# XXI Espaces vectoriels de dimension finie

9 juin 2017

Dans tout ce chapitre, sauf mention expresse du contraire, $E$ désigne un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, valant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

# 1 Notion de dimension

## 1.1 Définition

**Définition 1.1.1.**
On dit que $E$ est *de dimension finie* si $E$ admet une famille génératrice finie.

**Exemple 1.1.2.** 1. $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie car engendré notamment par la famille des $\left((\delta_{ij})_{i\in[\![1,n]\!]}\right)_{j\in[\![1,n]\!]}$.

2. $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie. En effet, considérons une famille finie de polynômes $(P_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$. Alors toute combinaison linéaire de cette famille a un degré borné par le maximum des degrés des $P_i$. Or les éléments de $\mathbb{K}[X]$ ont des degrés arbitrairement élevés, donc la famille considérée ne peut être génératrice.
3. Soit $A$ un ensemble. L'espace vectoriel $\mathbb{K}^A$ est de dimension finie si et seulement si $A$ est fini [1].
4. Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pas nécessairement de dimension fini). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots, x_n$, $n$ vecteurs de $E$. Alors le sous-espace vectoriel de $E$ $\mathrm{Vect}\,(x_1, \dots, x_n)$ est un espace vectoriel de dimension finie.

**Remarque 1.1.3.**
Cas particulier : l'espace vectoriel $\{0\}$ est de dimension finie. En effet, toute famille en est génératrice (y compris la famille vide).

## 1.2 Théorème fondamental

Dans toute la suite du chapitre, $E$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

1. Le «si» est facile à voir, le «seulement si» est beaucoup plus difficile à démontrer ; on pourra utiliser le résultat 1.2.1

**Théorème 1.2.1.**
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $E$ admette une famille génératrice à $n$ éléments. Alors toute famille de $E$ contenant strictement plus de $n$ vecteurs est liée.

**Démonstration.**
Remarquons d'abord qu'il suffit de montrer que toute famille de $E$ contenant $n+1$ vecteurs est liée. En effet, une famille contenant strictement plus de $n$ vecteurs, en contient au moins $n+1$. Elle contient donc une sous-famille liée, donc est liée elle-même.
Montrons le résultat par récurrence sur $n$, en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$(H_n)$ : pour tout $\mathbb{K}$-ev $E$ admettant une famille génératrice à $n$ éléments, toute famille de $E$ contenant strictement plus de $n$ vecteurs est liée.

• Le cas $n = 0$ est celui où $E = \{ 0 \}$, et le résultat est alors vrai.
• Supposons $(H_n)$ vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$. Soient $(g_1, \dots, g_{n+1})$ une famille génératrice d'un $\mathbb{K}$-ev $E$, et $(v_1, \dots, v_{n+2})$ une famille de vecteurs de $E$.
Pour tout $i \in [\![1, n+2]\!]$, on note $v_i = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_{i,k} g_k$. Distinguons deux cas :
1er cas : si pour tout $i$, $\alpha_{i,1} = 0$, alors pour tout $i$, $v_i \in \mathrm{Vect}(g_2, \dots, g_{n+1})$. Si l'on note $F = \mathrm{Vect}(g_2, \dots, g_{n+1})$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $F$, qui admet une famille génératrice à $n$ éléments, et à $(v_1, \dots, v_{n+2})$ : $(v_1, \dots, v_{n+2})$ est liée dans $F$, donc aussi dans $E$, dont $F$ est un sev, et $(H_{n+1})$ est vraie.
2ème cas : il existe $i \in [\![1, n+2]\!]$ tel que $\alpha_{i,1} \neq 0$, par exemple $\alpha_{1,1} \neq 0$.
Alors

$$g_1 = \frac{1}{\alpha_{1,1}} \left( v_1 - \sum_{k=2}^{n+1} \alpha_{1,k} g_k \right),$$

d'où

$$\text{pour tout } i \in [\![2, n+2]\!], \quad v_i = \frac{\alpha_{i,1}}{\alpha_{1,1}} \left( v_1 - \sum_{k=2}^{n+1} \alpha_{1,k} g_k \right) + \sum_{k=2}^{n+1} \alpha_{i,k} g_k.$$

Si l'on pose $w_i = v_i - \frac{\alpha_{i,1}}{\alpha_{1,1}} v_1$, alors pour tout $i \in [\![2, n+2]\!]$ $w_i \in \mathrm{Vect}(g_2, \dots, g_{n+1})$. Par hypothèse de récurrence, $(w_2, \dots, w_{n+2})$ est liée. Il existe donc une combinaison linéaire nulle en les $w_i$, à coefficients non tous nuls. Il est facile de voir que cette combinaison linéaire est aussi une combinaison linéaire nulle en les $v_1, \dots, v_{n+2}$, à coefficients non tous nuls. Ainsi $(H_{n+1})$ est vraie. □

**Remarque 1.2.2.**
On notera que l'idée de la démonstration précédente est très proche de celle de l'algorithme du pivot de Gauss.

**Exemple 1.2.3.**
• Dans $\mathbb{R}^2$, toute famille de trois vecteurs est liée. Mais une famille de strictement moins de trois vecteurs n'est pas forcément libre !
• Dans $\mathbb{R}^3$, toute famille de quatre vecteurs est liée.
• Dans $\mathbb{R}_n[X]$, toute famille de $n+2$ polynômes est liée.
• Dans $\mathbb{C}_n[X]$, vu comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel, toute famille de $n+2$ polynômes est liée.
• Dans $\mathbb{C}_n[X]$, vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, toute famille de $2n+3$ polynômes est liée, tandis que la famille de $2n+2$ polynômes $(1, i, X, iX, \dots, X^n, iX^n)$ est libre.

Nous verrons dans la partie 1.4 que ce résultat (fondamental !) mène directement au corollaire suivant.

**Corollaire 1.2.4.**
Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases sont finies et de même cardinal.

## 1.3 Existence de bases

On peut développer une première idée afin d'obtenir une base dans un espace vectoriel de dimension finie, idée d'ailleurs déjà ébauchée dans le cours sur les espaces vectoriels. On part d'une famille génératrice finie de $E$ :
- si cette famille est libre, c'est une base ;
- sinon, un de ses vecteurs et « redondant », soit combinaison linéaire des autres, et on peut l'enlever pour obtenir une famille génératrice strictement plus petite.

En itérant, on obtient une suite de familles génératrices strictement décroissante (en taille) : on s'arrête donc et l'on obtient une base.

Nous allons voir un résultat plus fin qui nous permet de retrouver ceci : le théorème de la base incomplète.

**Lemme 1.3.1.**
Soit $p \in \mathbb{N}$ et $(x_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ une famille de vecteurs de $E$.

