LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON
SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR
CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I.
ANNÉE 2017 - 2018

C4 : MODÉLISATION CINÉMATIQUES DES SYSTÈMES COMPOSÉS DE CHAINES DE SOLIDES

TD 10 - Modélisation cinématique des liaisons mécaniques(C4-5)

Compétences

- **Modéliser :** Proposer un modèle de connaissance et de comportement :
  - Solide indéformable;
  - référentiel, repère;
  - équivalence solide/référentiel;
  - vecteur-vitesse angulaire de deux référentiels en mouvement l'un par rapport à l'autre";
- **Résoudre :** Proposer un modèle de connaissance et de comportement
  - Torseur cinématique;
  - Liaisons.

1 Souris mécanique

On se propose d'étudier le fonctionnement d'une souris mécanique associée à un ordinateur (figure 1).

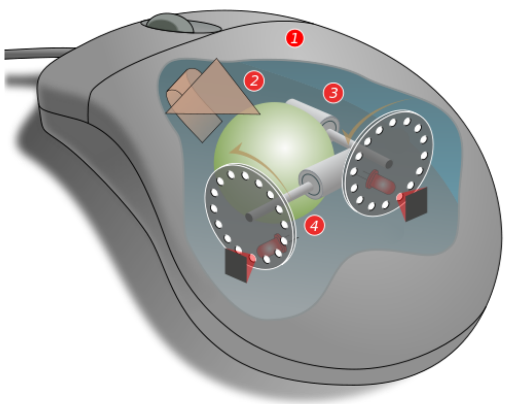

FIGURE 1 – Dessin du mécanisme d'une souris de micro-ordinateur.

L'ensemble des paramétrage indiqués ci-dessous font référence à la figure 2.

- Le plan de travail (0) est lié au repère $R_0 = \left(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$.
- Le cadre lié à la souris porte le numéro (1). On lui lie un repère $R_1 = \left(C, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$.
- En fonctionnement normal, la bille (2) de rayon R **roule sans glisser** sur le plan (0). On note I le point de contact avec le sol (0).
- Le galet (3), de rayon a est en liaison pivot d'axe $\left(L, \overrightarrow{y_1}\right)$, avec le cadre (1).
- Le galet (4), de rayon a est en liaison pivot d'axe $\left(M, \overrightarrow{x_1}\right)$, avec le cadre (1).

