M8 MOUVEMENT D'UN SOLIDE EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE

I. Moment cinétique d'un système de points ou d'un solide

En général, évaluer le moment cinétique d'un système quelconque n'est pas facile. La situation est nettement plus simple pour un solide ou un système en rotation autour d'un axe fixe.
C'est pourquoi, nous nous limiterons au moment cinétique L_Δ d'un solide ou d'un système de points par rapport à un axe Δ.

I.1. Cas d'un système déformable

• On peut modéliser le système comme un ensemble de points M_i de masse m_i se déplaçant à la vitesse $\vec{v_i}$. On peut alors définir le moment cinétique de chacun de ces points par rapport à un axe Δ : $L_\Delta(M_i)$.

On obtient le moment cinétique total du système en faisant la somme de chacun des moments cinétiques :

$$L_\Delta = \Sigma\, L_\Delta(M_i).$$

Attention les moments cinétiques $L_\Delta(M_i)$ étant algébriques, il faut être rigoureux $L_\Delta(M_i)$.sur les signes.

• Si l'axe Δ est fixe il est commode de le faire coïncider avec l'axe Oz, et d'utiliser les coordonnées cylindriques.

$\overrightarrow{OM_i} = r_i\vec{e_r} + z_i\vec{e_z}$
$\vec{v_i} = \dot{r}_i\vec{e_r} + r_i\dot{\theta}_i\vec{e_\theta} + \dot{z}_i\vec{e_z}$
$\vec{L_0}\,(M_i) = \overrightarrow{OM_i}\wedge m_i\,\vec{v_i} = m_i(-z_ir_i\dot{\theta}_i\vec{e_r} + (r_iz_i - r_i\dot{z}_i)\vec{e_\theta} + r_i^2\dot{\theta}_i\vec{e_z})$
On a alors $L_{Oz}(M_i) = \vec{L_0}(M_i).\,\vec{e_z} = m_i\, r_i^2\dot{\theta}_i$

Ainsi $L_{Oz} = \Sigma\, L_{Oz}(M_i) = \Sigma\, m_i\, r_i^2\dot{\theta}_i = \Sigma J_{oz}(M_i)\,\dot{\theta}_i$

Avec $J_{oz}(M_i) = m_i\, r_i^2$ le moment d'inertie du point M_i par rapport à l'axe Oz et $\dot{\theta}_i$ la vitesse angulaire du point M_i.

I.2. Cas d'un solide en rotation par rapport à un axe

I.2.1. Relation générale

Lorsqu'un solide est en mouvement de rotation autour d'un axe fixe, tous les points qui le composent ont la même vitesse angulaire $\dot{\theta}_i = \omega$.

Ainsi le moment cinétique du système par rapport à son axe de rotation est donné grâce au résultat précédant par :

$L_{Oz} = \Sigma\, L_{Oz}(M_i) = \Sigma(J_{oz}(M_i)\,\dot{\theta}_i) = (\Sigma J_{oz}(M_i))\omega$

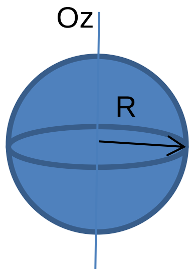
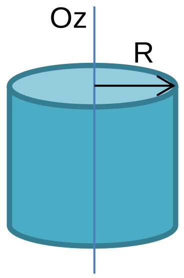
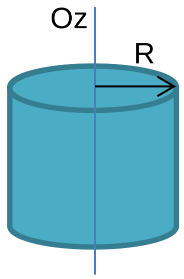
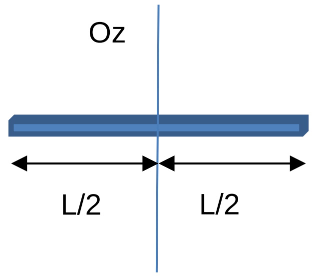
On définit alors le moment d'inertie d'un système par rapport à l'axe Oz par $J_{Oz} = \Sigma J_{oz}(M_i) = \Sigma\, m_i\, r_i^2$

Remarque :
Pour un solide on remplace la somme discrète Σ par une somme continue : $J_{Oz} = \int r^2\rho dV$

On a alors le moment cinétique d'un solide par rapport à axe Oz $L_{Oz} = J_{Oz}\omega$

I.2.2. Moment d'inertie de quelques solides homogènes

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe est une caractéristique intrinsèque que l'on peut mesurer. Dans le cas de système simple on peut aussi le calculer à l'aide de la formule : $J_{Oz} = \int r^2 \rho dV$
Pour information on donne quelques exemples.

