M6: MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGEE DANS UN CHAMP ELECTRIQUE OU MAGNETIQUE

I. Généralités

I.1. Validité du modèle

Nous allons étudier dans ce chapitre quelques aspects du mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique et/ou magnétique uniforme.

• <u>Le modèle de la particule unique</u> est applicable à un ensemble de particules si le comportement de cette particule n'est pas affecté par la présence des autres. C'est le cas par exemple pour les milieux peu denses, mais aussi pour les électrons libres des métaux.

• Hypothèses

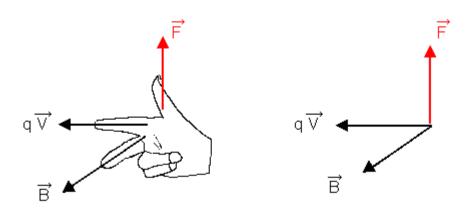
- → Des particules chargées en mouvement créent un champ électromagnétique, c'est le principe par exemple des antennes émettrices. Le problème s'en trouve notablement compliqué. Dans la suite de l'étude nous ne tiendrons pas compte de ces champs, les champs électrique et magnétique seront donnés.
- \rightarrow Nous supposerons que les vitesses des particules restent suffisamment faibles pour pouvoir rester dans le domaine de la mécanique classique. Cette hypothèse reste valable tant que v/c < 10^{-1} .

I.2. Force de Lorentz

- Référentiel : 93
- <u>Système</u> : particule M de masse m et de charge q, animée d'une vitesse \vec{v} placée dans un champ électromagnétique donné $\vec{E}(\vec{r},t)$ et $\vec{B}(\vec{r},t)$.
- Force appliquée : le postulat de l'électromagnétisme donne : $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

La force électrique $\overrightarrow{F_{\text{elec}}} = q\overrightarrow{E}$ est colinéaire au champ électrique, dans le même sens que celui-ci si la charge est positive, en sens inverse si la charge est négative

La direction de la force magnétique $\overrightarrow{F_{magn}} = q \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$ est donnée par la règle de la main droite représentée par la figure ci-dessous.



I.3. Ordre de grandeur et comparaison avec le poids.

- Unités et ordres de grandeurs des champs électrique et magnétique
- Le champ électrique se mesure en V.m⁻¹.

Un champ électrique de 10⁶ V.m⁻¹ est un champ intense qui peut provoquer des étincelles dans l'air.

- Le champ magnétique se mesure en Tesla (T), il prend des valeurs comprises entre 5 10⁻⁵ T pour le champ magnétique terrestre et 30 T pour un champ magnétique intense en R.M.N. Un aimant usuel produit un champ magnétique de 0.1T.

- Comparaison de la force de Lorentz avec le poids.
- Soit un électron de masse $\overline{m} = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg, et de charge q} = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C.}$

Il est animé d'une vitesse $v = 10^5$ m/s dans un champ B = 1 T et E = 100V/m.

$$F_{el} = q(vB+E) = 1.6 \ 10^{-14} N$$

$$F_g = mg = 8.9 \cdot 10^{-30} \text{ N}.$$

- Soit un proton de masse m = 1,7 $10^{\text{-}27} kg,$ et de de charge q = 1.6 $10^{\text{-}19}\,C.$ F_g = mg = 1.7 $10^{\text{-}26}\,N.$

$$F_a = mg = 1.7 \cdot 10^{-26} \text{ N}.$$

Calculons le champ électrique qui provoquerait la même force $E = \frac{mg}{s} = 1 \cdot 10^{-7} \text{ V.m}^{-1}$ ce qui est vraiment très faible.

Calculons la vitesse du proton dans le champ magnétique terrestre qui provoquerait la même force $v = \frac{mg}{gR} = 2 \cdot 10^{-3}$ m/s ce qui est vraiment très faible

Ainsi on peut toujours négliger le poids d'une particule chargée soumise à un champ électromagnétique.