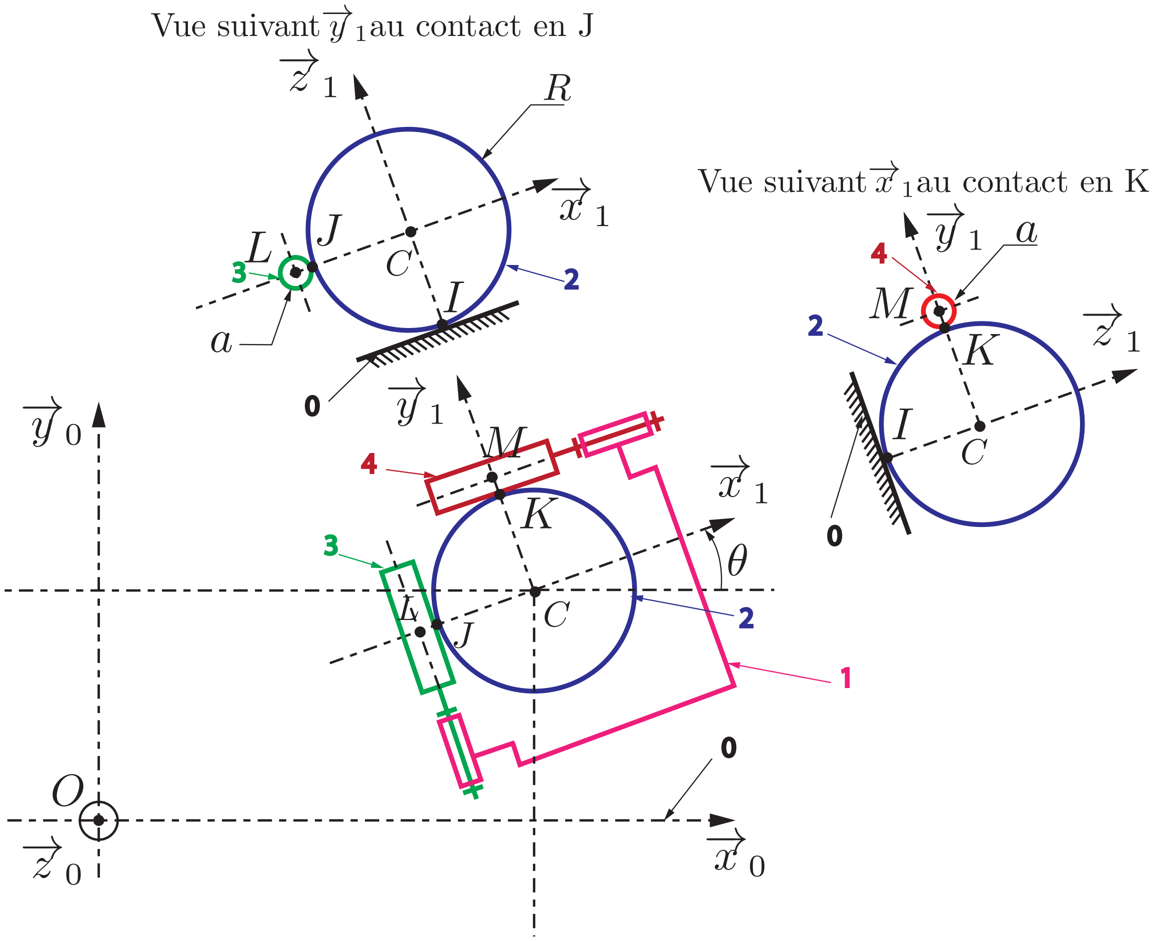

FIGURE 2 – Schéma cinématique mécanique d'une souris de micro-ordinateur.

Les deux galets (3) et (4) commandent chacun un capteur de position angulaire (codeur incrémental). En fonctionnement normal, ils **roulent sans glisser** sur la bille (2), respectivement aux points J et K.

On notera :

- $\overrightarrow{\Omega_{(3/1)}} = \omega_{31}\ \overrightarrow{y_1}$ le vecteur vitesse de rotation (inconnu) de (3) par rapport à (1).
- $\overrightarrow{\Omega_{(4/1)}} = \omega_{41}\ \overrightarrow{x_1}$ le vecteur vitesse de rotation (inconnu) de (4) par rapport à (1).

La souris (1) est animée d'un mouvement plan par rapport à (0).

Objectif :

Le but de cet exercice est de trouver les valeurs de ω_{31} et ω_{41} en fonction du déplacement de la souris.

La condition de contact en I impose que : $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{z_0} = R$.

La position de la souris (1) par rapport à (0) est alors donnée par :

$$\overrightarrow{OC} = x\ \overrightarrow{x_1} + y\ \overrightarrow{y_1} + R\ \overrightarrow{z_1}$$
$$\theta = \left(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}\right) = \left(\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1}\right)$$

avec $\overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{z_1}$

On note le torseur cinématique de la bille (2) par rapport au cadre (1) par :

$$\left\{\mathscr{V}_{(2/1)}\right\} = \underset{C}{\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{(2/1)}} = p\ \overrightarrow{x_1} + q\ \overrightarrow{y_1} + r\ \overrightarrow{z_1} \\ \overrightarrow{V_{(C\in 2/1)}} = \overrightarrow{0} \end{array} \right.} \left. \vphantom{\begin{array}{c} a \\ b \end{array}} \right\}$$

(Pour l'instant, p, q et r ne sont pas connus.)

Supposons que l'on bouge la souris (i.e. le cadre (1)) par rapport à (0) par le mouvement plan suivant suivant :

$$\left\{\mathscr{V}_{(1/0)}\right\} = \underset{C}{\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{(1/0)}} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V_{(C\in 1/0)}} = \dot{x}\,\overrightarrow{x_1} + \dot{y}\,\overrightarrow{y_1} \end{array} \right\}}$$

2 Modélisation cinématique

a) Modélisation globale de la bille et de la souris

Q 1 : En analysant les torseurs cinématiques donnés précédemment, proposer une liaison permettant de modéliser les mouvements de $1/0$ et de $2/0$

b) Roulement sans glissement de la bille

Q 2 : Expliciter la condition de roulement sans glissement au point I.

Q 3 : Par composition des vitesses, en déduire la relation liant les paramètres du mouvement de la boule (issus de $\left\{\mathscr{V}_{(2/1)}\right\}$) à ceux du mouvement de la souris (issu de $\left\{\mathscr{V}_{(1/0)}\right\}$).

