Devoir à la maison n° 6

À rendre le 15 novembre

Ensembles transitifs.

Première partie : un cas particulier, les ensembles d'ensembles.

Soit E un ensemble éventuellement vide, dont les éléments sont des ensembles. On dit que E est *transitif* si :

$$\forall x,\ x \in E \Rightarrow x \subset E.$$

On remarquera que cette dernière phrase peut aussi s'écrire : $\forall x \in E,\ x \subset E$.

1) Déterminer si chacun des ensembles suivants est transitif.

a) $E_1 = \varnothing$ b) $E_2 = \{\varnothing\}$ c) $E_3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ d) $E_4 = \{\{\varnothing\}\}$

2) Déterminer tous les ensembles d'ensembles E tels que $\{E\}$ est transitif.

3) Soit X un ensemble quelconque. On note $\mathscr{P}_0(X) = X$, et $\mathscr{P}_1(X) = \mathscr{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. On définit alors par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}_{n+1}(X) = \mathscr{P}(\mathscr{P}_n(X))$.

a) Soit $X = \{1, 2\}$. Déterminer $\mathscr{P}_2(X)$.

b) Déterminer $\mathscr{P}_1(\varnothing)$, $\mathscr{P}_2(\varnothing)$ et $\mathscr{P}_3(\varnothing)$.

c) Montrer que si X est un ensemble transitif d'ensembles, alors $\mathscr{P}(X)$ l'est aussi.

d) Montrer que si X est un ensemble transitif d'ensembles, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n(X)$ l'est aussi.

4) Montrer que si un ensemble d'ensembles E est transitif, alors $E \cup \{E\}$ l'est également.

5) Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille (finie ou infinie) d'ensembles transitifs d'ensembles. Montrer que les ensembles $\bigcup_{i\in I} E_i$ et $\bigcap_{i\in I} E_i$ sont transitifs.

Remarque culturelle : en théorie des ensembles, dans la constuction de $\mathbb{N}$ par Von Neumann, l'entier 0 est défini comme étant l'ensemble vide, et si n est un entier, on définit son successeur $n+1 = n \cup \{n\}$. Ainsi $0 = \varnothing$, $1 = \{\varnothing\}$, $2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, *etc.* Les entiers sont donc des ensembles transitifs.

Seconde partie : le cas général.

Soit X un ensemble quelconque. On note $\bigvee X$ la réunion des éléments de X qui sont des ensembles. Ainsi, on a

$$\bigvee X = \{\, y \mid \exists x \in X,\ y \in x \,\}\,.$$

On dit alors que X est *transitif* si $\bigvee X \subset X$.

6) **a)** Déterminer $\bigvee \varnothing$.

b) Soit $X = \{\{\varnothing\}\}$. Déterminer $\bigvee X$ et $\bigvee \bigvee X$.

c) Soit $X = \{\{1\}, \{2,3\}, \{1,2,\{4\}\}\}$. Donner $\bigvee X$, $\bigvee\bigvee X$ et $\bigvee\bigvee\bigvee X$.

7) Vérifier que si E est un ensemble d'ensembles, alors E est transitif au sens de la première partie si et seulement si E est transitif au sens de la seconde partie.

8) Soit X un ensemble. On pose $X_0 = X$ et on définit par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = \bigvee X_n$. On pose alors

$$\mathrm{TC}(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n,$$

appelée *clôture transitive* de X.

a) Déterminer $\mathrm{TC}(\varnothing)$.

b) Déterminer $\mathrm{TC}(\{\{\varnothing\}\})$.

c) Déterminer $\mathrm{TC}(\{\{1\}, \{2,3\}, \{1,2,\{4\}\}\})$.

d) Montrer que $\mathrm{TC}(X)$ est un ensemble transitif.

e) *Question facultative :* Montrer que c'est le plus petit (au sens de l'inclusion) ensemble transitif contenant X.

— **FIN** —