Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 point, total sur 40 points, ramené sur 5 points, +15%.
- Problèmes : chaque question sur 4 points, total sur 88 points (V1) ou 76 points (V2), ramené sur 15 points, +75% (V2).

Statistiques descriptives.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \min\left(\frac{1}{10}\lceil 10x \rceil\,; 20\right)$.

	Calculs	Pb V1	Pb V2	Note finale
Transformation	c	p_1	p_2	$\varphi\left(\frac{5c}{40}+\frac{15p_1}{88}+\frac{15p_2}{76}\right)$
Note maximale	34	70	40	$17,4$
Note minimale	6	18	14	$5,1$
Moyenne	$\approx 17,83$	$\approx 41,38$	$\approx 27,86$	$\approx 10,81$
Écart-type	$\approx 6,42$	$\approx 14,69$	$\approx 8,36$	$\approx 3,54$
Premier quartile	$13,5$	$28,5$	21	$7,9$
Médiane	18	42	30	11
Troisième quartile	22	53	35	$13,45$

Exponentielle de matrice (V1)

Ce problème était assez élémentaire, et ne contenait aucune difficulté. Il convenait de bien le réussir. Les erreurs ou maladresses ont été sanctionnées.

1) Question bien réussie.

2) Il convenait d'initialiser à $n = 0$.

3) Beaucoup n'utilisent pas la question **2)**. C'est dommage.

Certains utilisent la question précédente pour $n = -1$, en expliquant qu'ils la généralisent par récurrence de la même manière. C'est bien entendu abusif, vu qu'il faudrait au préalable montrer que $E(t)$ est inversible et obtenir $E(t)^{-1} = E(-t)$...

4) Beaucoup de confusions sur le noyau de E : E n'est pas une application linéaire, $\mathrm{Ker}(E) = \{\, t \in \mathbb{R} \mid E(t) = I_n \,\}$.

5) La liberté de la famille ne donne pas directement l'injectivité de E.

7) Question souvent bien traitée. Certains se sont trompé, ce qui est catastrophique pour la suite. VÉRIFIEZ vos résultats !!!!

9) On vous demande d'expliciter les matrices P, D, P^{-1} : n'oubliez pas de le faire. Certains se sont trompés.

10) On vous donne A^n : vous devez détailler intégralement le calcul. Les « par calcul, on obtient $A^n = [...]$ » ne rapporten aucun point.

Certains pipeautent allégrement sur les calculs pour obtenir le résultat donné par l'énoncé : j'espère que vous n'êtes pas fiers de vous. Après cela, je ne laisse plus rien passer.

11) La notation $M^{1/2}$ n'a aucun sens, c'est une ☠HORREUR☠.

J'ai lu des $x^2 = 2$ donc $x = \sqrt{2}$. Quelle ☠HORREUR☠ !

13) Peut-être la seule question un tant soit peu difficile du problème, peu résolue par ailleurs.

14) Il convenait d'être irréprochable sur ce point de cours (important, et ultra classique) : hypothèses, écriture (avec les valeurs absolues et les bonnes bornes dans la majoration), vérification sur l'exponentielle, croissance**s** comparé**es**.

15+) La suite était assez facile, et souvent bien réussie.

Le polytope de Birkhoff (V2)

À part quelques questions difficiles, la plupart des manipulations étaient élémentaires. La plupart de ceux qui ont attaqué ce problème n'ont pas lu attentivement l'énoncé et ont oublié une hypothèse fondamentale : les matrices bistochastiques sont à coefficients positifs !
Beaucoup ont perdu beaucoup de temps sur des manipulations lourdes, et parfois inutiles. Le plus simple était de travailler avec des matrices élémentaires. Il fallait savoir les multiplier, nous venions de le revoir en interrogation de cours...
Certains sont trop formels sur des questions simples (par exemple, pour montrer qu'une matrice de permutation est bistochastique, il suffit de dire que ses coefficients sont positifs et que sur chaque ligne ou colonne il y a exactement un 1, puis des 0), puis bien trop laxistes dès que cela devient difficile.

1) Dans la définition de matrice bistochastique, il n'y a pas que les sommes des lignes et des colonnes à vérifier. Les coefficients doivent aussi être positifs !

2) Une fois l'identité $M_\sigma M_\tau = M_{\sigma\tau}$ vue, tout allait très vite. Pourtant, c'est souvent la dernière chose démontrée. Un peu d'anticipation au brouillon ne fait pas de mal... Il y a un morphisme (de monoïdes, puis de groupes).

3a) Question plutôt bien réussie.

3b) Question assez élémentaire, mais peu réussie. Il suffisait de considérer les coefficients.

5) Question souvent mal comprise, notamment parce que beaucoup ont oublié la positivité des coefficients d'une matrice bistochastique. C'est pourtant cette dernière condition qui guidait la résolution (il suffisait d'ajouter un multiple de J_n pour revenir à une matrice de F à coefficients positifs, et le tour était joué).

6) L'analyse-synthèse n'a pas toujours été bien traitée. Le plus simple aurait été d'introduire la forme linéaire qui, à une matrice de F, associe la valeur commune de la somme de ses lignes et de ses colonnes (et qui vaut n sur J_n).

7) Le coefficient $m_{n,n}$ ne pouvait pas se traiter comme les autres. Attention à ces « détails », qui n'en sont en fait pas : ce sont des points extrêmement importants de l'énoncé.

Personne n'a réussi à formaliser l'argument donnant $\dim(G) \neq (n-1)^2$. Notamment, les matrices $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n-1}$ n'engendrent pas G : elles ne sont même pas éléments de G. Ceux qui ont le mieux réussi la question ont parlé de « degrés de liberté ».

8a) La formule de Grassman est souvent mal restituée. Écrire $\dim(F \cup G)$ pour deux sous-espaces vectoriels n'a pas de sens.

8b) On a immédiatement $G = \bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} L_k^* \cap \bigcap_{\ell=1}^{n} \operatorname{Ker} C_\ell^*$. Toute la question est d'expliquer pourquoi on peut s'arrêter à $\ell = n-1$ dans la deuxième intersection.

9) Question simple, et souvent bien résolue.

11) Question simple, et souvent bien résolue.

12+) La fin devenait vraiment difficile, sauf peut-être la dernière question (l'initialisation était toutefois à rédiger attentivement).

Et vu qu'il me reste un peu de place, une once de culture...