# Devoir à la maison n° 17

À rendre le 11 avril

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, avec $f$ décroissante et positive.

**1)** Montrer la formule de transformation d'Abel : si $u, v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k(v_{k+1} - v_k) = u_{n-1}v_n + \sum_{k=1}^{n-1}(u_{k-1} - u_k)v_k - u_0v_0.$$

**2)** Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \int_{a_k}^{a_{k+1}} g(t)\,\mathrm{d}t$$

avec, pour chaque $0 \leqslant k < n$,

$$a_k = a + k\frac{(b-a)}{n}.$$

Montrer que

$$S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

**3)** On introduit $G$ la primitive de $g$ s'annulant en $a$. Montrer que

$$f(a) \min_{[a,b]} G \leqslant S_n \leqslant f(a) \max_{[a,b]} G.$$

**4)** En déduire qu'il existe $c \in [a, b]$ vérifiant

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a) \int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t.$$

**5)** Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues avec $f$ monotone.
Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a) \int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t + f(b) \int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

**— FIN —**