Sphère pleine de rayon R, de masse totale m	Cylindre vide de rayon R, de masse totale m	Cylindre plein de rayon R, de la masse totale m	Barre de longueur L, de la masse totale m
			
$\frac{2}{5}mR^2$	mR^2	$\frac{1}{2}mR^2$	$\frac{1}{12}mL^2$

En pratique, si on note d la distance qui sépare l'axe Oz au point du solide qui en est le plus éloigné, le moment d'inertie du solide de masse totale m par rapport à l'axe Oz est proportionnel à md^2. La cosntante de proportionnalité dépend de la forme du solide et de la répartition de la masse.
On remarque que plus la masse est éloignée de l'axe Oz et plus sa contribution au moment d'inertie est importante, ceci permet d'expliquer pourquoi le moment d'intertie du cylindre creux est plus important que celui du cylindre plein.

II. Théorème du moment cinétique pour un solide

II.1. Cas d'un solide en rotation

Référentiel : $\mathfrak{R}$
Système : Le solide en rotation autour d'un axe fixe Oz
Caractéristiques :
Le moment d'inertie du solide par rapport à Oz : J_{Oz}
La vitesse angulaire : $\omega = \dot{\theta}$
Le moment cinétique du solide par rapport à l'axe Oz : $L_{Oz} = J_{Oz}\dot{\theta}$
Forces extérieures : $\overrightarrow{F_{ext}}$

Dans un référentiel Galiléen $\mathfrak{R}$, la dérivée par rapport au temps, calculée dans $\mathfrak{R}$, du moment cinétique d'un solide par rapport à un axe fixe Oz est égale au moment de la force extérieure par rapport à ce même axe.

$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = \mathcal{M}_{Oz}$$

Pour un solide en rotation autour de l'axe Oz la relation s'écrit alors : $J_{Oz}\ddot{\theta} = \mathcal{M}_{Oz}$

On peut noter un parallèle entre cette loi et le principe fondamental de la dynamique pour un solide en translation sur un axe Ox : $M\ddot{x} = F_x$
L'accélération linéaire est remplacée par l'accélération angulaire, la projection des forces sur l'axe de déplacement est remplacée par le moment des forces par rapport à l'axe de rotation. Enfin la masse du solide est remplacée par son moment d'inertie.
En utilisant ce parallèle on peut ainsi donner une signification physique au moment d'inertie :
Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe caractérise la capacité du solide à s'opposer aux variations de vitesse angulaire autour de cet axe.

II.2. Conservation du moment cinétique

Le moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est conservé si le moment des forces extérieures est nul.

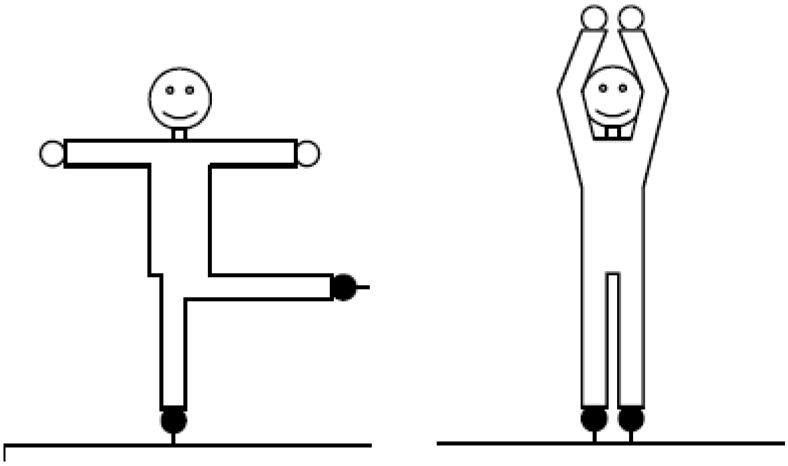
$\frac{dL_{Oz}}{dt} = \mathcal{M}_{Oz} = 0 \Rightarrow L_{Oz} = J_{Oz}\dot{\theta} = cst$

Le moment d'inertie étant une constante, la vitesse angulaire est constante.

Application

La physique du patinage artistique.

