Devoir surveillé n° 5
– Version 2 –
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Suites de Cauchy.

Lorsqu'une partie X de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$, on notera cette dernière $\sup X$.

Partie 1 : Suites de Cauchy

Étant donné $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels, on dit que u est une suite *de Cauchy* lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall m \geqslant n_0,\ |u_n - u_m| \leqslant \varepsilon.$$

1) Lesquelles des suites ci-dessous sont de Cauchy ? Justifier.

a) $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **b)** $\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **c)** $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

2) Soit u une suite de Cauchy. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant |u_{n_0}| + \varepsilon.$$

En déduire que toute suite de Cauchy est bornée.
La réciproque est-elle vraie ?

3) Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.

Partie 2 : Convergence des suites de Cauchy

On cherche maintenant à démontrer la réciproque de $\boxed{\textbf{3)}}$ de la partie précédente. Dans cette partie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite bornée à termes réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \inf \{\, u_m \mid m \geqslant n \,\}$$

et

$$b_n = \sup \{\, u_m \mid m \geqslant n \,\}.$$

4) **a)** Justifier que les définitions respectives de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont bien un sens.

b) Expliciter les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5) **a)** Montrer l'encadrement

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant u_n \leqslant b_n.$$

b) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

c) On suppose qu'on a un réel $h > 0$ et un entier naturel n tels que

$$\forall m \geqslant n,\ |u_m - u_n| \leqslant h.$$

Montrer l'encadrement $b_n - h \leqslant u_n \leqslant a_n + h$.

6) On suppose maintenant que u est une suite de Cauchy.
Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

7) En déduire que toute suite de Cauchy est convergente.

Partie 3 : Une application

On se donne une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\{-1, 1\}$, et on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^k}.$$

8) Montrer que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$,

$$|S_m - S_n| \leqslant \frac{1}{2^{\min(m,n)}}$$

9) En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

10) Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément de $[-2, 2]$.

II. Équation de Pell-Fermat.

On appelle équation de Pell-Fermat toute équation de la forme $x^2 - dy^2 = 1$ où les inconnues x et y sont des entiers, et où $d \in \mathbb{N}$ n'est pas un carré parfait. Nous allons résoudre cette équation pour $d = 7$. Cette méthode pourrait se généraliser à n'importe quelle valeur de d.

On appelle *endomorphisme d'anneaux* toute application φ entre deux anneaux A_1 et A_2, qui est un morphisme de groupes pour la loi $+$, un morphisme entre magmas pour la loi $\times$, c'est-à-dire : $\forall x, y \in A_1$, $\varphi(x \times y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$, et tel que $\varphi(1_{A_1}) = 1_{A_2}$.

On note $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ l'ensemble $\left\{ a + b\sqrt{7} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

1) Montrer que $\left(\mathbb{Z}[\sqrt{7}], +, \times\right)$ est un anneau.

2) **a)** Montrer que $\sqrt{7}$ est irrationnel.

b) Montrer

$$\forall x \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}] \quad \exists!(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \quad x = a + b\sqrt{7}$$

L'élément $a - b\sqrt{7}$ de $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ est appelé *conjugué* de x et noté $\overline{x}$ (ne pas le confondre avec le conjugué complexe !).

c) On considère l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\sqrt{7}] & \to & \mathbb{Z}[\sqrt{7}] \\ x & \mapsto & \overline{x} \end{array}$. Montrer que φ est un endomorphisme d'anneaux.

3) Pour tout $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, on pose $N(x) = x\overline{x}$. Ce réel est appelé *norme* de x.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, $N(x) \in \mathbb{Z}$.

b) Montrer que pour tout $x, x' \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, $N(xx') = N(x)N(x')$.

c) Soit $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$. Montrer que x est inversible si et seulement si $N(x) = \pm 1$.

d) On pose $G = \left\{ x \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}] \,\middle|\, N(x) = 1 \right\}$. Montrer que $(G, \times)$ est un groupe.

e) Expliquer en quoi la détermination des éléments de G est équivalente à la détermination des solutions entières de l'équation $x^2 - 7y^2 = 1$.

4) Soit $x \in G \cap]1, +\infty[$. On note $x = a + b\sqrt{7}$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$.

a) Calculer $x + \overline{x}$ et en déduire que $a > 0$.

b) Montrer que $x^2 = 1 + 2bx\sqrt{7}$ et en déduire que $b > 0$.

c) Montrer que $b \geqslant 3$ et $a \geqslant 8$.

d) En déduire que $G \cap]1, +\infty[$ contient un plus petit élément $x_0 = a_0 + b_0\sqrt{7}$ pour l'ordre naturel sur $\mathbb{R}$.

e) Montrer qu'il existe un entier naturel n tel que $x_0^n \leqslant x < x_0^{n+1}$.

f) En déduire que $x = x_0^n$.

g) Montrer finalement que $G = \{ \pm x_0^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$.

5) En déduire toutes les solutions de l'équation $x^2 - 7y^2 = 1$.

— FIN —