XXVII Séries numériques

3 octobre 2019

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1 Prolégomènes

Définition 1.1.
À toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ on associe la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

- Cette suite (S_n) est appelée *série de terme général* u_n. On la note $\sum u_n$ ou $\sum_{n\geqslant 0} u_n$. L'indice n est bien entendu muet.
- Lorsque la suite (u_n) n'est définie qu'à partir d'un certain rang n_0, la série de terme général u_n est définie par la suite $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$, pour tout $n \geqslant n_0$. Elle est notée $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$.
- Le terme d'indice n de la suite (S_n) s'appelle la *somme partielle d'indice (ou d'ordre)* n, ou n^e *somme partielle* de la série $\sum u_n$.
- On dit que la série $\sum u_n$ *converge* si la suite (S_n) converge. Dans ce cas la limite de (S_n) est appelée *somme de la série* $\sum u_n$ et notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
  Dans le cas contraire on dit que la série *diverge*.
- La *nature* d'une série est sa convergence ou sa divergence. Deux séries sont dites *de même nature* si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

Remarque 1.2.
Une série n'est donc qu'une suite, et on peut donc lui appliquer tous les résultats connus sur les suites. Réciproquement, toute suite est une série (*cf.* 1.9).

Remarque 1.3.
Si (u_n) est complexe, notons (a_n) sa partie réelle et (b_n) sa partie imaginaire. Alors, en vertu du cours sur les suites, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent, et dans le cas de convergence, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Exemple 1.4 (Séries arithmétiques)**.**
Les séries de la forme $\sum na$, avec $a \in \mathbb{C}$, ne sont convergentes que si $a = 0$.

Dans tous les cas la somme partielle S_n vaut $a\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Définition 1.5.
Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série convergente, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{k\geqslant n} u_k$ converge également. Sa somme $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appelée *reste d'ordre (ou d'indice)* n de la série $\sum u_n$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k,$$

soit, en notant S_n la somme partielle d'ordre n et R_n le reste d'ordre n,

$$S_n + R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $N \geqslant n$. Alors,

$$\sum_{k=n+1}^{N} u_k = \sum_{k=0}^{N} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = S_N - S_n.$$

Comme (S_N) converge vers $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, alors $\sum_{k\geqslant n+1} u_k$ converge et sa somme est donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n.$$

□

Exemple 1.6 (Séries géométriques)**.**
Les séries de la forme $\sum z^n$, avec $z \in \mathbb{C}$, sont convergentes si et seulement si $|z| < 1$. Dans tous les cas la somme partielle S_n vaut $\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$ si $z \neq 1$, et $n+1$ si $z = 1$.

Si $|z| < 1$, alors la somme de la série est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Le reste de la série est

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} z^k = \frac{z^{n+1}}{1-z}.$$

Remarque 1.7.
Soit $\sum u_n$ une série convergente, dont on note S_n et R_n les restes à l'ordre n.

Alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S_n + R_n$ et $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

En particulier, si $|R_n| < \varepsilon$, on peut dire que S_n est une approximation de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ à ε près.

Proposition 1.8.
Deux séries dont les termes généraux sont égaux à partir d'un certain rang ont même nature.

Démonstration.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites égales à partir du rang N. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.

Alors pour tout $n \geqslant N$, $S_n = S'_n + (S_N - S'_N)$. □

Proposition 1.9 (Lien suite-série)**.**
L'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ u & \longmapsto & S = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \right)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$$

est un automorphisme d'espaces vectoriels.

Sa réciproque est l'application $\varphi^{-1} : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, où pour tout $S \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $u = \varphi^{-1}(S)$ est la suite définie par

$$u_0 = S_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Démonstration.
La linéarité de φ est facile à vérifier. Il est également aisé de montrer que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \mathrm{Id}$. □

Remarque 1.10.
En posant $S_{-1} = 0$, on peut écrire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} S_k - S_{k-1}.$$

Toute série peut donc être vue comme une série télescopique.

Proposition 1.11 (Séries télescopiques)**.**
La suite (u_n) et la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ ont même nature.

Dans le cas de convergence,

$$u_n - u_0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} - u_n.$$

Démonstration.
Nous savons déjà que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ont même nature.