I.4. Puissance de la force de Lorentz :

• $\mathscr{P}(t) = \vec{F} \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$ la puissance fournie à une particule mobile dans un champ électromagnétique provient uniquement de la composante électrique de celui-ci.

• S'il n'y a que
$$\vec{B}$$
 $\mathscr{T} = (q\vec{v} \wedge \vec{B}). \vec{v} = 0$
Or $\mathscr{T} = \frac{dE_c}{dt}$

D'où l'énergie cinétique se conserve.

Si une particule se déplace dans un champ magnétostatique la norme de sa vitesse reste constante mais pas sa direction.

• S'il n'y a que
$$\vec{E}$$

 $\mathcal{P}(t) = \vec{F} \cdot \vec{V} = q\vec{E} \cdot \vec{V}$

II. Mouvement dans **E** uniforme.

II.1. La vitesse initiale est parallèle au champ

- Référentiel : RT, Terrestre, galiléen
- Système : particule M de masse m et de charge q
- Force : F=qE

le poids est négligeable

• Données : $\overrightarrow{v_0} = v_0 \overrightarrow{e_x}$ $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{Ee_x}$

• <u>Loi</u> Relation fondamentale de la dynamique : $m_{\frac{d\vec{V}}{dt}}^{\frac{d\vec{V}}{dt}} = \vec{F} = q\vec{E}$

D'où
$$\vec{v} = \frac{q}{m} \vec{E} t + \vec{v_0}$$

Le mouvement de la particule est rectiligne accéléré.

II.2. La vitesse initiale n'est pas parallèle au champ

- Référentiel : RT, Terrestre, galiléen
- Système : La particule M(q, m) dans le champ électrique uniforme
- F=qE • Force :

le poids est négligeable

- Conditions initiales : $\vec{v} = \vec{v_0}$ et $\vec{r} = \vec{0}$
- <u>Loi</u>: principe fondamental de la dynamique : $\vec{a} = \vec{F} = \vec{q} \vec{E}$

Χ

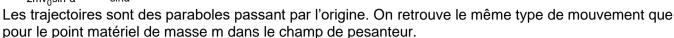
Projections :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{qE}{m} \\ \ddot{y} = 0 \end{cases} \begin{cases} \dot{x} = \frac{qE}{m} \ t + v_0 cos\alpha \\ \dot{y} = v_0 sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{qE}{2m} \ t^2 + v_0 cos\alpha t \\ y = v_0 sin\alpha t \end{cases}$$

Dans le cas où $\alpha \neq 0$ ou π on a alors $t = \frac{y}{v_0 sin\alpha}$

En reportant dans l'équation x(t) :

$$x = \frac{\dot{q}E}{2mv_0^2 sin^2 \alpha} y^2 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} y$$



(Animation: mouvement dans E)

II.3. Bilan énergétique

II.3.1. Introduction du potentiel électrique

• Référentiel : RT, Terrestre, galiléen

• Système : La particule M(q, m) dans le champ électrique uniforme

• Force : $\vec{F} = q\vec{E}$

le poids est négligeable

• Expression de l'énergie potentielle

Nous avons vu dans le chapitre précédent que l'interaction électrostatique était une force conservative.

Dans le cas d'un champ uniforme on a alors :

 $\delta W = \vec{F} \cdot \vec{dl} = q\vec{E} \cdot \vec{dl}$

Si on oriente le repère de sorte que le champ électrostatique soit porté par l'axe Ox

 $\delta W = qEdx = -dE_p$

Avec $E_p = -qEx + Cst$

On définit le potentiel électrostatique par la relation suivante : Ep = qV ou V = Ep/q

Dans un champ électrique uniforme porté par l'axe Ox on a alors V = -Ex + Cst.

