# Applications linéaires - exercices supplémentaires

**Exercice 1 ( )** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel, $f$ et $g$ des endomorphismes de $E$. Montrer que si $f \circ g = g \circ f$, alors $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par $g$.

**Exercice 2 ( )** Soit $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\varphi : f \mapsto \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme. Est-il injectif ? surjectif ?

**Exercice 3 ( )** Montrer que $\{(-1,1,1), (1,-1,1), (1,1,-1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées du vecteur $(8,4,2)$ dans cette base.

**Exercice 4 ( )** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-ev et $\varphi$ et $\psi$ deux formes linéaires sur $E$ non nulles. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\varphi(x).\psi(x) \neq 0$.

**Exercice 5 ( )** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-ev et $p$ un projecteur de $E$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. $(\mathrm{Id} + \lambda p)$ est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.

**Exercice 6 ( )** Soit $E = \mathscr{C}^\infty([-1,1], \mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\varphi_n$ la forme linéaire sur $E$ qui à $f$ associe $f^{(n)}(0)$. La famille des $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle libre ?