Devoir surveillé n° 8

– Version 1 –

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit E un ensemble à n éléments.

1) Soit $p \in [\![0, n]\!]$, soit X une partie à p éléments de E. Combien y a-t-il de parties Y de E disjointes de X ?

2) Combien y a-t-il de couples (X, Y) formés de parties disjointes de E ?

II. Autour du nombre e.

Partie I.

Dans cette partie, on pose, pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$R_n(t) = \mathrm{e}^t - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}.$$

1) On fixe un entier naturel n.

a) Montrer que R_n est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y'(t) - y(t) = \frac{t^n}{n!}. \qquad (\mathscr{E})$$

b) Donner la solution générale de l'équation homogèbe $(\mathscr{E}_0)$ associée à $(\mathscr{E})$.

c) Résoudre $(\mathscr{E})$ (on exprimera les solutions à l'aide d'une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer).

d) En déduire une expression de $R_n(t)$ pour tout réel t, à l'aide d'une intégrale.

e) Montrer que, pour tout réel positif t :

$$|R_n(t)| \leqslant \frac{t^{n+1}\mathrm{e}^t}{(n+1)!}.$$

f) En déduire l'existence et la valeur de la limite de la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$, pour tout réel t.

2) On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n!}.$$

a) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont strictement monotones, et donner leurs sens de variation.

b) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

c) En déduire que, pour tout entier naturel non nul q :

$$u_q < \mathrm{e} < v_q.$$

d) On cherche à montrer que e est irrationnel. A cet effet, on suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q, premiers entre eux, tels que :

$$\mathrm{e} = \frac{p}{q}.$$

En multipliant la double inégalité précédente par $q!$, montrer que c'est impossible, et conclure sur l'irrationalité de e.

e) On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

i) Soit ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un rang n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$:

$$|u_n - \mathrm{e}\,| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

ii) Montrer qu'il existe un rang, n_1 tel que pour tout entier $n \geqslant n_1$:

$$|w_n - \mathrm{e}\,| \leqslant \varepsilon.$$

iii) Quelle est la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

3) On considère la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N},\ n>1}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Quelle est sa limite lorsque n tend vers $+\infty$?

Partie II.

On considère la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$. telle que :

$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0,1], \; g(x) = x \ln(x).$$

4) Etudier la continuité et les variations de la fonctions g, puis tracer sa courbe représentative sur $[0,1]$, en prenant pour unité 10 cm sur l'axe des abscisses comme sur l'axe des ordonnées.

5) En déduire que $M = \sup\limits_{x \in [0,1]} |g(x)|$ existe et donner sa valeur.

6) On définit la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $t_0 \in \left] \frac{\mathrm{e}^{-1}}{3}, \mathrm{e}^{-1} \right[$ et pour tout entier naturel n :

$$t_{n+1} = -g(t_n).$$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$t_0 \leqslant t_n \leqslant t_{n+1} \leqslant \mathrm{e}^{-1}.$$

7) Rappeler l'inégalité de Taylor-Lagrange.

8) Montrer que, pour tout réel $x \in [t_0, \mathrm{e}^{-1}]$:

$$\left| g(x) - g\left(\mathrm{e}^{-1}\right) \right| \leqslant \frac{|x - \mathrm{e}^{-1}|^2}{2t_0}.$$

9) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul :

$$\left| t_n - \mathrm{e}^{-1} \right| \leqslant 2t_0 \left(\frac{\mathrm{e}^{-1} - t_0}{2t_0} \right)^{2^n}.$$

10) Quelle est la limite de la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

11) On pose :

$$I = \int_0^1 x^{-x} \mathrm{d}x.$$

a) Justifier que l'intégrale ci-dessus existe bien.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$I = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^k \ln^k x \mathrm{d}x + \int_0^1 \tilde{R}_n(x) \mathrm{d}x.$$

où on exprimera $\tilde{R}_n$, à l'aide de la fonction R_n introduite en partie **I**.

c) Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$\left|\int_0^1 \tilde{R}_n(x)\,dx\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}}{\mathrm{e}^{n+1}}.$$

d) Pour tout couple d'entiers naturels (p, q), on pose :

$$I_{p,q} = \int_0^1 x^p \ln^q x \mathrm{d}x.$$

e) **i)** Montrer que, pour tout couple d'entiers $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}.$$

On admettra que cette relation est valide pour $p = 0$.

ii) Exprimer $I_{p,q}$ en fonction de p et q.

f) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} I.$$

Partie III.

12) Rappeler le résultat permettant l'approximation de l'intégrale d'une fonction φ continue sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ par les sommes de Riemann.

13) Déterminer l'existence et la valeur de :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right).$$

14) Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\left(\dfrac{4^n n^n n!}{(2n)!}\right)^{1/n}$.

— FIN —