Devoir surveillé n° 04 - Remarques

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 40 points, ramené sur 5 points.
- Problèmes : exercice vu en TD sur 4 points, et les autres questions sur 4 points, ramené sur 15 points.

Statistiques descriptives.

	Calculs	Problème	Note finale
Note maximale	37	63	$16,5$
Note minimale	15	17	6
Moyenne	$\approx 27,49$	$\approx 37,05$	$\approx 10,62$
Écart-type	$\approx 5,45$	$\approx 12,83$	$\approx 2,84$

Remarques générales.

I. Exercice vu en TD.

Les suites et les sous-suites s'écrivent **entre parenthèses**.
La principale difficulté était de bien décrire les sous-suites de sous-suites.
Ainsi, $(u_{\psi\circ\varphi(n)})$ n'est pas une sous-suite de $(u_{\varphi(n)})$ mais de $(u_{\psi(n)})$. Par exemple, (u_{3n+3}) n'est pas une sous-suite de (u_{2n+1}) : u_6 est un terme de (u_{3n+3}) mais pas de (u_{2n+1}).

II. Bornes supérieures et inférieures pour l'inclusion.

« Borne » est un mot féminin, donc on met un « e » à la fin de borne supérieure ou inférieure. Oui, je sais, il y avait une faute de frappe dans le titre, ce n'était pas une raison pour la recopier, et souvent la propager. Certains vicieux ont même pris comme titre « Bornes supérieures et inférieurs ». J'ai souvent l'impression que lorsque vous rencontrez un adjectif, vous sortez un dé à 4 faces et vous appliquez la règle « 1 = masculin singulier, 2 = masculin pluriel, 3 = féminin singulier, 4 = féminin pluriel ». Et en plus votre dé est sexiste et misanthrope, le 1 sort presqu'à tous les coups et le 4 ne sort quasiment jamais.
Vous avez trop souvent utilisé le théorème de la borne supérieure. Ici nous manipulions bien des parties de $\mathbb{N}$ et donc de $\mathbb{R}$, mais la relation d'ordre n'était pas la relation usuelle $\leqslant$, mais la relation d'inclusion $\subset$. Et en plus, les ensembles dont on cherchait des bornes sup ou inf étaient des parties de l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, donc pas du tout des parties de $\mathbb{R}$. Par conséquent le théorème de la borne supérieure était doublement inutilisable, ce qui vous a valu beaucoup de réponses à 0 pt.

1.a) Il fallait donner un exemple **concret**. Parler de parties avec des x, des y etc ne prouve rien.

3.a) Beaucoup ont eu l'intuition de la bonne borne sup. Appelons-la S. Il fallait donc montrer que S majorait $\mathscr{A}$, ce qui a souvent était bien fait. Par contre, montrer que c'était le plus petit majorant a rarement été bien traité. Pour cela, il fallait prendre un autre majorant M, et montrer que $S \subset M$. Montrer que si $M \subset S$ alors M ne peut pas être un majorant n'avait rien à voir, et ne servait à rien. En effet, la relation d'ordre n'est pas totale.

3.b) La question précédente n'était pas utilisable (même si le principe de la démo était le même), car on y manipulait des parties **finies** ce qui n'était plus le cas ici : ici on manipulait des ensembles dont les éléments sont des parties finies, mais il pouvait y en avoir une infinité.

3.c) $\varnothing$ a une borne sup pour cette relation d'ordre : c'est elle-même !

3.d) Il existe bien des parties de $\mathscr{P}_f(\mathbb{N})$ sans borne supérieure : cela ne prouve pas que la propriété de la borne sup est fausse, car ces parties ne sont pas majorées. Or la propriété de la borne sup, c'est que toute partie non vide **majorée** admet une borne sup.

III. Nombres de diviseurs positifs d'un entier naturel.

Beaucoup d'affirmations mais peu de justifications dans cette partie. Même si l'on considère que l'arithmétique est une discipline intuitive, cela ne dispense pas de démontrer les résultats.

2.a. Encore du français : il y a une différence fondamentale entre les deux phrases suivantes : « les diviseurs de ab sont les produits d'un diviseur de a par un diviseur de b » et « des diviseurs de ab sont les produits d'un diviseur de a par un diviseur de b ». À méditer.
Démontrer cette question en utilisant la décomposition en facteurs premiers (**AU PLURIEL**) est plutôt déconseillé. Je vous l'ai dit plusieurs fois en cours, évitez cela. Soit vous allez faire une démo très rigoureuse, ce qui oblige à introduire l'ensemble des nombres premiers, donner des noms aux facteurs en question et parler de valuation, donc c'est très lourd. Ou alors vous allez tout faire en français, et au mieux ce sera du blabla sans rigueur. Du genre : « les facteurs premiers de ab sont ceux de a auxquels on rajoute ceux de b, donc les diviseurs de ab sont tous les produits des facteurs premiers de ab, donc tous les produits de facteurs premiers de a par les produits de facteurs premiers de b, donc les diviseurs de a par les diviseurs de b ». Mais ici il n'est pas démontré que les diviseurs de ab sont tous les produits des facteurs premiers de ab. Ce n'est pas du cours, il faut le démontrer, ce qui devient plus compliqué que la question initiale. Et de plus, en toute rigueur c'est faux : 2 est le seul facteur premier de 8. 4 compte-t-il comme un produit de facteurs premiers de 8 ? Si oui alors il faut aussi parler des puissances des facteurs premiers. Mais dans ce cas, 16 diviserait aussi 8, donc il faut bien parler des valuations. Donc je le répète : la décomposition en facteurs premiers est à éviter au maximum, et si dans une question il n'est pas question de nombres premiers, elle est presque tout le temps l'une des pires méthodes.

3.a) Quand on demande une caractérisation, on demande une équivalence. « Les entiers n tels que $d_n = 2$ sont des nombres premiers » n'est qu'une implication et ne répond donc qu'à la moitié de la question, alors que « les entiers n tels que $d_n = 2$ sont les nombres premiers » est bien une équivalence.

3.b) Question symptomatique du grand manque de rigueur dans vos réponses. J'ai souvent lu « si $d_n = 3$, alors $\mathscr{D}^+(n) = \{1, n, p\}$. S'il existe $k, l \in \mathbb{N}^*$ tels que $p = kl$, alors n a 4 diviseurs donc c'est impossible ». Mais pourquoi 4 diviseurs ? ? ? ? L'ensemble des diviseurs est $1, n, p, k, l$, donc peut-être qu'il y a 5 diviseurs. Mais peut-être aussi que $k = 1$ et $l = p$, ce qui fait toujours 3 diviseurs, et il n'y a aucune contradiction.

5) Il fallait utiliser ici la question **2.c) ET** une récurrence, **ET** vérifier les hypothèses de la question **2.c)**. Il manquait souvent les 3 points !

6.b) Question symptomatique de votre amour du blabla : « les diviseurs vont 2 par 2, donc il y en a un nombre pair. Mais s'il y en a un nombre impair, c'est qu'il y en a 2 qui sont égaux, donc n est un carré ». Ça vous satisfait peut-être mais pour moi ça vaut 0. Déjà, « aller deux par deux », pour des entiers je ne sais pas ce que ça veut dire. Et puis quand il y a plusieurs couples, qu'est-ce qui empêche plusieurs éléments de ces différents couples d'être égaux, et qu'il y en ait donc un nombre impair ?