DS n°9 : Fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom : Note :

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

Intégration

Une valeur approchée rationnelle de $\sqrt{\mathrm{e}}$ à 10^{-2} près est :

(1)

Déterminer un équivalent lorsque $n \longrightarrow +\infty$ de la quantité suivante.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4+n^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} \qquad (2)$$

Dénombrement

On constitue un collier en enfilant 10 perles noires et 10 perles blanches sur un fil, que l'on referme. Les perles peuvent alors circuler autour de la boucle ainsi formée. Deux configurations qui peuvent s'obtenir en passant de l'une à l'autre par une telle rotation sont considérées comme identiques.

On suppose que les perles sont numérotées, de 1 à 10 dans chaque couleur. On note a le nombre de colliers différents que l'on peut former. On note b le nombre de colliers différents que l'on peut former en alternant les couleurs.

$a =$ (3) $b =$ (4)

Combien peut-on forme de colliers de manière à ce que les deux perles de même numéro soient toujours adjacentes ?

(5)

Soit $p_1, \dots, p_k$ des nombres premiers distincts deux à deux, notons $n = p_1 \dots p_k$. Combien n possède-t-il de diviseurs entiers naturels ?

(6)

Algèbre linéaire

Soit $P = 3X^2 - 5X + 2$, $Q = X^2 + 3X - 1$, $R = 5X^2 - X + 4$, $S = 3X^2 - 6X + 4$. Dans $\mathbb{R}[X]$, donner une base de $\mathrm{Vect}(P, Q, R, S)$.

$$\boxed{} \qquad (7)$$

On considère l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ $\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x - y + z + t \\ x + y - 2z - t \\ -x + y - t \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{rg}(\varphi) = \boxed{} \qquad (8) \qquad \dim(\mathrm{Ker}\,\varphi) = \boxed{} \qquad (9)$$

Dans $\mathbb{R}_{2n}[X]$, on considère

$$F = \left\{ P \in \mathbb{R}_{2n}[X] \;\middle|\; P(1) = P'(1) = \cdots = P^{(n-1)}(1) = 0 \right\}.$$

Alors,

$$\dim(F) = \boxed{}. \qquad (10)$$

Un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_{2n}[X]$ est :

$$\boxed{} \qquad (11)$$

Probabilités

Dans une urne, on dispose deux boules bleues, trois boules vertes, quatre boules rouges. On réalise un premier tirage, à la suite duquel on retire de l'urne toutes les boules de la même couleur que la boule tirée. On réalise ensuite un deuxième tirage, auquel nous nous intéressons maintenant. On note p la probabilité de tirer une boule bleue, et c la couleur la plus probable de la boule tirée.

$$p = \boxed{} \qquad (12) \qquad c = \boxed{} \qquad (13)$$

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(X = k) = a \binom{n}{k}$. Alors :

$$a = \boxed{} \quad (14) \quad E[X] = \boxed{} \quad (15) \quad V(X) = \boxed{} \quad (16)$$

— **FIN** —