DS n°7 : Fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom : Note :

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

Fractions rationnelles

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions suivantes.

$$\frac{X^2+2}{X^5-4X^3} = \qquad (1)$$

$$\frac{-6X^3+14X^2+5X+12}{X^5-4X^4+5X^3-4X^2+4X} = \qquad (2)$$

Calculer la primitive suivante :

$$\int^x \frac{t-4}{t(t^2+4)}\,\mathrm{d}t = \qquad (3)$$

Espaces vectoriels

Les parties F suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E (répondre **OUI** ou **NON**) ?

$$E = \mathbb{K}^4, \quad F = \{\, (x,y,z,t) \in E \mid 3x+2y-5z+t = 2 \,\} \quad : \qquad (4)$$

$$\mathbb{E} = \mathbb{K}[X], \quad F = \{\, P \in E \mid P''+3P'-5P = P(0) \,\} \quad : \qquad (5)$$

Dans l'espace vectoriel réel $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on considère $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ -2b & c \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$. Donner un sev G de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = F \oplus G$.

$$G = \qquad (6)$$

Écrire chaque ensemble des solutions des systèmes ci-dessous comme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par une partie (à déterminer, la plus petite possible).

$$\begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \\ 5x + y - 2z = 0 \end{cases} : \qquad (7)$$

$$\begin{cases} 3x + 2y + z + t = 0 \\ -x + 2y - z + 2t = 0 \end{cases} : \qquad (8)$$

Analyse asymptotique

Donner un équivalent simple pour chacune des suites de terme généraux suivants.

$$\mathrm{e}^{1/n} - \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \sim \qquad (9) \qquad \mathrm{e}^{2+\frac{1}{n^2}} - \mathrm{e}^{2} \sim \qquad (10)$$

Déterminer les DL suivants ($\mathrm{DL}_n(a)$ pour à l'ordre n et au voisinage du point a.)

$$\mathrm{DL}_3(0) \text{ de } \frac{1}{1+2x} \underset{x\to 0}{=} \qquad (11)$$

$$\mathrm{DL}_3(0) \text{ de } \mathrm{e}^{x}\sqrt[3]{1+x} \underset{x\to 0}{=} \qquad (12)$$

$$\mathrm{DL}_3(0) \text{ de } \frac{1}{1+\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{=} \qquad (13)$$

$$\mathrm{DL}_4(0) \text{ de } (1+\sin(x))^{\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} \qquad (14)$$

Soit $f : x \mapsto (x^2 + x + 1)\tan\left(\frac{1}{x}\right)$. Développer à la précision $\frac{1}{x^2}$ en $-\infty$:

$$f(x) \underset{x\to -\infty}{=} \qquad (15)$$

Ainsi, la courbe de f possède une droite asymptote au voisinage de $-\infty$, dont l'équation est :

(16)

et, au voisinage de $-\infty$, par rapport à cette asymptote, la courbe de f se situe

(17)

— FIN —