Devoir surveillé n°10
Version n°1
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, notée n.

1) Soit φ un projecteur de E, peut-on trouver une base dans laquelle la matrice de φ est particulièrement simple ?

2) Même question pour une symétrie.

II. Racines carrées d'endomorphismes de l'espace.

On considère $\mathbb{R}^3$, muni de sa structure vectorielle usuelle. On notera Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$. On notera 0 l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^3$.

Pour un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, on notera $f^0 = \mathrm{Id}$ et pour tout $n \geqslant 1$, on définit

$$f^n = f^{n-1} \circ f = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

Pour un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, une *racine carrée* de f est un endomorphisme $r \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant

$$r^2 = r \circ r = f.$$

On étudie dans ce problème cette notion de racine carrée sur quelques exemples. Les différentes parties de ce problème sont indépendantes.

I – Une condition nécessaire d'existence.

On considère

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -x & -y & -5z \\ -4x & +2y & -4z \\ 4x & -2y & +5z \end{pmatrix} \end{array}.$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2) Supposons qu'il existe une racine carrée de f, que nous noterons r. Exprimer $\det(f)$ en fonction de $\det(r)$. En déduire une condition nécessaire d'existence d'une racine carrée pour f portant sur $\det(f)$.

3) Calculer $\det(f)$ et en déduire une contradiction.

II – Un exemple d'existence de racine carrée.

On considère

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} & -4y & +6z \\ 2x & +6y & -6z \\ x & +2y & -z \end{pmatrix} \end{array}.$$

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$u = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ w = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4) Calculer pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ la valeur de $\det(g - \lambda \mathrm{Id})$. On mettra le résultat sous forme factorisée.

5) Déterminer $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})$. Vérifier que $u \in \mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})$.

6) Déterminer $\mathrm{Ker}(g - 2\mathrm{Id})$. Vérifier que $v, w \in \mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})$.

7) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

8) Exprimer la matrice de g dans la base (u, v, w).

9) En déduire l'existence d'une racine carrée r de g.

10) Déterminer l'expression d'une telle racine carrée de g.

III – Un troisième exemple.

On considère

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 4x & +3y & +6z \\ 4x & +y & +4z \\ -5x & -3y & -7z \end{pmatrix} \end{array}.$$

On désire montrer par l'absurde que h n'admet pas de racine carrée. Supposons donc que h admette une racine carrée, que nous noterons r.

11) *Question préliminaire :* Soit $u, v \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ commutant (*i.e.* $u \circ v = v \circ u$), soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$ est stable par v.

12) Montrer que r et h commutent.

13) Calculer pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ la valeur de $\det(h - \lambda \mathrm{Id})$. On mettra le résultat sous forme factorisée et l'on vérifiera que l'on a bien obtenu un polynôme de degré 3 admettant trois racines distinctes $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

14) Déterminer $\mathrm{Ker}(h - \lambda_1 \mathrm{Id})$, $\mathrm{Ker}(h - \lambda_2 \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(h - \lambda_3 \mathrm{Id})$.

15) En déduire l'existence d'une base dans laquelle la matrice de h est diagonale.

16) Quelle est la forme de la matrice de r dans cette base ? Conclure.

IV – Endomorphisme nilpotent.

On considère

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 8x & -4y & +3z \\ 13x & -8y & +6z \\ -4x & & \end{pmatrix} \end{array}.$$

On désire montrer par l'absurdre que φ n'admet pas de racine carrée. Supposons donc que φ admette une racine carrée, que nous noterons r.

17) *Question préliminaire :* Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$ (on dit que u est *nilpotent*).

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(u^{n+1}) \subset \mathrm{Im}(u^n)$.

b) Montrer que s'il existe $q \in \mathbb{N}$ vérifiant $\mathrm{Im}(u^q) = \mathrm{Im}(u^{q+1})$, alors pour tout $k \geqslant q$, on a $\mathrm{Im}(u^k) = \mathrm{Im}(u^q)$.

c) En déduire qu'il existe un plus petit entier naturel n_0 vérifiant $u^{n_0} = 0$ et que $1 \leqslant n_0 \leqslant 3$.

Cet entier n_0 est appelé *indice de nilpotence* de u.

18) Expliciter φ^2 et φ^3. Que peut-on donc dire sur φ au vu de la question **17)** ?

19) En déduire une contradiction et conclure.

— FIN —