

Trigonométrie et complexes - un problème supplémentaire

Exercice 1 On désire prouver que pour tout nombre complexe z de module 1 on a :

$$\sqrt{3} \leq |1+z| + |1-z+z^2| \leq \frac{13}{4}.$$

Dans tout l'exercice z désigne donc un nombre complexe de module 1.

1) On pose $t = |1+z|$, dans quel intervalle se trouve le réel t ?

2) Exprimer $\operatorname{Re}(z)$ à l'aide de t .

3) Montrer que

$$|1-z+z^2|^2 = 3 - 4\operatorname{Re}(z) + 2\operatorname{Re}(z^2).$$

4) Exprimer $\operatorname{Re}(z^2)$ en fonction de $\operatorname{Re}(z)$ (indication : utiliser l'écriture trigonométrique). En déduire que

$$|1+z| + |1-z+z^2| = t + |3-t^2|.$$

5) En déduire l'inégalité demandée. Trouver un complexe z qui réalise le minimum.