

Devoir à la maison n° 16

À rendre le 8 avril

L'objectif de ce problème est de montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, ce symbole de sommation étant à comprendre comme voulant dire

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{6}.$$

Pour tout $N \geq 1$, on note $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$.

- 1) Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi]$. Montrer que

$$\int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right) dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Indication : on pourra procéder par intégration par parties.

- 2) On pose $A_N(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(nt)$. Montrer que pour tout $t \in]0, \pi]$:

$$A_N(t) = \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Que dire de cette relation pour $t = 0$?

- 3) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n \geq 1$,

$$\int_0^\pi (at^2 + bt) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}.$$

- 4) En déduire que pour tout $N \geq 1$,

$$\int_0^\pi (at^2 + bt) A_N(t) dt = S_N - \frac{\pi^2}{6}.$$

- 5) Montrer que $S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{6}$.

Indication : on justifiera proprement que la fonction $f : t \mapsto \frac{at^2 + bt}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ vérifie

les hypothèses de la première question.

6) Soit $\alpha > 1$.

a) Comparer pour tout $n \geq 2$: $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha}$, $\frac{1}{n^\alpha}$ et $\int_{n-1}^n \frac{dt}{t^\alpha}$.

b) En déduire pour tout $N \geq 1$ et $p > N$ un encadrement de $\sum_{n=N+1}^p \frac{1}{n^\alpha}$ par deux intégrales, que vous calculerez.

c) Soit $N \geq 1$. En déduire l'existence de la limite lorsque p tend vers $+\infty$ de $\sum_{n=N+1}^p \frac{1}{n^\alpha}$.

d) On note dorénavant $R_N(\alpha) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=N+1}^p \frac{1}{n^\alpha}$.

Déduire des encadrements précédents que $R_N(\alpha) \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha - 1)N^{\alpha-1}}$.

7) Montrer que

$$S_N \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right).$$

— FIN —