Devoir surveillé n° 8 - Remarques

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 34 points, ramené sur 5 points.
- Problèmes : exercice I de la v2 sur 8 points, chaque question sur 4 points, total v1 sur 104, total v2 sur 84, ramené sur 15 points.

Statistiques descriptives.

	Calculs	v1	v2	Note finale
Note maximale	21	90	66	$19,5$
Note minimale	0	16	15	5
Moyenne	$\approx 11,50$	$\approx 54,89$	$\approx 32,27$	$\approx 10,92$
Écart-type	$\approx 4,93$	$\approx 16,43$	$\approx 13,80$	$\approx 3,22$

Un exercice non vu en TD (v1).

Assez peu traité. Il manque souvent des explications claires.
Attention : $\text{Card}(E\backslash A) = \text{Card}\, E - \text{Card}\, A$, mais $\text{Card}\, \mathscr{P}(E\backslash A) \neq \text{Card}\, \mathscr{P}(E) - \text{Card}\, \mathscr{P}(A)$.

Une suite d'intégrales (v1).

1. et 7. Quand vous faites une IPP (intégration par partieS, au pluriel), il faut le dire !

10. a, b et c n'existent pas ! Et il ne s'agit pas de faire une analyse en partant du principe qu'ils existent. C'est à vous de montrer que $I_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, et d'en déduire qu'en posant $a = 0$, $b = 1$ et $c = -3$, on a bien $I_n = a + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Étude d'un endomorphisme (v1).

1. Il faut déjà commencer par montrer que f est linéaire. Cette question a été très bien traitée, heureusement, mais il faut arriver à 100 % de bonnes réponses ! Ce genre de question est incontournable, et vous ne pouvez pas ne pas y répondre correctement.

2. $\text{Ker}\, f$ est un ensemble, 0 n'en est pas un ... donc c'est $\text{Ker}\, f \neq \{0\}$ qu'il faut écrire, et pas $\text{Ker}\, f \neq 0$. De plus, calculer le noyau pour commencer, et ensuite montrer que $\text{Im}\, f \neq \mathbb{R}^3$ grâce au théorème du rang, et donc $\text{rg}\, f \neq \dim \mathbb{R}^3$ et donc f n'est pas injective, est une méthode complétement tordue. Revoyez le cours : si $\text{rg}\, f \neq \dim E$, comment montre-t-on que f n'est pas injective ? En utilisant le théorème du rang pour montrer que $\text{Ker}\, f \neq \{0\}$. Vous ne trouvez pas que là on pédale dans la semoule ? Mais comme on dit chez les Shadoks : pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué ?

3.c. Beaucoup utilisent que (v_1, v_2) est libre et qu'elle a comme cardinal la dimension de $\text{Im}\, f$. C'est bien, mais ça ne prouve rien ! Vous avez quasiment tous oublié de préciser que v_1 et v_2 sont dans $\text{Im}\, f$! De plus, rappel : ce n'est pas $\dim(v_1, v_2) = \dim \text{Im}\, f$. La famille (v_1, v_2) n'est pas un sev, elle n'a pas de dimension. Mais elle a un cardinal (bon d'accord, ce n'est pas un ensemble mais une famille, il y a là un abus, mais pas grave).

3.d. Vous avez TOUS (sauf un) montré que si x est une combinaison linéaire de v_1 et v_2, alors $f(x)$ aussi. Ce n'est pas très naturel de faire ainsi. Toutes les images directes de qui vous voulez sont toujours dans $\text{Im}\, f$, ça doit être un réflexe que d'y penser. Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $f(x) \in \text{Im}\, f$, donc pour tout $x \in \text{Im}\, f$, $f(x) \in \text{Im}\, f$. Ou encore, $\text{Im}\, f \subset \mathbb{R}^3$ donc $f(\text{Im}\, f) \subset f(\mathbb{R}^3) = \text{Im}\, f$.

5. Faites simple et utilisez le cours : $\text{Im}\, f$ et $\text{Ker}\, f$ sont supplémentaires, donc la concaténation d'une base de $\text{Im}\, f$ et d'une base de $\text{Ker}\, f$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

Un exercice d'intégration (v2).

Souvent bien traité. Une erreur fréquente toutefois : $\int fg = 0$ et hypothèse H, donc $fg = 0$: si H est « fg est continue » c'est faux ! Si H est « $fg \geqslant 0$ », c'est faux aussi ! Il faut les deux !!
Dans le même ordre d'idée, si $f > 0$, vous ne pouvez pas affirmer que $\int f > 0$ sans passer par le théorème « si $f \geqslant 0$ et prend une valeur > 0 et est CONTINUE, alors $\int f > 0$ ˇ. Vous pouvez vous contenter de « $f > 0$ et est continue donc $f > 0$ », mais l'hypothèse de continuité est indispensable.

Un petit problème de dénombrement.

Tout d'abord, je suis absolument effaré par la disparition du pluriel chez un échantillon (représentatif ?) des étudiants. C'est hallucinant, tout simplement : je n'ai pas compté mais à la louche, quand il faut mettre un « s » à la fin d'un mot, 4 fois sur 5 il n'y est pas. C'est pourtant une règle basique et ultra simple de la langue française. Faites attention par pitié, je suis probablement psychatriquement névrosé, mais à force de lire des « nombre de surjection », des « ensemble de fonction », des « ensemble à p élément », des « valeur deux à deux distincte », je vous jure que je suis vraiment très très énervé.

Sinon vos résultats sont la plupart du temps corrects, mais la rédaction est problématique. Les exercices de dénombrement ne sont jamais simples à rédiger, mais il faut au maximum éviter le bavardage en français et favoriser l'écriture mathématiques : parlez d'union disjointe, de produit cartésien etc.
Une certaine part de rédaction en français est inévitable mais relisez-vous ! Votre phrase doit avoir un sens, ce n'est malheureusement pas toujours le cas. Essayez d'être clair et concis en même temps.

1. Pour le premier point, il n'y a qu'une application de E dans F, certes, mais il faut dire qu'elle est surjective.
Pour le deuxième point, il faut être très clair : si $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$, toute surjection est bijective, et réciproquement, donc le nombre de surjections est égal au nombre de bijections.
Pour le dernier point, citez le principe des tiroirs.

2. Le résultat vous était donné : il faut donc être encore plus convaincant dans vos explications. Évidemment, tout le monde va avoir le bon résultat à la fin, donc le donner et l'encadrer joliment ne va vous rapporter aucun point. Si vos explications sont vasouilleuses, on prendra ça pour du bluff.
Beaucoup ont commencé par fixer f, et ensuite disent qu'il y a tant de choix pour f : c'est un peu contradictoire. Il faut fixer l'ensemble image, et dire combien il y a de fonctions qui ont cet ensemble comme image.

3. Même remarque que précédemment concernant le choix des images.
Cette fois le résultat n'était pas donné, donc le donner rapporte des points, même si les explications sont perfectibles.

4. Personne n'est allé au bout. Cette question était clairement plus difficile.

Dualité en dimension finie.

Problème très classique et sans originalité : il suffit de bien appliquer les méthodes habituelles du cours. La difficulté de ce problème vient du fait que l'on manipule trois ev : E, E^* et E^{**}, et que deux de ces ev sont des ensembles de fonctions, et que l'on prend des fonctions qui à des fonctions associent des fonctions. Il fallait donc être clair et rigoureux sur le type des objets manipulés.
Faites attention à l'usage des parenthèses (encore quelque chose qui a l'air de tendre à disparaître) : « $f + g(x)$ » n'est pas une expression homogène, elle n'a pas de sens. On écrit « $(f + g)(x)$ ».