



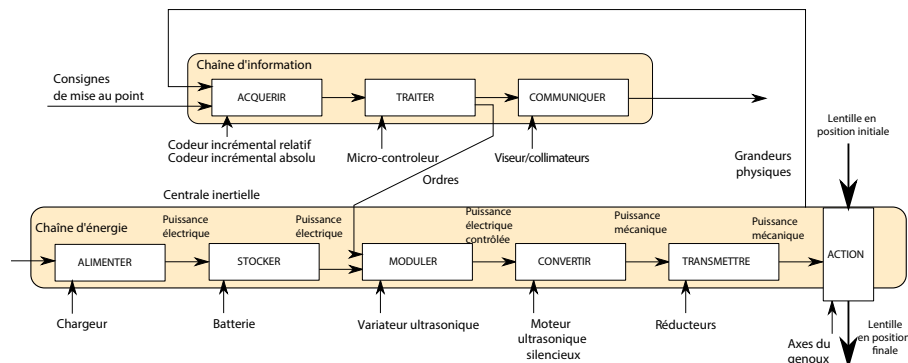
LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON
SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR
CLASSE PRÉPARATOIRE P.S.I.
ANNÉE 2019 - 2020

Cycles : C1 ; C2 ;

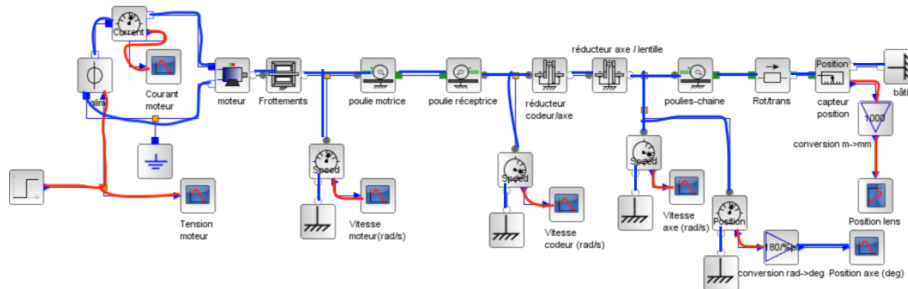
DS 1 - Modélisation de l'auto-focus d'un appareil photo réflex

Corrigé

Q 1 : A partir des données présentées dans la partie précédente compléter la chaîne fonctionnelle relative à l'autofocus d'un appareil photo réflex.



Q 2 : Sur la modélisation multiphysique, repérer les parties acausales et les parties causales. Pour cela on surlignera en rouge ce qui représente la modélisation causale et en bleu ce qui représente la modélisation acausale.



Q 3 : Décrire en quelques phrases ce modèle et ce qu'il permet de représenter. En particulier en explicitera les grandeurs physiques et la façon dont elles sont mesurées. On précisera également qu'elles sont les grandeurs imposées et mesurées.

La partie gauche du modèle représente le fonctionnement du moteur. Ce modèle permet de représenter la partie électrique. L'ensemble de la chaîne d'énergie à partir du bloc "convertir" est représenté : poulie-courroie, réducteur, poulie-chaîne, mécanisme de transformation de mouvement rotation/translation. Pour la partie électrique on impose une tension d'alimentation du moteur. On mesure en série le courant moteur. Le modèle permet de mesurer le long de la chaîne d'énergie les grandeurs cinématique (rotations et translation) à chaque fois par rapport au bâti.

Q 4 : Préciser les différences du point de vue de l'utilisation entre les codeurs absolus et relatifs.

- Un codeur absolu permet de connaître une position absolue. Une seule combinaison numérique correspond à une seule position. Ainsi à la mise à l'énergie la position est connue. Il n'y a donc pas besoin de calibrer le capteur.
- Un codeur relatif permet de connaître une position relativement à la position de initiale. Ainsi à la mise à l'énergie la position n'est pas connue. Il est nécessaire de calibrer le capteur. Pour cela il faut que sur l'axe mesuré il y ait un dispositif de détection de butée mécanique ou électrique.

