⚠ ev. mut. ind $A_1 \dots A_n$:

$$\forall I \subset [\![1, n]\!], \quad P\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

⚠ v.a. mut. i-d $X_1 : \Omega \to E_1$

$\vdots$

$X_n : \Omega \to E_n$

$X_1 \dots X_n$ mut. ind. si $\forall A_1 \subset E_1, \dots, A_n \subset E_n$,

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \in A_i)\Big) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A_i)$$

Pas de "$\forall I \subset [\![1 n]\!]$".

<u>Prop :</u> $\hat{n}$ notat° : $X_1 \to E_1 \ldots X_n \to E_n$.

$X_1 \ldots X_n$ v.a. mt ind

ssi : $\forall I \subset [\![1, n]\!]$, si $\forall i \in I$ on pose

$A_i \subset E_i$, on a :

$$P\left(\bigcap_{i \in I} (X_i \in A_i)\right) = \prod_{i \in I} P(X_i \in A_i)$$

<u>Dém :</u> $(\Leftarrow)$ Si ça marche $\forall I \subset [\![1, n]\!]$,

ça marche pour $I = [\![1, n]\!]$.

($\Rightarrow$) Soit $I \subset [\![1,n]\!]$.

et $\forall i \in I$, on fixe 1 partie A_i de E_i.

Si $j \in [\![1,n]\!] \setminus I$, on pose $A_j = E_j$.

Par déf : $X_1 \dots X_n$ mut ind

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \in A_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A_i)$$

Mais, si $i \notin I$, $A_i = E_i$

donc $(X_i \in A_i) = \Omega$

$\forall \omega \in \Omega$, $X_i(\omega) \in E_i = A_i$

donc $P(X_i \in A_i) = 1$.

$$\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \in A_i) = \left(\bigcap_{i\in I} (X_i \in A_i)\right) \cap \left(\underbrace{\bigcap_{i\notin I} (X_i \in A_i)}_{=\Omega}\right)$$

$$= \left(\bigcap_{i\in I} (X_i \in A_i)\right) \cap \Omega$$

$$= \bigcap_{i\in I} (X_i \in A_i)$$

$$\prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A_i) = \left(\prod_{i\in I} P(X_i \in A_i)\right) \times \left(\underbrace{\prod_{i\notin I} P(X_i \in A_i)}_{=1}\right)$$

$$= \prod_{i\in I} P(X_i \in A_i)$$

dc : $P\left(\bigcap_{i\in I}(X_i\in A_i)\right) = \prod_{i\in I} P(X_i\in A_i)$.

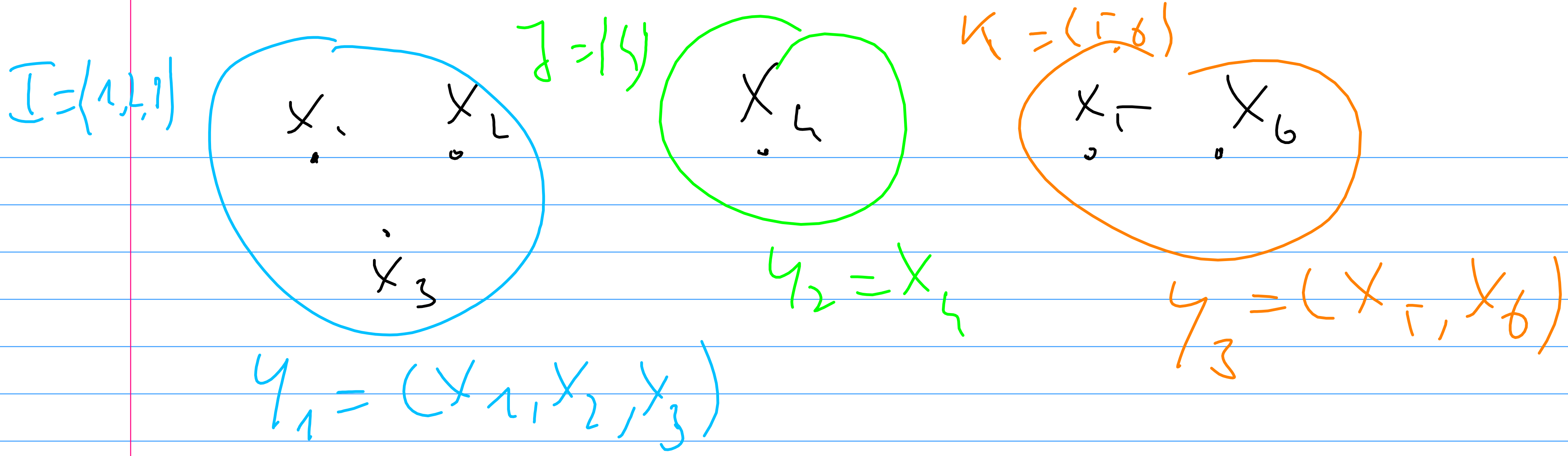
$\square$

Cor 2.5.14 : **Lemme des coalitions :**

$I=\{1,2\}$ $\quad X_1 \quad X_2 \qquad\qquad X_3$ $\quad J=\{3\}$ $\quad X_1, X_2, X_3$ mut. ind.

