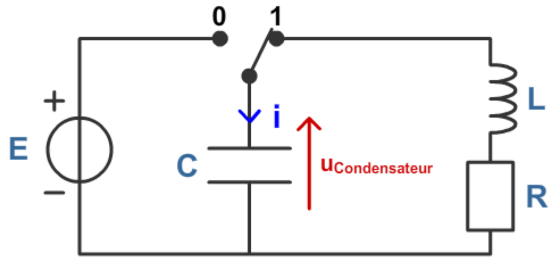
EL4 : LE REGIME TRANSITOIRE DU SECOND ORDRE

I. Observations

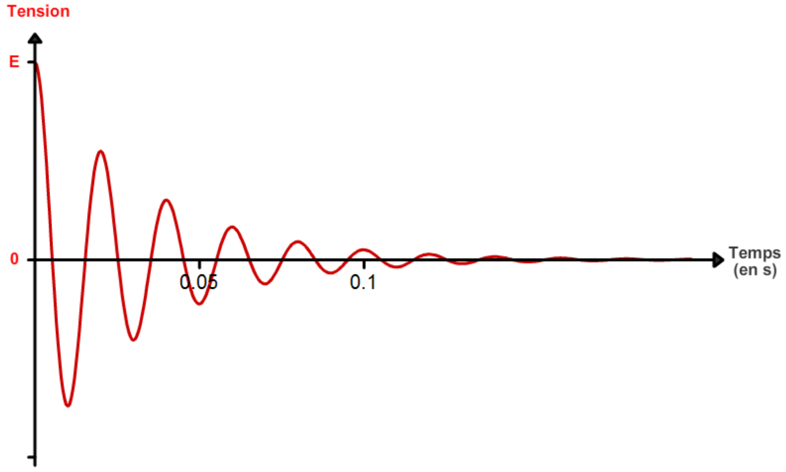
(Animation RLC2)

• Montage :

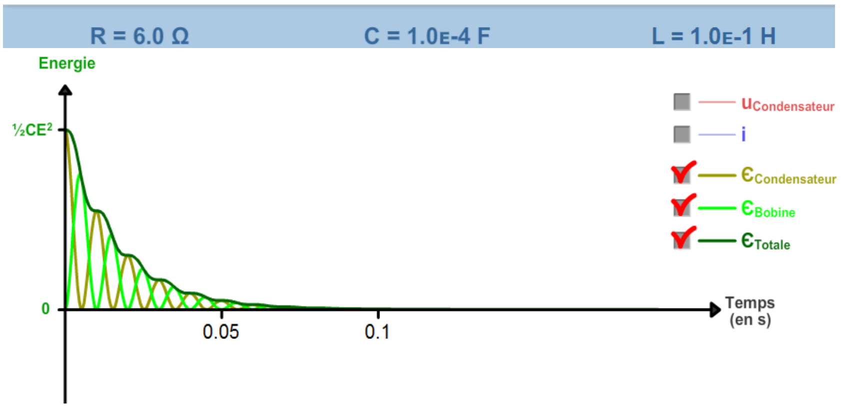


• Tension aux bornes de C et énergie

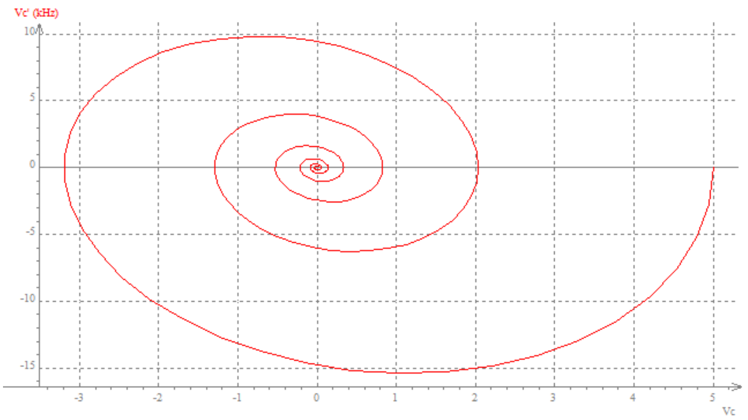
→ <u>Faible valeur de R</u>



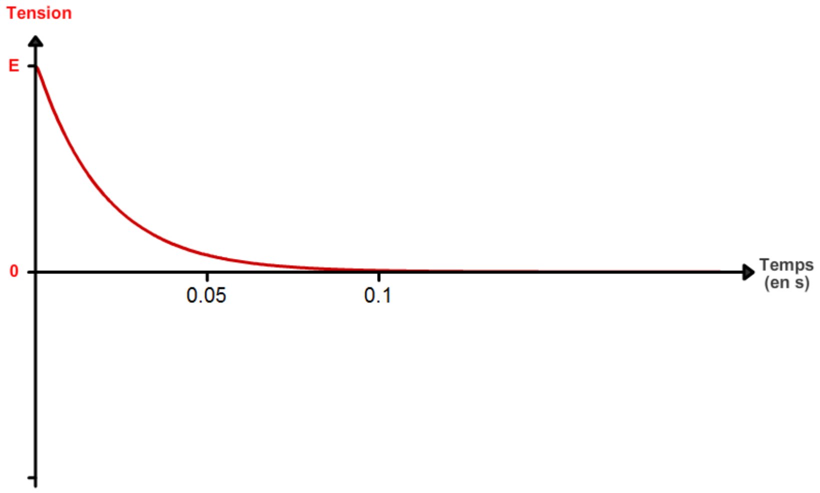
Pour une valeur faible de la résistance on observe un régime transitoire avec une tension oscillante, et une diminution progressive de l'énergie totale. Puis le régime est permanent et la tension est constamment nulle.



