

Devoir facultatif n° 5

Pour une partie X de \mathbb{R} , on appelle *adhérence* de X (notée \bar{X}) l'ensemble des limites des suites à valeurs dans X qui convergent.

Une partie X de \mathbb{R} est dite *fermée* si $\bar{X} = X$, et est dite *ouverte* si son complémentaire dans \mathbb{R} est fermé.

- 1) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a < b$. Pour chacune des parties de \mathbb{R} suivantes, déterminer son adhérence, puis si elle est fermée et/ou ouverte.

a) $[a, b]$

c) $]a, b]$

e) \emptyset

b) $]a, b[$

d) \mathbb{R}

f) $\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$

- 2) Soit $A, B \subset \mathbb{R}$.

a) Montrer que l'on a toujours $A \subset \bar{A}$.

b) Dans le cas où $A \subset B$, comparer \bar{A} et \bar{B} .

c) De manière générale, comparer $\overline{A \cup B}$ et $\bar{A} \cup \bar{B}$.

d) De manière générale, comparer $\overline{A \cap B}$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$.

e) Quelles règles peut-on énoncer sur l'intersection de *deux* fermés ? Sur leur union ?

f) Montrer qu'une intersection *quelconque* de fermés est un fermé. Est-ce vrai pour une union quelconque ?

On appelle *valeur d'adhérence* d'une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ toute limite d'une suite convergente extraite de u .

- 3) Déterminer les valeurs d'adhérences des suites de termes généraux suivants.

a) $(-1)^n$

b) $(-1)^n n$

c) $\cos(n)$ (*indication* : montrer que $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est un sous-groupe dense de \mathbb{R}).

- 4) Montrer qu'une suite réelle bornée admet au moins une valeur d'adhérence. Combien les suites convergentes ont-elles de valeurs d'adhérence ?

- 5) Montrer qu'une suite bornée n'ayant qu'une seule valeur d'adhérence converge.

- 6) Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite réelle est une partie fermée de \mathbb{R} .

— FIN —