Q 5 : Donner la résolution possible pour la course totale de la lentille mobile avec le codeur absolu. Justifier que le codeur absolu ne soit utilisé que lors de la phase d'initialisation de l'objectif photographique.

Soit q la résolution du codeur absolu linéaire sur 4 bits et soit c la course totale de la lentille. On a :

$$q_{\text{abs}} = \frac{c}{2^4} = \frac{6\text{mm}}{2^4} = 375\mu\text{m}$$

Comme $q > 100\mu\text{m}$, la résolution est insuffisante pour une utilisation normale.

Q 6 : Déterminer la relation entre le déplacement de la lentille mobile d_l et la position angulaire du codeur incrémental θ_{rc} . En déduire la résolution possible pour la course totale de la lentille, si elle est déterminée en comptant les impulsions du codeur incrémental sur les fronts montants.

On commence par calculer le rapport de réduction du train simple d'engrenages avec en entrée $\Delta\theta_{rc}$ la rotation de l'arbre du codeur incrémental et en sortie $\Delta\theta_l$ la rotation de l'arbre de la lentille :

$$\frac{\Delta\theta_l}{\Delta\theta_{rc}} = (-1)^7 \frac{Z_3 \cdot Z_4 \cdot Z_5 \cdot Z_7 \cdot Z_9 \cdot Z_{11} \cdot Z_{12} \cdot Z_{14}}{Z_4 \cdot Z_5 \cdot Z_6 \cdot Z_8 \cdot Z_{10} \cdot Z_{12} \cdot Z_{13} \cdot Z_{15}} = r$$

$$r = -\frac{Z_3 \cdot Z_7 \cdot Z_9 \cdot Z_{11} \cdot Z_{14}}{Z_6 \cdot Z_8 \cdot Z_{10} \cdot Z_{13} \cdot Z_{15}} = 0,005$$

Par définition du pas de la liaison hélicoïdale, on peut aussi écrire :

$$d_l = \left| \frac{p}{2\pi} \Delta\theta_l \right| = \frac{p}{2\pi} \cdot r \cdot \Delta\theta_{rc}$$

La résolution en utilisant le codeur incrémental est donnée lorsque l'arbre du codeur fait un angle de $2\pi/30$. Cela s'écrit :

$$q_{\text{inc}} = \frac{p}{2\pi} \cdot r \cdot \frac{2\pi}{30} = 5,2\mu\text{m}$$

Q 7 : En déduire le nombre de bits nécessaires pour coder l'information « déplacement de la lentille mobile », si cette dernière est donnée par le comptage du nombre d'impulsions au niveau du codeur incrémental.

Soit $n \in \mathbb{N}$ le nombre de bits nécessaires pour coder l'information du codeur incrémental :

$$q_{\text{inc}} \geq \frac{c}{2^n}$$

$$2^n \geq \frac{c}{q_{\text{inc}}}$$

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{c}{q_{\text{inc}}}\right)}{\ln 2}$$

$$n \geq 10,23$$

Q 8 : Passer les équations du modèle de connaissance dans le domaine de Laplace.

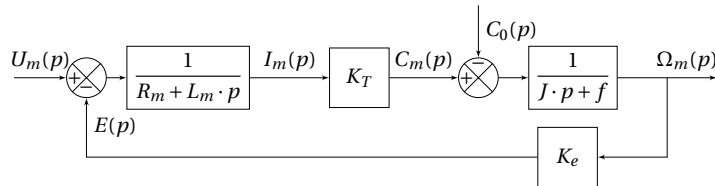
$$C_m(p) - C_0(p) - f \cdot \Omega_m(p) = J \cdot p \cdot d\Omega_m(p)$$

$$U_m(p) = E(p) + L_m \cdot p I_m(p) + R_m \cdot I_m(p)$$

$$E(p) = K_e \cdot \Omega_m(p)$$

$$C_m(p) = K_T \cdot I_m(p).$$

Q 9 : On donne la structure du schéma bloc modélisant le moteur à courant continu. Compléter le schéma en précisant les fonctions de transfert et les variables.