Au cours de l'évolution il y a échange d'énergie entre le condensateur et la bobine.

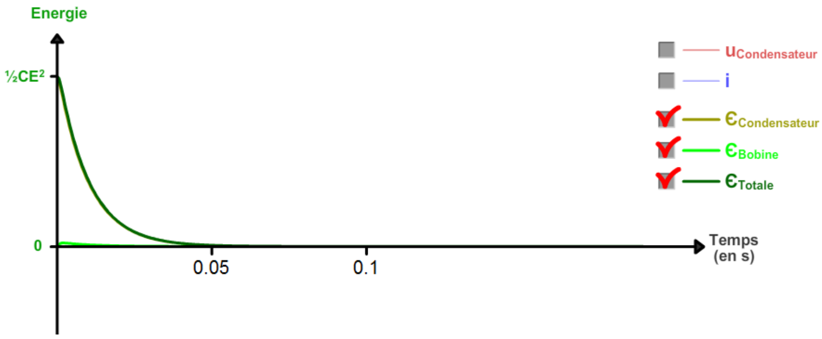


→ <u>Forte valeur de R</u>

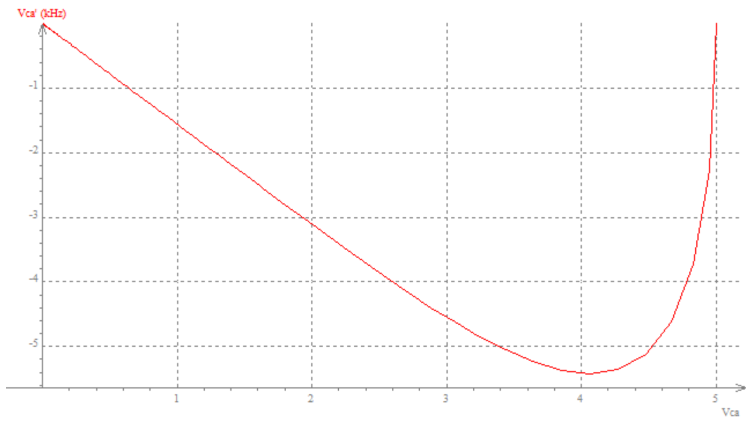


Pour une valeur élevée de la résistance on observe un régime transitoire avec une tension qui décroit régulièrement et une diminution rapide de l'énergie totale. Puis le régime est permanent et la tension est constamment nulle.

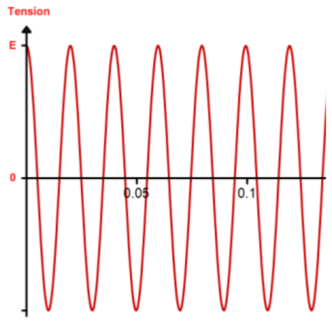
R = 2.0E2 Ω C = 1.0E-4 F L = 1.0E-1 H



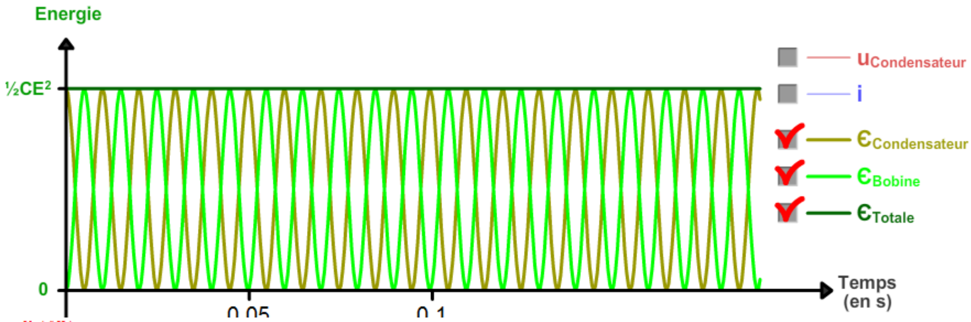
Il n'y a plus d'échange d'énergie entre la bobine et le condensateur.

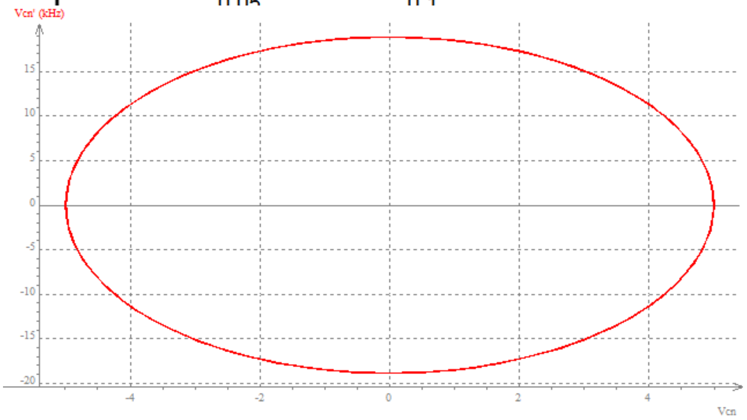


→ Cas limite R = 0Ω



La tension aux bornes du condensateur est purement oscillante, l'énergie totale est conservée il y a en permanence échange d'énergie entre le condensateur et la bobine.





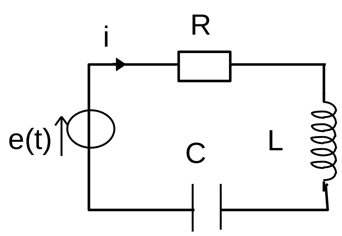
Conclusion
Dans les tous les cas on observe :
- Un régime transitoire dont la forme dépend de la résistance.
- Un régime permanent qui correspond à la fin du mouvement dans le cas du régime libre.

On constate que plus la résistance est importante et plus la perte de l'énergie est rapide.