• Remarques :

- Le potentiel ainsi introduit ne dépend que du champ et pas de la charge. Il s'agit de la même grandeur que celle introduite en électrocinétique : la différence de potentielle.
- Le champ électrique est toujours dirigé vers les potentiels décroissants. Reprenons l'exemple cidessus :

si E >0, V(x) est une fonction décroissante de x, le champ \overrightarrow{E} est dirigé vers les x croissants ;

si E <0, V(x) est une fonction croissante de x, le champ \vec{E} est dirigé vers les x décroissants ;

II.3.2. Conservation de l'énergie mécanique

• Référentiel : RT, Terrestre, galiléen

• Système : La particule M(q, m) dans le champ électrique uniforme

• Force : $\vec{F} = q\vec{E}$

le poids est négligeable

La particule n'est soumise qu'à la force électrique qui est conservative, son énergie mécanique est donc constante :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + qV$$

Ainsi si on applique la relation entre deux instants :

$$\frac{1}{2}mv_{f}^{2} - \frac{1}{2}mv_{i}^{2} = -q(V(x_{f}) - V(x_{i}))$$

Conclusion:

Pour faire varier l'énergie cinétique et donc la norme de la vitesse d'une particule chargée soumise uniquement à une force électrique, on lui fait franchir une différence de potentiel : $\Delta E_c = -q\Delta V$

Si q>0, la particule sera accélérée par une différence de potentiel ΔV <0 Si q<0, la particule sera accélérée par une différence de potentiel ΔV >0

Exemples

- Soit un proton (q = 1.6 10^{-19} C, m = 1.67 10^{-27} kg) initialement au repos. Soit la tension (ou ddp) accélératrice ΔV = -2,0 kV. Quelle est la vitesse finale du proton ?

$$v_f = \sqrt{\frac{2q|\Delta V|}{m}} = 6.19 \ 10^5 \ \text{m/s}$$

- Soit un électron (q = -1.6 10^{-19} C, m = 9.1 10^{-30} kg) initialement au repos. Soit la tension (ou ddp) accélératrice ΔV = 2,0 kV. Quelle est la vitesse finale de l'électron ?

$$v_f = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} = 2.7 \ 10^7 \, \text{m/s}$$

Nouvelle unité d'énergie

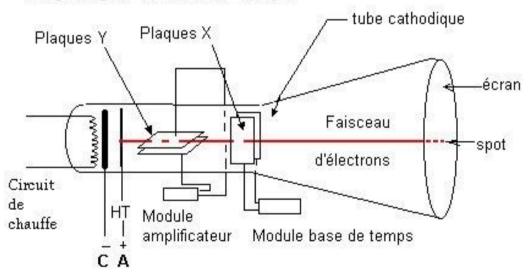
1 eV correspond à l'énergie d'un électron initialement au repos accéléré par une ddp de 1V : 1ev = 1.6 10⁻¹⁹ J

II.4. Application

On peut en trouver dans les oscilloscopes analogiques.

Il s'agit d'une grosse ampoule dans laquelle on a fait un vide poussé (10^{-4} Pa). Un filament chauffé par effet joule ($T \approx 10^3$ K) émet des électrons. Ceux-ci sont accélérés et focalisés par une première série d'électrodes. Ils sont ensuite déviés verticalement et horizontalement par deux jeux de plaques.

Coupe longitudinale d'un oscilloscope.



III. Mouvement dans B uniforme.

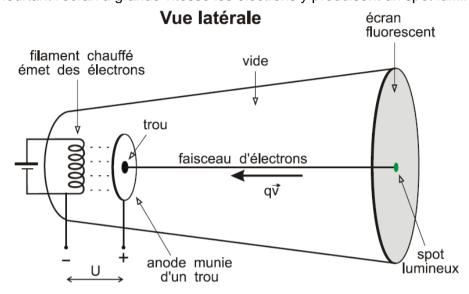
Nous avons déjà démontré que le mouvement d'une particule dans un champ magnétique est uniforme, son énergie cinétique et donc la norme de sa vitesse est constante.

