Trigonométrie et complexes - un problème supplémentaire, corrigé

Exercice 1

1) On utilise l'inégalité triangulaire : $||z|-1| \leqslant t \leqslant |z|+1$, et puisque $|z|=1$, il vient :

$$\boxed{0 \leqslant t \leqslant 2}.$$

2) On a

$$t^2 = |1+z|^2 = (1+z)\overline{(1+z)} = 1+\overline{z}+z+z\overline{z} = 1+2\operatorname{Re}(z)+|z|^2 = 2+2\operatorname{Re}(z),$$

donc

$$\boxed{\operatorname{Re}(z) = \frac{t^2-2}{2}}.$$

3) On a

$$\begin{aligned}\left|1-z+z^2\right|^2 &= \left(1-z+z^2\right)\overline{(1-z+z^2)}\\ &= 1-\overline{z}+\overline{z}^2-z+z\overline{z}-z\overline{z}^2+z^2-z^2\overline{z}+z^2\overline{z}^2\\ &= 1+|z|^2+|z^2|^2-2z-2\overline{z}-z^2-\overline{z}^2,\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\left|1-z+z^2\right|^2 = 3-4\operatorname{Re}(z)+2\operatorname{Re}\left(z^2\right)}.$$

4) Écrivons $z = \mathrm{e}^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Alors $z^2 = \mathrm{e}^{i2\theta}$ donc $\operatorname{Re}(z^2) = \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta)-1$ d'où

$$\boxed{\operatorname{Re}(z^2) = 2\operatorname{Re}(z)^2-1}.$$

Il vient donc :

$$\operatorname{Re}(z^2) = 2\left(\frac{t^2-2}{2}\right)^2-1$$

et

$$\begin{aligned}\left|1-z+z^2\right|^2 &= 3-4\operatorname{Re}(z)+2\operatorname{Re}\left(z^2\right)\\ &= 3-4.\frac{t^2-2}{2}+2.\left(2\left(\frac{t^2-2}{2}\right)^2-1\right)\\ &= 9-6t^2+t^4\\ &= (3-t^2)^2,\end{aligned}$$

d'où

$$\left|1-z+z^2\right| = \left|3-t^2\right|.$$

Finalement,

$$\boxed{|1+z|+\left|1-z+z^2\right| = t+\left|3-t^2\right|}.$$

5) Soit $f : t \mapsto t + |3 - t^2|$. Si $t \in \left[0, \sqrt{3}\right]$, alors

$$f(t) = t - t^2 + 3 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}.$$

Ainsi, f est croissante sur $[0, 1/2]$ et décroissante sur $[1/2, \sqrt{3}]$, et vaut 3 en 0, $\dfrac{13}{4}$ en $\dfrac{1}{2}$, et $\sqrt{3}$ en $\sqrt{3}$.
Si $t \in \left[\sqrt{3}, 2\right]$, alors

$$f(t) = t + t^2 - 3 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}.$$

Ainsi, f fonction est croissante sur $\left[\sqrt{3}, 2\right]$, et vaut $\sqrt{3}$ en $\sqrt{3}$ et 3 en 2.
On peut donc dresser le tableau de variation de $t \mapsto t + |3 - t^2|$ (voir figure 1) et observer que cette fonction atteint son maximum $\dfrac{13}{4}$ en $\dfrac{1}{2}$, et son minimum $\sqrt{3}$ en $\sqrt{3}$.

t	0		$\frac{1}{2}$		$\sqrt{3}$		2
$f(t)$	3	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	3

FIGURE 1 – Variations de $t \mapsto t + |3 - t^2|$.

Par conséquent,

$$\boxed{\sqrt{3} \leqslant |1 + z| + \left|1 - z + z^2\right| \leqslant \frac{13}{4}}.$$

De plus, z réalise le minimum de $|1 + z|$ quand $|1 + z| = \sqrt{3}$, et dans ce cas, d'après **2)**, $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{(\sqrt{3})^2 - 2}{2} = \dfrac{1}{2}$. Or $|z| = 1$, donc $\mathrm{Im}(z) = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc $z = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$. Alors, $1 - z + z^2 = 0$, donc le minimum est bien atteint, et il l'est uniquement en ces deux points là.

$$\boxed{\text{Le minimum est atteint pour } z = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } z = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}.}$$