Devoir à la maison n° 12

À rendre le 07 février

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme

$$S_n(X) = 1 + \frac{X}{1!} + \cdots \frac{X^n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{X^i}{i!}.$$

L'objectif de ce problème est de montrer que, si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, alors les racines complexes du polynôme S_n ont un module strictement inférieur à n.

1) Soit p un entier naturel non nul. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des nombres complexes de module inférieur ou égal à 1. Soit $\theta_1, \dots, \theta_p \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que

$$\left| \sum_{i=1}^{p} \theta_i \alpha_i \right| = \sum_{i=1}^{p} \theta_i.$$

- **a)** Démontrer que $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des nombres complexes de module exactement 1.
- **b)** On suppose dans cette question seulement $p = 2$ et $\alpha_1 = 1$. Soit t un nombre réel tel que $\alpha_2 = \mathrm{e}^{it}$. En développant $|\theta_1 + \theta_2 \mathrm{e}^{it}|^2$, justifier que $\alpha_2 = 1$.
- **c)** Dans le cas général, démontrer que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p$.

2) Soit P dans $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 2$. On note $a_0, \dots, a_n$ ses coefficients :

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$

On suppose que $a_0 = a_1 > a_2 > \cdots > a_{n-1} > a_n > 0$.

- **a)** Justifier que ni 0, ni 1, ne sont des racines de P.
- **b)** Déterminer les coefficients du polynôme $(X-1)P(X)$.
- **c)** Démontrer que les racines complexes de P ont un module strictement supérieur à 1.
  *Indication : on pourra raisonner par l'absurde et utiliser la question **1)c)***

3) Soit Q dans $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 2$. Soient $a_0, \dots, a_n$ ses coefficients :

$$Q(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$

On suppose que $0 < a_0 < a_1 < \cdots a_{n-2} < a_{n-1} = a_n$. Justifier que les racines complexes de Q ont un module strictement inférieur à 1.

4) Conclure.
Indication : on pourra considérer le polynôme $T_n = S_n(nX)$.

— **FIN** —