

## Devoir surveillé n° 10

### – Version 1 –

Durée : 4 heures, calculatrices et documents interdits

## I. Un exercice vu en TD.

Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  anti-symétrique. Calculer  $\det(A)$ . Ce résultat vaut-il encore pour  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  ?

## II. Une famille de polynômes orthogonaux.

Dans tout le problème,  $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.  
On identifiera un polynôme à la fonction polynomiale qui lui est associée.

### Partie I.

On note  $\text{Id}$  l'endomorphisme identité sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Soit  $\varphi$  l'application qui, à  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , associe

$$\varphi(P) = \left[ (X^2 - 1)P \right]'' = (X^2 - 1)P'' + 4XP' + 2P.$$

- 1)
  - a) Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
  - b) Former la matrice représentant  $\varphi$  dans la base canonique  $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- 2)
  - a) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Montrer l'équivalence entre les trois propositions suivantes.
    - i) L'équation  $\varphi(P) = \lambda P$  possède un polynôme unitaire pour solution.
    - ii)  $\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{Id}) \neq \{0\}$ .
    - iii)  $\det(\varphi - \lambda \text{Id}) = 0$ .
  - b) Soit  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Justifier que l'équation  $\varphi(P) = (k+1)(k+2)P$  possède un polynôme unitaire pour solution, que celui-ci est unique et qu'il est de degré  $k$ .

Dans toute la suite du sujet, ce polynôme sera noté  $P_k$ .

- c) Justifier que la famille  $(P_0, \dots, P_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- 3)
  - a) Déterminer  $P_0$  et  $P_1$ .
  - b) Si  $2 \leq k \leq n$ , déterminer les coefficients de  $X^{k-1}$  et de  $X^{k-2}$  dans  $P_k$ .

## Partie II.

On note  $E$  l'ensemble des fonctions réelles définies et continues sur le segment  $[-1, 1]$ .  
Si  $f, g \in E$ , on pose :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)(1-t^2) dt.$$

Enfin, si  $f \in E$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , on définit :

$$\varphi(f) : x \mapsto \frac{d^2}{dx^2} [(x^2 - 1)f(x)] = (x^2 - 1)f''(x) + 4xf'(x) + 2f(x).$$

- 4) a) Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ .  
b) Montrer que  $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \langle XP, Q \rangle = \langle P, XQ \rangle$ .
- 5) a) Soit  $f, g \in E$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Montrer que  $\langle \varphi(f), g \rangle = \langle f, \varphi(g) \rangle$ .  
b) Montrer que la suite  $(P_0, \dots, P_n)$  définie dans la première partie vérifie la propriété suivante :

$$\forall k, \ell \in \{0, \dots, n\}, k \neq \ell \Rightarrow \langle P_k, P_\ell \rangle = 0.$$

- c) Soit  $k \in \{0, \dots, n\}$  et  $Q \in \mathbb{R}[X]$ . Montrer que si  $\deg(Q) < k$ , alors  $\langle P_k, Q \rangle = 0$ .
- 6) Soit  $k \in \{2, \dots, n\}$ .
  - a) Montrer que le polynôme  $P_k - XP_{k-1}$  est de degré au plus  $k-1$  et qu'il est orthogonal à tout polynôme de degré inférieur ou égal à  $k-3$ .
  - b) En déduire que le polynôme  $P_k - XP_{k-1}$  est combinaison linéaire de  $P_{k-1}$  et de  $P_{k-2}$ .
  - c) En utilisant le résultat obtenu à la question 3)b), montrer que

$$P_k = XP_{k-1} - \frac{(k-1)(k+1)}{(2k-1)(2k+1)} P_{k-2}.$$

- d) Déterminer  $P_2$  et  $P_3$ .
- 7) Soit  $k \in \{0, \dots, n\}$ .
  - a) Montrer que  $\langle P_k, P_k \rangle = \langle P_k, X^k \rangle$ .
  - b) En calculant de deux manières différentes  $\langle \varphi(P_k), X^{k+2} \rangle$ , exprimer  $\langle P_k, X^{k+2} \rangle$  en fonction de  $\langle P_k, P_k \rangle$ .
  - c) Déterminer une relation permettant pour calculer, pour tout  $k \geq 2$ ,  $\langle P_k, P_k \rangle$  en fonction de  $\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle$  et de  $\langle P_{k-2}, P_{k-2} \rangle$ .