De plus la somme partielle d'indice n de la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ vaut $u_{n+1} - u_0$ par sommation télescopique. Elle est donc égale au terme u_{n+1}, à une constante près, et a donc la même nature que la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Dans le cas de convergence, il reste à passer à la limite dans la relation $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}(u_{n+1} - u_n) = u_{N+1} - u_0$. □

Exemple 1.12.
La série $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{1}{n(n+1)}$ converge. En effet pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, et la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n>0}$ converge.

Nous pouvons même aller plus loin : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

On voit aussi que le reste d'ordre n vaut $\dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 1.13.
En simplifiant $\dfrac{(n+1)-n}{1+n(n+1)}$, montrer que $\sum \arctan \dfrac{1}{1+n+n^2}$ converge et calculer sa somme.

Proposition 1.14 (Linéarité de la somme)**.**
L'ensemble des suites dont la série est convergente, muni des lois $+$ et $\cdot$, forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application qui à une telle suite associe la somme de sa série est linéaire.

Démonstration.
Élémentaire, d'après les résultats sur les suites. □

Finissons par le résultat principal de cette première partie :

Théorème 1.15 (Divergence grossière)**.**
(i) Si la série $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
(ii) Si la suite (u_n) ne tend pas vers 0, on dit que la série $\sum u_n$ *diverge grossièrement.*

Démonstration. (i) Supposons que la série $\sum u_n$ converge. Puisque pour tout $n > 0$, $u_n = S_n - S_{n-1}$, alors u_n est la différence des termes généraux de deux suites convergeant vers la même limite. La suite (u_n) tend donc vers 0.
(ii) C'est la contraposée du premier point.
□

Exemple 1.16.
La série $\sum \cos n$ diverge grossièrement. En effet, en supposant que $\cos n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, la relation $\cos(2n) = 2\cos^2 n - 1$ donne une contradiction.

La réciproque du premier point du théorème 1.15 est fausse. On peut citer en exemple la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$, qui sera revue plus tard.

Donnons également l'exemple de la suite $u_n = \ln(n+2) - \ln(n+1) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)$. Évidemment, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Mais $\sum_{k=0}^{n} u_k = \ln(n+2)$, par sommation télescopique. La série $\sum u_n$ diverge donc.

2 Séries à termes réels positifs

Étudions maintenant le cas particulier où tous les termes d'une série sont des réels positifs ou nuls. La propriété fondamentale est dans ce cas la suivante.

Proposition 2.1.
Soit (u_n) une suite à valeurs positives et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Alors la suite (S_n) est croissante.

Démonstration.
Tout simplement, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$. □

Remarque 2.2.
Attention, une série peut ne pas être à terme positifs mais avoir toutes ses sommes partielles positives, comme la série $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n$.

Proposition 2.3.
Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Démonstration.
La suite des sommes partielles est croissante. Elle est donc convergente si et seulement si elle est majorée, comme conséquence directe du théorème de la limite monotone.
□

Proposition 2.4.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.
(i) Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ également et $0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
(ii) Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ également.

Démonstration.
Il suffit de remarquer que si (S_n) est la suite des sommes partielles de $\sum u_n$ et (S'_n) celle de $\sum v_n$, alors $0 \leqslant S_n \leqslant S'_n$.

(i) (S'_n) converge, donc est majorée, donc (S_n) est également majorée, et comme elle est croissante, elle converge également. Il reste alors à passer à la limite dans la relation $0 \leqslant S_n \leqslant S'_n$.

(ii) c'est le théorème de minoration.

□

Remarque 2.5.
Si la relation $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ n'est vérifiée qu'à partir d'un certain rang, le résultat du théorème 2.4 est valable, à ceci près que dans le point (i) on ne peut pas conclure que $0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$, mais seulement $0 \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} v_n$.

Exemple 2.6.
$\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ converge et

$$1 < \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < 2.$$

En effet, pour tout $n > 0$, $0 < \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$, donc $0 < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < 1$ car $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. Puisque pour $n = 0$, $\frac{1}{(n+1)^2} = 1$, il vient le résultat.

