2.I : Variables indépendantes :

X, Y v.a. à val. ds E (pr X)

F (pr Y).

Déf : On dit que X et Y st ind. si :

$$\forall x \in E, \forall y \in F : $$

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y).$$

X et Y "iid" : • X et Y st ind • Loi de X = Loi de Y.

2.5.4 : X : le n° de la 1ère boule
Y : le n° de la 2ème boule.

(X,Y) est à valeurs dans $E = [\![1,n]\!]^2 \setminus \{(a,a), a \in [\![1,n]\!]\}$

et $(X,Y) \hookrightarrow \mathcal{U}(E)$.

$$\# E = n^2 - n = n(n-1)$$

si $a,b \in [\![1,n]\!]$:

$$P(X=a, Y=b) = \begin{cases} 0 & \text{si } a=b \\ \dfrac{1}{n(n-1)} & \text{si } a \neq b. \end{cases}$$

$$P(X=1, Y=1) = 0$$

$$P(X=1) = \frac{1}{n} \quad \left(X \hookrightarrow \mathcal{U}(⟦1,n⟧)\right)$$

$$P(Y=1) = P(Y=1 \mid X=1) \times P(X=1)$$
$$+ P(Y=1 \mid X\neq 1) \times P(X\neq 1)$$
$$= 0 + \frac{1}{n-1} \times \frac{n-1}{n}$$
$$= \frac{1}{n}.$$

(cq : $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(⟦1,n⟧)$.

dc : $P(X=1, Y=1) \neq P(X=1) \times P(Y=1)$.

X et Y ne sont pas ind.

<u>Prop</u> : X et Y sont ind. (1) A, B st des ens

ssi : $\forall A \subset E, \forall B \subset F,$ (2)

$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$.

<u>Démo</u> $(\Leftarrow)$ si on pose $A = \{x\}$

$B = \{y\}$

supposons (2)

avec (2) :

$$P(X \in \{x\}, Y \in \{y\}) = P(X \in \{x\}) \cdot P(Y \in \{y\})$$

mais : $(X \in \{x\}) = (X = x)$

$(Y \in \{y\}) = (Y = y)$

d'où (1).

$(\Rightarrow)$ $A = \bigsqcup_{a \in A} \{a\}$

$B = \bigsqcup_{b \in B} \{b\}$

$$A \times B = \bigsqcup_{a \in A} \left(\bigsqcup_{b \in B} \{(a,b)\} \right)$$

dc : Si on suppose (1) :

$$P(X \in A, Y \in B) = P((X,Y) \in A \times B)$$

$$= P\left((X,Y) \in \bigsqcup_{a \in A} \left(\bigsqcup_{b \in B} \{(a,b)\} \right)\right)$$

$$= \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} P((X,Y) = (a,b))$$

$$= \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} P(X = a, Y = b))$$

$$\underset{(1)}{=} \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} \underbrace{P(X=a)}_{\text{ne dépend pas de } b} \times \underbrace{P(Y=b)}_{\text{ne dépend pas de } a}$$

$$= \left(\sum_{a \in A} P(X=a) \right) \cdot \left(\sum_{b \in B} P(Y=b) \right)$$

$$= P\Big(X \in \bigsqcup_{a \in A} \{a\}\Big) \cdot P\Big(Y \in \bigsqcup_{b \in B} \{b\}\Big)$$

$$= P(X \in A) \cdot P(Y \in B).$$

$\square$

Ex 2.5.6 : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$, $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$.

X et Y ind.

$P(X \leq Y)$.

$$(X \leq Y) = \bigsqcup_{x=1}^{n} \bigsqcup_{y=x}^{n} (X = x, Y = y)$$

$$= \bigsqcup_{y=1}^{n} \bigsqcup_{x=1}^{y} (X = x, Y = y)$$

$$P(X \leq Y) = \sum_{y=1}^{n} \sum_{x=1}^{y} P(X=x, Y=y)$$

$$\underset{\text{ind.}}{=} \sum_{y=1}^{n} \sum_{x=1}^{y} P(X=x) \cdot P(Y=y)$$

$$\underset{X,Y \sim \mathcal{U}([1,n])}{=} \sum_{y=1}^{n} \sum_{x=1}^{y} \frac{1}{n^2}$$

$$= \sum_{y=1}^{n} \frac{y}{n^2}$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{y=1}^{n} y = \frac{n(n-1)}{2n^2} = \boxed{\frac{n-1}{2n}}$$

Prop 2.5.7 : ("transfert")

$$\Omega \xrightarrow{X} E \xrightarrow{f} E'$$

$$\Omega \xrightarrow{Y} F \xrightarrow{g} F'$$

Si X et Y sont ind., $f(X)$ et $g(Y)$

aussi ($\triangle!$ $f(X) = f \circ X$
$g(Y) = g \circ Y$).

