Feuille d'exercice n° 20 : **Intégration - correction**

Exercice 1 Soit f, g uniformément continues. Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Il existe donc $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |g(x)-g(y)| \leqslant \alpha.$$

On vérifie que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(g(x))-f(g(y))| \leqslant \varepsilon.$$

Exercice 2 Sinon, prendre $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$ tq [...], alors pour tout $x > 0$ $\left|\ln x - \ln\left(x+\dfrac{\alpha}{2}\right)\right| \leqslant \varepsilon$ et faire tendre x vers 0.

Exercice 3 Sur $[0,2]$: Heine.

Sur $[1,+\infty[$: $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \dfrac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|x-y|$.

Par conséquent, si on prend $\varepsilon > 0$, prendre $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2, \dfrac{1}{2})$ pour ne pas chevaucher.

Exercice 4 f est uniformément continue, donc :
il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x, y \in I$, $|x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant 1$.
Commençons par remarquer qu'on a le résultat suivant : Pour tout $x, y \in I$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $|x-y| \leqslant p\alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant p$.
En effet, soient $x, y \in I$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $|x-y| \leqslant p\alpha$, et supposons par exemple que $x < y$. Coupons l'intervalle $[x,y]$ en p intervalles de même longueur : pour tout $k \in [\![0,p]\!]$, on pose $x_k = x + \dfrac{k}{p}(y-x)$. On a alors $x_0 = x$ et $x_p = y$. De plus, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on a $|x_{k-1}-x_k| = \dfrac{1}{p}(y-x) \leqslant \alpha$, donc $|f(x_{k-1})-f(x_k)| \leqslant 1$. Or $|f(x)-f(y)| = |f(x_0)-f(x_1)+f(x_1)-f(x_2)\ldots+f(x_{p-1})-f(x_p)| \underset{\text{I.T}}{\leqslant} |f(x_0)-f(x_1)|+|f(x_1)-f(x_2)|\ldots+|f(x_{p-1})-f(x_p)| \leqslant p \times 1$. Notre remarque est donc justifiée.

On pose alors $p = \lfloor 1/\alpha \rfloor + 1$, donc $p \geqslant \dfrac{1}{\alpha}$. Fixons également un réel M.
Alors, puisque $f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on a : il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Rightarrow f(n) \geqslant M + p$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \geqslant N$. On pose $n = \lfloor x \rfloor + 1$. Alors $|x-n| \leqslant 1 \leqslant p\alpha$, d'où $|f(x)-f(n)| \leqslant p$, et ainsi $f(x) \geqslant f(n) - p$. Mais $n \geqslant N$, donc $f(n) \geqslant M + p$, et on en tire $f(x) \geqslant M$.
Ainsi, pour tout $M \in \mathbb{R}$, on a trouvé un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geqslant N \Rightarrow f(x) \geqslant M$: ceci signifie bien que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 5 $f([a;b]) = [m;M]$ et g positive, donc pour tout x, $mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$ on intègre. Puis : soit $\displaystyle\int_a^b g = 0$ alors c'est OK, sinon, $\dfrac{\displaystyle\int_a^b fg}{\displaystyle\int_a^b g} \in [m;M]$ et donc par le tvi, ce rapport vaut $f(c)$ pour un certain c.

Exercice 6 Si pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) > x$ alors, comme $x \mapsto f(x) - x$ est continue et strictement positive, $\displaystyle\int_0^1 (f(x)-x)\,\mathrm{d}x > 0$ *i.e.* $\displaystyle\int_0^1 f > \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = 1/2$: c'est exclu.

Même chose pour : $\forall x \in]0,1[, f(x) > x$.
Et alors, $f(x) - x$ change de signe sur $]0,1[$, et par le TVI il existe un $c \in]0,1[$ tel que $f(c) = c$.
On pouvait aussi appliquer le théorème de Rolle à $x \mapsto \int_0^x (f(t) - t)\,dt$ sur $[0,1]$.

Exercice 7 On suppose que f a au plus n points d'annulations, et on note $x_1, \ldots, x_n$ les points d'annulation où f change de signe.

Par linéarité de l'intégrale, si P est un polynôme de degré au plus n s'écrivant $P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, alors $\int_0^1 f \times P = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^1 f(x).x^k \,\mathrm{d}x = 0$. Posons alors $P = (X - x_1) \ldots (X - x_n)$. Le polynôme P change signe exactement aux mêmes points que f, et ainsi la fonction $f \times P$ est de signe constant. De plus elle continue et d'intégrale nulle : elle est donc nulle. Ainsi f est nulle sur $\mathbb{R} \backslash \{x_1, \cdots, x_n\}$. Et par continuité, f est nulle sur $\mathbb{R}$: c'est absurde.

