Devoir surveillé n° 7 - Remarques

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 34 points, ramené sur 5 points.
- Problèmes : chaque question sur 4 points, total sur 108 points (v1) et 72 points (v2), ramené sur 15 points.

Statistiques descriptives.

	Calculs	v1	v2	Note finale
Note maximale	26	69	38	19
Note minimale	4	9	4	4
Moyenne	$\approx 13,46$	$\approx 30,05$	$\approx 18,06$	$\approx 10,04$
Écart-type	$\approx 6,12$	$\approx 16,25$	$\approx 8,99$	$\approx 3,43$

Remarques générales pour la v1.

Allez, comme dans tous les DS, je le redis (l'enseignement, c'est l'art de la répétition), je ne veux plus lire : « $\cos x$ est 2π-périodique » ; « f est constante ; soit $\lambda \in \mathbb{R}$; alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda$ » ; « $f_n' = nx^{n-1}\ln(x) + x^{n-1}$ ».

I. Un exercice vu en TD (v1).

La décomposition théorique de cette fraction doit apparaître dans le raisonnement. Vous l'avez souvent donnée, mais les coefficients sont très mal introduits. J'ai souvent lu : « il existe a tel que $\dfrac{1}{X^n - 1} = \displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \dfrac{a}{X - \omega}$ ». Cela signifie qu'il n'y qu'un seul coefficient à calculer, le même pour tous les termes de la DES, ce qui est évidemment complétement faux. Rédiger ainsi : « il existe $a_0, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que $\dfrac{1}{X^n - 1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{a_k}{X - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}}$ », ou encore « pour tout $\omega \in \mathbb{U}_n$, il existe $a_\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\dfrac{1}{X^n - 1} = \displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \dfrac{a_\omega}{X - \omega}$ », ou encore « il existe une famille de complexes $(a_\omega)_{\omega \in \mathbb{U}_n}$ telle que $\dfrac{1}{X^n - 1} = \displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \dfrac{a}{X - \omega}$ ».
Beaucoup ont oublié la partie entière. Par contre vous maîtrisez bien « l'astuce du pôle simple ».

II. L'espace des fonctions périodiques (v1).

1 La question était extrêmement simple, et il n'y avait pas grand'chose à faire. Donc on attendait que la stabilité par combinaison soit détaillée.
Beaucoup ont voulu écrire $\mathscr{P}_T$ « avec des accolades » (ce qui était par ailleurs inutile). J'ai lu beaucoup d'erreurs, surtout concernant la quantification des x.
On peut écrire $\mathscr{P}_T = \{f \in E \ , \ \forall x \in \mathbb{R} \ , \ f(x+T) = f(x)\}$.

2 Réponse en tête du hit-parade : $\left\{\mathscr{P}_T \ , \ T \in \mathbb{R}_+^*\right\}$. Mais ceci n'est pas un ensemble de réels, c'est un ensemble dont les éléments sont des ensembles : ce ne peut donc pas être la bonne réponse.

3.a Pour beaucoup, une somme de fonctions périodiques est périodique. Lisez l'énoncé ! L'objectif de cette même question 3) est justement de montrer que ce n'est pas le cas.

3.b.iii Je suis stupéfait par le nombre de $\cos(2\pi T) = \cos(T)$ que j'ai pu lire. C'est n'importe quoi.

4.a Beaucoup de confusions et de blabla, peu de retour aux méthodes habituelles : « soit $f \in \mathscr{P}_n$. Montrons que $f \in \mathscr{P}_m$ ». C'est pourtant le b.a.ba, qu'on a vu et revu et rerevu maintes fois depuis septembre.

