Devoir à la maison n° 11

À rendre le 1er février

☐ $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est la $\mathbb{R}$-algèbre des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

☐ L'objectif du problème est d'étudier les ensembles $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ suivants :

$\mathscr{E} = \{f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)\}$.

$\mathscr{F}$ est la partie constituée des éléments f de $\mathscr{E}$ tels que :

- f n'est pas la fonction identiquement nulle.
- f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Première Partie :

1) Montrer que la fonction cosinus est dans l'ensemble $\mathscr{E}$.

2) Démontrer la formule : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \operatorname{ch}(x+y)$. En déduire que la fonction ch est dans l'ensemble $\mathscr{E}$.

3) Soit f dans $\mathscr{E}$; on définit pour tout α :

$$f_\alpha(x) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(\alpha\, x) \end{array}.$$

Montrer que pour tout réel α, la fonction f_α est dans $\mathscr{E}$.

4) On fixe un élément f de $\mathscr{E}$.
En donnant à x et à y des valeurs particulières, prouver que :

a) $f(0)$ vaut 0 ou 1.

b) Si $f(0) = 0$, alors f est la fonction identiquement nulle.

c) Si $f(0) = 1$, alors f est une fonction paire.

Deuxième Partie :

On pourra utiliser librement le résultat suivant :
Si a est un élément fixé de $\mathbb{R}_+^*$ et si $D_a = \left\{a\,\dfrac{p}{2^q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}$, tout réel est limite d'une suite d'éléments de D_a.

Soit f un élément de $\mathscr{F}$. On pose $E = \{x > 0 \mid f(x) = 0\}$.

5) **a)** En utilisant un résultat de la première partie, montrer que $f(0) = 1$, et que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que E admet une borne inférieure que l'on note a.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in E$ tel que $x_n \in [a, a+1/n[$. En déduire qu'il existe une suite d'éléments de E qui converge vers a.

d) En utilisant la continuité de f en a, prouver que $f(a) = 0$. En déduire que : $a > 0$.

e) En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que : $\forall x \in [0, a[\,,\ f(x) > 0$.

6) On pose $\omega = \dfrac{\pi}{2a}$, et on note

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(\omega\, x) \end{array}.$$

a) Soit $q \in \mathbb{N}$; en se rappelant que $f(0) = 1$, montrer que $f\left(\dfrac{a}{2^q}\right) + 1 = 2\left[f\left(\dfrac{a}{2^{q+1}}\right)\right]^2$.

b) En déduire, en raisonnant par récurrence sur q, que :

$$\forall q \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right).$$

On démontrerait de même le résultat suivant que le candidat pourra utiliser librement :
si $q \in \mathbb{N}$ est fixé : $\forall p \in \mathbb{N},\ f\left(p\frac{a}{2^q}\right) = g\left(p\frac{a}{2^q}\right)$.

c) Prouver que : $\forall x \in D_a,\ f(x) = g(x)$.

d) En déduire que $f = g$.

7) En déduire tous les éléments de $\mathscr{F}$.

— **FIN** —