Exercice 8

Premier cas : $\int_a^b f > 0$, alors $\int_a^b (|f| - f) = 0$ avec $(|f| - f) \geqslant 0$, d'où $|f| = f$ i.e. f positive
Second cas, idem

Exercice 9

1) La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1 + x^n}$ est croissante, donc si $x \in \left[1, 1 + \frac{1}{n}\right]$, $f(1) \leqslant f(x) \leqslant f\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

2) Avec la première question, $\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}\sqrt{1 + (1 + 1/n)^n}$ puis $\lim(1 + 1/n)^n = \mathrm{e}$ et donc par le théorème des gendarmes, $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Exercice 10 Faire un dessin !

Soit $\varepsilon > 0$, $y = f(1 - \varepsilon) < 1$. Alors pour tout $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant f(t) \leqslant y\mathbf{1}_{t \leqslant 1-\varepsilon} + \mathbf{1}_{t \geqslant 1-\varepsilon}$ donc

$$0 \leqslant \int_0^1 f^n \leqslant y^n(1 - \varepsilon) + \varepsilon.$$

Il suffit de prendre n suffisamment grand pour que $y^n \leqslant \varepsilon$, alors $0 \leqslant \int_0^1 f^n \leqslant 2\varepsilon$.

Exercice 11 Soit m un point ou le $s = \sup f$ est atteint, $\varepsilon > 0$, $I = [c, d] \subset [a, b]$ contenant m sur lequel $f \geqslant s - \varepsilon$, on pose $g = s$ et $h = (s - \varepsilon)\mathbf{1}_I$: $h \leqslant f \leqslant g$.

Facilement, $\left(\int_a^b g^n\right)^{\frac{1}{n}} \to s$ et $\left(\int_a^b h^n\right)^{\frac{1}{n}} \to s - \varepsilon$. Il suffit de prendre n suffisamment grand pour lequel $\left(\int_a^b h^n\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant s - 2\varepsilon$, par encadrement $s - 2\varepsilon \leqslant \left(\int_a^b f^n\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant s$.

Exercice 12 On a

a) Pour tout ε, il existe un x_0 à partir duquel $1 - \varepsilon \leqslant \cos(1/t) \leqslant 1$. Donc si $x \geqslant x_0$, $\int_x^{2x} \frac{1-\varepsilon}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, soit $(1 - \varepsilon)\ln 2 \leqslant \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \ln 2$. Finalement, $\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ln 2$.

b) IPP : $\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_x^{2x} - \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Or cos est bornée et $\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ donc $\left[-\frac{\cos t}{t}\right]_x^{2x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. Et $\left|\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, donc $\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

c) Pour tout ε, il existe un x à partir duquel $1 \leqslant \mathrm{e}^{1/t} \leqslant 1 + \varepsilon$, et on finit comme pourla première question.

Exercice 13

1) IPP pour calculer $\int \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$: $\int_0^1 (\mathrm{e}^{\,x} + \frac{x^2}{2} - \ln(1+x))\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} + \frac{1}{6} - \ln(4)$

2) IPP : $\int_0^1 x(x+2-\mathrm{e})\mathrm{e}^{\,x}\,\mathrm{d}x = 0$

3) $\frac{x-2}{(2x-3)^2} = \frac{1}{2}.\frac{(2x-3)-1}{(2x-3)^2} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2x-3} - \frac{1}{2}.\frac{1}{(2x-3)^2}$ donc : $\int_0^1 \frac{x-2}{(2x-3)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\ln(3) - \frac{1}{6}$

4) On linéarise : $\cos^4 x \sin^2 x = \frac{1}{32}(\cos(2x) - 2\cos(4x) + 2 - \cos(6x))$, et donc $\int_0^{\pi/4} \cos^4 x \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3})$

5) $\int_1^2 \frac{x^3}{(1+x^4)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{15}{136}$

6) Méthode par changement de variable : en posant $x = \tan u$, $\mathrm{d}x = (1+\tan^2 u)\,\mathrm{d}u$, $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \frac{1+\tan^2 u}{(1+\tan^2 u)^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\tan^2 u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/4} \cos^2 u\,\mathrm{d}u$ et il reste à linéariser. On trouve : $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$.

