Feuille d'exercice n° 18 : **Développements limités - fiche d'entraînement - correction**

Exercice 1

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n^3} = 0$ donc $n^3 - \sqrt{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$. De même, $\ln n - 2n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} -2n^2$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^3}{-2n^2} = -n/2$.

2) $\ln(n^2+1) = \ln n^2 + \ln(1+1/n^2) = 2\ln n + \ln(1+1/n^2) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ln n$ et $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln n}{n}$.

3) $w_n = \dfrac{n\sqrt{n+1/n+1/n^2}}{n^{2/3}\sqrt[3]{1-1/n+1/n^2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{n^{2/3}} = n^{1/3}$.

4) $\cos(1/n) = 1 - \dfrac{1}{2n^2} + o(1/n^2)$ et $\mathrm{e}^{1/n} = 1 + 1/n + o(1/n)$, donc :
$\cos(1/n) - \mathrm{e}^{1/n} = -1/n + o(1/n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/n$.

5) $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1/n^2}{1/n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -1/n$.

6) $\ln(1+\sin(1/n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin(1/n)$ car $\sin(1/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} n+\infty 0$, et $\sin(1/n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/n$, donc :
$\ln(1+\sin(1/n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/n$. Enfin, $1 - \sqrt{1+1/n} = 1 - 1 - 1/(2n) + o(1/n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -1/(2n)$, d'où $z_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -2$.

Exercice 2

1) $1 - x + \dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{11}{24}x^3 + o\left(x^3\right)$

2) $\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{90}x^3 + o\left(x^3\right)$

3) $1 + \dfrac{1}{2}(x-1) - \dfrac{1}{12}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$

4) $\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{90}x^3 + o\left(x^3\right)$

5) $1 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{12}x^2 + \dfrac{1}{12}x^3 - \dfrac{1}{144}x^4 - \dfrac{1}{240}x^5 + o\left(x^5\right)$

6) $\sum\limits_{k=0}^{999} \dfrac{x^k}{k!} = e^x - \dfrac{x^{1000}}{1000!} + o(x^{1000})$ d'où :
$\ln\left(\sum\limits_{k=0}^{999} \dfrac{x^k}{k!}\right) = \ln(e^x - \dfrac{x^{1000}}{1000!} + o(x^{1000})) = \ln(e^x) + \ln(1 - \dfrac{x^{1000}e^{-x}}{1000!} + o(x^{1000})) = x - \dfrac{x^{1000}}{1000!} + o(x^{1000})$.

Exercice 3

6) $\ln\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) = (\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{12}x^4 + \dfrac{1}{45}x^6 + o\left(x^7\right))$

$$7)\ \ln\left(1+\operatorname{ch} x\right)=\left(\ln\left(2\right)+\frac{1}{4}x^{2}-\frac{1}{96}x^{4}+o\left(x^{4}\right)\right)$$

$$8)\ \ln\left(\tan x\right)=\left(2\ \left(x-1/4\,\pi\right)+\frac{4}{3}\left(x-1/4\,\pi\right)^{3}+o\left(\left(x-1/4\,\pi\right)^{4}\right)\right)$$

$$9)\ \arctan\left(\mathrm{e}^{\,x}\right)=\left(1/4\,\pi+\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^{3}+o\left(x^{3}\right)\right)$$

$$10)\ \arctan\left(2\sin x\right)=\left(1/3\,\pi+\frac{1}{4}\left(x-1/3\,\pi\right)-3/16\,\sqrt{3}\left(x-1/3\,\pi\right)^{2}+\frac{3}{16}\left(x-1/3\,\pi\right)^{3}+o\left(\left(x-1/3\,\pi\right)^{3}\right)\right)$$