



LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON
SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR
CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I.
ANNÉE 2017 - 2018

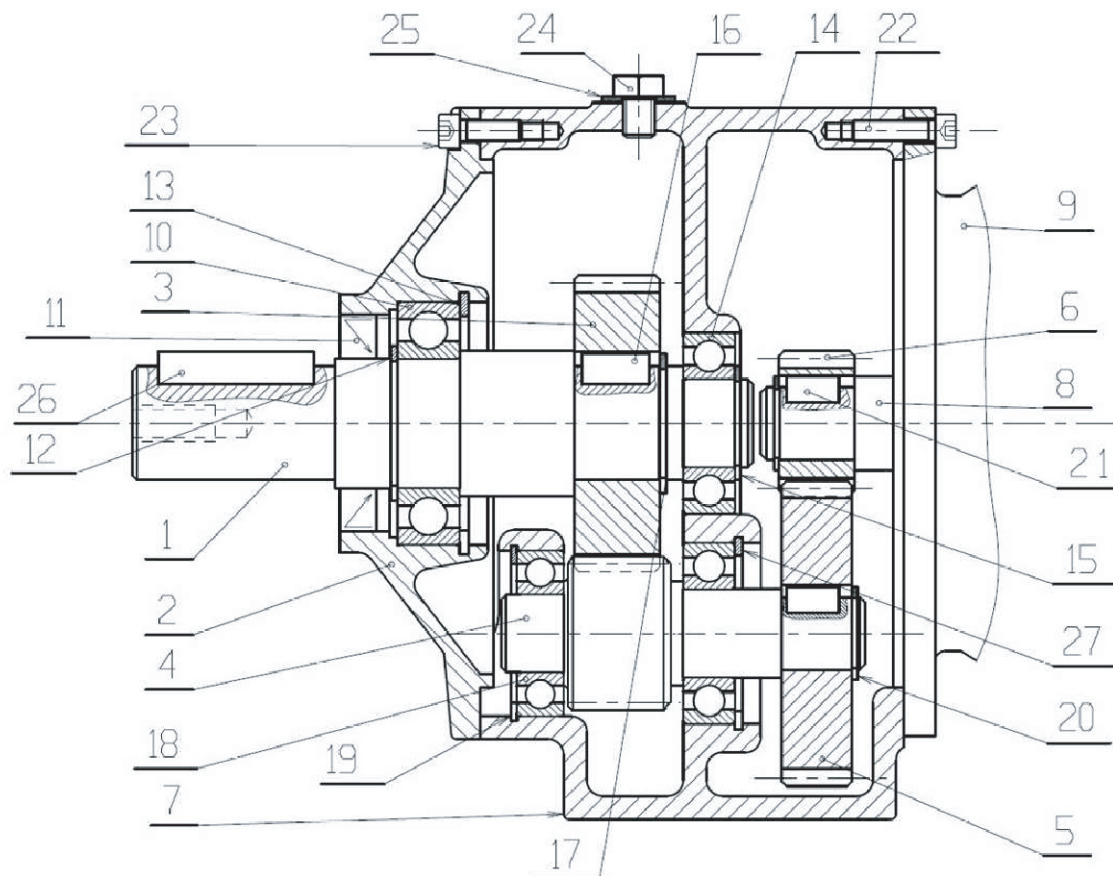
C5 : ANALYSE DES PERFORMANCES CINÉMATIQUES DES SYSTÈMES COMPOSÉS DE CHAINES DE SOLIDES

TD 12 - Transmission de puissance : détermination des lois d'entrée-sortie(C5-2)

Compétences

- **Résoudre** : Procéder à la mise en oeuvre d'une démarche de résolution analytique
 - Lois d'entrée-sortie cinématique;
- **Communiquer** : Mettre en oeuvre une communication :
 - Schéma cinématique
- **Expérimenter** : S'approprier le fonctionnement d'un système pluritechnologique : repérer les différents constituants de la chaîne d'énergie.

1 Réducteur simple à deux étages



Données : $Z_6 = 20$, $Z_5 = 46$, $Z_{5'} = 22$ et $Z_3 = 44$.

Q 1 : Identifier l'arbre d'entrée et l'arbre de sortie.

Q 2 : Dessiner le schéma cinématique du système.

Q 3 : Identifier les roues menées et les roues menantes.

Q 4 : Donner le rapport de réduction du système.

2 Projet INTERFAS : moteur de calage sur une ligne d'imprimerie

a) Présentation du système

Pour obtenir une impression graphique en plusieurs couleurs, il faut faire passer une feuille à imprimer entre différents rouleaux d'impression (des couleurs primaires par exemple). Pour la qualité de l'impression il est nécessaire de positionner angulairement plusieurs rouleaux d'impression les uns par rapport aux autres. La solution proposée utilise la propriété "différentiel" d'une poulie Redex pour réaliser cette fonction.

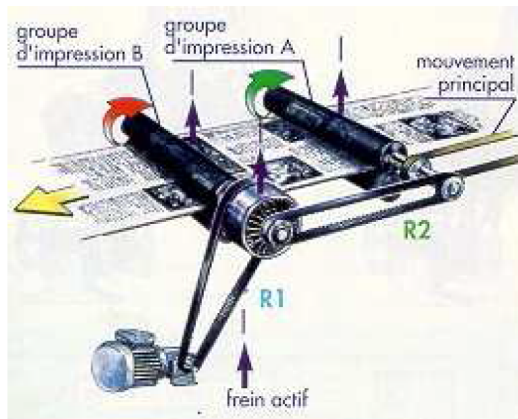
La figure ci-dessous (figure 1) représente le poste d'impression. Celui-ci est constitué de deux groupes d'impression entraînés à l'aide d'une courroie crantée par un moteur principal non représenté. Chaque groupe (ou rouleau) d'impression imprime entre autre une croix de positionnement. Un capteur optique (non représenté) permet de détecter les écarts de position entre les différentes croix. Ces mesures viennent alors alimenter le moteur de calage qui fait varier légèrement la position du rouleau A par rapport au rouleau B. Ceci de manière à faire coïncider les 2 croix de positionnement.

