Ex 4 : 1) • Soit $x \in \ker f$. dc $f(x) = 0$, dc $f^2(x) = f(f(x)) = 0$

dc $x \in \ker f^2$ et $\ker f \subset \ker f^2$.

• Soit $y \in \mathrm{Im} f^2$, dc il existe $x \in E$ tq. $y = f^2(x) = f(f(x))$

posons : $z = f(x)$, dc $y = f(z) \in \mathrm{Im} f$

dc $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$.

2) ($\Rightarrow$) : si $\mathrm{Im} f \cap \ker f = \{0\}$: on sait déjà que $\ker f \subset \ker f^2$

Soit $x \in \ker f^2$: $f^2(x) = 0$. Dc : $f(f(x)) = 0$

dc : $f(x) \in \ker f$ or $f(x) \in \mathrm{Im} f$: $f(x) \in \ker f \cap \mathrm{Im} f$.

par hyp, $f(x) = 0$ dc : $x \in \ker f$.

($\Leftarrow$) si $\ker f = \ker f^2$. Soit $x \in \ker f \cap \mathrm{Im} f$.

$x \in \mathrm{Im} f$: soit $y \in E$ tq. $x = f(y)$. or : $x \in \ker f$

dc : $0 = f(x) = f(f(y)) = f^2(y)$, dc : $y \in \operatorname{Ker} f^2$.

or $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$, dc $y \in \operatorname{Ker} f$: $f(y) = 0$

or $x = f(y) = 0$ ∴ cqfd : $x = 0$.

3) $(\Rightarrow)$ on supp. que $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$.

On a déjà : $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$.

Soit $y \in \operatorname{Im} f$: il existe $x \in E$ tq. $y = f(x)$.

or il existe $t \in \operatorname{Im} f$, $z \in \operatorname{Ker} f$ tq. $x = t + z$.

il existe $u \in E$ tq. $t = f(u)$, dc : $x = f(u) + z$

dc : $y = f^2(u) + \underbrace{f(z)}_{=0} = f^2(u) \in \operatorname{Im} f^2$.

($\Leftarrow$) On supp. que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

Analyse : Soit $x \in E$, $y \in \operatorname{Im} f$, $z \in \ker f$ tq :

$x = y + z$. il existe $t \in E$ tq. $y = f(t)$.

dc : $f(x) = f(f(t) + z) = f^2(t) + 0 = f^2(t)$.

$f(x) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$ dc $f(x) \in \operatorname{Im} f^2$: il existe $u \in E$ tq. $f(x) = f^2(u)$

dc $f^2(t) = f^2(u)$. idée : et si on posait $t = u$?

Synthèse : Soit $x \in E$. on sait que $f(x) \in \operatorname{Im} f^2$ dc il existe $t \in E$ tq. $f(x) = f^2(t)$

posons : $y = f(t)$ et $z = x - f(t) = x - y$. Évidemment : $x = y + z$ (1)

et : $y \in \operatorname{Im} f$ (2). De + : $f(z) = f(x) - f^2(t) = f(x) - f(x) = 0$ et : $z \in \ker f$ (3)

Avec (1), (2), (3) : $E = \ker f + \operatorname{Im} f$.