Exercice 14

1) Première IPP : $\int \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \times \mathrm{e}^{\,\mathrm{Arcsin}\,x}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{1-x^2} \times \mathrm{e}^{\,\mathrm{Arcsin}\,x} + \int \sqrt{1-x^2} \times \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{Arcsin}\,x}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Seconde IPP : $\int x \times \left(\frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{Arcsin}\,x}}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x = x \times \mathrm{e}^{\,\mathrm{Arcsin}\,x} - \int 1 \times \mathrm{e}^{\,\mathrm{Arcsin}\,x}\,\mathrm{d}x$.

En prenant la demi-somme de ces deux résultats : $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{e}^{\,\mathrm{Arcsin}\,x}\,\mathrm{d}x = \frac{x - \sqrt{1-x^2}}{2}\mathrm{e}^{\,\mathrm{Arcsin}\,x}$.

2) Par IPP, $\int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x = \ln(1+x^2) = 1 \times \ln(1+x^2)$ et par IPP, $\int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \ln(2) - 2$.

3) Par IPP, $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

4) $\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}\sqrt{x+3}} = \frac{1}{2}.\frac{2(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2-1}} - \frac{2}{\sqrt{(x+2)^2-1}}$ donc $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}\sqrt{x+3}} = \sqrt{(x+2)^2-1} - 2\ln\left|(x+2) + \sqrt{(x+2)^2-1}\right|$.

5) avec $u = \sqrt{1+x}$, $\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{1+x}} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2u(u^2-1)}{1+u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\sqrt{2}} 2u(u-1)\,\mathrm{d}u = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{5}{3}$.

6) $4 - 2\mathrm{Arctan}(2)$ en posant $u = \sqrt{x-1}$

7) $\ln(\sqrt{5}-1) - \ln 2 - \ln(\sqrt{2}-1)$en posant $u = \sqrt{1+x^2}$ et$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$

8) $-\frac{4}{3}(1-\sqrt{x})^{3/2}$

9) $\pi - 2$

Exercice 15 Que des IPP !

1) $\int \ln t\,\mathrm{d}t = t\ln t - t$

2) $\int t\arctan t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2\arctan(t) - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\arctan(t)$

3) $\int (t^2 - t + 1)e^{-t}\,\mathrm{d}t = -(2+t+t^2)e^{-t}$

4) $\int (t-1)\sin t\,\mathrm{d}t = \sin t + \cos t - t\cos t$

5) $\displaystyle\int (t+1)\mathrm{ch} t\,\mathrm{d}t = -\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t + t\operatorname{sh} t$

6) $\displaystyle\int t\sin^3 t\,\mathrm{d}t = t\left(-\frac{1}{3}\,(\sin(t))^2\cos(t) - \frac{2}{3}\,\cos(t)\right) + \frac{1}{9}\,(\sin(t))^3 + \frac{2}{3}\,\sin(t)$

Exercice 16

1) Pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant \dfrac{1}{1+x^n} \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \dfrac{x^n}{1+x^n} \leqslant x^n$, donc $0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$. Par encadrement, $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2) Même raisonnement que dans la question précédente : pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant \ln(1+x^n) \leqslant x^n$ (c'est une inégalité classique).

3) Avec une IPP : $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x = [x\ln(1+x^n)]_0^1 - n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x = \ln 2 - n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x$. Ainsi $I_n = \dfrac{\ln 2}{n} - \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x$. Puisque $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x = o(1)$, alors $I_n = \dfrac{\ln 2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, donc $I_n \sim \dfrac{\ln 2}{n}$.

Exercice 17

1) $I_0 = \mathrm{e} - 1$, $I_1 = 1$.

2) IPP : $I_{n+1} = \Big[x(\ln x)^{n+1}\Big]_1^{\mathrm{e}} - (n+1)\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n\mathrm{d}x = \mathrm{e} - (n+1)I_n$.

3) $I_n > 0$ et comme $I_{n+1} > 0$, $I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.

4) $I_n \to 0$, $I_{n+1} \to 0$ donc $(n+1)I_n \to \mathrm{e}$ donc $I_n \sim \dfrac{\mathrm{e}}{n}$.

5) $D_{n+1} = (n+1)D_n$ donc $D_n = n!D_0$ puis $|u_n| \geqslant D_n - I_n$.