Un patineur tourne sur lui-même avec une de ses jambes et ses bras perpendiculaire à son corps: sa vitesse angulaire vaut 8 rad/s et son moment d'inertie vaut 3,6 kg.m^2. En ramenant sa jambe à la verticale et en levant ses bras au-dessus de sa tête, il diminue son moment d'inertie à 1,6 kg.m² et sa vitesse angulaire augmente pour atteindre 18 rad/s. On désire analyser cette manœuvre à l'aide du principe de conservation du moment cinétique et du principe de conservation de l'énergie.



Évaluons le moment cinétique du patineur avant (*i*) et après (*f*) :

$L_{Oz} = J_{Oz}\omega \Rightarrow L_{Ozi} = 28.8$ kg.m².s^{-1} et $L_{Ozf} = 28.8$ kg.m².s^{-1}

Cette situation est **physiquement acceptable**, car il y a conservation du moment cinétique en l'absence de moment de force extérieur.

Si on peut assimiler le patineur à un cylindre on a $J_{Oz} = mR^2/2$

Donc $L_{Ozi} = L_{Ozf} \Leftrightarrow mR_i^2\,\omega_i = mR_f^2\,\omega_f$

Comme $R_i > R_f$ on a $\omega_i < \omega_f$.

III. Couple de forces

III.1 Définition

Un couple de forces correspond à deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ qui ont les caractéristiques suivantes :

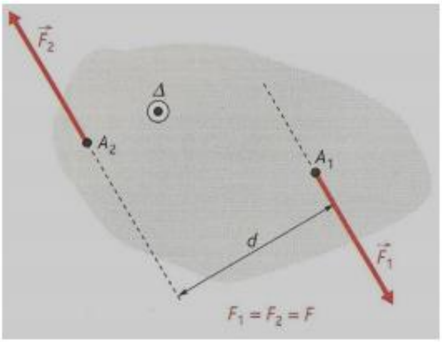
- Droites d'actions parallèles
- Sens opposés (contraires)
- Même intensité $F_1 = F_2 = F$
- Points d'application différents

$$\Rightarrow \vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{0}$$

Un couple de force peut mettre un objet en rotation ou modifier la vitesse de rotation.

III.2. Moment d'un couple de forces par rapport à l'axe Oz

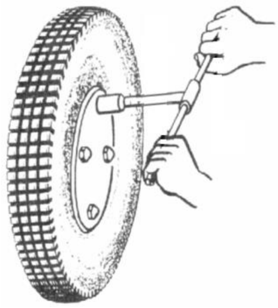
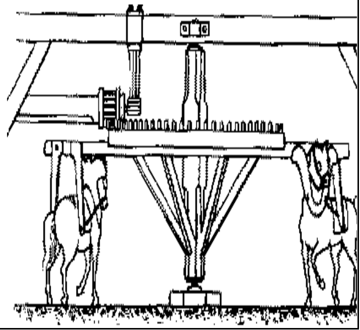
Soit d_1 la distance de A_1 à Oz et d_2 celle de A_2 à Oz
$|\mathcal{M}_{Oz}| = d_1F_1 + d_2F_2 = M_{Oz} = (d_1 + d_2)\,F = Fd$



d est la distance entre les droites (A_1, $\overrightarrow{F_1}$) et (A_2, $\overrightarrow{F_2}$) : le bras de levier du couple
Le moment d'un couple de forces caractérise l'effet de ces forces sur la rotation du solide.

On appelle par abus de langage couple, le moment du couple et on le note Γ.
Il est à noter que sa valeur ne dépend pas de la position de l'axe Oz.
Il est de plus algébrique :
Si le sens de rotation du solide est direct $\Gamma > 0$
Si le sens de rotation du solide est indirect $\Gamma < 0$

- Exemples

Visser un boulon : actions des mains sur la clé 	*Visser un tire-bouchon : actions des mains sur la clé* 	*Dévisser un boulon : actions des mains sur la manivelle* 	*Moulin actionné par des chevaux : actions des chevaux sur le cabestan* 

III.3. Couple moteur, couple de freinage

Référentiel : $\Re$
Système : Solide en rotation autour de l'axe Oz
Forces : couple de forces de moment Γ
Loi : Théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Oz : $\frac{dL_{Oz}}{dt} = J_{Oz}\ddot{\theta} = \Gamma$
Supposons que le solide soit en rotation dans le sens direct autour de l'axe Oz : $\dot{\theta} > 0$
→ Si $\Gamma > 0$ alors $\ddot{\theta} > 0$ la vitesse angulaire du solide augmente, le solide est accéléré.
→ Si $\Gamma < 0$ alors $\ddot{\theta} < 0$ la vitesse angulaire du solide diminue, le solide est freiné.

