Permutations :

S_n = ens. de bij.° de $[\![1,n]\!]$ ds lui-même.

$\# S_n = n!$

Notations : $\sigma \in S_n$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

ex :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$\sigma : [\![1,5]\!] \longrightarrow [\![1,5]\!]$

tq. $\sigma(1) = 4$, $\sigma(2) = 1$,

$\sigma(3) = 3$, $\sigma(4) = 2$, $\sigma(5) = 5$.

<u>Ex</u> :

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

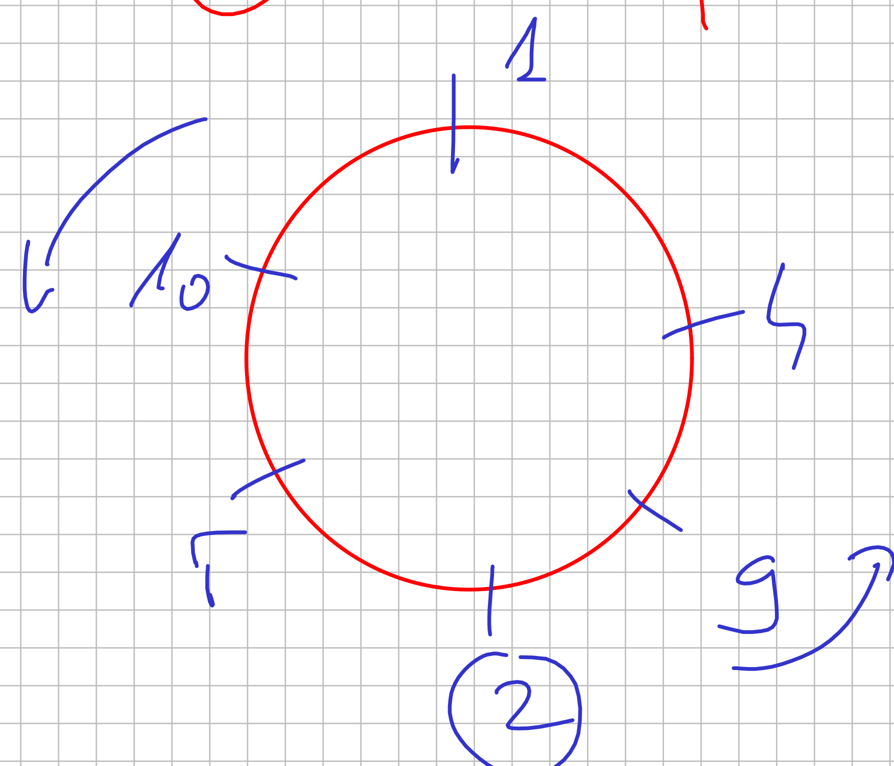
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\sigma \circ \sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ex :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 6 & 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{O}(1) = \{ \sigma^k(1) \ , \ k \in \mathbb{Z} \}$$



$$= \{1, 10, 5, 2, 9, 4\}$$

$$= \mathcal{O}(2) = \mathcal{O}(10)$$

$$= \mathcal{O}(5) = \text{———}$$

$$\mathcal{O}(3) = \mathcal{O}(6) = \{3, 6\}$$

$$\mathcal{O}(7) = \{7\}$$

$$\mathcal{O}(8) = \{8\}.$$

Si $i, j \in [\![1, n]\!]$,

$$i \sim j \iff \exists l \in \mathbb{Z},\ \sigma^l(i) = j$$

$$\iff j \in \mathcal{O}(i)$$

Rmq. $\sim$ est 1 rela° d'équiv.

alors : $cl(i) = \mathcal{O}(i)$.

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 3 & 1 & 2 & 6 & 7 & 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Déf : On appelle cycle (permutation circulaire) toute permutation qui a 1 seule orbite non réduite à 1 élément.

ex : c_1 est 1 cycle (de longueur 6)

$\# \theta(1) = 6$

c'est 1 6-cycle.

notation : c_1 est noté $(1\ 10\ 5\ 2\ 9\ 4)$

$c_1 \in S_{10}$

ex : $c_2 = (3\ 6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & 3 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

Déf : 1 cycle de longueur 2 s'appelle 1 transposition.

$(a \ \ b)$ est souvent noté τ_{ab}.

C_2 est 1 transposition.

ex :

$$C_1 \circ C_2 = (1 \ 10 \ 5 \ 2 \ 9 \ 4) \circ (3 \ 6)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 6 & 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \sigma$$

C_1 et C_2 st des cycles à supports disjoints et $c_1 \circ c_2 = \sigma$.

support d'1 cycle c = les élé$^{\text{ts}}$ de la seule orbite non réduite à 1 élé$^{\text{t}}$.

$$= \{ x \in [\![1, n]\!],\ c(x) \neq x \}.$$

$$c_2 \circ c_1 = (3 \quad 6) \circ (1 \quad 10 \quad 7 \quad 2 \quad 5 \quad 4)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \cdots \\ 10 & \end{pmatrix} = \sigma.$$

<u>Résultats</u> : 1) 2 cycles à supports disjoints commutent.

2) Une permutation est égale à 1 produit (1 compris) de cycles de supports disjoints.

$(S_n, \circ)$ groupe

$\Updownarrow$

produit.

$\sigma^k = \sigma \circ \sigma \circ \cdots \circ \sigma$

σ^{-1}

Ex :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 3 & 10 & 11 & 7 & 8 & 6 & 9 & 2 & 5 & 4 & 1 & 13 & 14 & 12 \end{pmatrix}$$

$O(1) = \{1, 3, 11\}$; $c_1 = (1 \ 3 \ 11)$

$\mathcal{O}(2) = \{2, 10, 4, 7, 9, 5, 8\}$

$c_2 = (2 \ 10 \ 4 \ 7 \ 9 \ 5 \ 8)$

$\mathcal{O}(12) = \{12, 13, 14\}$, $c_3 = (12 \ 13 \ 14)$

alors $\sigma = c_1 \circ c_2 \circ c_3$

$= c_2 \circ c_1 \circ c_3 = c_3 \circ c_2 \circ c_1$

... etc ...

Th : cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Th : Toute permutation s'écrit en 1 produit de transpositions (⚠ pas unique).

Dem : **idée** : 1) Tout cycle est 1 produit de transpositions

2) Toute permutation est 1 produit de cycles

ccl : Toute permutation est 1 produit de transpositions.

2) : connu.

1) à montrer :

ex : $c = (a \quad b \quad c \quad d)$.

$$\sigma = (a \ b) \circ (b \ c) \circ (c \ d)$$

$\longrightarrow$ f: $x \notin \{a, b, c, d\}$: $\sigma(x) = x$

$c(x) = x = \sigma(x)$.

$\longrightarrow$ $\sigma(a) = b = c(a)$, $\sigma(b) = c = c(b)$, $\sigma(c) = d = c(c)$

$\sigma(d) = a = c(a)$.

f: $x \in \{a, b, c, d\}$, $c(x) = \sigma(x)$

glilalet: $\sigma = c$.

Cas g^{al} :

$$c = (a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_n)$$

$$= (a_1 \; a_2) \circ (a_2 \; a_3) \circ \cdots \circ (a_{n-1} \; a_n).$$

Ex : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 1 & 8 & 6 & 7 & 9 & 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}$

$$= \overbrace{(1 \; 2 \; 4 \; 8 \; 3)}^{\varepsilon(c_1) = (-1)^4 = 1} \circ \overbrace{(5 \; 6 \; 7 \; 9)}^{= -1}$$

$$= \underbrace{(1 \; 2) \circ (2 \; 4) \circ (4 \; 8) \circ (8 \; 3)} \circ \underbrace{(5 \; 6) \circ (6 \; 7) \circ (7 \; 9)}$$

$$\varepsilon(\sigma) = -1.$$

Signature :

- $\sigma \in S_n$, 1 inversion de σ est 1 couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tq : $\begin{cases} i < j \\ \sigma(i) > \sigma(j) \end{cases}$

- $\varepsilon(\sigma)$ = signature de σ $= (-1)^{\#\text{ d'inversions}}$

si # inv. est $\begin{cases} \text{impair} \\ \text{pair} \end{cases}$: $\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$

et σ est dite $\begin{cases} \text{paire} \\ \text{impaire} \end{cases}$.

Ex :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 1 & 6 & 4 & 5 & 3 & 9 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$1 < 2$; $7 > 1$

inv : $(1,2)$; $(1,3)$; $(1,4)$; $(1,5)$; $(1,6)$; $(1,9)$

$(3,4)$; $(3,5)$; $(3,6)$; $(3,9)$

$(4,6)$; $(4,9)$

$(5,6)$; $(5,9)$

$(6,9)$; $(7,9)$; $(7,8)$; $(8,9)$

il y en a 18, dc σ est paire et $\varepsilon(\sigma) = 1$.

__ex:__

$$(2\ 7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon(\text{transposi?}) = -1$.

__ex:__

$$\begin{pmatrix} 1 < 2 < 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 < 2 < 6 & 4 & 5 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$(1, ?)$: non

$(2, ..)$ non

$(3, ?)$: 3 $\quad (4, ?)$: 1 ; $(5, ?)$: 1

$$(i\ j) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & (i-1) & i & (i+1) & \cdots & (j-1) & j & (j+1) & \cdots & n \\ & — & & j & (i+1) & — & & i & & — & \end{pmatrix}$$

si $a < i$: 0 inv de la forme $(a, ?)$

il y a $(j-i)$ inv. de la forme $(i, ?)$

si $a \in [\![i+1, j-1]\!]$: il y a 1 inv. de la forme $(a, ?)$ [c'est (a, j)]

si $a \geq i$: 0 inv. de la forme $(a, ?)$

En tout : $j - i + \sum_{a=i+1}^{j-1} 1 = j - i + (j-1) - (i+1) + 1$

$= 2j - 2i - 1$

c'est-à-dire impair.

Prop :

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

< 0 si (i,j) inv

> 0 sinon.

Th :

$$\varepsilon : (S_n, \circ) \longrightarrow (\{-1, 1\}, \times)$$
$$\sigma \longmapsto \varepsilon(\sigma)$$

est 1 morphisme de groupe.

i.e. : $$\varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma) \times \varepsilon(\sigma'),$$

Application : • $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_n$

donc $$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau_1) \times \varepsilon(\tau_2) \dots \varepsilon(\tau_n)$$

$$= (-1)^n$$

$$= (-1)^{\#\text{ de transpositions}}$$

• Si $c = (a_1 \dots a_n)$, n-cycle

$$= \underbrace{(a_1\ a_2) \circ (a_2\ a_3) \dots \circ (a_{n-1}\ a_n)}_{(n-1)\text{ transpositions}}$$

La signature d'1 n-cycle est $(-1)^{n-1}$

Def : $\ker \varepsilon = \{\sigma \in S_n, \varepsilon(\sigma) = 1\}$

$= A_n$: groupe alterné.