Si la résistance est faible il y a des oscillations amorties avant l'arrêt si la résistance est importante le retour au régime permanent est rapide.

II. Mise en équation

II.1. Cas général



Dans le circuit ci-contre on suppose L et C idéales.
Loi de mailles : $e(t) = u_L(t) + u_R(t) + u_c(t)$

Or $i = \dfrac{dq}{dt}$

On a donc $L\dfrac{d^2q}{dt^2} + R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{c} = e(t)$

Le dipôle R, L, C série est un circuit du second ordre car l'équation différentielle à laquelle on aboutit est du second ordre.

Si on étudie le régime libre $e(t) = L\dfrac{d^2q}{dt^2} + R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{C} = 0$

II.2. Cas particulier où R = 0Ω

On choisit comme conditions initiales : $t = 0$ $q = q_0$ et $i = 0$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0 \xrightarrow{\times \frac{1}{C}} \frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{u_C}{LC} = 0$$

$$\xrightarrow{\times \frac{d}{dt}} \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{LC} = 0$$

On trouve l'équation de ce que l'on appelle l'oscillateur harmonique.

On pose $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ La pulsation propre du circuit.

La solution générale est de la forme $q(t) = \lambda \cos \omega_0 t + \mu \sin \omega_0 t = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

Conditions initiales

$t = 0$ $i = \dot{q} = 0$ l'intensité qui traverse une bobine est une fonction continue du temps

$q = q_0$ la charge aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{q}(0) = -A\omega_0 \sin\varphi = 0 \\ q(0) = A = q_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ A = q_0 \end{cases}$$

D'où $q(t) = q_0 \cos \omega_0 t$ et $i(t) = -q_0\omega_0 \sin \omega_0 t$.

Bilan énergétique

$W_C(t) = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C} \cos^2 \omega_0 t$

$W_L(t) = \frac{Li^2}{2} = \frac{Lq_0^2}{2LC} \sin^2 \omega_0 t$

$W_T(t) = \frac{q_0^2}{2C} = \text{constante}.$

Au cours du temps il y a transfert d'énergie de la capacité à la bobine, mais l'énergie totale est conservée.

II.3. Forme canonique

• On réorganise l'équation différentielle pour la mettre sous sa forme dite « canonique » :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda\omega_0 \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0$$

On pose λ le coefficient d'amortissement réduit.

Et ω_0 la pulsation propre.

Où encore

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\alpha \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0$$

Avec α le coefficient d'amortissement

Où encore

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0$$

Avec Q le facteur de qualité du système.

Pour obtenir le facteur de qualité d'un circuit, dont on verra la signification physique un peu plus tard, il suffit d'écrire l'équation différentielle avec un coefficient 1 devant la dérivée second, le coefficient de la dérivée première correspond alors à la pulsation propre divisée par le facteur de qualité.

Dans le cas qui nous intéresse :

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=0 \Leftrightarrow \frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{q}{LC}=0$$

Ainsi on identifie $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$

Et $2\lambda\omega_0=\frac{R}{L} \Leftrightarrow \lambda=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$

Ou $\frac{\omega_0}{Q}=\frac{R}{L} \Leftrightarrow Q=\frac{1}{2\lambda}=\frac{L\omega_0}{R}=\frac{1}{RC\omega_0}$

Enfin $2\alpha=\frac{R}{L} \Leftrightarrow \alpha=\frac{R}{2L}$

III. Résolution

III.1. Recherche générale

Pour résoudre l'équation :

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{dy}{dt}+\omega_0^2y=0$$

nous pouvons chercher des solutions de la forme y(t) = A exp(st)
Où s est une constante à déterminer.
Substituant cette expression à y dans l'équation différentielle,

$\frac{d^2y}{dt^2}=s^2A\exp(st)$

$\frac{\omega_0}{Q}\frac{dy}{dt}=\frac{\omega_0}{Q}sA\exp(st)$

En remplaçant nous trouvons que cette équation est satisfaite à tout instant t, si s est une solution de l'équation caractéristique $s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^2=0$

On peut distinguer trois cas selon le signe du discriminant $\Delta=\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2-4\omega_0^2=\omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2}-4\right)$

III.2. Cas où Q<1/2

En fonction des données du circuit : $R^2>4L/C$

Il s'agit de cas fortement amortis.
Le discriminant Δ est positif.

Les racines du polynôme caractéristique sont :

$$s_+=-\frac{\omega_0}{2Q}+\omega_0\sqrt{\left(\frac{1}{4Q^2}-1\right)}=-r_+$$

$$s_-=-\frac{\omega_0}{2Q}-\omega_0\sqrt{\left(\frac{1}{4Q^2}-1\right)}=-r_-$$

D'où

$$\begin{cases} y(t)=A\exp(-r_+t)+B\exp(-r_-t) \\ \frac{dy(t)}{dt}=-Ar_+\exp(-r_+t)-Br_-\exp(-r_-t) \end{cases}$$

Où A et B deux constantes d'intégration, qui peuvent être déterminées à partir des conditions initiales.