Maintenant, supposons que le solide soit en rotation dans le sens indirect autour de l'axe Oz : $\dot{\theta} < 0$
→ Si $\Gamma > 0$ alors $\ddot{\theta} > 0$ la vitesse angulaire du solide diminue, le solide est freiné.
→ Si $\Gamma < 0$ alors $\ddot{\theta} < 0$ la vitesse angulaire du solide augmente, le solide est accéléré.

Conclusion :
Si Γ et $\dot{\theta}$ sont de même signe alors le couple est dit couple moteur.
Si Γ et $\dot{\theta}$ sont de signe contraire alors le couple est dit couple de freinage.

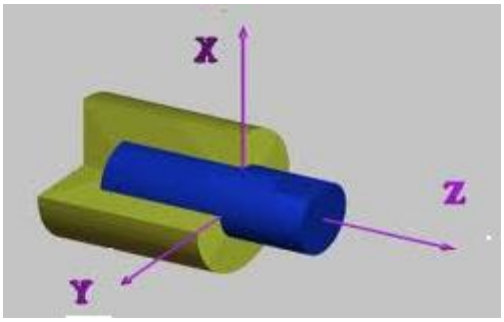
IV. Liaison pivot d'axe

IV.1. Définition

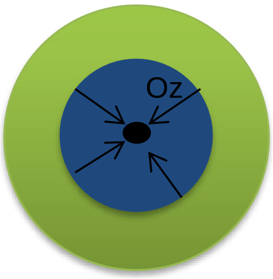
Un dispositif rotatif est un dispositif dans lequel un solide indéformable : Rotor est en rotation autour d'un axe fixe par rapport à un solide immobile : Stator

La liaison de pivot d'axe Oz est un dispositif qui permet de limiter le mouvement du rotor à une rotation autour de l'axe Oz par rapport au stator

C'est donc un mécanisme qui ne laisse qu'un seul degré de liberté au rotor.



IV.2. Action de liaison et pivot idéale d'axe Oz



On s'intéresse à l'action exercée par le stator sur le rotor.
Si on regarde les forces de contact sur les cylindres, on se rend compte que si les forces de frottements (tangentielles) peuvent être négligées, il ne reste plus que les forces normales c'est-à-dire celles dirigées vers l'axe Oz.
Ainsi le moment par rapport à l'axe Oz est nul.

Conclusion :
L'action de liaison d'une liaison de pivot idéal d'axe Oz a un moment par rapport à cet axe égal à 0

$$\mathcal{M}_{Oz} = 0$$

<u>Exemple</u>
Disque en liaison pivot.
1. Soit un disque en pivot parfait autour de l'axer Oz. Il est initialement lancé à la vitesse angulaire ω_0. Evaluer l'évolution de la vitesse angulaire.
2. La liaison pivot n'est plus parfaite et engendre un couple de frottement $\Gamma = -\alpha\omega$, où α est une constante positive. Evaluer l'évolution de la vitesse angulaire.

<u>Référentiel</u> : $\mathfrak{R}$
<u>Système</u> : Solide en rotation autour de l'axe Oz
<u>Forces</u> : le poids, forces de liaison

1. Théorème du moment cinétique : $\frac{dL_{Oz}}{dt} = J_{Oz}\ddot{\theta} = \mathcal{M}_{Oz}$

$\mathcal{M}_{Oz}$ (Poids) = $\left(\overrightarrow{OC} \wedge m\vec{g}\right).\vec{e_z} = 0$

$\mathcal{M}_{Oz}$ (liaison) = 0 pour un pivot parfait

$\Rightarrow J_{Oz}\ddot{\theta} = 0$

D'où ω = cst = ω_0

Il n'y a pas de frottement le disque conserve sa vitesse angulaire.

2. Théorème du moment cinétique : $\frac{dL_{Oz}}{dt} = J_{Oz}\ddot{\theta} = \mathcal{M}_{Oz}$

Maintenant on a $J_{Oz}\ddot{\theta} = \Gamma = -\alpha\omega$

Soit $J_{Oz}\frac{d\omega}{dt} = -\alpha\omega$

D'où $\omega(t) = \omega_0 \exp(-\frac{\alpha}{J_{Oz}} t)$

Le disque finit par s'immobiliser suite aux frottements.

V. Energie d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.

V.1. Energie cinétique d'un solide

V.1.1. Solide en translation

On a vu que lorsqu'un solide était en mouvement de translation tous les points de ce solide avaient la même vitesse que le centre d'inertie.

