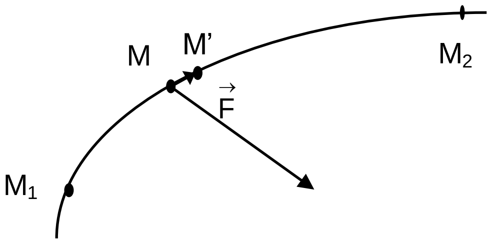
M4 APPROCHE ENERGETIQUE DU MOUVEMENT D'UN POINT MATERIEL

Dans ce chapitre nous allons introduire une autre façon de résoudre un problème de mécanique, à l'aide du théorème de l'énergie cinétique.
L'utilisation de ce théorème permet parfois une résolution rapide du problème en particulier dans le cas des problèmes à un degré de liberté. (C'est une méthode à privilégier dans ce cas.)

I. Travail, puissance

I.1. Puissance d'une force

Référentiel : $\Re$
Système : La particule M de masse m
Force : résultante des forces $\vec{F}$



A l'instant t la particule est en M la force est alors $\vec{F}(M)$
A l'instant t + dt la particule est en M' ($\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dl}$ déplacement élémentaire)
Elle est alors animée d'une vitesse $\vec{v} = \dfrac{\overrightarrow{dl}}{dt}$

• La puissance de la force $\vec{F}$ appliquée au point M animé de la vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel $\Re$ est définie par :

$$\mathscr{P}(t) = \vec{F}.\vec{v}$$

• $\mathscr{P}(t)$ est une grandeur additive.
Si la particule est soumise à plusieurs forces la puissance résultante sera la somme des puissances de chacune des forces prises séparément.
• Pour qualifier la puissance d'une force on distingue 3 cas :

→ $\mathscr{P}(t) > 0$ puissance motrice,
→ $\mathscr{P}(t) < 0$ puissance résistante.
→ $\mathscr{P}(t) = 0$ puissance est nulle cela correspond au cas où la force est perpendiculaire au mouvement.

•Unité : W, le Watt
Dimension : $[\mathscr{P}] = ML^2T^{-3}$

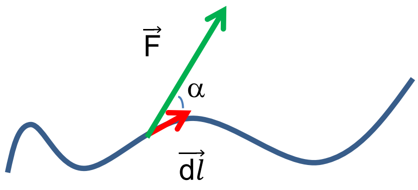
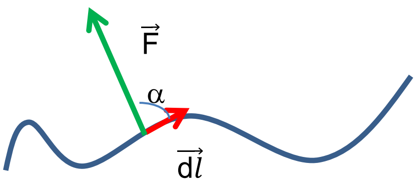
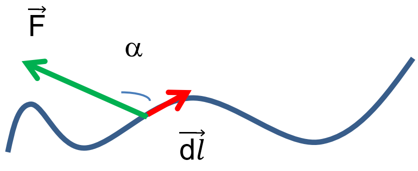
I.2. Travail élémentaire d'une force.

• Travail élémentaire reçu par M entre t et t+dt au cours de son déplacement élémentaire : $\delta W = \mathscr{P}(t)dt$
Tout comme la puissance le travail est une grandeur additive.

• Autres écritures pour le travail :
$\delta W = \mathscr{P}(t)dt = \vec{F}.\vec{v}\,dt$ cette écriture est utilisée quand on travaille avec la variable temps.

$\delta W = \mathscr{P}(t)dt = \vec{F}.\overrightarrow{dl}$ cette écriture est utilisée quand on travaille avec les variables d'espace.

• Unité : J, le Joule.
Dimension : $[\,W\,] = ML^2T^{-2}$

δW>0	δW=0	δW<0
		
0≤ α <90°	α = 90°	90°<α≤ 180°
La force favorise le déplacement	La force n'a pas d'effet sur le déplacement	La force s'oppose au déplacement
Le travail élémentaire est moteur sur le trajet $\vec{dl}$	Le travail est nul	Le travail élémentaire est résistant sur le trajet $\vec{dl}$

I.3. Travail d'une force au cours d'un déplacement

• Travail de la force est la somme des travaux élémentaires calculée sur la trajectoire :

$$W_{A\to B} = \int_{M\in\widehat{AB}} \delta W$$

La notation $\int_{M\in\widehat{AB}}$ indique que le travail doit être calculé par une intégrale curviligne en suivant le trajet de la particule le long de AB.

Si on travaille avec la variable temps : $W_{A\to B} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}.\vec{v}\,dt$

Si on travaille avec les variables d'espace $W_{A\to B} = \int_{M\in\widehat{AB}} \vec{F}.\vec{dl}$

A priori, le travail dépend du chemin suivi par M et du référentiel d'étude.

I.4. Exemples

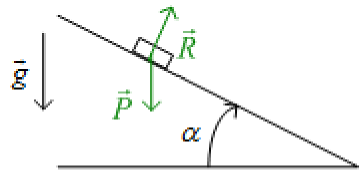
I.4.1. Forces perpendiculaires au déplacement

• La réaction du support

Travail élémentaire de $\vec{R}$:

$\delta W(\vec{R}) = \vec{R}.\vec{dl} = 0$ car $\vec{R}$ est perpendiculaire à $\vec{dl}$

Donc $W_{A\to B} = \int_{M\in\widehat{AB}} \vec{R}.\vec{dl} = 0J$



• Tension du fil

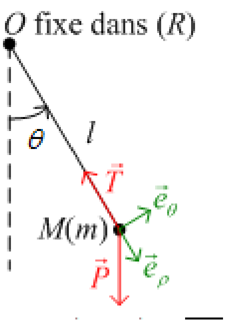
$\vec{T} = -T\vec{e_r}$

$\vec{dl} = l d\theta \vec{e_\theta}$

Travail élémentaire de $\vec{T}$:

