LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON
SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR
CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I.
ANNÉE 2017 - 2018

C4 : MODÉLISATION DES PERFORMANCES CINÉMATIQUES DES SYSTÈMES

C4-4 - Cinématique des solides

19 décembre 2017

Table des matières

Compétences

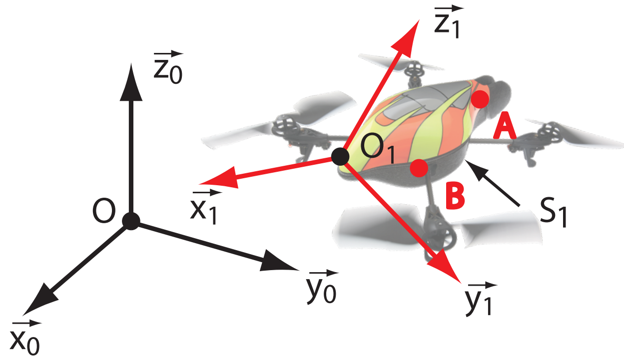
- **Analyser :** Apprécier la pertinence et la validité des résultats :
  - unités du système international;
  - homogénéité des grandeurs.
- **Modéliser :** Proposer un modèle de connaissance et de comportement :
  - Solide indéformable;
  - référentiel, repère;
  - équivalence solide/référentiel;
  - vecteur-vitesse angulaire de deux référentiels en mouvement l'un par rapport à l'autre";
- **Résoudre :** Proposer un modèle de connaissance et de comportement
  - Modélisation plane;
  - Torseur cinématique;

I. Champ cinématique des solides

1 Torseur cinématique

Dans cette partie nous considérons que les solides sont indéformables. Le repère R_1 est attaché au solide S_1 (corps du drone ici), ainsi on note :

$$\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) = \overrightarrow{\Omega}(S_1/R_0).$$



Considérons deux points **A et B appartenant au solide** S_1 attachés au repère $R_1\left(O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$. D'après la définition des solides indéformables vue dans le premier chapitre :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_{R_1} = \overrightarrow{0}.$$

En écrivant la dérivée temporelle du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport au repère R_0 avec la formule de dérivation vectorielle, on obtient :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega}(S_1/R_0) \wedge \overrightarrow{AB}.$$

On peut également écrire :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right]_{R_0} - \left[\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right]_{R_0} = \overrightarrow{V}(B/R_0) - \overrightarrow{V}(A/R_0)$$

Définition 1 : *Changement de point*

- On obtient alors **la relation fondamentale de changement de point pour le champ cinématique** pour deux points A et B appartenant à un solide quelconque S :

$$\overrightarrow{V}(B/R_0) = \overrightarrow{V}(A/R_0) + \overrightarrow{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V}(A/R_0) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}(S/R_0).$$

- On peut étendre cette formule à **deux points quelconques** A **et** B (n'appartenant pas forcément à S) avec l'utilisation des vitesses d'entrainement :

$$\boxed{\overrightarrow{V}(B \in S/R_0) = \overrightarrow{V}(A \in S/R_0) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}(S/R_0).} \tag{1}$$

- *On peut parfois appeler cette relation, **la formule de Varignon**.*

Propriété 1 :

On remarque alors que les vecteurs vitesses des points d'un solide indéformable vérifient la relation de changement de point du moment d'un torseur. Nous pouvons alors définir le **torseur cinématiques**.

Définition 2 : *Torseur cinématique*

On définit le torseur cinématique du mouvement d'un solide indéformable S par rapport à un repère R_0, le torseur qui a pour résultante, le vecteur de rotation instantané $\overrightarrow{\Omega}(S/R_0)$ et pour moment la vitesse en un point donné A, dans le mouvement de S par rapport à R_0, $\overrightarrow{V_{(A\in S/R_0)}}$. On le note alors :

$$\boxed{\left\{\mathscr{V}_{(S/R_0)}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{(S/R_0)}} \\ \overrightarrow{V_{(A\in S/R_0)}} = \overrightarrow{V}_A(S/R_0) \end{array}\right\}_A} \quad (2)$$

Définition 3 : *Torseur*

Un torseur est un outil mathématique qui présente deux composantes vectorielles :

- Une résultante qui est **indépendante** du point où on l'exprime et que l'on note $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{\Omega_{(S/R_0)}}$.
- Un moment qui **dépend du point** où on l'exprime par la **formule fondamental de changement de point** et que l'on note $\overrightarrow{M}_A(\overrightarrow{R}) = \overrightarrow{V_{(A\in S/R_0)}} = \overrightarrow{V}_A(S/R_0)$.