<u>Démo</u> : Soit $A' \subset E'$, $B' \subset F'$

Mq. $P(f(X) \in A', g(Y) \in B')$

$$= P(f(X) \in A') \times P(g(Y) \in B').$$

<u>rappel</u> : $[f(X) \in A'] = \{\omega \in \Omega, f \circ X(\omega) \in A'\}$

$$= \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in f^{\leftarrow}(A')\}$$

$$= [X \in f^{\leftarrow}(A')]$$

de m̂ : $[g(Y) \in B'] = [Y \in g^{\leftarrow}(B')]$

$$\left[(f(x), g(y)) \in A' \times B'\right]$$

$$= \left[(x,y) \in f^{\leftarrow}(A') \times g^{\leftarrow}(B')\right]$$

$$P(f(x) \in A', g(y) \in B')$$

$$= P(x \in f^{\leftarrow}(A'), y \in g^{\leftarrow}(B'))$$

$$\underset{\substack{\text{ind.} \\ x \text{ et } y}}{=} P(x \in f^{\leftarrow}(A')) \times P(y \in g^{\leftarrow}(B'))$$

$$= P(f(x) \in A') \times P(g(y) \in B').$$

Ex : On tire 2 dés, X : n° du 1er dé
Y : n° du 2ème dé.

Si X et Y sont ind, alors :

$$(\text{n° du 1er dé})^2 = X^2 = f(X)$$

avec :
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$

et $(\text{n° du 2ème dé}) + 1 = Y + 1$

sont ind.

2. <u>R.V</u>:

$X_1 : \Omega \longrightarrow E_1$

$X_2 : \Omega \longrightarrow E_2$

$\vdots$

$X_n : \Omega \longrightarrow E_n$.

<u>Déf</u>: $X_1 \ldots X_n$ sont ind. si:

$\forall x_1 \in E_1, x_2 \in E_2 \ldots x_n \in E_n$;

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$$

⚠ Si $A_1, \dots, A_n$ sont des ev,

ils sont mut. ind. ssi :

$\forall I \subset [\![1,n]\!]$,

$$P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

On va voir dès 2.5.13 que

2.7.8 $\Longrightarrow$ ($X_1 \dots X_n$ mut. ind.

$\Rightarrow \forall x_i \in E_i$, $\forall I \subset [\![1,n]\!]$,

$\Longleftarrow$ trivial

$$P\left(\bigcap_{i\in I} (X_i = x_i)\right) = \prod_{i\in I} P(X_i = x_i)\Big)$$

en particulier, pour $I = \{i, j\}$:

si $X_1 \dots X_n$ st mut ind,

X_i et X_j sont ind.

Ici : mut ind $\Rightarrow$ 2 à 2 ind.

⚠ vrai pour des v-a

faux pour des év. !!

2.7.10 : (!) 2 à 2. ind. ⇏ mut. ind.

$$P(X=1) = P(X=-1) = \frac{1}{2}$$

$$P(Y=1) = P(Y=-1) = \frac{1}{2}.$$

$Z = XY$.

Z est à val. ds $\{1,-1\}$

X et Y ind : par hyp.

$$(Z=1) = (X=1, Y=1) \sqcup (X=-1, Y=-1)$$

$$P(Z=1) = P(X=1, Y=1) + P(X=Y=-1)$$

$$\underset{\text{ind.}}{=} \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$(Z = -1) = (Z = 1)$$

d'où $P(Z = -1) = 1 - P(Z = 1)$

$$= \frac{1}{2}.$$

$$P(Z = 1 \mid X = 1) = P(Y = 1 \mid X = 1)$$

$$\underset{X, Y \text{ ind}}{=} P(Y = 1)$$

$$= \frac{1}{2} = P(Z = 1)$$

de même : $P(Z=1 \mid X=-1) = P(Z=1)$

$P(Z=-1 \mid X=\pm 1) = P(Z=-1)$

donc X et Z sont ind.

idem avec Y : Y et Z sont ind.

X, Y, Z sont 2 à 2 ind.

mut ind ??

$$P(X=1, Y=1, Z=-1) = 0$$

$$P(X=1) \times P(Y=1) \times P(Z=-1) = \frac{1}{8}$$

$$\neq 0$$

Thus, X, Y, Z are not mut. ind.