



C3-2 - Analyse temporelle des systèmes asservis du 2nd ordre

13 Novembre 2018

Table des matières

I	Système du second ordre	1
1	Définition	1
2	Exemple du cours	2
II	Caractérisations de la réponse d'un système du second ordre	2
1	Comportement asymptotique :	2
2	Comportement temporel	3
a)	Cas où $\xi > 1 \rightarrow \Delta > 0$: 2 pôles réels :	3
b)	Cas où $\xi = 1 \rightarrow \Delta = 0$: 1 pôle réel double :	4
c)	Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes :	4
3	Quantification de la réponse indicielle d'un second ordre	6
a)	Analyse paramétrique	6
b)	Rapidité	6
c)	Précision	7

Compétences

- **Modéliser :**
 - Proposer un modèle de connaissance et de comportement :
- **Résoudre :** Proposer une démarche de résolution et mettre en oeuvre la résolution analytique : Réponse temporelle des systèmes du 2^{ème} ordre.
- **Expérimenter :** proposer, justifier et mettre en oeuvre un protocole expérimental
 - Prévoir les allures des réponses attendues ;

I. Système du second ordre

1 Définition



Définition 1 : Système du second ordre

On appelle système du **deuxième ordre fondamental** tout système linéaire, continu et invariant régi par une équation différentielle de la forme :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t) \quad (1)$$

**Propriété 1 :**

La fonction de transfert de ces systèmes peut s'écrire sous la **forme canonique suivante** :

$$H(p) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + 1} \quad (2)$$

où :

- K est le **gain statique**,
- ξ est le **coefficient d'amortissement**,
- ω_0 est la **pulsation propre** (en rad s^{-1}).

**Remarque 1 :**

On parle de système du second ordre *fondamental* par opposition à un système *généralisé*, pour lequel le membre de droite de l'équation 1 est une équation différentielle du 1^{er} ordre. Dans ce cas, la fonction de transfert *généralisée* sera de la forme :

$$H(p) = \frac{K(1 + \tau p)}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \quad (3)$$

2 Exemple du cours

**Exemple 1 : Ressort et amortisseur avec prise en compte de la masse de la tige**

Reprenons l'exemple de la partie précédente mais sans négliger la masse m de la tige. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la tige donne maintenant :

$$k(e(t) - s(t)) - c \cdot \frac{ds(t)}{dt} = m \frac{d^2 s(t)}{dt^2}$$

On obtient bien ici une équation différentielle de degré 2, ce qui montre que le **système est du deuxième ordre**. Avec les conditions initiales nulles ($s(t=0) = 0$ et $s'(t=0) = 0$), on peut écrire dans le domaine de Laplace :

$$m \cdot p^2 \cdot S(p) + c \cdot p \cdot S(p) + k \cdot S(p) = k \cdot E(p).$$

On obtient alors l'expression de la transmittance :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + 1}.$$

Avec,

- $K = 1$,
- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$,
- $\xi = \frac{c\omega_0}{2k}$.

II. Caractérisations de la réponse d'un système du second ordre

On reprend la transformée d'un échelon : $E(p) = \frac{e_0}{p}$. La sortie sera donc :

$$S(p) = H(p) E(p) = \frac{K e_0}{p \left(\frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + 1 \right)} = \frac{K e_0 \omega_0^2}{p (p^2 + 2\xi \omega_0 p + \omega_0^2)}$$

1 Comportement asymptotique :

On cherche à déterminer le comportement asymptotique (valeur et dérivée) de la réponse $s(t)$ au voisinage de 0 et $+\infty$. Pour cela, on utilise les théorèmes des valeurs limites.

Au voisinage de $+\infty$:

Au voisinage de 0 :

au final :



Propriété 2 :

La réponse d'un système du deuxième ordre sollicité par un échelon possède :

- une **asymptote horizontale** d'équation $s(t) = k e_0$ au voisinage de $+\infty$,
- une **tangente horizontale** au voisinage de 0.