III.1. Observations

• Dispositif expérimental : tube de Braun

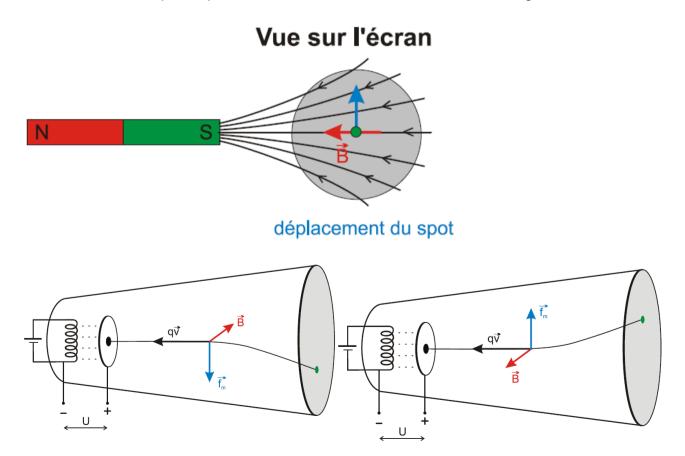
A l'intérieur d'un tube où règne un vide poussé, se trouve un canon à électrons, constitué d'un filament porté à incandescence et d'une anode munie d'un trou. L'anode est portée à une tension accélératrice U> 0 par rapport au filament.

Le filament chauffé émet des électrons (= effet thermoélectronique) qui acquièrent une vitesse v dans le champ électrique régnant entre le filament et l'anode. Un grand nombre d'électrons passe par le trou et forme le faisceau électronique se dirigeant en ligne droite (en absence de forces) vers l'écran fluorescent. En heurtant l'écran à grande vitesse les électrons y produisent un spot lumineux.



Observations

- 1. Lorsqu'on approche un aimant droit du tube le spot est dévié sur l'écran par rapport à sa position initiale.
- 2. En maintenant l'aimant de sorte que le champ magnétique soit horizontal et perpendiculaire au faisceau on observe que le spot est dévié verticalement conformément à la règle de la main droite.



• Autre expérience

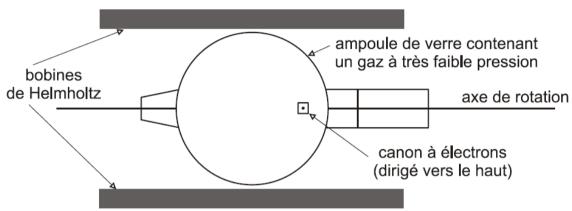
Dispositif expérimental

Deux bobines de Helmholtz (2 bobines plates disposées parallèlement en regard, à la distance égale au rayon des bobines) créent un champ magnétique \vec{B} uniforme parallèle à l'axe des bobines.

Un canon à électrons produit un faisceau d'électrons de vitesse \vec{v} à l'intérieur d'une ampoule de verre. Les quelques molécules de gaz, excitées par des chocs avec les électrons, émettent ensuite un rayonnement lumineux permettant de visualiser la trajectoire du faisceau d'électrons.

L'ampoule peut tourner autour d'un axe, de telle manière que l'angle α entre la vitesse initiale \vec{v} des électrons et le champ \vec{B} puisse être varié.

Vue du dessus



On observe:

- En absence d'un champ \overrightarrow{B} la trajectoire des électrons est rectiligne. Il n'y a pas de forces s'exerçant sur les électrons. (Le poids des électrons peut être négligé!) En vertu du principe d'inertie le mouvement des électrons est rectiligne et uniforme.
- En présence d'un champ \vec{B} perpendiculaire à \vec{v} les électrons décrivent une trajectoire circulaire. Plus le champ est intense, plus le rayon de la trajectoire est petit. Plus la vitesse des électrons est grande, plus le rayon est grand.

Une force magnétique s'exerce sur les électrons et dévie constamment leur direction. Cette force est toujours perpendiculaire à la vitesse (elle-même tangente au cercle). En plus la force est perpendiculaire au champ B. (Voir calcul ci-après)

- En présence d'un champ \vec{B} parallèle à \vec{v} les électrons décrivent une trajectoire rectiligne. Il n'y a pas de force magnétique

Vue latérale

ampoule axe de rotation trajectoire des électrons

canon à électrons

(animation mouvement dans E,B)

bobine de Helmholtz

III.2. Etude de la trajectoire

Suite aux observations, on fait l'hypothèse que la trajectoire est circulaire et on va vérifier que celle-ci est valable.