La famille $(x_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ est liée si et seulement s'il existe $k \in [\![1,p]\!]$ vérifiant

$$x_k \in \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_{k-1}).$$

Autrement dit si et seulement si l'un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des précédents.

**Démonstration.**
Supposons que la famille est liée. Alors il existe une combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ non triviale de valeur 0. On note $k$ le plus grand entier $i$ tel que $\lambda_i \neq 0$. Alors on a successivement :

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = 0,$$

$$x_k = \frac{1}{\lambda_k} \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i x_i,$$

$$x_k \in \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_{k-1}).$$

L'implication réciproque est évidente. □

**Corollaire 1.3.2.**
Soit
- $p \in \mathbb{N}$,
- $(x_1, \dots, x_p)$ une famille libre de vecteurs de $E$,
- $x$ un vecteur de $E$.

Alors

$$(x_1, \dots, x_p, x) \text{ est liée} \iff x \in \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_p).$$

**Démonstration.**
Supposons $(x_1, \dots, x_p, x)$ liée, et posons $x_{p+1} = x$. D'après le lemme, il existe $k \in 1, p+1$ vérifiant $x_k \in \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_{k-1})$. On ne peut avoir $k \leqslant p$ puisque la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre. Donc $k = p+1$ et on a $x \in \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.

□

**Théorème 1.3.3** (de la base incomplète)**.**
Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel engendré par une famille $\mathscr{G}$ finie, et $\mathscr{L}$ une famille libre de $E$. Alors on peut compléter $\mathscr{L}$ en une base de $E$ en lui rajoutant des vecteurs de $\mathscr{G}$.

**Remarque 1.3.4.**
Ce théorème est vrai pour tout espace vectoriel $E$ et non seulement pour ceux de dimension finie. La démonstration est relativement délicate dans le cas général (on utilise en général le lemme de Zorn, équivalent à l'axiome du choix), nous nous contenterons de la donner dans le cas de la dimension finie.

**Démonstration.**
Une démonstration possible est de considérer l'algorithme suivant :

```
𝓑 ← 𝓛
# Invariant de boucle : 𝓑 est libre et 𝓛 ⊂ 𝓑
# Variant : Card 𝓖 − Card 𝓑
TantQue 𝓖 ⊄ Vect 𝓑 Faire
    Choisir v ∈ (𝓖 \ Vect 𝓑)
    𝓑 ← 𝓑 ∪ { v }
FinTantQue
```

$\mathscr{L}$ est libre et l'invariant est clairement vérifié avant l'entrée dans la boucle.

Si l'invariant est vérifié, au début d'un tour de boucle, $\mathscr{B}$ est libre et $\mathscr{G} \setminus \operatorname{Vect} \mathscr{B} \neq \varnothing$, donc on peut effectivement choisir `v` dans $\mathscr{G} \setminus \operatorname{Vect} \mathscr{B}$.

Alors puisque $\mathscr{B}$ est libre, d'après le lemme 1.3.1, $\mathscr{B} \cup \{ \mathtt{v} \}$ est libre également.

À la fin du tour de boucle, $\mathscr{B}$ est donc toujours libre, est toujours un sur-ensemble de $\mathscr{L}$ et un sous-ensemble de $\mathscr{G}$, l'invariant est donc encore vérifié.

Par ailleurs, $\mathscr{B}$ est libre et $\mathscr{G}$ est génératrice, donc, avec le lemme fondamental, $\operatorname{Card} \mathscr{B} \geqslant \operatorname{Card} \mathscr{G}$. Ainsi $\operatorname{Card} \mathscr{G} - \operatorname{Card} \mathscr{B}$ est un entier naturel. De plus, à chaque étape de la boucle, on ajoute à $\mathscr{B}$ un élément de $\mathscr{G}$ qui n'est pas déjà dans $\operatorname{Vect} \mathscr{B}$, donc pas déjà dans $\mathscr{B}$, donc le cardinal de $\mathscr{B}$ augmente strictement. Donc à chaque tour de boucle $\operatorname{Card} \mathscr{G} - \operatorname{Card} \mathscr{B}$ décroît strictement, donc l'algorithme termine.

À la fin de l'exécution de l'algorithme, $\mathscr{B}$ est une famille libre, et $\mathscr{G} \subset \operatorname{Vect} \mathscr{B}$. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $E$. De plus, on a $\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{G}$ donc on a bien construit $\mathscr{B}$ en rajoutant à $\mathscr{L}$ des vecteurs de $\mathscr{G}$. $\square$

**Exemple 1.3.5.**
Compléter $((1,2,0,0),(1,0,1,0))$ en une base de $\mathbb{R}^4$.

Le théorème de la base incomplète a deux corollaires. Le premier est fondamental.

**Corollaire 1.3.6.**
Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base finie.

**Démonstration.**
Il suffit d'appliquer le théorème de la base incomplète avec la famille vide et une famille génératrice finie. $\square$

**Remarque 1.3.7.**
Cas particulier : l'espace vectoriel $\{0\}$ a pour base la famille vide. C'est la seule famille libre (donc la seule base) de cet espace vectoriel, puisque toute famille d'au moins un élément contient le vecteur nul et est donc liée.

Il peut sembler étonnant (au premier abord) que le résultat qui suit soit un corollaire du théorème de la base incomplète.

**Corollaire 1.3.8.**
De toute famille génératrice finie on peut extraire une base.

**Démonstration.**
Lorsque la famille génératrice considérée est finie, il suffit là encore d'appliquer le théorème de la base incomplète avec la famille vide et une famille génératrice finie : en complétant la famille vide avec des vecteurs de la famille génératrice considérée, on obtient bien une base extraite de la famille génératrice de départ.

Lorsque la famille génératrice considérée est infinie, on peut montrer le résultat en utilisant l'algorithme donné pour la démonstration du théorème de la base incomplète mais un problème se pose, celui de la terminaison. Celle-ci peut être justifiée par le théorème fondamental 1.2.1 : dans un espace de dimension finie, le nombre d'éléments d'une famille libre est majoré par un entier $p$, où $p$ est par exemple le cardinal d'une famille génératrice finie de $E$. Or le nombre d'éléments de la famille $\mathscr{B}$ croît strictement à chaque tour de boucle, $p$ moins ce nombre d'éléments est donc un variant de l'algorithme, donc celui-ci termine. $\square$

## 1.4 Existence de la dimension

**Théorème 1.4.1** (de la dimension)**.**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les bases ont même nombre d'éléments.

