# VIII Notion d'application

30 juillet 2021

## 1 Vocabulaire.

• En toute rigueur, une *application* est un objet différent d'une *fonction*, mais la différence est hors programme. On emploiera donc les deux termes indifféremment.
• Une application d'un ensemble $E$ dans un ensemble $F$ est une relation qui, à tout élement de $E$ associe un unique élément de $F$. Attention : on a forcément unicité de l'image et les ensembles de départ et d'arrivée sont une donnée de l'application.

**Exemple 1.0.1.**
Les applications qui à $x$ associe $x^2$, partant respectivement de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}_+$, sont différentes : la seconde permet de définir la fonction $\sqrt{\cdot}$, pas la première. Dans les deux cas, on pourra considérer comme ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$. Une formule ne définit donc pas à elle seule une application.

**Définition 1.0.2.**
On appelle *fonction* (ou *application*) tout triplet $f = (E, F, \Gamma)$ où $E$ est un ensemble appelé *ensemble de départ* ou *domaine de définition*, $F$ est un ensemble appelé *ensemble d'arrivée*, et $\Gamma$ est une partie de $E \times F$ appelée *graphe de $f$* telle que $\forall x \in E$, $\exists! y \in F$, $(x, y) \in \Gamma$. Si $(x, y) \in \Gamma$, on note plus simplement $y = f(x)$. On dit que $x$ est alors **<u>un</u>** antécédent de $y$, et $y$ **<u>l'</u>**image de $x$.

**Remarque 1.0.3.**
Il peut y avoir plusieurs antécédents d'un élément dans l'espace d'arrivée, mais une seule image d'un élément de l'espace de départ : cela se voit sur le graphe, que l'on représente comme suit.

• On note une application $f$ allant d'un ensemble $E$ dans un ensemble $F$ de la manière suivante : $f : E \to F$.
• Si l'application est de plus définie par une formule, on écrit alors :

$$f : \begin{array}{rcl} E & \to & F, \\ x & \mapsto & \text{Formule dépendant de } x. \end{array}$$

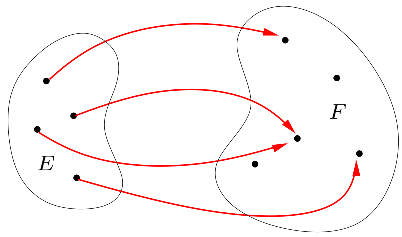


FIGURE 1 – Exemple d'application – on remarque qu'une image a deux antécédents.

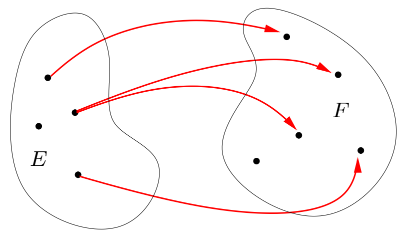


FIGURE 2 – Cette relation n'est pas une application.

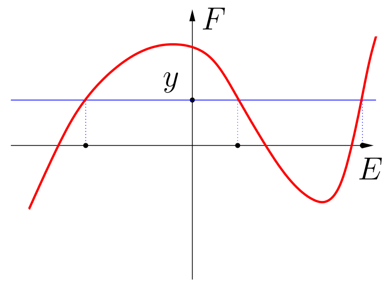


FIGURE 3 – $y$ a ici trois antécédents représentés.

**Remarque 1.0.4.**
La notation

$$f : \begin{array}{rcl} E & \to & F, \\ x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

n'est pas informative.

**Remarque 1.0.5.**
Si $f, g : E \to F$, alors $f = g$ équivaut à $\forall x \in E$, $f(x) = g(x)$.

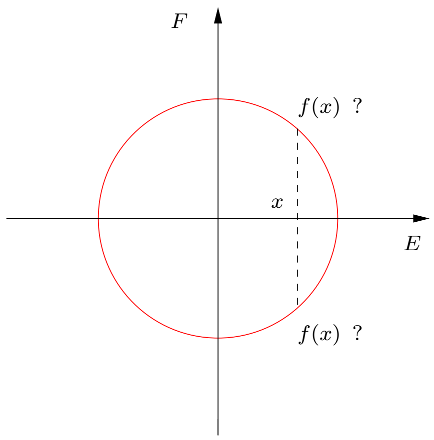


FIGURE 4 – Cette courbe ne représente pas une application.

