Devoir à la maison n° 13

À rendre le 13 février

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction non affine de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que

$$f(a) < 0 \text{ et } f(b) > 0$$

ainsi que

$$\forall x \in [a,b],\ f'(x) > 0 \text{ et } f''(x) \geqslant 0.$$

1) On rappelle que la corde à la courbe de f entre les points d'abscisses x et y est le segment reliant les points de coordonnées $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.

a) Illustrer la situation en traçant schématiquement une telle fonction, ainsi qu'une tangente et une corde en position générale.

b) Montrer que le graphe de f se situe au-dessus de toutes ses tangentes.

c) Montrer que, pour tout $c \in [a,b]$, la fonction $\tau_f(c,\cdot) : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ est croissante sur $[a,b] \setminus \{c\}$.

d) En déduire que le graphe de f est en dessous de toutes ses cordes.

On dit qu'une telle fonction est *convexe*.

2) Montrer qu'il existe un unique $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.

3) Soit $u \in [c,b]$.

a) Montrer que la tangente Δ à la courbe Γ de f au point $(u, f(u))$ coupe l'axe des abscisses en un point $(v, 0)$, en précisant l'expression de v en fonction de u, $f(u)$ et $f'(u)$.

b) Montrer que $v \leqslant u$.

c) Montrer que $c \leqslant v$, et illustrer graphiquement la situation.

4) **a)** À l'aide des résultats précédemment établis, justifier l'existence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

b) Montrer que cette suite est convergente, et donner sa limite.

5) Justifier l'existence des réels $m_1 = \min\limits_{[a,b]} f'$ et $M_2 = \max\limits_{[a,b]} f''$.

6) On fixe dans cette question un entier $n \geqslant 0$ et on pose, pour tout $x \in [a,b]$,

$$g(x) = (x - c)f'(x) - f(x).$$

a) Justifier que g est dérivable, et montrer que pour tout $t \in [c, x_n]$, $|g'(t)| \leqslant M_2(x_n - c)$.

b) En déduire que $|g(x_n)| \leqslant M_2(x_n - c)^2$.

c) Déduire de ce qui précède que

$$0 \leqslant x_{n+1} - c \leqslant K(x_n - c)^2,$$

où $K = \dfrac{M_2}{m_1}$.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant x_n - c \leqslant K^{2^n-1}(b-a)^{2^n}$.

7) Que se passe-t-il si nous appliquons la méthode de Newton-Raphson à une fonction affine ?

8) **Une application numérique :** nous allons appliquer la méthode précédente à $f \ : \ x \mapsto x^3 - 3$, $a = \dfrac{5}{4}$ et $b = \dfrac{3}{2}$.

a) Montrer que les hypothèses de la méthode sont bien vérifiées. Que valent c ? m_1 ? M_2 ? K ?

b) Établir que dans le cas de cet exemple numérique, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant x_n - c \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n}$.

c) En remarquant que $1024 = 2^{10}$, pour quelle valeur de N sommes-nous assurés que x_N est une valeur approchée de c à 10^{-9} près ?

— **FIN** —