Pour le circuit RLC : y(t) = q(t) la charge du condensateur, $\frac{dy(t)}{dt}$ = i(t) l'intensité qui traverse la bobine

Ce régime est appelé le régime **apériodique**

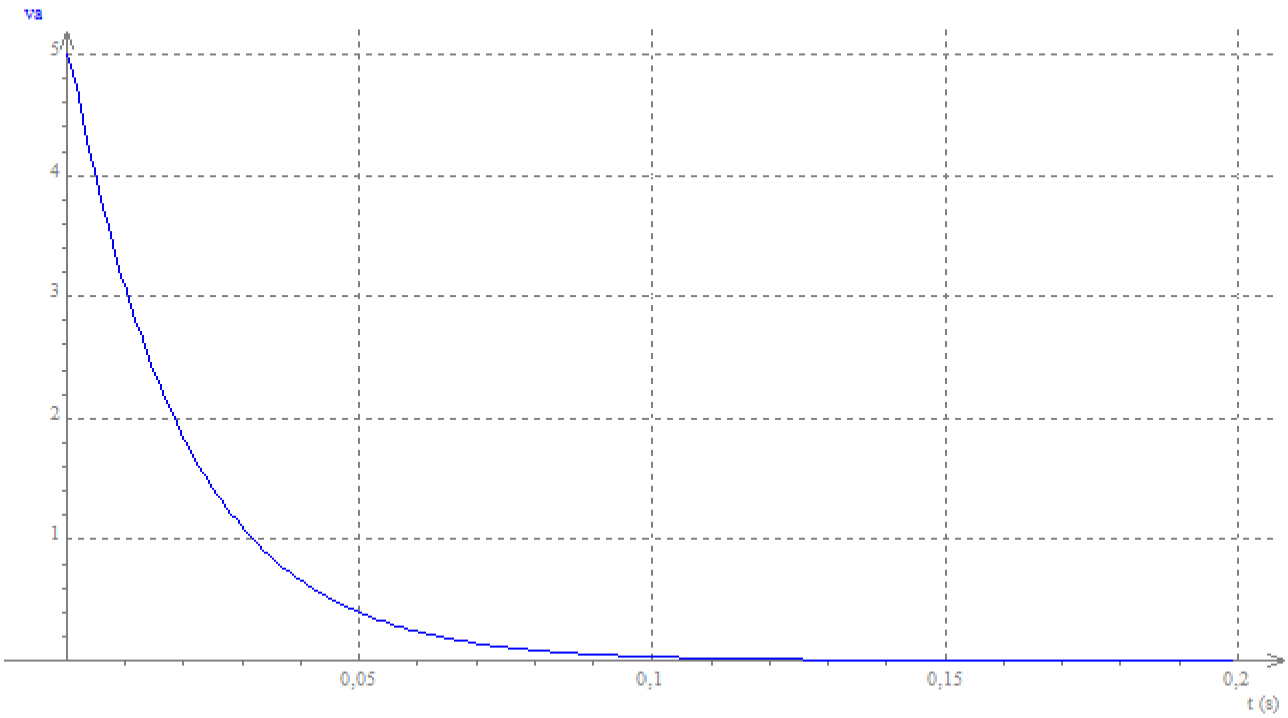
• Exemple

On étudie la décharge d'un condensateur à t = 0 q = q_0 et l'intensité dans le circuit est nulle.
Il y a continuité de la charge d'un condensateur et de l'intensité traversant une bobine.
D'où

Conditions initiales : $\begin{cases} q(0)= q_0=A+B \\ i(0)=0=-Ar_+-Br_- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_0=\left(1-\frac{r_-}{r_+}\right)B \\ r_+A= -r_-B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=\frac{r_+}{r_+-r_-}q_0 \\ A=\frac{-r_-}{r_+-r_-}q_0 \end{cases}$

Ainsi $\begin{cases} q(t)= \frac{q_0}{r_+-r_-}(r_+\exp(-r_-t) - r_-\exp(-r_+t)) \\ i(t)= \frac{q_0 r_+ r_-}{r_+-r_-}(\exp(-r_-t) - \exp(-r_+t)) \end{cases}$

Si on reprend l'exemple de la simulation R = 200Ω C = 1. 10^{-4} F et L = 0.1H
On obtient ω_0 = 316 rad/s, Q = 0.16 Δ = 3600576
r_+ = 51.24 et r_- = 1948
Soit q(t) = -5.3. 10^{-4}[51.24 exp(-1948*t)-1948*exp(-51.24*t)]



On retrouve la courbe de l'expérience

• Durée du régime transitoire
On remarque $0<r_+<r_-$
Ainsi aux temps assez élevés : $y(t)=A\exp(-r_+t)+B\exp(-r_-t) \approx A\exp(-r_+t)$
On en déduit donc que la durée du régime apériodique est de l'ordre de quelque τ, où τ est la plus grande des deux quantités $1/|s_+|$ et $1/|s_-|$ où les s_i sont les racines de l'équation caractéristique.

Ainsi $\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{2Q} - \omega_0\sqrt{\left(\frac{1}{4Q^2}-1\right)} = \frac{\omega_0}{2}\left(\frac{1}{Q} - \sqrt{\left(\frac{1}{Q^2}-4\right)}\right) = \frac{\omega_0}{2}\frac{\left(\frac{1}{Q}-\sqrt{\left(\frac{1}{Q^2}-4\right)}\right)\left(\frac{1}{Q}+\sqrt{\left(\frac{1}{Q^2}-4\right)}\right)}{\frac{1}{Q}+\sqrt{\left(\frac{1}{Q^2}-4\right)}}$

Soit $\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{2}\frac{4}{\frac{1}{Q}+\sqrt{\left(\frac{1}{Q^2}-4\right)}} = 2Q\omega_0\frac{1}{1+\sqrt{(1-4Q^2)}}$

Dans le cas où le facteur de qualité est très faible Q<<1 on a alors $\frac{1}{\tau} \approx Q\omega_0$

III.3. Cas où Q>1/2

En fonction des données du circuit : $R^2<4L/C$

Il s'agit de cas faiblement amortis.
Le discriminant Δ est négatif.