$\delta W(\vec{T}) = \vec{T}.\vec{dl} = 0$

Donc $W_{A\to B} = \int_{M\in\widehat{AB}} \vec{T}.\vec{dl} = 0J$



I.4.2. Force constante

On considère une force $\vec{F}$ indépendante de la position et du temps (exemple : le poids à petite échelle)

$W_{A\to B} = \int_{M\in\widehat{AB}} \vec{F}.\vec{dl} = \vec{F}.\int_{M\in\widehat{AB}} \vec{dl} = \vec{F}.\int_{M\in\widehat{AB}} \vec{dOM} = \vec{F}.[\vec{OM}]_A^B$

$W_{A\to B} = \vec{F}.\vec{AB}$

II. Energie cinétique

II.1. Définition

Référentiel : $\mathfrak{R}$
Système : La particule M de masse m

• L'énergie cinétique d'une particule M, de masse m, dans le référentiel $\mathfrak{R}$, à l'instant t est :

$$E_{c/\mathfrak{R}} = \frac{1}{2}m[v(M/\mathfrak{R})]^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

• Unité : J, le joule
Dimension : $[E_c] = [\,W\,] = ML^2T^{-2}$

II.2. Théorème de l'énergie cinétique

• Enoncé
Dans un référentiel Galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'une particule entre deux instants est égale au travail de la somme des forces d'interaction s'exerçant sur la particule pendant l'intervalle de temps considéré.

→ Première forme : $E_c(B) - E_c(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \sum_i W_{A\to B}(\vec{F_i})$

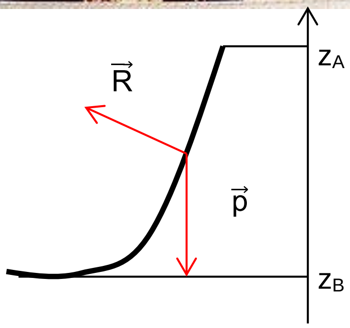
→ Deuxième forme : $\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathscr{P}(t)(\vec{F_i})$

• Démonstration
Référentiel : $\mathfrak{R}$ Galiléen.
Système : M(m)
Force : résultante des forces $\vec{F}$
Loi : Relation fondamentale de la dynamique $\vec{F} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt}$
D'où le travail élémentaire: $\delta W = \vec{F}.\vec{v}\,dt = m\,\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}\,dt = \frac{1}{2}md(v^2)$
D'où $\delta W = dE_c$

On a le même résultat avec $\vec{F} = \sum_i \vec{F_i}$
Alors $\delta W = \sum_i \delta W_i = dE_c$

II.3. Exemple d'utilisation

Un skieur part de A avec une vitesse nulle. Avec quelle vitesse décolle-t-il en B ? (On néglige les frottements)
Référentiel : $\mathfrak{R}$ Galiléen.
Système : M(m)
Force : Le poids : $\vec{p} = m\vec{g}$
La réaction du tremplin $\vec{R}$
Loi : Théorème de l'énergie cinétique
→ Travail des forces
La réaction est normale, son travail est donc nul.
Travail du poids : $\delta W = \vec{p}.\overrightarrow{dOM} = -mgdz \Rightarrow W_{A\to B}(\vec{p}) = -mg(z_B - z_A) = mgh$
→ Variation de l'énergie cinétique : $E_c(B) - E_c(A) = \frac{1}{2}mv_B^2$
D'où $\frac{1}{2}mv_B^2 = mgh$
$\Rightarrow v_B = \sqrt{2gh}$



III. Forces conservatives, énergie potentielle.

III.1. Définition.

Soit un point M en mouvement dans $\Re$ et soumis à un champ de force $\vec{F}$ (M), ($\vec{F}$ ne dépendant pas explicitement du temps).

• $\vec{F}$ est dite conservative ou dérivant d'un potentiel, si le travail reçu par M est une différentielle :

$$\delta W = \vec{F}.\vec{dl} = \vec{F}.\vec{v}\,dt = -dE_p$$

<u>E_p est l'énergie potentielle</u> de la particule.

•<u>Unité</u> : J, le joule
<u>Dimension</u> : $[E_P] = [\,W\,] = ML^2T^{-2}$

• <u>Remarques</u> :

→ Dans le cas d'un problème à une dimension (qui est le cas le plus fréquent) il est facile d'exprimer la force si on connaît l'énergie potentielle. (On verra plus tard qu'il existe un outil appelé le gradient qui permet de traiter des problèmes à plusieurs degrés de liberté).

Soit x la variable : $\vec{F} = F\vec{e_x} \Rightarrow F.dx = -dE_p \Rightarrow F = -\frac{dE_p}{dx}$

Le module de la force est alors la dérivée de l'énergie par rapport à la variable.

→ L'énergie potentielle est définie à partir de sa variation, elle n'est donc connue qu'à une constante près déterminée par les conditions aux limites.

II.2. Travail reçu par M soumis à une force conservative.

On déduit de la définition d'une force conservative que le travail reçu par M est indépendant du chemin suivi:

Travail élémentaire reçu lors du déplacement élémentaire de M: $\delta W = \vec{F}.\vec{dl} = -dE_p$

<u>Travail reçu durant le déplacement AB</u> : $W_{A\to B}(\vec{F}) = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$.

