d'accroissement :

$$\lim_{p\to 0}\left[\frac{e^{-T_c\cdot p}-1}{p}\right] = \lim_{p\to 0}\left[\frac{e^{-T_c\cdot p}-e^{-T_c\cdot 0}}{p-0}\right] = \left[\frac{d(e^{-T_c\cdot p})}{dt}\right]_{p=0} = -T_c$$

Finalement, on obtient :

$$\lim_{t\to+\infty} s(t) = \frac{-K\cdot E_c\cdot(-T_c)}{T_c\cdot 4\cdot\alpha^2} = \frac{K\cdot E_c}{4\cdot\alpha^2}$$

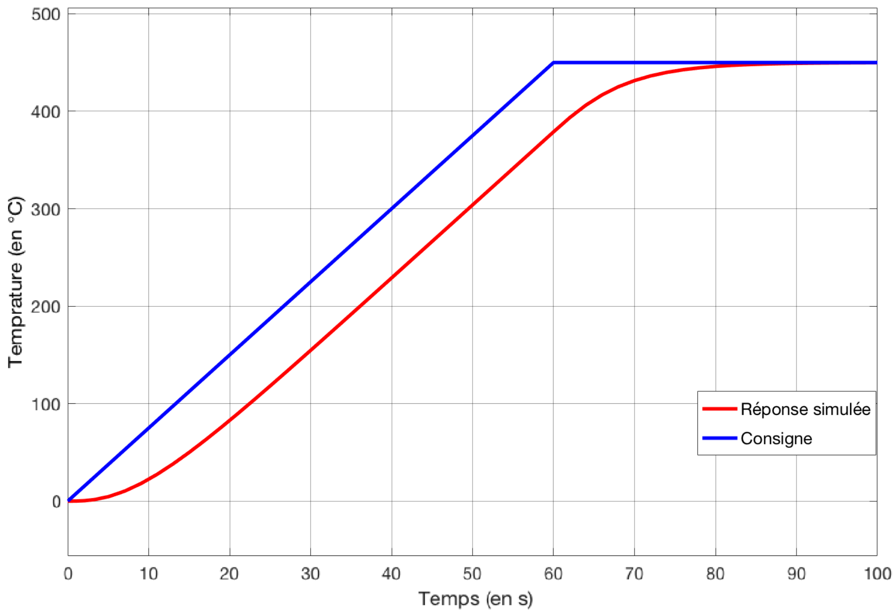
- Tangente à l'origine de $s(t)$:

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{ds(t)}{dt}\right) = \lim_{p\to+\infty}\left[p\cdot\left[p\cdot\frac{K\cdot E_c}{T_c\cdot p^2\cdot\left(2\cdot p^2+6\cdot\alpha\cdot p+4\cdot\alpha^2\right)}\cdot\left(1-e^{-T_c\cdot p}\right)\right]\right] = 0$$

Q 14 : On donne la réponse obtenue par simulation sur la courbe ci-contre. Que pouvez-vous en dire concernant la réponse du système. Déterminer les écarts entre performances attendues et réelles.

- On peut noté un retard dynamique égal à 10 s;
- Le comportement obtenu est bien conforme aux calculs effectués précédemment.

On obtient un valeur de 450řC en régime permanent pour $s(t)$ qui est bien conforme au cahier des charges.



2 Corrigé : décomposition en éléments simples

Q 15 : Décomposer la fonction ci-dessous en éléments simples et donner son expression dans le domaine temporel en utilisant la table des transformées de Laplace.

1. La décomposition en éléments simples consiste à écrire :

$$S(p) = \frac{5}{(p+2)(p^2+6p+13)} = \frac{A}{p+2} + \frac{Bp+C}{p^2+6p+13}.$$

En mettant au même dénominateur l'expression de droite, nous obtenons,

$$S(p) = \frac{p^2(A+B)+p(6A+2B+C)+13A+2C}{(p+2)(p^2+6p+13)}$$

Par identification, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{matrix} (a) \\ (b) \\ (c) \end{matrix} \begin{cases} A+B=0 \\ 6A+2B+C=0 \\ 13A+2C=5 \end{cases}$$

En faisant $(b)-2(a)$, on obtient :

$$\begin{matrix} (a') \\ (c) \end{matrix} \begin{cases} 4A+C=0 \\ 13A+2C=5 \end{cases}$$

Puis enfin $(c)-2(a')$,

$$\begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=-4 \end{cases}$$

Nous obtenons alors,

$$S(p) = \frac{1}{p+2} + \frac{-p-4}{p^2+6p+13} = \frac{1}{p+2} - \frac{p+4}{(p+3)^2+4}.$$