**Définition 1.0.6.**
Soit $E$, $F$ deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On appelle *image* de $f$ le sous-ensemble de $F$, noté $f(E)$ ou $\mathrm{Im}(f)$, égal à $\{f(x),\ x \in E\}$.

**Remarque 1.0.7.**
La notation $f(E)$ indique bien l'ensemble de départ, contrairement à la notation $\mathrm{Im}\, f$. Cet ensemble peut aussi s'écrire $\{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x)\}$.

**Remarque 1.0.8.**
Les ensembles de départ et d'arrivée peuvent être n'importe quoi, pas forcément de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

**Notation 1.0.9.**
On note $\mathscr{F}(E, F)$, ou $F^E$, l'ensemble des applications de $E$ dans $F$.

**Remarque 1.0.10.**
Comment se souvenir de cette dernière notation ? Penser que pour des ensembles finis, $\mathrm{Card}(F^E) = \mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}(E)}$.

En effet, il y a autant de manières de choisir une fonction $f : E \to F$ que de manières de choisir une image pour chaque élément de $E$. Or, il y a $\mathrm{Card}(F)$ choix pour chaque élément de $F$ et $\mathrm{Card}(E)$ éléments de $E$. Il y a donc bien $\mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}(E)}$ manières de choisir une application $f : E \to F$.

**Exemple 1.0.11.**
L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Dans $\{1\}^{\mathbb{N}}$, il y a une seule suite !

**Définition 1.0.12** (Familles)**.**
Soit $I$ un ensemble. On appelle *famille* d'éléments de $E$ indexée par $I$ toute application de $I$ dans $E$. Les familles sont notées $(x_i)_{i\in I}$, et rarement, voire jamais, comme des applications.
L'ensemble des familles de $E$ indexées par $I$ est noté $E^I$.

**Exemple 1.0.13.**
$\mathbb{R}^{\{1,2\}}$ : on peut l'identifier à $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, que l'on note opportunément $\mathbb{R}^2$.

**Définition 1.0.14.**
Soit $E$ un ensemble et $A$ une partie de $E$. On appelle *fonction indicatrice de* $A$ la fonction notée $\mathbb{1}_A$ telle que pour tout $x \in A$, $\mathbb{1}_A(x) = 1$, et pour tout $x \in E\backslash A$, $\mathbb{1}_A(x) = 0$.

**Exercice 1.0.15.**
Soit $A$ et $B$ deux ensembles. Calculer $\mathbb{1}_{A\cap B}$, $\mathbb{1}_{\bar{A}}$ et $\mathbb{1}_{A\cup B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et de $\mathbb{1}_B$.

## 2 Restriction, prolongement

**Définition 2.0.1.**
Soit $E$, $E'$, $F$, $F'$ quatre ensembles, $f : E \to F$ et $f' : E' \to F'$ deux applications.

(i) Pour toute partie $G$ de $E$, la restriction de $f$ à $G$ est l'application

$$f_{|G} : \begin{array}{ccc} G & \to & F, \\ x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

(ii) On dit que $f'$ est un prolongement de $f$ si $E \subset E'$, $F \subset F'$ et $\forall x \in E,\ f(x) = f'(x)$.

Il y a toujours une infinité de prolongements possibles à une application.
• Une fonction est toujours le prolongement d'une de ses restrictions.

**Exemple 2.0.2.**
Tout réel strictement positif a deux antécédents par la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ; mais il n'a qu'un antécédent par la restriction de $f$ à $\mathbb{R}_+$.

## 3 Composition d'applications

**Définition 3.0.1.**
Soit $E$, $F$, $G$ trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On définit alors la *composée* de $f$ par $g$ comme l'application

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \to & G, \\ x & \mapsto & g(f(x)). \end{array}$$

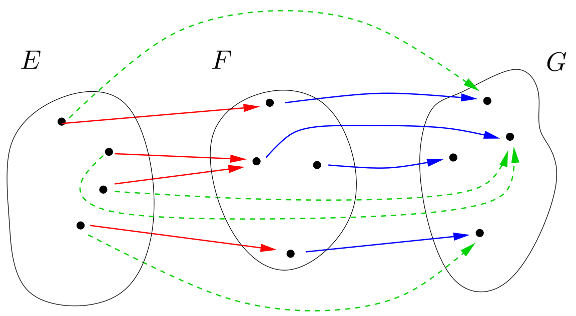


FIGURE 5 – Exemple de composée.