$Y_1 = (X_1, X_2) \qquad\qquad Y_2 = X_3$

alors Y_1 et Y_2 st mut ind.



Si $X_1, \dots, X_6$ st mut. ind, alors Y_1, Y_2, Y_3 aussi.

<u>Déf:</u> $X_1 \dots X_n$ v.a. mut. ind.

$$[\![1,n]\!] = I \sqcup J$$

$Y_1 = (X_i)_{i\in I}$, $Y_2 = (X_j)_{j\in J}$.

$\cap_q$. si $y_1 \in Y_1(\Omega)$

$y_2 \in Y_2(\Omega)$

alors : $P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) = P(Y_1 = y_1) \times P(Y_2, y_2)$

$X_1 \to E_1 \ldots X_n \to E_n$

produit cartésien

$$Y_1(\Omega) = \prod_{i\in I} E_i$$

ex : si : $I = \{1, 3, 6\}$, $Y_1(\Omega) = E_1 \times E_3 \times E_6$.

Ici : Soit $y_1 \in Y_1(\Omega)$,

Ici y_1 est de la forme : $(x_i)_{i \in I}$

où $\forall i \in I$, $x_i \in E_i$

(ex : $I = \{1, 3, 6\}$, $y_1 = (x_1, x_3, x_6)$

avec $x_1 \in E_1$, $x_3 \in E_3$

$x_6 \in E_6$.)

Si $y_2 \in Y_2(\Omega)$,

$y_2 = (x_j)_{j \in J}$, $\forall j$, $x_j \in E_j$.

$$P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) = P\left(\bigcap_{i \in I} (X_i = x_i), \bigcap_{j \in J} (X_j = x_j)\right)$$

$$= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i = x_i)\right)$$

$$\underset{\text{ind.}}{=} \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$$

$$= \left(\prod_{i \in I} P(X_i = x_i)\right) \times \left(\prod_{j \in J} P(X_j = x_j)\right)$$

$$\underset{\text{ind.}}{=} \left(P\left(\bigcap_{i \in I} (X_i = x_i)\right)\right) \times \left(P\left(\bigcap_{j \in J} (X_j = x_j)\right)\right)$$

$$= P(Y_1 = y_1) \times P(Y_2 = y_2).$$

<u>Bz</u> : $X_i : \Omega \longrightarrow E_i$

avec $E_i = X_i(\Omega)$

$Y_1 = (X_i)_{i \in I}$ est 1 v.a.

dc : $Y_1 : \Omega \longrightarrow Y_1(\Omega)$

$$= \prod_{i \in I} E_i \,.$$

<u>Rappel</u> : $X_1 : \Omega \to E_1$

$X_2 : \Omega \to E_2$

On pose : $Y : \Omega \to E_1 \times E_2$

$\omega \mapsto (X_1(\omega), X_2(\omega))$

Notation : Y se note (X_1, X_2).

Y s'appelle 1 couple de v.a.

Mais c'est 1 v.a. !

<u>Prop. 2.I.16</u> : je vous la laisse.

Ex. 2.5.17 : $\overbrace{X, Y, Z, T}^{\text{réelles}}$ mut ind.

lemme des coalitions : (X,Y), Z, T mut ind.

2.5.16 : $f_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(x, y) \mapsto x + y$

$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$z \mapsto e^z$

$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$t \mapsto t^2$

abr avec 2.5.16 : $f_1(X,Y), f_2(Z), f_3(T)$

st mut. ind.

ie : $X+Y$, e^Z, T^2 st mut. ind.

$$\left(e^Z : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & e^{Z(\omega)} \end{array} \right).$$

<u>Rappel</u> : soit $A \subset \Omega$

$$\left[\mathbb{1}_A : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \{0,1\} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases} \end{array} \right]$$

$\mathbb{1}_A$ $= X$ est 1 v.a. à valeurs ds $\{0,1\}$.