Q 10 : Exprimer sous ces conditions $I_m(p)$ en fonction de $U_m(p)$.

Le rotor est bloqué, ainsi $\Omega_m(p) = 0 \rightarrow E(p) = 0$.

On obtient alors,

$$I_m(p) = \frac{1}{R_m + L_m \cdot p} U_m(p).$$

Q 11 : Donner l'expression de $U_m(p)$ et en déduire $I_m(p)$.

D'après l'essai on peut approximer $u_m(t)$ à un échelon retardé de $T = 50 \mu s$ et d'amplitude $U_0 = 1,6 V$. Le théorème du retard donne :

$$U_m(p) = \frac{U_0 e^{-T \cdot p}}{p}$$

On en déduit :

$$I_m(p) = \frac{U_0 e^{-T \cdot p}}{p} \frac{1}{R_m + L_m \cdot p}$$

Q 12 : A l'aide de la figure ?? et des résultats précédents, justifier la forme de la courbe à partir du modèle proposé.

D'après la question précédente on doit s'attendre à ce que $I_m(p)$ corresponde à la réponse indicielle retardé d'un premier ordre. Cela semble être le cas car on n'observe pas de dépassement et la courbe présente une tangente à l'origine de l'échelon ($t = T$) non nulle.

Q 13 : Déterminer la résistance d'induit R_m et de l'inductance d'induit L_m à partir de l'essai à rotor bloqué et des équations précédentes.

Avec $u_m = u_{m0} = 1,6 V = cst$. La courbe de $i_m(t)$ représente donc la réponse d'un système du premier ordre où $K = 1/R_m$ et $\tau = L_m/R_m$.

La valeur finale donne :

$$i_m(t) = K u_{m0} = 75 mA$$

D'où :

$$R_m = \frac{u_{m0}}{0,075} = 21,3 \Omega$$

En identifiant la constante de temps par la propriété $i_m(\tau) = 0,63 \cdot i_m(t)$, on trouve $\tau = \frac{L_m}{R_m} = 100 \mu s$. Finalement :

$$L_m = R_m \tau = 2 mH$$

Q 14 : Déterminer à partir de ces résultats la valeur numérique de la constante de fém (K_e) que l'on supposera égale à la constante de couple (K_T).

On approxime la courbe issue des essais par une droite dont la pente vaut $1/K_e$. On a donc :

$$K_e = \frac{E_2 - E_1}{\omega_{m2} - \omega_{m1}} = \frac{2,5 - 1}{1600 - 700} = 1,7 mV/(rad/s) = K_T$$

Q 15 : Déterminer l'expression de la vitesse de rotation de la MCC en régime permanent notée ω_∞ en fonction des paramètres U_m, C_0, K_T, K_e, R_m et f .

On reprend l'équation du principe fondamental de la dynamique :

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = C_m - C_0 - f\omega_m$$

En régime établi, cela se simplifie :