Exercice 18 La fonction f est continue, donc admet une primitive F qui est de classe $\mathscr{C}^1$.

1) On a $\varphi(x) = F(x^2) - F(2x)$, donc φ est $\mathscr{C}^1$ par opération sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
$\varphi'(x) = 2xf(x^2) - 2f(2x)$.

2) On a $\chi(x) = x\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = x(F(x) - F(0))$. De même, χ est $\mathscr{C}^1$ par opération sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
$\chi'(x) = F(x) - F(0) - xf(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - xf(x)$.

3) On pose $u = t + x$ et $\psi(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u = F(2x) - F(x)$. De même, ψ est $\mathscr{C}^1$ par opération sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
$\psi'(x) = 2f(2x) - f(x)$.

Exercice 19

1) Prolongement par continuité en 0.

2) Avec $u = tx$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi x} \frac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}u$, on dérive : $F'(x) = \pi\dfrac{|\sin(\pi x)|}{\pi x} = \dfrac{|\sin(\pi x)|}{x}$.

3) **a)** Relation de Chasles.

b) Directement, $\displaystyle\int_{\pi\lfloor x\rfloor}^{\pi x} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t = o(1)$. Ensuite,

$$\sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{(k+1)\pi}\,\mathrm{d}t = \frac{\displaystyle\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t}{\pi}\sum_{k=1}^{\lfloor x\rfloor}\frac{1}{k} = \frac{2}{\pi}(\ln\lfloor x\rfloor + o(\ln(\lfloor x\rfloor))$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_0^{\pi}\frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{\lfloor x\rfloor-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{k\pi}\,\mathrm{d}t\\
&\leqslant O(1)+\frac{\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t}{\pi}\sum_{k=1}^{\lfloor x\rfloor-1}\frac{1}{k}\\
&\leqslant \frac{2}{\pi}(\ln\lfloor x\rfloor+o(\ln(\lfloor x\rfloor))).
\end{aligned}$$

Exercice 20

1) OK par $0\leqslant\sin\leqslant 1$.

2) IPP à la Wallis :

$$\begin{aligned}
f(x+1)&=\int_0^{\pi/2}\sin t(\sin t)^x\,\mathrm{d}t\\
&=[-\cos t(\sin t)^x]_0^{\pi}+x\int_0^{\pi}\cos^2 t(\sin t)^{x-1}\,\mathrm{d}t\\
&=0-x\int_0^{\pi}(1-\sin^2 t)(\sin t)^{x-1}\,\mathrm{d}t\\
&=xf(x-1)-xf(x+1)
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

3) $\varphi(x+1)=(x+1)f(x+1)f(x)=xf(x-1)f(x)=\varphi(x)$.

4) $\varphi(n)=\varphi(1)=f(0)f(1)=\frac{\pi}{2}$.

5) De 2) on tire $f(x+1)\sim f(x-1)$, f est décroissante donc $f(x-1)\leqslant f(x)\leqslant f(x+1)$ donc $f(x)\sim f(x+1)$, on injecte dans φ : $xf^2(x)\sim\varphi(x)$.
Donc sur $\mathbb{N}^*$, $nf^2(n)\sim\frac{\pi}{2}$ donc $f(n)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
Par décroissance de f, on tire $f(x)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2x}}$, donc $\varphi(x)=xf(x)f(x-1)\to\frac{\pi}{2}$ et cela montre que φ est constante.

Exercice 21

1) Soit $\varepsilon>0$ et $\alpha>0$ tel que si $0\leqslant x\leqslant\alpha$, $|f(x)|\leqslant\varepsilon$. Alors si $0\leqslant bx\leqslant\alpha$,

$$\left|\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\varepsilon\int_{ax}^{bx}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\varepsilon\,[\ln t]_{ax}^{bx}=\varepsilon\ln\frac{b}{a}.$$

2) Avec $f=f-f(0)+f(0)$, il suffit de montrer que $\displaystyle\int_{ax}^{bx}\frac{f(0)}{t}\,\mathrm{d}t=f(0)\ln\frac{b}{a}$.

Exercice 22 $f(0)=0$.

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$ donc $f'(0)=1$.

Si $n\geqslant 1$, $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ donc $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$.