Les racines du polynôme caractéristique sont :

$$s_+ = -\frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0\sqrt{\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right)} = -\frac{\omega_0}{2Q} + j\Omega$$

$$s_- = -\frac{\omega_0}{2Q} - j\omega_0\sqrt{\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right)} = -\frac{\omega_0}{2Q} - j\Omega$$

Ainsi $y(t) = \alpha\exp((-\frac{\omega_0}{2Q} + j\Omega)t) + \beta\exp((-\frac{\omega_0}{2Q} - j\Omega)t) = \exp(-\frac{\omega_0}{2Q}t)(\alpha\exp(j\Omega t)+\beta\exp(-j\Omega t))$

Or $\exp(j\Omega) = \cos(\Omega t)+j\sin(\Omega t)$ et $\exp(-j\Omega) = \cos(-\Omega t)+j\sin(-\Omega t)$

Donc $\alpha\exp(j\Omega t)+\beta\exp(-j\Omega t)$ est une combinaison linéaire de $\cos(\Omega t)$ et $\sin(\Omega t)$
La solution peut donc se mettre sous la forme :

$y(t) = \exp(-\frac{\omega_0}{2Q}t)(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)) = D\exp(-\frac{\omega_0}{2Q}t)\cos(\Omega t+\varphi)$

On a lors $\frac{dy(t)}{dt} = \exp(-\frac{\omega_0}{2Q}t)((-\frac{\omega_0}{2Q}A+B\Omega)\cos(\Omega t) + (-\frac{\omega_0}{2Q}B - A\Omega)\sin(\Omega t))$

Ou $\frac{dy(t)}{dt} = D\exp(-\frac{\omega_0}{2Q}t)(-\frac{\omega_0}{2Q}\cos(\Omega t+\varphi) - \Omega\sin(\Omega t+\varphi))$

Où A et B deux constantes d'intégration, qui peuvent être déterminées à partir des conditions initiales.
Pour le circuit RLC : $y(t) = q(t)$ la charge du condensateur, $\frac{dy(t)}{dt} = i(t)$ l'intensité qui traverse la bobine

Ce régime est appelé le régime **pseudopériodique**

• Exemple
On étudie la décharge d'un condensateur à t = 0 $q = q_0$ et l'intensité dans le circuit est nulle.
Il y a continuité de la charge d'un condensateur et de l'intensité traversant une bobine.
D'où

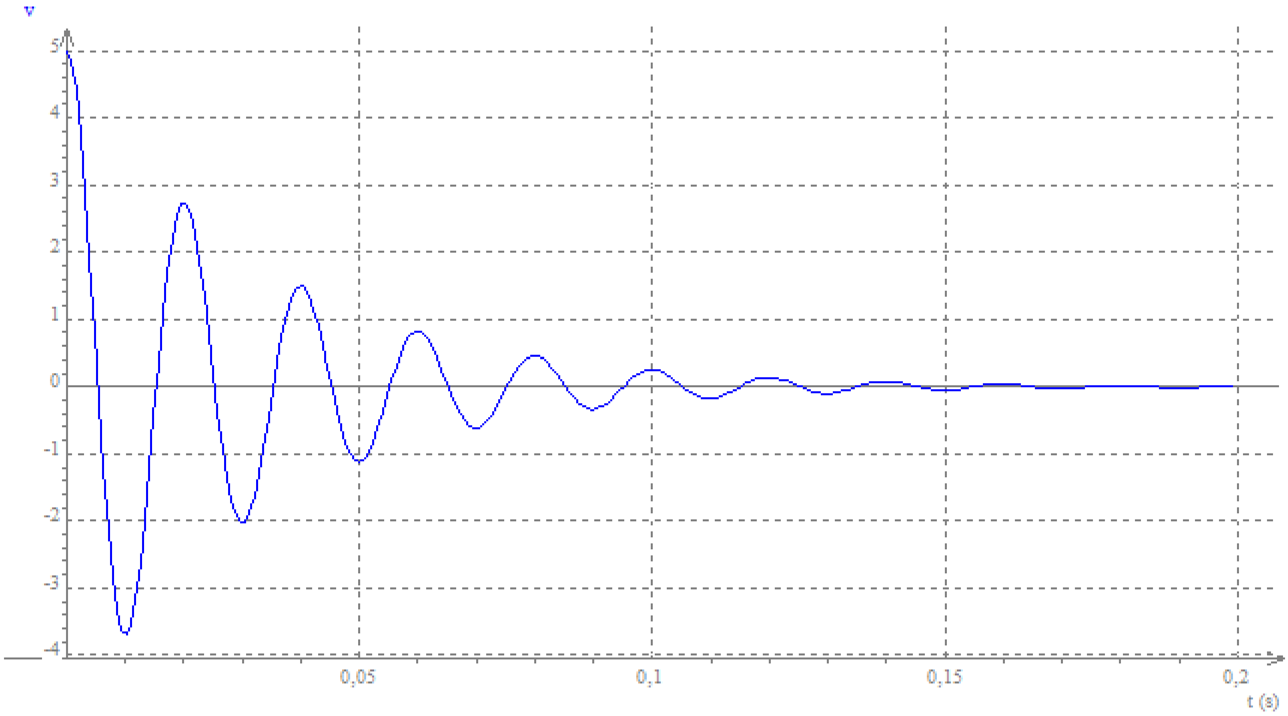
Conditions initiales : $\begin{cases} q(0)=q_0=A \\ i(0)=0=-\frac{\omega_0}{2Q}A + B\Omega \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=q_0 \\ B=\frac{\omega_0}{2Q\Omega}q_0 \end{cases}$

Ainsi $\begin{cases} q(t)=q_0\exp(-\frac{\omega_0}{2Q}t)(\cos(\Omega t) + \frac{\omega_0}{2Q\Omega}\sin(\Omega t)) \\ i(t)=-q_0\exp(-\frac{\omega_0}{2Q}t)(\left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2\frac{1}{\Omega} + \Omega)\sin(\Omega t)) \end{cases}$