On ne peut pas toujours composer deux applications. Par exemple : les fonctions $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$ et $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.
• Ce n'est pas une opération commutative. Par exemple : $\exists x \in \mathbb{R}_+,\ \ln(x^2) \neq (\ln x)^2$.

**Définition 3.0.2.**
Soit $E$ un ensemble, on définit dessus l'application *identité sur* $E$ comme $\mathrm{Id}_E : E \to E,\ x \mapsto x$.

**Proposition 3.0.3.**
Soit $E$ un ensemble, alors $(E^E, \circ)$ est un monoïde de neutre $\mathrm{Id}_E$.

**Démonstration.**
Soit $x \in E$, $f$, $g$ et $h$ trois applications de $E$ dans $E$. On a alors $h(g(f(x)) = h((g \circ f)(x)) = h \circ (g \circ f)(x)$ et $h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g) \circ f(x)$, d'où l'associativité.

On a aussi pour tout $x \in E$, $(\mathrm{Id}_E \circ f)(x) = \mathrm{Id}_E(f(x)) = f(x)$ et $(f \circ \mathrm{Id}_E)(x) = f(\mathrm{Id}_E(x)) = f(x)$, ce qui montre que $f \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ f = f$. □

**Remarque 3.0.4.**
Nous avons vu (et nous reverrons en TD) que certaines fonctions (dans ce cas, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$) ne sont pas inversibles (au sens de la structure $(E^E, \circ)$).

## 4 Injectivité, surjectivité, bijectivité

On comprend vite, en considérant quelques exemples, quelles sont les propriétés qui peuvent empêcher une fonction $f : E \to E$ d'être inversible pour $\circ$.

— Si deux éléments de $E$ ont même image par $f$, on ne pourra pas « revenir en arrière » et construire $g$ vérifiant $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.
— Si un élément de $E$ n'a pas d'antécédent par $f$, on ne pourra pas construire $g$ vérifiant $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.

### 4.1 Injectivité

**Définition 4.1.1.**
Soit $E$, $F$ deux ensembles, $f : E \to F$ une application. On dit que $f$ est *injective* (ou est une *injection*) si $\forall (x, y) \in E^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

**Remarque 4.1.2.**
On utilise également la contraposée de cette proposition : $\forall (x, y) \in E^2,\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

**Remarque 4.1.3.**
La donnée de l'ensemble de départ est primordiale. Exemple : l'application $[-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}, x \mapsto$

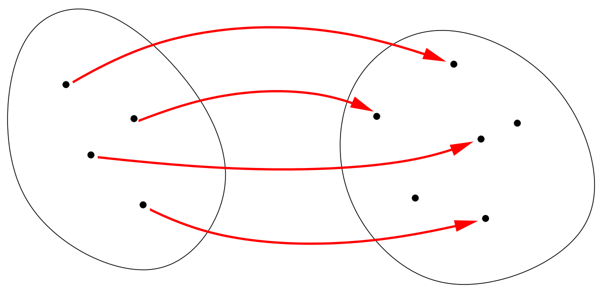

FIGURE 6 – Exemple d'application injective.

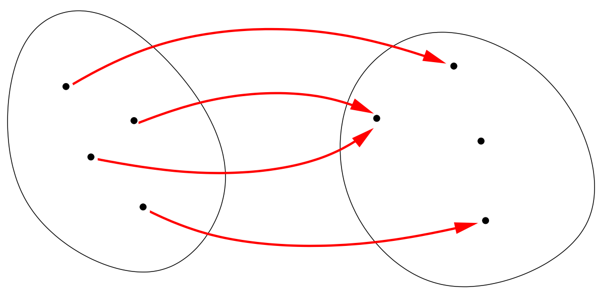

FIGURE 7 – Exemple d'application non injective : une image a deux antécédents ou plus.

