Devoir à la maison n° 22

À rendre le 13 juin

Étant donnés trois nombres complexes x, y, z, on pose

$$M = M(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C}).$$

Soit d'autre part la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$, où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. On note $\overline{J}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de la matrice J.

1) Calculer directement le déterminant de la matrice M.

2) Calculer le produit $J\overline{J}$. Calculer le produit $JM\overline{J}$ et montrer que cette matrice s'écrit sous la forme DS, où D est une matrice diagonale et S une "matrice de permutation" (c'est-à-dire une matrice obtenue par une permutation de colonnes à partir de la matrice-unité I_3).

3) En déduire une expression factorisée de $\det(M)$.

4) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les nombres complexes x, y, z pour que M soit inversible. Exprimer alors M^{-1} à l'aide de J, $\overline{J}$, D^{-1} et S. À partir de maintenant, le corps des scalaires est le corps des réels.

5) Soit $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid M(x,y,z) \text{ non inversible } \}$. Montrer que Γ est la réunion d'un plan vectoriel Π et d'une droite vectorielle δ de $\mathbb{R}^3$ que l'on précisera (*on se souviendra que x, y, z sont des réels*).

6) Soit E_1 l'ensemble des endomorphismes f de $\mathbb{R}^3$ laissant stable le plan Π (c'est-à-dire tels que $f(\Pi) \subset \Pi$).

- **a)** Montrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
- **b)** Montrer qu'une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ représente canoniquement un endomorphisme f de E_1 si et seulement si $\sum_{i=1}^{3} a_{ij}$ est indépendant de j. En déduire la dimension de E_1.

7) Soit $E_2 = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \mid f(\delta) \subset \delta\}$. Caractériser les matrices représentant canoniquement les endomorphismes de E_2. En déduire la dimension de l'espace vectoriel E_2.

— **FIN** —