

Feuille d'exercice n° 23 : **Matrices**

**Exercice 1** (✎) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On dit que  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est stochastique si tous les coefficients de  $A$  sont positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chaque ligne de  $A$  est égale à 1.

Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.

**Exercice 2** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer l'ensemble des matrices  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que :

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), MH = HM.$$

**Exercice 3** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1) Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AXB = 0.$$

Montrer que  $A = 0$  ou  $B = 0$ .

2) Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  à coefficients diagonaux dominants, c'est-à-dire telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|.$$

Montrer que  $A$  est inversible.

3) Déterminer les matrices  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$  telles que  $M^2 = 0$ .

**Exercice 4** (✎) Soit  $h$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par rapport à deux bases  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  et  $\mathcal{C} = (f_1, f_2)$  par la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ .

1) On prend dans  $\mathbb{R}^3$  la nouvelle base  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  définie par :

$$e'_1 = e_2 + e_3, \quad e'_2 = e_3 + e_1, \quad e'_3 = e_1 + e_2.$$

Quelle est la nouvelle matrice  $A_1$  de  $h$  ?

2) On choisit pour base de  $\mathbb{R}^2$  la nouvelle base  $\mathcal{C}' = (f'_1, f'_2)$  définie par :

$$f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \quad f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2),$$


en conservant la base  $\mathcal{B}'$  de  $\mathbb{R}^3$ . Quelle est la nouvelle matrice  $A_2$  de  $h$  ?

**Exercice 5** (✎) Soit  $\varphi$  une application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans lui-même telle que  $\varphi \neq 0$  et  $\varphi^2 = 0$ . Soit  $x \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\varphi(x) \neq 0$ . Montrer que  $\{x, \varphi(x)\}$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ . Déterminer la matrice de  $\varphi$  dans cette base.


**Exercice 6** (✎) Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre 2, et soit  $\varphi$  l'application de  $M_2(\mathbb{R})$  dans lui-même, envoyant  $M$  sur  $AM$ . Montrer que  $\varphi$  est linéaire et déterminer sa matrice sur la base canonique de  $M_2(\mathbb{R})$ .

**Exercice 7** (   ) Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie, notée  $n$ .

- 1) Soit  $\varphi$  un projecteur de  $E$ , peut-on trouver une base dans laquelle la matrice de  $\varphi$  est particulièrement simple ?
- 2) Même question pour une symétrie.

**Exercice 8** (  ) Soit  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}_2[X]$  par  $P \mapsto (X^2 + 2)P'' + (X + 1)P' + P$ .

- 1) Vérifier que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
- 2) Déterminer la matrice de  $\varphi$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
- 3) Déterminer  $\text{Ker}(\varphi - 5\text{Id})$ . Calculer  $\varphi(1)$  et  $\varphi(X + 1)$ .
- 4) En déduire une base de  $\mathbb{R}_2[X]$  dans laquelle la matrice de  $\varphi$  est diagonale.

**Exercice 9** (  )

- 1) On considère l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donner une base de  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$ .

- 2) Soit  $f$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le rang de  $f$ , ainsi qu'une base de son noyau et de son image. Donner une équation de l'image.

**Exercice 10** (   ) Soit  $M = \begin{pmatrix} -35 & -7 & -22 \\ -6 & 0 & -4 \\ 57 & 11 & 36 \end{pmatrix}$ .

- 1) En interprétant  $M$  comme étant la matrice d'un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$ , montrer qu'il existe une base  $(I, J, K)$  telle que cet endomorphisme a dans cette base pour matrice une matrice diagonale avec 1, 2, -2 sur la diagonale.
- 2) Calculer alors  $M^n$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .
- 3) Exprimer en fonction de  $n$  les termes  $u_n$ ,  $v_n$ ,  $w_n$  où  $u_n$ ,  $v_n$ ,  $w_n$  sont les termes généraux de 3 suites vérifiant :


$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= -35u_n & - & 7v_n & - & 22w_n \\ v_{n+1} &= -6u_n & & & - & 4w_n \\ w_{n+1} &= 57u_n & + & 11v_n & + & 36w_n \end{cases}, \quad \text{avec } u_0 = v_0 = w_0 = 1.$$

**Exercice 11** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Un endomorphisme  $\varphi$  de  $E$  est représenté canoniquement par la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & c \\ 1 & -2 & d \\ a & b & f \end{pmatrix}$ . Déterminer les réels  $a, b, c, d, f$  de façon que l'endomorphisme  $\varphi$  vérifie les deux conditions suivantes :


- 1)  $\text{Ker } \varphi$  est engendré par le vecteur  $u = e_1 + 2e_2 + 3e_3$  ;
- 2)  $\text{Im } \varphi$  est engendré par les deux vecteurs  $v = e_2 - 3e_3$  et  $w = 3e_1 - 5e_3$ .