La figure 2 représente le schéma d'implantation de l'ensemble.

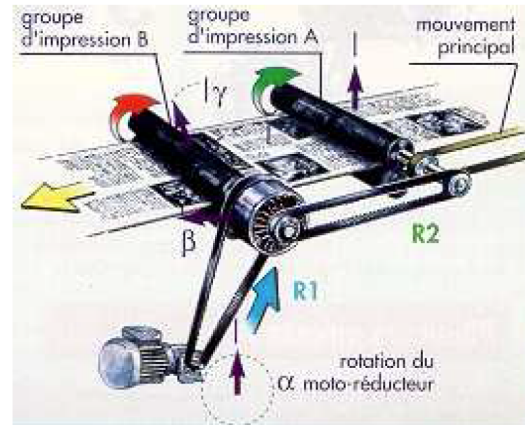
La figure 3 donne le schéma cinématique. Les pièces 3, 4, 4', 5 et 6 composent les différents solides de la poulie Redex. Sur ce schéma, la partie « Moteur principal » est en fait composé d'un moteur et d'un ensemble poulie-courroie non représenté

Données :

- Nombres de dents de la poulie Redex SR20.3 :



Fonctionnement normal.



Correction des écarts de position.

FIGURE 1 – Fonctionnement général

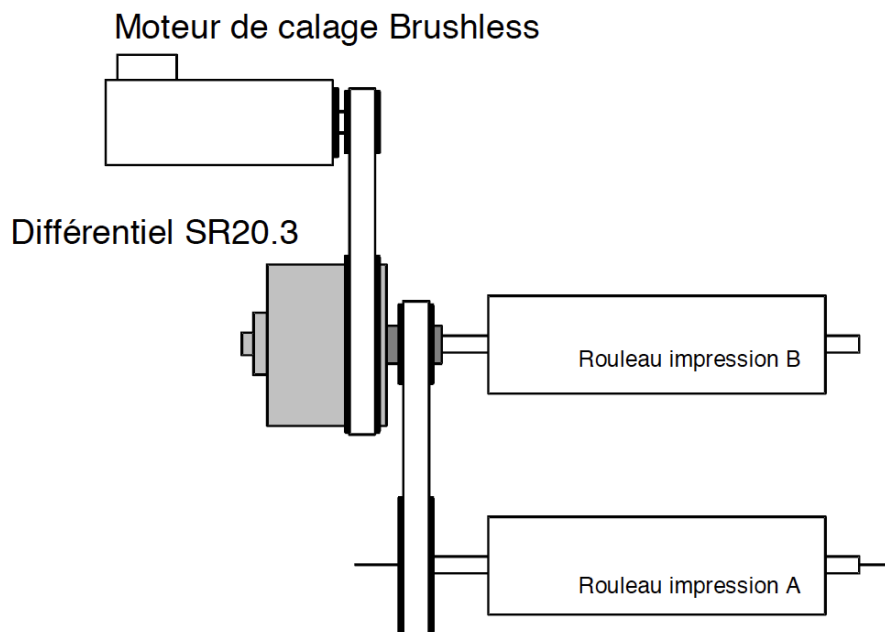


FIGURE 2 – schéma d'implantation de l'ensemble

$$Z_3 = 36, Z_4 = 25, Z_{4'} = 20, Z_5 = 45.$$

- Rayons des poulies : $r_8 = 20\text{mm}$, $r_6 = 60\text{mm}$, $r_3 = 30\text{mm}$, r_1 à déterminer.
- Entraxe : On note d la distance entre les axes (A, \vec{x}) et (B, \vec{x}) : $d = 40,625\text{mm}$.

Notations : On note $\omega_{i/j}$, la vitesse de rotation du solide i par rapport au solide j et, $\theta_{i/j}$ l'angle du solide i par rapport au solide j .

b) Questions

Q 1 : Déterminer à l'aide du schéma cinématique la relation entre $\omega_{3/0}$, $\omega_{5/0}$ et $\omega_{6/0}$. Pour cela il est conseillé de partir de l'expression de $\omega_{5/6}/\omega_{3/6}$.

Q 2 : Déterminer l'expression de $\omega_{5/0}$ en fonction de $\omega_{1/0}$, $\omega_{8/0}$ et des caractéristiques géométriques $Z_3, Z_4, Z_{4'}, Z_5, r_1, r_3, r_6$ et r_8 .

Q 3 : Mettre cette relation sous la forme du schéma bloc suivant :