D'où $E_c = \Sigma E_{ci} = \frac{1}{2}\Sigma m_i\, v_G^2$

D'où $E_c = \frac{1}{2}\, M v_G^2$

Avec M la masse totale du solide

V.1.2. Solide en rotation autour d'un axe fixe Oz

Lorsqu'un solide est en mouvement de rotation autour d'un axe fixe, tous les points qui le composent ont la même vitesse angulaire $\dot{\theta}_i = \omega$.

Ainsi $E_c = \Sigma E_{ci} = \frac{1}{2}\Sigma m_i(r_i\omega)^2 = \frac{1}{2}\Sigma(m_i r_i^2)\omega^2$

On reconnait le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Oz $J_{Oz} = \Sigma(m_i r_i^2)$

Ainsi $Ec = \frac{1}{2} J_{Oz}\, \omega^2$

V.2. Puissance d'une force appliquée à un solide en rotation

Soit M_i un point du solide et $\vec{f_i}$ la force appliquée à ce point.

On choisit les coordonnées cylindriques telles que l'axe Oz coïncide avec l'axe de rotation du solide.

On a $\mathcal{P} = \vec{f_i}.\vec{v_{Mi}} = \vec{f_i}.r_i\,\dot{\theta}\vec{e_\theta} = f_{i\theta}.\, r_i\, \dot{\theta}$

Calculons le moment de cette force par rapport à l'axe Oz :

$\mathcal{M}_{Oz} = (\overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{f_i}).\vec{e_z} = ((r_i\vec{e_r} + z_i\vec{e_z}) \wedge (f_r\vec{e_r} + f_\theta\vec{e_\theta} + f_z\ \vec{e_z})).\vec{e_z}$

$\mathcal{M}_{Oz} = (-z_i\, f_\theta\vec{e_r} + (z_i\, f_r\ - r_i\, f_z)\,\vec{e_\theta} + r_i\, f_\theta\,\vec{e_z}).\vec{e_z}$

$\mathcal{M}_{Oz} = r_i f_\theta$

D'où $\mathcal{P} = \mathcal{M}_{Oz}\dot{\theta}$

Conclusion

La puissance de la force appliquée en un point M_i d'un solide en rotation autour d'un axe fixe Oz, est égale au produit du moment de cette force par rapport à Oz par la vitesse angulaire de rotation du solide autour de cet axe : $\mathcal{P} = \mathcal{M}_{Oz}\dot{\theta}$

V.3. Théorème de l'énergie cinétique d'un solide indéformable

• Démonstration

$E_c = \frac{1}{2} J_{Oz}\dot{\theta}^2$

D'où $\frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dJ_{Oz}\dot{\theta}^2}{dt}$

$\frac{dE_c}{dt} = J_{Oz}\dot{\theta}\ddot{\theta}$

Le théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe Oz donne : $\mathcal{M}_{Oz} = J_{Oz}\ddot{\theta}$

Où $\mathcal{M}_{Oz}$ est la somme des moments des forces extérieures appliquées aux différents points du solide.

Ainsi : $\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{M}_{Oz}\dot{\theta} = \mathscr{P}_{ext}$

• Enoncé

Dans un référentiel Galiléen $\mathfrak{R}$, la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un solide indéformable en rotation autour d'un axe Oz, est égale à la puissance de l'ensemble des forces extérieures qu'on lui applique : $\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{M}_{Oz}\dot{\theta} = \mathscr{P}_{ext}$

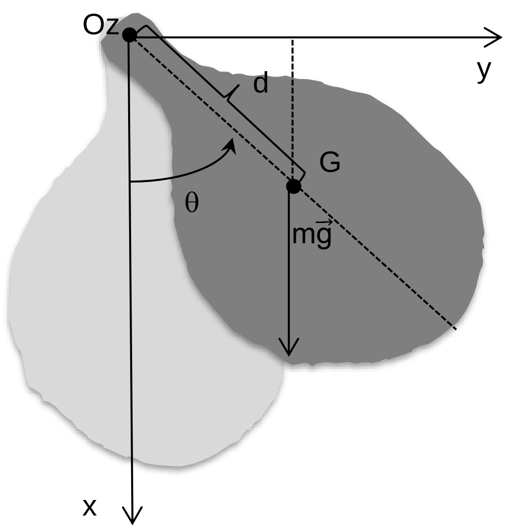
On remarque que pour étudier un solide en rotation autour d'un axe fixe, les lois de l'énergie cinétique ou du moment cinétique donnent des équations équivalentes.

