



LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON
SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR
CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I.
ANNÉE 2017 - 2018

C6 : ANALYSE FRÉQUENTIELLE DES SYSTÈMES ASSERVIS

C6-1 - Introduction à l'analyse fréquentielle des systèmes asservis

20 mars 2018

Table des matières

I Définition de l'analyse fréquentielle	1
II Intérêts de l'étude fréquentielle	2
III Définition du support du cours	3
IV Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique	4

Compétences

- **Modéliser :**
 - Identifier et caractériser les grandeurs physiques : caractéristiques fréquentielles
 - Systèmes linéaires continus et invariants
 - Signaux canoniques d'entrée : signaux sinusoïdaux
 - Schémas blocs, fonctions de transferts
- **Résoudre :** Procéder à la mise en oeuvre d'une démarche de résolution analytique
 - Réponse fréquentielle;

I. Définition de l'analyse fréquentielle

Définition 1 : Analyse fréquentielle ou harmonique

L'analyse fréquentielle d'un système linéaire, continu et invariant consiste à étudier la réponse ($s(t)$) vis à vis d'une entrée ($e(t)$) de type harmonique ou sinusoïdale :

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t) = e_0 \sin(2\pi f t) \quad (1)$$

Ce signal est caractérisé par :

- sa **fréquence** f ,
- ou sa **pulsation** $\omega = 2\pi f$,
- son **amplitude** e_0 .

$e(t) \rightarrow$ Système $\rightarrow s(t)$

II. Intérêts de l'étude fréquentielle



Définition 2 : Décomposition en série de Fourier

Tout signal **périodique** se décompose en une **somme de signaux harmoniques** (e.g. sinusoïdale). Par exemple un signal périodique et impaire de fréquence f peut se décomposer de la façon suivante :

$$e(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cdot \sin(2\pi k f t) \quad (2)$$

où les coefficients a_k représente les différentes amplitudes des fonctions harmonique constituant la décomposition.



Remarque 1 :

Dans la pratique, pour reconstituer un signal, on peut effectuer une **décomposition finie** en série de Fourier ($\tilde{e}(t)$) en prenant n termes :

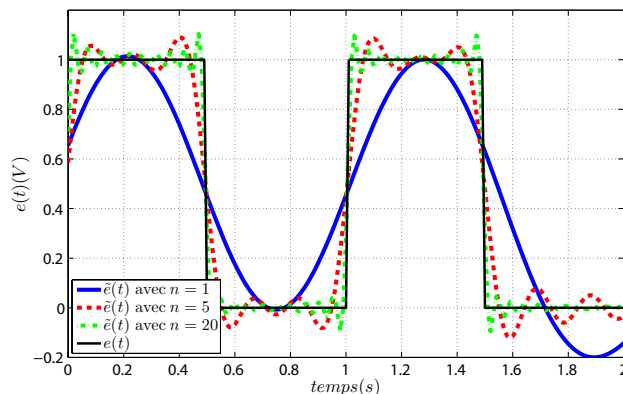
$$\tilde{e}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cdot \sin(2\pi k f t) \quad (3)$$

La précision de la décomposition sera alors d'autant plus fidèle au signal de départ que le nombre de termes (n) sera grand.



Exemple 1 : Reconstitution d'un signal carré périodique

Prenons l'exemple d'un signal de tension ($e(t)$) de type créneau d'une période $T = 1/f$ égale à 1 s et d'amplitude égale à 1 V. On peut effectuer une décomposition finie $\tilde{e}(t)$ (équation 3) avec différentes valeurs de n (e.g. {1, 5, 20}). La figure suivante compare la "richesse" des différentes décompositions finies en série de Fourier de $e(t)$. On remarque bien que plus n est grand plus le signal reconstitué ($\tilde{e}(t)$) se rapproche du signal initial ($e(t)$).



Propriété 1 : Étude d'un signal quelconque

Pour étudier la réponse d'un système vis-à-vis d'un signal quelconque, il faudra alors être capable de caractériser la **réponse fréquentielle** sur une plage de fréquence (f) ou de pulsation (ω) étendue. On peut également choisir cette méthode d'analyse pour vérifier le comportement d'un système vis-à-vis d'une entrée harmonique caractérisée par différentes valeurs de fréquence (f) ou de pulsation (ω).

III. Définition du support du cours



Exemple 2 : Suspension de véhicule

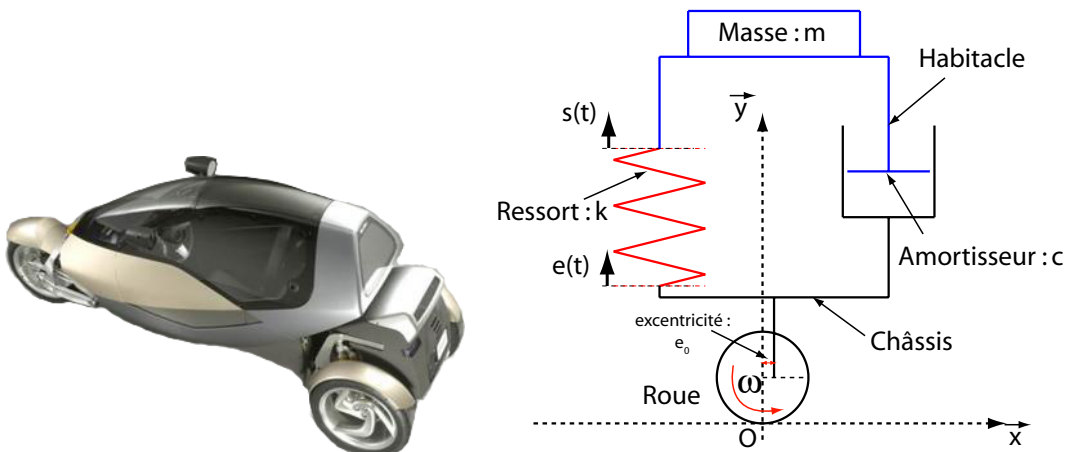
On modélise une suspension d'un véhicule par un ressort de raideur k et un amortisseur de coefficient d'amortissement c , montés en parallèles. On ramène le poids du véhicule à une masse globale m . Dans un premier temps, nous prendrons comme valeurs numériques des différents paramètres :