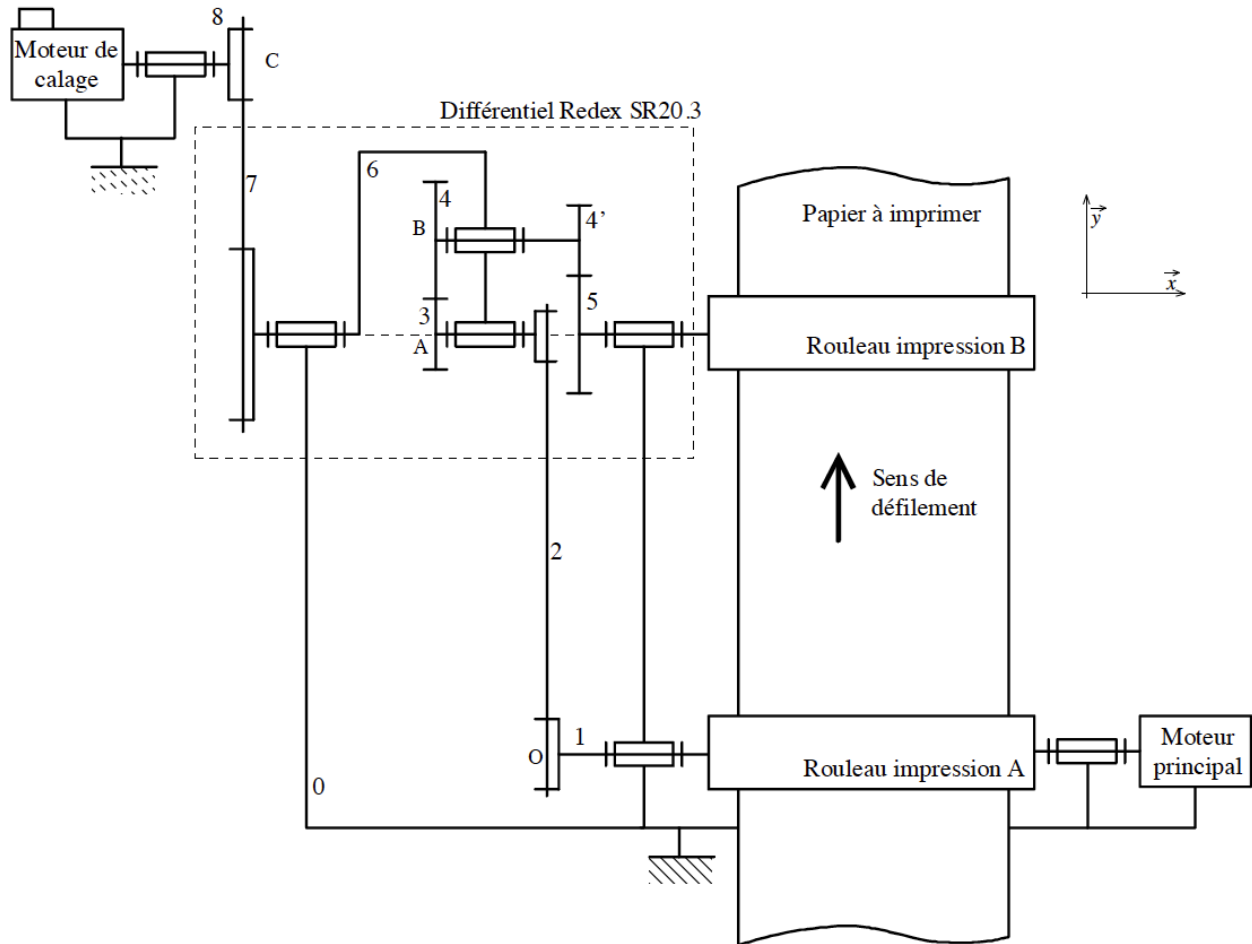
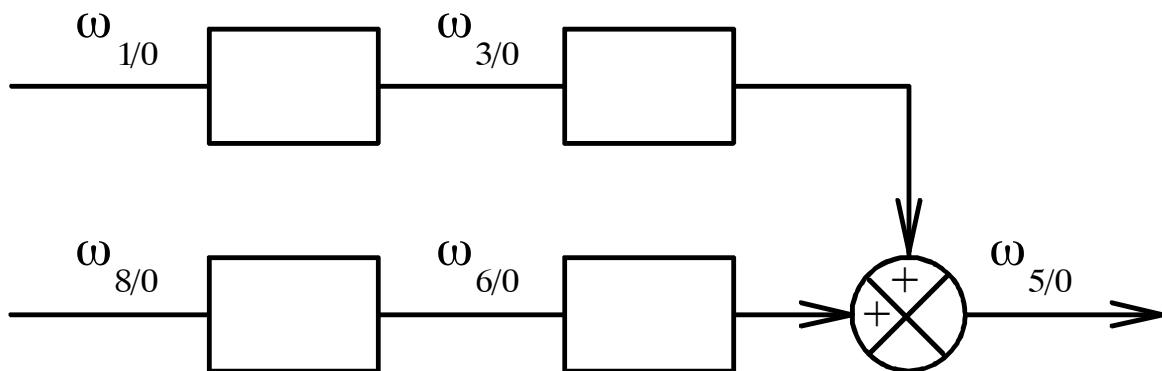