<u>Remarque</u>: Dans le cas d'une force quelconque le travail élémentaire n'est pas égal à une différentielle.

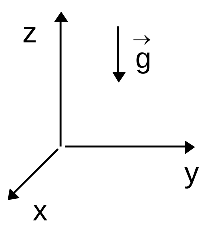
<u>Résultat important</u> :

Le travail reçu par la particule M soumis à une force conservative le long d'un trajet est égale à la diminution de l'énergie potentielle, il ne dépend donc pas du chemin suivi.
Si le trajet est fermé, le travail est nul.

II.3.Exemples.

• <u>Le poids d'un corps.</u>

On se place dans une région de l'espace suffisamment petite pour que le champ de pesanteur soit constant.



$\vec{p} = m\vec{g} = -mg\vec{e_z} \Rightarrow \delta W = \vec{p}.\vec{dl} = -mgdz = -d(mgz)$

Ainsi $\delta W = -dE_p$

Il existe donc une énergie potentielle E_p dont dérive la force $E_p = mgz + Cst$.

• <u>Force de tension d'un ressort uniaxe.</u>

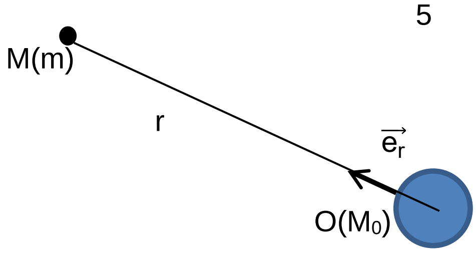
$\vec{F} = -kx\vec{e_x} \Rightarrow \delta W = \vec{F}.\vec{dl} = -kxdx = -d(\frac{1}{2}kx^2)$

Ainsi $\delta W = -dE_p$

Il existe donc une énergie potentielle E_p dont dérive la force $E_p = \frac{1}{2}kx^2 + Cst$.

Dans le cas où la longueur à vide du ressort est à prendre en compte $E_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + Cst$

- <u>Force gravitationnelle exercée par un astre.</u>



La force $\overrightarrow{F_{O/M}} = -G\frac{M_O m}{r^2}\vec{e_r}$

Ainsi : $\delta W = F_{O/M}\,\vec{e_r}\,.\overrightarrow{dOM}$

Or $\overrightarrow{dOM} = d(r\,\vec{e_r})$ représente le déplacement élémentaire du point M.

On a alors $d(r\,\vec{e_r}) = dr\,\vec{e_r} + r\,d(\vec{e_r})$

Etant donné que le vecteur $\vec{e_r}$ est unitaire nous avons donc : $\vec{e_r}^{\,2}=1$

soit $d(\vec{e_r}^{\,2}) = 0 = 2\vec{e_r}\,.d(\vec{e_r})$

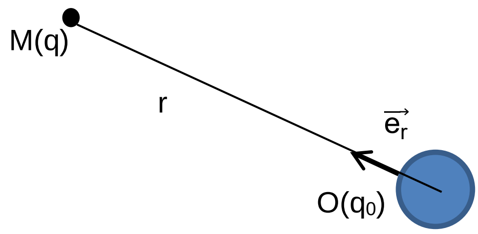
D'où $\delta W = F_{O/M}\,\vec{e_r}\,.\overrightarrow{dOM} = F_{O/M}\,\vec{e_r}.(\,dr\,\vec{e_r} + r\,d(\vec{e_r})\,) = -G\frac{M_O m}{r^2}dr$

Ainsi $dE_p = G\frac{M_O m}{r^2}dr = -GM_0 m d\left(\frac{1}{r}\right)$

D'où $E_p = -G\frac{M_O m}{r} + cst$

Par convention on choisit l'origine des potentiels en l'infinie d'où une constante nulle.

- <u>Force de coulomb exercée par une charge ponctuelle</u>



La force $\overrightarrow{F_{O/M}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_O q}{r^2}\vec{e_r}$

Ainsi : $\delta W = F_{O/M}\,\vec{e_r}\,.\overrightarrow{dOM}$

D'où $\delta W = F_{O/M}\,\vec{e_r}\,.\overrightarrow{dOM} = F_{O/M}\,\vec{e_r}.(\,dr\,\vec{e_r} + r\,d(\vec{e_r})\,) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_O q}{r^2}dr$

Ainsi $dE_p = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_O q}{r^2}dr = \frac{q_O q}{4\pi\varepsilon_0}d\left(\frac{1}{r}\right)$

D'où $E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_O q}{r} + cst$

Par convention on choisit l'origine des potentiels en l'infinie d'où une constante nulle.

<u>III. Energie mécanique</u>

<u>III.1. Définition</u>

M est soumis dans ($\Re$) galiléen à $\vec{F_c}$ forces conservatives d'énergies potentielles E_{pi} et $\overrightarrow{F_{nc}}$ forces non conservatives.

On note $E_m = E_c + \sum_i E_{pi}$ l'énergie mécanique du système.

<u>III.2. Cas où toutes les forces appliquées sont conservatives</u>

<u>Référentiel</u> : $\Re$ Galiléen.

<u>Système</u> : une particule dans un champ de force conservative.

<u>Loi</u> : Le théorème de l'énergie cinétique : $\delta W = dE_c$

Or la force est conservative donc $\delta W = -dE_p$

D'où $dE_p + dE_c = 0$

Ainsi $E_c + E_p = \text{constante} = E_{c0} + E_{p0} = E_m$

L'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement dans $\Re$ si la particule est soumise à un champ de forces conservatives.