Corollaire 2.7.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives, (v_n) ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

(i) Si $u_n = O(v_n)$, alors la convergence de $\sum v_n$ entraîne celle de $\sum u_n$.

(ii) Si $u_n = o(v_n)$, alors la convergence de $\sum v_n$ entraîne celle de $\sum u_n$.

(iii) Si $u_n \sim v_n$ (donc (u_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang), alors $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature.

Démonstration. (i) $\frac{u_n}{v_n}$ est bornée par un certain réel $M > 0$, donc à partir d'un certain rang, $0 \leqslant u_n \leqslant M v_n$ car (u_n) et (v_n) sont positives. On conclut donc avec 2.4.

(ii) si $u_n = o(v_n)$, alors en particulier $u_n = O(v_n)$.

(iii) si $u_n \sim v_n$, alors $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.

□

Exemple 2.8.
Puisque $\sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \sim \frac{1}{2^n}$, d'après le résultat sur les séries géométriques, $\sum \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$ converge.

Pour pouvoir utiliser le dernier corollaire, nous avons besoin de « séries étalon », dont la nature est bien connue, et auxquelles on compare les séries à étudier. Les quelques exemples déjà étudiés font partie de ces séries de référence standard, mais la famille de séries la plus utilisée est celle des *séries de Riemann*, dont font partie la série harmonique et la série $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$.

Théorème 2.9.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration.
Si $\alpha = 1$, remarquons que $\frac{1}{n} \sim \ln(n+1) - \ln n$. Donc $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est de même nature que $\sum_{n \geqslant 1} (\ln(n+1) - \ln n)$, qui elle-même est de même nature que la suite $(\ln n)$ d'après 1.11, d'où la divergence.

Si $\alpha \neq 1$, $\frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right)$ (effectuer un développement asymptotique de $\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$ ou appliquer l'inégalité des accroissements finis à $x \mapsto x^{1-\alpha}$). La série de terme général $\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$ est de même nature que la suite $\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$, d'où le résultat.

On peut aussi remarquer que si $\alpha \leqslant 0$, la divergence est grossière, et si $0 < \alpha < 1$, la série diverge car $\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n}$. □

Le résultat classique suivant est une application directe de 2.7 et 2.9 :

Corollaire 2.10 (Règle $n^\alpha u_n$).
Soient (u_n) une suite réelle positive et $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) S'il existe $\alpha > 1$ telle que $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $\sum u_n$ converge.

(ii) S'il existe $\alpha \leqslant 1$ telle que $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.

(iii) Si la suite $(n^\alpha u_n)$ converge vers une limite non nulle, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. (i) si $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

(ii) si $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors $\frac{1}{n^\alpha} = o(u_n)$, et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

(iii) si la suite $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ ont même nature.

□

Exemple 2.11 (Séries de Bertrand).
Soient $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. On considère la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(\ln n)^\beta n^\alpha}$.

• Si $\alpha > 1$: il existe $\gamma \in]1, \alpha[$ et $n^\gamma \frac{1}{(\ln n)^\beta n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées, car $\alpha - \gamma > 0$. Ainsi la série converge.

• Si $\alpha < 1$: il existe $\gamma \in]\alpha, 1[$ et $n^\gamma \frac{1}{(\ln n)^\beta n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par croissances comparées, car $\alpha - \gamma < 0$. Ainsi la série diverge.

• Si $\alpha = 1$: si $\beta \leqslant 0$, le terme général est plus grand que $\frac{1}{n}$, donc la série diverge. Nous traiterons le cas $\beta > 0$ en 3.3.

3 Comparaison série-intégrale

Proposition 3.1.
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue par morceaux et décroissante.
Alors la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ est convergente.
De plus la suite définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Par décroissance de f, on a :

$$\forall t \in [k, k+1],\ 0 \leqslant f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k).$$

Puis, par intégration de cet encadrement sur $[k, k+1]$:

$$0 \leqslant f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \qquad (1)$$

et par sommation, pour $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \leqslant \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

ou encore

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) - f(0) \leqslant \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) - f(n). \quad (2)$$

Les suites $\sum_{k=0}^{n} f(k)$ et $\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ ont donc la même nature.
De plus, il vient $0 \leqslant f(n) \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$, soit $0 \leqslant u_n$. Ainsi (u_n) est minorée. Enfin, on a

$$u_{n+1} - u_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0.$$

La suite (u_n) est donc décroissante et minorée et converge donc. □

Remarque 3.2.
L'encadrement 1 est à rapprocher de la méthode des rectangles, vue dans le chapitre sur l'intégration.

