Devoir à la maison n° 18

À rendre le 11 mai

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.
On appelle « polynôme annulateur de f » un polynôme $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ vérifiant

$$P(f) = a_0 \mathrm{Id} + a_1 f + \cdots + a_n f^n = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}.$$

1) **a)** Calculer A^2 et A^3, puis déterminer un polynôme annulateur de f.

b) Soit P un polynôme annulateur de f, soit λ un nombre réel. Montrer que, s'il existe un vecteur colonne X non nul vérifiant $AX = \lambda X$, alors $P(\lambda) = 0$.

c) Déterminer tous les nombres réels λ tels que $f - \lambda \mathrm{Id}$ n'est pas injective. On donnera, pour chacun de ces λ, $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})$.

d) Existe-t-il une base dans laquelle la matrice de f serait diagonale ?

2) Trouver une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3) **a)** Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\, f^2 \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

b) On veut montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant : $g^2 = f$. On suppose pour cela qu'un tel endomorphisme existe.
Établir que $\mathrm{Ker}\, f^2$ est stable par g puis montrer que la matrice de g dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme :

$$G = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}.$$

En utilisant la matrice de f dans cette même base, trouver une contradiction et conclure.

4) Étude d'un cas plus général. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$ (où n désigne en entier naturel supérieur ou égal à 1) et on désigne par α un réel non nul.

a) On considère un endomorphisme h de $\mathbb{R}^n$ et on suppose que : $h^n = \alpha h^{n-1}$. Montrer que :

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\, h^{n-1} \oplus \mathrm{Ker}(h - \alpha \mathrm{Id}).$$

b) Montrer réciproquement que, si un endomorphisme h de $\mathbb{R}^n$ est tel que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\, h^{n-1} \oplus \mathrm{Ker}(h - \alpha \mathrm{Id})$, alors on a : $h^n = \alpha h^{n-1}$.

— **FIN** —