**Démonstration.**
$E$ étant de dimension finie, il admet une base $\mathscr{B}_1$ finie.
Soit $\mathscr{B}_2$ une seconde base de $E$. Étant libre, elle a moins d'éléments que $\mathscr{B}_1$.
Mais réciproquement, $\mathscr{B}_2$ est génératrice et $\mathscr{B}_1$ est libre, donc $\mathscr{B}_1$ a moins d'éléments que $\mathscr{B}_2$, ce qui montre que toutes les bases de $E$ ont le même nombre d'éléments que $\mathscr{B}_1$. D'où le résultat. □

**Définition 1.4.2.**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle *dimension du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$* et on note $\dim_{\mathbb{K}} E$ (voire $\dim E$ si le contexte permet de savoir clairement ce qu'est $\mathbb{K}$) le nombre d'éléments commun à toutes les bases de $E$.

On notera parfois $\dim_{\mathbb{K}} E < +\infty$ l'assertion «le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ est de dimension finie».

**Remarque 1.4.3.**
Pour que cette définition ait un sens il est nécessaire et suffisant d'être assuré :
- d'une part que toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont toutes le même nombre d'éléments
- d'autre part que tout espace vectoriel de dimension finie possède bien au moins une base.

Ce qu'on a bien vérifié plus haut.

**Remarque 1.4.4.**
Cas particulier : $\dim\{0\} = 0$.

**Exemple 1.4.5.**
Soit $n, p \in \mathbb{N}$.
- $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$
- $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[X] = n + 1$
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_n[X] = 2(n + 1)$
- $\dim_{\mathbb{K}} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C}) = 2np$

**Proposition 1.4.6.**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
- Toute famille libre de $E$ a au plus $\dim_{\mathbb{K}} E$ éléments.
- Toute famille génératrice de $E$ a au moins $\dim_{\mathbb{K}} E$ éléments.

**Démonstration.**
C'est une conséquence directe du théorème fondamental 1.2.1. □

**Proposition 1.4.7.**
1. Toute famille libre maximale d'éléments de $E$ est une base de $E$.
2. Toute famille génératrice de $E$ minimale est une base de $E$.

**Remarque 1.4.8.**
Par famille libre maximale, il faut entendre : «famille libre à laquelle on ne peut rajouter un vecteur sans la rendre liée». Symétriquement, par famille génératrice minimale, il faut entendre «famille génératrice à laquelle on ne peut enlever un vecteur sans lui faire perdre son caractère générateur».

**Démonstration.**
Le résultat est vrai même si on est dans le cadre d'un espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie (auquel cas les familles considérées sont infinies).
1. Soit $\mathscr{F}$ une famille libre maximale. D'après le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base $\mathscr{B}$. La famille $\mathscr{B}$ est libre. Or la famille $\mathscr{F}$ est maximale, donc $\mathscr{F} = \mathscr{B}$.
2. Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice minimale. D'après le théorème de la base extraite, on peut en extraire une base $\mathscr{B}$. La famille $\mathscr{B}$ est génératrice. Or la famille $\mathscr{G}$ est minimale, donc $\mathscr{G} = \mathscr{B}$.

□

**Proposition 1.4.9** (Caractérisation des bases)**.**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. et soit $\mathscr{F}$ une famille constituée d'exactement $\dim_{\mathbb{K}} E$ vecteurs de $E$.

Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes.

1. $\mathscr{F}$ est une base de $E$.
2. $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de $E$.
3. $\mathscr{F}$ est une famille libre de $E$.

**Démonstration.**
Il est clair que si $\mathscr{F}$ est une base alors elle est libre et génératrice.

Supposons que $\mathscr{F}$ est génératrice. Toute famille génératrice ayant au moins $\dim E$ vecteurs, on ne peut enlever le moindre vecteur à $\mathscr{F}$ sans lui faire perdre son caractère générateur. Donc elle est génératrice minimale, c'est donc une base.

De même, supposons que $\mathscr{F}$ est libre. Toute famille libre ayant au plus $\dim E$ vecteurs, on ne peut ajouter le moindre vecteur à $\mathscr{F}$ sans la rendre liée. Donc elle est libre maximale, donc c'est une base. □

**Exemple 1.4.10.**
Soient $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et

$$\begin{aligned} A &= (X-b)(X-c)(X-d), \\ B &= (X-a)(X-c)(X-d), \\ C &= (X-a)(X-b)(X-d), \\ D &= (X-a)(X-b)(X-c). \end{aligned}$$

Montrer que $(A, B, C, D)$ est une base de $\mathbb{K}_3[X]$.

## 1.5 Classification en dimension finie

**Proposition 1.5.1.**
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$. Alors $E$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

**Démonstration.**
On a $\dim E = n$, donc on peut trouver une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $E$.

Posons alors

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \end{array}.$$

On peut alors remarquer que

1. $\varphi$ est une application linéaire,
2. $\varphi$ est injective (car la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre),
3. $\varphi$ est surjective (car la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de $E$).

La fonction $\varphi$ est donc un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$ sur $E$. $E$ et $\mathbb{K}^n$ sont donc isomorphes. □

**Proposition 1.5.2.**
Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Supposons que $E$ est de dimension finie.

Alors $E$ et $F$ sont isomorphes si et seulement si $F$ est aussi de dimension finie et $\dim E = \dim F$.

**Démonstration.**
Notons tout d'abord $n$ la dimension de $E$ et choisissons $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$.

Supposons $E$ et $F$ isomorphes. On peut alors trouver un isomorphisme $\varphi$ de $E$ sur $F$. $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ est alors une base de $F$. Donc $F$ est de dimension finie et $\dim F = n = \dim E$.

Réciproquement, supposons que $F$ soit de dimension finie, égale à celle de $E$. Alors d'après la proposition 1.5.1 $E$ et $F$ sont tous les deux isomorphes à $\mathbb{K}^n$, donc sont isomorphes. □

**Corollaire 1.5.3.**
En particulier, tout espace vectoriel $E$ est de dimension finie $n$ si et seulement si $E$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

**Proposition 1.5.4.**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Notons $L$ l'ensemble des entiers $n$ tels qu'il existe au moins une famille libre de $E$ à $n$ éléments. Alors

— ou bien $E$ est de dimension finie et alors $L = [\![0, \dim E]\!]$.

— ou bien $E$ n'est pas de dimension finie et alors $L = \mathbb{N}$.

En particulier, $E$ est de dimension finie si et seulement si $L$ est majoré.

**Démonstration.**
Si $E$ est de dimension finie, on a nécessairement $L \subset [\![0, \dim E]\!]$. Notons alors $\mathscr{B}$ une base. $\mathscr{B}$ est une famille libre à $\dim E$ élément et toute sous-famille de $\mathscr{B}$ est encore libre. Donc $[\![0, \dim E]\!] \subset L$. D'où l'égalité.

Supposons désormais que $E$ n'est pas de dimension finie. Montrons qu'alors $L$ n'est pas majoré.

