1.4 : Événements indépendants :

Déf : A et B 2 év. Ils sont dits indépendants si $\boxed{P(A\cap B) = P(A) \times P(B)}$.

Rq : Si $P(B) > 0$, $P(A|B)$ existe.

or : $P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$

A et B sont ind. ssi $P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$

ssi $\boxed{P(A|B) = P(A)}$

Si $P(\bar{B})$ $\neq 0$ non plus.

alors : $$P(A) = P(A|B) = P(A|\bar{B})$$

Ex : Soit A 1 év. CNS pour avoir A et A ind.

A et A ind. ssi : $P(A \cap A) = P(A) \times P(A)$

ssi : $P(A) = (P(A))^2$

ssi : $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$

Les seuls év. ind. d'eux-m̂ sont les év. presque sûrs ou presque impossible.

Ex 1.4.5 : $P(A) = \frac{1}{6}$.

Si A survient, le "jeu" est fini et le 2ème joueur ne tire pas.

donc $B = B \cap \bar{A}$.

donc : $P(B) = P(B \mid \bar{A}) \times P(\bar{A})$

$= \frac{1}{5} \times \frac{5}{6}$

$= \frac{1}{6}$.

$P(B \mid A) = 0 \neq P(B)$, donc A et B ne sont pas ind.

rappel : $P(\bar{A}) \neq 0$ donc $P(B|\bar{A})$ existe.

déf : $$P(B|\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})}$$

donc $P(B \cap \bar{A}) = P(B|\bar{A}) \times P(\bar{A})$.

Variante : $P(A) = \dfrac{1}{6}$.

$$P(B) = P(B|\bar{A}) \times P(\bar{A})$$
$$= \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36} < \frac{1}{6}$$
$$< P(A)$$

Ex. 1.4.6 : $P(A) = \frac{1}{2}$.

- probas totales : $(A, \bar{A})$ syst. complet.

$$P(B) = P(B|A) \times P(A) + P(B|\bar{A}) \times P(\bar{A})$$
$$= \frac{9}{19} \times \frac{1}{2} + \frac{10}{19} \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}.$$

$$P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A) = \frac{9}{19} \times \frac{1}{2}$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \neq \frac{9}{19} \times \frac{1}{2}$$

$P(A\cap B) \neq P(A) \times P(B)$

dc A et B ne st pas indépendants.

$$P(A|B) \underset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(B|A) \times \cancel{P(A)}}{\cancel{P(B)}}$$

$$= P(B|A) = \frac{9}{19}$$

On a : l'énoncé "tirer 2 boules simultanément, 1 ds la main gauche et 1 ds la main droite" est équivalent.

b- familles d'év. ind :

Déf : $A_1 \dots A_n$ des év. On dit qu'ils st mutuellement ind. si : $\forall I \subset [\![1,n]\!]$,

$$P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} P(A_i)$$

!

Ex : $n=3$:

Pr vérifier que $A_1 \dots A_3$ st mut. ind, il faut vérifier que :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) \quad I = [\![1,3]\!]$$

$$\boxed{\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1) \times P(A_2) \\ P(A_1 \cap A_3) &= P(A_1) \times P(A_3) \\ P(A_2 \cap A_3) &= P(A_2) \times P(A_3) \end{aligned}}$$ 2 à 2 ind.

$I = \{1, 2\}$

$I = \{1, 3\}$

$I = \{2, 3\}$

$$P(A_i) = P(A_i) \qquad I = \{i\}$$

$$P(\Omega) = 1 \qquad I = \emptyset$$

(Rappel : $\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = \Omega$; $\prod_{i \in \emptyset} P(A_i) = 1$).

En gal il y a de 2^n relations à vérifier.

Rq : $A_1 \dots A_n$ sont mut ind

$\Rightarrow A_1 \dots A_n$ st 2 à 2 ind.

$\not\Leftarrow$

<u>1.4.8.3)</u> : T : 1er tirage pair

S : 2nd tirage pair

U : la somme des 2 est paire.

On suppose que les 2 lancers de dés sont ind.

$P(T) = \frac{1}{2}$; $P(S) = \frac{1}{2}$.

$$P(U) = P(U|T) \times P(T) + P(U|\bar{T}) \times P(\bar{T})$$

On a "U sachant T" = "S sachant T"

donc $P(U|T) = P(S|T)$
$= P(S) = \frac{1}{2}$ car les 2 lancers sont ind.

de même : $P(U|\bar{T}) = P(\bar{S}|\bar{T})$
$= P(\bar{S}) = \frac{1}{2}$

donc : $P(U) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

On a supposé que les 2 lancers st ind,
donc S et T st ind.

$$P(U \mid T) = P(S \mid T) = P(S)$$
$$= \frac{1}{2}$$
$$= P(U)$$

donc U et T st ind.

