Devoir de révisions n° 2

Problème : Extrait et adapté du concours Edhec 2006.

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O. Au départ, le mobile est à l'origine (point d'abscisse 0).
Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité $\dfrac{k+1}{k+2}$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $\dfrac{1}{k+2}$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$, X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini (Ω, P) et on pose $u_n = P(X_n = 0)$.

Partie I : étude de la variable X_n.

1) Vérifier que $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ puis donner la loi de X_1.

2) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$.

3) **a)** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall k \in \{1, \dots, n\},\ P(X_n = k) = \frac{k}{k+1} P(X_{n-1} = k-1)\ .$$

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{0, 1, \dots, n\},\ P(X_n = k) = \frac{1}{k+1} u_{n-k}\ .$$

c) En remarquant que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{u_j}{n-j+1} = 1$.

d) Retrouver ainsi les valeurs de u_0 et u_1 puis déterminer u_2 et u_3.

4) **a)** En remarquant que la relation obtenue à la question 3)a) peut s'écrire sous la forme $(k+1)P(X_n = k) = kP(X_{n-1} = k-1)$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \mathrm{E}[X_n] - \mathrm{E}[X_{n-1}] = u_n$.

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, $\mathrm{E}[X_n]$ sous forme de somme mettant en jeu certains termes de la suite (u_n).

c) Pour tout entier naturel n non nul, donner la valeur de $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j}$ et vérifier que

$$u_n + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j+1} = 1.$$

Déduire de ces deux résultats que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n-j)(n-j+1)}$.

d) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, $u_n \geqslant \frac{1}{n+1}$. Déterminer ensuite $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}[X_n]$.

Partie II : informatique.

5) Écrire une fonction Python `q1(n)`, où `n` est un entier naturel, qui calcule u_0, u_1, ..., u_n ainsi que l'espérance de X_n. On renverra un couple `u, e`, où `u` est le tableau $[u_0, \dots, u_n]$ et `e` est l'espérance de X_n.

6) On note T l'instant auquel le mobile se retrouve pour la première fois en O (sans compter son positionnement au départ).

Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$. Écrire une fonction Python `q2()` qui calcule et renvoie une réalisation de T lors de l'expérience aléatoire étudiée. On rappelle que la fonction `randrange(a,b)` de la bibliothèque `random` permet d'obtenir une réalisation d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![\mathtt{a}, \mathtt{b}[\![$, les appels successifs de cette fonction pouvant être considérés comme donnant des réalisations mutuellement indépendantes de cette loi.

Un exercice amusant (et des permutations).

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on appelle cycle de σ une liste $(a_1, \dots, a_p)$ d'entiers de $\{1, \dots, n\}$, tous différents et vérifiant

$$\forall k \in \{1, p-1\}\,,\ \sigma(a_k) = a_{k+1} \text{ et } \sigma(a_p) = a_1 \ .$$

L'entier p est la longueur de ce cycle. Alternativement, on peut définir un cycle comme

$$\left\{\sigma^k(x),\ k \in \mathbb{N}\right\} \quad \text{avec} \quad x \in \{1, \dots, n\} \ .$$

1) Combien existe-t-il au plus de cycles de longueur strictement supérieure à $n/2$ dans une permutation σ ?

2) Si k est un entier strictement supérieur à $n/2$, montrer que le nombre de permutations possédant un cycle de longueur valant exactement k est

$$\binom{n}{k} \times (n-k)! \times (k-1)! = \frac{n!}{k} \ .$$

En déduire la probabilité d'obtenir un cycle de longueur strictement supérieure à $n/2$ en tirant une permutation uniformément dans $\{1, \dots, n\}$.

3) Un génie du mal a capturé 100 mathématiciens, qu'il compte bien exécuter. Pour s'amuser, il les réunit tous dans une salle, leur affecte chacun un numéro (de 1 à 100), et leur propose le « jeu » suivant.

— Dans une pièce adjacente sont disposées 100 boîtes, numérotées de 1 à 100.

— Les sbires du génie du mal ont inscrit (uniformément) dans chaque boîte le numéro d'un prisonnier puis ont refermé les boîtes.

— Chaque prisonnier doit entrer dans la salle individuellement et ouvrir 50 boîtes. Les boîtes sont refermées (sans être touchées) à la sortie de chaque prisonnier.

— Si chaque prisonnier trouve son numéro dans une des boîtes qu'il ouvre, alors tous les mathématiciens sont sauvés. Si l'un échoue, il meurent tous.

Trouver une stratégie donnant aux mathématiciens au moins 30% de chances de s'en sortir. On pourra utiliser Python pour calculer la probabilité de survie avec cette stratégie.

Morale de l'histoire : savoir faire des mathématiques peut sauver des vies ...

