

## Devoir à la maison n° 12

À rendre le 25 février

On note  $E$  l'ensemble des fonctions  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  bijectives, dérivables et vérifiant

$$f' = f^{-1}. \quad (\star)$$

Dans tout le problème, on considère  $f \in E$ .

- 1) Déterminer un élément de  $E$  de la forme  $x \mapsto cx^p$ , où  $c$  et  $p$  sont des réels.
- 2) Montrer que  $f$  et  $f^{-1}$  sont infiniment dérivables.
- 3) Quelle est la limite de  $f$  en 0 ? Et pour  $f'$  ?
- 4) Quelle est la limite de  $f$  en  $+\infty$  ? Et pour  $f'$  ?
- 5) Montrer que  $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ .
- 6) Montrer de même que  $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ .
- 7) En déduire que  $f$  admet au moins un point fixe sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- 8) Montrer que ce point fixe est unique.
- 9) Soit  $g \in E$  distincte de  $f$ . Montrer que  $g$  admet le même point fixe que  $f$ . Quel est ce point fixe ?

— FIN —