Devoir surveillé n°5
Version n°1
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ croissante, telle que $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, où (u_n) est la suite de terme général n. Montrer que $f \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$.

II. Étude d'une suite récurrente.

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

Première partie.

1) En étudiant sa monotonie, montrer que (u_n) possède une limite.

2) On introduit la fonction $f \ : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - x^2 \end{array} \right.$.

- **a)** Montrer que $[0, 1]$ est stable par f.
- **b)** Quels sont les points fixes de f ?

3)
- **a)** On suppose que $a < 0$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
- **b)** On suppose que $a > 1$. Déduire du signe de u_1 la limite de (u_n).
- **c)** On suppose que $a \in [0, 1]$. Montrer que (u_n) est alors convergente et donner sa limite.

Deuxième partie.

On suppose à présent que $a \in]0, 1[$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = nu_n \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

4)
- **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
- **b)** En déduire que (v_n) est croissante .

c) Montrer alors que (v_n) est convergente et que sa limite ℓ appartient à l'intervalle $[0, 1]$.

5) **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geqslant \dfrac{u_1}{n}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_{2n} - S_n \geqslant \dfrac{u_1}{2}$.

c) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2^n} \geqslant (n+1)\dfrac{u_1}{2}$.

d) Montrer enfin que $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

6) **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_{n+1} - v_n \geqslant u_n \left((1-\ell) - u_n\right)$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_{n+1} \geqslant (1-\ell)\, S_n + u_{n+1}$.

c) Montrer enfin que $\ell = 1$.

III. Résolution d'une équation de Pell-Fermat.

Soit $G = \{\, (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \ \mid\ a^2 - 2b^2 = 1 \,\}$. Pour $x = (a, b) \in G$ et $y = (c, d) \in G$, on pose :

$$x \times y = (ac + 2bd, ad + bc).$$

1) Montrer que $(G, \times)$ est un groupe commutatif.

2) On note $x_0 = (3, 2)$, on peut vérifier que c'est un élément de G. On adopte les notations usuelles pour les puissances dans un groupe multiplicatif. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note a_n et b_n les deux entiers tels que $x_0^n = (a_n, b_n)$.

a) Montrer que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{n+1} &= 3a_n + 4b_n \\ b_{n+1} &= 2a_n + 3b_n \end{cases}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant b_n < a_n$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5b_n < b_{n+1}$, puis que la suite (b_n) est strictement croissante de limite $+\infty$.

3) Soit $(a, b) \in G$ avec $b > 0$.

a) Justifier l'existence d'un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $b_n \leqslant b < b_{n+1}$. On pourra considérer l'ensemble $A = \{\, p \in \mathbb{N} \ \mid\ b_p > b \,\}$.

b) En déduire que $0 \leqslant ba_n - ab_n < b_{n+1}a_n - a_{n+1}b_n = 2$. On pourra remarquer (en le justifiant) que :

$$\left(\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)^2 - 2 < \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 2 \leqslant \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2 - 2.$$

c) Montrer alors que $(a, b) \times x_0^{-n} = (1, 0)$. Que vaut (a, b) ?

d) Quels sont les entiers positifs a et b tels que $a^2 - 2b^2 = 1$?

— **FIN** —