VI. Le pendule pesant

VI.1. Position du problème

On appelle pendule pesant tout solide mobile autour d'un axe (en principe horizontal) ne passant pas par son centre de gravité et placé dans un champ de pesanteur. Déplacé de sa position d'équilibre (stable) dans laquelle le centre de gravité est à la verticale de l'axe, le solide se met à osciller de part et d'autre de cette position dite d'équilibre. Un balancier d'horloge, une balançoire, etc, constituent des pendules pesants.

Référentiel $\mathfrak{R}$ Galiléen
Système : le solide en rotation autour de Oz
Forces :
- Action exercée par le pivot idéal
- Le poids.



Théorème du moment cinétique
- Le moment des forces
→ Pivot idéal : $\mathcal{M}_{Oz}$(pivot) = 0
→ Poids : $\mathcal{M}_{Oz} = (\overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g}).\vec{e_z} = -mgd\sin\theta$
- Le moment cinétique
Pour un solide en rotation $L_{Oz} = J_{Oz}\dot{\theta}$
- Dérivée du moment cinétique $\frac{dL_{Oz}}{dt} = J_{Oz}\ddot{\theta}$
- Théorème :
$J_{Oz}\ddot{\theta} = -mgd\sin\theta$

Ainsi $\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_{Oz}}\sin\theta = 0$

Si on pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J_{Oz}}}$ on retrouve l'équation du pendule simple $\ddot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta = 0$

Positions d'équilibre : $\theta = 0$ position d'équilibre stable
$\theta = \pi$ position d'équilibre instable

VI.2. Cas de faibles amplitudes

On étudie les mouvements d'oscillation de faibles amplitudes au voisinage de la position d'équilibre stable $\theta = 0$.
On a alors $\sin\theta \approx \theta$
L'équation devient $\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0$
On retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique dont la solution est $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

Avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J_{Oz}}} = \frac{2\pi}{T}$

La mesure de la période permet alors de déterminer J_{Oz}.

VI.3. Etude énergétique

La modélisation précédente du pendule pesant ne fait intervenir aucune force dissipative. L'énergie mécanique est donc conservée au cours du mouvement.
Montrons ce résultat à l'aide de la relation trouvée précédemment.

Relation	$J_{Oz}\ddot{\theta} = -mgd\sin\theta$
Multipliée par $\dot{\theta}$:	$J_{Oz}\ddot{\theta}\dot{\theta} = -mgd\sin\theta.\dot{\theta}$
Soit	$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}J_{Oz}\dot{\theta}^2) = mgd\frac{d}{dt}(\cos\theta)$
On conclut	$\frac{1}{2}J_{Oz}\dot{\theta}^2$ $-mgd\cos\theta = cte$
Avec	$E_c = \frac{1}{2}J_{Oz}\dot{\theta}^2$ et $E_p = -mgd\cos\theta + K$

VI.4. Portrait de phase

On utilise les résultats de l'intégrale première du mouvement : $E_m = \frac{1}{2}J_{Oz}\dot{\theta}^2 - mgd\cos\theta$

Soit $2(\frac{E_m}{mgd} + \cos\theta) = \frac{J_{Oz}}{mgd}\dot{\theta}^2 = \frac{\dot{\theta}^2}{\omega_0^2}$

On retrouve l'équation du portrait de phase du pendule simple.

On se place dans le plan (θ, $y = \omega / \omega_0$).

