Devoir facultatif n° 11

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et par $\mathbb{R}_2[X]$ le sous espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et du polynôme nul. On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$.

Partie I - Changement de bases et division euclidienne

1) Étant donnés trois réels deux à deux distincts a_1, a_2 et a_3, on considère trois polynômes Q_1, ,Q_2 et Q_3 de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\forall i, j \in \{ 1, 2, 3 \}, \begin{cases} Q_i(a_j) & = 0 \quad \text{si } i \neq j \\ Q_i(a_i) & \neq 0 \end{cases}.$$

Démontrer que Q_1, Q_2 et Q_3 sont linéairement indépendants.

2) On pose

$$\begin{cases} P_1(X) & = \dfrac{1}{8}(X-3)(X-5) \\ P_2(X) & = -\dfrac{1}{4}(X-1)(X-5) \\ P_3(X) & = \dfrac{1}{8}(X-1)(X-3) \end{cases}$$

Calculer $P_i(1)$, $P_i(3)$ et $P_i(5)$ pour $i \in \{ 1, 2, 3 \}$.

3) En déduire que $\mathscr{P} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

4) Déterminer la matrice de passage A de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{P}$.

5) Démontrer que A est inversible et calculer son inverse.

6) On pose $P_0(X) = (X-1)(X-3)(X-5)$.
Pour tout polynôme $P(X)$ de $\mathbb{R}[X]$, on note $\hat{P}(X)$ le reste de la division euclidienne de P par P_0 et par f l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = \hat{P}$.
Démontrer que f est linéaire.

7) Déterminer l'image de f.

8) Déterminer le noyau de f.

9) Comparer f^2 et f ; reconnaître f et en donner les éléments caractéristiques.

10) Démontrer que $\hat{P}(X) = P(1)P_1(X) + P(3)P_2(X) + P(5)P_3(X)$.

11) Retrouver ainsi la matrice inverse de A.

Partie II - Calcul matriciel

On pose :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12) Calculer le produit $(M - I)(M - 3I)(M - 5I)$, ainsi que chacun des produits se déduisant par permutation des trois facteurs.

13) On note E l'ensemble des matrices de la forme $aI + bM + cM^2$ avec a, b et c réels. Démontrer que E est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

14) Déterminer la dimension de E.

15) Pour tout polynôme $P(X) = a + bX + cX^2$, on pose $P(M) = aI + bM + cM^2$ et on note φ l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans E définie par $\varphi[P(X)] = P(M)$.
Démontrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

16) On pose $B_i = P_i(M)$ pour $i \in \{ 1, 2, 3 \}$. En utilisant la question **10)** et le résultat précédent, exprimer I, M et M^2 sous forme de combinaison linéaire de B_1, B_2 et B_3.

17) Déduire de la question **12)** la valeur des produits B_iB_j pour $i \neq j$.

— **FIN** —