



LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON  
SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR  
CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I.  
ANNÉE 2020 - 2021

C1 : PERFORMANCES STATIQUES ET CINÉMATIQUES DES SYSTÈMES COMPOSÉS DE CHAÎNE DE SOLIDES

## TD 4 - Représentation des SLCI par les transformées de Laplace (C2-2)

29 Septembre 2020

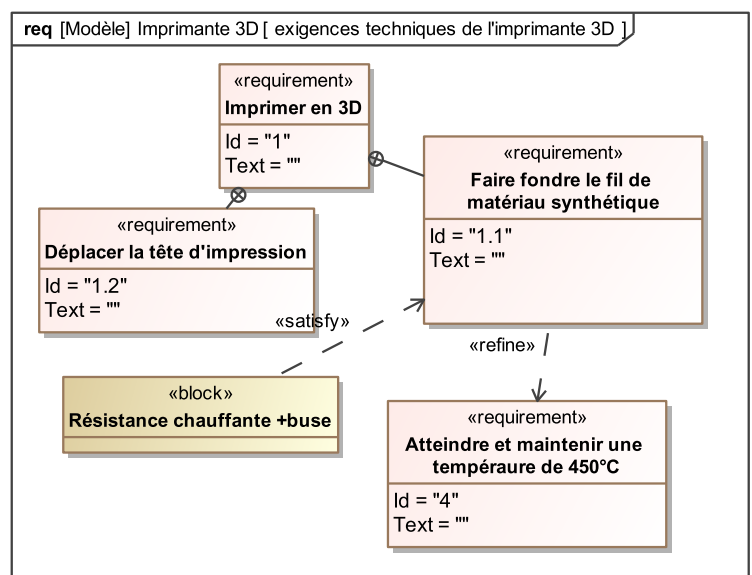
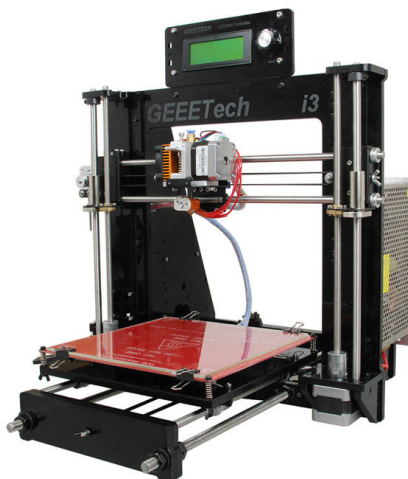
### Compétences

- **Analyser**; Apprécier la pertinence et la validité des résultats : Grandeurs utilisées : unités du système international; homogénéité des grandeurs
- **Analyser**; Définir les frontières de l'analyse : Flux échangés
- **Modéliser**; Proposer un modèle de connaissance et de comportement : Systèmes linéaires continus et invariants : Modélisation par équations différentielles; Calcul symbolique; fonction de transfert; gain, ordre, classe, pôles, zéros

### 1 Modélisation du cycle de chauffe d'une imprimante 3D

#### a) Présentation du problème

On souhaite modéliser le cycle de chauffe d'une imprimante 3D utilisant le système FDM (Fused Deposition Modeling). Cette technique consiste à déposer un fil de matière synthétique (en matériau ABS). On peut alors construire un volume par addition de matière.



Les grandeurs d'entrée et de sortie du problème sont définies par :

- $e(t)$  : température de consigne;
- $s(t)$  : température effective dans la buse transportant le fil d'ABS;

Le comportement thermique au niveau de la tête de dépose de fil peut être décrit par l'équation différentielle suivante :

$$2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 6 a \frac{ds(t)}{dt} + 4 a^2 s(t) = b e(t) \quad (1)$$

- $a$  et  $b$  sont des constantes réelles positives.
- On suppose les conditions initiales nulles (cela revient à considérer que  $e(t)$  et  $s(t)$  sont les écarts de température par rapport à la température ambiante).

**b) Analyse temporelle du problème vis-à-vis d'une entrée à un échelon.**

**Q 1 : Déterminer la transformée de Laplace de l'équation 1.**

**Q 2 : Déterminer  $e(t)$  puis  $E(p)$ .**

**Q 3 : En déduire  $S(p)$ .**

**Q 4 : Déterminer l'expression de la fonction de transfert  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ .**

**Q 5 : La mettre sous forme canonique et en déduire son gain sa classe et son ordre.**

**Q 6 : Déterminer les limites de  $s(t)$  en 0 et à l'infini.**

**Q 7 : déterminer la pente de la tangente à l'origine.**

**Q 8 : Que faut-il faire pour que système soit précis?**

**Q 9 : Tracer l'allure de  $s(t)$ .**

**c) Modification de la consigne : utilisation d'une rampe puis d'une stabilisation**

Imposer une entrée de type échelon peut s'avérer brutal pour les composants du système. On souhaite pour cela imposer une consigne progressive. On utilise alors l'évolution de  $e(t)$  donnée par la figure 1 (a).