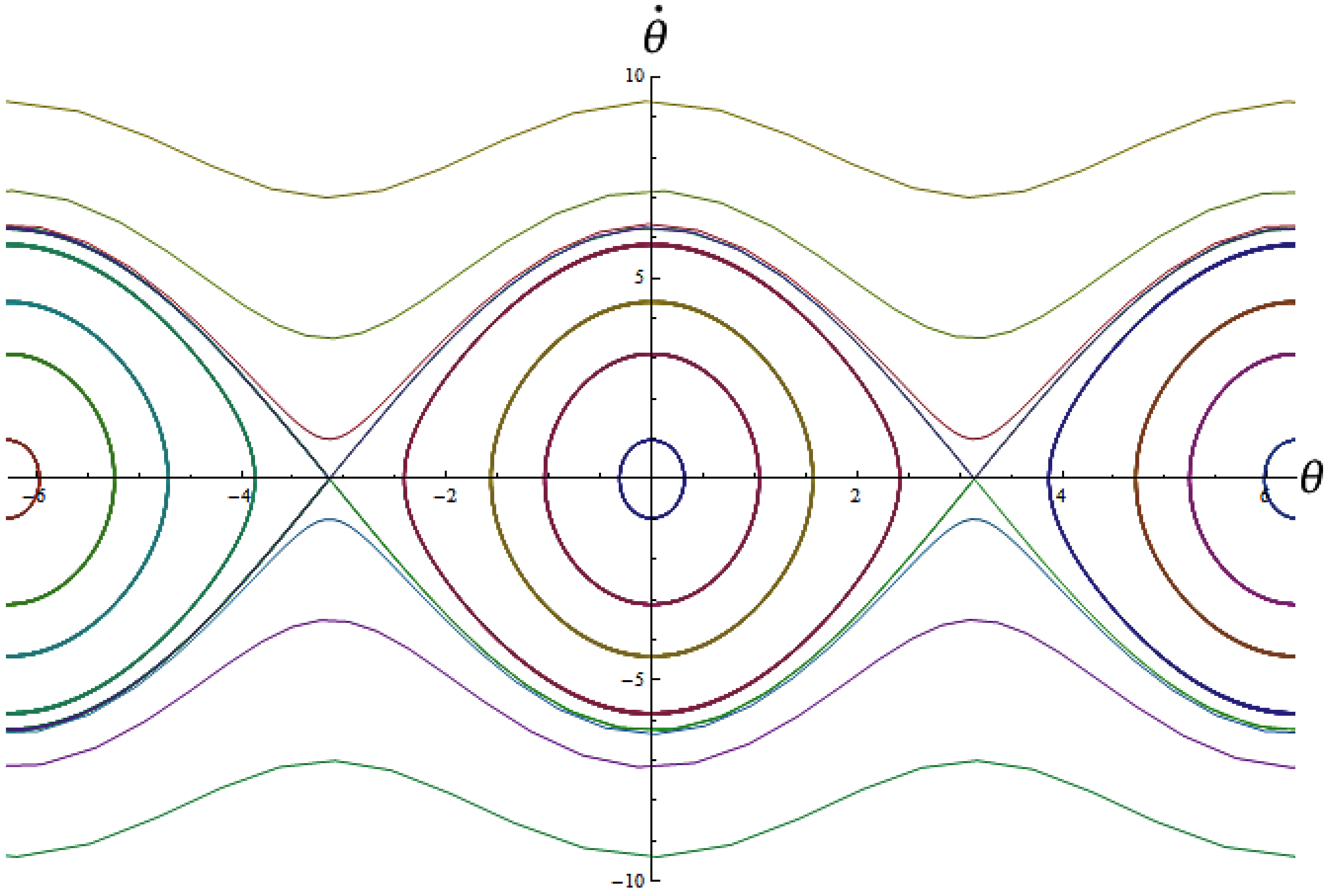
→ Si les oscillations sont petites : $\Rightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2\,(1-(1-\theta^2/2)) = \frac{2E_m}{mgd}$

d'où $y^2 + \theta^2 = \frac{2E_m}{mgd}$

On obtient alors un cercle de centre O et de rayon $\sqrt{\frac{2E_m}{mgd}}$ déterminé par les conditions initiales.

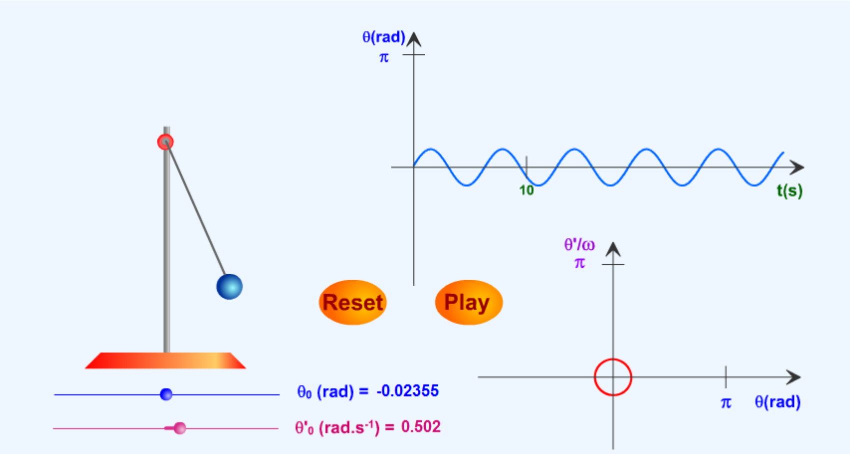
→ Si les oscillations sont plus grandes : Plus l'amplitude initiale augmente et plus on s'éloigne de l'oscillateur harmonique. La courbe n'est plus un cercle mais elle reste fermée.