FIGURE 3 – Schéma cinématique de l'ensemble



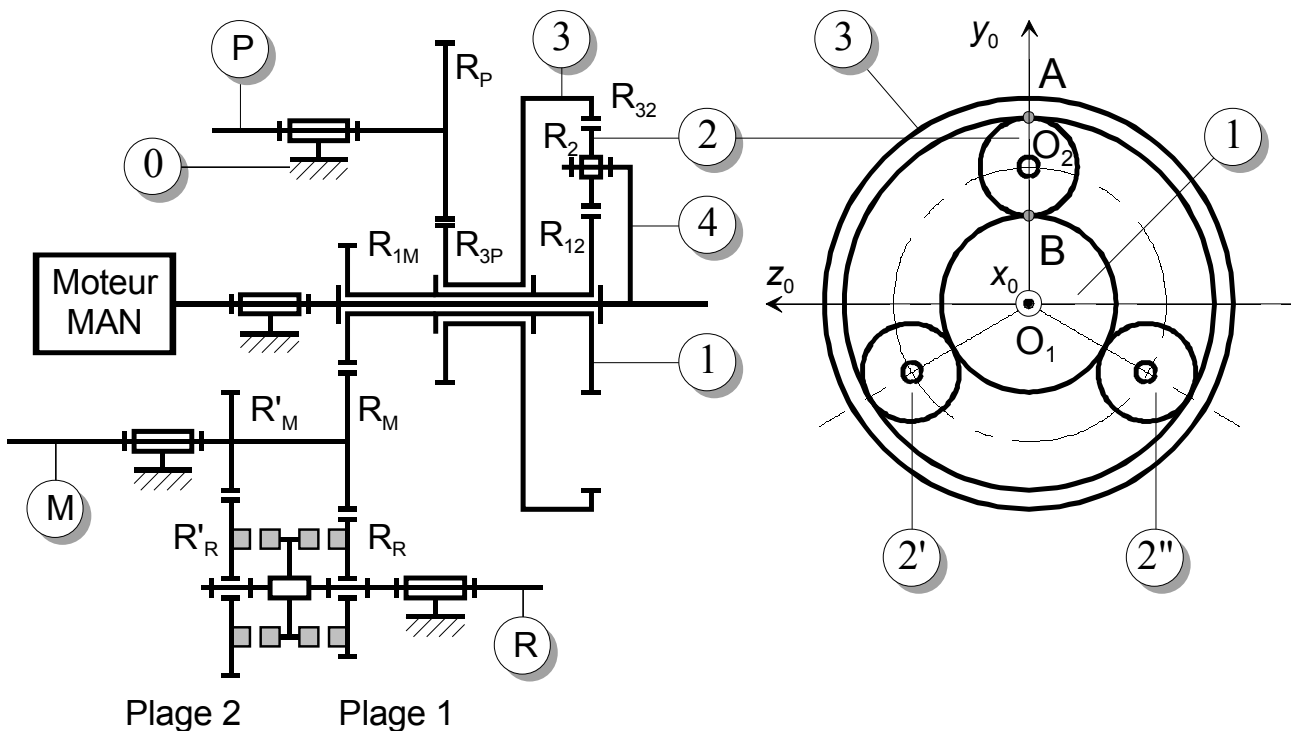
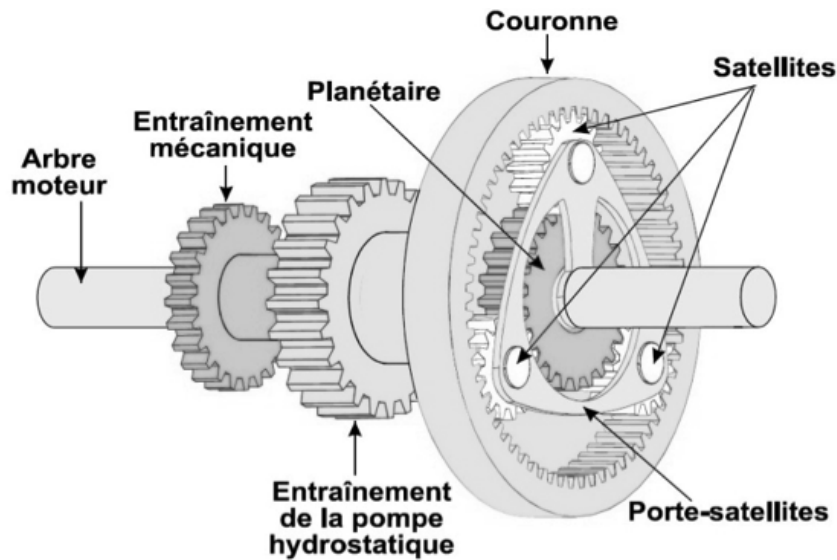
Q 4 : Lorsque le calage est correct on a $\omega_{8/0} = 0 \text{ rad/s}$. Déterminer le rapport r_1/r_3 , pour avoir dans ce cas $\omega_{5/0} = \omega_{1/0}$. En déduire la valeur numérique du rayon à choisir pour la poulie 1.

3 Etude d'une vario-transmission de Tracteur Fendt

a) Présentation

Afin d'adapter la transmission à la puissance du tracteur, FENDT commercialise aujourd'hui 4 types de transmission VARIO. Chacune de ces transmissions se compose de deux parties, l'une hydraulique (pompe et moteur hydrau-

lique), l'autre mécanique (train épicycloïdal). On se propose ici d'étudier la partie mécanique. Comme dans toute boîte automatique, l'élément fondamental est un train épicycloïdal.



On désigne par 0 le carter ou bâti du variateur. L'arbre 4 ou porte-satellites est relié au moteur thermique MAN. Ils tournent donc à la même vitesse ω_m . On utilisera les notations et désignations du tableau ci-dessous pour les autres pièces.

Pièce i	1	2	3	P	M	R
Désignation	Planétaire	Satellite	Couronne	Arbre relié à la pompe	Arbre som-mateur	Arbre de sortie
Rayons des pignons (mm)	$R_{12} = 60$ $R_{1m} = 33$	$R_2 = 30$	$R_{32} = 120$ $R_{3P} = 54$	R_p	$R_M = 54$ $R_{M'} = 48$	$R_R = 42$ $R_{R'} = 48$

D'autre part, on notera ω_{ij} , la vitesse de rotation de la pièce i par rapport à la pièce j . Par simplification, on pourra noter $\omega_{ij} = \omega_i$ si $j = 0$ (bâti du variateur).

On peut relier ω_p et ω_M avec la relation ci-dessous :

$$\omega_P = \frac{2y}{x} \omega_M.$$

b) Questions

On étudier le train épicycloïdal constitué des pièces 1, 2, 3 et 4.

Q 1 : Donner les rapport d'engrènement entre 2 et 3.

Q 2 : Donner les rapport d'engrènement entre 2 et 1.

Q 3 : Montrer qu'avec ces deux relations on peut en déduire la relation $\omega_{10} - \lambda \cdot \omega_{30} + (\lambda - 1) \cdot \omega_{40} = 0$. Préciser la valeur de λ en fonction de R_{12} , R_2 et R_{32} . Calculer λ .