### III. L'exponentielle comme somme de série.

On pose, pour  $t \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$  :

$$R_n(t) = e^t - \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}.$$

- 1) a) Montrer que  $R_n$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle

$$y'(t) - y(t) = \frac{t^n}{n!} \quad (\mathcal{E})$$

- b) Donner la solution générale de l'équation sans second membre ( $\mathcal{E}_0$ ) associée à ( $\mathcal{E}$ ).  
c) Résoudre ( $\mathcal{E}$ ) (on exprimera les solutions à l'aide d'une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer, sans utiliser la question 1)a)).  
d) En déduire une expression de  $R_n(t)$  pour tout réel  $t$  et tout entier naturel  $n$  à l'aide d'une intégrale.  
e) Montrer que, pour tout réel positif  $t$  :

$$|R_n(t)| \leq \frac{t^{n+1}e^t}{(n+1)!}.$$

- f) Pour tout réel  $t$  négatif, montrer que  $R_n(t) = -e^t \int_0^{-t} \frac{(-v)^n}{n!} e^v dv$  et en déduire que  $|R_n(t)| \leq \frac{|t|^{n+1}e^{|t|}}{(n+1)!}$ .

- g) En déduire que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $e^t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}$ .

- 2) On considère les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n!}$$

- a) Montrer que les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont strictement monotones, et donner leur sens de variation.  
b) Montrer que les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont adjacentes.  
c) En déduire que, pour tout entier naturel non nul  $q$  :

$$u_q < e < v_q.$$

- d) On cherche à montrer que  $e$  est irrationnel. A cet effet, on suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls  $p$  et  $q$ , premiers entre eux, tels que :

$$e = \frac{p}{q}.$$

En multipliant la double inégalité précédente par  $q!$ , montrer que c'est impossible, et conclure sur l'irrationalité de  $e$ .

— FIN —

## Devoir surveillé n° 10

### – Version 2 –

Durée : 4 heures, calculatrices et documents interdits

## Diverses démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre

Le théorème de d'Alembert-Gauss appelé aussi théorème fondamental de l'algèbre affirme que « *tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine complexe* ».

L'objectif de ce problème est d'établir ce résultat fondamental par des méthodes analytiques et une méthode faisant appel à des techniques d'algèbre linéaire.

Les deux parties du problème sont indépendantes.

### PREMIÈRE PARTIE : MÉTHODES ANALYTIQUES

#### A. Résultats préliminaires

Soit  $P$  un polynôme à coefficients complexes s'écrivant  $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$  avec  $d \geq 1$  et  $a_d \neq 0$ .

- 1) Montrer qu'il existe  $R > 0$  tels que, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$|z| \geq R \implies \frac{1}{2}|a_d||z|^d \leq |P(z)| \leq 2|a_d||z|^d.$$

- 2) a) Pour  $R > 0$ , on appelle *pavé carré fermé centré en 0 de demi-côté  $R$*  l'ensemble des  $z \in \mathbb{C}$  vérifiant  $|\operatorname{Re}(z)| \leq R$  et  $|\operatorname{Im}(z)| \leq R$ . On notera cet ensemble  $C_R$ . Justifier soigneusement que pour tout  $R > 0$ , l'application  $z \mapsto |P(z)|$  est bornée sur  $C_R$  et y atteint sa borne inférieure.
- b) Montrer alors que l'application  $z \mapsto |P(z)|$  est minorée sur  $\mathbb{C}$  et atteint sa borne inférieure. On pourra appliquer la question précédente sur un carré fermé bien choisi.

#### B. Première méthode analytique

- 1) Soient  $b$  un complexe non nul et  $Q$  un polynôme à coefficients complexes tel que  $Q(0) = 0$ ; on pose  $Q_1 = 1 + bX^k + X^kQ$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ . Soit enfin  $\alpha$  une racine  $k$ -ième de  $-\frac{1}{b}$ .
- a) Montrer qu'il existe  $t_0 \in ]0, 1[$  tel que  $|\alpha^k Q(\alpha t_0)| \leq \frac{1}{2}$ .
- b) Un tel  $t_0$  étant choisi; montrer que  $|Q_1(\alpha t_0)| < 1$ .

- 2) **Inégalité d'Argand** : Soient  $P$  un polynôme *non constant* à coefficients complexes, et  $\gamma$  un nombre complexe tel que  $P(\gamma) \neq 0$ . Montrer qu'il existe  $\delta$ , complexe tel que  $|P(\delta)| < |P(\gamma)|$ . On pourra considérer le polynôme  $Q_1$  tel que  $Q_1(z) = \frac{P(\gamma+z)}{P(\gamma)}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .
- 3) **Application** : Soit  $P$  un polynôme *non constant* à coefficients complexes ; on note  $z_0$  un complexe où l'application  $z \mapsto |P(z)|$  atteint sa valeur minimale. Montrer que  $z_0$  est un zéro du polynôme  $P$ .

## C. Deuxième méthode analytique

Malheureusement, cette méthode est pour l'instant hors-programme : rendez-vous après avoir vu les fonctions de deux variables.

## DEUXIÈME PARTIE : MÉTHODE ALGÈBRIQUE

Dans toute cette partie,  $\mathbb{K}$  désigne le corps des réels ou celui des complexes ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) et  $n$  un entier naturel non nul. On note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  l'algèbre des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  ; la matrice identité se notera  $I_n$ .