$(X = 1)$

$$(\mathbb{1}_A = 1) = \{\omega \in \Omega,\ \mathbb{1}_A(\omega) = 1\} = A$$

et de même : $(\mathbb{1}_A = 0) = \mathbb{1}_A^{-1}(0) = \{\omega \in \Omega,\ \mathbb{1}_A(\omega) = 0\} = \bar{A}$

si : $P(A) = p$, $(X = 0) = \bar{A}$

alors : $P(\underbrace{\mathbb{1}_A = 1}_{=A}) = P(A) = p$

donc $\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathcal{B}(p) = \mathcal{B}(P(A))$.

c'est la variable de Bernoulli associée à A.

<u>2. T-18</u> : $A_1 \dots A_n$ des év. mut ind.

Soit $X_1 \dots X_n$ les v.a. de Bernoulli associées.

$A_1 \dots A_n$ mut ind $\iff$ $X_1 \dots X_n$ mut ind.

<u>Dém</u> : ($\Rightarrow$) rappel : si $A_1 \dots A_n$ sont mut. ind,

si $B_1 \dots B_n$ sont des év. tq $\forall i$: $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$

alors $B_1 \dots B_n$ sont mut. ind.

On veut mq. si $(x_1 \dots x_n) \in \{0,1\}^n$,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i = x_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$$

si : $x_i = 0$: $(X_i = 0) = \overline{A_i}$

si : $x_i = 1$: $(X_i = 1) = A_i$

donc : $(X_1 = x_1) \dots (X_n = x_n)$ sont des év. mut ind, dc $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$.

($\Leftarrow$) On suppose les X_i sont mut ind.

$\forall i$, $A_i = (X_i = 1)$

On veut mq. $\forall I \subset [\![1, n]\!]$,

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

Soit $I \subset [\![1, n]\!]$,

$$P\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = P\Big(\bigcap_{i\in I} (X_i = 1)\Big)$$

$$\underset{2.5.13}{=} \prod_{i\in I} P(X_i = 1)$$

$$= \prod_{i\in I} A_i .$$

$\square$

2.5.19 : $X_1 \dots X_n$ des v.a. de Bernoulli.

Si $X = X_1 + \dots + X_n$, alors

X est à valeurs ds : $[\![0,n]\!]$

Soit $k \in [\![0, n]\!]$, si $X = k$, cela signifie qu'il y a k v.a. parmi $X_1 \dots X_n$ qui valent 1, et les $(n-k)$ autres valent 0. Et réciproq^t.

Ex : X_1, X_2, X_3 v.a. de Bernoulli

$$X = X_1 + X_2 + X_3.$$

$$\begin{aligned}(X=2) = &(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0) \\ &\sqcup (X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) \\ &\sqcup (X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1)\end{aligned}$$

Prop. 2.5.20 : Soit $p \in [0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $X_1 \dots X_n$ des v.a. mut ind

tq $\forall i$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

($X_1 \dots X_n$ st iid).

$$\text{si } X = X_1 + \dots + X_n,$$

alors $$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).$$

Démonstration :

1) démo "directe" : $n = 3$

$X = X_1 + X_2 + X_3$, à valeurs ds $[\![0,3]\!]$.

Soit $k \in [\![0,3]\!]$.

$(X = k)$?

$\underline{k=0}$: $(X=0) = (X_1=0, X_2=0, X_3=0)$

$\underline{k=1}$: $(X=1) = (X_1=1, X_2=0, X_3=0)$
$\sqcup (X_1=0, X_2=1, X_3=0)$
$\sqcup (X_1=0, X_2=0, X_3=1)$

$\underline{k=2}$: $(X=2) = (\overbrace{X_1=1=X_2, X_3=0}^{A_1})$
$\sqcup (X_1=X_3=1, X_2=0)$ A_2
$\sqcup (X_1=0, X_2=X_3=0)$ A_3

$\underline{k=3}$: $(X=3) = (X_1 = X_2 = X_3 = 1)$.

$$P(X=2) = P(A_1) \overset{\sqcup}{+} P(A_2) + P(A_3)$$

$$\underset{\text{ind.}}{=} P(X_1=1) \times P(X_2=1) \times P(X_3=0) \quad 1-p$$

$$+ P(X_1=1) \times P(X_2=0) \times P(X_3=1) \quad p$$

$$+ P(X_1=0) \times P(X_2=1) \times P(X_3=1)$$

$$= 3 \times p^2 \times (1-p)$$

k quelconque :

$$(Y = k) = \bigsqcup_{\substack{a_1, a_2, a_3 \in \{0,1\} \\ a_1 + a_2 + a_3 = k}} (X_1 = a_1, X_2 = a_2, X_3 = a_3)$$