- Référentiel : R, Terrestre, galiléen
- Système : La particule M(q, m) dans le champ magnétique uniforme
- Force : $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$
- Repère : On étudie la trajectoire en coordonnées polaires, l'origine est choisie O au centre de la trajectoire, l'axe Oz est orienté par le champ \vec{B}
- Puissance : $\mathscr{F} = (\overrightarrow{qv} \wedge \overrightarrow{B}) \cdot \overrightarrow{v} = 0$

Or $\mathscr{F} = \frac{dE_c}{dt} = 0 \Rightarrow$ la norme de la vitesse reste constante.

- <u>Loi</u> : principe fondamental de la dynamique :m $\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$
- Projection sur les axes :

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_{\theta}} = \pm v_0\overrightarrow{e_{\theta}}$$

$$\vec{a} = -\frac{v_0^2}{R} \vec{e_r}$$

$$\vec{B} = \vec{B}\vec{e_z}$$

$$\Rightarrow$$
 m $\frac{v_0^2}{R}$ = $|q|v_0B$ en raisonnant sur les normes des vecteurs

$$\Rightarrow$$
 $V_0 = \frac{|q|B}{m}R = \omega_c R$

$$\omega_c = \frac{|q|B}{m}$$
 a la dimension d'une pulsation

$$[QvB] = [F] \Rightarrow \left[\frac{QB}{m}\right] = \left[\frac{F}{mv}\right] = \left[\frac{a}{v}\right] = T^{-1}$$

• <u>Le mouvement est uniforme, la trajectoire est circulaire de rayon :</u> $R = \frac{mv}{|q|B}$ de pulsation $\omega_c = \frac{|q|B}{m}$ la pulsation du cyclotron d'une particule de charge q, de masse m dans un champ magnétique B. En référence au premier accélérateur circulaire construit en 1932 par Lawrence.

Exemples

- Soit un proton (q = 1.6 10^{-19} C, m = 1.67 10^{-27} kg) initialement au repos. Soit la tension (ou ddp) accélératrice ΔV = -2,0 kV. Quelle est la vitesse finale du proton ?

$$v_f = \sqrt{\frac{2q|\Delta V|}{m}} = 6.19 \ 10^5 \ m/s$$

Quel est le rayon de la trajectoire lorsqu'on le soumet à un champ magnétique B = 0.10 T ?

$$R = \frac{mv_f}{eB} = 6.5 \text{ cm}$$

Quelle est la vitesse angulaire du mouvement ?

$$\omega_{c} = \frac{eB}{m} = 9.5 \ 10^{6} \ rad/s$$

- Soit un électron (q = -1.6 10^{-19} C, m = 9.1 10^{-31} kg) initialement au repos. Soit la tension (ou ddp) accélératrice ΔV = -2,0 kV. Quelle est la vitesse finale de l'électron ?

$$v_f = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} = 2.7 \ 10^7 \, \text{m/s}$$

Quel est le rayon de la trajectoire lorsqu'on le soumet à un champ magnétique B = 0.10 T ?

$$R = \frac{mv_f}{eB} = 1.5 \text{ mm}$$

Quelle est la vitesse angulaire du mouvement ?

$$\omega_{\rm c} = \frac{e{\rm B}}{{\rm m}} = 1.8 \ 10^{10} \ {\rm rad/s}$$

IV. Applications

IV.1. Le spectromètre de masse

La spectrométrie de masse est une technique d'analyse de la matière en fonction de la masse de ces constituants.