Pour tout  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ , on note  $\text{Id}_E$  l'application identité. On appelle sous-espace vectoriel strict de  $E$  tout sous-espace vectoriel distinct de  $E$  et non réduit au vecteur nul. Pour tout endomorphisme  $u$  de  $E$ , on appelle valeur propre de  $u$  tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $u - \lambda \text{Id}_E$  ne soit pas injectif. On appelle alors vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$  tout  $x \neq 0$  vérifiant  $u(x) = \lambda x$ .

Pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  ${}^tA$  désigne la matrice transposée de  $A$ ,  $\text{tr}(A)$  sa trace. Le polynôme caractéristique de  $A$ , noté  $\chi_A$  est l'élément de  $\mathbb{K}[X]$  vérifiant  $\forall x \in \mathbb{K} \quad \chi_A(x) = \det(A - xI_n)$ . On appelle valeur propre de  $A$  tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $A - \lambda I_n$  ne soit pas inversible.

Si  $A = (a_{k,\ell}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on appelle matrice conjuguée de  $A$  et on note  $\overline{A}$ , la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  dont le coefficient de la  $k$ -ième ligne et la  $\ell$ -ième colonne est égal au conjugué  $\overline{a_{k,\ell}}$  du complexe  $a_{k,\ell}$ , pour tout couple  $(k, \ell)$  d'éléments de  $\{1, \dots, n\}$ .

Pour tout couple  $(k, \ell)$  d'éléments de  $\{1, \dots, n\}$ , on note  $E_{k,\ell}$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la  $k$ -ième ligne et la  $\ell$ -ième colonne valant 1 ; on rappelle que la famille  $(E_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n}$  est une base de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , dite base canonique.

On rappelle ici que l'objectif de cette partie aussi est d'établir le théorème fondamental de l'algèbre et il ne sera donc pas possible de l'utiliser ; on a tout de même le résultat élémentaire selon lequel « *tout polynôme du second degré à coefficients complexes se factorise sur  $\mathbb{C}$*  ».

## A. Premiers résultats

- 1) a) Montrer que tout polynôme à coefficient réels de degré impair possède au moins une racine réelle.
- b) En déduire que tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension impaire possède au moins une valeur propre.

- c) **Application** : Existe-t-il une matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 + A + I_3 = 0$  ?
- 2) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$ , et soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes de  $E$  qui **commutent** (on dira aussi que  $u$  et  $v$  sont commutables).
- a) Montrer que pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ , les sous-espaces vectoriels  $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$  et  $\text{Im}(u - \lambda \text{Id}_E)$  sont stables par  $u$  et  $v$ .
- b) Montrer que si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et  $n$  impair et distinct de 1 alors  $E$  possède au moins un sous-espace vectoriel strict de dimension impaire, et stable par les endomorphismes  $u$  et  $v$ .
- 3) Montrer par récurrence sur la dimension que deux endomorphismes *commutables* d'un espace vectoriel *réel* de dimension *impaire* possèdent au moins un vecteur propre commun.

## B. Endomorphismes d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension impaire

On note  $i$  un complexe tel que  $i^2 = -1$  et  $\mathcal{F}$  le sous-ensemble de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  défini par

$$\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) ; {}^t M = \overline{M}\}.$$

On suppose de plus que  $n$  est **impair**.

- 1) Montrer que  $\mathcal{F}$  est un espace vectoriel réel.
- 2) Vérifier que la famille constituée des éléments  $E_{1,1}, \dots, E_{n,n}, E_{k,\ell} + E_{\ell,k}, i(E_{k,\ell} - E_{\ell,k})$  avec  $(k, \ell) \in \{1, \dots, n\}^2$  et  $k < \ell$ , est une base de  $\mathcal{F}$  ; quelle est alors la dimension de  $\mathcal{F}$  ? quelle est sa parité ?
- 3) Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  ; on considère les deux applications  $u$  et  $v$  définies sur  $\mathcal{F}$  par

$$u(M) = \frac{1}{2}(AM + M {}^t \overline{A}), \quad v(M) = \frac{1}{2i}(AM - M {}^t \overline{A}).$$

- a) Montrer que  $u$  et  $v$  sont des endomorphismes de  $\mathcal{F}$ .
- b) Vérifier que  $u$  et  $v$  commutent puis justifier qu'ils possèdent au moins un vecteur propre commun.
- c) On note  $M_0 \in \mathcal{F}$  un vecteur propre commun aux endomorphismes  $u$  et  $v$  et on suppose que  $u(M_0) = \lambda M_0$  et que  $v(M_0) = \mu M_0$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .  
Exprimer la matrice  $AM_0$  en fonction de la matrice  $M_0$  et montrer soigneusement que  $\lambda + i\mu$  est une valeur propre de la matrice  $A$ .
- 4) a) Justifier que tout endomorphisme d'un espace vectoriel complexe de dimension impaire possède au moins une valeur propre.
- b) Montrer par récurrence sur la dimension que deux endomorphismes *commutables* d'un espace vectoriel complexe de dimension *impaire* possèdent au moins un vecteur propre commun.

