Devoir surveillé n° 05 - Remarques

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 34 points, ramené sur 5 points.
- Problèmes : toutes les questions sur 4 points, total sur 124 (v1) et 128 (v2) points, ramené sur 15 points.

Statistiques descriptives.

	Calculs	Sujet 1 (sur 124)	Sujet 2 (sur 128)	Note finale
Note maximale	29	74	83	$18,5$
Note minimale	14	23	22	5
Moyenne	$\approx 21,17$	$\approx 42,71$	$\approx 52,88$	$\approx 10,52$
Écart-type	$\approx 3,48$	$\approx 13,42$	$\approx 17,48$	$\approx 3,34$

A). Une suite définie par récurrence (v1).

1.a) Vous devez préciser à l'écrit que la fonction est STRICTEMENT décroissante.
Dériver la fonction n'était absolument nécessaire pour connaître son sens de variation.
Il y a des erreurs dans le calcul de la dérivée ou des limites de f, c'est inquiétant.

1.b) La seule stabilité de $\mathbb{R}_+^*$ par f donnait tous les résultats voulus, pas besoin de récurrence.

2) Comme toujours, il y a de nombreuses confusions entre $u_5 < 10^{-5}$ et $u_5 \leqslant 10^{-5}$.
Conjecturer que (u_n) est croissante uniquement parce que $u_5 < u_6$ est déjà étonnant, mais ici on savait que $u_5 < u_0 < u_6$!!!! De plus il s'agit d'une suite réucrrente avec f décroissante, donc on savait déjà que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) étaient de monotonies opposées.

3.b) Un massacre, comme tout le temps avec ces histoires de TVI / bijection ... Alors j'en remets une couche : le TVI utilise la continuité de g et donne l'existence d'un point d'annulation ; la monotonie stricte donne l'injectivité et donc l'unicité de ce point fixe. Vous devez rappeler TOUTES les hypothèses, utiliser le TVI ET l'injectivité, et essayer de mettre les hypothèses, les arguments et les conclusions dans un ordre logique !

4.a) Pas besoin de se lancer dans d'affreux calculs pour montrer que $u_1 > u_3$, puisque $u_2 > u_0$ et f est strictement décroissante !

5.a) Essayez de simplifier l'expression de h.
Le calcul de la limite doit être justifié étape par étape. Il y avait encore beaucoup d'erreurs dans ce calcul.

5.b) Le cas $x = 0$ a posé problème.

5.c) Très mal traité. J'ai souvent lu « (u_{2n}) est décroissante esty inférieure α, donc elle ne peut tendre que vers l'autre point fixe :0 ».
Il manque trop d'arguments : déjà, pourquoi (u_{2n+1}) aurait-elle un limite, finie de surcroît ?

C'était le théorème de la limite monotone, en rappelant que cette suite était minorée par 0. Ensuite, pourquoi cette limite est-elle un point fixe de h ? Car h est CONTINUE, cette hypothèse a été systématiquement oubliée (sauf dans une seule copie !).

B). Équation de Pell-Fermat (v1 et v2).

1) Beaucoup de confusion sur la nature des élèments de $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$: ce ne sont ni des entiers ni des couples.
Comme nous l'avions vu en cours, montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est beaucoup plus rapide que de montrer que c'est un groupe. De même, remontrer que $+$ et $\times$ étaient associatives, commutatives et distributives était une perte de temps : ce sont les lois de $\mathbb{R}$.
Et il a globalement manqué des points à vérifier. Ainsi $1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ a été très souvent oublié.

2.a) Affreux ... Si $\sqrt{7} = \dfrac{a}{b}$, pourquoi s'intéresser à la parité de a et b ? ? ? ? Le nombre premier intéressant ici est 7, pas 2 ! Je vous conseille de revoir cette question, c'est un exercice archi-classique qu'il faut savoir traiter impeccablement.

2.b) Très mal traité aussi. Il fallait prendre deux couples (a, b) et (a', b') tels que $x = a + b\sqrt{7} = a' + b'\sqrt{7}$. Alors $(a - a') = (b' - b)\sqrt{7}$. À partir de là, ça a déraillé. Certains divisent par $b' - b$ sans supposer que cette quantité est nulle, et concluent que c'est absurde. Pourtant, si $a = a'$ et $b = b'$, il n'y a rien d'absurde ! D'autres supposent $a \neq a'$ et $b \neq b'$. Mais ceci n'a rien à voir avec $(a, b) \neq (a', b')$! Et si cela est absurde, il vient alors par négation : $a = a'$ OU $b = b'$!

2.c) Il y avait trois points à montrer, vous en avez presque tous oublié un ou deux : lisez l'énoncé !

3.d) Il ne suffisait pas de dire que les éléments de G étaient inversibles, il fallait aussi vérifier que leur inverse était dans G.

3.e) Très très mal rédigé : raisonnez par double implication.

4.a) Arnaque fréquente : $x > 1$ donc $x + \bar{x} > 0$.