Q 4 : Montrer qu'on peut obtenir la relation suivante :

$$\frac{\omega_M}{\omega_m} = - \frac{A \cdot x}{B \cdot R_p \cdot y + C \cdot x}$$

Avec A , B et C entiers positifs.

4 Étude de la transmission de puissance d'un système d'élévation d'une rame de Tram

L'étude repose sur un système permettant de soulever une rame de Tramway du sol. On souhaite dimensionner le moteur pour avoir une vitesse de levée de 10 mm/s (diagramme des exigences partiel figure 4). On donne le schéma cinématique de la transformation de mouvement du système d'élévation d'une rame de Tram.

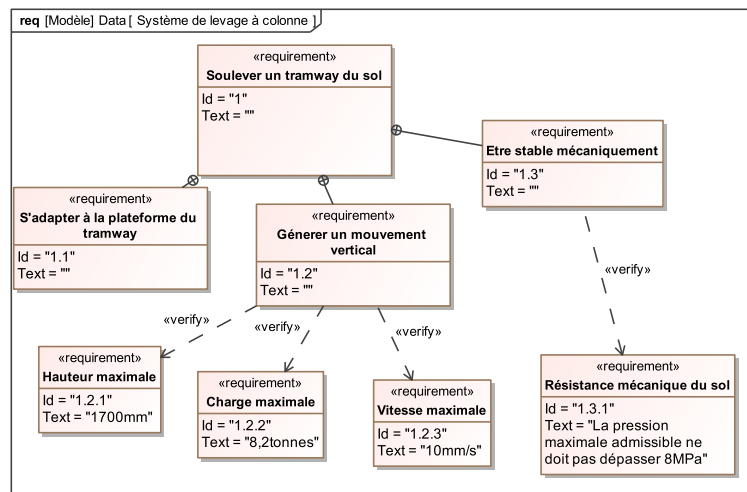
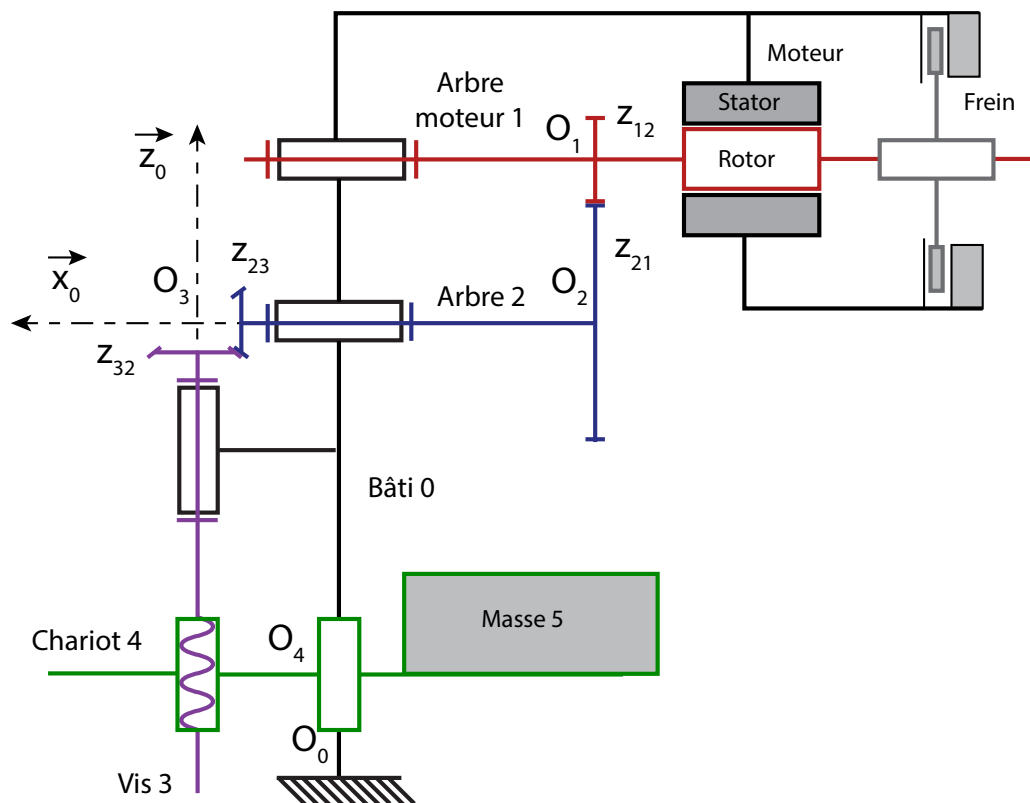
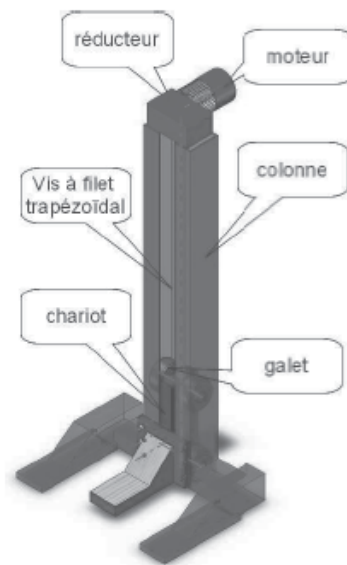


FIGURE 4 – Diagramme des exigences partiel



On note $\vec{\Omega}_{10} = \omega_{10} \cdot \vec{x}_0 = \dot{\theta}_1 \cdot \vec{x}_0$

a) Données sur les liaisons

- Liaison L_{12} :
 - Pignon de l'arbre 1 engrenant avec l'arbre 2 : nombre de dents : $Z_{12} = 15$,
 - Pignon de l'arbre 2 engrenant avec l'arbre 1 : nombre de dents : $Z_{21} = 75$,
- Liaison L_{23} :
 - Pignon de l'arbre 2 engrenant avec la vis 3 : nombre de dents : $Z_{23} = 14$,
 - Pignon de la vis 3 engrenant avec l'arbre 2 : nombre de dents : $Z_{32} = 35$,
- Liaison L_{34} : pas du système vis-écrou : $p_{34} = 5 \text{ mm}$

b) Étude du réducteur de vitesse

Q 1 : Déterminer en fonction de $\dot{\theta}_1$ et des données concernant les roues dentées et le système vis-écrou les vitesses de rotation :

1. $\vec{\Omega}_{2/0}$,
2. $\vec{\Omega}_{3/0}$.

