<u>Ex. 1.3.12</u> : lors du tirage n° k, on peut tirer 1 boule blanche ou noire :

Soit B_k : 1 boule blanche est tirée
N_k : 1 boule noire est tirée.

Si $n \in \mathbb{N}^*$: A_n est l'év : la 1ère boule noire tirée est tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage.

Nous avons : $A_n = N_n \cap B_{n-1} \cap \dots \cap B_1$.

ici : $p_n = P(A_n)$.

et $\forall k \in [\![1, n]\!]$: $P(B_k) \neq 0$

et si : $P(B_{n-1} \cap \dots \cap B_1) \neq 0$

et : $P(N_n \cap B_{n-1} \cap \dots \cap B_1) \neq 0$

Utilisons la formule des probas composées :

$$p_n = P(N_n \mid B_{n-1} \cap \dots \cap B_1) \times P(B_{n-1} \cap \dots \cap B_1)$$

$$= P(N_n \mid B_{n-1} \cap \dots \cap B_1) \times P(B_{n-1} \mid B_{n-2} \cap \dots \cap B_1) \times P(B_{n-2} \cap \dots \cap B_1)$$

$$\underset{\text{réc.}}{=} P(N_n \mid B_{n-1} \cap \dots \cap B_1) \times \prod_{k=1}^{n-2} P\left(B_{n-k} \,\Big|\, \bigcap_{i=1}^{n-k-1} B_i\right) \times P(B_1)$$

Après avoir tiré $(n-1)$ boules blanches, l'urne contient : 1 boule noire, n boules blanches.

Donc : $P\left(N_n \,\Big|\, \bigcap_{i=1}^{n-1} B_i\right) = \dfrac{1}{n+1}$

?: nous utilisons la proba uniforme, car les boules sont supposées indiscernables, et tirées au hasard.

De même, après avoir tiré $n-k-1$ boules blanches, l'urne contient: 1 boule noire, $n-k$ boules blanches

donc $P\left(B_{n-k} \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{n-k-1} B_i\right) = \dfrac{n-k}{n-k+1} = 1 - \dfrac{1}{n-k+1}$

et: $P(B_1) = \dfrac{1}{2}$.

donc $p_n = \dfrac{1}{n+1} \times \prod_{k=1}^{n-2} \dfrac{n-k}{n-k+1} \times \dfrac{1}{2}$

$$= \frac{1}{n+1} \times \prod_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n-k+1}$$

$$p_n = \frac{1}{n+1} \times \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n}$$

$$\boxed{p_n = \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n}}$$

Que vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$?

$$\sum_{n=1}^{N} p_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 1$$

d'où $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1}$

Donc la probabilité de finir par tirer 1 boule noire est égale à 1.

Donc celle de ne tirer que des boules blanches à l'infini est égale à 0.

Il est quasi sûr qu'1 boule noire finira par être tirée (mais pas sûr car le cas où on ne tire que des boules blanches indéfiniment peut se produire).