**Exercice 12** () Calculer le rang des matrices suivantes.

$$\diamond = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \heartsuit = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \spadesuit = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \clubsuit = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 13** () Calculer, s'il existe, l'inverse de chacune des matrices suivantes.

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 3) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} & 5) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} & 7) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_n \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ a_1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ 2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} & 4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 13 & 2 & 1 & 9 \\ 7 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} & 6) \begin{pmatrix} 1 & \bar{z} & \bar{z}^2 \\ z & 1 & \bar{z} \\ z^2 & z & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

**Exercice 14** () Montrer que la famille  $(X^3 + 2X + 1, X^3 - 2X^2 + 2, X^3 - 2X^2 + 1, X^3 + X)$  est une base de  $\mathbb{R}_3[X]$  au moyen d'une technique matricielle.

**Exercice 15** () Soit  $a$  et  $b$  deux réels, et  $A$  la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$


Montrer que  $\text{rg}(A) \geq 2$ . Pour quelles valeurs de  $a$  et  $b$  a-t-on  $\text{rg}(A) = 2$  ?

**Exercice 16** Calculer les rangs des matrices suivantes et calculer leurs inverses quand il y a lieu.

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ \lambda & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad 2) B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ -4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad 3) C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

**Exercice 17** Déterminer l'inverse des matrices suivantes (si cet inverse existe) :


$$\diamond = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \heartsuit = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \spadesuit = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & . & . & a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 & . & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & a \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}, \clubsuit = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & . & . & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & . & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 18** () Résoudre l'équation  $X^2 + X = A$  d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

*Indication* : on commencera par étudier complètement  $A$ .

**Exercice 19** Discuter, selon le paramètre réel  $m$ , la dimension des ensembles des solutions des systèmes suivants.

$$1) (\mathcal{S}) : \begin{cases} x + my + z = 0 \\ mx + y + mz = 0 \end{cases} \quad 2) (\mathcal{T}) : \begin{cases} x + y + mz = 0 \\ x + my + z = 0 \\ mx + y + z = 0 \end{cases}$$

**Exercice 20** () On considère une suite de variables aléatoires  $(T_n)$  à valeurs dans  $\{x, y, z\}$ , définie par le graphe de transition suivant. Par exemple, l'arête du bas signifie que  $\forall n \in \mathbb{N}, P(T_{n+1} = x | T_n = z) = \frac{3}{10}$ .

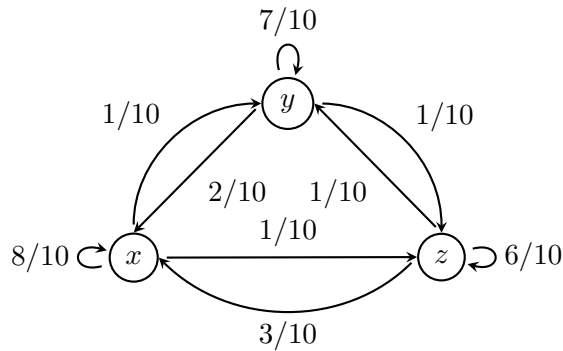


FIGURE 1 – Graphe de transition pour la suite  $(T_n)$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$x_n = P(T_n = x), \quad y_n = P(T_n = y), \quad z_n = P(T_n = z) \quad \text{et} \quad X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

- 1) Montrer qu'il existe  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_{n+1} = AX_n$ .
- 2) On note  $\varphi$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ . Déterminer les droites vectorielles de  $\mathbb{R}^3$  stables par  $\varphi$ . En déduire une base relativement à laquelle la matrice de  $\varphi$  est diagonale.
- 3) La suite  $(X_n)$  converge-t-elle ? Que peut-on dire de sa limite ?
- 4) Déterminer l'expression de  $X_n$  en fonction de  $n$ .