**Q 10 : Proposer une décomposition du signal ci-dessus à l'aide de signaux canoniques (échelon, rampe) en complétant la figure 1 (a).**

**Q 11 : Déterminer l'expression de  $E(p)$ .**

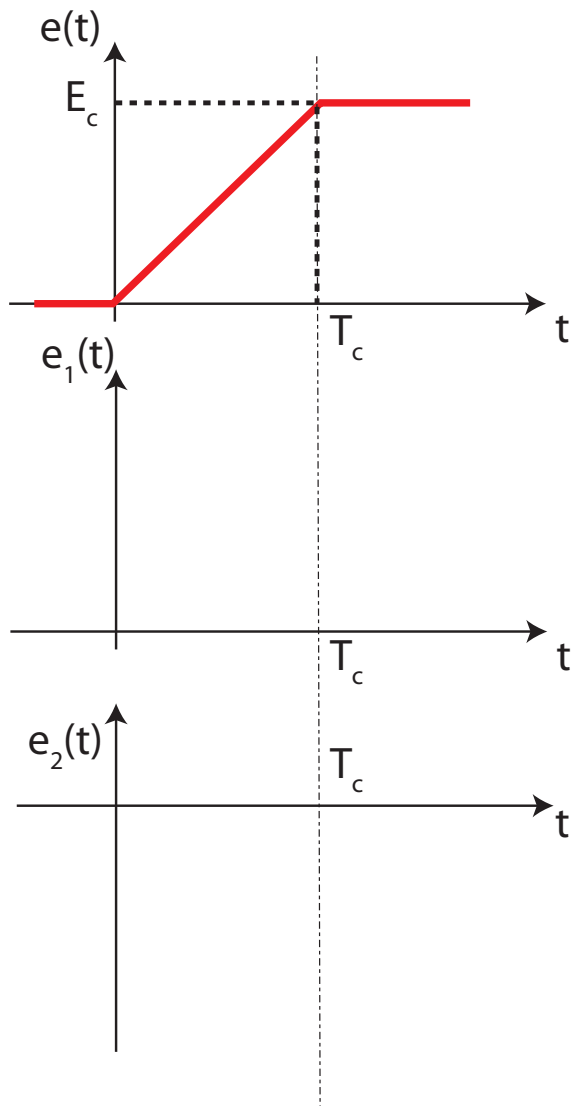
**Q 12 : En déduire l'expression de  $S(p)$**

**Q 13 : Vérifier le comportement asymptotique de  $s(t)$ .**

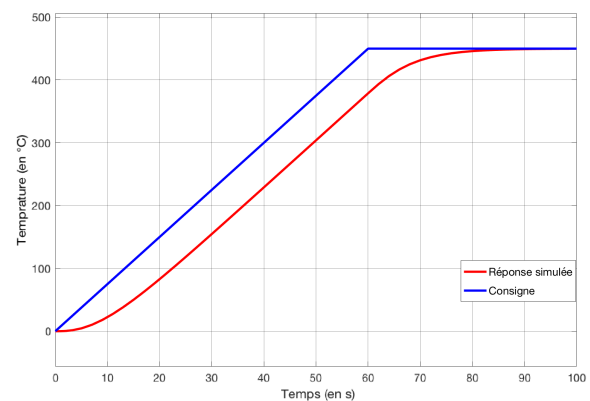
**Q 14 : On donne la réponse obtenue par simulation sur la courbe (figure 1 (b)). Que pouvez-vous en dire concernant la réponse du système. Déterminer les écarts entre performances attendues et réelles.**

- On peut noter un retard dynamique égal à 10 s;
- Le comportement obtenu est bien conforme aux calculs effectués précédemment.

On obtient une valeur de  $450^\circ\text{C}$  en régime permanent pour  $s(t)$  qui est bien conforme au cahier des charges.



(a) Décomposition de la consigne d'entrée



(b) Réponse à une montée progressive en consigne obtenue par simulation

FIGURE 1

## 2 Décomposition en éléments simples

**Q 15 : Décomposer la fonction ci-dessous en éléments simples et donner son expression dans le domaine temporel en utilisant la table des transformées de Laplace.**

1.

$$S_1(p) = \frac{5}{(p+2)(p^2+6p+13)}.$$

2.

$$S_2(p) = \frac{K p^2}{(p-1)^2(p+1)}.$$

## 3 Résolution des équations différentielles à l'aide d'un calcul symbolique

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 9 \frac{ds(t)}{dt} + 20s(t) = 0.$$

avec les conditions initiales :  $s(0) = 1$  et  $s'(0) = 3$

*Indications* : on rappelle que

$$\mathcal{L} \left[ \frac{df}{dt} \right] = p F(p) - f(0^+)$$

**Q 16 : Écrire l'équation différentielle dans le domaine de Laplace. En déduire  $S(p)$  et la décomposer en éléments simples. Repasser dans le domaine temporel.**