Q 4 : En déduire les composantes p et q du vecteur vitesse de rotation $\overrightarrow{\Omega_{(2/1)}}$, en fonction du mouvement de la souris.

c) Roulement du galet (3)

Q 5 : Expliciter la condition de roulement sans glissement au point J.

Q 6 : En déduire le vecteur vitesse de rotation $\overrightarrow{\Omega_{(3/1)}}$.

Q 7 : En déduire également la valeur de la composante r de $\overrightarrow{\Omega_{(2/1)}}$.

d) Roulement du galet (4)

Q 8 : Expliciter la condition de roulement sans glissement au point K.

Q 9 : En déduire le vecteur vitesse de rotation $\overrightarrow{\Omega_{(4/1)}}$.

e) Mouvement global

Q 10 : Exprimez alors les éléments de réduction des torseurs $\left\{\mathscr{V}_{(2/1)}\right\}$, $\left\{\mathscr{V}_{(3/1)}\right\}$ et $\left\{\mathscr{V}_{(4/1)}\right\}$, respectivement aux points C, L et M, en fonction des composantes de $\left\{\mathscr{V}_{(1/0)}\right\}$.

Q 11 : De quels types sont ces torseurs ?

Corrigé

Q 1 : En analysant les torseurs cinématiques donnés précédemment, proposer une liaison permettant de modéliser les mouvements de $1/0$ et de $2/0$

- mouvement de $1/0$: Il s'agit d'une liaison appui-plan de normal $\overrightarrow{z}_{0,1}$
- mouvement de $2/0$ Il s'agit d'une liaison sphérique de centre C.

Q 2 : Expliciter la condition de roulement sans glissement au point I.

La condition de roulement sans glissement entre (1) et (2) implique qu'au point de contact I :

$$\overrightarrow{V_{(I\in 2/0)}} = \overrightarrow{0}$$

Q 3 : Par composition des vitesses, en déduire la relation liant les paramètres du mouvement de la boule (issus de $\left\{\mathscr{V}_{(2/1)}\right\}$) à ceux du mouvement de la souris (issu de $\left\{\mathscr{V}_{(1/0)}\right\}$).

Par composition des vitesses, on en déduit :

$$\overrightarrow{V_{(I\in 2/0)}} = \overrightarrow{V_{(I\in 2/1)}} + \overrightarrow{V_{(I\in 1/0)}}$$

Or, les paramètres des mouvements sont définis aux points C. On va donc déplacer ces vitesses en C :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V_{(I\in 2/0)}} &= \left(\overrightarrow{V_{(C\in 2/1)}} + \overrightarrow{IC} \wedge \overrightarrow{\Omega_{(2/1)}}\right) + \left(\overrightarrow{V_{(C\in 1/0)}} + \overrightarrow{IC} \wedge \overrightarrow{\Omega_{(1/0)}}\right) \\
&= \left(\overrightarrow{0} + -R\overrightarrow{z_1} \wedge (p\,\overrightarrow{x_1} + q\,\overrightarrow{y_1} + z\,\overrightarrow{z_1})\right) + \left((\dot{x}\,\overrightarrow{x_1} + \dot{y}\,\overrightarrow{y_1}) + (-R\,\overrightarrow{z_1} \wedge \dot{\theta}\overrightarrow{z_1})\right) \\
&= qR\,\overrightarrow{x_1} - pR\,\overrightarrow{y_1} + \dot{x}\,\overrightarrow{x_1} + \dot{y}\,\overrightarrow{y_1} \\
&= (\dot{x} + Rq)\overrightarrow{x_1} + (\dot{y} - pR)\overrightarrow{y_1}
\end{aligned}$$

D'après la question précédente, on en déduit que :

$$(\dot{x} + qR)\overrightarrow{x_1} + (\dot{y} - pR)\overrightarrow{y_1} = \overrightarrow{0}$$

Q 4 : En déduire les composantes p et q du vecteur vitesse de rotation $\overrightarrow{\Omega_{(2/1)}}$, en fonction du mouvement de la souris.

On en déduit que :

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x} + qR = 0 \\ \dot{y} - pR = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} q = -\frac{\dot{x}}{R} \\ p = \frac{\dot{y}}{R} \end{array}\right.$$

Q 5 : Expliciter la condition de roulement sans glissement au point J.

$$\overrightarrow{V_{(J\in 3/2)}} = \overrightarrow{0}$$

Q 6 : En déduire le vecteur vitesse de rotation $\overrightarrow{\Omega_{(3/1)}}$.

