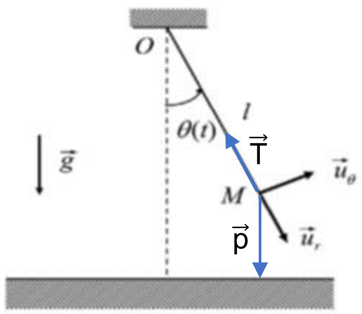
Problème 1 (D'après CCP PC 2013)

<u>Référentiel</u> : $\Re_T$ Galiléen
<u>Système</u> : M(m)
<u>Forces</u> : Le poids $\vec{p}=m\vec{g}$
La tension du fil $\vec{T}$
<u>Schéma</u> :



1. <u>Equation différentiel du mouvement</u>

1.1.1. <u>Loi : principe fondamental de la dynamique</u> : $m\vec{a}= \vec{p}+\vec{T}$

<u>Projections</u> :

sur $\overrightarrow{u_r}$ $\quad -m\ell\dot{\theta}^2 = -T + mg\cos\theta$

sur $\overrightarrow{u_\theta}$ $\quad m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$

sur $\overrightarrow{u_z}$ $\quad m\ddot{z} = 0$

L'équation du mouvement : $\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta}$

1.1.2. <u>Loi : théorème de l'énergie cinétique</u> : $\Delta E_c = W_F$

<u>La variation de l'énergie cinétique</u> : $\Delta E_c = \frac{1}{2}m\,\ell^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}m\,\ell^2\dot{\theta}_0^{\,2}$

<u>Le travail</u> : $W_{\vec{P}} = \int m\vec{g}.\vec{dl} = \int_{\theta_0}^{\theta} mg(\cos\theta\overrightarrow{u_r}-\sin\theta\overrightarrow{u_\theta}).\ell d\theta\overrightarrow{u_\theta}$

$W_{\vec{P}} = = mg\ell\,(\cos\theta-\cos\theta_0)$

$W_{\vec{T}} = \int \vec{T}.\vec{dl} = 0$

<u>Le théorème</u> : $\frac{1}{2}m\,\ell^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}m\,\ell^2\dot{\theta}_0^{\,2} = mg\ell\,(\cos\theta-\cos\theta_0)$

On dérive par rapport au temps : $m\,\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -\,mg\ell\,\sin\theta\dot{\theta}$

Or $\dot{\theta} \neq 0$ car il y a mouvement

D'où l'équation du mouvement : $\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta}$

1.1.3. <u>Loi : Théorème du moment cinétique</u> $\frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{O,F}}$

<u>Le moment cinétique</u> :

$\overrightarrow{L_0}= \overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v}$

$\overrightarrow{L_0}=\ell\overrightarrow{u_r}\wedge m\ell\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$

$\overrightarrow{L_0}= m\,\ell^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$

<u>La dérivée</u> : $\frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt} = m\,\ell^2\ddot{\theta}\overrightarrow{u_z}$

<u>Le moment des forces</u> :

$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O,\vec{T}}}= \overrightarrow{OM}\wedge\vec{T} = \vec{0}$

$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O,\vec{p}}}= \overrightarrow{OM}\wedge\vec{p} = \ell\overrightarrow{u_r}\wedge mg(\cos\theta\overrightarrow{u_r}-\sin\theta\overrightarrow{u_\theta})$

$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O,\vec{p}}}= -mg\ell\,\sin\theta\overrightarrow{u_z}$

<u>Le théorème</u> : $m\,\ell^2\ddot{\theta}\overrightarrow{u_z} = -mg\ell\,\sin\theta\overrightarrow{u_z}$

D'où l'équation du mouvement : $\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta}$

1.2. <u>Le mouvement est plan</u>

La projection de la seconde loi de Newton sur l'axe $\overrightarrow{u_z}$ donne un résultat nul, le mouvement se fait donc dans le plan $(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta})$

Ou encore le moment cinétique a une direction fixe : $\overrightarrow{u_z}$ le mouvement se fait donc dans le plan perpendiculaire à e vecteur.