C'est <u>une intégrale première du mouvement</u> car elle ne fait intervenir que des dérivées premières des coordonnées de position par rapport au temps.

Lors du mouvement il peut y avoir transformation d'énergie potentielle en énergie cinétique ou inversement mais la somme reste constante.

<u>III.3. Cas où une des forces n'est pas conservative.</u>

On a $\vec{F} = \vec{F_c} + \overrightarrow{F_{nc}}$ avec $\vec{F_c}$dérivant d'une énergie potentielle et $\overrightarrow{F_{nc}}$ non conservative.

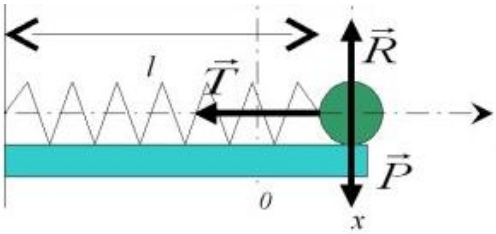
Le théorème de l'énergie cinétique donne $dE_c = \delta W_c + \delta W_{nc} = -dE_p + \delta W_{nc}$

$d(\,E_c + E_p\,) = \delta W_{nc}$

La variation de l'énergie totale est égale au travail reçu par la particule de la part des forces non conservatives : $dE = \delta W_{nc}$

Si $W_{nc} < 0$ la force non conservative est dite dissipative. La particule voit son énergie mécanique diminuer au cours du temps.

III.4. Exemple le ressort horizontal

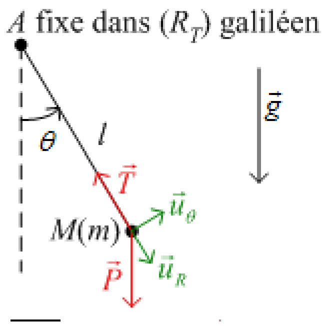


Référentiel : $\mathfrak{R}$ Galiléen.
Système : M(m)
Force : Le poids : $\vec{p}=m\vec{g}$
La réaction $\vec{R}$
La tension élastique $\vec{T}= -kx\vec{e_x}$

Etude énergétique :
→ Energie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$
→ Energie potentielle : $E_p = mgz + \frac{1}{2}kx^2 + Cst$
→ Energie mécanique : $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgz + \frac{1}{2}kx^2 + Cst$
La particule n'est soumise qu'à des forces conservatives son énergie mécanique est constante.
Comme de plus l'altitude de la particule ne change pas on peut écrire :
$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + A = cst$
Ainsi en dérivant par rapport au temps :
$\frac{dE_m}{dt} = m\dot{x}\ddot{x}+kx\dot{x}=0$
Comme la particule est en mouvement $\dot{x}\neq 0$
On retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique : $m\ddot{x}+kx=0$

III.5. Exemple le pendule simple

Référentiel : $\mathfrak{R}$ Galiléen.
Système : M(m)
Forces : Le poids : $\vec{p}=m\vec{g}$
La tension du fil $\vec{T}$
Etude énergétique :
→ Energie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$
→ Energie potentielle : $E_p = mgz + Cst = mgl(1-\cos\theta)$ si on choisit l'origine des potentiel en $\theta = 0$
→ La tension du fil est perpendiculaire au mouvement elle ne travaille pas.
→ Energie mécanique : $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1-\cos\theta)$
La particule n'est soumise qu'à des forces conservatives son énergie mécanique est constante.
Comme de plus l'altitude de la particule ne change pas on peut écrire :
$E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1-\cos\theta) = cst$
Ainsi en dérivant par rapport au temps :
$\frac{dE_m}{dt} = ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+lmg\dot{\theta}\sin\theta=0$
Comme la particule est en mouvement $\dot{\theta}\neq 0$
On obtient l'équation du mouvement : $l\ddot{\theta}+ g\sin\theta=0$



IV. Condition de stabilité.

IV.1. Problème unidimensionnel.

- Référentiel : $\mathfrak{R}$
- Système : M(m)
- Forces : conservative unique : $F_x \Rightarrow dE_p = -F_x\, dx \Rightarrow \frac{dE_p}{dx} = -F_x$
- Equilibre $F_x = 0 \Rightarrow \frac{dE_p}{dx} = 0$ extremum d'énergie potentielle.

$\rightarrow$ L'équilibre est stable si $dx > 0 \Rightarrow dF_x < 0$, c'est-à-dire la force qui apparait quand on déplace la particule a tendance à la ramener à sa position d'équilibre $\Rightarrow -\frac{dF_x}{dx} = \frac{d^2E_p}{dx^2} > 0$

Un minimum d'énergie potentielle correspond à un équilibre stable : $\frac{dE_p}{dx} = 0$ et $\frac{d^2E_p}{dx^2} > 0$

$\rightarrow$ L'équilibre est instable si $dx > 0 \Rightarrow dF_x > 0$, c'est à dire la force qui apparait quand on déplace la particule a tendance à l'éloigner à sa position d'équilibre $\Rightarrow -\frac{dF_x}{dx} = \frac{d^2E_p}{dx^2} < 0$

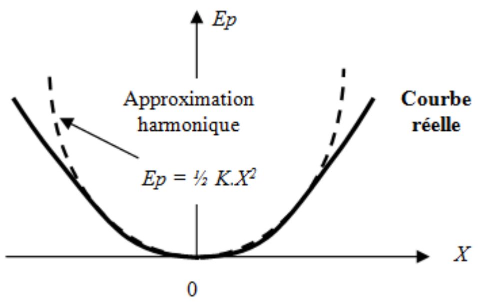
Un maximum d'énergie potentielle correspond à un équilibre instable : $\frac{dE_p}{dx} = 0$ et $\frac{d^2E_p}{dx^2} < 0$

IV.2. Mouvement au voisinage d'une position d'équilibre stable

Référentiel : $\mathfrak{R}$ galiléen.
Système : M (m) point matériel
Forces appliquées : un champ de forces dérivant d'une énergie potentielle $E_p(x)$.
Loi : Equilibre en $x = x_0$.

