

Feuille d'exercice n° 13 : **Continuité**

**Exercice 1** Etudier la continuité des fonctions suivantes.

1)  $f : x \mapsto x + \sqrt{x - [x]}$

2)  $g : x \mapsto [x] + \sqrt{x - [x]}$

**Exercice 2** () Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur  $\mathbb{R}$  ?

1)  $f : x \mapsto \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

2)  $g : x \mapsto \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$

3)  $h : x \mapsto \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$

**Exercice 3** – Inverse généralisé d'une fonction –

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application croissante et continue. On définit, pour tout réel  $x$ ,  $F(x) = \sup \{ y \in \mathbb{R} \mid f(y) \leq x \}$ .

1)  $F$  est-elle toujours définie ?

2) On prend pour cette question  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = x^2$ , et  $f|_{\mathbb{R}_-} = 0$ . Déterminer  $F$ .

3) On prend pour cette question  $f : x \mapsto \begin{cases} x-1 & \text{si } x \leq -1 \\ -2 & \text{si } |x| < 1 \\ 2x-4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ .

Déterminer  $F$ , étudier sa continuité, continuité à droite, à gauche.

Que peut-on dire de  $f \circ F$  et de  $F \circ f$  ?

4) Que peut-on dire si  $f$  est bijective ?

**Exercice 4** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1/x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1) Montrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .

2) a) En revenant à la définition de continuité, montrer que  $f$  est continue en 1 et en  $-1$ .

b) Soient  $a \in \mathbb{Q}$  et  $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Donner, en la justifiant, la valeur des quantités suivantes, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

i)  $f\left(a + \frac{1}{n}\right)$

ii)  $f\left(a + \frac{\sqrt{2}}{n}\right)$

iii)  $f\left(b + \frac{1}{n}\right)$

iv)  $f\left(\frac{[10^n b]}{10^n}\right)$

c) Que dire de la continuité de  $f$  en  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  ?

3) À quoi ressemblerait la courbe représentative de  $f$ , vue par un myope ?

**Exercice 5** Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $\forall x \in I, f(x)^2 = 1$ . Montrer que  $f = 1$  ou  $f = -1$ .

**Exercice 6** Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$ , soit  $f, g$  définies et continues sur  $[a; b]$  telles que

$$\forall x \in [a; b], 0 < g(x) < f(x).$$

Montrer que

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [a; b], (1 + \lambda)g(x) < f(x).$$

**Exercice 7** (📐) Trouver toutes les fonctions vérifiant  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant les propriétés suivantes.

- 1) La fonction  $f$  est continue en 0 et  $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x) \cos x$ .
- 2) La fonction  $f$  est continue et  $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x + 1) = f(x)$

**Exercice 8** (🚲📐) Montrer qu'une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , continue, périodique et non constante possède une plus petite période (strictement positive).

**Exercice 9** (📐🚲) – **Fonctions contractantes** –

Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ . Soit  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  telle que, pour tout  $x, x' \in [a, b]$  avec  $x \neq x'$ , on a :

$$|f(x) - f(x')| < |x - x'|.$$

- 1) Montrer que  $f$  est continue sur  $[a, b]$ .
- 2) Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution dans  $[a, b]$ .

**Exercice 10** (🚲)

Soit  $P$  un polynôme de degré impair et à coefficients réels. Montrer que  $P$  possède une racine réelle.

**Exercice 11** Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ , avec  $a < b$ . Soit  $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ . On suppose que

$$\forall x \in [a, b], \exists x' \in [a, b], f(x) = g(x').$$

On veut montrer que

$$\exists c \in [a, b], f(c) = g(c).$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que, pour tout  $x \in [a, b], f(x) \neq g(x)$ .

- 1) Montrer qu'alors  $f - g$  est de signe constant et ne s'annule pas.
- 2) On suppose que  $f - g > 0$ .
  - a) Montrer que  $f$  et  $g$  possèdent chacune un maximum sur  $[a, b]$ . On les notera  $M_f$  et  $M_g$ .
  - b) Montrer que  $M_g \geq M_f$  et conclure.
- 3) Retrouver le résultat si  $f - g < 0$ .

**Exercice 12** Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ , soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $f(a) = f(b)$ .

- 1) Montrer que la fonction  $g : t \mapsto f\left(t + \frac{b-a}{2}\right) - f(t)$  s'annule en au moins un point de  $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ .
- 2) Application : une personne parcourt 4 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

**Exercice 13** (🚲) – **TVI à l'infini** –

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  continue, ayant une limite  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$  en  $+\infty$ . Montrer que  $f$  prend toute valeur comprise entre  $f(0)$  et  $\ell$  ( $\ell$  exclu).

**Exercice 14** Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ . Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues de  $[a, b]$  dans  $[a, b]$ , telles que

$$\forall x \in [a, b], f \circ g(x) = g \circ f(x).$$

On pose  $E = \{ x \in [a, b] \mid f(x) = x \}$ .

- 1) Montrer que  $E$  a une borne inférieure et une borne supérieure. On notera  $\alpha = \inf E$  et  $\beta = \sup E$ .
- 2) Montrer qu'il existe une suite  $(\alpha_n)$  d'éléments de  $E$  telle que  $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$ . On montrerait de même qu'il existe une suite  $(\beta_n)$  d'éléments de  $E$  telle que  $\beta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \beta$ .
- 3) Montrer que  $\alpha$  et  $\beta$  sont dans  $E$ .
- 4) Montrer que  $g(\alpha)$  et  $g(\beta)$  sont dans  $E$ .
- 5) Établir que  $\exists x_0 \in [a, b], f(x_0) = g(x_0)$  (on pourra considérer la fonction  $h = g - f$ ).