2. <u>Condition pour un oscillateur harmonique</u>

L'équation d'un oscillateur harmonique est de la forme : $\ddot{\theta} = -\omega_0^2\theta$

Si **<u>l'angle θ reste très petit (θ<<1</u>**) alors $\sin\theta \approx \theta$

L'équation du mouvement de l'enfant devient: $\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\theta}$

On a alors la pulsation du mouvement $\boxed{\omega_0 = \sqrt{g/\ell}}$

<u>Application numérique</u>

$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{2,5/10} = 3,1s}$

<u>La vitesse maximale</u>

Solution générale de l'équation : $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

Conditions initiales : $\theta(0) = \theta_0 = A$

$\dot{\theta}(0) = 0 = B\omega_0$

Ainsi $\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)$

et $v = \ell\dot{\theta} = -\ell\,\omega_0\theta_0\sin(\omega_0 t)$

Ainsi $\boxed{v_{max} = \ell\,\omega_0\theta_0 = 2,5\text{x}\sqrt{10/2,5}\text{ x }30\pi/180 = 2,6\text{ m.s}^{-1}}$

---

3. <u>Expression de la vitesse angulaire</u>

On a établi au 1.1.2 : $\frac{1}{2}\ell\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\ell\dot{\theta}_0^2 = g(\cos\theta - \cos\theta_0)$

Soit $\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2 = \frac{2g}{\ell}(\cos\theta - \cos\theta_0)$

Dans le cas qui nous intéresse il n'y a pas de vitesse initiale, on a donc:

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}(\cos\theta - \cos\theta_0)}}$$

<u>La période</u>

La demi période correspond au temps nécessaire à l'enfant pour évoluer entre θ_0 et $-\theta_0$

Or d'après le résultat précédent : $dt = \sqrt{\frac{\ell}{2g}}\frac{d\theta}{\sqrt{(\cos\theta - \cos\theta_0)}}$

Ainsi $\boxed{T(\theta_0) = -2\sqrt{\frac{\ell}{2g}}\int_{\theta_0}^{-\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{(\cos\theta - \cos\theta_0)}}}$

Le signe moins est là car l'angle diminue.

<u>La courbe</u>

Pour de faible valeur de θ_0 on constate que la période ne dépend pas des conditions initiales comme pour l'oscillateur harmonique.

On retrouve $T_0 = 3,1$ s le résultat de la question 2.

Plus θ augmente plus la période est grande pour devenir infini pour le mouvement perpétuel.

4.1. <u>Dimension de C</u>

$[\mathcal{M}] = [C][\theta]T^{-1} = [R][F]$

Donc $[C] = T\,LMLT^{-2} \Leftrightarrow \boxed{[C] = ML^2T^{-1}}$

4.2. <u>Equation différentielle</u>

On reprend le théorème du moment cinétique établi au 1.1.3 il faut juste ajouter $-C\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$ aux moments des forces.

D'où l'équation du mouvement : $\boxed{m\,\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta - C\,\dot{\theta}}$

4.3. <u>Condition sur C</u>

Pour de petits angles l'équation s'écrit alors (avec $\sin\theta \approx \theta$) : $\ddot{\theta} + \frac{C}{m\ell^2}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$

D'où l'équation caractéristique : $r^2 + \frac{C}{m\ell^2}r + \frac{g}{\ell} = 0$

Le mouvement est oscillant si le discriminant de cette équation est négatif.

Soit $\Delta = \left(\frac{C}{m\ell^2}\right)^2 - 4\frac{g}{\ell} < 0$

Ainsi $\boxed{C < 2m\ell\sqrt{\ell g}}$

4.4. <u>Application numérique</u>

La solution générale de l'équation : $\theta(t) = A\exp(-\frac{C}{2m\ell^2}t)\cos(\Omega t + \varphi)$ avec $\Omega = \sqrt{-\Delta}/2$

Le décrément logarithmique : $\delta = \frac{1}{n} ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+nT)}\right) = \frac{1}{n} ln\left(\exp(\frac{C}{2m\ell^2} nT)\right) = \frac{C}{m\ell^2}\frac{T}{2}$

D'après le portrait de phase le régime est fortement oscillant donc l'hypothèse de l'énoncé $T \approx T_0$ est valable

On a donc $\boxed{\mathbf{C = \delta m\ell^2 2\frac{1}{T_0}}}$

Sur le portrait de phase on remarque que l'amplitude a été divisée par 3 au bout de 20 périodes.

On a donc $\delta = \frac{1}{20} ln3$

D'où $\boxed{\mathbf{C = \frac{1}{20} ln3 x20x2,5^2x2/3,1=4,4\ kg.m^2.s^{-1}}}$

Problème 2 (D'après centrale TSI 2012)

L'uranium

1. Définition

Les isotopes d'un même élément sont des noyaux ayant le même nombre de protons mais un nombre de neutrons différent.
Ils ont donc même numéro atomique mais un nombre de masse différent.
C'est le numéro atomique (qui correspond aussi au nombre d'électrons dans l'atome) qui confère les propriétés chimiques. Deux isotopes ont donc les mêmes propriétés chimiques.

