Devoir surveillé n°6
Version 1

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme $X^n + X + 1$ par le polynôme $(X-1)^2$.

II. Une relation fonctionnelle.

☐ $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

☐ L'objectif du problème est d'étudier les ensembles $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ suivants :

$\mathscr{E} = \{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)\}$.

$\mathscr{F}$ est la partie constituée des éléments f de $\mathscr{E}$ tels que :
- f n'est pas la fonction identiquement nulle.
- f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Première Partie :

1) Montrer que la fonction cosinus est dans l'ensemble $\mathscr{E}$.

2) Démontrer la formule : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \operatorname{ch}(x+y)$. En déduire que la fonction ch est dans l'ensemble $\mathscr{E}$.

3) Soit f dans $\mathscr{E}$; on définit pour tout α :

$$f_\alpha(x) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(\alpha\, x) \end{array}.$$

Montrer que pour tout réel α, la fonction f_α est dans $\mathscr{E}$.

4) On fixe un élément f de $\mathscr{E}$.
En donnant à x et à y des valeurs particulières, prouver que :

a) $f(0)$ vaut 0 ou 1.

b) Si $f(0) = 0$, alors f est la fonction identiquement nulle.

c) Si $f(0) = 1$, alors f est une fonction paire.

Deuxième Partie :

On pourra utiliser librement le résultat suivant :
Si a est un élément fixé de $\mathbb{R}_+^*$ et si $D_a = \left\{ a\,\dfrac{p}{2^q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$, tout réel est limite d'une suite d'éléments de D_a.

Soit f un élément de $\mathscr{F}$. On pose $E = \{x > 0 \mid f(x) = 0\}$.

5) **a)** En utilisant un résultat de la première partie, montrer que $f(0) = 1$, et que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que E admet une borne inférieure que l'on note a.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in E$ tel que $x_n \in [a, a + 1/n[$. En déduire qu'il existe une suite d'éléments de E qui converge vers a.

d) En utilisant la continuité de f en a, prouver que $f(a) = 0$. En déduire que : $a > 0$.

e) En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que : $\forall x \in [0, a[\,,\ f(x) > 0$.

6) On pose $\omega = \dfrac{\pi}{2a}$, et on note

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(\omega\, x) \end{array}.$$

a) Soit $q \in \mathbb{N}$.n se rappelant que $f(0) = 1$, montrer que

$$f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 = 2\left[f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right]^2.$$

b) En déduire, en raisonnant par récurrence sur q, que :

$$\forall q \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right).$$

On démontrerait de même le résultat suivant, que le candidat pourra utiliser librement : si $q \in \mathbb{N}$ est fixé, alors $\forall p \in \mathbb{N},\ f\left(p\frac{a}{2^q}\right) = g\left(p\frac{a}{2^q}\right)$.

c) Prouver que : $\forall x \in D_a,\ f(x) = g(x)$.

d) En déduire que $f = g$.

7) En déduire tous les éléments de $\mathscr{F}$.

III. Les polynômes de Tchebychev.

On définit la suite de polynômes de Tchebychev, notée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$, par :

$$P_0 = 1, \qquad P_1 = X, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n.$$

On dit qu'un polynôme P est pair si $P(-X) = P$, impair si $P(-X) = -P$.

1) **a)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré n.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n a pour coefficient dominant 2^{n-1}.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n est de même parité que n.

d) Calculer $P_n(1)$, $P_n(-1)$ et $P_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e) Soit $x \in \mathbb{R}$, quelle relation de récurrence vérifie la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$? En déduire la valeur de $P_n(x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On discutera les trois cas suivants.

i) Si $|x| > 1$.

ii) Si $|x| = 1$.

iii) Si $|x| < 1$.

2) **a)** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ P_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant la relation : $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ P_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$.

c) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, toutes les racines de P_n.

d) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, toutes les racines de P_n'.

3) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n \wedge P_{n+1} = 1$.

4) Écrire dans le langage Python une fonction `Tchebychev(n)`, prenant en argument un entier naturel `n` et renvoyant la liste des coefficients de $P_{\mathtt{n}}$.
Ainsi, `Tchebychev(2)` renverra `[2,0,-1]`, car $P_2 = 2X^2 - 1$.
Il sera apprécié que chaque boucle soit accompagnée de son invariant.

— FIN —