S et T jouent des rôles sym donc U et S st ind.

U, T, S sont 2 à 2 ind.

$$P(U \cap T \cap S) = P(U \cap T)$$
$$= P(U | T) \times P(T)$$
$$= P(U) \times P(T) = \frac{1}{4}$$
$$\neq P(U) \times P(T) \times P(S) = \frac{1}{8}$$

U, T, S ne st pas mutuellement ind.

4) $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) \longrightarrow I = [\![1, n]\!]$.

*) A_i mut. ind.

$A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_2 = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_3 = \{1, 5, 6, 7\}$

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}.$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) = \frac{1}{2}$$

$$\neq P(A_1) \times P(A_2)$$

dc A_1 et A_2 ne st pas ind.

dc A_1, A_2, A_3 ne st pas mut. ind.

Or : $$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\{1\}) = \frac{1}{8}$$

$$= P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3)$$

Prop. 1.4.9 : $A_1 \dots A_n$ év. mut. ind.

On pose $B_1 \dots B_n$ 1 n^{lle} famille d'év, où

$\forall i$: $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$, suivant l'humeur.

Alors $B_1, \dots, B_n$ est encore mut ind.

Dém : si $A_1, \dots, A_{n-1}, \overline{A_n}$ est mut ind,

alors par sym des rôles des A_i, tte famille d'év.

obtenue à partir de $A_1 \dots A_n$ en changeant 1 et 1

seul des A_i en $\overline{A_i}$ est encore mut. ind.

Par réc., si changer 1 A_i en $\bar{A}_i$ "fonctionne", alors on peut en changer 1 2ème, puis 1 3ème etc... et on peut donc en changer autant qu'on veut.

Soit $I \subset [\![1, n]\!]$.

Mq. $P\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \prod_{i \in I} P(B_i)$

(avec : $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2$ ... $B_{n-1} = A_{n-1}$, $B_n = \bar{A}_n$)

Si $\underline{n \notin I}$: $P\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$

$= \prod_{i \in I} P(A_i) = \prod_{i \in I} P(B_i)$

Si $\underline{n \in I}$:

$$P\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = P\left(\bar{A}_n \cap \left(\bigcap_{\substack{i\in I\\ i\neq n}} A_i\right)\right)$$

$$= P\left((\Omega \setminus A_n) \cap \left(\bigcap_{\substack{i\in I\\ i<n}} A_i\right)\right)$$

[$\underline{\text{exo}}$: Mq. $(\Omega \setminus A) \cap B = B \setminus (A \cap B)$

et : $(\Omega \setminus A) \cap (\cap B_i) = (\cap B_i) \setminus \cap (A \cap B_i)$]

$$P\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) = P\Bigg(\underbrace{\Big(\bigcap_{\substack{i\in I\\ i\neq n}} A_i\Big)}_{\Delta} \setminus \underbrace{\Big(\Big(\bigcap_{\substack{i\in I\\ i\neq n}} A_i\Big)\cap A_n\Big)}_{\Lambda}\Bigg)$$

or $\Lambda \subset \Delta$ dc: $P(\Delta \setminus \Lambda)$

$$= P(\Delta) - P(\Lambda)$$

$$P\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) = P\Big(\bigcap_{\substack{i\in I\\ i\neq n}} A_i\Big) - P\Big(A_n \cap \Big(\bigcap_{\substack{i\in I\\ i\neq n}} A_i\Big)\Big)$$

$$= P\Big(\bigcap_{\substack{i\in I\\ i\neq n}} A_i\Big) - P\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)$$

$$\underset{A_i \text{ mut ind.}}{=} \prod_{\substack{i \in I \\ i \neq n}} P(A_i) - \prod_{i \in I} P(A_i)$$

$$= \prod_{\substack{i \in I \\ i \neq n}} P(A_i) \left[1 - P(A_n) \right]$$

$$= \left(\prod_{\substack{i \in I \\ i \neq n}} P(A_i) \right) \times P(\overline{A_n})$$

$$= \left(\prod_{\substack{i \in I \\ i \neq n}} P(B_i) \right) \times P(B_n) = \prod_{i \in I} P(B_i).$$

$\square$

2 - Variables aléatoires :

2.1 : Définitions :

Déf : Ω : univers (fini en proba)
E : ensemble quelconque (peut-être infini).

On appelle v.a. sur Ω et à valeurs dans E toute fonction de Ω dans E. Si $E = \mathbb{R}$, la v.a. est dite réelle.

Notations : $X : \Omega \longrightarrow E$

Soit $A \subset E$.

$$X^{\leftarrow}(A) = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in A\}$$

cet ens n'est jamais noté ainsi en proba, il est noté : $(X \in A)$, $\{X \in A\}$, $[X \in A]$

Si : $E = \mathbb{R}$, ie. X est réelle :

si $x \in \mathbb{R}$: $X^{\leftarrow}(]-\infty, x]) = X^{-1}(]-\infty, x])$

$$= \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \leq x\}$$

est noté $(X \leq x)$

de m̂, on a : $(X > x)$, $(X = x)$ ... etc ...

