Informatique tronc commun TP n° 10

Mercredi 8 février 2017

1. **Lisez attentivement tout l'énoncé avant de commencer.**
2. Commencez la séance en créant un dossier au nom du TP dans le répertoire dédié à l'informatique de votre compte.
3. Ayez toujours un crayon et un papier sous la main. Quand vous réfléchissez à une question, utilisez les !
4. Vous devez être autonome. Ainsi, avant de poser une question à l'enseignant, merci de commencer par :
   — relire l'énoncé du TP (beaucoup de réponses se trouvent dedans) ;
   — relire les passages du cours[1] relatifs à votre problème ;
   — effectuer une recherche dans l'aide disponible sur votre ordinateur (ou sur internet) concernant votre question.

   Il est alors raisonnable d'appeler votre enseignant pour lui demander des explications ou une confirmation !

Le but de ce TP est d'apprendre à calculer de manière approchée des intégrales. On étudie ensuite une application au traitement de signal par ondelettes.

Instructions de rendu

Attention : suivez précisément ces instructions. Vous enverrez à votre enseignant un fichier d'extension `.py`.

Votre fichier portera un nom du type `tpXX_berne_zannad.py`, où `XX` est à remplacer par le numéro du TP et les noms de vos enseignants par ceux des membres du binôme. Le nom de ce fichier ne devra comporter ni espace, ni accent, ni apostrophe. Dans ce fichier, vous respecterez les consignes suivantes.

— Écrivez d'abord en commentaires (ligne débutant par #), le titre du TP, les noms et prénoms des étudiants du groupe.

— Commencez chaque question par son numéro écrit en commentaires.

1. Dans le cas fort improbable où vous ne vous en souviendriez pas.

— Les questions demandant une réponse écrite seront rédigées en commentaires.
— Les questions demandant une réponse sous forme de fonction ou de script respecteront pointilleusement les noms de variables et de fonctions demandés.

1 Calcul approché d'une intégrale

On s'intéresse au calcul approché d'une intégrale $I = \int_a^b f$, où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une application «raisonnable».

La méthode des rectangles (à gauche) approche cette intégrale (vue comme une aire) par l'aire de N rectangles de largeur $\dfrac{b-a}{N}$, via la formule

$$\mathrm{Rg}_N(f) = \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(a + k\frac{b-a}{N}\right).$$

La méthode des rectangles (à droite) approche cette intégrale (vue comme une aire) par l'aire de N rectangles de largeur $\dfrac{b-a}{N}$, via la formule

$$\mathrm{Rd}_N(f) = \frac{b-a}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(a + k\frac{b-a}{N}\right) = \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(a + (k+1)\frac{b-a}{N}\right).$$

La méthode des trapèzes approche cette intégrale (vue comme une aire) par l'aire de N trapèzes de largeur $\dfrac{b-a}{N}$, via la formule

$$\mathrm{T}_N(f) = \frac{b-a}{N}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} f\left(a + k\frac{b-a}{N}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Rg}_N(f) + \mathrm{Rd}_N(f)\right).$$

Enfin, la méthode de Simpson approche cette intégrale (vue comme une aire) par la somme des aires sous la courbe de N polynômes du second degré, via la formule

$$\mathrm{S}_N(f) = \frac{b-a}{6N}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f\left(a + k\frac{b-a}{N}\right) + 4\sum_{k=0}^{N-1} f\left(a + \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{N}\right) + f(b)\right].$$

On se réfèrera au cours de mathématiques pour plus de détails. On considère aussi la fonction suivante :

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{rll} \cos(8\pi x) & \text{si} & x \leq 1/4 \;; \\ 1/2 + \cos(160\pi x) & \text{si} & 1/4 < x \leq 1/2 \;; \\ -1/2 & \text{si} & 1/2 < x \leq 3/4 \;; \\ 8(x-1)(16x-13) + \cos(32\pi x) & \text{si} & x > 3/4. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Q1 Écrire une fonction `f(x)` renvoyant $f(\mathtt{x})$, pour $\mathtt{x} \in [0, 1]$.

Q2 Écrire une fonction `plot_f(nom_de_fichier)` ne renvoyant rien et enregistrant dans `nom_de_fichier` le graphe de la fonction f.

Q3 Calculer à la main $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

Q4 Écrire une fonction `Rg(g,a,b,N)` renvoyant $\mathrm{Rg}_{\mathtt{N}}(\mathtt{g})$ pour une fonction `g` définie sur $[\mathtt{a},\mathtt{b}]$.

Q5 Écrire une fonction `Rd(g,a,b,N)` renvoyant $\mathrm{Rd}_{\mathtt{N}}(\mathtt{g})$ pour une fonction `g` définie sur $[\mathtt{a},\mathtt{b}]$.