Par l'absurde supposons que $L$ possède un majorant. Comme $L$ est un ensemble d'entier non vide (il contient 0), il admet alors un maximum $M$. Soit alors $\mathscr{F}$ une famille libre à $M$ éléments. Si on rajoute un élément à $\mathscr{F}$ on obtient une famille à $M+1$, or $M+1 \notin L$ donc cette sur-famille ne peut être libre. Donc $\mathscr{F}$ est maximale, donc c'est une base de $E$, donc $E$ est de dimension finie ce qui est absurde.

$L$ n'est donc pas majoré, donc pour tout entier $n$ il existe $p \in L$ vérifiant $p \geqslant n$. On peut donc trouver une famille libre à $p$ éléments. Toute sous-famille de cette famille en est libre, en prenant une sous-famille arbitraire à $n$ élément, on voit donc qu'on a $n \in L$.

Donc $L \subset \mathbb{N}$, donc $L = \mathbb{N}$. □

## 1.6 Exemples avancés

**Exemple 1.6.1.**

• Les solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre forment un espace vectoriel de dimension 1.

• Les solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants forment un espace vectoriel de dimension 2.

**Proposition 1.6.2.**
Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

Alors $E \times F$ est de dimension finie et

$$\dim_{\mathbb{K}}(E \times F) = \dim_{\mathbb{K}} E + \dim_{\mathbb{K}} F.$$

Plus précisément, posons $n = \dim E$ et $p = \dim F$ et choisissons $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$ et $(f_1, \dots, f_p)$ une base de $F$. Alors $(b_i)_{i \in [\![1,n+p]\!]}$ est une base de $E \times F$, où

$$\begin{cases} b_i = (e_i, 0_F) & \text{pour } i \in [\![1,n]\!], \\ b_{n+i} = (0_E, f_i) & \text{pour } i \in [\![1,p]\!]. \end{cases}$$

**Démonstration.**
Un vecteur $z \in E_1 \times E_2$ s'écrit de manière unique $(x, y) = (x, 0_F) + (0_E, y)$. De plus, $x$ (resp. $y$) s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des $e_i$ (resp. $f_i$).
L'existence assure l'aspect générateur de la famille. L'unicité assure la iberté. □

**Remarque 1.6.3.**
Ce résultat assure qu'il existe un isomorphisme entre $E \times F$ et $\mathbb{K}^{n+p}$. Donnons un tel isomorphisme.

— Dans le cas où $E = \mathbb{K}^n$ et $F = \mathbb{K}^p$, on dispose de l'isomorphisme évident

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^{n+p} & \to & \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^p \\ (x_1, \dots, x_{n+p}) & \mapsto & ((x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_p)) \end{array}.$$

— Dans le cas général, il est assez naturel également : on peut utiliser cette remarque et la proposition 1.5.1.
On a $E \cong \mathbb{K}^n$ et $F \cong \mathbb{K}^p$, d'où $E \times F \cong \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^p \cong \mathbb{K}^{n+p}$.
Plus précisément, posons

$$\psi : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^{n+p} & \to & E \times F \\ (x_1, \dots, x_{n+p}) & \mapsto & \left( \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \sum_{k=1}^{p} x_{n+k} f_k \right) \end{array}.$$

Remarquons successivement :
1. $\psi$ est linéaire,
2. $\psi$ est injective (les familles $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et $(f_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ étant libres),
3. $\psi$ est surjective (les familles $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et $(f_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ étant génératrice).

Donc $E \times F$ est isomorphe à $\mathbb{K}^{n+p}$. En particulier, d'une part $\dim E \times F = n + p$ et d'autre part l'image de la base canonique de $\mathbb{K}^{n+p}$ est une base de $E \times F$. Or cette image n'est autre que la famille $(b_i)_{i \in [\![1,n+p]\!]}$ donnée dans l'énoncé de la proposition.

**Proposition 1.6.4.**
Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Alors $\mathscr{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $\dim \mathscr{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$.

**Démonstration.**
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$.
On considère $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathscr{L}(E,F) & \to & F^n \\ u & \mapsto & (u(e_k))_{1 \leqslant k \leqslant n} \end{array}$.
Il est aisé de vérifier que $\varphi$ est linéaire.
En se souvenant que pour toute famille $f_1, \dots, f_n$ de $F$ il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ tel que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $u(e_k) = f_k$, on constate que $\varphi$ est bijective.
Par conséquent $\mathscr{L}(E, F)$ et $F^n$ sont isomorphes, ils ont donc même dimension. En utilisant la proposition 1.6.2 et une récurrence sans difficulté, $F^n$ a pour dimension $n \dim F = \dim E \times \dim F$, d'où le résultat. □

# 2 Sous-espaces vectoriels en dimension finie

## 2.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel

**Proposition 2.1.1.**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$.

Alors $F$ est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$.

De plus $\dim F = \dim E$ si et seulement si $F = E$.

**Démonstration.**
Toute famille libre de $F$ est une famille libre d'éléments de $E$ et a donc un nombre d'élément majoré par $\dim E$. Donc d'après la proposition 1.5.4, $F$ est de dimension finie, et $\dim F \leqslant \dim E$.

En outre on a trivialement $F = E \Rightarrow \dim F = \dim E$.

Réciproquement, supposons $\dim F = \dim E$ et montrons $F = E$. Alors on peut trouver une base $\mathscr{B}$ de $F$ comportant $\dim E$ éléments. On a $\operatorname{Vect}(\mathscr{B}) = F$. En outre, $\mathscr{B}$ est une famille libre de $F$ donc de $E$ or elle comporte $\dim E$ éléments, donc d'après 1.4.9, c'est une famille génératrice de $E$, donc $\operatorname{Vect}(\mathscr{B}) = E$. On a donc $F = E$. □

**Définition 2.1.2.**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (non nécessairement de dimension fini). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de $n$ vecteurs. On appelle *rang de la famille* $(x_1, \dots, x_n)$ et on note $\operatorname{rg}(x_1, \dots, x_n)$ la dimension de l'espace vectoriel qu'ils engendrent :

$$\operatorname{rg}(x_1, \dots, x_n) = \dim \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n).$$

**Remarque 2.1.3.**
$\operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ étant engendré par la famille de $n$ vecteurs $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$, il s'agit d'un espace vectoriel de dimension finie, et sa dimension est au plus $n$.

Donc le rang de $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est bien défini et $\operatorname{rg}(x_1, \dots, x_n) \leqslant n$.

De manière directe, ce rang vaut $n$ si et seulement si la famille est libre.

De plus, $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est génératrice si et seulement si $E$ est de dimension finie et $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est de rang $\dim E$.

De plus, si $E$ est de dimension finie $p$, alors $\operatorname{rg}(x_1, \dots, x_n) \leqslant p$.