Or $\left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2\frac{1}{\Omega} + \Omega = \frac{\omega_0^2+\Omega^2 4Q^2}{4Q^2\Omega} = \frac{\omega_0^2}{4Q^2\Omega}(1+4Q^2(1-\frac{1}{4Q^2})) = \frac{\omega_0^2}{\Omega}$

Ainsi $\begin{cases} q(t)=q_0\exp(-\frac{\omega_0}{2Q}t)(\cos(\Omega t) + \frac{\omega_0}{2Q\Omega}\sin(\Omega t)) \\ i(t)=-xq_0\frac{\omega_0^2}{\Omega}\exp(-\frac{\omega_0}{2Q}t)\sin(\Omega t)) \end{cases}$

Si on reprend l'exemple de la simulation $R = 6\Omega$ $C = 1.\ 10^{-4}$ F et L = 0.1H
On obtient $\omega_0 = 316$ rad/s, Q = 5,27 $\Delta = -96{,}3\ 10^3$
$\frac{\omega_0}{2Q} = 30s^{-1}$ et $\Omega = 310$ rad/s
Soit q(t) = 5*exp(-30*t)*(cos(310*t)+0.097*sin(310*t))



• Remarque sur le régime pseudo périodique

→ Le graphe est une sinusoïde enveloppée dans une exponentielle.

→ On a $\exp(-\frac{\omega_0}{2Q}t) = \exp(-t/\tau)$

Plus Q élevé plus τ est élevé et plus le retour au régime permanent $q \to 0$ est lent pour une pulsation propre donnée.

→ On appelle $T = \dfrac{2\pi}{\Omega}$ la pseudo période

III.4. Cas intermédiaire Q = 1/2

En fonction des données du circuit : $R^2=4L/C$

Le discriminant Δ est nul.

Les racines du polynôme caractéristique sont doubles :

$$s = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$$

La solution est alors de la forme :

$y(t) = (A+Bt)\exp(-\omega_0 t)$

On a lors $\dfrac{dy(t)}{dt} = \exp(-\omega_0 t)(-\omega_0 A + B - \omega_0 B t)$

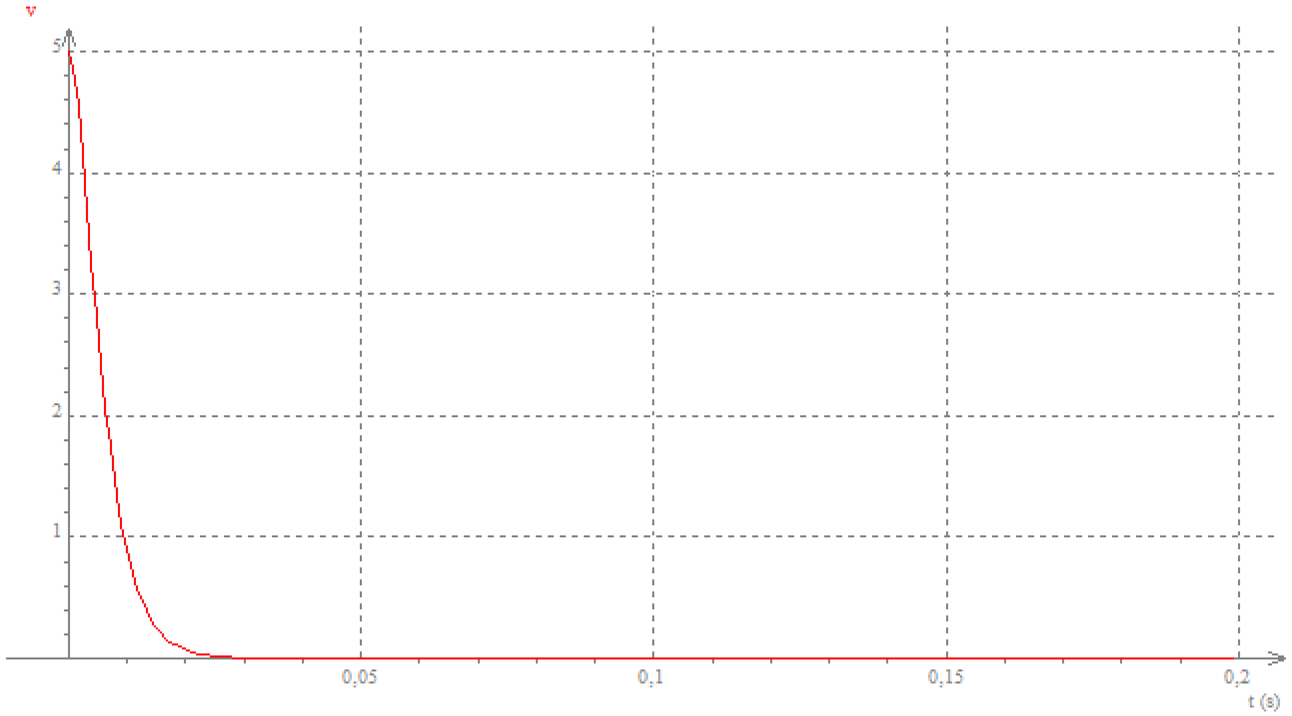
On a le régime critique

Quand $t \to \infty$ $q \to 0$

On étudie la décharge d'un condensateur à t = 0 $q = q_0$ et l'intensité dans le circuit est nulle.
Il y a continuité de la charge d'un condensateur et de l'intensité traversant une bobine.
D'où

Conditions initiales $\begin{cases} q(0)= q_0=A \\ i(0)=0=B-\omega_0 A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A= q_0 \\ B= \omega_0 q_0 \end{cases}$

D'où $\begin{cases} q(t)= q_0\exp(-\omega_0 t)(1+\omega_0 t) \\ i(t)=-\omega_0^2 q_0 t\exp(-\omega_0 t) \end{cases}$