2 Comportement temporel

Pour calculer $s(t)$, il faut décomposer $S(p)$ en éléments simples. Cette opération débute par le calcul **des pôles** de la fonction de transfert.



Définition 2 : pôles de la fonction de transfert

On appelle **pôles de la fonction de transfert** les "zéros" du dénominateur (c'est à dire les racines).

Discriminant : $\Delta = (2\xi\omega_0)^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1)$

Trois cas sont possibles :

a) **Cas où $\xi > 1 \rightarrow \Delta > 0$: 2 pôles réels :**

$$\begin{cases} p_1 = \omega_0 \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \\ p_2 = \omega_0 \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \end{cases}$$

avec $p_1 p_2 = \omega_0^2$. La sortie peut alors se décomposer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{K e_0 \omega_0^2}{p(p-p_1)(p-p_2)} \\ &= K e_0 \omega_0^2 \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{(p-p_1)} + \frac{C}{(p-p_2)} \right) \end{aligned}$$

Il reste à identifier A , B et C :



Définition 3 :

| Il s'agit d'un **régime apériodique** (voir fig.2).

b) Cas où $\xi = 1 \rightarrow \Delta = 0$: 1 pôle réel double :

$$r_1 = r_2 = r = -\omega_0$$

La décomposition en éléments simple est alors :

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{K e_0 \omega_0^2}{p(p-r)^2} \\ &= \frac{A}{p} + \frac{B}{(p-r)} + \frac{C}{(p-r)^2} \end{aligned}$$

On trouve au final :

$$s(t) = K e_0 \left[1 - (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t} \right] u(t). \quad (5)$$



Définition 4 :

| On parle alors de **régime apériodique critique** (voir fig.2).

c) Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes :

La décomposition en éléments simple est alors :

$$S(p) = \frac{K e_0 \omega_0}{p(p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$$

La résolution et le retour dans le domaine temporel donne alors :

$$s(t) = K e_0 \left[1 - e^{-\xi\omega_0 t} \left(\cos\left(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t\right) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t\right) \right) \right] u(t). \quad (6)$$

Remarque 2 :

En posant $\xi = \cos(\phi)$ et $\sqrt{1-\xi^2} = \sin(\phi)$, le résultat peut se simplifier sous la forme :

$$s(t) = K e_0 \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t + \phi\right) \right] u(t). \quad (7)$$

Définition 5 :

! Ce régime est dit **régime oscillatoire amorti** ou **pseudo-périodique** (voir fig.2).

Remarque 3 :

! Pour un second ordre *généralisé*, le dénominateur de la fonction de transfert étant le même que pour le second ordre *fondamental*, la décomposition en éléments simples sera de la même forme et donc la réponse temporelle aura la même allure.

Dans ce dernier cas on peut considérer un certain nombre de grandeurs

Pseudo-pulsation	$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1-\xi^2}$	Dépassement relatif	$Dr = \frac{s_{max} - s_{\infty}}{s_{\infty}} = \exp\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$
Pseudo-période	$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$	Temps de montée	$t_m = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}} (\pi - \text{Arccos}(\xi))$
Temps de pic	$t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$	Temps de réponse à 5% pour $\xi = 0,7$	$t_{r5\%} \cong \frac{3}{\omega_0 \xi}$

