3.3 - Matrices diagonales

<u>Déf</u> : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est dite diagonale si $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

<u>Rq</u> : Si $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ dénote l'ens. des matrices diag. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors :

$$\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}).$$

<u>Ex</u> : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonale.

Propriétés : • $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

• $(\mathcal{D}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau.
$[I_n \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})]$.

• Tte matrice diag. est inv. ssi elle n'a pas de 0 sur sa diag.

• Si 1 matrice diag. est inv, son inverse est diagonale.

Notation : $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Prop: $\cdot$ $\mathrm{diag}(\alpha_1 \dots \alpha_n) \times \mathrm{diag}(\beta_1 \dots \beta_n)$

$$= \mathrm{diag}(\alpha_1 \beta_1, \dots, \alpha_n \beta_n)$$

$\cdot$ si $\forall i, \alpha_i \neq 0$,

$$(\mathrm{diag}(\alpha_1 \dots \alpha_n))^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\alpha_1}, \dots, \frac{1}{\alpha_n}\right).$$

Prop: $$\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\,(E_{ii})_{1 \leq i \leq n}$$

$$\dim \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = n.$$

T: Grassman: $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) + \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$

ex: $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} - n.$$

$\underline{R_1}$: $(\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) \cap GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est 1 groupe.

$(T_n^+(\mathbb{K}) \cap GL_n(\mathbb{K}), \times)$ aussi.