Ex. 17 :

1) $I_0 = \int_1^e 1 \, dt = e - 1.$

$$I_1 = \int_1^e \ln t \, dt = \left[t \ln t - t \right]_1^e$$

$$= (e - e) - (0 - 1) = 1.$$

2) $$I_{n+1} = \int_1^e \ln^{n+1}(t) \, dt = \int_1^e 1 \times \ln^{n+1}(t) \, dt$$

$1 \leftarrow t$

$\ln^{n+1}(t) \longrightarrow \frac{(n+1)\ln^n t}{t}$

$$\underset{IPP}{=} \left[t \ln^{n+1}(t) \right]_1^e - \int_1^e (n+1) \ln^n(t) \, dt$$

$$= e - (n+1) I_n.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \quad I_{n+1} = e - (n+1) I_n}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$\forall t \in [1, e]$, $\ln^n(t) \geqslant 0$

(et $1 < e$) donc $\displaystyle\int_1^e \ln^n(t)\,dt \geqslant 0$

⚠ On veut > 0 : $\forall t \in]1, e]$, $\ln^n(t) > 0$

et $\ln^n$ est continue sur $[1, e]$, donc :

$$\int_1^e \ln^n(t)\,dt > 0.$$

de plus : $I_{n+1} = e - (n+1) I_n$

donc : $I_n = \dfrac{e - I_{n+1}}{n+1}$ or : $I_{n+1} > 0$

$< \dfrac{e}{n+1}$

donc : $\boxed{0 < I_n \leq \frac{e}{n+1}}$

4) donc par encadrement : $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

et donc : $e - (n+1) I_n = I_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

ainsi : $e - (n+1) I_n = o(1)$ donc : $(n+1) I_n = e + o(1)$

ie : $I_n = \frac{e}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $\boxed{I_n \sim \frac{e}{n+1} \sim \frac{e}{n}}$

5) $\forall n \in \mathbb{N}$: $D_n = |u_n - I_n|$

donc : $D_{n+1} = |u_{n+1} - I_{n+1}| = |e - (n+1) u_n - (e - (n+1) I_n)|$

$= (n+1) D_n$

$D_1 = D_0$, $D_2 = 2D_1$, $D_3 = 3D_2 = 6D_1 = 6D_0 = 3!\,D_0$

1 récurrence facile assure que $\forall n$, $D_n = (n!) \times D_0$.

Mais si nous supposons que $u_0 \neq I_0$, alors $D_0 \neq 0$,

et $D_0 = |u_0 - I_0| > 0$ dc : $D_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

avec l'it : $D_n = |u_n - I_n| \leq |u_n| + |I_n|$

dc : $|u_n| \geq D_n - |I_n|$

or $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ dc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par 1

réel m, dc :

$$|u_n| \geq D_n - m$$

dc par minoration : $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.