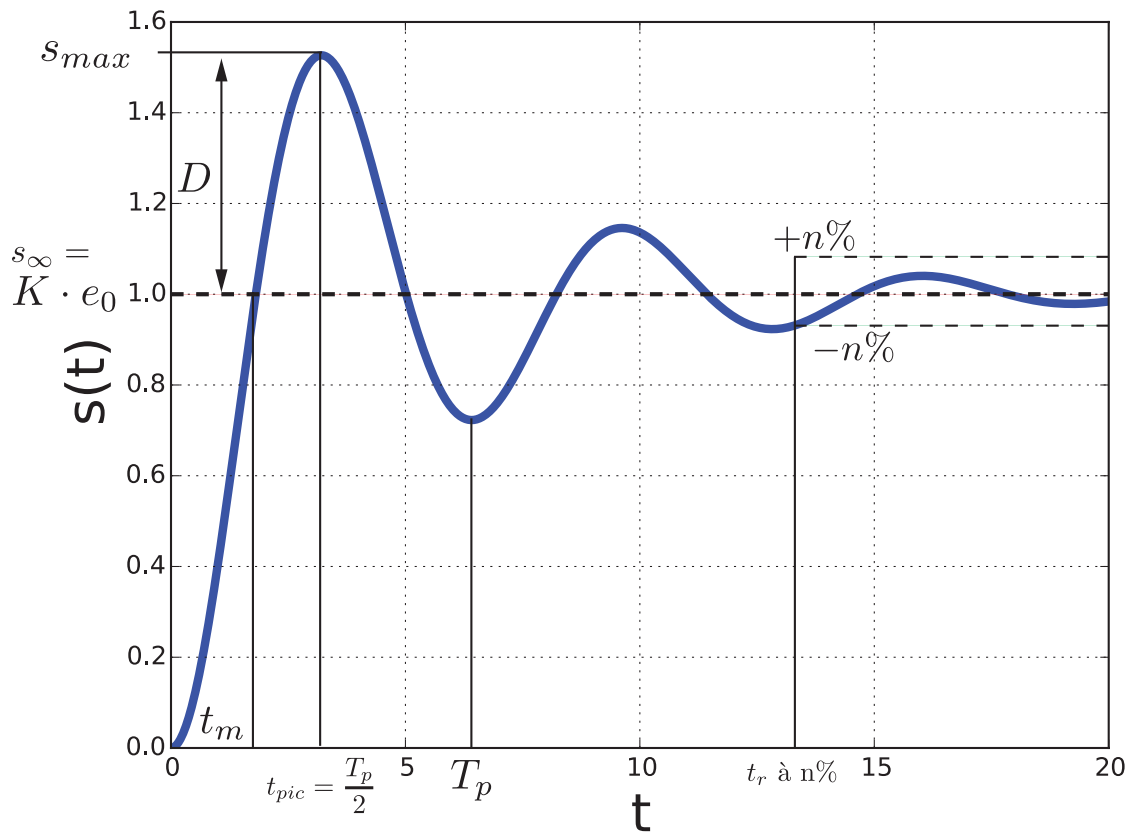


FIGURE 1 – Définition des différentes grandeurs pour un régime pseudo-périodique.

3 Quantification de la réponse indicielle d'un second ordre

a) Analyse paramétrique

Les courbes représentées sur la figure 2 permet de comparer les réponses indicielles pour un système du second ordre selon les valeurs de ξ et ω_0 .

- Le paramètre ξ **contribue à l'amortissement** du système mais également la diminution de la rapidité.
- Le paramètre ω_0 **augmente la rapidité** du système mais contribue à augmenter l'instabilité car il diminue la période d'oscillation du régime pseudo-harmonique.
- Lorsque ξ augmente, le comportement du système se rapproche de celui d'un premier ordre.

