# XXVI : Espaces euclidiens et préhilbertiens réels

## 1 - Produit scalaire : définition

Définition : Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev. On appelle produit scalaire sur $E$ toute forme bilinéaire symétrique définie et positive sur $E$.

Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$. $\varphi$ est un produit scalaire si :

(i) $\varphi$ est bilinéaire ;

(ii) $\varphi$ est symétrique ;

(iii) $\varphi$ est positive : $\forall x \in E,\ \varphi(x,x) \geq 0$

(iv) $\varphi$ est définie : $\forall x \in E, \ \varphi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Rq : • $\varphi(x,y)$ est noté souvent : $\langle x, y \rangle$

$\langle x | y \rangle$

$(x, y)$

$(x | y)$

• Si $\varphi$ est symétrique et linéaire par rapport à la 1ère variable, elle est bilinéaire :

Soit $x, y, z \in E, \ \lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\varphi(x, y + \lambda z) \underset{\text{sym.}}{=} \varphi(y + \lambda z, x)$$

$$\underset{\substack{\text{lin.} \\ 1^{\text{ère}}\ v}}{=} \varphi(y, x) + \lambda \varphi(z, x)$$

$$\underset{\text{sym.}}{=} \varphi(x, y) + \lambda \varphi(x, z)$$

Ex : . les produits scalaires usuels sur $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^3$ sont des produits scalaires.

sur $\mathbb{R}^2$ : $\langle\cdot|\cdot\rangle : \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\right) \longmapsto ac+bd$$

Soit $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix},\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

(ii) : $\left\langle\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\right\rangle = ac+bd = \left\langle\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right\rangle$

(i) $\left\langle\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}\right\rangle = (a+\lambda c)e+(b+\lambda d)f$

$$= \left\langle\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}\right\rangle + \lambda\left\langle\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}\right\rangle$$

par symétrie, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est bilinéaire.

(iii) $\left\langle\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right\rangle = a^2+b^2 \geqslant 0$

(iv) Si $\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle = 0$, alors $a^2 + b^2 = 0$

donc $a = b = 0$.

• $\langle \cdot | \cdot \rangle_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left( \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \longmapsto x_1 x_2 - y_1 x_2 + 2 y_1 y_2 - x_1 y_2$$

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tq. $\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle_2 = 0$

alors : $x^2 - yx + 2y^2 - yx = 0$

ie : $x^2 + 2y^2 - 2xy = 0$

donc : $(x-y)^2 + y^2 = 0$

donc : $(x-y)^2 = y^2 = 0$ donc : $x - y = y = 0$

donc $x = y = 0$.

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_2 = 1 + 1 - 2 - 1 = \underline{-1}$$

- $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

<u>dans $\mathbb{R}^n$</u> : $$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

c'est le p.s. usuel sur $\mathbb{R}^n$.

- La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $(1, X, \ldots X^n)$.

Si $A = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, $B = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$,

ds la base canonique : $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Le p.s. usuel de $\mathbb{R}_n[X]$ :

$$\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i, \sum_{i=0}^{n} b_i X^i\right) \longmapsto \sum_{i=0}^{n} a_i b_i .$$

- $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(f, g) \longmapsto \int_0^1 f \cdot g .$$

Si $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ tq. $\langle f | f \rangle = 0$

alors : $\int_0^1 f^2 = 0$.

Or : $\cdot$ $f^2 \geqslant 0$

$\cdot$ $f^2$ est CONTINUE

dc $f^2 = 0$, et $f = 0$.

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ est le p.s. usuel sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

- $\mathbb{R}[X] \subset \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

dc
$$\begin{aligned} \mathbb{R}[X]^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (A,B) &\longmapsto \int_0^1 \tilde{A}\cdot\tilde{B} \end{aligned}$$

est 1 p.s.

de $\hat{n}$ : $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbb{R}_n[X]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(A, B) \longmapsto \int_0^1 \tilde{A} \cdot \tilde{B}$$

est 1 p.s. sur $\mathbb{R}_n[X]$.

il n'a rien à voir avec le p.s. usuel sur $\mathbb{R}_n[X]$ !

ex : $A = 1 + X$ , $B = 1 - X$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle A | B \rangle = \int_0^1 (1+t)(1-t)\, dt = \int_0^1 (1-t^2)\, dt$$

$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$