DS n°9 : Fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom : Note :

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

Algèbre linéaire

Soit $F = \{ P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(1) = P'(2) = 0 \}$. Déterminer la dimension de F.

$$\dim(F) = \boxed{} \tag{1}$$

Déterminer un supplémentaire G de F dans $\mathbb{R}_4[X]$.

$$G = \boxed{} \tag{2}$$

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y - 2z + t \\ -2x + y - z - t \\ -x + 2y - 3z \\ 4x + y - 3z + 3t \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs suivantes :

$$\operatorname{rg}(f) = \boxed{} \tag{3}$$

$$\dim(\operatorname{Ker} f) = \boxed{} \tag{4}$$

Probabilités.

Une urne contient des boules blanches et noires en proportion p et q (avec $p + q = 1$). On procède à des tirages successifs avec remise. La probabilité que la première boule blanche tirée apparaisse lors du n^{e} tirage vaut :

$$\boxed{} \tag{5}$$

La probabilité que la k-ième boule blanche tirée apparaisse lors du n^{e} tirage vaut :

$$\boxed{} \tag{6}$$

Une urne contient n boules noires et b blanches. Un joueur tire k boules dans cette urne successivement avec remise. À chaque coup, s'il tire une boule blanche, il gagne g points, et sinon il en perd 1. Pour que le gain algébrique soit d'espérance nulle, il faut poser

$$g = \boxed{} \tag{7}$$

Dans ce cas, la variance de son gain algébrique est

$$\boxed{} \tag{8}$$

Divers

Soit a et b deux réels, avec $a + 1 < b - 1$. Déterminer

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[a + \frac{1}{n} ; b - \frac{1}{n}\right] = \boxed{} \tag{9}$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[a - \frac{1}{n} ; b + \frac{1}{n}\right] = \boxed{} \tag{10}$$

Pour chacune de ces suites définies par récurrence, donner l'ensemble maximal auquel appartient le premier terme pour que la suite soit définie, puis discuter la convergence de la suite en fonction du premier terme (donner la limite si elle existe, et écrire Div en cas de divergence sans limite).

$$u \ : \ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n), \ u_0 \in \boxed{} \ ; \tag{11}$$

$$\text{et} \ \ u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \boxed{} \ . \tag{12}$$

$$v \ : \ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n^4, \ v_0 \in \boxed{} \ ; \tag{13}$$

$$\text{et} \ \ v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \boxed{} \ . \tag{14}$$

— FIN —