Devoir surveillé n°1

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

1) Montrer que la somme de deux applications croissantes est croissante.

2) La somme de deux applications monotones est-elle nécessairement monotone ?

3) Le produit de deux applications croissantes est-il nécessairement une application croissante ?

II. Argument sinus hyperbolique.

L'objectif de ce problème est de définir puis étudier la fonction réciproque du sinus hyperbolique : l'*argument sinus hyperbolique*, puis d'établir dessus une relation fonctionnelle.

1) Rappeler (sans démonstration) la définition, le tableau de variations et l'expression de la dérivée de la fonction sinus hyperbolique.

2) Montrer que, pour tout réel x, il existe un unique réel t vérifiant $\mathrm{sh}(t) = x$.

Dans ce cas, on notera dorénavant $t = \mathrm{Argsh}(x)$ (argument sinus hyperbolique de x) .

3) Établir le tableau de variations de la fonction Argsh.

4) Montrer que la fonction Argsh est dérivable et que pour tout réel x :

$$\mathrm{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

5) Montrer que, pour tout réel x,

$$\mathrm{Argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

Indication : on pourra utiliser simultanément les deux formules de trigonométrie hyperbolique au programme reliant sh et ch.

On souhaite désormais prouver de trois manières différentes que, pour tout réel x,

$$\mathrm{Argsh}\left(2x\sqrt{1+x^2}\right) = 2\,\mathrm{Argsh}\,(x).$$

6) <u>Première méthode : par la trigonométrie hyperbolique.</u>

a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}(2t) = 2\,\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{ch}(t)$.

b) Conclure quant à l'identité demandée.

7) Deuxième méthode : par une étude analytique.

On considère la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Argsh}\left(2x\sqrt{1+x^2}\right)$.

a) Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de f. On notera $\mathscr{D}$ ce dernier domaine.

b) Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à $\mathscr{D}$.

c) Conclure quant à l'identité demandée.

8) Troisième méthode : par la formule logarithmique de Argsh.

Conclure quant à l'identité demandée en utilisant directement l'identité obtenue à la question **5)**.

III. Étude d'une fonction.

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \operatorname{Arccos}\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}} - \operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}.$$

1) Questions préliminaires.

a) Exprimer, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ en fonction de $\cos(\theta)$ ainsi que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ en fonction de $\sin(\theta)$.

b) Montrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $\operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}$.

2) Déterminer le domaine de définition de f. On admettra dans la suite, au besoin, que f est continue sur son domaine de définition.

3) Étudier la périodicité de f. Sur quel intervalle centré en $\frac{\pi}{4}$ peut-on alors réduire l'étude de f ?

4) Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ en fonction de $f(x)$.

5) Sur quel intervalle contenant 0 peut-on alors encore réduire l'étude de f ?

6) Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}}$ est dérivable sur l'intervalle $\left]-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{2}\right[$ ainsi que sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right[$ et y donner l'expression de sa dérivée. Que peut-on dire en $-\frac{\pi}{2}$?

7) Mener la même étude pour la fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$

8) Étudier le caractère dérivable de f sur l'intervalle $\left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

9) Pour $x \in \left[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[\cup \left]0; \frac{\pi}{4}\right]$, déterminer une expression littérale de $f'(x)$ faisant intervenir la fonction valeur absolue.

10) Simplifier l'expression précédente sur les trois intervalles $\left[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{2}\right[$, $\left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$ et $\left]0; \frac{\pi}{4}\right]$.

11) En déduire le tracé de la courbe de f sur $\left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ et le compléter sur $\left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$.

— FIN —