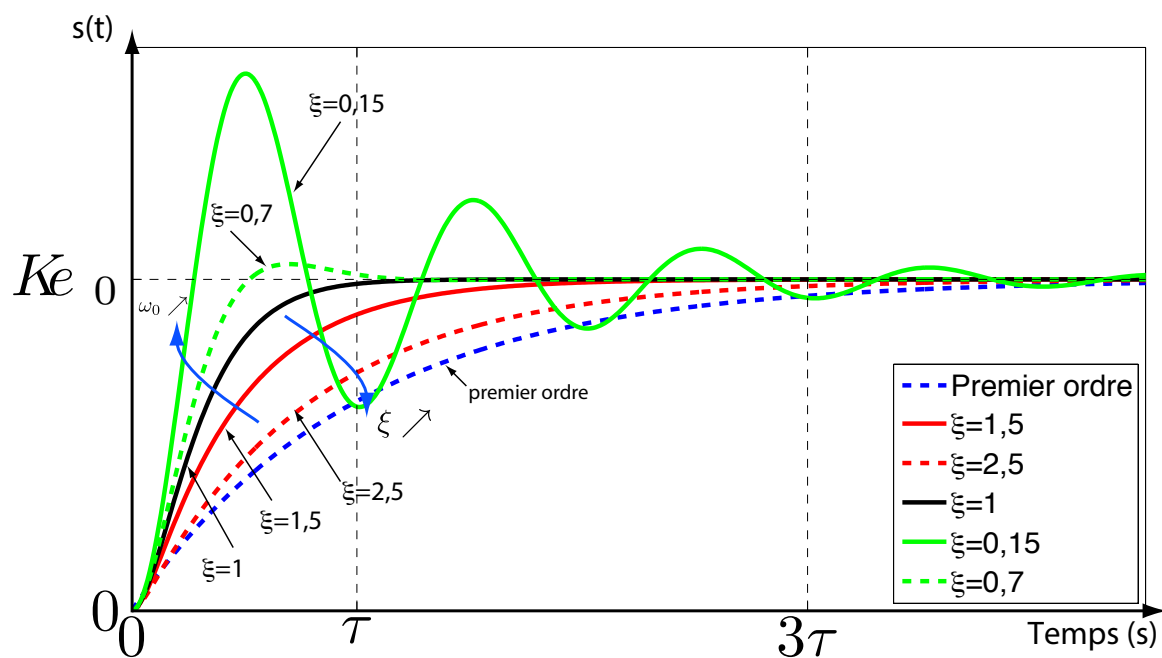
b) Rapidité



Propriété 3 : Rapidité

Le temps de réponse pour un système du second ordre dépend du coefficient d'amortissement ξ . Pour une valeur de ξ donnée, il existe une relation entre ω_0 et t_r . Cette relation est donnée par l'abaque figure 3. On retiendra en particulier :

- le temps de réponse minimum obtenu pour $\xi = 0,7$ avec $t_r \omega_0 \approx 3$,
- le temps de réponse en régime apériodique critique ($\xi = 1$) : $t_r \omega_0 \approx 5$

FIGURE 2 – Illustration des différents régimes en fonctions de l'amortissement ξ .**c) Précision**

Là encore, elle est définie par l'erreur statique :

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} |e(t) - s(t)|$$

(toujours en faisant attention à l'homogénéité des grandeurs.)

