Devoir à la maison n° 17

À rendre le 16 avril

Pour ce DM, vous rendrez un exercice (au choix) si vous le rendez seul, deux exercices (au choix) si vous le rendez en binôme, trois exercices (au choix !) si vous le rendez en trinôme.

I. Premier exercice, assez élémentaire

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\Delta : \mathbb{K}_{n+1}[X] \to \mathbb{K}_n[X]$ l'application définie par : $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1) Montrer que Δ est bien définie et que Δ est une application linéaire.

2) Déterminer le noyau de Δ.

3) En déduire que cette application est surjective.

II. Deuxième exercice, classique et important, assez progressif

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Soit $x_0 \in E$ tel que $f^2(x_0) \neq 0_E$.

1) Montrer que $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une base de E.

2) Montrer que l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ de base (Id, f, f^2).

III. Troisième exercice, difficile et assez abstrait

Soit U un sous-espace vectoriel de E espace vectoriel, et

$$A = \{f \in \mathscr{L}(E) \mid U \subset \mathrm{Ker}(f)\}.$$

Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$. Si E est de dimension finie, quelle est la dimension de A ? Donner un supplémentaire de A dans $\mathscr{L}(E)$.

— **FIN** —