Exemple 3.3.
Achevons l'étude des séries de Bertrand commencée en 2.11.
Si $\beta > 0$, considérons l'application $f : t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^\beta}$. Elle est continue et décroissante sur $[2, +\infty[$.

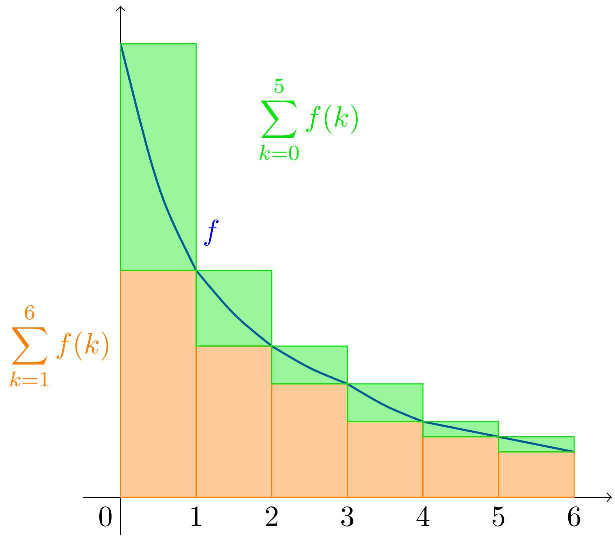

FIGURE 1 – Exemple de comparaison série-intégrale pour une fonction f décroissante, positive.

Si $\beta = 1$, une primitive de f est $F : t \mapsto \ln(\ln t)$ et $\int_2^n f(t)\,dt = F(n) - F(2)$. Or $F(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la série diverge.

Par comparaison, la série diverge également si $0 \leqslant \beta < 1$.

Si $\beta > 1$, une primitive de f est $F : t \mapsto \frac{(\ln t)^{1-\beta}}{1-\beta}$ et $\int_2^n f(t)\,dt = F(n) - F(2)$. Or $F(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $1 - \beta < 0$, donc la série converge.

Exercice 3.4.
Redémontrer le résultat 2.9 en utilisant 3.1.

Exemple 3.5.
On pose $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$. On sait alors que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)\,dt = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ converge, vers une limite notée γ et nommée *constante d'Euler*.

Exemple 3.6.
L'encadrement (2) permet d'avoir une estimation du reste d'une série convergente de la forme $\sum f(n)$ avec f décroissante.

Par exemple, soit $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$. Alors

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N} = \int_{n+1}^{N} \frac{dt}{t^2} \leqslant \sum_{n+1}^{N} \frac{1}{n^2} \leqslant \int_n^{N-1} \frac{dt}{t^2} \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{N-1}$$

et en passant à la limite quand $N \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$,

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \sum_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Si l'on veut une approximation de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ à 10^{-3} près, il suffit donc de choisir $n = 1000$ et de calculer $\sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 3.7.
On peut obtenir une approximation de cette somme en calculant seulement la somme d'une trentaine de termes. Comment ?

4 Séries absolument convergentes

Revenons à des séries à termes quelconques dans $\mathbb{K}$. Nous allons étudier une convergence plus restreinte que la convergence définie en 1.1 : la *convergence absolue*.

Définition 4.1.
On dit que la série $\sum u_n$ est *absolument convergente* si la série à termes positifs $\sum |u_n|$ converge.