Remarque 1 :

Le point A est lié au solide S. Deux cas peuvent se présenter.

- Lorsque le point appartient physiquement au solide (S), il est lié à tout instant à ce solide. On peut alors calculer sa vitesse avec le vecteur vitesse ou par dérivation vectorielle. On parlera alors de **point matériel**.
- Lorsque le point considéré est lié uniquement au solide à l'instant t où on calcule son vecteur vitesse, on ne peut calculer sa vitesse qu'en utilisant la loi de composition des vitesses. On parlera alors de **point géométrique**.

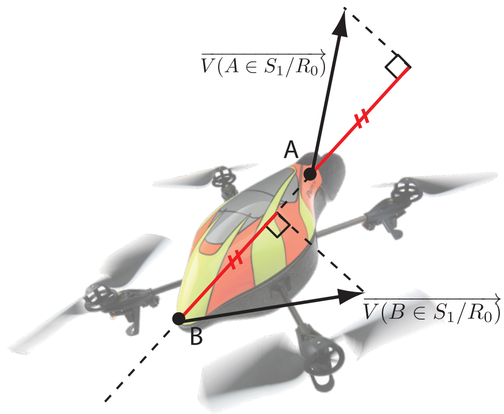
2 Propriétés

a) Equiprojectivité

Définition 4 : *Equiprojectivité*

Un champ de vitesse est **équiprojectif**, c'est à dire qu'il vérifie pour tout couple de point (A, B) dans le mouvement d'un solide S_1 par rapport à R_0 la relation suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{V_{(A\in S_1/R_0)}} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_{(B\in S_1/R_0)}} \cdot \overrightarrow{AB}} \quad (3)$$



b) Axe central

Définition 5 : *Axe central*

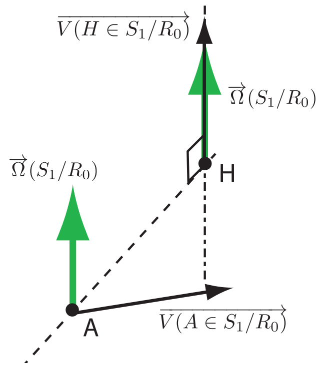
- Un **point central** d'un torseur est un point où le moment résultant a même direction que la résultante générale.
- L'**axe central** d'un torseur est la droite constituée par l'ensemble des points centraux. Il a même direction que la résultante du torseur. L'axe central n'existe que si la résultante du torseur n'est pas nulle.

Supposons un torseur défini en un point A du mouvement de S_1/R_0 :

$$\left\{\mathscr{V}_{(S_1/R_0)}\right\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}} \\ \overrightarrow{V_{(A\in S_1/R_0)}} \end{array} \right\}}$$

La position de la projection du point A sur l'axe central (que l'on notera H) est obtenu par la relation suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}} \wedge \overrightarrow{V_{(A\in S_1/R_0)}}}{\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}}^2}} \quad (4)$$



3 Composition des champs cinématiques

Propriété 2 : *Composition des champs cinématiques*

On peut décomposer un champ cinématique à l'aide des torseurs en effectuant une relation de Chasles par des solides successifs. Soit S_1, S_2, $\cdots$ S_n un ensemble de solides indéformables :

$$\boxed{\left\{\mathscr{V}_{(S_n/S_0)}\right\} = \left\{\mathscr{V}_{(S_n/S_{n-1})}\right\} + \left\{\mathscr{V}_{(S_{n-1}/S_{n-2})}\right\} + \cdots \left\{\mathscr{V}_{(S_1/S_0)}\right\}} \quad (5)$$

Il en découle une décomposition en :