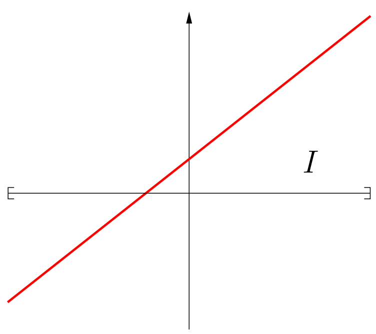


FIGURE 8 – Graphe d'application injective sur un segment $I$.

$\sin(x)$ est injective alors que $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$ ne l'est pas (*le montrer et tracer les courbes représentatives de ces deux applications* ). On peut aussi se demander ce qu'il adviendrait de la figure 8 si l'on ne précise pas que l'espace de départ est le segment $I$ ici représenté.

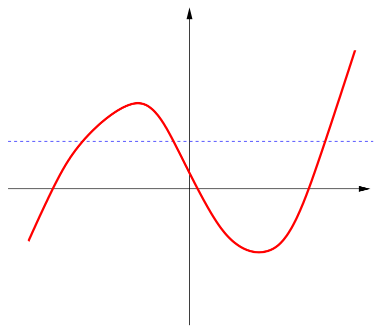

FIGURE 9 – Graphe d'application non injective : une image a deux antécédents ou plus.

**Remarque 4.1.4.**
Une application $f : E \to F$ est injective si et seulement si, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet au plus une solution dans $E$.

**Remarque 4.1.5.**
Une restriction d'une fonction injective est toujours injective.

**Remarque 4.1.6.**
On a montré dans le premier chapitre que toute fonction réelle strictement monotone est injective.

**Théorème 4.1.7** (Composée d'injections.)**.**
Soit $E$, $F$ et $G$ trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications injectives. Alors $g \circ f$ est injective.

**Démonstration.**
Soit $(x, y)) \in E^2$, supposons que $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. Alors, par injectivité de $g$ puis de $f$, $f(x) = f(y)$ puis $x = y$. $\square$

**Exercice 4.1.8.**
Soit $E, F$ deux ensembles, soit $f : E \to F$. Montrer que $f$ est injective si et seulement s'il existe $g : F \to E$ vérifiant $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

## 4.2 Surjectivité

**Définition 4.2.1.**
Soit $E$ et $F$ deux ensembles, $f : E \to F$ une application. On dit que $f$ est *surjective* (ou est/réalise une *surjection*) si $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.

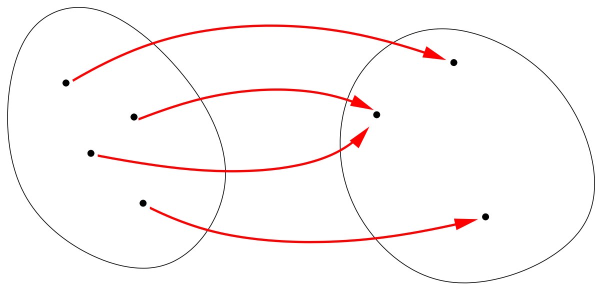

FIGURE 10 – Exemple d'application surjective.

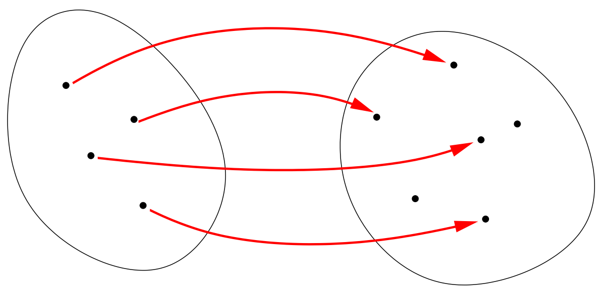

FIGURE 11 – Exemple d'application non surjective.

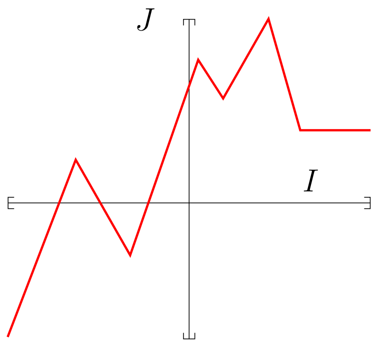


FIGURE 12 – Graphe d'une application surjective d'un segment $I$ dans un segment $J$.