Inégalité de Taylor-Lagrange :

$$|f(1)-u_n|\leqslant\frac{1}{n!}\sup\left|f^{(n)}\right|\leqslant\frac{1}{n}.$$

Exercice 23 On trouve :

1) $\arctan(t) - 1/2\, i \ln(t^2+1)$

2) $1/2\, \mathrm{e}^{t} \cos(t) + 1/2\, \mathrm{e}^{t} \sin(t)$

3) $(-1/2\, t + 1/2)\, \mathrm{e}^{t} \cos(t) + 1/2\, t \mathrm{e}^{t} \sin(t)$

Exercice 24 Si $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{t-\lambda} = \frac{1}{(t-a)+ib} = \frac{t-a-ib}{(t-a)^2+b^2} = \frac{1}{2}\frac{2(t-a)}{(t-a)^2+b^2} + \frac{i}{b}\frac{1}{\left(\frac{t-a}{b}\right)^2+1}.$$

Cela se primitive bien en

$$\ln|t-\lambda| + i \operatorname{Arctan}\left(\frac{t-a}{b}\right)$$

Exercice 25 Il s'agit d'une somme de Riemann. On trouve $\ln 3/12$.

Exercice 26 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+2t}} = \left[\sqrt{1+2t}\right]_0^1 = \sqrt{3}-1.$

Exercice 27 Cette somme est nulle ! (Ajouter un terme pour $k=0$ et effectuer le changement de variables $k' = n-k$ pour le voir)

Exercice 28

$$\prod_{k=n+1}^{2n} k^{\frac{1}{k}} = \prod_{k=1}^{n} (n+k)^{\dfrac{1}{n+k}}$$

On passe au log :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \ln(n+k) = \frac{\ln n}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{1+\frac{k}{n}}$$

Comme $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ et $t \mapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ sont continues, par le théorème de convergence des sommes de Riemann,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$$

et

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \ln(n+k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

donc, $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Comme $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ et $t \mapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ sont $\mathscr{C}^1$, par le théorème de convergence des sommes de Riemann,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} + O\left(\frac{1}{n}\right) = \ln(2) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

et

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t}\,\mathrm{d}t + O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\ln^2(2)}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \ln(n+k) = \ln(n)\ln(2) + \frac{\ln^2(2)}{2} + O\Big(\frac{\ln(n)}{n}\Big) = \ln(n)\ln(2) + \frac{\ln^2(2)}{2} + o(1),$$

donc

$$P_n = 2^n \exp\left(\frac{\ln^2(2)}{2}\right) \exp\left(o(1)\right) \sim 2^n \exp\left(\frac{\ln^2(2)}{2}\right).$$

Exercice 29

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{p=1}^{n}(n+p)} = \sqrt[n]{\prod_{p=1}^{n}\left(1+\frac{p}{n}\right)}$$

On passe au log : $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{p}{n}\right) \to \int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t.$

Exercice 30 Fixons $n \in \mathbb{N}^*$, notons

$$T_n = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} = \sqrt{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} = n\sqrt{n} \times \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}.$$

Par le théorème de convergence des sommes de Riemann, on a

$$T_n \sim n\sqrt{n}\int_0^1 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \sim \frac{3}{2}n\sqrt{n}$$

On pouvait retrouver cela par comparaison série-intégrale en écrivant sur pour $n-1 \leqslant t \leqslant n \leqslant u \leqslant n+1$:

$$\sqrt{t} \leqslant \sqrt{n} \leqslant \sqrt{u}$$

et en intégrant :

$$\int_{n-1}^{n} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n} \leqslant \int_{n}^{n+1} \sqrt{u}\mathrm{d}u$$

soit

$$\frac{2}{3}\Big(n\sqrt{n} - (n-1)\sqrt{n-1}\Big) \leqslant \sqrt{n} \leqslant \frac{2}{3}\Big((n+1)\sqrt{n+1} - (n)\sqrt{n}\Big)$$

ce qui permet d'obtenir par sommation télescopique

$$\frac{2}{3}(n\sqrt{n}) \leqslant T_n \leqslant \frac{2}{3}\Big((n+1)\sqrt{n+1} - 1\Big).$$

Dans les deux cas,

$$u_n \sim \frac{2}{3} \times \frac{1}{n^{\alpha-3/2}}$$

Comme $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{\alpha-3/2}}\right)_{N\geqslant 1}$ converge si et seulement si $\alpha - \dfrac{3}{2} > 1$ (série de Riemann de paramètre $\alpha - \dfrac{3}{2}$), par comparaison de séries à termes positifs, $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{N} u_n\right)_{N\geqslant 1}$ converge si et seulement si $\alpha > \dfrac{5}{2}$.