Devoir facultatif n° 6

On définit par récurrence les fonction $f_n : [0,1] \to [0,1]$ de la façon suivante.

- Si $x \in [0,1]$, $f_0(x) = x$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, si f_n est construite alors $f_{n+1}(1) = 1$ et :
  — pour tout $k \in \{0, 1, \dots, 3^{n+1} - 1\}$, f_{n+1} est affine sur $\left[\dfrac{k}{3^{n+1}}; \dfrac{k+1}{3^{n+1}}\right]$;
  — pour tout $k \in \{0, 1, \dots, 3^n - 1\}$, $f_{n+1}\left(\dfrac{k}{3^n}\right) = f_n\left(\dfrac{k}{3^n}\right)$;
  — pour tout $k \in \{0, 1, \dots, 3^n - 1\}$, $f_{n+1}\left(\dfrac{k}{3^n} + \dfrac{1}{3^{n+1}}\right) = f_n\left(\dfrac{k}{3^n} + \dfrac{2}{3^{n+1}}\right)$;
  — pour tout $k \in \{0, 1, \dots, 3^n - 1\}$, $f_{n+1}\left(\dfrac{k}{3^n} + \dfrac{2}{3^{n+1}}\right) = f_n\left(\dfrac{k}{3^n} + \dfrac{1}{3^{n+1}}\right)$.

I – Définition de f.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, 1, \dots, 3^n - 1\}$. Connaissant

$$x_{n,k} = \frac{k}{3^n} \quad \text{et} \quad y_{n,k} = \frac{k+1}{3^n},$$

ainsi que

$$x'_{n,k} = f_n(x_{n,k}) \quad \text{et} \quad y'_{n,k} = f_n(y_{n,k}),$$

tracer le graphe de f_{n+1} sur $[x_{n,k}, y_{n,k}]$.

2) Avec les mêmes notations et en s'appuyant sur le tracé précédent, montrer les propriétés suivantes.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0,1]$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $k \in [\![0; 3^n - 1]\!]$ et tout $m \geqslant n$,

$$f_m([x_{n,k}, y_{n,k}]) = \left[\min\left(x'_{n,k}, y'_{n,k}\right); \max\left(x'_{n,k}, y'_{n,k}\right)\right]$$

On remarquera que l'on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0; 3^n - 1]\!],\ \forall x \in [x_{n,k}, y_{n,k}],$$
$$\forall m \geqslant n,\ f_m(x) \in \left[\min\left(x'_{n,k}, y'_{n,k}\right); \max\left(x'_{n,k}, y'_{n,k}\right)\right].$$

c) $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0; 3^n - 1]\!],\ \left|x'_{n,k} - y'_{n,k}\right| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

3) Dessiner sur une même figure les graphes de f_0, f_1, f_2, f_3.

4) Soit $x \in [0,1[$.

a) Montrer qu'il existe une unique suite d'entiers $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{k_n}{3^n} \leqslant x < \frac{k_n+1}{3^n}.$$

b) Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = \dfrac{k_n}{3^n}$ et $y_n = \dfrac{k_n+1}{3^n}$, ainsi que $x'_n = f_n(x_n)$ et $y'_n = f_n(y_n)$. Montrer que les suites de termes généraux respectifs $\min(x'_n, y'_n)$ et $\max(x'_n, y'_n)$ sont adjacentes.

Dorénavant, nous noterons $f(x)$ leur limite commune et l'on pose $f(1) = 1$.

II – Continuité de f.

5) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

6) Montrer que la fonction f est continue sur $[0,1]$.

Indication : on pourra utiliser, en la justifiant, l'inégalité

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|.$$

III – Dérivabilité de f.

7) Montrer que, pour toute fonction numérique g continue, définie au voisinage d'un réel x_0, pour tout $\ell \in \mathbb{R}$, g est dérivable en x_0 et $g'(x_0) = \ell$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall h, k > 0,\ 0 < h + k < \alpha \Rightarrow \left|\frac{g(x_0+h) - g(x_0-k)}{h+k} - \ell\right| < \varepsilon.$$

8) Soit $x \in]0,1[$. Avec les notations de la partie **4)**, on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D_n = 3^n(y'_n - x'_n).$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_{n+1} = 2D_n$ ou $D_{n+1} = -D_n$.

9) En déduire que (D_n) n'admet pas de limite finie puis que f n'est dérivable en aucun point de $[0,1]$.

V – Allure de f.

10) Montrer que f n'est monotone sur aucun sous intervalle de $[0,1]$ non vide et non réduit à un point.

11) Écrire une fonction `f(n)` en Python, prenant en entrée un entier naturel `n`, et renvoyant en sortie les deux listes contenant 1 et les $x_{n,k}$, et 1 et les $x'_{n,k}$.

Par exemple, `f(0)` renverra le couple `([0,1],[0,1])`.

On joindra un tracé du graphe de f_7.

— **FIN** —