## C. Étude du cas général

On sait que tout entier naturel non nul  $n$  s'écrit de manière unique sous la forme  $n = 2^k p$  où  $k \in \mathbb{N}$  et  $p$  est un entier naturel impair.

On considère la propriété  $\mathcal{P}_k$  suivante :

*Pour tout entier naturel impair  $p$ , et tout espace vectoriel complexe  $E$  de dimension  $2^k p$  :*

- (i) *tout endomorphisme de  $E$  possède au moins une valeur propre ;*
- (ii) *deux endomorphismes commutables de  $E$  possèdent au moins un vecteur propre commun.*

On se propose de montrer cette propriété par récurrence sur l'entier naturel  $k$ .

La propriété  $\mathcal{P}_0$  vient d'être établie dans la section précédente. Soit donc  $k \in \mathbb{N}^*$  et supposons la propriété  $\mathcal{P}_\ell$  vraie pour tout entier naturel  $\ell < k$  ; soit  $p$  un entier naturel impair et  $E$  un espace vectoriel complexe de dimension  $2^k p$ .

### C.I. Étude de l'assertion (i) de $\mathcal{P}_k$

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  ; on note  $A$  la matrice de  $f$  dans une base quelconque de  $E$  et on considère le sous-espace vectoriel , noté  $\mathcal{G}$ , de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  défini par

$$\mathcal{G} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) ; {}^t M = -M \}.$$

- 1) Préciser la dimension du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{G}$ .
- 2) On considère les deux applications  $u$  et  $v$  définies sur  $\mathcal{G}$  par

$$u(M) = (AM + M {}^t A), \quad v(M) = AM {}^t A.$$

- a) Vérifier que  $u$  et  $v$  sont des endomorphismes de  $\mathcal{G}$  et que  $u$  et  $v$  commutent.
- b) Justifier soigneusement que les endomorphismes  $u$  et  $v$  possèdent au moins un vecteur propre commun.
- c) On note  $N_0 \in \mathcal{G}$  un vecteur propre commun aux endomorphismes  $u$  et  $v$  et on suppose que  $u(N_0) = \lambda N_0$  et que  $v(N_0) = \mu N_0$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ .
  - i) Vérifier que  $(A^2 - \lambda A + \mu I_n)N_0 = 0$ .

Dans la suite, on notera  $W$  un vecteur colonne non nul de la matrice  $N_0$  et on désignera par  $\alpha$  et  $\beta$  les racines complexes du polynôme du second degré  $X^2 - \lambda X + \mu$ .

- ii) Vérifier que  $(A - \alpha I_n)(A - \beta I_n)W = 0$

- iii) Justifier alors que  $\alpha$  ou  $\beta$  est valeur propre de  $A$  et conclure .

### C.II. Étude de l'assertion (ii) de $\mathcal{P}_k$

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes commutables de  $E$  ; on cherche à montrer que  $f$  et  $g$  ont au moins un vecteur propre commun.

- 1) Si  $f$  est une homothétie de  $E$ , justifier que  $f$  et  $g$  ont au moins un vecteur propre commun.

- 2) Si  $f$  n'est pas une homothétie de  $E$ , soit  $\lambda$  une valeur propre de  $f$ . On sait que les sous-espaces vectoriels  $F_1 = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$  et  $F_2 = \text{Im}(f - \lambda \text{Id}_E)$  sont stables par  $f$  et  $g$ .
- a) Si la dimension de l'un des sous-espaces vectoriels  $F_1$  ou  $F_2$  s'écrit  $2^\ell q$  avec  $\ell < k$  et  $q$  impair, comment peut-on conclure ?
  - b) Sinon, justifier que l'un de ces deux sous-espaces vectoriels est de dimension  $2^k q$  où  $q$  est impair et l'autre de dimension  $2^k r$  avec  $r$  pair.
  - c) Justifier alors que  $q < p$  et indiquer comment on pourrait montrer que les endomorphismes  $f$  et  $g$  ont au moins un vecteur propre commun.

### D. Retour au théorème fondamental de l'algèbre

Soit  $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$  un polynôme unitaire de degré  $n$  à coefficients complexes ; on note  $f$  l'endomorphisme du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}^n$  canoniquement associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

- 1) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice  $A$ .
- 2) Justifier alors que le polynôme  $P$  possède au moins une racine complexe.
- 3) Montrer le théorème fondamental de l'algèbre.

FIN DE L'ÉPREUVE

— FIN —