## 2.2 Existence de supplémentaires

**Théorème 2.2.1** (Existence de supplémentaires)**.**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$.

Alors $F$ admet un supplémentaire $S$ dans $E$.

**Remarque 2.2.2.**
Ce théorème est vrai pour tout espace vectoriel $E$ et non seulement pour ceux de dimension finie. Nous nous contenterons de donner la démonstration dans le cas de la dimension finie, mais la généralisation aux cas infini est relativement immédiate.

**Démonstration.**
Supposons que $E$ soit de dimension finie. Alors, on peut choisir une base $(b_1, \dots, b_p)$ de $F$ où $p = \dim F$.

Cette base de $F$ est une famille libre de vecteurs de $F$, donc de $E$. On peut donc la compléter en une famille $(b_1, \dots, b_n)$ de $E$, avec $n = \dim E \geqslant p$.

Posons alors $S = \operatorname{Vect}(b_{p+1}, \dots, b_n)$. La famille $(b_{p+1}, \dots, b_n)$, sous-famille d'une base de $E$, est une famille libre. De plus, elle est génératrice de $S$, donc c'est une base de $S$.

On a donc trouvé une base de $F$ et une base de $S$ dont la réunion est une base de $E$. $F$ et $S$ sont donc supplémentaires. □

Ne parlez jamais **du** supplémentaire : en effet tout sev admet en fait une infinité de supplémentaires ! Regardez l'exercice suivant pour vous convaincre que dans la démonstration précédente, il existe une infinité de choix pour compléter une famille libre en une base, ce qui mène à une infinité de supplémentaires à un sev, sans rien supposer sur l'espace vectoriel de départ.

**Exercice 2.2.3.**
Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-ev $E$. Soit $x$ un vecteur non nul de $F$ et $(y_1, y_2, \dots, y_p)$ une base de $G$.

1. Montrer que les vecteurs $x+y_1, x+y_2, \dots, x+y_p$ engendrent un sous-espace supplémentaire

de $F$, noté $G_x$.

2. Montrer que si $x, x' \in F$ tel que $x \neq x'$ alors $G_x \neq G_{x'}$. En déduire que $F$ admet une infinité de sous-espaces supplémentaires distincts (sauf dans des cas triviaux : lesquels ?)

**Exemple 2.2.4.**
Déterminer un supplémentaire de $F = \operatorname{Vect}((1,2,0,0),(1,0,0,-3))$ dans $\mathbb{R}^4$.

## 2.3 Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels

**Proposition 2.3.1** (Formule de Grassmann)**.**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces de dimensions finies de $E$. Alors $F+G$ est de dimension finie et

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

En particulier

$$\dim(F+G) \leqslant \dim F + \dim G$$

et l'égalité a lieu si et seulement si $F$ et $G$ sont en somme directe.

**Démonstration.**

1. Montrons tout d'abord le résultat dans le cas où la somme $F+G$ est directe : On peut alors choisir une base de $F$ et une base de $G$, elles ont respectivement $\dim F$ et $\dim G$ éléments. Leur réunion possède donc $\dim F + \dim G$ éléments et est une base de $F \oplus G$. Donc $F \oplus G$ est de dimension finie et
$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$$
(c'est bien un cas particulier car alors $\dim(F \cap G) = \dim\{0\} = 0$).
2. Montrons maintenant le résultat dans le cas général. Remarquons tout d'abord que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $F$ qui est de dimension finie. Donc $F \cap G$ possède un supplémentaire $S$ dans $F$ et $\dim F = \dim(F \cap G) + \dim S$, d'où
$$\dim S = \dim F - \dim(F \cap G)$$
De plus
$$\begin{aligned} S \cap G &= (S \cap F) \cap G \\ &= S \cap (F \cap G) \\ &= \{0\}. \end{aligned}$$
Comme $F \cap G \subset G$, on a $F+G = (S+(F\cap G))+G = S+G$, donc $S$ et $G$ sont supplémentaires dans $F+G$. Donc $F+G$ est de dimension finie et
$$\begin{aligned} &\dim(F+G) = \dim S + \dim G, \\ &\dim(F+G) = \dim F - \dim(F \cap G) + \dim G. \end{aligned}$$

□

**Exercice 2.3.2.**
Soit $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ deux plans distincts de $\mathbb{R}^3$ (sev de dimension 2). Montrer que $\mathscr{P}_1 + \mathscr{P}_2 = \mathbb{R}^3$. Que peut-on dire de $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ ?

**Proposition 2.3.3.**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies.

Alors si $F$ et $G$ sont supplémentaires, les trois propositions suivantes sont vraies :

1. $F \cap G = \{0\}$,
2. $F + G = E$,
3. $\dim E < +\infty$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.

Réciproquement il suffit que deux de ces propositions soient vraies pour que $F$ et $G$ soient supplémentaires.

**Démonstration.**
Pour le sens direct, les deux premières propositions sont des conséquences connues, la troisième est la conséquence de la formule de Grassmann.

Pour le sens réciproque, étudions les différentes possibilités :

1. Supposons 1 et 2. Alors $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$.
2. Supposons 1 et 3. Alors
$$\begin{aligned} \dim(F+G) &= \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) \\ &= \dim F + \dim G \\ &= \dim E. \end{aligned}$$
Or $F+G$ est un sous-espace vectoriel de $E$ donc $F+G=E$. Donc $F$ et $G$ sont supplémentaires.
3. Supposons 2 et 3. Alors
$$\begin{aligned} \dim E &= \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) \\ \text{et } \dim E &= \dim F + \dim G. \end{aligned}$$
Ainsi, $\dim(F \cap G) = 0$, et donc $F \cap G = \{0\}$. $F$ et $G$ sont donc supplémentaires.

□

**Corollaire 2.3.4.**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Alors tous les supplémentaires de $F$ ont même dimension : $\dim E - \dim F$.

**Démonstration.**
$E$ est de dimension finie donc $F$ et tous ses supplémentaires également. D'après ce qui précède tout supplémentaire $S$ de $F$ vérifie $\dim F + \dim S = \dim E$, donc $\dim S = \dim E - \dim F$. □

**Exemple 2.3.5.**
Regarder tous ces points de vue dans $\mathbb{R}^3$ avec $\mathscr{P} = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \,\}$ et $\mathscr{D} = \mathrm{Vect}((1, -1, 1))$.

**Proposition 2.3.6.**
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $F_1, \ldots, F_n$, $n$ sous-espaces vectoriels de dimension finie. Alors

$$\dim \sum_{k=1}^{n} F_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \dim F_k$$

et on a l'égalité si et seulement si la somme des $F_k$ pour $k = 1, \ldots, n$ est directe.

