# Devoir à la maison n° 16

À rendre le 29 mars

Soient $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f$ un endomorphisme de $E$. On fait deux hypothèses :

- $f$ n'est pas une homothétie de $E$ ;
- $f^2 = 5f - 6\mathrm{Id}_E$.

**1)** Montrer que $f$ est un automorphisme de $E$ et exprimer $f^{-1}$ en fonction de $\mathrm{Id}_E$ et $f$.

**2)** On note $\mathscr{A}$ le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f)$ de $\mathscr{L}(E)$.

**a)** Montrer que $(\mathrm{Id}_E, f)$ est une base de $\mathscr{A}$.

**b)** Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n \in \mathscr{A}$.

**3)** Soit $\lambda$ et $\mu$ deux réels, tels que $\mu \neq 0$. Montrer que $\lambda\mathrm{Id}_E + \mu f$ est un projecteur de $E$ si et seulement si $(\lambda, \mu)$ est l'un des couples suivants : $(-2, 1)$ ou $(3, -1)$.

On pose $p = f - 2\mathrm{Id}_E$ et $q = -f + 3\mathrm{Id}_E$. On vient de voir que $p$ et $q$ sont deux projecteurs de $E$, de sorte que $p^2 = p$ et $q^2 = q$.

**4)** **a)** Calculer $p + q$, $p \circ q$ et $q \circ p$.

**b)** En déduire que $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Im}\, q$, que $\mathrm{Ker}\, q = \mathrm{Im}\, p$, puis que $\mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, q$ sont supplémentaires dans $E$.

**5)** **a)** Montrer que $(p, q)$ est une base de $\mathscr{A}$ et déterminer les coordonnées de $\mathrm{Id}_E$ et $f$ dans cette base.

**b)** Déterminer, au moyen de la formule du binôme de Newton, les coordonnées de $f^n$ dans la base $(p, q)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**c)** En déduire enfin les coordonnées de $f^n$ dans la base $(\mathrm{Id}_E, f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**— FIN —**