donc : $$P(Y = k) = \sum_{\substack{a_1, a_2, a_3 \in \{0,1\} \\ a_1 + a_2 + a_3 = k}} P(X_1 = a_1) \times P(X_2 = a_2) \times P(X_3 = a_3)$$

si : $a_1 + a_2 + a_3 = k$ $\quad$ k entiers a_i valent 1

et les $(3-k)$ autres valent 0

$$\text{d'où}: \quad P(X_1 = a_1) \times P(X_2 = a_2) \times P(X_3 = a_3)$$

$$= p^{k} \times (1-p)^{3-k} \qquad = C^{te}$$

$$\text{d'où} \quad P(X = k) = \sum_{\substack{a_1, a_2, a_3 \\ \text{tq } a_1 + a_2 + a_3 = k}} p^{k} (1-p)^{3-k}$$

$$= p^{k} (1-p)^{3-k} \times \# \left\{ a_1, a_2, a_3 \in \{0,1\} \text{ tq. } a_1 + a_2 + a_3 = k \right\}$$

$$= p^{k} (1-p)^{3-k} \binom{3}{k}$$

donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$.

2) <u>par récurrence</u> : $X_1 \dots X_n$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

mut. ind.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$: $S_i = \sum_{k=1}^{i} X_i$

On veut mq. $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

par réc. sur i : (H_i) : " $S_i \hookrightarrow \mathcal{B}(i, p)$ ".

- (H_1) : $S_1 = X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

$$= \mathcal{B}(1, p).$$

donc (H_1) est vraie.

- Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$ tq. (H_i) est vraie.

donc : $S_i \hookrightarrow \mathcal{B}(i, p)$.

$X_1 \ldots X_{i+1}$ sont mut ind.

donc $(X_1, \ldots, X_i)$ et X_{i+1} st ind.

(lemme des coalitions)

avec 2.5.16 : $\sum_{k=1}^{i} X_k$ et X_{i+1} sont ind.

donc : S_i et X_{i+1} sont ind.

Soit $k \in [0, i+1]$.

$$(S_{i+1} = k) = (S_i = k, X_{i+1} = 0) \sqcup (S_i = k-1, X_{i+1} = 1)$$

$$P(S_{i+1} = k) = P(S_i = k, X_{i+1} = 0) + P(S_i = k-1, X_{i+1} = 1)$$

$$\underset{\text{ind}}{=} P(S_i = k) \times P(X_{i+1} = 0) + P(S_i = k-1) \times P(X_{i+1} = 1)$$

$$\underset{\text{h.r.}}{=} \left(\binom{i}{l} p^{l} (1-p)^{i-l} \right) \times (1-p)$$

$$+ \left(\binom{i}{l-1} p^{l-1} (1-p)^{i-l+1} \right) \times p$$

$$= \binom{i+1}{l} p^{l} (1-p)^{i-l+1}.$$

Pascal.

$\square$

2.6: Espérance :

<u>ex</u> : classe de 42 élèves.

3 ont eu 0

5 ont eu 7

12 ont eu 9

12 ont eu 12

6 ont eu 16

4 ont eu 20

moyenne ?

$$\frac{1}{42}\left(3\times 0 + 5\times 7 + 12\times 9 + 12\times 12 + 6\times 16 + 4\times 20\right)$$

$$= \frac{3}{42}\times 0 + \frac{0}{42}\times 1 \;---$$

$$+ \frac{5}{42}\times 7 \;--$$

$$= \sum_{k=0}^{20} \frac{a_k}{42}\times k$$

où a_k est le nb. d'élèves ayant eu $k/20$.

$\frac{a_k}{42} = P(\text{élève a eu } a_k)$

avec la proba uniforme.

Si X v.a. qui à chaque élève associe sa note : X est à valeurs ds $[\![0,20]\!]$.

$$\text{moyenne} = \underbrace{\sum_{k=0}^{20}}_{\sum_{k \in X(\text{classe})}} P(X=k)\, k$$

Déf : Soit X 1 v.a. réelle

On appelle espérance de X le réel

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x) \cdot x .$$

somme sur l'ens. d'arrivée de X

fini

somme finie.

Prop. 2.64 : $$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X(\omega)$$

somme sur l'ens. de départ de X

<u>Démo</u> : si $x \in X(\Omega)$:

$$(X = x) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}$$

$$= \bigsqcup_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = x}} \{\omega\}$$

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \underbrace{P(X = x)} \cdot x$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} \left[\left(\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = x}} P(\{\omega\}) \right) \cdot x \right]$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} \left[\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = x}} P(\{\omega\}) \cdot \underbrace{X(\omega)}_{= x} \right]$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) \, X(\omega)$$