- Vecteur rotation instantané :

$$\boxed{\vec{\Omega}(S_n/S_0) = \vec{\Omega}(S_n/S_{n-1}) + \vec{\Omega}(S_{n-1}/S_{n-2}) + \cdots \vec{\Omega}(S_1/S_0)} \quad (6)$$

- Vecteur vitesse en un même point quelconque A :

$$\boxed{\vec{V}(A \in S_n/S_0) = \vec{V}(A \in S_n/S_{n-1}) + \vec{V}(A \in S_{n-1}/S_{n-2}) + \cdots \vec{V}(A \in S_1/S_0)} \quad (7)$$

4 Champ de vecteur accélération des points d'un solide

Définition 6 : *Champ d'accélération*

Le relation de changement de point entre A et B pour un champ d'accélération d'un solide S_1 par rapport à un repère R_0 est donnée par :

$$\vec{a}(B/R_0) = \vec{a}(A/R_0) + \left[\frac{d}{dt}\vec{\Omega}(S_1/R_0)\right]_{R_0} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}(S_1/R_0) \wedge \left(\vec{\Omega}(S_1/R_0) \wedge \overrightarrow{AB}\right).$$

Attention :

Un champ d'accélération n'est pas un champ de moment, c'est à dire qu'il ne vérifie pas les propriétés d'équiprojectivité et il ne peut pas être décrit par un torseur.

II. Mouvements particuliers des solides

1 Mouvement de translation

a) Définition

Définition 7 : *Mouvement de translation*

Un solide S_1 est en mouvement de **translation** par rapport à R_0 si l'ensemble des points de S_1 ont la même vitesse à l'instant t par rapport à R_0.

Le vecteur de rotation instantané associé à ce torseur est nul : $\overrightarrow{\Omega(S_1/R_0)} = \overrightarrow{0}$. Il s'agit donc d'un **torseur couple** qui est indépendant du point où on l'exprime :

$$\boxed{\left\{\mathscr{V}_{(S_1/R_0)}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ \overrightarrow{V_{(A\in S_1/R_0)}}\end{array}\right\} = {}_B\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ \overrightarrow{V_{(B\in S_1/R_0)}}\end{array}\right\}} \quad (8)$$

Parmi les mouvements de translation, on peut en retenir deux particuliers :

b) Mouvement de translation rectiligne

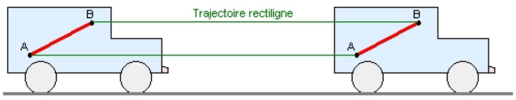
Définition 8 : *translation rectiligne*

Un mouvement de translation de S_1 par rapport à R_0 est dit de **translation rectiligne** si la trajectoire de tous les points de S_1 par rapport à R_0 est une **droite**. Dans ce cas $\overrightarrow{V_{(A\in S_1/R_0)}}$ a pour direction la trajectoire du point A.

c) Mouvement de translation circulaire

Définition 9 : *Mouvement de translation circulaire*

Un mouvement de S_1 par rapport à R_0 est dit de **translation circulaire** si la trajectoire de tous les points de S_1 sont des **cercles**.



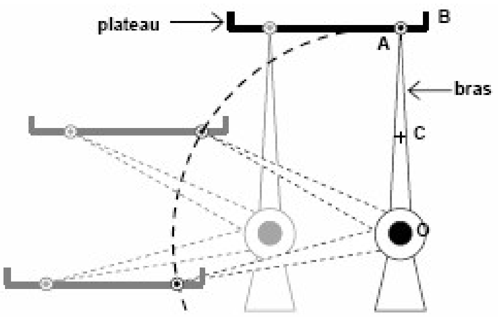


FIGURE 1 – Exemple de translation rectiligne et circulaire.

