Applications linéaires et intégration – corrections

Feuille n° 21

Exercice 8 Une équation paramétrique de E est $\begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$. Ainsi $E = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, qui est bien un sev. Et une famille génératrice de E est donc $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Exercice 14

1) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : $(x, y, z) \in F$ ssi $x = z$ ssi $\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x \end{cases}$ ssi $(x, y, z) \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$, et donc $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$. Cette dernière famille est libre car échelonnée, donc c'est une base de F.
Il nous reste à montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, et à décomposer un vecteur de $\mathbb{R}^3$ en une somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Nous pouvons répondre à ces deux questions en une seule fois, en montrant que la concaténation des bases de F et G est une base de $\mathbb{R}^3$, car tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de ces vecteurs :
Soit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, et soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = x \\ a + c = y \\ b = z \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x - z \\ b = z \\ c = -x + y + z \end{cases}.$$

Puisque tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs d'une base de F concaténée à ceux d'une base de G, alors $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

2) Enfin, la décomposition précédente assure que $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (x-z)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + (-x+y+z)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, où $(x-z)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \in G$ et $z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + (-x+y+z)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \in F$, donc si p est la projection sur F parallèlement à G, $p\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + (-x+y-z)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, soit $p\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix}z\\-x+y+z\\z\end{pmatrix}\end{array}$.

Feuille n° 22

Exercice 1 Soit f, g uniformément continues. Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Il existe donc $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |g(x)-g(y)| \leqslant \alpha.$$

On vérifie que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(g(x))-f(g(y))| \leqslant \varepsilon.$$

Exercice 6 Si pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) > x$ alors, comme $x \mapsto f(x) - x$ est continue et strictement positive, $\displaystyle\int_0^1 (f(x)-x)\,\mathrm{d}x > 0$ *i.e.* $\displaystyle\int_0^1 f > \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = 1/2$: c'est exclu.

Même chose pour : $\forall x \in]0,1[, f(x) > x$.

Et alors, $f(x) - x$ change de signe sur $]0,1[$, et par le TVI il existe un $c \in]0,1[$ tel que $f(c) = c$.

On pouvait aussi appliquer le théorème de Rolle à $x \mapsto \displaystyle\int_0^x (f(t)-t)\,\mathrm{d}t$ sur $[0,1]$.

Exercice 9

1) La fonction $f\ : x \mapsto \sqrt{1+x^n}$ est croissante, donc si $x \in \left[1, 1+\dfrac{1}{n}\right]$, $f(1) \leqslant f(x) \leqslant f\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

2) Avec la première question, $\dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}\sqrt{1+(1+1/n)^n}$ puis $\lim (1+1/n)^n = \mathrm{e}$ et donc par le théorème des gendarmes, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.