

Devoir facultatif n° 8

L'objectif de ce problème est de montrer le théorème d'approximation de Weierstrass : pour toute fonction continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n \geq 1}$ telle que

$$\sup \{ |P_n(x) - f(x)| \mid x \in [0, 1] \} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

- 1) Montrer l'inégalité triangulaire : pour toute variable aléatoire réelle X définie sur un espace probabilisé fini, $|EX| \leq E|X|$.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Pour tout $x \in [0, 1]$, on considère une suite $(X_i^{(x)})_{i \geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre x . On définit ensuite pour tout $n \geq 1$

$$T_n^{(x)} = \frac{X_1^{(x)} + \dots + X_n^{(x)}}{n}$$

et

$$P_n(x) = E[f(T_n^{(x)})].$$

- 2) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, P_n est une fonction polynomiale.
3) Déterminer l'espérance et la variance de $T_n^{(x)}$.
4) On fixe un réel $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x, y \in [0, 1]$, si $|x - y| \leq \alpha$, alors $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.
5) Majorer $P(|T_n^{(x)} - x| \geq \alpha)$ par une quantité ne dépendant pas de x .
6) La fonction f est-elle bornée ? Proposer deux majorations de $|f(T_n^{(x)}) - f(x)|$, l'une sur l'événement $[|T_n^{(x)} - x| \geq \alpha]$, l'autre sur l'événement $[|T_n^{(x)} - x| < \alpha]$.
7) En déduire une majoration de $|P_n(x) - f(x)|$ ne dépendant pas de x et conclure.
8) Ce résultat s'étend sans problème à tout segment de \mathbb{R} . Est-il vrai sur \mathbb{R} entier ?
9) On compare finalement deux modes de convergence de fonctions. Soit I un ensemble et f une fonction définie sur I .

- a) Montrer que si $(P_n)_{n \geq 1}$ est une suite de polynômes vérifiant

$$\sup \{ |P_n(x) - f(x)| \mid x \in I \} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

alors pour tout $x \in I$, $P_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$.

- b) Montrer que, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n \geq 1}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$.

— FIN —