2 Mouvement de rotation

Définition 10 : ***Mouvement de rotation***

Un solide S_1 est en **mouvement de rotation** par rapport à R_0 autour d'un axe $\left(A, \overrightarrow{u}\right)$ si tous les points appartenant à l'axe $\left(A, \overrightarrow{u}\right)$ ont une vitesse nulle par rapport à R_0. Le vecteur de rotation instantané ($\overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0)$) est alors colinéaire à la direction $\overrightarrow{u}$:

$$\overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0) \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$

$$\boxed{\left\{\mathscr{V}_{(S_1/R_0)}\right\} = \underset{A}{\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0) \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}}} \qquad (9)$$

$$\forall A \in \overrightarrow{u}.$$

Ce torseur est alors "**un glisseur**" car il existe des points pour lesquels le moment du torseur cinématique est nul. Ces points appartiennent à l'axe de rotation qui est **l'axe central du torseur cinématique associé**.

3 Mouvement de translation/rotation hélicoïdale

Définition 11 : ***Mouvement de translation/rotation hélicoïdale***

- Un mouvement de **translation/rotation** hélicoïdale est la superposition entre un mouvement de rotation autour d'un axe $\left(A, \overrightarrow{u}\right)$ et de translation suivant la direction $\overrightarrow{u}$.
- Ces deux mouvement sont liés par le paramètre p qui représente le **pas hélicoïdal** et s'exprime en $m.rad^{-1}$.
- Le torseur cinématique associé à ce mouvement pour un solide S_1 par rapport à R_0 est donné par :

$$\boxed{\left\{\mathscr{V}_{(S_1/R_0)}\right\} = \underset{A}{\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0) = \Omega \cdot \overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{V_{(A\in S_1/R_0)}} = p\Omega \cdot \overrightarrow{u} \end{array}\right\}}} \qquad (10)$$

4 Mouvements plan : application à la cinématique graphique

a) Définition

Soit un solide S_1, de repère lié R_1 , en mouvement dans un repère R_0 .

Définition 12 : ***Mouvement plan***

On dit que S_1 a **un mouvement plan** dans R_0 si chaque point $M \in S_1$ se déplace parallèlement à un plan P_0 lié à R_0 . Autrement dit, si $\overrightarrow{n}$ est la normale à P_0, alors :

$$\overrightarrow{V_{(M\in S_1/R_0)}} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \qquad \forall M \in S_1$$

Remarque 2 :

Dans le cas d'un mouvement plan (par exemple dans le plan $(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0})$, le torseur cinématique de S_1 par rapport à R_0 se ramène à :

$$\left\{\mathscr{V}_{(S_1/R_0)}\right\} = \underset{\forall M}{\left\{\begin{array}{cc} 0 & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega_z & 0 \end{array}\right\}}_{R_0}$$

On remarquera ainsi que $\overrightarrow{\Omega_{(S_1/R_0)}} \perp \overrightarrow{V_{(M\in S_1/R_0)}}$, et donc que ce torseur est un glisseur.

b) Centre instantané de rotation (C.I.R.)

Définition 13 : *Centre instantané de rotation (C.I.R.)*

On appelle "**centre instantané de rotation**" (noté familièrement "**C.I.R.**") le point d'intersection entre l'axe central (Δ) et le plan du mouvement.
On désignera par "I_{10}" le CIR du mouvement de S_1 par rapport à R_0 .

Remarque 3 :

Pendant un instant Δt infiniment bref, le centre instantané de rotation représente le point autour duquel S_1 a un mouvement de rotation. Cependant, à l'instant suivant, il peut avoir changé de position.

Propriétés 3 :

- Soit S_1, un solide en mouvement dans un repère R_0 , et ayant pour CIR "I_{10}". Alors, pour tout $P \in S_1$, on a (fig.2) :

$$\overrightarrow{V_{(P\in S_1/R_0)}} \cdot \overrightarrow{PI_{10}} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \overrightarrow{V_{(P\in S_1/R_0)}} \perp \overrightarrow{PI_{10}} \tag{11}$$

- La norme des vecteurs vitesse est proportionnelle à la distance au CIR.
- On en déduit que la vitesse sur le CIR est nulle.

