

Devoir à la maison n° 5

À rendre le 14 octobre

I. Les nombres de Catalan

On pose $C_0 = 1$ et l'on définit par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}$.

- 1) Calculer C_1, C_2, C_3, C_4 et C_5 .
- 2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n \in \mathbb{N}^*$.
- 3) Montrer par récurrence simple que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n \geq 2^{n-1}$.
- 4) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n \geq 3^{n-2}$. On prendra un soin particulier à choisir le type de récurrence mise en œuvre.
- 5) Tenter de montrer par une récurrence similaire à celle de 4) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n \geq 4^{n-2}$. À quel endroit ceci échoue-t-il ?

II. Un algorithme de multiplication

On propose l'algorithme suivant. Soit m et n deux entiers strictement positifs. Sur une première ligne, on écrit côte à côte m et n . Sur la ligne suivante, on écrit le quotient de la division euclidienne de m par 2 (on oublie donc les décimales) sous la valeur de m , et on écrit $2n$ sous la valeur de n . On continue ainsi : dans la première colonne, on passe d'une ligne à l'autre en divisant par 2, dans la deuxième colonne, on multiplie par 2. On s'arrête lorsqu'on a obtenu 1 dans la première colonne. On barre ensuite toutes les lignes pour lesquelles le nombre situé dans la première colonne est pair. On fait enfin la somme des nombres situés dans la deuxième colonne et non barrés. On note $\varphi(m, n)$ l'entier obtenu.

Voici un exemple pour 11 et 17.

11	17
5	34
2	68
1	136
<hr/>	
	187

Montrer que $\varphi(m, n) = mn$ pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$.

— FIN —