Devoir surveillé n°6
Version n°1
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 \in [-1,+\infty[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

1) Montrer que cette suite ne possède qu'une seule limite finie éventuelle α que l'on calculera.

2) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|u_n-\alpha|$. En déduire la convergence de la suite (u_n).

II. Un exercice sur les polynômes.

Soit le polynôme $P = X^6 - 5X^4 + 8X^3 - 9X^2 + aX + b$, où a et b sont, pour l'instant, deux réels indéterminés.

1) Déterminer a et b pour que 1 soit racine multiple de P.

Désormais a et b auront ces valeurs.

2) Quel est alors l'ordre de multiplicité k de 1 comme racine de P ?

3) Vérifier ce résultat en effectuant la division euclidienne de P par $(X-1)^k$ pour les valeurs a et b trouvées. Préciser la valeur du quotient Q.

4) En déduire les factorisations de Q puis de P en produit d'irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ puis sur $\mathbb{C}[X]$.

5) Montrer, successivement mais sans calcul, que $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ et $P^{(3)}$ possède chacun au moins une racine réelle dans l'intervalle ouvert $]-3,1[$.

III. Qualité de l'interpolation de Lagrange.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ infiniment dérivable. On se donne $n+1$ points $x_0, \ldots, x_n$ distincts deux à deux dans $[a, b]$, et l'on considère le problème d'interpolation polynomial relatif aux points $(x_0, f(x_0))$,..., $(x_n, f(x_n))$.

Dans la suite, on supposera que $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ et l'on notera $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

On considère le polynôme

$$\pi_\sigma = \prod_{i=0}^{n}(X - x_i).$$

1) *Question de cours :* Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_n(f)$ de degré au plus n vérifiant :

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ L_n(f)(x_i) = f(x_i).$$

On donnera notamment l'expression explicite de $L_n(f)$.

On veut démontrer pour tout réel $x \in [a, b]$ la propriété suivante, notée $\mathscr{P}_x$:

$$\exists c_x \in]a, b[,\ f(x) - L_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\pi_\sigma(x).$$

2) *Résultat préliminaire :* soit $p \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que si $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction p-fois dérivable qui s'annule au moins $p+1$ fois sur $[a, b]$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi^{(p)}(c) = 0$.

Indication : on pourra procéder par récurrence sur p.

3) Justifier que pour tout $x \in \sigma$, la propriété $\mathscr{P}_x$ est vraie.

On fixe x un réel de $[a, b]$ qui n'est pas dans σ. Soit λ un réel. On définit sur $[a, b]$ une application F par :

$$F : t \mapsto f(t) - L_n(f)(t) - \lambda\pi_\sigma(t).$$

4) Déterminer un réel λ de sorte que $F(x) = 0$. On choisira alors λ de cette façon.

5) Démontrer que F s'annule $n+2$ fois et en déduire que $\mathscr{P}_x$ est vraie.

On s'intéresse maintenant à la qualité de l'approximation de f par $L_n(f)$.

On note $M_n(f)$ le maximum de $\left|f^{(n)}\right|$ sur $[a,b]$:

$$M_n(f) = \max\left\{\left|f^{(n)}(t)\right| \ ; \ t \in [a,b]\right\}.$$

6) Justifier que pour chaque $n \in \mathbb{N}$ la quantité $M_n(f)$ est bien définie.

7) Déduire des questions précédentes qu'il existe un réel positif K indépendant de n tel que pour tout $t \in [a,b]$:

$$|f(t) - L_n(f)(t)| \leqslant \frac{K^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}(f).$$

8) *Exemple :* on considère dans cette question que f est la fonction sinus et que $[a,b] = [0, 2\pi]$. Expliciter les constantes $M_n(f)$ et en déduire dans ce cas que

$$\frac{K^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}(f) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

9) *Exemple :* on considère dans cette question que $[a,b] = [-1,1]$ et que

$$f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}.$$

- **a)** Justifier que f est infiniment dérivable et déterminer f'.
- **b)** En observant que pour tout $x \in [-1,1]$, $(1+x^2)f(x) = 1$, montrer que pour tout $x \in [-1,1]$ et tout $n \geqslant 2$:

$$(1+x^2)f^{(n)}(x) + 2nxf^{(n-1)}(x) + n(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0.$$

- **c)** En déduire une expression de $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ M_{2n}(f) \geqslant (2n)!.$$

Remarque : cette dernière inégalité montre que la quantité $M_n(f)$ peut être grande et cela peut empêcher la convergence vers 0 de $M_0(f - L_n(f))$ (on parle de convergence de $(L_n(f))$ vers f au sens *uniforme*). Ceci est appelé *phénomène de Runge*.

— FIN —