

Feuille d'exercice n° 04 : Quelques fondamentaux

**Exercice 1** Soit  $P, Q$  deux propositions. La proposition  $(P \wedge Q \implies (\neg P) \vee Q)$  est-elle nécessairement vraie ?

**Exercice 2** Soit la propriété suivante :  $P(z) : \ll |z - 1| \leq 3 \implies |z - 5| \geq 1 \gg$ .


- 1) Quel est l'ensemble des  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $P(z)$  soit vraie ? A-t-on :  $\forall z \in \mathbb{C}, P(z)$  vraie ?
- 2) Mêmes questions en remplaçant  $|z - 5| \geq 1$  par  $|z - 5| > 1$ , puis par  $|z - 5| \geq 2$ .

**Exercice 3** () Écrire la négation des assertions suivantes où  $P, Q, R, S$  sont des propositions.

- |                        |   |
|------------------------|---|
| 1) $P \implies Q$      | 4) $P$ ou $(Q$ et $R)$                  |
| 2) $P$ et non $Q$      |   |
| 3) $P$ et $(Q$ et $R)$ | 5) $(P$ et $Q) \implies (R \implies S)$ |

**Exercice 4** Dans chacun des cas suivants, comprendre le sens des deux phrases proposées et déterminer leur valeur de vérité :

- |  |    |  |
|--|----|--|
| 1) $\forall n \in \mathbb{N} \exists N \in \mathbb{N} n \leq N$    | et | $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n \leq N$ .     |
| 2) $\forall y \in \mathbb{R}_+^* \exists x \in \mathbb{R} y = e^x$ | et | $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}_+^*, y = e^x$ . |
| 3) Soit $f$ une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ .         |    |  |
| $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} y = f(x)$       | et | $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} y = f(x)$ .     |

**Exercice 5** () Soit  $f$  une fonction réelle définie sur  $\mathbb{R}$ . Quelle est la négation des propositions suivantes ?

- |   |  |
|---|--|
| 1) $\exists M \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$ | 4) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y \leq f(x) \leq 2x + y$         |
| 2) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 1$ ou $f(x) \leq -1$        |  |
| 3) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0 \implies x \geq 0$        | 5) $\forall x \in \mathbb{R}, (\exists y \in \mathbb{R}, f(x) \geq y) \implies x \leq 0$ |

**Exercice 6** Soient les quatre assertions suivantes :

- |   |   |
|---|---|
| (a) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$ ; | (c) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$ ; |
| (b) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$ ; | (d) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x$ .   |

- 1) Les assertions (a), (b), (c) et (d) sont-elles vraies ou fausses ?
- 2) Donner la négation de chacune.

**Exercice 7** (🚲) Soit  $f$  une fonction réelle définie sur  $\mathbb{R}$ . Écrire au moyen de quantificateurs les propositions suivantes :

- |                        |   |
|------------------------|---|
| 1) $f$ est croissante. | 3) $f$ s'annule au plus une fois.           |
| 2) $f$ est périodique. | 4) $f$ prend au moins une fois la valeur 1. |

**Exercice 8** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation  $2|x - 1| = x^2 - 2$ .

**Exercice 9** Déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(y - f(x)) = 2 - x - y.$$

**Exercice 10** En quoi le raisonnement suivant est-il faux ?

Soit  $\mathcal{P}(n)$  : «  $n$  crayons de couleurs sont tous de la même couleur ».

- $\mathcal{P}(1)$  est vraie car un crayon de couleur est de la même couleur que lui-même.
- Supposons  $\mathcal{P}(n)$ . Soit  $n + 1$  crayons. On en retire 1. Les  $n$  crayons restants sont de la même couleur par hypothèse de récurrence.  
Reposons ce crayon et retirons-en un autre ; les  $n$  nouveaux crayons sont à nouveau de la même couleur. Le premier crayon retiré était donc bien de la même couleur que les  $n$  autres. La proposition est donc vraie au rang  $n + 1$ .
- On a donc démontré que tous les crayons en nombre infini dénombrable sont de la même couleur.

**Exercice 11** Dans un match de rugby, une équipe peut marquer 3 points (pénalité ou drop), 5 points (essai non transformé) ou 7 points (essai transformé). Quel est l'ensemble des scores possibles ?

**Exercice 12** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite vérifiant :  $u_0 \leq 1, \forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} \leq \sum_{k=0}^n u_k$ .

Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} u_n \leq 2^n$ .

