Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 point, total sur 40 points, ramené sur 5 points.
- Problème et exercice de TD : exercice de TD sur 8 points, chaque question du problème sur 4 points, total sur 112 points, ramené sur 15 points, +55%.

Statistiques descriptives.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \min\left(\frac{1}{10}\lceil 10x \rceil\,;20\right)$.

	Calculs	Problème	Note finale
Transformation	c	p	$\varphi\left(\frac{5c}{40} + 1,55\frac{15p}{112}\right)$
Note maximale	38	65	$17,8$
Note minimale	7	17	$6,1$
Moyenne	$\approx 24,45$	$\approx 34,85$	$\approx 10,34$
Écart-type	$\approx 6,66$	$\approx 11,09$	$\approx 2,81$
Premier quartile	20	$26,25$	$8,25$
Médiane	24	$32,5$	$9,7$
Troisième quartile	28	42	$12,25$

Remarques générales.

• Beaucoup, pour montrer une égalité d'ensembles (donner l'ensemble des minorants de $\mathscr{A}$, l'ensemble des diviseurs positifs de p^k *etc.*), n'ont démontré qu'une inclusion. Le travail n'est alors fait qu'à moitié !
• Justifiez toutes vos affirmations.
• Encadrez vos réponses.
• Ne recopiez pas l'énoncé : cela dilue ce que vous apportez.
• Écrire « $\varnothing$ et $\{4\}$ sont l'ensemble des minorants de $\mathscr{A}$ » n'a aucun sens ... ne serait-ce qu'en français. Je relève bien trop d'erreurs de grammaire de ce genre, qui trahissent, à mon avis, une grande confusion quant au statut des objets manipulés (un ensemble, des éléments ?). Un conseil : si vous avez du mal à écrire correctement, cherchez à rédiger le plus concisément possible.
• Certains n'ont toujours pas compris le sens de « caractériser » : c'est « donner une propriété distinctive », *i.e.* donner une condition nécessaire et suffisante pour obtenir l'objet en question. Dictionnaire de l'Académie Française : « Définir par des traits particuliers, distinctifs ». Littré : « Indiquer, mettre en relief le caractère, la qualité propre ». TLFi : « Mettre en évidence le ou les traits dominants ou distinctifs d'une chose ou d'une personne ». Merci de retenir le sens de ce mot, vous avez souvent à le manipuler.
• Malgré l'erreur dans l'énoncé, il était de bon ton d'écrire « la borne supérieur**e** ». Encore une fois, si vous ne pouvez écrire sans commettre d'erreur (voire d'horreur) de grammaire, essayez d'écrire moins : cela abrégera les souffrances du correcteur (et vous gagnerez en clarté mathématique ...).

I - Un exercice vu en TD.

- La suite extraite de $(u_{\varphi(n)})$ par ψ est $u \circ \varphi \circ \psi = (u_{\varphi(\psi(n))})$.
- Vous ne pouvez dire « Soit (u_{6n}) une suite extraite de u » : ce n'est pas une suite extraite quelconque. Dites plutôt : « On considère (u_{6n}), c'est une suite extraite de u car ... ».
- On ne dit pas que « une suite converge à partir d'un certain rang » : quelle horreur !

II - Bornes supérieures et inférieures pour l'inclusion.

- Respectez les notations de l'énoncé : $\mathscr{A}$ n'est pas A. On utilisait deux types de lettres différents, un pour les parties de $\mathscr{P}_f(\mathbb{N})$, l'autre pour les éléments de $\mathscr{P}_f(\mathbb{N})$, qui sont des parties ... de $\mathbb{N}$. Essayez de respecter ces conventions.
- Lorsqu'on vous demande de montrer qu'une partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}_f(\mathbb{N})$ admet une borne supérieure ou inférieure, vous ne pouviez utiliser la propriété de la borne supérieure : elle n'est valable (*a priori*) que sur $\mathbb{R}$. D'ailleurs, la dernière question du problème devait vous y faire penser. Il fallait donc revenir à la définition de borne supérieure ou inférieure. La question **2-c)** devait aussi vous y faire penser. Une fois le petit exemple du **2)** traité en détail, il ne restait plus qu'à généraliser ces résultats dans la partie **3)**.