$E_p(x)$ extrémale $\Rightarrow \left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x=x_0} = 0$

$E_p(x)$ minimale, équilibre stable $\Rightarrow \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_0} = k > 0$



Développement limité de $E_p(x)$ au voisinage de $x = x_0$:

$$E_p(x) = E_p(0) + (x-x_0)\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x=x_0} + \frac{(x-x_0)^2}{2}\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_0} + \ldots$$

$$E_p(x) = E_p(x_0) + \frac{k}{2}(x-x_0)^2 + \ldots$$

Les études se limitent au voisinage immédiat de x_0, on peut se contenter des deux premiers termes du développement.

On a donc $E_p(x) = E_p(x_0) + \frac{k}{2}(x-x_0)^2 + \ldots$, on en déduit donc $\vec{F} = -\frac{dE_p}{dx}\vec{e_x} = -k(x-x_0)\,\vec{e_x}$

Loi : PFD : $m\ddot{x} = -k(x-x_0)$

Changement d'origine : on pose $X = x - x_0 \Rightarrow m\ddot{X} = -kX$

$$\Rightarrow \frac{d^2X}{dt^2} + \omega_0^2 X = 0 \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

V. Analyse du mouvement à l'aide du graphe d'énergie potentielle

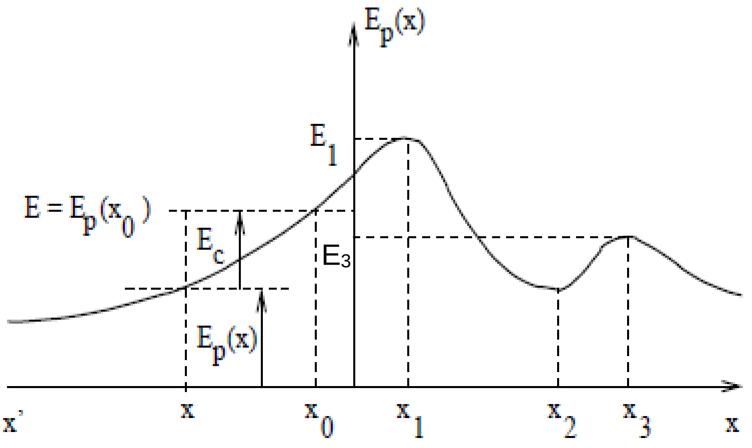
V.1. Analyse qualitative

L'étude qualitative se fonde sur l'étude du graphe représentant les variations de l'énergie potentielle *Ep*(*x*), et le fait que l'énergie cinétique est positive.

- Supposons par exemple que le point matériel *M* soit lâché sans vitesse initiale à partir d'un point d'abscisse $x_0 < x_1$, voir graphe ci-après.

L'énergie mécanique de *M* est

$$E_m = Ep(x_0) = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(x)$$



D'après le graphe représentant les variations de la fonction énergie potentielle Ep(x) en fonction de x, on voit que M ne peut acquérir de l'énergie cinétique que dans la région] $-\infty; x_0$], en effet

$$\frac{1}{2}mv^2 = Ep(x_0) - Ep(x) \geq 0$$

La région [$x_0;+\infty$ [est *interdite* au point matériel *M*.

Dans la région permise, on voit que la force $F(x) = -\frac{dE_p}{dx}$ qui est *l'opposée de la pente* de la courbe représentant l'énergie potentielle, est orientée suivant l'axe xx_0 et va pousser M vers des x de plus en plus inférieurs à x_0.

• Supposons maintenant que le point de lancement de M soit à une abscisse x_0 comprise entre x_1 et x_2 et que $Ep(x_0)$ soit inférieure à $E_3 = Ep(x_3)$ (voir la figure).

La région permise pour les mouvements ultérieurs de M sera alors définie par

$$Ep(x) \leq Ep(x_0) \leq Ep(x_3)$$

Dans cette région se trouve un minimum d'énergie potentielle en $x = x_2$. A partir de x_0, et ce jusqu'au point d'abscisse x_2, la force est orientée dans le sens x'x et va donc accélérer M dans ce sens. En $x = x_2$, la force s'annule. Le point matériel M ayant acquis une vitesse suffisante va dépasser cette position. Le signe de la force s'inverse à partir de là et cette dernière va ensuite décélérer M, jusqu'au point d'abscisse x'_0 la vitesse de *M* va s'annuler. En effet, on a alors $\frac{1}{2}mv^2 = Ep(x_0) - Ep(x'_0) = 0$

A ce moment, le mobile M est soumis à une force orientée en sens inverse de l'axe x'x. Sous l'effet de cette force, il va alors se diriger à nouveau vers le point d'abscisse $x = x_2$, repasser par ce point, et revenir en x = x0 où sa vitesse va encore s'annuler. On retrouve alors les conditions initiales et le mouvement de *M* se répète ainsi indéfiniment, en l'absence de frottement : *M* exécute un mouvement périodique entre x_0 et x'_0. On parle alors de puits de potentiel dans lequel le point matériel *M* se trouve confiné.