• <u>Durée du régime transitoire</u>

Par l'expression de la solution du régime critique on a $\frac{1}{\tau} = \omega_0$

Le régime critique est celui qui revient le plus vite au régime permanent

III.5. En résumé

On a une équation différentielle de la forme : $a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = 0$

On la remplace sous sa forme canonique : $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0$

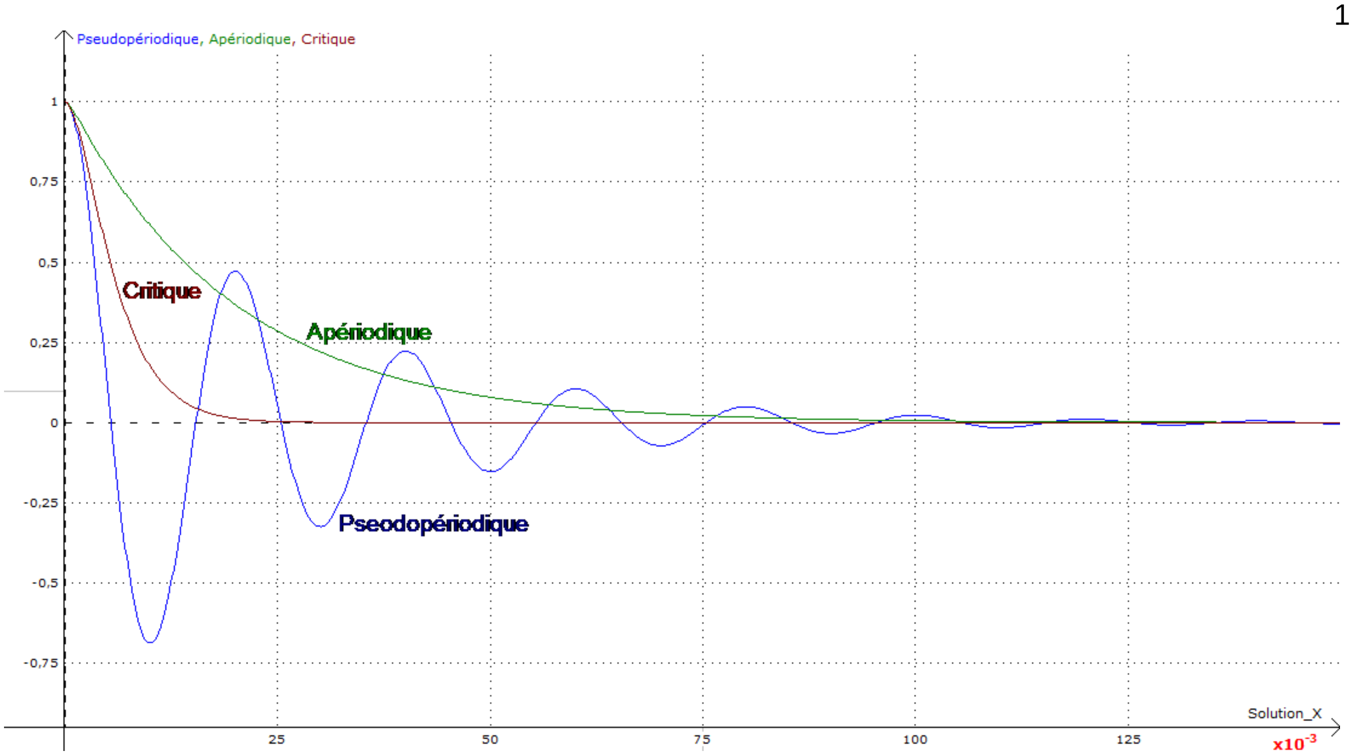
On recherche les solutions de la forme $y(t) \propto \exp(st)$

s est solution de **l'équation caractéristique** : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$

On calcule le discriminant $\Delta = = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$

Avec A et B sont des constantes d'intégration que l'on détermine par les conditions initiales dans le tableau récapitulatif ci-après.

Signe de Δ	Facteur de qualité Q	Racines	Forme de la solution	Nom du régime	Durée typique du régime transitoire
$\Delta > 0$	$Q < 1/2$	$s_+ = -\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0 \sqrt{\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)} = -r_+$ $s_- = -\frac{\omega_0}{2Q} - \omega_0 \sqrt{\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)} = -r_-$	$y(t) = A\exp(-r_+ t) + B\exp(-r_- t)$	Régime apériodique	$\frac{1}{\tau} = 2Q\omega_0 \frac{1}{1+\sqrt{(1-4Q^2)}}$ Si $Q \ll 1$ $\tau \approx 1/(Q\omega_0)$
$\Delta = 0$	$Q = 1/2$	$s = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$	$y(t) = (A+Bt)\exp(-\omega_0 t)$	Régime critique	$\tau = 1/\omega_0$
$\Delta < 0$	$Q > 1/2$	$s_+ = -\frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0 \sqrt{\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)}$ $= -\frac{\omega_0}{2Q} + j\Omega$ $s_- = -\frac{\omega_0}{2Q} - j\omega_0 \sqrt{\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)}$ $= -\frac{\omega_0}{2Q} - j\Omega$	$y(t) = \exp(-\frac{\omega_0}{2Q} t)(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))$ $= D\exp(-\frac{\omega_0}{2Q} t)\cos(\Omega t + \varphi)$	Régime pseudopériodique	$\tau = 2Q/\omega_0$



III.6. Cas d'un échelon de tension

Il suffit d'ajouter aux solutions précédentes la solution particulière avec le calcul des constantes d'intégration

IV. Portrait de phase

IV.1. Définitions (Rappels)

- C'est la représentation dans le plan $(0, f(t), \frac{df(t)}{dt})$ lorsque t varie.
- On appelle point de phase un point P figuratif dont les coordonnées à un instant donné t sont $(f(t), \frac{df(t)}{dt})$
- Lorsque t varie, le point P décrit une courbe, cette courbe est appelée **trajectoire de phase**.
- On appelle portrait de phase l'ensemble des trajectoires de phase lorsque les conditions initiales varient.

