Feuille d'exercice n° 02 : **Sommes et calculs**
Corrigé de l'exercice 20

Exercice 20

1) On commence par simplifier le système en effectuant les opérations suivantes sur les lignes : $L_1 \leftarrow L_1 - L_4$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_4$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_4$:

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ccccccccc} \lambda x & & & & & - & \lambda t & = & a-d \\ & & \lambda y & & & - & \lambda t & = & b-d \\ & & & & \lambda z & - & \lambda t & = & c-d \\ x & + & y & + & z & + & (1+\lambda)t & = & d \end{array}\right.$$

2) Traitons le cas particulier $\lambda = 0$. Si $\lambda = 0$ alors le système n'a des solutions que si $a = b = c = d$. Les solutions sont alors les (x, y, z, t) qui vérifie $x + y + z + t = d$. (C'est un espace de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$.)

3) Si $\lambda \neq 0$ alors on peut faire l'opération suivante sur la dernière ligne : $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{\lambda}L_1 - \frac{1}{\lambda}L_2 - \frac{1}{\lambda}L_3$ pour obtenir :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda x & & & - & \lambda t & = & a-d \\ & \lambda y & & - & \lambda t & = & b-d \\ & & \lambda z & - & \lambda t & = & c-d \\ & & & & (\lambda+4)t & = & d - \frac{1}{\lambda}(a+b+c-3d) \end{array}\right.$$

4) Cas particulier $\lambda = -4$. La dernière ligne devient $0 = a + b + c + d$. Donc si $a + b + c + d \neq 0$ alors il n'y a pas de solutions.
Si $\lambda = -4$ et $a + b + c + d = 0$ alors existe une infinité de solutions :

$$\left\{\left(t - \frac{a-d}{4}, t - \frac{b-d}{4}, t - \frac{c-d}{4}, t\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\}.$$

5) Cas général : $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq -4$. On calcule d'abord $t = \frac{1}{\lambda+4}\left(d - \frac{1}{\lambda}(a + b + c - 3d)\right)$ et en remplaçant par la valeur de t obtenue on en déduit les valeurs pour $x = t + \frac{1}{\lambda}(a-d), y = t + \frac{1}{\lambda}(b-d), z = t + \frac{1}{\lambda}(c-d)$. Il existe donc une solution unique :

$$\left(\frac{(\lambda+3)a - b - c - d}{\lambda(\lambda+4)}, \frac{(\lambda+3)b - a - c - d}{\lambda(\lambda+4)}, \frac{(\lambda+3)c - a - b - d}{\lambda(\lambda+4)}, \frac{(\lambda+3)d - a - b - c}{\lambda(\lambda+4)}\right).$$