- $m = 100\text{ kg}$,
- $c = 1,13\text{ kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$,
- $k = 80\text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$.

On note respectivement $e(t)$ et $s(t)$ les déplacements verticaux (suivant \vec{y}) du châssis et de l'habitacle par rapport à la position d'équilibre du système. La rotation constante de la roue avec une vitesse angulaire ω entraîne un déplacement horizontal du véhicule à vitesse constante selon la direction $-\vec{x}$. Ainsi le repère $R_0(O, \vec{x}, \vec{y})$ peut être supposé comme galiléen. L'axe de la roue est légèrement excentrée par rapport à son centre. Ceci provoque donc un déplacement du châssis en fonction de la vitesse de rotation de la roue ω .

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t).$$

On se propose de modéliser la réponse en déplacement vertical (suivant \vec{y}) de l'habitacle ($s(t)$) en fonction de la pulsation ω .



Le Principe Fondamental de la Dynamique en résultante suivant la direction \vec{y} appliqué à l'habitacle par rapport au repère R_0 donne l'équation différentielle suivante :

$$-c \left(\frac{d(s(t) - e(t))}{dt} \right) - k(s(t) - e(t)) = m \frac{d^2 s(t)}{dt^2}.$$

La fonction de transfert du système $H(p) = S(p)/E(p)$ est égale à (forme canonique) :

Avec $\tau = 2\xi/\omega_0$.

IV. Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

La transformée de Laplace de l'entrée harmonique ($e(t)$ équation 1) est donnée par :

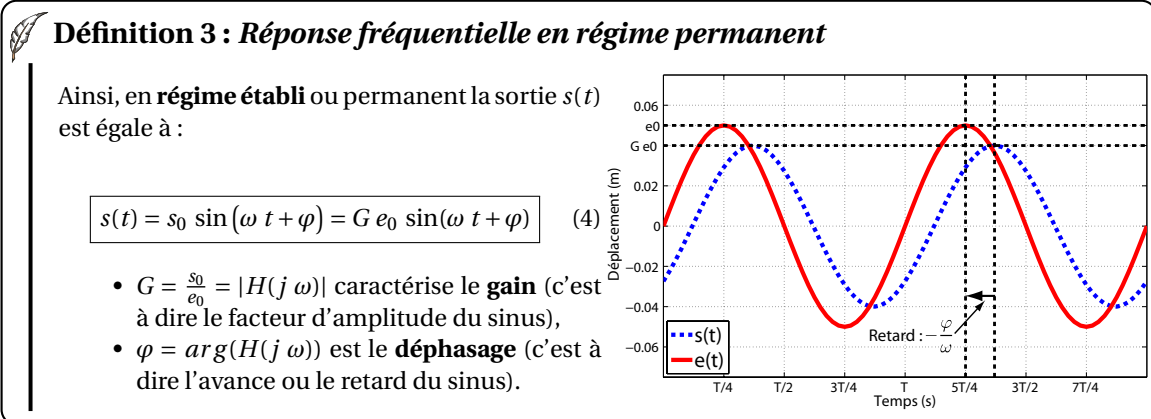
$$E(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2}$$

Dans le domaine de Laplace la sortie $S(p)$ du système soumis à une entrée harmonique s'écrit :

On obtient alors avec une transformée de Laplace inverse : ,

$$S(t) = e_0 \left[\frac{G}{2j} \left(-e^{-j(\varphi+\omega t)} + e^{j(\varphi+\omega t)} \right) + e^{at} Q(t) \right] = e_0 [G \sin(\omega t + \varphi) + e^{at} Q(t)]$$

Or, on rappelle que $a < 0$ (ici $a = -\frac{c}{2m}$) et donc $e^{at} Q(t)$ tend vers 0 en $+\infty$. Cette partie s'annule donc une fois que le régime est permanent ou établi et représente le **régime transitoire**.



Remarque 2 : Cas général

Dans le cas général d'un système linéaire continu invariant, sous les hypothèses de **stabilité** et avec des **conditions initiales nulles** le résultat précédent est encore valable.



Conclusion :

L'étude fréquentielle d'un système linéaire continu et invariant revient à étudier le gain fréquentiel G , ainsi que la phase φ de la fonction de transfert $H(p)$ en fonction de la pulsation ω ou de la fréquence f .

On utilisera pour cela des outils des outils graphiques appelés "**lieux de transfert**".