Un exercice plus difficile : enveloppe de Snell et stratégie optimale au photomaton.

Au photomaton, vous cherchez à obtenir la meilleure photo possible. Vous avez droit à trois essais : après le premier, vous pouvez soit accepter le cliché, soit y renoncer et en faire un deuxième. Dans ce cas, vou pourrez soit accepter soit refuser le deuxième cliché, mais dans ce dernier cas vous serez obligé d'accepter le troisième. Dans tous les cas, il est impossible de revenir en arrière : un cliché refusé est définitivement perdu.

Pour guider votre choix, vous évaluez chaque cliché par une note comprise entre 0 (exécrable) et 5 (parfaite). Pour faire simple, on considère que les notes obtenues par les clichés sont des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

1) On suppose d'abord que vous adoptez une stratégie « perfectionniste », qui consiste à n'accepter le premier ou le deuxième cliché que s'il est noté 5.

En moyenne, quelle note aura la photo avec laquelle vous repartirez ?

2) Dans une deuxième stratégie, vous renoncez systématiquement à la première photo. On note C l'ensemble des notes de la deuxième photo pour lesquelles ont choisi de conserver la deuxième photo et Y la note finale obtenue.

a) Exprimer Y en fonction de N_2, N_3 et $\mathbf{1}_{[N_2 \in C]}$ puis montrer que $\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[N_3] + \mathrm{E}\left[(N_2 - \mathrm{E}[N_3])\mathbf{1}_{[N_2 \in C]}\right]$.

b) Discuter, en fonction de la note obtenue par le deuxième cliché, l'opportunité d'en faire un troisième pour maximiser l'espérance de la note de la photo avec laquelle vous repartirez.

3) Déterminer la stratégie optimale qui vous permettra de repartir avec la photographie la mieux notée possible, en moyenne.

4) Montrer qu'en faisant tendre le nombre d'essais vers l'infini, on peut atteindre une note moyenne arbitrairement proche de 5.

5) Pour tout entier strictement positif k, déterminer la note moyenne maximale que l'on peut atteindre si l'on a droit à k essais.

Espérance conditionnelle.

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé (fini) (Ω, P). Si $y \in Y(\Omega)$ vérifie $P(Y = y) \neq 0$, on définit l'espérance de X conditionnellement à $[Y = y]$

comme étant l'espérance de X quand Ω est muni de la probabilité conditionnelle à $[Y=y]$, $P_{Y=y}$. On note cette espérance : $\mathrm{E}\left[X|Y=y\right] = \sum\limits_{x\in X(\Omega)} xP(X=x|Y=y)$.

Pour tout $y \in Y(\Omega)$, on pose alors $\psi(y) = \mathrm{E}\left[X|Y=y\right]$ si $P(Y=y) \neq 0$ et $\psi(y)=0$ sinon. On définit alors l'espérance conditionnelle de X sachant Y comme étant la variable aléatoire $\mathrm{E}\left[X|Y\right] = \psi(Y)$.

1) Soit $y \in Y(\Omega)$, montrer que $P(Y=y)\mathrm{E}\left[X|Y=y\right] = \mathrm{E}\left[X\mathbf{1}_{[Y=y]}\right]$.

2) Montrer que l'espérance conditionnelle $\mathrm{E}\left[X|Y\right]$ est linéaire, positive et croissante en fonction de X.

3) Montrer la formule de l'espérance totale : $\mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[X|Y\right]\right] = \mathrm{E}X$.

4) Montrer que pour toute fonction réelle f, presque-sûrement $\mathrm{E}\left[Xf(Y)|Y\right] = f(Y)\mathrm{E}\left[X|Y\right]$.

5) Que vaut donc $\mathrm{E}\left[X|Y\right]$ si X est de la forme $f(Y)$, où f est une fonction réelle ?

6) Montrer que pour toute variable aléatoire Z de la forme $f(Y)$, alors $\mathrm{E}\left[XZ\right] = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[X|Y\right]Z\right]$. Interpréter ceci d'un point de vue euclidien.

7) Donner une fonction f solution du problème de régression par moindres carrés de X sur Y, c'est-à-dire qui minimise $\mathrm{E}\left[(X-f(Y))^2\right]$.

8) Que vaut $\mathrm{E}\left[X|Y\right]$ si X et Y sont indépendantes ?

9) Application : si $(X_1,\ldots,X_n)$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$, avec $p \in [0,1]$, et $S = X_1+\cdots+X_n$, quelle est la loi de $\mathrm{E}\left[S|X_1\right]$?

10) Si f est une fonction réelle, que vaut $\mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[X|f(Y)\right]|Y\right]$?

11) Montrer aussi que presque-sûrement $\mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[X|Y\right]|f(Y)\right] = \mathrm{E}\left[X|f(Y)\right]$.

— **FIN** —