Intérêt:

- Physique fondamentale : les techniques actuelles permettent de mesurer les masses des particules élémentaires avec une précision relative de 10⁻¹¹ .
- Physique nucléaire : la spectrométrie de masse permet de trier et de compter les atomes fils issus d'une réaction nucléaire.
- Physique des matériaux : la spectrométrie de masse permet de mesurer avec précision la composition des matériaux semi-conducteurs avec une résolution spatiale de l'ordre de 1 nm.
- **Géologie** : la spectrométrie de masse permet de déterminer l'abondance d'isotopes rares afin de dater des matériaux (l'abondance en ¹⁴C permet de dater les matériaux issus d'êtres vivants) ou de déterminer la condition de formation de certaines roches, ...
- **Biologie** : la spectrométrie de masse est utilisée pour déterminer la structure de molécules complexes (telles que les protéines).

Le premier spectromètre de masse a permis à J. J. Thomson de mettre en évidence deux isotopes du néon en 1912.

Nous allons étudier l'appareil utilisé en 1932 par K. T. Bainbridge pour vérifier expérimentalement la formule d'équivalence entre masse et énergie proposé par A. Einstein en 1905.

Les appareils modernes utilisent toujours l'accélération et la déviation de particules chargées par des champs électriques et magnétiques, mais les champs sont souvent variables et la géométrie des appareils est complexe. Leur étude sort du cadre du cours.

Principe de fonctionnement

Le matériau à étudier est ionisé. La technique mise en œuvre pour former les ions dépend de la nature du matériau :

impact électronique : pour les matériaux gazeux : un faisceau d'électrons de faible énergie (70 eV environ) vient frapper les atomes ou les molécules et les ionisent.

ionisation par laser : un faisceau laser fournit des impulsions de forte puissance (10¹⁰ W.cm⁻²) focalisées sur une petite surface (10⁻² mm²). Cette méthode permet d'étudier les propriétés localement.

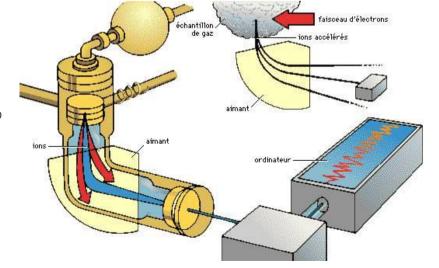
Les particules chargées (de masse m et de charge q) sont ensuite accélérées par une tension U_0 . Leur vitesse V_0 est alors telle que :

$$mv_0^2 = 2qU_0 \text{ soit } v_0 = \sqrt{\frac{2qU_0}{m}}$$

Comme la vitesse initiale des particules n'est pas exactement nulle, la vitesse des particules à la sortie de l'ioniseur n'est pas exactement égale à V_0 . On utilise alors un filtre de vitesse pour sélectionner les particules dont la vitesse est exactement V_0

Les particules pénètrent alors dans une enceinte où règne un champ magnétique uniforme \overrightarrow{B} . Elles décrivent alors un arc de cercle de rayon $R = mv_0/qB$.

Les particules atteignent enfin un détecteur : une plaque photographique dans les instruments anciens, ou un dispositif



électronique dans les instruments actuels, qui permet de compter les ions individuellement. La position du point d'impact dépend du rapport g/m.

Ordre de grandeur:

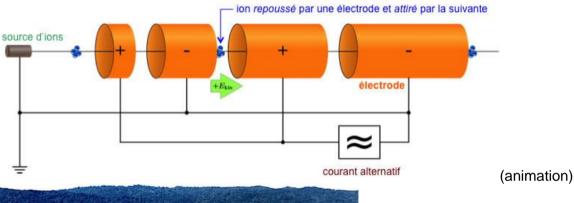
La charge des ions correspond à quelques charges élémentaires soit de l'ordre de 10^{-19} C, la masse des ions varie entre quelques centaines et quelques milliers de grammes par mole soit de l'ordre de 10^{-24} kg par ion. Pour une tension accélératrice de 10 kV et un champ magnétique de 0.1 T on obtient un rayon de l'ordre de $R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{|q|}} = 4 \text{ m}$