Q 2 : Déterminer numériquement les rapports :

1. $r_{12} = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}}$,
2. $r_{23} = \frac{\omega_{30}}{\omega_{20}}$,

c) Étude du système de transformation de mouvement

Q 3 : Tracer le graph des liaisons du système de transformation de mouvement constitué des solides 0 – 3 – 4.

Q 4 : Écrire le torseurs cinématiques associé à chaque liaison en précisant les lieux d'invariance.

Q 5 : Écrire la fermeture cinématique.

Q 6 : En déduire une relation entre la vitesse de levée : $V_L = \vec{V}(O_4 \in 4/0) \cdot \vec{z}_0$ et $\omega_{30} = \vec{\Omega}_{3/0} \cdot \vec{z}_0$

Q 7 : En déduire les rapports :

1. $r_{34} = \frac{V_L}{\omega_{30}}$,
2. $r_g = \frac{V_L}{\omega_{10}}$.

Q 8 : Déterminer la vitesse de rotation du moteur souhaitée (à exprimer en tours par minute) pour obtenir une vitesse de levée conforme au cahier des charges.

Corrigé

1 Corrigé : réducteur simple à deux étages

Q 1 : Identifier l'arbre d'entrée et l'arbre de sortie.

- Arbre d'entrée : arbre 8.
- Arbre de sortie : arbre 1 (plus gros diamètre).

Q 2 : Dessiner le schéma cinématique du système.

Q 3 : Identifier les roues menées et les roues menantes.

- Roues menantes : 6, 5'.
- Roues menées : 5, 3.
- Nombre de contacts extérieurs : $n = 1$.

Q 4 : Donner le rapport de réduction du système.

On en déduit le rapport de réduction :

$$r = \frac{\omega_s}{\omega_e} = (-1)^n \frac{\prod Z_{\text{roues menantes}}}{\prod Z_{\text{roues menées}}}$$

$$r = \frac{\omega_1}{\omega_8} = (-1)^1 \frac{Z_6 \cdot Z_{5'}}{Z_5 \cdot Z_3} = -\frac{20 \cdot 22}{46 \cdot 44}$$

On obtient alors :

$$r = -0,217 \leq 1.$$

2 Corrigé : Projet INTERFAS : moteur de calage sur une ligne d'imprimerie

Q 1 : Déterminer à l'aide du schéma cinématique la relation entre $\omega_{3/0}$, $\omega_{5/0}$ et $\omega_{6/0}$. Pour cela il est conseillé de partir de l'expression de $\omega_{5/6}/\omega_{3/6}$.

- On écrit la relation de Willis pour les trains simples dans le référentiel associé au porte-satellite 6 :

$$\frac{\omega_{5/6}}{\omega_{3/6}} = \frac{Z_3 \cdot Z_{4'}}{Z_4 \cdot Z_5}$$

- En décomposant par rapport au référentiel lié au bâti 0 :

$$\omega_{5/0} + \left(\frac{Z_3 \cdot Z_{4'}}{Z_4 \cdot Z_5} - 1 \right) \cdot \omega_{6/0} - \frac{Z_3 \cdot Z_{4'}}{Z_4 \cdot Z_5} \cdot \omega_{3/0} = 0$$

Q 2 : Déterminer l'expression de $\omega_{5/0}$ en fonction de $\omega_{1/0}$, $\omega_{8/0}$ et des caractéristiques géométriques Z_3 , Z_4 , $Z_{4'}$, Z_5 , r_1 , r_3 , r_6 et r_8 .

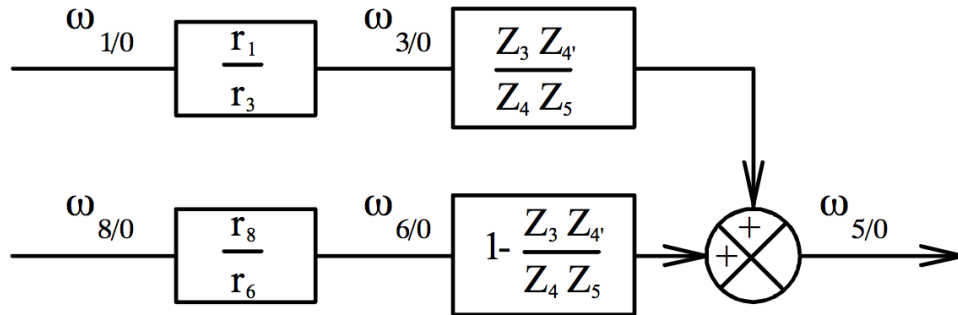
- L'étude du système poulie-courroie donne les relations :

$$\frac{\omega_{6/0}}{\omega_{8/0}} = \frac{r_8}{r_6} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{r_1}{r_3}$$

- et donc avec l'équation de la question précédente :

$$\omega_{5/0} = \left(1 - \frac{Z_3 \cdot Z_{4'}}{Z_4 \cdot Z_5} \right) \frac{r_8}{r_6} \cdot \omega_{8/0} + \frac{Z_3 \cdot Z_{4'}}{Z_4 \cdot Z_5} \cdot \frac{r_1}{r_3} \cdot \omega_{1/0}$$

Q 3 : Mettre cette relation sous la forme du schéma bloc suivant :



Q 4 : Lorsque le calage est correct on a $\omega_{8/0} = 0 \text{ rad/s}$. Déterminer le rapport r_1/r_3 , pour avoir dans ce cas $\omega_{5/0} = \omega_{1/0}$. En déduire la valeur numérique du rayon à choisir pour la poulie 1.