Proposition 4.2.
Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration.
Commençons par établir le résultat pour des suites à valeurs réelles. Pour cela, définissons pour une suite (u_n) les

deux suites (u_n^-) et (u_n^+) définies par : $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$. Nous avons alors :

$$u_n^+ = \begin{cases} 0 & \text{si } u_n < 0 \\ |u_n| & \text{si } u_n \geqslant 0 \end{cases}$$

$$u_n^- = \begin{cases} 0 & \text{si } u_n > 0 \\ |u_n| & \text{si } u_n \leqslant 0 \end{cases}$$

$$0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n| \tag{3}$$

$$0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n| \tag{4}$$

$$u_n = u_n^+ - u_n^- \tag{5}$$

$$|u_n| = u_n^+ + u_n^-.$$

De (3) et (4) on tire que $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont convergentes car $\sum |u_n|$ est convergente.
De (5) on tire que $\sum u_n$ est convergente.

Étendons maintenant ce résultat au cas d'une suite (u_n) à valeurs complexes absolument convergente. Pour tout n, on a $0 \leqslant |\operatorname{Re} u_n| \leqslant |u_n|$, or la série $\sum |u_n|$ converge, donc la série $\sum |\operatorname{Re} u_n|$ est convergente, donc $\sum \operatorname{Re} u_n$ est absolument convergente, donc convergente d'après le premier point. De même $\sum \operatorname{Im} u_n$ converge. Donc $\sum u_n$ converge. ☐

La réciproque est fausse. Soit par exemple la suite de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} - \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1} = v_n - v_{n+1}$, avec $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. La série $\sum u_n$ est donc de même nature que la suite (v_n), elle converge donc.
Mais $|u_n| = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} \sim \dfrac{2}{n}$, donc $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente. On dit qu'une telle suite, convergente mais pas absolument, est *semi-convergente*. L'étude de telles suites est souvent délicate !

Corollaire 4.3.
Soit (u_n) une suite complexe et (v_n) une suite à termes positifs telles que $|u_n| = O(v_n)$. Alors si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ également.

Démonstration.
Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge absolument, donc converge. ☐

Remarque 4.4.
Une série à termes de signe constant converge absolument si et seulement si elle converge.

Proposition 4.5.
L'ensemble des séries absolument convergentes est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des séries convergentes.

Démonstration.
Élémentaire par l'inégalité triangulaire. ☐

Proposition 4.6.
Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Alors

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Démonstration.
Soit $N \in \mathbb{N}$, alors, par l'inégalité triangulaire,

$$\left| \sum_{n=0}^{N} u_n \right| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |u_n| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

On conclut par passage à la limite en N. ☐

5 Représentation décimale des réels

Notons $\mathbb{D}$ l'ensembles des *décimaux*, c'est-à-dire l'ensemble

$$\{\, x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N},\ 10^n x \in \mathbb{Z} \,\} = \left\{ \frac{k}{10^n} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rappelons le résultat suivant, démontré dans le chapitre sur les réels : si $x \in \mathbb{R}$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ appelé *approximation décimale par défaut de x à 10^{-n} près*. La suite (r_n) est alors une suite de décimaux inférieurs à x, et elle a x pour limite.
Nous pouvons alors donner le théorème suivant :

Théorème 5.1.
Pour tout $y \in [0,1[$:
• Si $y \notin \mathbb{D}$, il existe une unique suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $[\![0,9]\!]$ telle que $y = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n 10^{-n}$.
• Si $y \in \mathbb{D}$, il y a existence de deux telles suites : l'une finissant par une infinité de 0, l'autre par une infinité de 9. Ainsi, $0,1 = 1.10^{-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} 0.10^{-n} = 0.10^{-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} 9.10^{-n}$.

Dans tous les cas, il existe une unique suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $[\![0,9]\!]$ telle que $y = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n 10^{-n}$, et tel que pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant n_0$ tel que $y_n \neq 9$: la série $\sum_{n\geqslant 1} y_n 10^{-n}$ est alors appelée le *développement décimal propre* de y.