**Démonstration.**
L'inégalité se déduit directement de la formule de Grassmann par récurrence. Montrons le cas de l'égalité. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ l'assertion «Toute famille $F_1, \ldots, F_n$ de sous-espaces vectoriels de dimension finie vérifiant

$$\dim \sum_{k=1}^{n} F_k = \sum_{k=1}^{n} \dim F_k$$

est en somme directe» et montrons $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$.

Montrons $P(2)$ (on pourrait en fait montrer $P(0)$ ou $P(1)$, le plus long est de comprendre ce que dit l'énoncé dans ce cas). Soit $F_1$ et $F_2$ deux sous-espaces vectoriels de dimension finie vérifiant $\dim (F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2$. On a déjà vu qu'alors, $F_1$ et $F_2$ sont en somme directe.

Montrons $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$. Soit $F_1, \ldots, F_{n+1}$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie vérifiant

$$\dim \sum_{k=1}^{n+1} F_k = \sum_{k=1}^{n+1} \dim F_k. \tag{1}$$

On a

$$\dim \sum_{k=1}^{n+1} F_k \leqslant \dim \sum_{k=1}^{n} F_k + \dim F_{n+1}$$
$$\text{et } \dim \sum_{k=1}^{n} F_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \dim F_k.$$

Si l'une au moins de ces inégalités était stricte, on ne pourrait avoir l'égalité (1). On a donc

$$\dim \sum_{k=1}^{n} F_k = \sum_{k=1}^{n} \dim F_k.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, les $F_k$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ sont en somme directe. De plus

$$\dim \left( \bigoplus_{k=1}^{n} F_k + F_{n+1} \right) = \dim \bigoplus_{k=1}^{n} F_k + \dim F_{n+1},$$

donc $\bigoplus_{k=1}^{n} F_k$ et $F_{n+1}$ sont en somme directe, donc $F_1$, $\ldots$, $F_{n+1}$ sont en somme directe.

On a donc $P(n+1)$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$. □

# 3 Applications linéaires en dimension finie

## 3.1 Expression d'une application linéaire en dimension finie

**Proposition 3.1.1.**
Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies respectives $n$ et $p$ et soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$.

Soit alors $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$ et $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_p)$ une base de $F$.

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, notons $a_{1k}, \ldots, a_{pk}$ les coordonnées de $\varphi(e_k)$ dans la base $\mathscr{F}$.

Soit $u \in E$. Notons $x_1, \ldots, x_n$ ses coordonnées dans la base $\mathscr{E}$, et $y_1, \ldots, y_p$ les coordonnées de $\varphi(u)$ dans la base $\mathscr{F}$.

Alors, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on a

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k.$$

**Démonstration.**
On a :

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \varphi(e_k)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(x_k \sum_{i=1}^{p} a_{ik} f_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k a_{ik}\right) f_i.\end{aligned}$$

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, la $i^{\text{e}}$ coordonnée de $\varphi(u)$ est donc $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$. □

**Remarque 3.1.2.**
On sait par ailleurs que pour tout choix d'une famille de scalaires $(a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!]}$, il existe une application $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, les coordonnées de $\varphi(e_k)$ dans la base $\mathscr{F}$ soient $a_{1k}, \dots, a_{pk}$.

## 3.2 Théorème du rang

**Proposition 3.2.1.**
Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

Supposons qu'il existe un supplémentaire $S$ de $\operatorname{Ker} u$ dans $E$.

Alors $u$ réalise un isomorphisme de $S$ sur $\operatorname{Im} u$ (ou, si l'on préfère, $u\big|_S^{\operatorname{Im} u} : S \to \operatorname{Im} u$ est un isomorphisme).

**Démonstration.**
Notons $\varphi$ la restriction de $u$ à $S$ au départ et à $\operatorname{Im} u$ à l'arrivée. Il est clair que $\varphi$ est bien définie et que c'est une application linéaire de $S$ dans $\operatorname{Im} u$.

— Montrons que $\varphi$ est surjective. Soit $y \in \operatorname{Im} u$. Montrons qu'il existe $s \in S$ vérifiant $\varphi(s) = y$.
Pour cela, remarquons tout d'abord qu'il existe $x \in E$ vérifiant $u(x) = y$. Comme $S$ et $\operatorname{Ker} u$ sont supplémentaires dans $E$, il existe $s \in S$ et $k \in \operatorname{Ker} u$ vérifiant $x = s + k$. On a alors $u(x) = u(s) + u(k) = u(s) + 0$. Donc $\varphi(s) = u(s) = y$.
$\varphi$ est donc surjective.

— Montrons que $\varphi$ est injective. Pour cela, il suffit de montrer $\operatorname{Ker} \varphi \subset \{ 0 \}$.
Soit $k \in \operatorname{Ker} \varphi$. On a $\varphi(k) = 0$, donc $u(k) = 0$, donc $k \in \operatorname{Ker} u$. Or $k \in S$, donc $k \in \operatorname{Ker} u \cap S$. Or $\operatorname{Ker} u$ et $S$ sont supplémentaires, donc $k = 0$.
Ainsi, $\varphi$ est injective.

Finalement, $\varphi$ est donc bijective. □

**Remarque 3.2.2.**
Ce théorème est fondamental pour comprendre comment «fonctionne» une application linéaire. De nombreuses questions (dont des exercices) se résolvent aisément grâce à lui ou grâce aux idées contenues dans sa démonstration.

**Théorème 3.2.3** (Théorème du rang)**.**
Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, avec $E$ de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

Alors $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie et

$$\dim \operatorname{Im} u = \dim E - \dim \operatorname{Ker} u.$$

La dimension de $\operatorname{Im} u$ est appelée *rang de l'application linéaire $u$* et notée $\operatorname{rg} u$.

**Démonstration.**
On sait que $\operatorname{Ker} u$ possède un supplémentaire $S$ dans $E$. On a donc $\dim S + \dim \operatorname{Ker} u = \dim E$. De plus $S$ et $\operatorname{Im} u$ sont isomorphes d'après 3.2.1, donc $\dim S = \dim \operatorname{Im} u$. On en déduit immédiatement le résultat. □

**Exemple 3.2.4.**
• Le rang d'une forme linéaire non nulle vaut 1, celui d'une forme linéaire nulle vaut 0.
• Calculer de deux manières le rang de l'application $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + z \\ x - y - z \end{pmatrix} \end{array}$.

**Corollaire 3.2.5.**
Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors,

(i) $u$ est surjective si et seulement si $\operatorname{rg} u = \dim F$ ;

(ii) $u$ est injective si et seulement si $\operatorname{rg} u = \dim E$.

**Corollaire 3.2.6.**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{GL}(E)$. Alors, pour tout sous-espace vectoriel $F$ de $E$, si $F$ est de dimension finie, $u(F)$ l'est également et $\dim u(F) = \dim F$.