IV.2. Résultats pour les circuits du second ordre

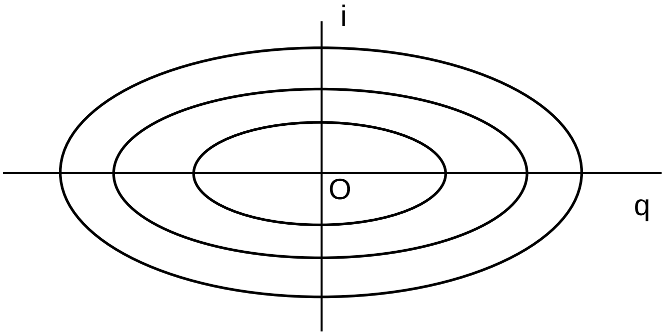
IV.2.1. Régime non amortie

- Système d'évolution : $\begin{cases} i = \frac{dq}{dt} \\ \frac{di}{dt} = -\omega_0^2 q \end{cases}$
- Energie électromagnétique :

$$E = \frac{1}{2C}q^2 + \frac{L}{2}i^2 = \frac{1}{2C}\left(q^2 + \left(\frac{i}{\omega_0}\right)^2\right)$$

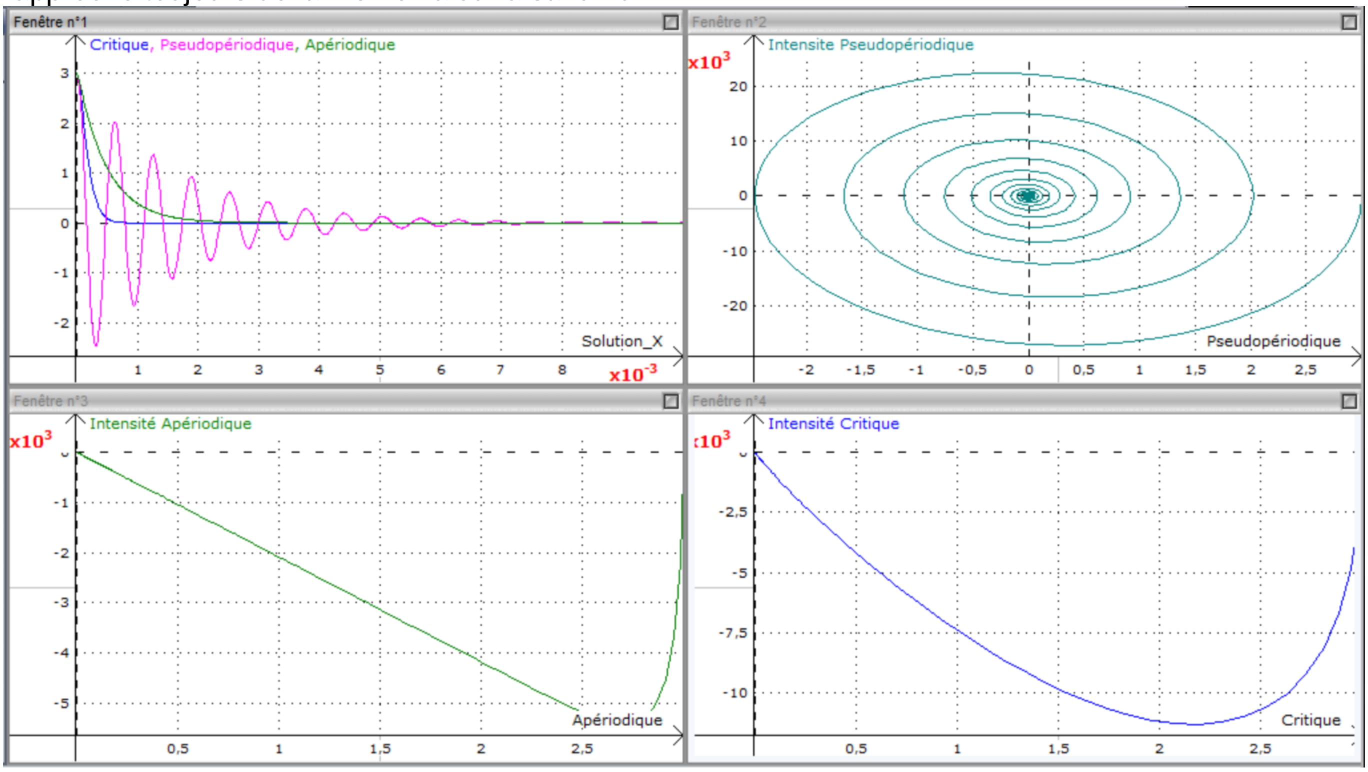
d'où l'équation de la trajectoire de phase :

$$q^2 + \left(\frac{i}{\omega_0}\right)^2 = 2CE$$



IV.2.2. Régime amorti

Pour les régimes amortis, la situation est plus compliquée.
Dans le cas du régime pseudo périodique on constate des oscillations d'amplitudes décroissantes jusqu'à l'arrêt. Cette évolution signifie que le système se rapproche progressivement d'un régime permanent stable.
L'allure des portraits de phase pour les régimes critique et apériodique est donnée si après. L'évolution est nettement différente il y a absence d'oscillations. On remarque cependant que le système se rapproche toujours de la même valeur à savoir 0.



EL4 : LE REGIME TRANSITOIRE DU SECOND ORDRE