Par contre, si au point de départ l'énergie potentielle $Ep(x_0)$ est plus grande que E_3, le mobile *M* dépassera le point d'abscisse x_3 et, comme il est dit couramment, franchira la barrière *de p*otentiel que représente E_3. En effet, en x_3 on aura $\frac{1}{2}mv^2 = Ep(x_0) - E_0 \geq 0$, le mobile aura donc une énergie cinétique suffisante pour accéder à la région $x \geq x_3$. A partir de x_0 il est accéléré jusque x_2, puis décéléré jusque x_3. Si $Ep(x_0)$ est strictement supérieur à E_3, il dépasse la position x_3 où la force s'annule, puis est de nouveau accéléré vers les *x* de plus en plus grands. Si $Ep(x_0) = E_3$, *M* s'arrêtera en x_3.

V.2. En résumé

Référentiel: $\Re$ Galiléen

Système : Une masse m se déplaçant sur Ox

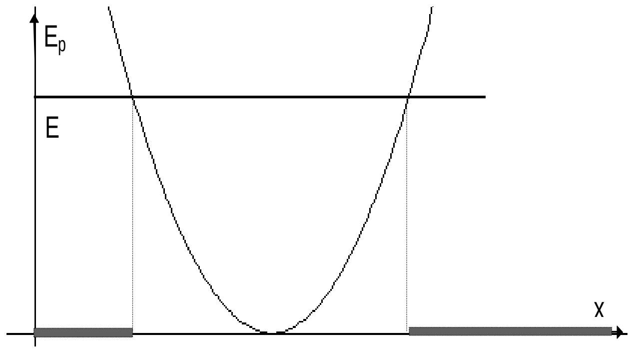
Forces : $\vec{F} = F\vec{e_x}$ force dérivant d'une énergie potentielle E_p

Loi : conservation de l'énergie totale : $E_c + E_p = E$

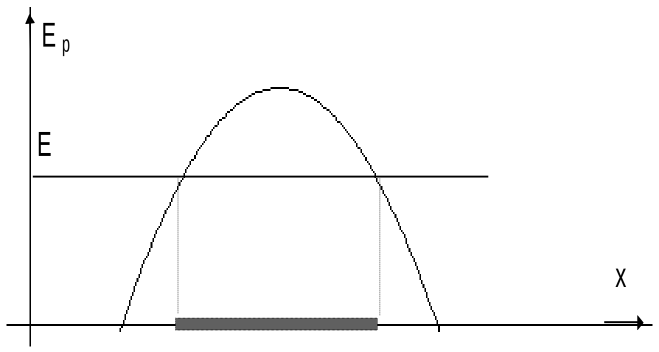
$$\Rightarrow \frac{m}{2}\dot{x}^2 + E_p(x) = E_m$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2 = \frac{2}{m}(E_m - E_p) \geq 0$$

Le mouvement ne peut donc avoir lieu que si l'énergie est supérieure à l'énergie potentielle.



PUITS DE POTENTIEL



BARRIERE DE POTENTIEL

VI. Les portraits de phases

VI.1. Rappels

• C'est la représentation dans le plan $(0,f(t),\frac{df(t)}{dt})$ lorsque t varie.

• On appelle point de phase un point P figuratif dont les coordonnées à un instant donné t sont $(f(t),\frac{df(t)}{dt})$

• Lorsque t varie, le point P décrit une courbe, cette courbe est appelé **trajectoire de phase**.

• On appelle portrait de phase l'ensemble des trajectoires de phase lorsque les conditions initiales varient.

En mécanique on se limite à un système à un degré de liberté, c'est-à-dire à un système dont l'évolution est décrite par un paramètre de position.

VI.2. Propriétés du portrait des phases

• Sens de parcours des trajectoires de phases

Les trajectoires de phases sont décrites de gauche à droite dans le demi-plan supérieur et de droite à gauche dans le demi-plan inférieur.

Demi-plan supérieur $\dot{x} = v > 0$ donc x est croissant et évolue donc de gauche à droite

Demi-plan inférieur $\dot{x} = v < 0$ donc x est décroissant et évolue donc de droite à gauche

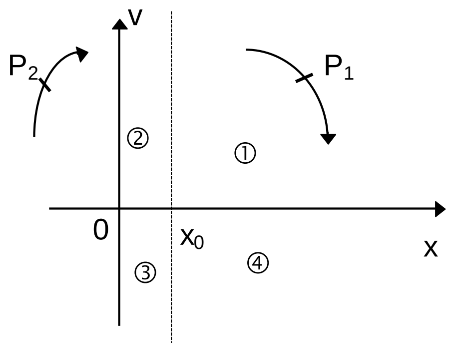
• Les mouvements cycliques ou périodiques ont des trajectoires de phase fermées décrites dans le sens horaire.

En effet à $t = T$ $x(t) = x(0)$ et $v(t) = v(0) \Rightarrow P(T) = P(0)$ et la trajectoire se répète.

• Deux trajectoires de phases d'un système libre ne peuvent pas se couper.

En effet si le point d'intersection correspond à des conditions initiales cela voudrait dire qu'un système peut évoluer de deux façons différentes, ce qui est contraire au principe du déterminisme mécanique.

• Le point de phase d'un point matériel soumis à un champ de forces attractif dirigé vers un point d'abscisse x_0 tourne dans le sens horaire autour du point A' (x_0, 0) dans le plan de phase.



