

Devoir surveillé n° 1 - Remarques

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 36 points, ramené sur 5 points.
- Problèmes : chaque question sur 4 points, total sur 92 points, ramené sur 15 points.

Statistiques descriptives.

	Calculs	Problème	Note finale
Note maximale	35	78	18
Note minimale	4	9	5
Moyenne	$\approx 24,46$	$\approx 33,29$	$\approx 10,93$
Écart-type	$\approx 6,36$	$\approx 18,66$	$\approx 3,18$

Remarques générales.

Vos feuilles de calculs sont très réussies : bravo !

Il faut encadrer tous vos résultats : à partir du prochain DS, les résultats non encadrés seront sanctionnés encore plus sévèrement.

Il faut introduire toutes les variables que vous utilisez.

Attention, ce sont les fonctions qui sont dérivables, pas leurs images, donc « $f(x)$ est dérivable » n'a pas de sens. C'est : « f est dérivable ». De plus, on écrit « f est dérivable sur $[0, 1[$ » ou « f est dérivable en tout point $x \in [0, 1[$ » et non « f est dérivable pour tout $x \in [0, 1[$ ».

Un certain nombre d'élèves répondent à certaines questions en commençant par affirmer le résultat qu'il faut démontrer, et en tirent des choses. C'est une grave erreur de logique, on ne peut pas démontrer le résultat comme ça, toutes les implications vont dans le mauvais sens.

I. Un exercice vu en TD.

Bien traité, mais vous oubliez trop souvent de justifier que m et n sont des entiers.

II. Autour de π .

1.a. Une fois que l'on a repéré que 1 est racine de P , on obtient $P = (X - 1)(2X^2 - X - 1)$. Mais ce n'est pas fini ! Il faut encore factoriser $2X^2 - X - 1$.

1.b. et d. J'ai trop souvent lu que f était dérivable car « composée de fonctions dérivables » : f est ici une somme de fonctions, et il n'y a pas de composition. De même pour g : cette fois c'est un quotient de fonctions dérivables. Soyez précis dans vos formulations.

1.d. Il faut commencer par justifier que le dénominateur de g ne s'annule pas.

1.e. On trouve $Q = -X^2 + 2X - 1$. Vous devez repérer ici une identité remarquable : $Q = -(X - 1)^2$, ou au minimum chercher une racine évidente avant de vous lancer dans le discriminant.

1.f. Il est impossible de traiter cette question sans insister sur le fait que u et v sont strictement monotones (même si vous l'avez déjà dit avant) : c'est le point fondamental.

- 2.a.** L'expression $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{3}+\sqrt{1}}$ se simplifie, il faut connaître la méthode, dite de la « quantité conjuguée » :
- $$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{3}+\sqrt{1}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{1})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{1})(\sqrt{3}-\sqrt{1})} = \frac{4-2\sqrt{3}}{3^2-1^2} = 2-\sqrt{3}.$$
- 2.b.** Pensez à préciser que $\frac{\pi}{12} \in I$ avant d'appliquer la question 1.f.
- 3.a.** On peut toujours discuter sur ce que demande vraiment l'énoncé, mais partir de la formule $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ est un peu trop facile. On attendait que vous partiez de la formule donnant $\cos(a+b)$ pour l'appliquer à $\cos(\theta+\theta)$.
- 3.b.** Et voilà, malgré mes milliards de mises en garde, un nombre énorme d'élèves (plus de 30 sur 42) est passé directement de $a_{n+1}^2 = \frac{1-b_n}{2}$ à $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-b_n}{2}}$ sans passer par la case « valeur absolue », et donc sans se préoccuper du signe de a_{n+1} . Toute la difficulté de la question était là, donc en faisant cela on perdait quasiment tous les points.
- 3.c.** Pensez à préciser que $\frac{\pi}{3 \times 2^n} \in I$ avant d'appliquer la question 1.f.

III. Involutions continues de \mathbb{R} .

Attention, dans cet exercice, il n'est supposé nulle part que f est dérivable, donc il n'était pas question d'utiliser f' .

- 2.** Dans cette question, il ne s'agissait surtout pas de prendre pour f un des exemples que vous aviez donnés à la question précédente !
- 3.** « f est croissante » ne signifie pas que $f(x) \geq x$.
- 4.a.** Le fait qu'une fonction est continue et strictement décroissante n'assure pas que c'est une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Considérer par exemple la fonction $-\arctan$. Il fallait utiliser que $y = f(f(y))$. On pouvait aussi le faire avec le théorème de la bijection, mais pour cela il fallait d'abord montrer que f tendait vers $\pm\infty$ et $\mp\infty$. Or pour le montrer on utilisait que f n'était ni majorée ni minorée, et pour montrer ce dernier point, on utilisait le point présent ! C'était tout le but des questions qui suivaient, d'où l'intérêt de lire à l'avance les quelques questions qui suivent (voire même plus) pour avoir une idée du cheminement.
- 4.c.** Toute la difficulté de cette question était de calculer les limites de f en $\pm\infty$. Le théorème de la limite monotone qui vous était rappelé en préambule ne précisait pas dans quels cas ces limites étaient finies ou infinies : c'était à vous de le démontrer.