Devoir surveillé n°10
Version n°2

Durée : 4 heures, calculatrices et documents interdits

Diverses démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre

Le théorème de d'Alembert-Gauss appelé aussi théorème fondamental de l'algèbre affirme que « *tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine complexe* ».

L'objectif de ce problème est d'établir ce résultat fondamental par des méthodes analytiques et une méthode faisant appel à des techniques d'algèbre linéaire.

Les deux parties du problème sont indépendantes.

PREMIÈRE PARTIE : MÉTHODES ANALYTIQUES

A. Résultats préliminaires

Soit P un polynôme à coefficients complexes s'écrivant $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $d \geqslant 1$ et $a_d \neq 0$.

1) Montrer qu'il existe $R > 0$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|z| \geqslant R \Longrightarrow \frac{1}{2}|a_d||z|^d \leqslant |P(z)| \leqslant 2|a_d||z|^d.$$

2) **a)** Pour $R > 0$, on appelle *pavé carré fermé centré en* 0 *de demi-côté* R l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant R$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant R$. On notera cet ensemble C_R. Justifier soigneusement que pour tout $R > 0$, l'application $z \longmapsto |P(z)|$ est bornée sur C_R et y atteint sa borne inférieure.

b) Montrer alors que l'application $z \longmapsto |P(z)|$ est minorée sur $\mathbb{C}$ et atteint sa borne inférieure. *On pourra appliquer la question précédente sur un carré fermé bien choisi* .

B. Première méthode analytique

1) Soient b un complexe non nul et Q un polynôme à coefficients complexes tel que $Q(0) = 0$; on pose $Q_1 = 1 + bX^k + X^k Q$, $k \in \mathbb{N}^*$. Soit enfin α une racine k-ième de $-\frac{1}{b}$.

a) Montrer qu'il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que $|\alpha^k Q(\alpha t_0)| \leqslant \frac{1}{2}$.

b) Un tel t_0 étant choisi ; montrer que $|Q_1(\alpha t_0)| < 1$.

2) Inégalité d'Argand : Soient P un polynôme *non constant* à coefficients complexes, et γ un nombre complexe tel que $P(\gamma) \neq 0$. Montrer qu'il existe δ, complexe tel que $|P(\delta)| < |P(\gamma)|$. *On pourra considérer le polynôme* Q_1 *tel que* $Q_1(z) = \frac{P(\gamma+z)}{P(\gamma)}$, $z \in \mathbb{C}$.

3) Application : Soit P un polynôme *non constant* à coefficients complexes ; on note z_0 un complexe où l'application $z \longmapsto |P(z)|$ atteint sa valeur minimale. Montrer que z_0 est un zéro du polynôme P.

C. Deuxième méthode analytique

Malheureusement, cette méthode est pour l'instant hors-programme : rendez-vous après avoir vu les fonctions de deux variables.

DEUXIÈME PARTIE : MÉTHODE ALGÉBRIQUE

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et n un entier naturel non nul. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$; la matrice identité se notera I_n.

Pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on note Id_E l'application identité. On appelle sous-espace vectoriel strict de E tout sous-espace vectoriel distinct de E et non réduit au vecteur nul. Pour tout endomorphisme u de E, on appelle valeur propre de u tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ ne soit pas injectif. On appelle alors vecteur propre associé à la valeur propre λ tout $x \neq 0$ vérifiant $u(x) = \lambda x$.

Pour toute matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A, $\mathrm{tr}\,(A)$ sa trace. Le polynôme caractéristique de A, noté χ_A est l'élément de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{K} \quad \chi_A(x) = \det(A - xI_n)$. On appelle valeur propre de A tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A - \lambda I_n$ ne soit pas inversible.

Si $A = (a_{k,\ell}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on appelle matrice conjuguée de A et on note $\overline{A}$, la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont le coefficient de la k-ième ligne et la ℓ-ième colonne est égal au conjugué $\overline{a}_{k,\ell}$ du complexe $a_{k,\ell}$, pour tout couple (k, ℓ) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$.

Pour tout couple (k, ℓ) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$, on note $E_{k,\ell}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la k-ième ligne et la ℓ-ième colonne valant 1 ; on rappelle que la famille $\left(E_{k,\ell}\right)_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n}$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, dite base canonique.

On rappelle ici que l'objectif de cette partie aussi est d'établir le théorème fondamental de l'algèbre et il ne sera donc pas possible de l'utiliser ; on a tout de même le résultat élémentaire selon lequel *« tout polynôme du second degré à coefficients complexes se factorise sur $\mathbb{C}$ »*.

A. Premiers résultats

1) **a)** Montrer que tout polynôme à coefficient réels de degré impair possède au moins une racine réelle.

b) En déduire que tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension impaire possède au moins une valeur propre.

c) **Application** : Existe-t-il une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + I_3 = 0$?

2) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, et soient u et v deux endomorphismes de E qui **commutent** (on dira aussi que u et v sont commutables).

a) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ et $\operatorname{Im}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ sont stables par u et v.

b) Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et n impair et distinct de 1 alors E possède au moins un sous-espace vectoriel strict de dimension impaire, et stable par les endomorphismes u et v.

3) Montrer par récurrence sur la dimension que deux endomorphismes *commutables* d'un espace vectoriel *réel* de dimension *impaire* possèdent au moins un vecteur propre commun.

B. Endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension impaire

On note i un complexe tel que $i^2 = -1$ et $\mathcal{F}$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ défini par

$$\mathcal{F} = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})\ ; {}^tM = \overline{M}\ \}.$$

On suppose de plus que n est **impair**.

1) Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel réel.

2) Vérifier que la famille constituée des éléments $E_{1,1}, \ldots, E_{n,n}, E_{k,\ell}+E_{\ell,k}, i(E_{k,\ell}-E_{\ell,k})$ avec $(k,\ell) \in \{1,\ldots,n\}^2$ et $k < \ell$, est une base de $\mathcal{F}$; quelle est alors la dimension de $\mathcal{F}$? quelle est sa parité ?

3) Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$; on considère les deux applications u et v définies sur $\mathcal{F}$ par

$$u(M) = \frac{1}{2}(AM + M\ {}^t\overline{A}), \quad v(M) = \frac{1}{2i}(AM - M\ {}^t\overline{A}).$$

a) Montrer que u et v sont des endomorphismes de $\mathcal{F}$.

b) Vérifier que u et v commutent puis justifier qu'ils possèdent au moins un vecteur propre commun.

c) On note $M_0 \in \mathcal{F}$ un vecteur propre commun aux endomorphismes u et v et on suppose que $u(M_0) = \lambda M_0$ et que $v(M_0) = \mu M_0$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Exprimer la matrice AM_0 en fonction de la matrice M_0 et montrer soigneusement que $\lambda + i\mu$ est une valeur propre de la matrice A.

4) **a)** Justifier que tout endomorphisme d'un espace vectoriel complexe de dimension impaire possède au moins une valeur propre.

b) Montrer par récurrence sur la dimension que deux endomorphismes *commutables* d'un espace vectoriel complexe de dimension *impaire* possèdent au moins un vecteur propre commun.

C. Étude du cas général

On sait que tout entier naturel non nul n s'écrit de manière unique sous la forme $n = 2^k p$ où $k \in \mathbb{N}$ et p est un entier naturel impair.
On considère la propriété $\mathcal{P}_k$ suivante :

Pour tout entier naturel impair p, et tout espace vectoriel complexe E de dimension $2^k p$:
(i) *tout endomorphisme de E possède au moins une valeur propre ;*
(ii) *deux endomorphismes commutables de E possèdent au moins un vecteur propre commun.*

On se propose de montrer cette propriété par récurrence sur l'entier naturel k.

La propriété $\mathcal{P}_0$ vient d'être établie dans la section précédente. Soit donc $k \in \mathbb{N}^*$ et supposons la propriété $\mathcal{P}_\ell$ vraie pour tout entier naturel $\ell < k$; soit p un entier naturel impair et E un espace vectoriel complexe de dimension $2^k p$.

C.I. Étude de l'assertion (i) de $\mathcal{P}_k$

Soit f un endomorphisme de E ; on note A la matrice de f dans une base quelconque de E et on considère le sous-espace vectoriel , noté $\mathcal{G}$, de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ défini par

$$\mathcal{G} = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \ ;{}^tM = -M \ \}.$$

1) Préciser la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{G}$.

2) On considère les deux applications u et v définies sur $\mathcal{G}$ par

$$u(M) = (AM + M\ {}^tA), \quad v(M) = AM\ {}^tA.$$

- **a)** Vérifier que u et v sont des endomorphismes de $\mathcal{G}$ et que u et v commutent.
- **b)** Justifier soigneusement que les endomorphismes u et v possèdent au moins un vecteur propre commun.
- **c)** On note $N_0 \in \mathcal{G}$ un vecteur propre commun aux endomorphismes u et v et on suppose que $u(N_0) = \lambda N_0$ et que $v(N_0) = \mu N_0$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.
  - **i)** Vérifier que $(A^2 - \lambda A + \mu I_n)N_0 = 0$.

    Dans la suite, on notera W un vecteur colonne non nul de la matrice N_0 et on désignera par α et β les racines complexes du polynôme du second degré $X^2 - \lambda X + \mu$.
  - **ii)** Vérifier que $(A - \alpha I_n)(A - \beta I_n)W = 0$
  - **iii)** Justifier alors que α ou β est valeur propre de A et conclure .

C.II. Étude de l'assertion (ii) de $\mathcal{P}_k$

Soient f et g deux endomorphismes commutables de E ; on cherche à montrer que f et g ont au moins un vecteur propre commun.

1) Si f est une homothétie de E, justifier que f et g ont au moins un vecteur propre commun.

2) Si f n'est pas une homothétie de E, soit λ une valeur propre de f. On sait que les sous-espaces vectoriels $F_1 = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ et $F_2 = \mathrm{Im}\,(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ sont stables par f et g.

- **a)** Si la dimension de l'un des sous-espaces vectoriels F_1 ou F_2 s'écrit $2^\ell q$ avec $\ell < k$ et q impair, comment peut-on conclure ?
- **b)** Sinon, justifier que l'un de ces deux sous-espaces vectoriels est de dimension $2^k q$ où q est impair et l'autre de dimension $2^k r$ avec r pair non nul.
- **c)** Justifier alors que $q < p$ et indiquer comment on pourrait montrer que les endomorphismes f et g ont au moins un vecteur propre commun.

D. Retour au théorème fondamental de l'algèbre

Soit $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ un polynôme unitaire de degré n à coefficients complexes ; on note f l'endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ canoniquement associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A.

2) Justifier alors que le polynôme P possède au moins une racine complexe.

3) Montrer le théorème fondamental de l'algèbre.

Fin de l'épreuve

— **FIN** —