Comme pour la question précédente, on déduit, par composition des vitesses :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{(J\in 3/2)}} &= \overrightarrow{V_{(J\in 3/1)}} - \overrightarrow{V_{(J\in 2/1)}}\\
&= \left(\overrightarrow{V_{(L\in 3/1)}} + \overrightarrow{JL}\wedge\overrightarrow{\Omega_{(3/1)}}\right) - \left(\overrightarrow{V_{(C\in 2/1)}} + \overrightarrow{JC}\wedge\overrightarrow{\Omega_{(2/1)}}\right)\\
&= \left(\overrightarrow{0} - a\,\overrightarrow{x_1}\wedge\omega_{31}\,\overrightarrow{y_1}\right) - R\,\overrightarrow{x_1}\wedge\left(p\,\overrightarrow{x_1} + q\,\overrightarrow{y_1} + r\,\overrightarrow{z_1}\right)\\
&= -a\cdot\omega_{31}\cdot\overrightarrow{z}_{0,1} - R\cdot q\cdot\overrightarrow{z_1} + R\cdot r\cdot\overrightarrow{y_1}\end{aligned}$$

On déduit de cette équation suivante :

$$(-a\omega_{31} - q\cdot R)\overrightarrow{z_1} + r\cdot R\overrightarrow{y_1} = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -a\omega_{31} - q\cdot R = 0\\ rR = 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \omega_{31} = -\frac{R}{a}q\\ r = 0\end{array}\right.$$

Donc :

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega_{(3/1)}} = -\frac{R}{a}q\overrightarrow{y_1}}$$

Q 7 : En déduire également la valeur de la composante r de $\overrightarrow{\Omega_{(2/1)}}$.

$$r = 0$$

Q 8 : Expliciter la condition de roulement sans glissement au point K.

$$\overrightarrow{V_{(J\in 4/2)}} = \overrightarrow{0}$$

Q 9 : En déduire le vecteur vitesse de rotation $\overrightarrow{\Omega_{(4/1)}}$.
Comme pour la question précédente, on déduit, par composition des vitesses :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{(J\in 4/2)}} &= \overrightarrow{V_{(K\in 4/1)}} - \overrightarrow{V_{(K\in 2/1)}}\\
&= \left(\overrightarrow{V_{(M\in 4/1)}} + \overrightarrow{KM}\wedge\overrightarrow{\Omega_{(4/1)}}\right) - \left(\overrightarrow{V_{(C\in 2/1)}} + \overrightarrow{KC}\wedge\overrightarrow{\Omega_{(2/1)}}\right)\\
&= \left(\overrightarrow{0} + a\,\overrightarrow{y_1}\wedge\omega_{41}\,\overrightarrow{x_1}\right) - \left(\overrightarrow{0} - R\,\overrightarrow{y_1}\wedge(p\,\overrightarrow{x_1} + q\,\overrightarrow{y_1})\right)\\
&= -a\omega_{41}\overrightarrow{z_1} - R\cdot p\overrightarrow{z_1}\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\boxed{\omega_{41} = -\frac{R}{a}p}$$

Q 10 : Exprimez alors les éléments de réduction des torseurs $\left\{\mathscr{V}_{(2/1)}\right\}$, $\left\{\mathscr{V}_{(3/1)}\right\}$ et $\left\{\mathscr{V}_{(4/1)}\right\}$, respectivement aux points C, L et M, en fonction des composantes de $\left\{\mathscr{V}_{(1/0)}\right\}$.

$$\left\{\mathscr{V}_{(2/1)}\right\} = \underset{C}{\left\{\begin{array}{c}\frac{\dot{y}}{R}\,\overrightarrow{x_1} - \frac{\dot{x}}{R}\,\overrightarrow{y_1}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}}$$

$$\left\{\mathscr{V}_{(3/1)}\right\} = \underset{L}{\left\{\begin{array}{c}\frac{\dot{x}}{a}\,\overrightarrow{y_1}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}}$$

$$\left\{\mathscr{V}_{(4/1)}\right\} = \underset{M}{\left\{\begin{array}{c}-\frac{\dot{y}}{a}\,\overrightarrow{x_1}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}}$$

Q 11 : De quels types sont ces torseurs ?
Ces torseurs sont des glisseurs.