<u>Référentiel</u> : $\Re$ galiléen

<u>Système</u> : M(m)

<u>Force</u> : Soit un champ de forces attractif dirigé vers un point d'abscisse $x_0 \Rightarrow F(x, v).(x - x_0) < 0$

$\rightarrow$ Dans le quadrant ①:

$x - x_0 > 0 \Rightarrow F(x, v) < 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} < 0$

$v > 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} > 0$

$\Rightarrow$ P tourne dans le sens horaire autour de A' (x_0, 0).

→ Dans le quadrant ②:

$x - x_0 < 0 \Rightarrow F(x, v) > 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} > 0$

$v > 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} > 0$

⇒ P tourne dans le sens horaire autour de A' (x_0, 0).

• La trajectoire de phase coupe orthogonalement l'axe des abscisses Ox

On a $\frac{dv}{dx} = \frac{dv/dt}{dx/dt} = \frac{\ddot{x}}{v} = \frac{F}{mv}$

Ainsi $\frac{dv}{dx}$ est infini puisque v = 0.

VI.3. Obtention du portrait de phases

Référentiel: $\Re$ Galiléen

Système : Une masse m se déplaçant sur Ox

Forces : $\vec{F} = F\vec{e_x}$ force dérivant d'une énergie potentielle E_p

Loi : conservation de l'énergie totale : $E_c + E_p = E$

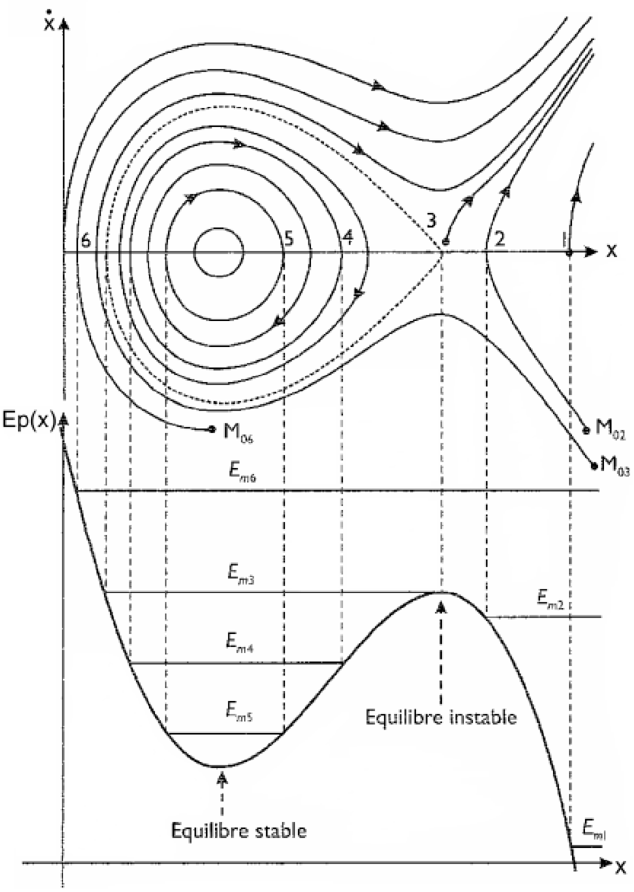
$$\Rightarrow \frac{m}{2}\dot{x}^2 + E_p(x) = E_m$$

On obtient l'équation du portrait de phase $\dot{x}^2 = \frac{2}{m}(E_m - E_p)$ qui admet deux solutions opposées :

$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E_m - E_{p(x)})}$ et $\dot{x} = -\sqrt{\frac{2}{m}(E_m - E_{p(x)})}$

Ainsi lorsque le système est conservatif, les trajectoires de phase sont des trajectoires isoénergétiques.

• Exemple



• Pour une énergie de type E_{m4} ou E_{m5} : la trajectoire de phase est une courbe fermée : ellipse entourant le point d'équilibre stable. C'est un état lié

• Pour une énergie de type E_{m6} : le mobile est libre de sortir du puits de potentiel, c'est un état de diffusion.

• Pour une énergie E_{m3} : la trajectoire de phase est appelée séparatrice on passe par un état d'équilibre instable. Lorsque la particule se présente en ce point, sa vitesse est nulle et elle peut basculer dans le puits ou partir en état de diffusion.

VI.4. Exemple le pendule simple

(pendulo)
Référentiel : $\Re$
Système : M(m)
Forces : Le poids : $\vec{p}=m\vec{g}$
La tension du fil $\vec{T}$

Energie mécanique : $E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1-\cos\theta)$

$\Rightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2\,(1-\cos\theta) = \frac{2E_m}{mgl}$

On se place dans le plan (θ, $y = \omega / \omega_0$).