**Démonstration.**
Notons $u_{|F}$ la restriction de $u$ au départ à $F$. Autrement dit, notons $u_{|F}$ l'application de $F$ dans $E$, $x \mapsto u(x)$.

Alors $\operatorname{Im} u_{|F}$ est de dimension finie et $\dim \operatorname{Im} u_{|F} = \dim F - \dim \operatorname{Ker} u_{|F}$. Or $\operatorname{Ker} u_{|F} \subset \operatorname{Ker} u = \{0\}$ et $\operatorname{Im} u_{|F} = u(F)$. On en déduit le résultat. □

**Corollaire 3.2.7.**
Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-ev de dimension fine, et $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
Alors $\operatorname{rg} u \leqslant \min(\dim E, \dim F)$.
En particulier :
• si $\dim E < \dim F$, $u$ ne peut être surjective ;
• si $\dim E > \dim F$, $u$ ne peut être injective.

**Théorème 3.2.8** (d'invariance du rang)**.**
Soit $E$ et $F$ deux espaces vectoriels avec $E$ de dimension finie. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors :
(i) soit $v \in \mathscr{GL}(F)$, alors $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$ ;
(ii) soit $w \in \mathscr{GL}(E)$, alors $\operatorname{rg}(u \circ w) = \operatorname{rg} u$.

**Démonstration.**
(i) Il suffit de remarquer $\operatorname{Im}(v \circ u) = v(\operatorname{Im} u)$. $E$ étant de dimension finie, $\operatorname{Im} u$ aussi. Or $v \in \mathscr{GL}(F)$, donc $v(\operatorname{Im} u)$ est de dimension finie égale à celle de $\operatorname{Im} u$, donc à $\operatorname{rg} u$.
(ii) Il suffit de remarquer $\operatorname{Im}(u \circ w) = u(w(E)) = u(E) = \operatorname{Im} u$.

□

**Remarque 3.2.9.**
Pour le point (i) l'injectivité de $v$ suffit, tandis que pour le point (ii), la surjectivité de $w$ suffit.

**Proposition 3.2.10** (Caractérisation des isomorphismes)**.**
Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$.

Alors si $\varphi$ est un isomorphisme, on a les trois propriétés suivantes :
1. $\varphi$ est injective,
2. $\varphi$ est surjective,
3. $\dim E = \dim F$.

Réciproquement, il suffit que deux de ces trois propositions soient vraies pour que $u$ soit un isomorphisme.

**Démonstration.**
On a déjà montré que si $\varphi$ était un isomorphisme les trois propositions étaient vraies. Montrons que si deux sont vraies, alors l'autre l'est aussi.

D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim E - \dim \operatorname{Ker} \varphi$.

Par ailleurs, on sait que $\varphi$ est injective si et seulement si son noyau est de dimension 0 et que $\varphi$ est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} \varphi$ est de dimension $\dim F$.

On peut alors remarquer :
— que si les deux premières propriétés sont vraies, alors $\varphi$ est un isomorphisme ;
— que si $\varphi$ est injective et $\dim E = \dim F$, alors $\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim E = \dim F$, donc $\varphi$ est surjective donc bijective.
— que si $\varphi$ est surjective et $\dim E = \dim F$, alors $\dim \operatorname{Ker} \varphi = \dim E - \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim E - \dim F = 0$, donc $\varphi$ est injective donc bijective.

□

**Exemple 3.2.11.**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ des scalaires tous distincts et $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(x_0), \dots, P(x_n)) \end{array}$.
Alors $\varphi$ est un isomorphisme.
$\varphi$ est aisément linéaire, et l'égalité $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1 = \dim \mathbb{K}^{n+1}$ assure qu'il suffit de montrer l'injectivité OU la surjectivité de $\varphi$, mais pas les deux.
Il s'agit de faire le bon choix : l'injectivité se démontre sans peine en utilisant qu'un polynôme de degré au plus $n$ ayant $(n+1)$ racines distinctes ne peut être que le polynôme nul. La surjectivité quant à elle peut se démontrer en utilisant les polynômes de Lagrange, ce qui est nettement moins immédiat.

Le résultat précédent s'exprime simplement dans le cas des endomorphismes.

**Corollaire 3.2.12** (Éléments inversibles de $\mathscr{L}(E)$)**.**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.

Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\varphi$ est injective,
2. $\varphi$ est surjective,
3. $\varphi$ est bijective.

**Corollaire 3.2.13.**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\varphi$ un élément de l'anneau $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$. Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\varphi$ est inversible à gauche,
2. $\varphi$ est inversible à droite,
3. $\varphi$ est inversible.

L'hypothèse de dimension finie est indispensable.
Considérer par exemple les applications

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ & (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \\ \psi : & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ & (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{p(n)})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

où $p : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \left\{ \begin{array}{rll} 0 & \text{si} & n = 0, \\ n-1 & \text{si} & n \neq 0. \end{array} \right. \end{array}$

**Remarque 3.2.14.**
De la même manière que le corollaire 3.2.13, on peut montrer que si $E$ et $F$ sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = \dim F$, et si $\varphi$ est un élément de $\mathscr{L}(E, F)$, alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. il existe $\psi \in \mathscr{L}(F, E)$ telle que $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_E$,
2. il existe $\chi \in \mathscr{L}(F, E)$ telle que $\varphi \circ \chi = \mathrm{Id}_F$,
3. $\varphi$ est bijective.

# 4 Formes linéaires et hyperplans

Donnons une première définition générale :

**Définition 4.0.15.**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle *droite vectorielle* de $E$ tout sous-espace vectoriel de dimension 1 et *hyperplan* de $E$ tout sous-espace vectoriel de $E$ admettant une droite pour supplémentaire.

Dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie, cette définition se récrit :

**Définition 4.0.16.**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$. On appelle *hyperplan* de $E$ tout sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$.

**Exemple 4.0.17.**
• Les droites vectorielles sont les hyperplans de $\mathbb{R}^2$.
• Les plans vectoriels sont les hyperplans de $\mathbb{R}^3$.
• L'espace est un hyperplan de l'espace-temps.
• $\mathbb{K}_n[X]$ est un hyperplan de $\mathbb{K}_{n+1}[X]$.
• $\mathbb{K}^n$ peut être vu comme un hyperplan de $\mathbb{K}^{n+1}$, si l'on considère que $\mathbb{K}^n$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n \times \{0\}$, qui est un hyperplan de $\mathbb{K}^{n+1}$.

**Proposition 4.0.18.**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $H$ un hyperplan de $E$. Alors toute droite vectorielle $D$ non contenue dans $H$ est supplémentaire de $H$ dans $E$.

