Devoir à la maison n° 03

À rendre le 5 octobre

I. Un triangle « à la Pascal ».

On considère le triangle de nombres suivant (voir la figure 1), où chaque nombre est obtenu en additionnant les deux nombres de la ligne précédente entre lesquels ils sont placés.

Ligne n° 0	0		1		2		3		4		5	$\cdots$
Ligne n° 1		1		3		5		7		9		$\cdots$
Ligne n° 2			4		8		12		16			$\cdots$
Ligne n° 3				12		20		28				$\cdots$
Ligne n° 4					32		48					$\cdots$
Ligne n° 5						80						$\cdots$

Figure 1 – Triangle d'ordre 5.

1) Calculer, sans démonstration, le nombre inscrit à la pointe du triangle d'ordre 7.

2) Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On construit un triangle sur le modèle précédent, en mettant sur la première ligne les termes de la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$. La première ligne du triangle est donc la suivante.

$$a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_n \quad \dots$$

Pour $i, j \in \mathbb{N}$, on notera $x_j^{(i)}$ le j^{e} nombre de la i^{e} ligne, en commençant à numéroter les nombres et les lignes à partir de 0.
Ainsi, $x_0^{(0)} = a_0$, $x_1^{(0)} = a_1$, $x_0^{(1)} = a_0 + a_1$, $x_1^{(1)} = a_1 + a_2$ *etc.*
Si $n \in \mathbb{N}$, le nombre inscrit à la pointe du triangle d'ordre n est donc $x_0^{(n)}$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{k+1}.$$

b) Montrer, par exemple par récurrence, que, pour tout $n, j \in \mathbb{N}$,

$$x_j^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{k+j}.$$

c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur inscrite à la pointe du triangle d'ordre n et justifier ainsi le résultat donné à la question **1)**.

II. Étude matricielle d'une suite.

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, vérifiant la relation de récurrence linéaire suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{lcll} x_{n+1} & = & -9x_n & -18y_n \\ y_{n+1} & = & 6x_n & +12y_n \end{array} \right. ,$$

avec $x_0 = -137$ et $y_0 = 18$. On se propose dans ce problème de trouver les termes généraux de ces deux suites.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

1) Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.

2) Trouver par récurrence une expression de U_n en fonction notamment de A et de U_0.

3) On pose $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Cette matrice est-elle inversible ? Si c'est le cas, donner son inverse.

4) Que vaut $P^{-1}AP$? Dans la suite, on notera $D = P^{-1}AP$.

5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

6) Exprimer D^n en fonction de n.

7) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

8) Donner les termes généraux x_n et y_n.

— **FIN** —