Devoir à la maison n° 19

À rendre le 14 mai

Pour ce DM, vous rendrez, parmi les trois premiers exercices, un exercice (au choix) si vous le rendez seul, deux exercices (au choix) si vous le rendez en binôme, trois exercices (au choix !) si vous le rendez en trinôme.

Le quatrième exercice est facultatif et pourra être rendu séparément.

I. Premier exercice, élémentaire

Soit n un entier naturel non nul. On considère une urne contenant n boules, numérotées de 1 à n. On effectue, dans cette urne, un premier tirage, et l'on note X_1 la variable aléatoire correspondant au numéro ainsi tiré. On procède ensuite comme ceci : on remet la boule tirée dans l'urne, et l'on y rajoute X_1 nouvelles boules, portant toutes le même numéro X_1. On effectue ensuite un second tirage dans cette urne, et l'on note X_2 la variable aléatoire correspondant au numéro ainsi tiré.

1) Déterminer la loi de X_1, ainsi que son espérance et sa variance.

2) Déterminer la loi de X_2.

3) Montrer que l'espérance de X_2 vaut $\mathbb{E}(X_2) = \dfrac{1-n}{2} + \dfrac{3n+1}{2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

4) Déterminer un équivalent de $\mathbb{E}(X_2)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

II. Deuxième exercice, élémentaire

On lance une pièce équilibrée n fois et on compte le nombre de piles.
Donnez un n tel que la probabilité d'avoir entre 49% et 51% de piles soit supérieure à 99% ?

III. Troisième exercice, légèrement astucieux

Soit X une variable aléatoire réelle prenant un nombre fini de valeurs et f une fonction réelle croissante. Est-ce que $\mathrm{Cov}(X, f(X)) \geqslant 0$?

IV. Exercice facultatif, difficile et à la limite du programme

Quelle est la probabilité que les m élèves d'une même classe aient tous des anniversaires différents ? Pour répondre à cette question, on considère le modèle suivant : les dates de naissance des élèves sont des réalisations de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, suivant une loi P à valeurs dans l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ avec $n = 365$ (on ignore les années bissextiles). Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $p_i = P(\{i\})$ et on note $\pi(p_1, \ldots, p_n)$ la probabilité recherchée.

1) Montrer que $\pi(p_1, \ldots, p_n) = m! \displaystyle\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant n} p_{i_1} \cdots p_{i_m}$.

2) Établir la majoration : $\pi\left(\dfrac{1}{n}, \ldots, \dfrac{1}{n}\right) \leqslant \exp\left(-\dfrac{m(m-1)}{2n}\right)$.

3) Prouver que $\pi(p_1, \ldots, p_n) \leqslant \pi\left(\dfrac{p_1 + p_2}{2}, \dfrac{p_1 + p_2}{2}, p_3, \ldots, p_n\right)$.

4) En déduire pour quelle loi P la probabilité $\pi(p_1, \ldots, p_n)$ est maximale.

— **FIN** —