Démonstration.
Prouvons l'existence. Considérons la suite de terme général $r_n = \dfrac{\lfloor 10^n y\rfloor}{10^n}$ (approximation décimale par défaut de y), et posons $y_0 = \lfloor y \rfloor = 0$, et pour tout $n \geqslant 1$: $y_n = 10^n(r_n - r_{n-1}) = \lfloor 10^n y\rfloor - 10\left\lfloor 10^{n-1}y\right\rfloor$.
Les y_n sont donc bien des entiers de $[\![0,9]\!]$.
De plus, : $\sum_{n=1}^{N} y_n 10^{-n} = \sum_{n=1}^{N} (r_n - r_{n-1}) = r_N - r_0 = r_N$.
Puisque (r_n) a pour limite y, alors $y = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n 10^{-n}$.
Si la suite (y_n) ne converge pas vers 9, il s'agit bien du développement propre.
Sinon, la suite est stationnaire. Il existe un rang n_0 qui est le maximum de l'ensemble $\{n \in \mathbb{N},\ y_n \neq 9\}$. Le développement propre est alors obtenu en changeant y_{n_0} en $y_{n_0}+1$, et en changeant tous les termes suivants en 0. Nous avons toujours $y = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n 10^{-n}$ car $\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} 9.10^{-n} = 9.10^{-n_0-1}.\dfrac{1}{1-\frac{1}{10}} = 10^{-n_0}$.
Prouvons enfin l'unicité du développement propre. Supposons que y admette deux développements propres distincts : $y = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n 10^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n 10^{-n}$. Notons N le plus petit indice tel que $y_N \neq z_N$, et N' le plus petit indice strictement supérieur à N tel que $y_{N'} \neq 9$. Pour fixer les idées, supposons que $y_N < z_N$.

Alors :

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{n=1}^{N-1} y_n 10^{-n} + y_N 10^{-N} + \sum_{n=N+1}^{N'-1} y_n 10^{-n} \\
&\quad + y_{N'} 10^{-N'} + \sum_{n=N'+1}^{+\infty} y_n 10^{-n} \\
&< \sum_{n=1}^{N-1} y_n 10^{-n} + y_N 10^{-N} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} 9.10^{-n} \\
&< \sum_{n=1}^{N-1} z_n 10^{-n} + y_N 10^{-N} + 10^{-N} \\
&< \sum_{n=1}^{N-1} z_n 10^{-n} + (y_N+1) 10^{-N} \\
&< \sum_{n=1}^{N-1} z_n 10^{-n} + z_N 10^{-N} \\
&< y
\end{aligned}$$

ce qui est bien sûr absurde. □

6 Compléments

Voici deux critères de convergence qui peuvent être utiles.

Proposition 6.1 (Test de comparaison logarithmique)**.**
Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes réels strictement positifs telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.
Alors :
(i) si $\sum v_n$ converge, il en est de même de $\sum u_n$;
(ii) si $\sum u_n$ diverge, il en est de même de $\sum v_n$.

Démonstration.
Nous avons pour tout n, $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n}$, et donc par récurrence : $\dfrac{u_n}{v_n} \leqslant \dfrac{u_0}{v_0}$. En posant $\mu = \dfrac{u_0}{v_0}$, il vient donc : $u_n \leqslant \mu v_n$. Le résultat découle alors directement de 2.4. □

Proposition 6.2 (Règle de d'Alembert)**.**
Soit (u_n) une suite à termes réels strictement positifs.

(i) S'il existe $q \in]0,1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q$, alors la série $\sum u_n$ est convergente.

(ii) S'il existe $q \in [1,+\infty[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant q$, alors la série $\sum u_n$ est divergente.

(iii) en particulier, si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$:

- si $\ell \in [0,1[$, la série $\sum u_n$ est convergente ;
- si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ est divergente ;
- si $\ell = 1$, on ne peut rien dire, sauf dans le cas $u_n \leqslant u_{n+1}$ à partir d'un certain rang, où il y a divergence grossière.

Démonstration. (i) Posons $v_n = q^n$. Alors $\sum v_n$ converge, et pour tout n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Le critère de comparaison logarithmique 6.1 permet alors de conclure.

(ii) Même démonstration (ou même divergence grossière).

(iii) Découle des deux points précédents.

□

Exemple 6.3.

• Soient $x \in \mathbb{R}^*$ et $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$. Alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $\sum u_n$ converge, et de plus on en tire que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

• Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_n = n^\alpha$. Alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, et pourtant, suivant la valeur de α, $\sum u_n$ peut aussi bien diverger que converger.