Q6 Écrire une fonction `T(g,a,b,N)` renvoyant $\mathrm{T}_{\mathtt{N}}(\mathtt{g})$ pour une fonction `g` définie sur $[\mathtt{a},\mathtt{b}]$.

Q7 Écrire une fonction `S(g,a,b,N)` renvoyant $\mathrm{S}_{\mathtt{N}}(\mathtt{g})$ pour une fonction `g` définie sur $[\mathtt{a},\mathtt{b}]$.

2 Traitement du signal par ondelettes.

On considère *l'ondelette mère* de la base de Haar :

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \text{si} & 0 \leq x < 1/2\ ; \\ -1 & \text{si} & 1/2 \leq x < 1\ ; \\ 0 & \text{sinon} & . \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Pour tout entier naturel r (que l'on appelle *niveau de résolution*) et tout entier $i \in [\![0, 2^r[\![$, on considère *l'ondelette fille* :

$$\psi_{r,i} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{2^r}\psi\left(2^r\left(x - \frac{i}{2^r}\right)\right). \end{array} \right.$$

Remarque 2.0.1. Ces fonctions ont les propriétés suivantes : pour tout $r, s \in \mathbb{N}$ et tout $i \in [\![0, 2^r[\![$, $j \in [\![0, 2^s[\![$ avec $(r, i) \neq (s, j)$

1. $\psi_{r,i}$ est nulle hors de $[0, 1]$;
2. $\displaystyle\int_0^1 \psi_{r,i}(t)\mathrm{d}t = 0$;
3. $\displaystyle\int_0^1 \psi_{r,i}(t)^2\mathrm{d}t = 1$;
4. $\displaystyle\int_0^1 \psi_{r,i}(t)\psi_{s,j}(t)\mathrm{d}t = 0.$

Q8 Écrire une fonction `psi(r,i,x)` renvoyant $\psi_{\mathtt{r},\mathtt{i}}(\mathtt{x})$, pour $\mathtt{r} \in \mathbb{N}$, $\mathtt{i} \in [\![0, 2^{\mathtt{r}}[\![$ et $\mathtt{x} \in \mathbb{R}$.

Q9 Écrire une fonction `plot_psi(r,i,nom_de_fichier)` ne renvoyant rien et enregistrant dans `nom_de_fichier` le graphe de la fonction $\psi_{r,i}$ sur $[0, 1]$.

Si $r \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![0, 2^r[\![$, on pose

$$\alpha_{r,i} = \int_0^1 \psi_{r,i}(t) f(t) \mathrm{d}t$$

et

$$\alpha_{-1} = \int_0^1 f(t) \mathrm{d}t.$$

Si $r \in \mathbb{N}$, on pose

$$H_r(t) = \sum_{i=0}^{2^r-1} \alpha_{r,i} \psi_{r,i}(t).$$

Enfin, si $N \in \mathbb{N}$, on reconstruit le signal de f au niveau de résolution N par :

$$\widehat{f}_N(t) = \alpha_{-1} + \sum_{r=0}^{N} H_r(t) = \alpha_{-1} + \sum_{r=0}^{N} \sum_{i=0}^{2^r-1} \alpha_{r,i} \psi_{r,i}(t).$$

Q10 En vous aidant des graphes de ψ tracés dans la question précédente, exprimer littéralement $\alpha_{r,i}$ en fonction d'intégrales de la fonction f (ainsi que de r et de i).

Q11 Écrire une fonction `alpha(r,i)` calculant $\alpha_{\mathtt{r},\mathtt{i}}$ pour $\mathtt{r} \in \mathbb{N}$ et $\mathtt{i} \in [\![0, 2^{\mathtt{r}}[\![$. On utilisera la méthode de Simpson avec 1000 polynômes pour calculer les intégrales de f.

Q12 Écrire une fonction `fchap(a,t,N)` calculant $\widehat{f}_{\mathtt{N}}(t)$ pour $\mathtt{N} \in \mathbb{N}$, $\mathtt{t} \in \mathbb{R}$ et en supposoant que les coefficients $\alpha_{r,i}$ ainsi que α_{-1} ont été précalculés et sont contenus dans `a`.

Par exemple, avec $\mathtt{N} = 2$, on supposera que

$$\mathtt{a} = [[\alpha_{0,0}] \ , \ [\alpha_{1,0}, \alpha_{1,1}] \ , \ [\alpha_{2,0}, \alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}] \ , \ \alpha_{-1}] \, .$$

Q13 Écrire une fonction `plot_Haar(nom_de_fichier)` enregistrant les graphes de f, $\widehat{f}_0$, $\widehat{f}_1$, $\widehat{f}_3$ et $\widehat{f}_6$ dans `nom_de_fichier`.
On fera attention à ne calculer les coefficients $\alpha_{r,i}$ qu'une fois !