**Démonstration.**
Soit $D$ une droite vectorielle non contenue dans $H$. Alors $D \cap H$ est strictement inclus dans $D$, donc $\dim D \cap H < \dim D = 1$, donc $D \cap H = \{ 0 \}$, donc $D$ et $H$ sont en somme directe. De plus $\dim D + \dim H = \dim E$. Donc $D$ et $H$ sont supplémentaires. $\square$

**Proposition 4.0.19.**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F \subset E$.

Alors $F$ est un hyperplan de $E$ si et seulement si c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

**Démonstration.**
Notons $n$ la dimension de $E$.

Supposons que $F$ est un hyperplan. Soit alors $S$ un supplémentaire de $F$ dans $E$. $F$ est de dimension $n-1$ donc $S$ est une droite vectorielle. Soit $e$ un vecteur directeur de $S$. Tout élément de $x$ de $E$ s'écrit donc de façon unique sous la forme $f + \lambda e$, où $f \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Notons $u(x)$ ce scalaire $\lambda$. $u$ est une application linéaire de $E$ dans $F$. Elle est non nulle car $u(e) \neq 0$.

De plus, pour tout $x \in E$, on a $x \in \operatorname{Ker} u$ si et seulement si $x$ s'écrit sous la forme $f + 0e$, où $f \in \mathbb{F}$. Donc $\operatorname{Ker} u = F$.

Réciproquement soit $u$ une forme linéaire non nulle. Alors $\operatorname{Im} u = \mathbb{K}$, donc $\dim \operatorname{Im} u = 1$, donc d'après le théorème du rang, $\dim \ker u = \dim E - 1$. Donc $\ker u$ est un hyperplan. □

**Remarque 4.0.20.**
Soit $H$ un hyperplan d'un espace vectoriel $E$ et soit $e$ un vecteur non nul n'appartenant pas à $H$. Alors pour toute forme linéaire $u$ de noyau $H$, on a $u = \lambda\varphi$, où $\lambda = u(e)$ et $\varphi$ est l'application associant $\alpha$ à tout vecteur de la forme $h + \alpha e$.

**Démonstration.**
Posons $D = \operatorname{Vect}(e)$. L'application $\varphi$ est bien définie car $E = H \oplus D$ et elle est linéaire. Soit $u \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ vérifiant $\operatorname{Ker} u = H$. Alors soit $x \in E$. $x$ s'écrit sous la forme $h + \alpha e$ et on a $u(x) = u(h) + \alpha u(e) = 0 + \alpha\lambda = \lambda\varphi(x)$.

Donc $\forall x \in E u(x) = \lambda\varphi(x)$. Donc $u = \lambda\varphi$. De plus, $\lambda \neq 0$ (sinon $\ker u = E \neq H$). □

**Proposition 4.0.21.**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$.

Soit $H$ un hyperplan de $E$. Alors les éléments de $H$ sont les points dont les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ sont les solutions d'une équation de la forme $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$, où $a_1, \dots, a_n$ sont des scalaires fixés non tous nuls.

Réciproquement, toute équation de cette forme est celle d'un hyperplan.

De plus pour un même hyperplan, les coefficients $a_1$, …, $a_n$ sont uniques à multiplication près par un scalaire non nul.

**Démonstration.**
Soit $H$ un hyperplan de $E$. Alors d'après 4.0.19, il existe une application linéaire $\varphi$ dont $H$ est le noyau. Or d'après 3.1.1, pour tout élément $x \in E$, la valeur de $\varphi(x)$ (qui est la coordonnée de $\varphi(x)$ dans la base canonique de $\mathbb{K}$) s'exprime sous la forme $a_1x_1 + \dots + a_nx_n$. $\operatorname{Ker}\varphi$ est donc l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $a_1x_1 + \dots a_nx_n = 0$.

Réciproquement, pour tout $n$-uplet de scalaires $(a_1, \dots, a_n)$ non tous nuls, l'application $\varphi$ qui à tout vecteur de $E$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ associe $a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ est une forme linéaire, à l'évidence non nulle (considérer le vecteur de $E$ dont toutes les coordonnées sont nulles, exceptées la $i^{\text{e}}$, où $i \in [\![1, n]\!]$ est tel que $a_i \neq 0$), les points dont les coordonnées sont solutions de l'équation $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ sont donc les éléments du noyau de $\operatorname{Ker}\varphi$, qui est un hyperplan.

De plus d'après la remarque précédente, deux formes linéaires ayant le même noyau sont proportionnelles, d'où la remarque sur l'unicité à un facteur multiplicatif près. □

**Lemme 4.0.22.**
Soit $H$ un hyperplan d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie $n$. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension $p$. Alors $H \cap F$ est de dimension $p-1$ ou $p$.

**Démonstration.**
Si $H \cap F = F$, le résultat est évident.

Sinon, considérons un supplémentaire $S$ de $H \cap F$ dans $F$. $H \cap F \neq F$, donc $\dim S \geqslant 1$. On a $S \subset F$, donc $S \cap H = (S \cap F) \cap H = S \cap (H \cap F) = \{\, 0 \,\}$. Donc $S$ et $H$ sont en somme directe, donc $\dim H \oplus S \geqslant n - 1 + 1 = n$. Donc $H \oplus S = E$, donc $\dim S = n - (n-1) = 1$, donc $\dim H \cap F = \dim F - \dim S = p - 1$. □

**Proposition 4.0.23.**
Soit $H_1$, …, $H_m$ $m$ hyperplans d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie $n$. Alors $\bigcap_{k=1}^{m} H_k$ est de dimension au moins $n - m$.

Réciproquement soit $F$ un sous-espace vectoriel de dimension $n - m$ d'un espace vectoriel de $E$ de dimension finie $n$, où $m \in \mathbb{N}$. Alors $F$ est l'intersection de $m$ hyperplans.

**Démonstration.**
Le premier point se démontre par une récurrence immédiate en utilisant le lemme 4.0.22.

Pour la réciproque, considérons un supplémentaire $S$ de $F$ dans $E$. Alors $\dim S = m$. Choisissons une base $(e_1, \ldots, e_m)$ de $S$. Notons $p$ la projection sur $S$ parallèlement à $F$. Pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, notons $f_k$ la forme linéaire qui à $x \in E$ associe la $k^{\text{e}}$ coordonnée de $p(x)$.

Soit $x \in E$. On a $x \in F$ si et seulement si $x \in \operatorname{Ker} p$ si et seulement si pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, $f_k(x) = 0$ si et seulement si $x \in \bigcap_{k=1}^{m} \operatorname{Ker} f_k$. Donc on a

$$F = \bigcap_{k=1}^{m} \operatorname{Ker} f_k$$

Donc $F$ est l'intersection de $m$ hyperplans. $\square$