1-a) Vous ne pouviez vous borner à affirmer que $\subset$ est réflexive, transitive et symétrique.

1-b) $A \cap B = \varnothing$ n'implique pas que $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$: $\varnothing \subset \{0\}$. Encore une fois, revenez précisément aux définitions des notions manipulées. Si vous utilisez un résultat qui n'est pas écrit dans le cours : démontrez le. Cela ne peut se faire si vous ne connaissez pas précisément votre cours ...

2-a) $\mathscr{A}$ est une partie de $\mathscr{P}_f(\mathbb{N})$, et non une partie de $\mathbb{N}$.

Vous ne pouvez quantifier X dans ces définitions : on ne vous demande pas d'écrire « $\mathscr{A}$ est minorée ».

2-b) Écrire « $\{0; 4\} \not\subset \{4; 5\}$ » ne justifie pas « $A_1 \not\subset A_2$ » : vous n'avez rien fait, si ce n'est écrire A_1 et A_2. Revenez à la définition de l'inclusion : $0 \in A_1$ et $0 \notin A_2$.

Vous ne pouvez commencer cette question par « Soit X le plus petit élément de $\mathscr{A}$ ». Vous pouviez raisonner par l'absurde (encore faut-il l'annoncer), même si cela donne une rédaction un peu lourde.

2-c) Dire que $\varnothing$ et $\{4\}$ minorent $\mathscr{A}$ ne donne qu'une inclusion. Vous devez aussi montrer que, si X minore $\mathscr{A}$, alors $X \subset \{4\}$.

2-d) Dire que l'ensemble des minorants de $\mathscr{A}$ est fini, donc possède un maximum est désespérant ... quand vous avez montré en **2-b)** que $\mathscr{A}$ (qui est fini) n'a pas de minimum. Vous ne devez pas être prêts à raconter n'importe quoi quand cela vous arrange.

L'indication de l'énoncé ne vous dispensait pas de justifier ce que vous affirmiez. Elle servait à vous aider à bien comprendre ce qu'était la borne inférieure de $\mathscr{A}$ et à vous guider dans vos justifications. Vu vos réponses, c'était raté.

3-d) Il convenait de s'intéresser à une partie non vide et bornée de $\mathscr{P}_f(\mathbb{N})$, et non finie.

III - Nombre de diviseurs positifs d'un entier naturel.

Dans tout ce problème, il fallait bien comprendre que si l'on « trouve » d diviseurs (distincts) à n, alors on a juste $d_n \geqslant d$. Il peut rester d'autres diviseurs pour n !

1) Justifiez en donnant tous les diviseurs positifs de 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

2-a) Méditez ceci : $8 \mid 4 \times 6$, mais $8 \nmid 4$ et $8 \nmid 6$. De même, $10 \times 12 \mid 24 \times 20$, mais $10 \nmid 24$ et $12 \nmid 20$. Aussi : $6 \mid 2 \times 3$, or $2 \wedge 3 = 1$: est-ce que $6 \mid 2$ ou $6 \mid 3$?

2-b) Passer 10 lignes à montrer l'existence (donc, à refaire **2-a)**) est expédier l'unicité d'un coup de pipeau (du genre : a et b sont premiers entre eux, donc on a évidemment l'unicité) relève de la tentative d'arnaque (envers vous même, tout d'abord). Vous ne devez pas céder à la tentation d'écrire quelque chose de faux pour répondre coûte que coûte à une question. Cela ne peut que vous faire perdre des points par la suite. Cela veut dire que vous devez examiner méticuleusement toutes vos affirmations et vous retenir de rédiger ce dont vous ne vous êtes pas assuré.

2-d) Vous pouviez commencer par considérer un exemple (par exemple : 2 et 4, ou 6 et 10), et observer que, si a et b ne sont pas premiers entre eux, les produits de diviseurs de a et de b se « recoupent ».

3) Tout entier ne possède pas toujours deux diviseurs distincts : 1 !

4) Les exemples précédents ($k \leqslant 2$) ne constituent pas une justification.

La question **1)** vous donnait un exemple ($4 = 2^2$, $d_4 = 3$), la **5)** la solution ($q = 1$). Donner une réponse erronée relevait donc de l'exploit.