Le premier terme est de la forme $\frac{1}{p+a}$, alors que le deuxième terme est de la forme $\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$. Il ne reste plus qu'à arranger $S(p)$.

$$S(p) = \frac{1}{p+2} - \frac{p+4}{(p+3)^2+4} = \frac{1}{p+2} - \frac{p+3}{(p+3)^2+4} - \frac{1}{2}\frac{2}{(p+3)^2+4}.$$

Nous avons alors ajouter le terme $\frac{2}{(p+3)^2+4}$ qui est de la forme $\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$,
Avec le passage aux transformées inverses, nous obtenons,

$$s(t) = \left[-e^{-3t}\left(\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)\right) + e^{-2t}\right]u(t).$$

2. $$S_2(p) = \frac{Kp^2}{(p-1)^2(p+1)} = \frac{\alpha}{(p-1)^2} + \frac{\beta}{(p-1)} + \frac{\gamma}{(p+1)}.$$

   - Calcul de α : on multiplie par $(p-1)^2$ et $p \to 1$:

   $$\frac{Kp^2}{(p+1)} = \alpha.$$

   Donc :

   $$\alpha = \frac{K}{2}$$

- Calcul de γ : on multiplie par $(p+1)$ et $p \rightarrow -1$:

$$\boxed{\frac{K\,p^2}{(p-1)^2} = \gamma.}$$

Donc :

$$\boxed{\gamma = \frac{K}{4}}$$

- Calcul de β : On prend une valeur particulière pour p car on connait α et γ, on choisit ici par exemple $p = 0$.

$$\alpha - \beta + \gamma = 0.$$

D'où :

$$\boxed{\beta = \frac{3}{4}K.}$$

- Ainsi on obtient :

$$S_2(p) = \frac{K}{4}\left[\frac{2}{(p-1)^2} + \frac{3}{p-1} + \frac{1}{p+1}\right]$$

- d'où en temporel :

$$\boxed{s_2(t) = \frac{K}{4}\left[2\,t\,e^t + 3\,e^t + e^{-t}\right]\,u(t).}$$

3 Corrigé : Résolution des équations différentielles à l'aide d'un calcul symbolique

Q 16 : Écrire l'équation différentielle dans le domaine de Laplace. En déduire $S(p)$ et la décomposer en éléments simples. Repasser dans le domaine temporel.

Rappelons, les deux formules de dérivation des transformées de Laplace :

$$\mathscr{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = p\,F(p) - f(0^+)$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = p^2\,F(p) - p\,f(0^+) - f'(0^+)$$

En appliquant cette formule à l'équation différentielle, nous obtenons,

$$p^2S(p) + 9pS(p) + 20S(p) = 9 + 3 + p$$

Ceci nous donne alors,

$$S(p) = \frac{12+p}{p^2+9p+20} = \frac{12+p}{(p+\frac{9}{2})^2 + \frac{80}{4} - \frac{81}{4}} = \frac{12+p}{(p+\frac{9}{2})^2 - \frac{1}{4}}$$

Il faut maintenant retrouver les expressions usuelles des transformées de Laplace :

$$\begin{aligned}
S(p) = \frac{p+\frac{9}{2}+\frac{24}{2}-\frac{9}{2}}{(p+\frac{9}{2})^2-\frac{1}{4}} &= \frac{p+\frac{9}{2}}{(p+\frac{9}{2})^2-\frac{1}{4}} + \frac{\frac{15}{2}}{(p+\frac{9}{2})^2-\frac{1}{4}} \\
&= \frac{p+\frac{9}{2}}{(p+\frac{9}{2})^2-\frac{1}{4}} + \frac{2\times 15}{2}\frac{\frac{1}{2}}{(p+\frac{9}{2})^2-\frac{1}{4}} \\
&= \frac{p+\frac{9}{2}}{(p+\frac{9}{2})^2-\frac{1}{4}} + 15\frac{\frac{1}{2}}{(p+\frac{9}{2})^2-\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

$\mathscr{L}\left[\cos(\omega t)\right]$ s'effectue exactement avec la même méthode et nous obtenons,
On peut démontre comme la question 1 :

$$\mathscr{L}\left[e^{-at}\cosh(\omega t)\right] = \frac{p+a}{(p+a)^2-\omega^2}$$

$$\mathscr{L}\left[e^{-at}\sinh(\omega t)\right] = \frac{\omega}{(p+a)^2-\omega^2}$$

En ayant vérifié que $a > \omega$. Dans notre cas cette dernière condition est vérifiée car $\frac{9}{2} > \frac{1}{2}$.
En passant par la transformée inverse de cette dernière expression, nous obtenons,

$$\boxed{s(t) = e^{-9t/2}\left(\cosh(t/2) + 15\sinh(t/2)\right)u(t)}$$