---

2. Compositions des noyaux

$^{235}_{92}U$ $\boxed{\textbf{92 protons et 235-92 = 143 neutrons}}$

$^{238}_{92}U$ $\boxed{\textbf{92 protons et 238-92 = 146 neutrons}}$

---

3. Masse molaire

La masse molaire $M = m x N_a$

D'où $\boxed{m_{235} = M_{235}/N_a = 3{,}903\ 10^{-22}g}$

et $\boxed{m_{238} = M_{238}/N_a = 3{,}953\ 10^{-22}g}$

Généralités sur le mouvement

4. Expression de la force

Dans un champ électrique $\boxed{\overrightarrow{F_{el}} = q\vec{E}}$

Dans un champ magnétique $\boxed{\overrightarrow{F_{mag}} = q\vec{v}\wedge\vec{B}}$

F est en Newton , q en coulomb, v en mètre par seconde, B en Tesla et E en volt par mètre.

---

5. Ordre de grandeur

On peut obtenir dans champ électrique de l'ordre de 1000 V/m et des champs magnétiques entre 0,1T et 10T

---

6. Comparaison avec le poids

Pour un noyau d'uranium : le poids $p = mg \approx 10^{-25} \times 10 \approx 10^{-24}$ N
La force électrique $f_{el} = qE \approx 10^{-19} x\ 10^{3} \approx 10^{-16}$ N
La force magnétique $f_{mag} = qvB \approx 10^{-19} x 10^{6} x 10 \approx 10^{-12}$N
Les forces électriques et magnétiques sont très supérieures au poids qui pourra être négligé.

Accélération des ions

7. Signe de la différence de potentiel

Référentiel $\mathfrak{R}_{Labo}$ Galiléen
Système U^+
Force : $\overrightarrow{F_{el}} = e\vec{E}$
Loi Théorème de l'énergie cinétique $\Delta E_c = W = -\Delta E_p$
Or par définition de la différence de potentiel $\Delta E_p = e(V_{G2} - V_{G1})$
Pour que les noyaux soient accélérés il faut que l'énergie cinétique augmente donc que **$V_{G1} - V_{G2}$ soit positif.**

---

8. Vitesses en O_2

D'après les résultats de la question précédente :

$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = eU$

Ainsi $\boxed{v_i = \sqrt{\frac{2eU}{m_i}}}$

avec i = 235 ou 238

---

9. Le potentiel entre les grilles

On a donc $\boxed{U = E_c(O_2) / e = 15{,}0\ kV}$

Les vitesses

$\mathbf{v_{235} = \sqrt{\dfrac{2x1,602\ 10^{-19}x15\ 10^{3}}{3,903\ 10^{-25}}} = 1,110\ 10^{5}\ m.s^{-1}}$

$\mathbf{v_{238} = 1,103\ 10^{5}\ m.s^{-1}}$

Déviation des ions

10. Mouvement uniforme

Référentiel $\Re_{Labo}$ Galiléen

Système U^+

Force : $\overrightarrow{F_{mag}} = e\vec{v}\wedge\vec{B}$

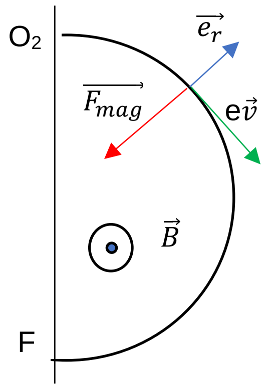
Loi Théorème de l'énergie cinétique $dE_c = \delta W = (e\vec{v}\wedge\vec{B}.)\vec{v}dt = 0$

Ainsi l'énergie cinétique est conservée, **le mouvement est uniforme**.

---

11. Orientation du champ magnétique

Pour que la charge est une trajectoire circulaire vers le collecteur il faut que la force soit radiale, comme indiquée sur le schéma.
Par la règle de la main droite on a l'orientation du champ magnétique, il sort de la feuille.



