Devoir facultatif n° 5

Pour une partie X de $\mathbb{R}$, on appelle *adhérence* de X (notée $\bar{X}$) l'ensemble des limites des suites à valeurs dans X qui convergent.
Une partie X de $\mathbb{R}$ est dite *fermée* si $\bar{X} = X$, et est dite *ouverte* si son complémentaire dans $\mathbb{R}$ est fermé.

1) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a < b$. Pour chacune des parties de $\mathbb{R}$ suivantes, déterminer son adhérence, puis si elle est fermée et/ou ouverte.

- **a)** $[a, b]$
- **b)** $]a, b[$
- **c)** $]a, b]$
- **d)** $\mathbb{R}$
- **e)** $\varnothing$
- **f)** $\left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$

2) Soit $A, B \subset \mathbb{R}$.

- **a)** Montrer que l'on a toujours $A \subset \bar{A}$.
- **b)** Dans le cas où $A \subset B$, comparer $\bar{A}$ et $\bar{B}$.
- **c)** De manière générale, comparer $\overline{A \cup B}$ et $\bar{A} \cup \bar{B}$.
- **d)** De manière générale, comparer $\overline{A \cap B}$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$.
- **e)** Quelles règles peut-on énoncer sur l'intersection de *deux* fermés ? Sur leur union ?
- **f)** Montrer qu'une intersection *quelconque* de fermés est un fermé. Est-ce vrai pour une union quelconque ?

On appelle *valeur d'adhérence* d'une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ toute limite d'une suite convergente extraite de u.

3) Déterminer les valeurs d'adhérences des suites de termes généraux suivants.

- **a)** $(-1)^n$
- **b)** $(-1)^n n$
- **c)** $\sin(n)$ (*indication* : montrer que $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$).

4) Montrer qu'une suite réelle bornée admet au moins une valeur d'adhérence. Combien les suites convergentes ont-elles de valeurs d'adhérence ?

5) Montrer qu'une suite bornée n'ayant qu'une seule valeur d'adhérence converge.

6) Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite réelle est une partie fermée de $\mathbb{R}$.

— **FIN** —