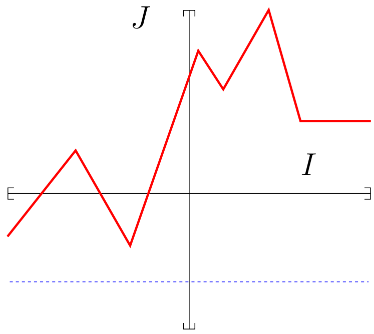


FIGURE 13 – Graphe d'une application non surjective d'un segment $I$ dans un segment $J$.

• La donnée de l'espace de départ *et* de l'espace d'arrivée est, là encore, primordiale.

**Exemple 4.2.2.**
La fonction définie par $x \mapsto \sin x$ est surjective de $[0, 2\pi]$ sur $[-1, 1]$, mais pas de $[0, 2\pi]$ sur $\mathbb{R}$ ni de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Revenir aussi sur les figures 12 et 13.

**Exercice 4.2.3.**
Dans chaque cas, dire si cette application est surjective ou non : $(\mathbb{R}^* \text{ ou } \mathbb{R}_+^*) \to (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{R}^*)$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

**Remarque 4.2.4.**
Une fonction est toujours surjective sur son image (formellement : la *corestriction* d'une application à son image est toujours surjective).

Une fonction non surjective n'est pas nécessairement injective, et vice-versa.

**Remarque 4.2.5.**
Une application $f : E \to F$ est surjective si et seulement si, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution dans $E$.

**Exercice 4.2.6.**
Étudier la surjectivité de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{i\} & \to & \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ z & \mapsto & \dfrac{z+i}{z-i} \end{array}.$$

**Théorème 4.2.7** (Composée de surjections.)**.**
Soit $E$, $F$ et $G$ trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications surjectives. Alors $g \circ f$ est surjective.

**Démonstration.**
Soit $z \in G$, $g$ est surjective : il existe $y \in F$ vérifiant $z = g(y)$. Comme $f$ est surjective, il existe $x \in E$ vérifiant $y = f(x)$ et on a donc $z = g \circ f(x)$. □

**Exercice 4.2.8.**
Soit $E, F$ deux ensembles, soit $f : E \to F$. Montrer que $f$ est surjective si et seulement s'il existe $g : F \to E$ vérifiant $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

## 4.3 Bijectivité

**Définition 4.3.1.**
Une application *bijective* (ou qui réalise une *bijection*) est une application injective et surjective.

Soit $E$ et $F$ deux ensembles. Une application $f : E \to F$ est donc bijective si et seulement si $\forall y \in F,\ \exists!\ x \in E,\ y = f(x)$.

**Exemple 4.3.2.**
Application identité, fonctions affines de la forme $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$, avec $a \neq 0$, les similitudes ...

**Théorème 4.3.3** (Fonction réciproque)**.**
Soit $f : E \to F$ une application.

1. $f$ est bijective si et seulement s'il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
2. Dans ce cas, $g$ est unique et notée $f^{-1}$, appelée *fonction réciproque de* $f$, et on a, pour tout $(x, y) \in E \times F$, $f(x) = y$ si et seulement si $x = f^{-1}(y)$.
3. $f^{-1}$ est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

**Démonstration.**
1. Si $f$ bijective, on construit $g$. Soit $y \in F$. On note $g(y)$ l'unique antécédent de $y$ par $f$ : donc $g$ est une fonction bien définie (tout point a une et une seule image). On vérifie bien que $f \circ g = \mathrm{I}_F$ et que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.
Si $g$ existe, on montre que $f$ est injective et que $f$ est surjective.
2. Unicité : on utilise l'injectivité de $f$.
Équivalence : facile par double implication.
3. On utilise le point (i) pour la bijectivité et le point (ii) pour l'unicité.

□

Ne JAMAIS parler de $f^{-1}$ avant d'avoir montré qu'elle existe.