$(X \in [1,2])$ ...

Ex : Si X est la v.a. donnant le gain du joueur, $(X \geq 100)$ est l'év. : le joueur a gagné + que 100 euros.

Rq : en effet $(X \in A)$ est 1 partie de Ω, dc c'est 1 év.

Ex : $P(X \geq 100)$ est la proba. de gagner + que 100 €.

Prop. 2.1.7 : Si E est 1 ens. fini et
$X : \Omega \to E$,

alors : $((X = x))_{x \in E}$ est 1 syst. complet
d'év.

Dém : $\bigcup_{x \in E} (X = x) = \bigcup_{x \in E} \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}$

$= \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in E\}$

$= \Omega$ car $X : \Omega \to E$.

Si : $x, y \in E$, $x \neq y$:

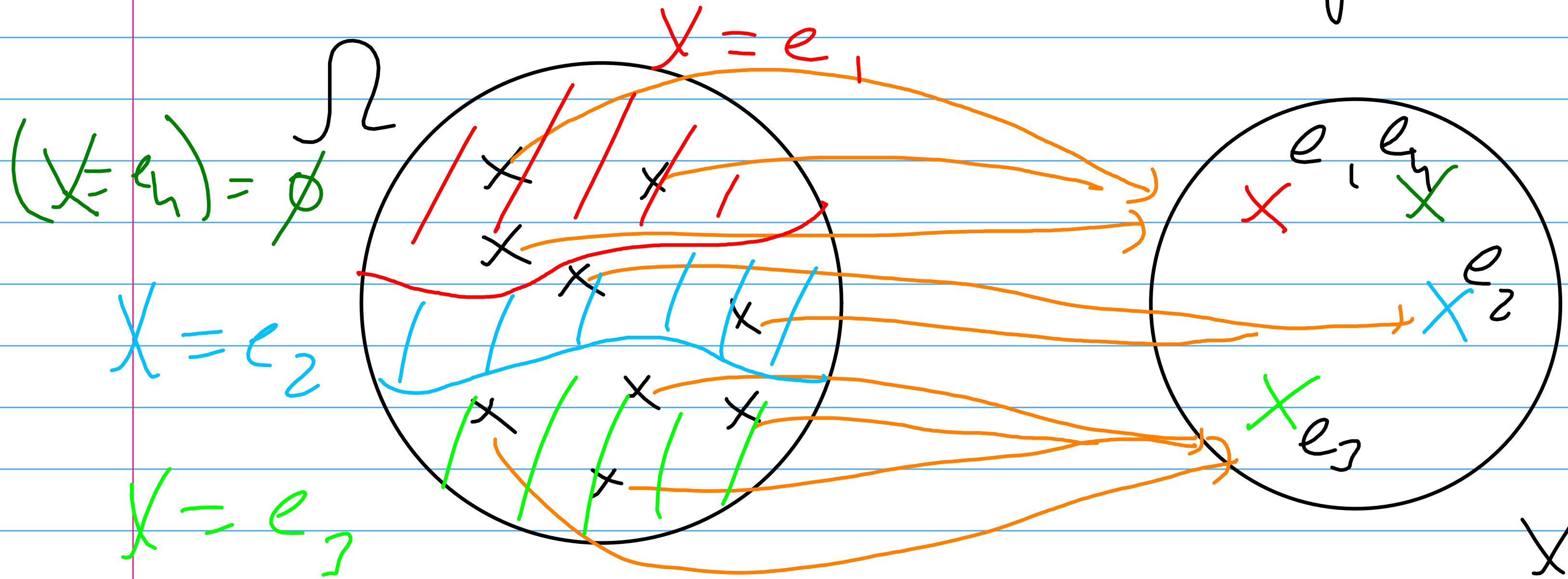
Si : $\omega \in (X = x)$, alors $\Omega(\omega) = x$

$\neq y$

donc $\omega \notin (X = y)$

donc $(X = x) \cap (X = y) = \emptyset$

$\square$



$E = \{e_1 \dots e_4\}$

$X(\Omega) = \{e_1 \dots e_3\}$

2.2 : Loi d'1 v.a :

Def : $X : \Omega \longrightarrow E$.

On appelle **Loi de X** la loi de

proba : $P_X : \mathcal{P}(\underbrace{X(\Omega)}_{\text{univers image}}) \longrightarrow [0,1]$

tq : $\forall x \in X(\Omega)$, $P_X(\{x\}) = P(X = x)$.