S'il n'y a pas de détection d'erreur de positionnement, alors le moteur de calage 8 sert de moteur frein uniquement. Dans ce cas les 2 rouleaux d'impression doivent tourner à la même vitesse. On doit donc avoir :

$$\frac{Z_3 \cdot Z_{4'}}{Z_4 \cdot Z_5} \cdot \frac{r_1}{r_3} = 1$$

et donc,

$$r_1 = \left(\frac{Z_4 \cdot Z_5}{Z_3 \cdot Z_{4'}} \right) \cdot r_3 = 46,875 \text{ mm}$$

3 Corrigé : étude d'une vario-transmission de Tracteur Fendt

Q 1 : Donner les rapport d'engrènement entre 2 et 3.

$$R_{32} \cdot \omega_{34} = R_2 \cdot \omega_{24}$$

Q 2 : Donner les rapport d'engrènement entre 2 et 1.

$$R_{12} \cdot \omega_{14} = -R_2 \cdot \omega_{24}$$

Q 3 : Montrer qu'avec ces deux relations on peut en déduire la relation $\omega_{10} - \lambda \cdot \omega_{30} + () \cdot \omega_{40} = 0$. Préciser la valeur de λ en fonction de R_{12} , R_2 et R_{32} . Calculer λ .

En addition ces deux relations, on obtient :

$$R_{32} \cdot \omega_{34} + R_{12} \omega_{14} = 0$$

\Leftrightarrow

$$R_{32} \cdot (\omega_{30} - \omega_{40}) + R_{12} (\omega_{10} - \omega_{40}) = 0$$

\Leftrightarrow

$$\omega_{10} + \frac{R_{32}}{R_{12}} \cdot \omega_{30} + \left(-\frac{R_{32}}{R_{12}} - 1 \right) \cdot \omega_{40} = 0$$

On trouve alors :

$$\lambda = -\frac{R_{32}}{R_{12}} = -\frac{120}{60} = -2$$

Q 4 : Montrer qu'on peut obtenir la relation suivante :

$$\frac{\omega_M}{\omega_m} = -\frac{A \cdot x}{B \cdot R_p \cdot y + C \cdot x}$$

Avec A , B et C entiers positifs.

D'après le schéma cinématique, on obtient :

$$\begin{cases} \omega_{10} = -\frac{R_M}{R_{1M}} \cdot \omega_M \\ \omega_{30} = -\frac{R_P}{R_{3P}} \cdot \omega_P \end{cases}$$

On obtient alors,

$$\omega_{30} = -\frac{R_P}{R_{3P}} \cdot \frac{2y}{x} \omega_M$$

En reportant dans l'expression de la question précédente, on obtient :

$$-\frac{R_M}{R_{1M}} \cdot \omega_M + \lambda \cdot \frac{R_P}{R_{3P}} \cdot \frac{2y}{x} \omega_M + (\lambda - 1) \cdot \omega_{40} = 0$$

Sachant que $\omega_{40} = \omega_m$, la relation s'écrit :

$$\left(\lambda \cdot \frac{R_P}{R_{3P}} \cdot \frac{2y}{x} - \frac{R_M}{R_{1M}} \right) \cdot \omega_M = (\lambda - 1) \cdot \omega_m$$

d'où,

$$\frac{\omega_M}{\omega_m} = \frac{1 - \lambda}{\lambda \cdot \frac{R_P}{R_{3P}} \cdot \frac{2y}{x} - \frac{R_M}{R_{1M}}} = \frac{(1 - \lambda) R_{3P} R_{1M} \cdot x}{2\lambda \cdot R_P \cdot R_{1M} \cdot y - R_M \cdot R_{3P} \cdot x} = -\frac{3R_{3P} R_{1M} \cdot x}{4R_P \cdot R_{1M} \cdot y + R_M \cdot R_{3P} \cdot x}$$

d'où ma forme :

$$\frac{\omega_M}{\omega_m} = -\frac{A \cdot x}{B \cdot R_P \cdot y + C \cdot x}$$

Avec :

$$\begin{cases} A = 3R_{3P} R_{1M} = 5346 \\ B = 4 \cdot R_{1M} = 132 \\ C = R_M \cdot R_{3P} = 2916 \end{cases}$$

4 Corrigé : Étude de la transmission de puissance d'un système d'élévation d'une rame de Tram

Q 1 : Déterminer en fonction de $\dot{\theta}_1$ et des données concernant les roues dentées et le système vis-écrou les vitesses de rotation :

1. $\vec{\Omega}_{2/0}$,
2. $\vec{\Omega}_{3/0}$.

$$\vec{\Omega}_{2/0} = \omega_{20} \cdot \vec{x}_0$$

$$\vec{\Omega}_{1/0} = \omega_{10} \cdot \vec{x}_0 = \dot{\theta}_1 \cdot \vec{x}_0$$

Or,

$$\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = -\frac{Z_{12}}{Z_{21}}$$