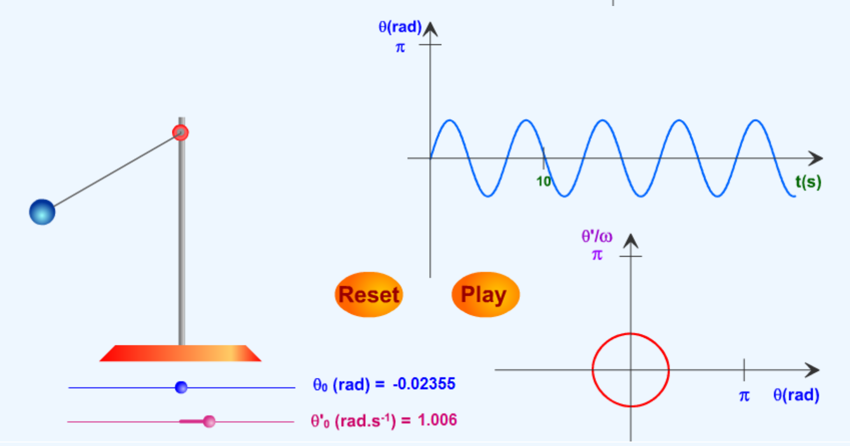
→ Cas du mouvement permanent : la vitesse angulaire ne s'annule jamais, le point tourne autour de l'axe.

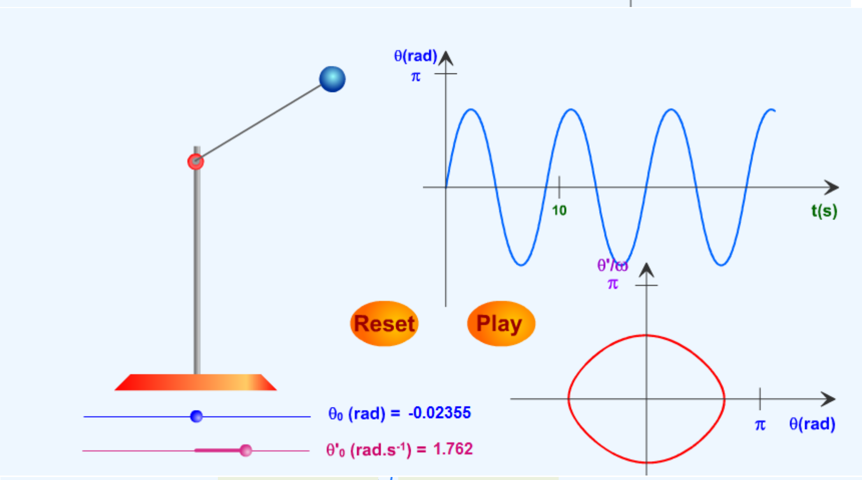


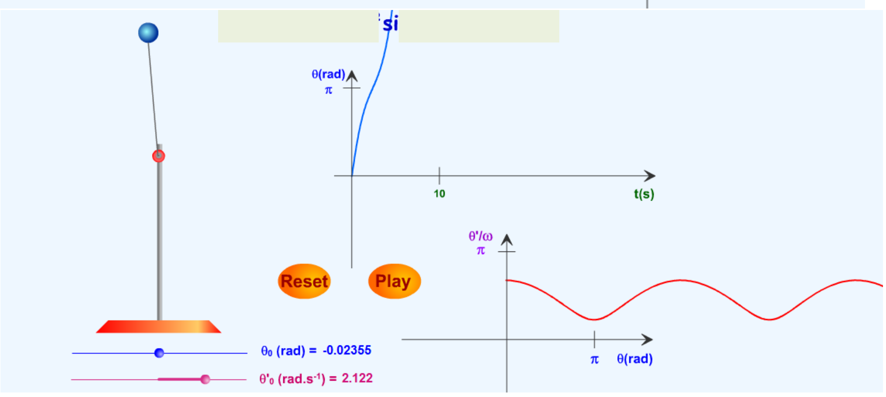
(pendulo ou pendul pesant)

Résolution en fonction des conditions initiales









M8 MOUVEMENT D'UN SOLIDE EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE