## Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 point, total sur 34 points, ramené sur 5 points.
- Problèmes et exercice de TD : chaque question sur 4 points, total sur 124 points (V1) et 128 points (V2), ramené sur 15 points, +70% (V1) et +100% (V2).

## Statistiques descriptives.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \min\left(\frac{1}{10}\lceil 10x \rceil\,; 20\right)$.

| | Calculs | Problème V1 | Problème V2 | Note finale |
|---|---|---|---|---|
| Transformation | $c$ | $p_1$ | $p_2$ | $\varphi\left(\frac{5c}{34} + 1,7\frac{15p_1}{124} + 2\frac{15p_2}{128}\right)$ |
| Note maximale | 28 | 51 | 69 | $19,9$ |
| Note minimale | 9 | 15 | 19 | $4,9$ |
| Moyenne | $\approx 18,64$ | $\approx 34,45$ | $\approx 37,79$ | $\approx 10,43$ |
| Écart-type | $\approx 4,20$ | $\approx 10,02$ | $\approx 14,19$ | $\approx 3,05$ |
| Premier quartile | 16 | $28,5$ | 28 | $8,6$ |
| Médiane | 18 | 35 | $33,5$ | $9,9$ |
| Troisième quartile | 22 | 41 | $48,25$ | $12,2$ |

## Remarques générales.

• La distribution des signes d'une fonction affine doit être donnée sans justification (niveau collège - début de lycée). Le justifier est du plus mauvais effet. En cas de doute (!!), travaillez au brouillon.
• Vous devez citer/vérifier précisément toutes les hypothèses des théorèmes utilisés. Un exemple (désespérant, j'avais insisté lourdement dessus en classe, plusieurs fois) : si $u$ est définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$ et si $u$ converge vers $\ell$, vous ne pouvez assurer que $\ell$ est un point fixe de $f$ que si vous avez montré que $f$ est continue en $\ell$. Si vous ne rappelez pas cette continuité, vous perdez la <u>majorité</u> des points alloués à cette question.
• Avant de dériver une fonction, justifiez qu'elle est dérivable. Vous perdrez systématiquement des points sinon.
• La première (ou les quelques premières) question d'un devoir doit être parfaitement rédigée, en détail. Vous ne pouvez pas sauter d'argument au motif que les questions sont simples ou classiques. Si vous le faites, vous serez sanctionné et aurez directement perdu tout votre « capital confiance ».

### Exercice vu en TD. (V1)

La limite $x^\beta \ln\left(1 + \frac{1}{x^\beta}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ n'était pas évidente et devait être justifiée.

### Une suite définie par récurrence. (V1)

J'ai lu un nombre incalculable de fois $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$. C'est grossièrement faux (et légèrement inquiétant : nous avons vu la notion de limite à droite).

**1b)** La stabilité de $\mathbb{R}_+^*$ par $f$ et $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ donne directement le fait que $u$ est à valeurs strictement positives.
C'est une partie que est stable par une fonction.

**2)** On voit directement que $u_5 < u_0 < u_6$. Conjecturer une quelconque monotonie sur $u$ n'est pas raisonnable.
Ces scripts ne constituent pas une preuve que $(u_{2n})$ est non majorée, comme j'ai pu le lire. Penser cela est inquiétant...

**3b)** Vous devez être précis sur cette question. La continuité de $g$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ et le TVI (et les limites de $g$) donne le fait que $g(\mathbb{R}_+) = ]-\infty, 1]$ et donc l'existence d'un lieu d'annulation pour $g$. La monotonie stricte de $g$ donne l'injectivité de $g$ et donc l'unicité de ce lieu d'annulation. Un résultat cache-misère : le «théorème de la bijection».

J'ai découvert le «théorème de la valeur intermédiaire». C'est sympatique, j'aime bien. Mais mieux vaut l'appeler «théorème de la bijection».

**3c)** Vous pouvez utiliser sans preuve l'encadrement $2 < \mathrm{e} < 3$. Vous deviez de toute façon justifier les inégalités utilisées.

**4a)** Des manipulations d'une lourdeur excessive, alors qu'il suffisait d'observer que $u_1 = f(u_0)$ et $u_3 = f(u_2)$ (fait en cours).

**4b)** J'ai lu «$f$ est croissante strictement, donc $u$ est monotone. Comme $u_0 < u_2$, $(u_{2n})$ est strictement croissante et $(u_{2n+1})$ strictement décroissante». Cela pose deux problèmes. D'une part, il y a une contradiction directe entre la monotonie de $u$ et les monotonies strictes et opposées de ces deux sous-suites. Ensuite, la gestion du caractère strict de la monotonie est trop légère : il disparaît et réapparaît magiquement.

Vous ne pouviez écrire «donc $(u_{2n})$ est strictement croissante». Cela revient à dire que pour toute suite réelle $v$, si $v_0 < v_1$ alors $v$ est strictement croissante.

**5a)** J'ai lu : «si $x = 0$, alors $h(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$». Quelle ☠HORREUR☠ ! D'une part, il y a une erreur de manipulation de variable ($h(\heartsuit) \xrightarrow[\heartsuit\to 0]{} 0$ dépend-t-il de $x$ ?), d'autre part pourquoi ne pas dire $h(0) = 0$ ?

**5b)** 0 et $\alpha$ étaient des solutions évidentes.

**5c-d)** L'hypothèse primordiale est la continuité de $h$ en la valeur de la limite éventuelle. Si vous ne rappelez pas cela, vous perdez la plupart des points de cette question.

Il convenait de faire le lien entre ces suites et $h$, c'est-à-dire d'écrire leurs relations de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+3} = h(u_{2n+1})$ par exemple.

**5e)** Je n'ai attribué des points à cette réponse que si les deux limites précédentes avaient été trouvée des manière un tant soit peu satisfaisantes.

### Équation de Pell-Fermat (V1 et V2)

Pour manipuler un élément quelconque de $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, certains écrivent «soit $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $x = a + b\sqrt{7}$». C'est correct, mais lourd. Vous pouvez très bien prendre $a, b \in \mathbb{Z}$ et travailler directement sur $a + b\sqrt{7}$.
On a $7 = 7 + 0\sqrt{7} = 0 + \sqrt{7}\sqrt{7}$. Il n'y a donc pas unicité de l'écriture $x = a + b\sqrt{7}$ dans $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$. L'unicité est vraie uniquement avec des coefficients entiers. Si vous n'introduisez pas ces coefficients, ce que vous écrivez n'a souvent pas de sens. Bref, **introduisez vos variables**.

**1)** Cette question est très longue à rédiger si vous ne montrez pas que $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

On a défini sur $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ les mêmes lois que sur $\mathbb{R}$ : $+$ et $\times$. Les propriétés usuelles (associativité, commutativité, distributivité) s'en déduisent immédiatement sans preuve. Il suffit juste d'observer que 0 et 1 sont dans $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, puis la stabilité par addition, différence et multiplication.

J'ai relevé beaucoup de confusions entre l'inverse et l'opposé.

**2b)** Le produit d'un rationnel par un irrationnel peut être rationnel : $0\sqrt{7}$.

**2c)** Beaucoup ont oublié de montrer que $\varphi$ est un morphisme de groupes, et ont montré que $\varphi(0) = 0$ au lieu de $\varphi(1) = 1$.

**3d)** $(\mathbb{Z}[\sqrt{7}], \times)$ n'est pas un groupe. Vous ne pouviez donc pas dire que $N$ était un morphisme de $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ dans lui même.

**3e)** On vous demandait ici de montrer une équivalence.

**4d)** Pas de principe du minimum ici (on ne travaille pas avec des entiers). Il fallait voir que le minimum était donné : c'est $8 + 3\sqrt{7}$.

### Suites de Cauchy. (V2)

Pour traiter correctement ce problème, vous devez maîtriser les définitions quantifiées de limites et de bornes supérieures/inférieures. Vous ne pouvez pas traiter ces notions légèrement.
J'ai lu beaucoup de confusions entre le minimum et la borne inférieure d'une partie. C'est rédhibitoire sur un tel sujet.

**1-abc)** Les résultats de ces question étaient donnés dans la suite du sujet. Il vous restait juste à le démontrer.

**2)** Il fallait commencer par «Soit $\varepsilon > 0$».

**3)** Certains traitent bien cette question sans faire **1a)** et **1b)**. Je ne comprends pas.

**4a)** Il convenait d'utiliser proprement (mieux : de citer) la propriété de la borne supérieure.