Donc :

$$\boxed{\vec{\Omega}_{2/0} = -\frac{Z_{12}}{Z_{21}} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{x}_0}$$

$$\vec{\Omega}_{3/0} = \omega_{30} \cdot \vec{z}_0$$

Or,

$$\frac{\omega_{30}}{\omega_{20}} = -\frac{Z_{23}}{Z_{32}}$$

Donc :

$$\vec{\Omega}_{3/0} = -\frac{Z_{23}}{Z_{32}} \cdot \omega_{20} \cdot \vec{z}_0 = \frac{Z_{12} \cdot Z_{23}}{Z_{21} \cdot Z_{32}} \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{z}_0$$

Q 2 : Déterminer numériquement les rapports :

1. $r_{12} = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}},$

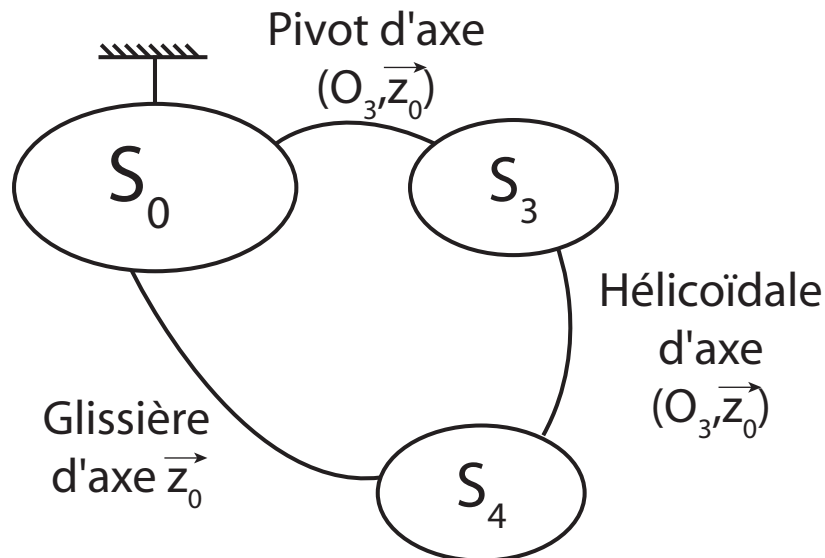
2. $r_{23} = \frac{\omega_{30}}{\omega_{20}},$

On en déduit :

- $r_{12} = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = -\frac{Z_{12}}{Z_{21}} = -\frac{15}{75} = -\frac{1}{5},$

- $r_{23} = \frac{\omega_{30}}{\omega_{20}} = \frac{Z_{23}}{Z_{32}} = \frac{14}{35} = \frac{2}{5},$

Q 3 : Tracer le graph des liaisons du système de transformation de mouvement constitué des solides 0 – 3 – 4.



Q 4 : Écrire le torseurs cinématiques associé à chaque liaison en précisant les lieux d'invariance.

- L_{03} : pivot d'axe (O_3, \vec{z}_0) :

$$\{\mathcal{V}_{(3/0)}\} = \forall P \in (O_3, \vec{z}_0) \left\{ \begin{array}{c} \omega_{30} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

- L_{43} : hélicoïdale d'axe (O_3, \vec{z}_0) :

$$\{\mathcal{V}_{(4/3)}\} = \forall P \in (O_3, \vec{z}_0) \left\{ \begin{array}{c} \omega_{43} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{V}(P \in 4/3) = u_{z43} \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\}$$

avec $u_{z43} = \frac{p_{34}}{2\pi} \omega_{43}$

- L_{04} : glissière d'axe \vec{z}_0 :

$$\{\mathcal{V}_{(4/0)}\} = \forall P \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{V}(P \in 4/0) = u_{z40} \cdot \vec{z}_0 = V_L \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\}$$

Q 5 : Écrire la fermeture cinématique.

$$\{\mathcal{V}_{(4/0)}\} = \{\mathcal{V}_{(4/3)}\} + \{\mathcal{V}_{(3/0)}\}$$

Q 6 : En déduire une relation entre la vitesse de levée : $V_L = \vec{V}(O_4 \in 4/0) \cdot \vec{z}_0$ **et** $\omega_{30} = \vec{\Omega}_{3/0} \cdot \vec{z}_0$

On peut donc écrire la fermeture cinématique en O_3 :

$$_{O_3} \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ V_L \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\} = _{O_3} \left\{ \begin{array}{c} \omega_{43} \cdot \vec{z}_0 \\ u_{z43} \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\} + _{O_3} \left\{ \begin{array}{c} \omega_{30} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

On obtient alors un système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{43} + \omega_{30} = 0 \\ V_L = u_{z43} = \frac{p_{34}}{2\pi} \omega_{43} \end{array} \right.$$

Ainsi,

$$V_L = -\frac{p_{34}}{2\pi} \omega_{30}$$

Q 7 : En déduire les rapports :

1. $r_{34} = \frac{V_L}{\omega_{30}}$,
2. $r_g = \frac{V_L}{\omega_{10}}$.

$$r_{34} = \frac{V_L}{\omega_{30}} = -\frac{p_{34}}{2\pi}$$

$$r_g = \frac{V_L}{\omega_{10}} = \frac{p_{34}}{2\pi} \frac{Z_{12} \cdot Z_{23}}{Z_{21} \cdot Z_{32}} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{2\pi} \frac{2}{25}$$

Q 8 : Déterminer la vitesse de rotation du moteur souhaitée (à exprimer en tours par minute) pour obtenir une vitesse de levée conforme au cahier des charges.

$$N_{10} = \frac{60}{2\pi} \dot{\theta}_1 = \frac{60}{2\pi} \cdot \frac{V_L}{r_g} = \frac{60}{2\pi} \cdot \frac{V_L \cdot 2\pi \cdot 5 \cdot 10^3}{2} = 150 \cdot 10^3 \cdot V_L = 150 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3 = 1500 \text{ tr/min}$$