Devoir surveillé n° 02 - Remarques

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 28 points, ramené sur 5 points.
- Problèmes : exercice vu en TD sur 4 points, et les autres questions sur 4 points, ramené sur 15 points.

Statistiques descriptives.

	Calculs	Problème	Note finale
Note maximale	18	38	$18,5$
Note minimale	3	1	$1,5$
Moyenne	$\approx 8,147$	$\approx 20,05$	$\approx 10,05$
Écart-type	$\approx 3,38$	$\approx 8,60$	$\approx 3,91$

Remarques générales.

N'oubliez pas de finir vos réponses par une CONCLUSION : recopiez la question sur le mode affirmatif, et ENCADREZ-la.
Il faut également introduire toutes les lettres utilisées, par exemple ne commencez pas un calcul par « $f(x) = \cdots$ » mais par : « Soit $x \in E$. Alors : $f(x) = \cdots$ ».

Exercice vu en TD.

Globalement bien traité, mais pas toujours très bien.
Nous avions vu en cours une démonstration avec une récurrence triple, qui est de loin la plus simple.
Beaucoup ont préféré montrer que pour tout entier n supérieur à 5, il existait $a, b, c \in \mathbb{N}$ tels que $n = 3a + 5b + 7c$. J'imagine qu'une telle démonstration a dû circuler parmi vous, pour qu'une aussi grande proportion d'élèves raisonne ainsi. Mais c'était beaucoup plus compliqué, et en général très mal rédigé. Déjà, au lieu d'écrire : « P_n : il existe $a, b, c \in \mathbb{N}$ tels que $n = 3a + 5b + 7c$ », j'ai souvent lu : « $P_n : n = 3a + 5b + 7c$, $a, b, c \in \mathbb{N}$ », ce qui ne veut rien dire, et je commence à être fatigué de répéter qu'un « $a, b, c \in \mathbb{N}$ » à la sauvette en fin de ligne ne doit pas être employé : est-ce un « il existe », un « pour tout » ou autre chose ? Le seul cas où l'on rencontre cette écriture est dans un ensemble : $\{2n \ , \ n \in \mathbb{N}\}$ par exemple. En dehors d'un ensemble je ne veux pas voir cela.
Ensuite, dans l'hérédité, j'ai souvent lu : « $n = 3a + 5b + 7c$, donc $n + 1 = 3(a + 2) + 5(b - 1) + 7c$ donc c'est bon ». Non, ce n'est pas bon si $b = 0$, car alors $b - 1 \notin \mathbb{N}$.
Je vous rappelle également que l'écriture $\{0; 3; n \in \mathbb{N} \ , \ n \geqslant 5\}$ n'a aucun sens. C'est plutôt $\{0, 3\} \cup \{n \in \mathbb{N} \ , \ n \geqslant 5\}$.

Enfin dans tous les cas, quelle que soit la méthode employée, j'ai trop souvent rencontré l'hypothèse de récurrence « P_n : l'ensemble des scores possibles est $\mathbb{N}\backslash\{1, 2, 4\}$ ». C'est une erreur grave, qui revient à écrire « $P_n : \forall n \in \mathbb{N} \cdots$ » au lieu de « $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n : \cdots$ ». Il est important de comprendre pourquoi c'est un erreur, à commencer par le fait que P_n énoncée ainsi ne dépend même pas de n, et parce que P_0 contient déjà tout le résultat.

Problème.

Il s'agissait dans ce problème d'introduire une notion de dérivée et de primitive pour des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, et ensuite de démontrer des résultats concernant ces opérations, parfois comparables aux résultats sur la dérivée et les primitives des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ces définitions n'avaient néanmoins absolument rien à voir avec celles des dérivée et primitive des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et il était impossible d'utiliser les résultats « usuels », ce que beaucoup ont fait. Ces « ressemblances subtiles » et la relative abondance de notation et définitions nouvelles en ont dérouté beaucoup.