III. Étude asymptotique d'une suite implicite (v1).

1 et 2 Allez, on y retourne : comme dit dans les remarques des 2 précédents DS, les questions du style « tableau de variation + théorème de la bijection + unicité de la solution d'une certaine équation » sont omniprésentes dans les sujets, vous avez déjà vu cela au lycée, et on en a fait 1 milliard cette années, et c'est toujours la même chose, mot pour mot ! ! Et c'est encore traité n'importe comment. Je répète : le TVI nécessite la continuité de la fonction (il faut la rappeler), mais ne donne pas l'unicité ! !
Pour beaucoup, f_n est croissante, en tant que produit de fonctions croissantes. C'est faux, cf. exercice 3 feuille de TD n°2 par exemple. Certains n'ont aucun problème à écrire que f_n est croissante, qu'elle tend vers 0 en 0, mais qu'elle est strictement négative sur $]0, 1[$. Déprimant ...

2 Beaucoup ont voulu utiliser que $f_n(1) < 1 = f_n(x_n)$ donc $1 < x_n$. Pour cela ils utilisent que f_n est croissante sur $[1, +\infty[$. Mais il faut aussi savoir que $x_n \geqslant 1$: on pouvait le dire avec la question 1) si elle avait été bien traitée. Mais il y avait plus simple (cf. corrigé).

6.a Beaucoup affirment que l'on « sait que $\ln x < x$ ». Non, on ne le sait pas. C'est un résultat très classique mais pas au programme, et ici il n'y a que ça dans la question ! Donc on attend la démonstration.

6.d À partir de la question précédente, il faut faire qqch du terme $\ln(\ln v_n)$. Il ne s'agit pas de l'escamoter purement et simplement, il faut justifier que c'est un $o(\ln v_n)$. Et cela vient des croissances comparées : en $+\infty$, $\ln x = o(x)$. Or $v_n \to +\infty$, donc $\ln v_n \to +\infty$, et donc par composition, $\ln(\ln v_n) = o(\ln v_n)$.

Version 2.

Ce devoir était technique. Pas plus dur que les autres v2, mais dans un style différent, avec plus de calculs et de manipulations de sommes, de DL et d'intégrales. Vous êtes beaucoup moins à l'aise dans ce style, et certains sont passés complétement à côté.
Certaines questions étaient toutefois simples et directes : les questions 1, 3, 12, 13 ou 14 par exemple. Certains ont su repérer ces questions et les ont bien traitées. Ce sont en général ceux qui ont le mieux réussi le devoir.
Aucune question ne nécessitait de récurrence.

1 Je ne comprends pas que la plupart d'entre vous puisse répondre à cette question sans étudier si le dénominateur de f_x s'annule ou pas sur $\mathbb{R}_+^*$. C'est juste incroyable ...
Il n'est pas nécessaire de montrer que f_x est continue sur $\mathbb{R}^*$, puis dérivable puis de classe $\mathscr{C}^1$: le théorème sur les opérations permet de dire qu'elle de classe $\mathscr{C}^1$ directement.

2 « Simple » calcul de DL, couplé à une bonne utilisation des théorèmes du cours. Que f' ait une limite en 0 ne prouve pas que f est continue en 0. Et il ne s'agit en aucun de prolonger la dérivée : on prolonge d'abord f par continuité, et ensuite on constate que ce prolongement est dérivable. Ce n'est pas la même chose. On peut tout à fait prolonger par continuité la dérivée d'une fonction, qui elle-même n'est pas prolongeable par continuité (il y a un exemple dans le cours).
Que f ait un DL à l'ordre 1 en 0 prouve qu'elle est dérivable en 0, mais pas de classe $\mathscr{C}^1$.

3 On avait le droit d'utiliser directement le DL d'exp en 0, qui est au programme.

4 Si f a un DL en 0, $1/f$ en a un si et seulement si le DL de f en 0 commence par une constante non nulle : c'est au programme et se vérifie facilement par composition avec le DL de $\dfrac{1}{1+u}$. Par exemple, $t \mapsto t$ a évidemment un DL à tout ordre en 0, mais $t \mapsto 1/t$ n'a même pas de DL à l'ordre 0.

5 et 6 Du calcul, rien de plus.

7 Beaucoup ont pensé à faire le produit des deux DL, et l'ont bien développé. Mais il fallait faire un renversement d'indice à un moment.