Dans le cas d'une fonction réelle, il ne faut pas confondre $f^{-1}$ et $1/f$. Ex : $f = 1$ ($1/f$ existe, pas $f^{-1}$), $f : x \mapsto x$ ($f^{-1}$ existe, pas $1/f$).

• Le graphe de la réciproque d'une fonction est le symétrique par rapport à la première bissectrice du plan du graphe de cette fonction. En effet, si on note $\Gamma$ le graphe de $f$ et $\Gamma'$ celui de sa réciproque, on a par définition, pour tous $x$ et $y$, $(x, y) \in \Gamma$ si et seulement si $(y, x) \in \Gamma'$.

**Exemple 4.3.4.**
$x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x$, tan et arctan (sur leurs espaces de départ et d'arrivée usuels).

**Remarque 4.3.5.**
Une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement si, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet exactement une solution dans $E$.

• En pratique, pour montrer que $f$ est bijective, on peut au choix :

1. montrer que $f$ est injective et surjective ;
2. montrer que $f$ a une réciproque en raisonnant par équivalence : $y = f(x)$ ssi $x = f^{-1}(y)$, où $f^{-1}$ est alors à donner (on résout donc $y = f(x)$) ;
3. donner $f^{-1}$ et vérifier que $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$ **et** $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$.

**Exemple 4.3.6.**
Reprendre l'exercice 4.2.6 et déterminer l'inverse de cette application.

**Remarque 4.3.7.**
Une injection réalise toujours une bijection sur son image.

**Remarque 4.3.8.**
Si $E$ est un ensemble et $f : E \to E$ une application

bijective, alors $f$ est un élément inversible dans le monoïde $(E^E, \circ)$, d'inverse (au sens algébrique) sa réciproque : $f^{-1}$.

**Théorème 4.3.9** (Composée de bijections.)**.**
Soit $E$, $F$ et $G$ trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux bijections. Alors $g \circ f$ est une bijection et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

**Démonstration.**
Utilise les résultats analogues sur injectivité et surjectivité. Ou encore : on donne l'inverse (formule à connaître !) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$, et surtout ne pas inverser les membres ! □

**Exercice 4.3.10.**
Trouver deux applications $f$ et $g$ toutes les deux non bijectives, telles que $g \circ f$ est bijective.

### 4.4 Un peu de vocabulaire anglais ...

- Application : *mapping* ou *map* .
- Injection : *injection* ou *one-to-one mapping* .
- Surjection : *surjection* ou *onto mapping* .
- « non injection » : *many-to-one mapping* .
- Bijection : *bijection* ou *one-to-one correspondance* .

## 5 Image directe, tiré en arrière.

### 5.1 Image directe

**Définition 5.1.1.**
Soit $E$ et $F$ deux ensembles, $f : E \to F$ une application et $A$ une partie de $E$. On appelle *image directe* de $A$ par $f$ l'ensemble des images des éléments de $A$ (voir figure 14), *i.e.* la partie de $F$ :

$$\begin{aligned} f(A) &= \{\, f(x) \mid x \in A \,\} \\ &= \{\, y \in F \mid \exists x \in A,\ y = f(x) \,\}. \end{aligned}$$

**Remarque 5.1.2.**
La seconde forme de $f(A)$ est la plus pratique à utiliser et est à retenir en priorité.

**Remarque 5.1.3.**
La notation $f(E)$ utilisée pour l'image de $f$ est bien cohérente.

**Remarque 5.1.4.**
On a toujours $f(A) \subset \mathrm{Im}(f)$.

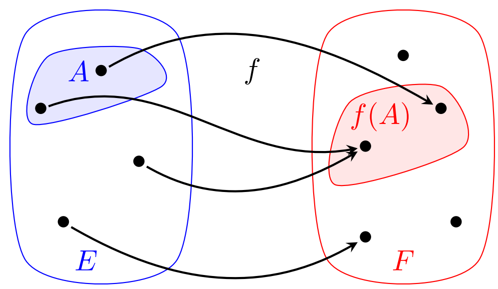


FIGURE 14 – Image directe d'une partie $A$ par une application $f$.

- Cela se lit aisément sur un graphe.

**Exercice 5.1.5.**
Soit $c : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$, déterminer $c([2,4])$ et $c(]-1,3])$.