---

12. Le rayon

Loi **:** La deuxième loi de Newton $m\vec{a} = \vec{F}$

Projection sur $\vec{e_r}$ sachant que le mouvement est circulaire uniforme : $m\dfrac{v_{235}^2}{R_{235}} = ev_{235}B$

On en déduit donc $\boxed{\mathbf{R_{235} = \dfrac{m_{235}v_{235}}{eB}}}$

On trouve de même : $\boxed{\mathbf{R_{238} = \dfrac{m_{238}v_{238}}{eB}}}$

---

13. Valeur du champ magnétique

Pour pouvoir récupérer les ions $^{235}_{92}U^+$ on doit avoir $D = 2R_{235} = 2\dfrac{mv_{235}}{eB}$

Ainsi $\mathbf{B} = \dfrac{2m_{235}v_{235}}{eD} = \dfrac{2x\ 3,903\ 10^{-25}x\ 1,110\ 10^{5}}{1,602\ 10^{-19}x\ 0,940}$ **= 0,575T**

---

14. Séparation des isotopes

Il faut que la différence des diamètres des trajectoires des deux isotopes soit supérieure à L'.

On a $2R_{238} = \dfrac{2x3,953\ 10^{-25}x1,103\ 10^{5}}{1,602\ 10^{-19}x0,575} = 947$ mm

On a $2R_{235} = 940$ mm

Donc $2R_{238} - 2R_{235} = 7$ mm > L' = 4 mm

Les deux isotopes peuvent être séparés.

---

15. Quantité d'uranium isolé

Par définition le courant correspond à une quantité de charges par unité de temps. On a donc $Q = I\Delta t$

Tous les ions uraniums possèdent une charge +e.

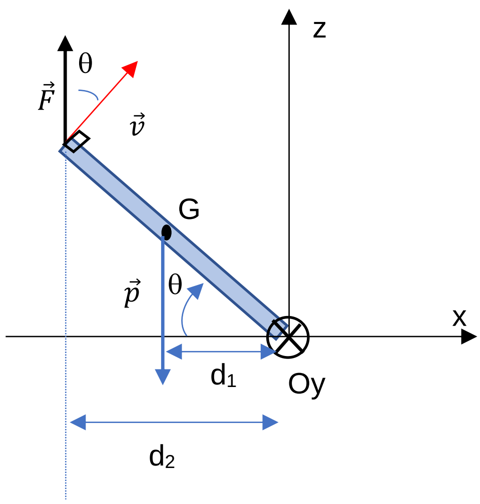
Parmi tous les noyaux qui traversent le spectromètre seuls η=0,7% sont des uraniums 235.

Ainsi $\boxed{\mathbf{N_{235} = \eta I\Delta t/e = \dfrac{0,7\ 10^{-2}x100\ 10^{-3}x365,25x24x3600}{1,602\ 10^{-19}} = 1,4\ 10^{23}\ ions}}$

Cela correspond à 54 g ce qui n'est pas énorme.

Exercice

Référentiel $\Re_T$ Galiléen
Système Le mur
Forces
Le poids $\vec{p} = -mg\overrightarrow{e_z}$
La force exercée par la grue $\vec{F}$ = F $\overrightarrow{e_z}$
La réaction du sol $\vec{R}$



1. L'équation différentielle

Loi **:** Le théorème du moment cinétique par rapport à Oy
Les moments
On utilise le bras de levier
$\mathcal{M}_R = 0$ car la force est appliquée au point O
$\mathcal{M}_P = -mgd_1 = -mga\cos\theta$
$\mathcal{M}_F = Fd_2 = FH\cos\theta$
Le théorème $J\ddot{\theta} = \mathcal{M}$
D'où $\boxed{J\ddot{\theta} = (FH - mga)\cos\theta}$

---

2. La force exercée

Si $\dot{\theta} = \omega_0$ est constant alors $\ddot{\theta} = 0$
D'où avec la relation précédente : $\boxed{F = \frac{mga}{H} = \frac{5{,}0\ 10^3 x9{,}8x1{,}2}{3{,}0} = 2{,}0\ 10^4 N}$

---

3. Puissance

On a la relation $\mathcal{P} = \vec{F}.\vec{v}$
L'extrémité du mur a un mouvement circulaire (voir schéma pour notation)
$\mathcal{P} = FH\dot{\theta}\cos\theta$
Ainsi $\boxed{\mathcal{P} = FH\frac{d\sin\theta}{dt}}$

Le travail de la grue

$W = \int \mathcal{P}dt$
$W = FH\int_0^{\pi/2} d\sin\theta$
$\boxed{W = FH = mga = 5{,}0\ 10^3 x9{,}8x1{,}2 = 5{,}9\ 10^4 J}$