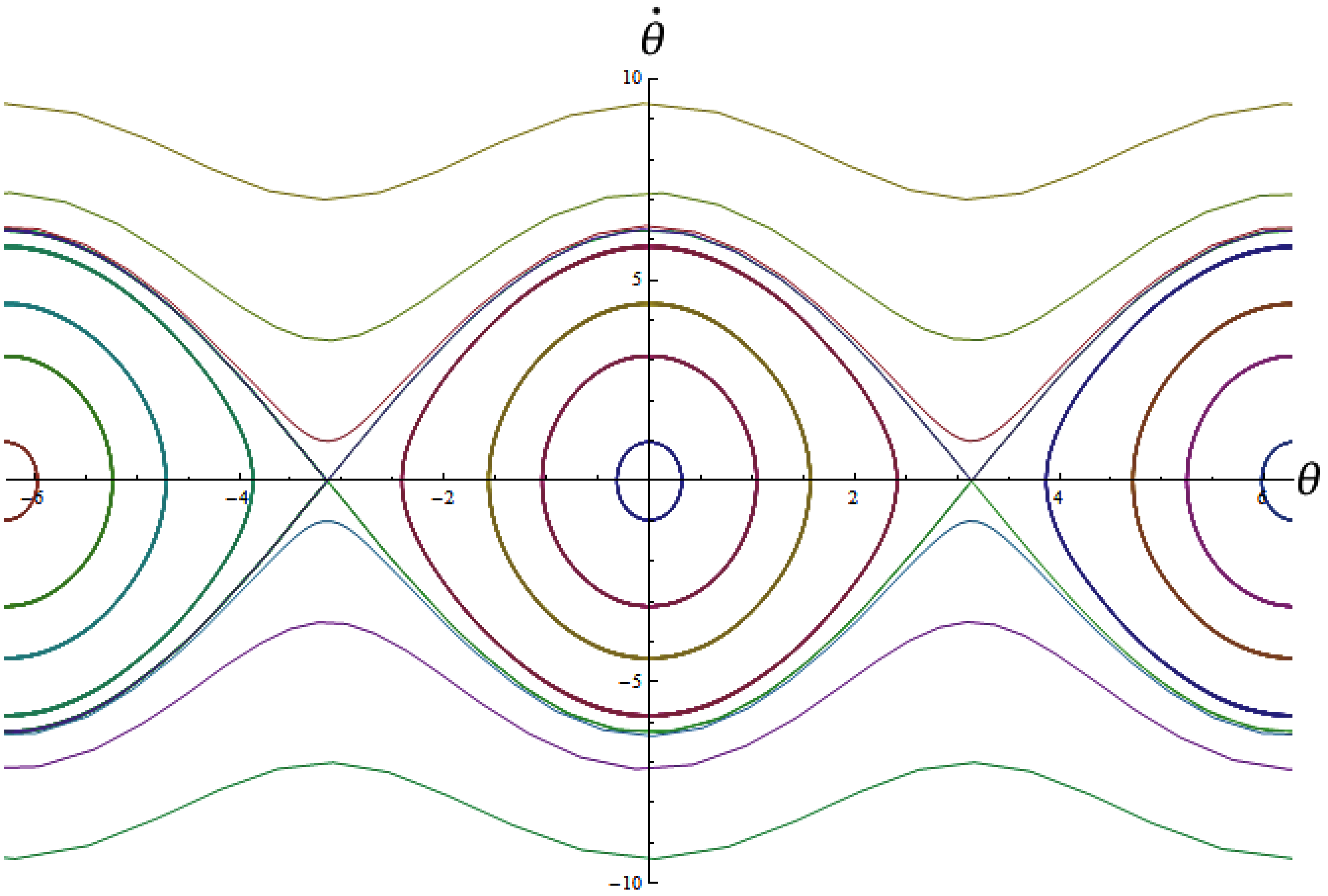
→ Si les oscillations sont petites : $\Rightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2\,(1-(1-\theta^2/2)) = \frac{2E_m}{mgl}$

d'où $y^2 + \theta^2 = \frac{2E_m}{mgl}$

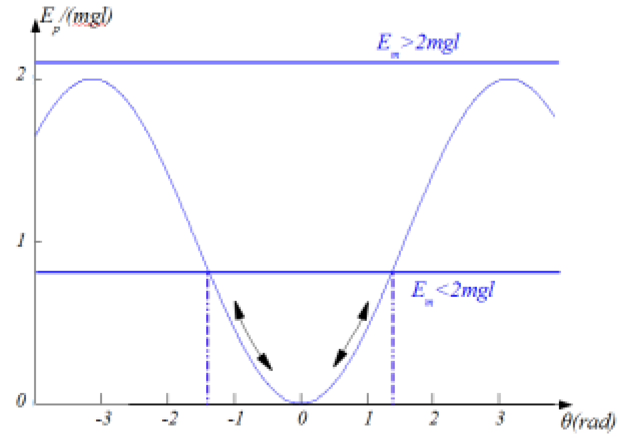
On obtient alors un cercle de centre O et de rayon $\frac{2E_m}{mgl}$ déterminé par les conditions initiales.

→ Si les oscillations sont plus grandes : Plus l'amplitude initiale augmente et plus on s'éloigne de l'oscillateur harmonique. La courbe n'est plus un cercle mais elle reste fermée.

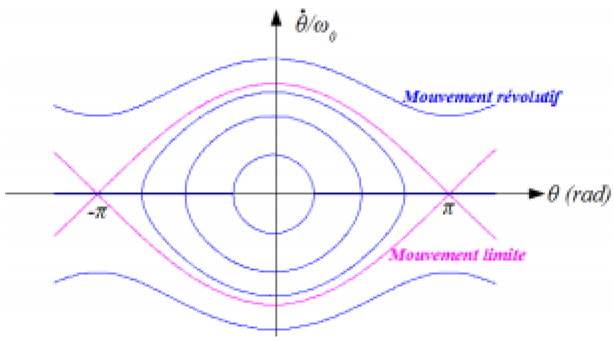
→ Cas du mouvement permanent : la vitesse angulaire ne s'annule jamais, le point tourne autour de l'axe.



L'énergie potentielle d'un pendule simple $Ep(\theta)$ a l'allure suivante :



ce qui permet d'obtenir le portrait de phase d'un pendule (frottements négligés)



M4 APPROCHE ENERGETIQUE DU MOUVEMENT D'UN POINT MATERIEL