IV.2. Les accélérateurs

Leur fonction est d'augmenter la vitesse des particules, c'est à dire leur énergie cinétique. D'après ce qui précède le rôle accélérateur est toujours joué par la composante électrique du champ. Il existe deux familles d'accélérateurs :

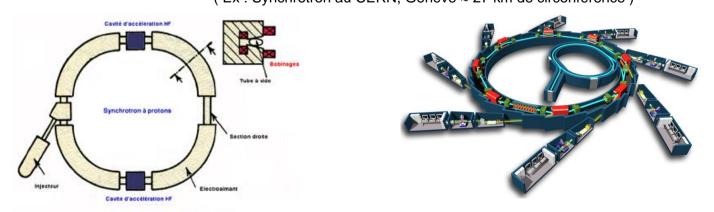
• Accélérateurs linéaires :

le champ est purement électrique, la trajectoire des particules est rectiligne. (Ex SLAC Standford Californie de 3.2 km de long, l'énergie finale 60 GeV) En 1968 les physiciens du SLAC ont prouvé que le proton n'est pas une particule élémentaire mais qu'il est constitué de 3 quarks.





Accélérateurs circulaires : La composante magnétique a pour effet de replier la trajectoire pour réduire l'encombrement, le rôle accélérateur est joué par la composante électrique appliquée le long de certaines portions du trajet des particules.
 (Ex : Synchrotron au CERN, Genève ≈ 27 km de circonférence)





(film)

Principe du cyclotron (animation)

Deux demi-cylindres creux nommés Dee de rayon R, d'axe oz, de faible épaisseur suivant Oz, sont décalés.

Il règne un champ magnétique uniforme intense suivant Oz.

Entre les deux cylindres on établit un champ électrique alternatif : $\vec{E} = E_0 cos\omega t\vec{e_x}$ où $\omega = \frac{|q|B}{m}$.

Pour le cyclotron de University of Michigan le champ magnétique est de 0.10 T, le diamètre des dee est de 2.1 m.

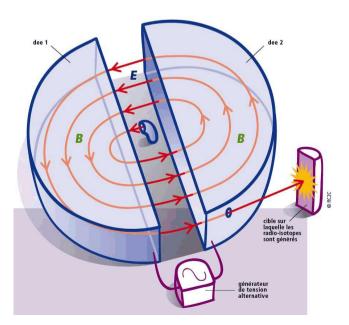
La difficulté pour les cyclotrons est d'obtenir un champ magnétique uniforme sur une aussi grande surface. C'est ce qui limite leur taille.

La fréquence est pour les protons :
$$f_c = \frac{qB}{2\pi m} = 1.5 \text{ mHz}$$

La vitesse maximale est

 $v_{max} = R_{max} \omega = 2\pi x 1.05 x 1.510^6 = 1.0 \ 10^7 \ m/s$

La différence de potentiel qui seule permettrait une telle vitesse U = mv²/2q = 5.3 10⁵ V





M6: MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGEE DANS UN CHAMP ELECTRIWQUE OU MAGNETIQUE

I. Generalites	1
I.1. Validité du modèle	1
I.2. Force de Lorentz	<u>1</u>
I.3. Ordre de grandeur et comparaison avec le poids	1
I.4. Puissance de la force de Lorentz :	2
II. Mouvement dans E uniforme.	<u>2</u>
II.1. La vitesse initiale est parallèle au champ	<u>2</u>
II.2. La vitesse initiale n'est pas parallèle au champ	<u>2</u>
II.3. Bilan énergétique	<u>3</u>
II.3.1. Introduction du potentiel électrique	3
II.3.2. Conservation de l'énergie mécanique	3
II.4. Application	<u>4</u>
III. Mouvement dans B uniforme.	<u>4</u>
III.1. Observations	<u>5</u>
III.2. Etude de la trajectoire	<u>7</u>
IV. Applications	<u>8</u>
IV.1. Le spectromètre de masse	. <u>.</u> 8
IV.2. Les accélérateurs	<u></u> g