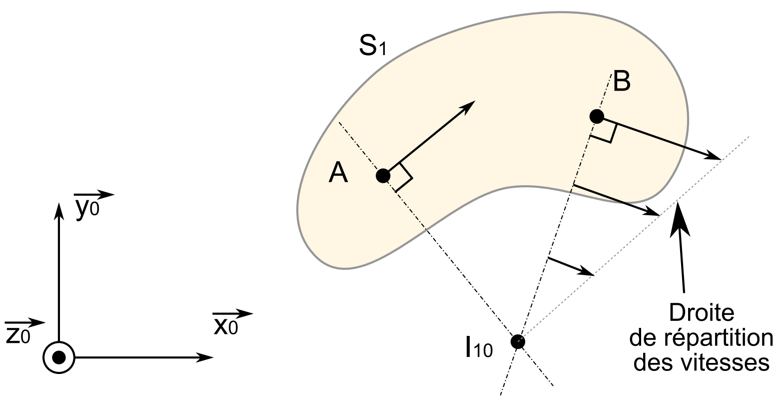
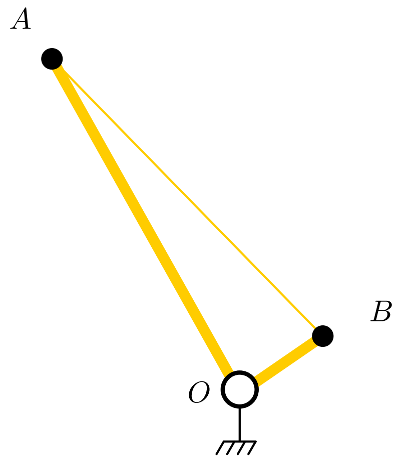


FIGURE 2 – Orthogonalité entre les vitesses et le "rayon au CIR".

Exemple 1 :

Soit une grue à flèche mobile (1), en liaison pivot avec sa base (0), au point O (voir dessin). Un câble vient tirer sur le point B de tel manière à ce que $\left\|\overrightarrow{V_{(B\in 1/0)}}\right\| = 1m/s$. On cherche à déterminer la vitesse du point A de (1) par rapport à (0). (on tracera les vitesses avec pour échelle : $1cm \leftrightarrow 1m/s$)



Théorème 1 : ***des trois plans glissants***

Soit trois solides S_1, S_2 et S_3 en mouvement les uns par rapport aux autres. Soient I_{21}, I_{32} et I_{13} les CIR associés. Alors : I_{21}**,** I_{23} **et** I_{13} **sont alignés.**

c) Cas des mouvements de translation

Lorsque le mouvement relatif des deux solides est un translation, le CIR **n'existe pas**. Cependant, on peut considérer qu'il est comme rejeté à l'infini, perpendiculairement à la direction de la translation (fig.3).

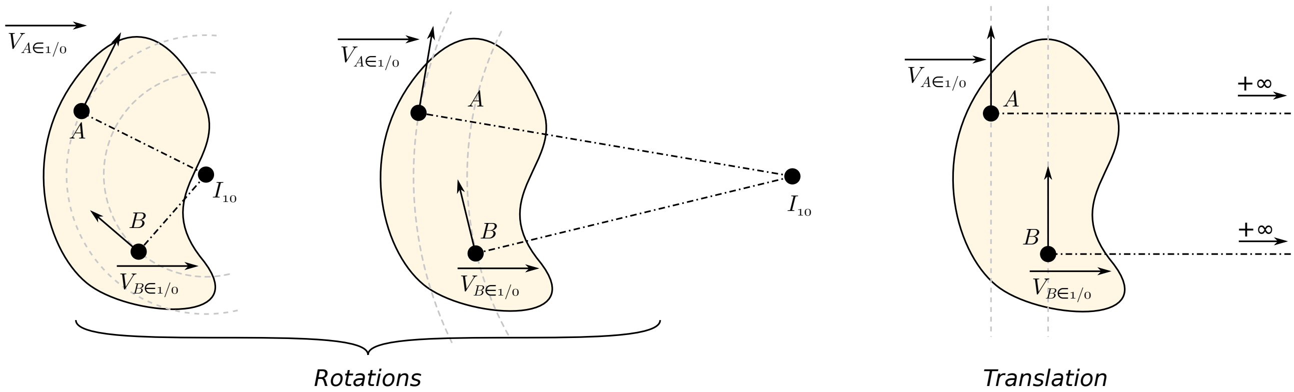


FIGURE 3 – CIR en translation.