Concernant la rédaction, la confusion fonction / expression était à nouveau omniprésente : si f est une fonction, $f(x)$ est une expression en x (et il faut définir x). Ce sont deux objets différents et on ne peut pas les comparer. Il est hallucinant de voir le nombre de fois où j'ai croisé « $\Delta(f) = f(x+1) - f(x)$ ». C'était plutôt : « soit $x \in \mathbb{N}$, alors $\Delta(x) = f(x+1) - f(x)$ ». Ou encore des formulations incompréhensibles du genre : « si $x = 0$, $I(f) = 0$. Vous confondez le tout et la partie : $I(f)(0) = 0$ n'est qu'une partie des valeurs de $I(f)$, mais dire que $I(f) = 0$, c'est dire que la fonction est nulle, qu'elle vaut 0 partout. En plus, les phrases du genre « pour x, on a A » où A ne dépend pas de x n'ont en général pas de sens (ou sont inintéressantes, comme par exemple « pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 = 1$ »).

1) Balancer $x^{\underline{m}} = \dfrac{x!}{(x-m)!}$ sans démonstration vous fait perdre des points.

3) La question préférée des escrocs ... Vous avez souvent bien vite oublié le résultat de la question **2)** pour écrire « $a^{\underline{k+1}} = a \times a^{\underline{k}}$ ». Bref, vous avez souvent écrit la démo du binôme de Newton classique en soulignant les exposants pour me faire plaisir. Mais ça ne marchait pas : $a^{\underline{k+1}} = (a-k) \times a^{\underline{k}}$ et $b^{\underline{m-k+1}} = (b-m+k) \times b^{\underline{m-k}}$.
Autre erreur fréquente : initialiser la récurrence à $m = 1$. Relisez l'énoncé : les premières définitions sont données pour $m \in \mathbb{N}^*$, mais ensuite on considère $m \in \mathbb{N}$.

4) x n'est jamais introduit, et il y a trop de problèmes d'homogénéité du type fonction = expression, ainsi que dans beaucoup des questions qui suivent.

5) $x^{\underline{m}} = \dfrac{x!}{(x-m)!}$ n'était valable que pour $x \geqslant m$.

6) La formule de Pascal paraît inconnue à la plupart des élèves. C'est du cours, vous devez la repérer, et il est inutile de la démontrer. Ou alors si vous le faites, essayer au moins de sortir un calcul correct.

7) On démontrait là des formules analogues à $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$ et $(fg)' = f'g + fg'$. Vous avez souvent vu la première, jamais la seconde.

8) Parler de la fonction exp est totalement hors sujet. Il s'agit ici de l'analogue de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

9) et 10) De grosses confusions dans les parenthèses : I et Δ sont des fonctions dont les arguments sont des fonctions. Donc si $x \in \mathbb{N}$, $\Delta(f(x))$, $I(f(x))$, $\Delta(I(f(x)))$ et $I(\Delta(f(x)))$ etc n'existent pas. C'était $\Delta(f)(x)$, $I(f)(x)$, $\Delta(I(f))(x)$ et $I(\Delta(f))(x)$.
Et quand vous voyez les expressions $\displaystyle\sum_{k=0}^{x} f(k) - \sum_{k=0}^{x-1} f(k)$ ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{x} f(k) - \sum_{k=0}^{x} f(k+1)$, il faudrait peut-être simplifier !

11) Quasiment tout le monde a écrit que si F est une primitive de f, alors l'ensemble des primitives de f est $\{F + k\ ,\ k \in \mathbb{R}\}$, mais sans le justifier. J'imagine que vous vous êtes dit que c'était des primitives usuelles, mais ce n'était pas le cas. Il fallait démontrer ce résultat.
Au passage, $\{F(x) + k\ ,\ k \in \mathbb{R}\}$ n'est pas le bon ensemble, toujours pour les mêmes raisons : $F(x)$ n'est pas une fonction mais une expression.

14) Quelques uns ont démontré le résultat pas récurrence, mais dans l'hérédité ils arrivent à démontrer P_{n+1} sans utiliser P_n : ce n'est donc pas une démonstration par récurrence. On pouvait en effet démontrer le résultat directement.

15) Peu de calculs corrects malheureusement, pour ce qui se voulait être une question facile.