**Exercice 5.1.6.**
Soit $E$ et $F$ deux ensembles, $f : E \to F$ une application, $A$ et $B$ deux parties de $E$.
- Si $A \subset B$, est-ce que $f(A) \subset f(B)$ ?
- Comparer $f(A \cup B)$ et $f(A) \cup f(B)$, puis $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$.

**Proposition 5.1.7.**
Soit $E$ et $F$ deux ensembles, $f : E \to F$ une application. Alors $f$ est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

### 5.2 Tiré en arrière

**Définition 5.2.1.**
Soit $E$ et $F$ deux ensembles, $f : E \to F$ une application et $B$ une partie de $F$. On appelle *tiré en arrière* de $B$ par $f$ l'ensemble des antécédents

des éléments de $B$ (voir figure 15), *i.e.* la partie de $E$ :

$$f^{\leftarrow}(B) = \{\, x \in E \mid f(x) \in B \,\}\,.$$

**Remarque 5.2.2.**
Le vocabulaire officiel est plutôt « *image réciproque* de $B$ par $f$ » et la notation officielle est : $f^{-1}(B)$.

D'expérience, cette terminologie et cette notation sont une source de confusions désastreuses. Ne l'utilisez qu'une fois cette notion solidement acquise.

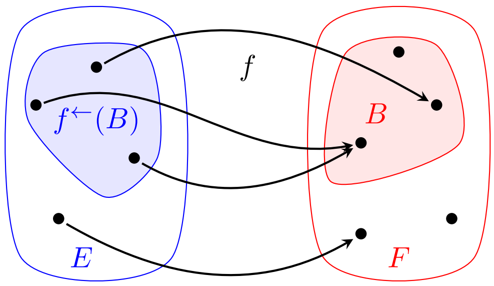


FIGURE 15 – Tiré en arrière d'une partie $B$ par une application $f$.

• On lit aussi le tiré en arrière d'une partie sur le graphe d'une fonction.

 Ne pas confondre avec la réciproque d'une fonction, qui n'existe pas si $f$ n'est pas bijective.
• Notamment, les notations $f^{\leftarrow}(\{x\})$ et $f^{-1}(x)$ ne font formellement pas référence au même type d'objet.

**Exercice 5.2.3.**

une application bijective et si $B \subset F$, alors on a $f^{\leftarrow}(B) = f^{-1}(B)$, où la deuxième écriture désigne l'image directe par $f^{-1}$.

Soit $c\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$, déterminer $c^{\leftarrow}([1,4[)$ et $c^{\leftarrow}([-3,1])$.

**Théorème 5.2.4.**
Soit $E$ et $F$ deux ensembles. Si $f : E \to F$ est

**Démonstration.**
Soit $x \in E$, alors

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B) &\Leftrightarrow \exists y \in B,\ x = f^{-1}(y) \\ &\Leftrightarrow \exists y \in B,\ f(x) = y \\ &\Leftrightarrow f(x) \in B \\ &\Leftrightarrow x \in f^{\leftarrow}(B) \end{aligned}$$

□

**Exercice 5.2.5.**
Soit $E$ et $F$ deux ensembles, $f : E \to F$ une application, $A$ et $B$ deux parties de $F$.
• Si $A \subset B$, est-ce que $f^{\leftarrow}(A) \subset f^{\leftarrow}(B)$ ?
• Comparer $f^{\leftarrow}(A \cup B)$ et $f^{\leftarrow}(A) \cup f^{\leftarrow}(B)$, puis $f^{\leftarrow}(A \cap B)$ et $f^{\leftarrow}(A) \cap f^{\leftarrow}(B)$.

**Proposition 5.2.6.**
Soit $E, F$ deux ensembles non vides, soit $f : E \to F$.

Alors, $\{\, f^{\leftarrow}(y) \mid y \in F \,\}$ est un recouvrement disjoint de $E$, tandis que $\{\, f^{\leftarrow}(y) \mid y \in \mathrm{Im}(f) \,\}$ est une partition de $E$.

De même, si $(F_i)_{i\in I}$ est une partition de $\mathrm{Im}(f)$, alors $\{\, f^{\leftarrow}(F_i) \mid i \in I \,\}$ est une partition de $E$.