Rq : il y a 2 univers : Ω et $X(\Omega)$

les 2 st finis, sinon aucun rapport.

ex : $X : (\overbrace{\text{grilles de loto}}^{\Omega}) \longrightarrow \mathbb{R}$

1 grille $\longmapsto$ gain.

$$\Omega = [\![1, 10]\!]^{60}$$

$X(\Omega)$ = partie finie de $\mathbb{N}$.

il y a 2 probas : P_X sur $\mathcal{P}(X(\Omega))$

P sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

Comme $X(\Omega)$ est fini, on peut se contenter de donner la valeur de P_X sur les singletons :

c'est ce que fait la déf. Cela suffit pour calculer P_X sur n'importe quel événement :

$$P_X(A) = \sum_{x \in A} P_X(\{x\}).$$

Rq : souvent, on considère que P_X est 1 proba sur $\mathcal{P}(E)$, même si E est ∞.

Pour cela on dit que si $x \in E \setminus X(\Omega)$, on pose $P_X(\{x\}) = 0$.

En gros : P_X est définie sur $\mathcal{P}(X(\Omega))$ on la prolonge par 0 en 1 proba définie $\mathcal{P}(E)$.

<u>Prop. 2.2.2</u> : P_X est maintenant 1 proba.

<u>Démo</u> : il reste qd même à ving : $\sum_{x \in X(\Omega)} P_X(\{x\}) = 1$.

or : $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} P_X(\{x\})$

$\displaystyle = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)$

Or nous avons vu que $((X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est 1 syst-cplet de Ω

d'où : $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = P(\Omega)$

$= 1$

B : on avait vu que $((X = x))_{x \in E}$

Je vous laisse voir que changer E en $X(\Omega)$ ne change rien...

__Cor :__ Si $A \subset X(\Omega)$,

$$P_X(A) = \sum_{x \in A} P_X(\{x\})$$

$$= \sum_{x \in A} P(X = x)$$

Or : $((X = x))_{x \in A}$ est 1 partition de $(X \in A)$.

$$(X \in A) = \bigsqcup_{x \in A} (X = x)$$

i.e. $\boxed{P_X(A) = P(X \in A)}$

<u>Déf 2.2.8</u> : $X : \Omega \longrightarrow E$

et $f : E \longrightarrow F$

E et F 2 ens. X : v.a.

f : fonction.

Mais : $f \circ X : \Omega \longrightarrow F$:

c'est 1 v.a., souvent notée

$f \circ X$ en probas, notée $f(X)$.

⚠ notaⁿ : Complète et interdite en dehors des probas : X n'est pas 1 élément de E donc $f(X)$ n'a pas de sens.

.... sauf si on décide que c'est 1 notation. (valable en probas uniquement).

$f(X)$ est appelée "v.a. image de X par f".

<u>Ex</u> : X^2, $|X|$ ... etc...

Prop : $f(X)$ est 1 v.a., dont la loi est à valeurs dans $f(X(\Omega))$.

Pour tout $y \in f(X(\Omega))$,

$$P_{f(X)}(\{y\}) = P(f(X) = y)$$

$$= P(\{\omega \in \Omega,\ f(X(\omega)) = y\})$$

$$= P(\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in f^{\leftarrow}(\{y\})\})$$

$$= P(X \in f^{\leftarrow}(\{y\})).$$

Ex. 2.2.12 : Soit X 1 v.a. à valeurs ds $\{-1, 0, 1\}$ t.q. $P(X=-1) = P(X=0) = P(X=1) = \frac{1}{3}$

⚠ Ω n'est pas donné.

Donc on connaît X que par sa loi :

$$P_X(\{-1\}) = P_X(\{0\}) = P_X(\{1\}) = \frac{1}{3}$$

P_X est la proba uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$.

Donner la loi de X^2, c'est donner
$P(X^2=1)$, $P(X^2=0)$, $P(X^2=-1)$.

idem pour X^3.

$$(X^2=1) = (X=1) \sqcup (X=-1)$$

$$P(X^2=1) = P(X=1) + P(X=-1) = \frac{2}{3}$$

$$(X^2=0) = (X=0)$$

donc $P(X^2=0) = P(X=0) = \frac{1}{3}$

$(X^2=-1) = \emptyset$ donc $P(X^2=-1) = 0$

On aurait aussi pu dire que X^2 est 1 v.a. à valeurs ds $\{0, 1\}$, et dc donner la loi de X^2, c'est donner $P(X^2=1)$ et $P(X^2=0)$.

X^3 est à valeurs ds $\{-1, 0, 1\}$.

$(X^3=1) = (X=1)$, $(X^3=-1) = (X=-1)$,

$(X^3=0) = (X=0)$

dc X^3 a la m̃ loi que X

(d'ailleurs, $\forall x \in \{-1, 0, 1\}$, $x^3 = x$, dc on

peut carrément dire que $X = X^3$ dc
naturellement elles ont la même loi).