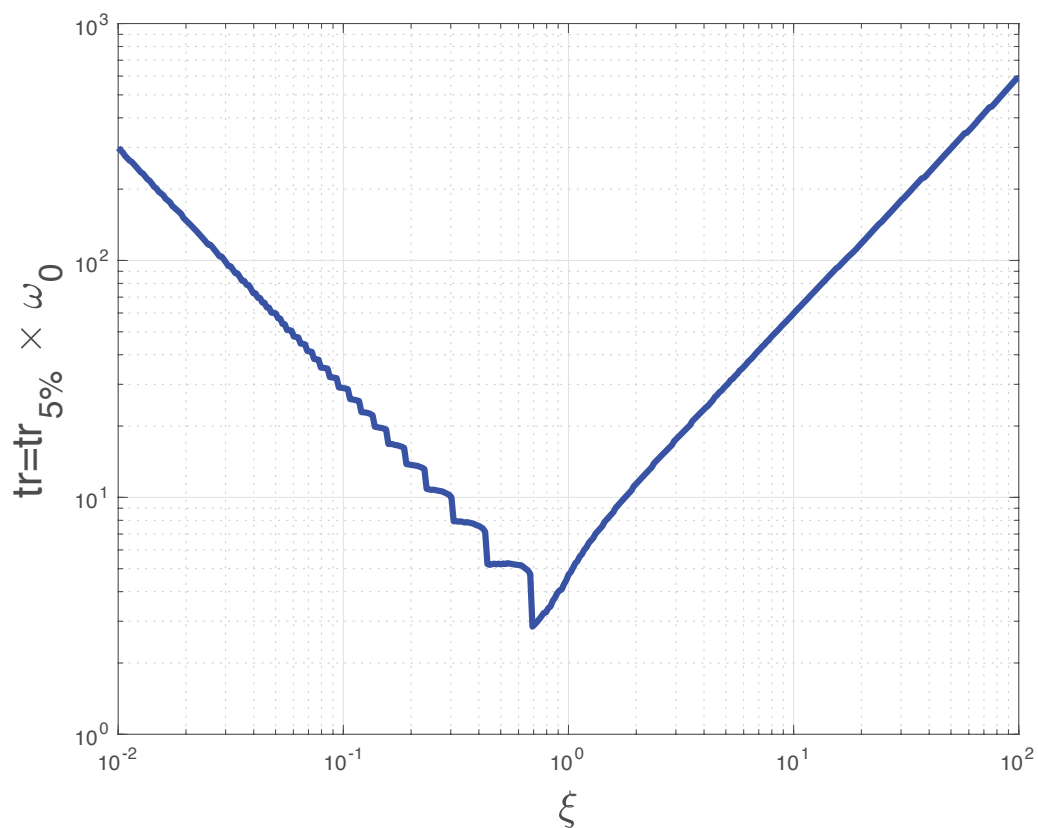
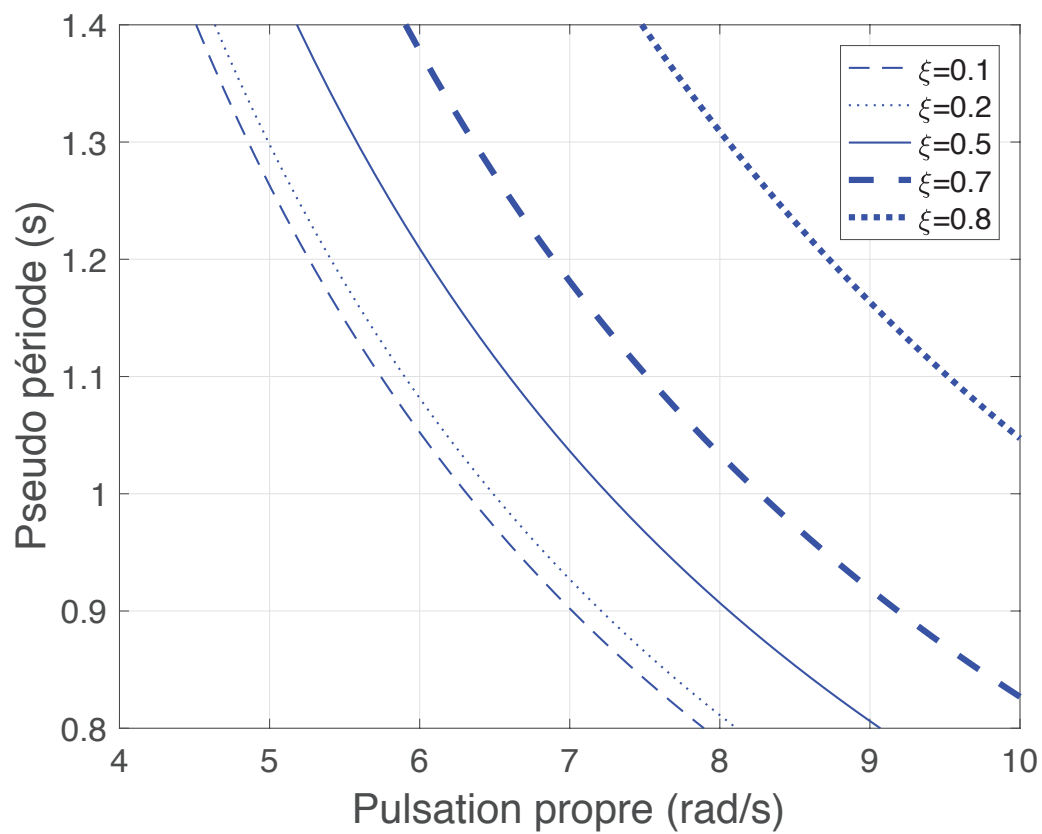
FIGURE 3 – Temps de réponses réduit en fonction de ξ 

FIGURE 4 – Pseudo-période en fonction de la pulsation propre.