Devoir surveillé n°9
Version 2
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Suite de variables aléatoires.

L'objectif du problème est d'étudier une suite de variables aléatoires $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Les deux premières parties sont indépendantes et la troisième utilise certains résultats obtenus dans les deux premières parties. la partie **I** est consacrée à l'étude de deux endomorphismes sur $\mathbb{R}_n[X]$. La partie **II** consiste à calculer l'espérance et la variance de Z_k ainsi qu'à calculer la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = r)$ sous réserve de convergence. La partie **III** fournira la loi de Z_k ainsi que l'étude de la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 0} P(Z_k = r)$. La partie d'informatique propose de simuler les variables aléatoires étudiées précédemment.

Partie I : Étude de deux endomorphismes.

Soit n un entier naturel. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n. On identifiera un polynôme à la fonction polynomiale qui lui est canoniquement associée. Pour tout entier $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on désigne par e_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$e_k = X^k \ .$$

Rappelons que $(e_0, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit les fonctions $f(P)$ et $g(P)$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ f(P)(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\,\mathrm{d}t \ \text{ et } \ f(P)(1) = P(1)$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(P)(x) = \left[(X-1)P\right]'(x) = (x-1)P'(x) + P(x) \ .$$

1) Prouver que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Calculer $f(g(P))$ puis justifier que $\mathrm{Ker}(g) = \{0\}$.

3) Démontrer que g est un isomorphisme, que $g^{-1} = f$ et que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

4) Écrire la matrice A de f dans la base $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ ainsi que la matrice B de g dans cette même base.

On admet alors qu'il existe une base dans laquelle les matrices de f et de g sont diagonales.

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose de $n+1$ urnes notées $U_0, U_1, \ldots, U_n$ et on suppose que, pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, l'urne U_i contient $i+1$ boules numérotées $0, 1, \ldots, i$. On s'intéresse au jeu suivant.

— Au premier tirage, on pioche une boule dans l'urne U_n. Si la boule porte le numéro r, alors on repose la boule dans l'urne U_n puis le tirage suivant s'effectue dans l'urne U_r.

— Plus généralement, pour tout entier k non nul, si la boule s a été piochée au k^{e} tirage dans une certaine urne, on repose cette boule dans la même urne, puis on effectue le $(k+1)^{\text{e}}$ tirage dans l'urne U_s.

Pour tout entier naturel k, on note :

— Z_k est la variable aléatoire égale au numéro de la boule piochée au k^{e} tirage.
$\boxed{\textbf{On convient que } Z_0 = n.}$

— F_k est le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_k(x) = \sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)x^r \ .$$

— $\mathrm{E}[Z_k]$ l'espérance de la variable Z_k.

5) **a)** À l'aide de la formule des probabilité composées, calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Z_1 = n, \ldots, Z_k = n)$.

b) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![0, n]\!]$, $P(Z_k = r) > 0$.

6) À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall r \in \{0, 1, \ldots, n\},\ P(Z_{k+1} = r) = \sum_{i=r}^{n} \frac{P(Z_k = i)}{i+1} \ .$$

7) Établir les deux formules suivantes, valables pour tous entiers $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

$$\begin{cases} (\mathscr{R}_1) :\ (n+1)P(Z_{k+1} = n) = P(Z_k = n) \\ (\mathscr{R}_2) :\ (r+1)P(Z_{k+1} = r) - (r+1)P(Z_{k+1} = r+1) = P(Z_k = r) \end{cases}$$

8) On admet dans cette question que la série $\sum_{k \geqslant 0} P(Z_k = r)$, *i.e.* la suite $\left(\sum_{k=0}^{K} P(Z_k = r)\right)_{K \in \mathbb{N}}$, converge pour tout $r \in \{1, \ldots, n\}$ et on pose S_r sa limite.

a) En sommant les relations $(\mathscr{R}_1)$, donner la valeur de S_n.

b) En sommant les relations $(\mathscr{R}_2)$, donner la valeur de S_{n-1} et montrer que la suite $(rS_r)_{1 \leqslant r \leqslant n-1}$ est constante.

9) Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer la relation

$$(\mathscr{S}) :\ \forall x \in \mathbb{R},\ (x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = F_k(x) \ .$$

10) **a)** Soit $k \in \mathbb{N}$. Établir que $F'_k(1) = \mathrm{E}[Z_k]$ et $F''_k(1) = \mathrm{E}[Z_k(Z_k - 1)]$.

b) En dérivant une fois puis deux fois la relation $(\mathscr{S})$, donner la relation de récurrence vérifiée par la suite $(F'_k(1))_{k \in \mathbb{N}}$ ainsi que la relation de récurrence vérifiée par la suite $(F''_k(1))_{k \in \mathbb{N}}$.

c) Donner la valeur de $F'_k(1)$ et de $F''_k(1)$ en fonction de k et de n. Expliciter alors la variance $V(Z_k)$ de Z_k en fonction de k et de n.

Partie III : Loi de chacune de ces variables aléatoires.

On reprend toutes les notations des parties **I** et **II** et on pourra admettre tous les résultats établis dans ces deux parties. Rappelons également qu'à la question **II.4** la relation ($\mathscr{S}$) est démontrée, ce qui revient à écrire :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ g(F_{k+1}) = F_k \ .$$

Pour finir, pour tout entier $k \in \{\,0, 1, \ldots, n\,\}$, on désigne par u_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$u_k = (X-1)^k \ .$$

11) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r) e_r = F_k = f^k(e_n) \ .$$

12) Prouver que $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

13) Calculer $f(u_r)$ pour $r \in \{\,0, 1, \ldots, n\,\}$. Retrouver ainsi qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

14) Justifier que :

$$e_n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u_r$$

et que :

$$\forall r \in \{\,0, 1, \ldots, n\,\},\ u_r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} e_j \ .$$

15) Démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f^k(e_n) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{1}{(r+1)^k} u_r \ .$$

16) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \{\,0, 1, \ldots, n\,\}$. À l'aide des questions précédentes, établir que :

$$P(Z_k = j) = \sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \binom{n}{r} \binom{r}{j} \frac{1}{(r+1)^k} \ .$$

17) Application.

a) Soit $j \in \{\,0, 1, \ldots, n\,\}$. Déterminer un réel $M_{n,j}$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ |P(Z_k = j)| \leqslant \frac{M_{n,j}}{(j+1)^k}$$

puis justifier que la série $\sum_{k \geqslant 0} P(Z_k = j)$, *i.e.* la suite $\left(\sum_{k=0}^{K} P(Z_k = j)\right)_{K \in \mathbb{N}}$, converge lorsque $j \in \{\,1, \ldots, n\,\}$.

b) La série $\sum_{k \geqslant 0} P(Z_k = 0)$, *i.e.* la suite $\left(\sum_{k=0}^{K} P(Z_k = 0)\right)_{K \in \mathbb{N}}$, est-elle convergente ?

Partie d'informatique : simulation des variables aléatoires.

Pour chaque question, on écrira une fonction respectant la syntaxe du langage `Python`.
On rappelle que la fonction `randrange(a,b)` de la bibliothèque `random` permet d'obtenir une réalisation d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![\mathtt{a}, \mathtt{b}[\![$, les appels successifs de cette fonction pouvant être considérés comme donnant des réalisations mutuellement indépendantes de cette loi.

18) Écrire une fonction `Z(k,n)` prenant en argument un entier naturel `k` et un entier naturel `n` et donnant en sortie une réalisation de $Z_{\mathtt{k}}$.

19) Écrire une fonction `zero_Z(n)` prenant en argument un entier naturel `n` et donnant en sortie le premier rang n_0 dans la suite $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tel que $Z_{n_0} = 0$.

— FIN —