Devoir surveillé n° 07
– Version 1 –

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Vu en TD.

Montrer que, dans $\mathscr{C}([-1,1],\mathbb{C})$, $F = \left\{ f \in \mathscr{C}([-1,1],\mathbb{C}) \mid \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ et $G = \{ f \in \mathscr{C}([-1,1],\mathbb{C}) \mid f \text{ constante} \}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires.

II. Étude d'un endomorphisme.

On note $E = \mathscr{C}^0(]-1,+\infty[)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $I =]-1,+\infty[$. Étant donné un élément f de E, on désigne par $T(f)$ l'application de I vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in I,\ T(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1+t}\mathrm{d}t.$$

Partie 1 — Quelques exemples.

1) Déterminer l'application $T(f_1)$, où f_1 est l'application constante égale à $a \in \mathbb{R}$.

2) Déterminer l'application $T(f_2)$, où f_2 est l'application $f_2 : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R}. \\ t & \mapsto & \ln(t+1) \end{array}$

3) On définit l'application $f_3 : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R}. \\ t & \mapsto & \dfrac{t}{(t+2)^2} \end{array}$

a) Déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X}{(X+2)^2}$

b) En déduire que, pour tout $x \in I$,

$$T(f_3)(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) - \frac{2}{x+2} - \ln 2 + 1.$$

c) Rappeler sans démonstration les développements limités à l'ordre 2 en 0 de $h \mapsto \ln(1+h)$ et $h \mapsto \dfrac{1}{1+h}$.

d) Donner un développement asymptotique à la précision $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ de $T(f_3)(x)$ au voisinage de $+\infty$.

4) On définit l'application $\begin{array}{rccc} f_4 : & I & \to & \mathbb{R}. \\ & t & \mapsto & \dfrac{t^2}{(t^2+1)^2} \end{array}$.

a) Déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^2}{(X+1)(X^2+1)^2}$.

b) Pour tout $x > -1$, établir une relation entre $J_1(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ et $J_2(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t$.

c) En déduire $T(f_4)$.

5) Pour tout entier n non nul, on définit $g_n : t \mapsto t^n$. On a bien $g_n \in E$. Soit $x \in I$.

a) Déterminer une relation entre $T(g_{n+1})(x)$ et $T(g_n)(x)$.

b) En déduire l'expression de $T(g_n)(x)$ à l'aide d'une somme (que l'on ne cherchera pas à calculer).

Partie 2 — Propriétés algébriques élémentaires de T.

On rappelle que l'on a défini T comme une application $T : E \to \mathbb{R}^I$.

6) **a)** Vérifier que T définit un endormorphisme de E.

b) Soit $f \in E$. Démontrer que $T(f)$ est dérivable (on donnera $T(f)'$) et calculer $T(f)(0)$.

c) Déterminer le noyau de T.

d) Déterminer l'image de T.

Partie 3 — Comportement à l'infini.

On considère un élément $f \in E$ et on suppose que f admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque $t \to +\infty$. Nous allons étudier le comportement de la fonction $T(f)$ en $+\infty$.

7) On suppose dans cette question que $\ell = 0$.

a) Montrer que la fonction f est bornée sur l'intervalle $J = [0, +\infty[$. On notera $M = \sup_{t \in [0,+\infty[} |f(t)|$.

b) Pour $x \geqslant 1$, on pose $\alpha(x) = \sup\{|f(t)|,\ \ln(x) \leqslant t \leqslant x\}$. Montrer que $\alpha(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

c) Montrer que pour tout $x \geqslant 1$:

$$|T(f)(x)| \leqslant M \int_0^{\ln x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t} + \alpha(x) \int_{\ln(x)}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t}.$$

d) En déduire que $T(f)(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(\ln x)$

8) On suppose dans cette question que $\ell \in \mathbb{R}^*$.
Trouver un équivalent simple de $T(f)(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

9) On suppose dans cette question que $\ell = +\infty$.
Montrer que $T(f)(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

10) On considère dans cette question l'élément $f\ :\ t \mapsto \mathrm{e}^t$ et donc, pour tout $x \in I$:

$$T(f)(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{t+1}\,\mathrm{d}t.$$

On ne cherchera pas à calculer cette intégrale. On note, pour $n \geqslant 2$:

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{(t+1)^n}\,\mathrm{d}t.$$

a) En écrivant pour $n \geqslant 2$ et $x \geqslant 0$ que

$$F_n(x) = \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\mathrm{e}^t}{(t+1)^n}\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{(t+1)^n}\,\mathrm{d}t,$$

montrer que :

$$F_n(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^{n-2}}\right)$$

b) En intégrant $F_n(x)$ par parties, montrer que $F_n(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^{n-1}}\right)$.

c) Trouver trois constantes a, b, c réelles telles qu'au voisinage de $+\infty$:

$$T(f)(x) \underset{x \to +\infty}{=} a\frac{\mathrm{e}^x}{x} + b\frac{\mathrm{e}^x}{x^2} + c\frac{\mathrm{e}^x}{x^3} + o\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^3}\right).$$

— FIN —