Devoir surveillé n° 10 - Remarques

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 26 points, ramené sur 5 points.
- Problèmes : toutes les questions sur 4 points, total sur 80 points, ramené sur 15 points.

Statistiques descriptives.

	Calculs	Sujet 1 (sur 80)	Sujet 2 (sur 80)	Note finale
Note minimale	4	15	17	4
Note maximale	22	66	62	$17,5$
Moyenne	$\approx 10,83$	$\approx 38,71$	$\approx 35,16$	$\approx 10,60$
Écart-type	$\approx 4,03$	$\approx 12,32$	$\approx 12,13$	$\approx 3,19$

A). Un exercice vu en TD (v1).

Quasiment personne ne l'a traité. C'était pourtant simplissime.

B). Réduction d'un endomorphisme (v1).

Sujet très classique, plutôt bien traité dans l'ensemble.

3) Il est inutile de passer du temps à calculer le rang ou le déterminant de M : le calcul de son inverse suffit à prouver qu'elle est inversible.

4) f est bijective si et seulement si sa matrice est inversible, et c'est tout, pas la peine d'aller chercher plus loin.

5) Je ne devrais pas voir des horreurs de cette sorte : $P(\lambda) = (6-\lambda)((5-\lambda)^2-1) = -\lambda^3+16\lambda^2-84\lambda+144 = (6-\lambda)^2(4-\lambda)$. Dans la première expression il y a une identité remarquable, et de toute façon tout développer pour finalement refactoriser est très maladroit.

6) Vous vous compliquez la vie ! Regardez le corrigé (et connaissez votre cours).

7.a) et b) Des calculs on ne peut plus élémentaires, vus et revus à l'entraînement. Il est dommage qu'il y ait tant de fautes.

7.c) Bien traitée.

8) Question plus délicate : le fait qu'il n'y ait que deux valeurs propres ne suffit pas. Si une telle base existait, ses vecteurs seraient tous dans E_1 ou E_2, ce qui est impossible car ces deux sev ne sont pas supplémentaires.

9) Cette question n'a quasiment pas été réussie, je ne comprends pas pourquoi. Relisez le corrigé.

10) Il s'agissait juste d'une formule de changement de base, mais cette formule a l'air mal connue.

11.a) TB.

11.b) Beaucoup d'erreurs dans l'utilisation de la formule du binôme de Newton. Il faut déjà vérifier l'hypothèse $ND = DN$. Ensuite il faut connaître la formule ... lire $(D+N)^n = D^n + N^n$ fait extrêmement mal. Pour finir on attendait une expression de T^n sous forme de tableau matriciel (expression très simple ici).

C). Version 2.

Il fallait tout d'abord bien comprendre la définition de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{Z})$: ses éléments sont des matrices inversibles à coefficients entiers, mais pas seulement : leur inverse doit aussi être à coefficients entiers. Certains ont systématiquement oublié cette dernière condition, ce qui leur a coûté très cher.
L'outil principal pour montrer qu'une matrice était dans $\mathscr{GL}_n(\mathbb{Z})$ était de montrer que son déterminant valait ± 1. Ce résultat servait de très nombreuses fois.

2) La stabilité par produit a souvent été oubliée ou expédiée par un « clairement », mais c'était le point principal de cette question.

4) Un exemple (rare) d'utilisation de la « grosse formule ».

6) Un exemple (rare) d'utilisation de la comatrice.

7) C'était une bonne idée de « dessiner » les matrices d'opérations élémentaires.

8) Certains ont pensé à traiter le cas $a = b = 0$, c'était très bien.

14) La démonstration de $\mathscr{A} \neq \varnothing$ a été souvent mal traitée. Ne pas oublier le cas $a_{1,1} = 0$.