$$C_{m,\infty} - C_0 - f\omega_{m,\infty} = 0$$

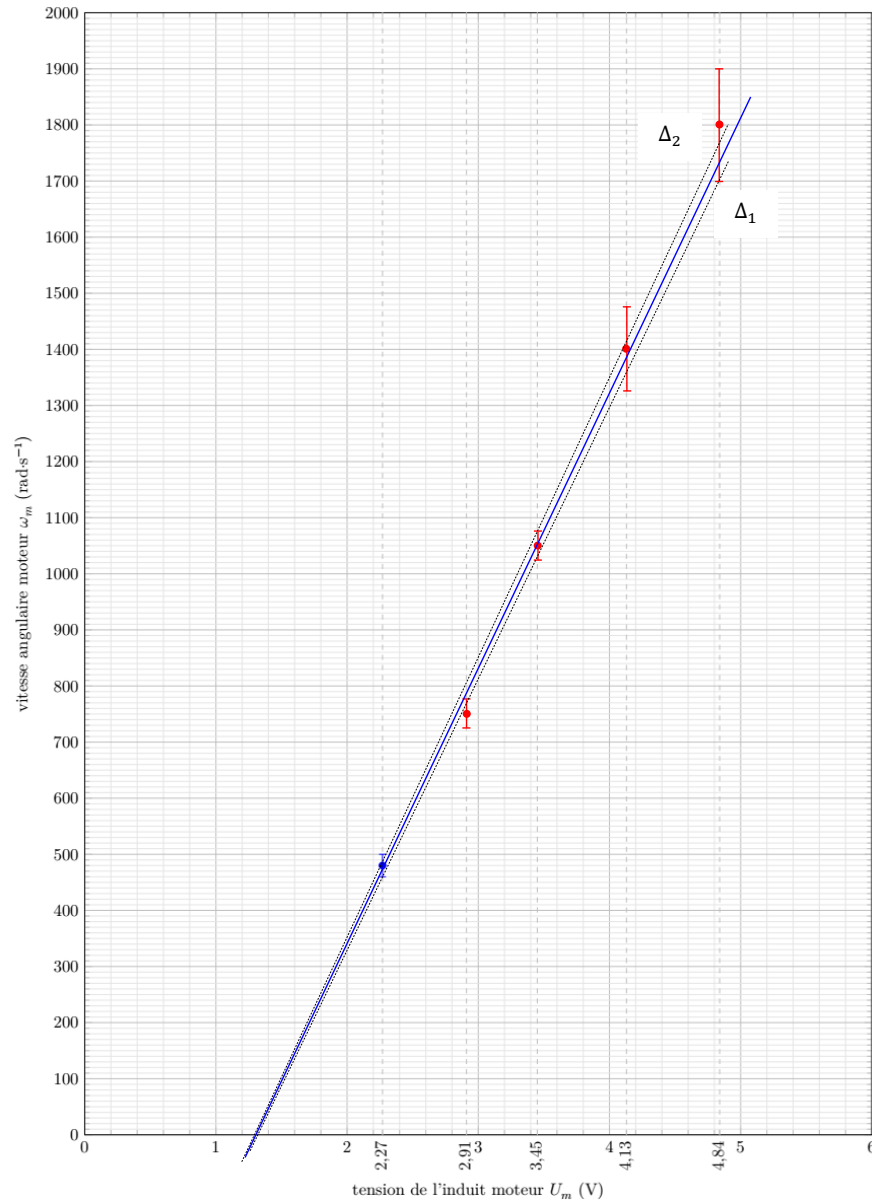
Or pendant le régime établi, l'intensité est constante et la loi des mailles devient :

$$u_{m,\infty} = R_m i_{m,\infty} + K_e \omega_{m,\infty}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} K_T i_{m,\infty} - C_0 - f\omega_{m,\infty} &= 0 \\ K_T \cdot \frac{u_{m,\infty} - K_e \omega_{m,\infty}}{R_m} - C_0 - f\omega_{m,\infty} &= 0 \\ \omega_{m,\infty} \left(\frac{K_T K_e}{R_m} + f \right) &= \frac{K_T}{R_m} u_{m,\infty} - C_0 \\ \omega_{m,\infty} &= \frac{K_T}{K_T K_e + f R_m} u_{m,\infty} - \frac{R_m}{K_T K_e + f R_m} C_0 \end{aligned}$$

Q 16 : Tracer sur le document réponse la courbe $\omega_\infty(U_m)$.



Q 17 : En déduire les valeurs numériques de C_0 et f .

On a : $u_m = 1,3 \text{ V}$ en $\omega_m = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
Donc,

$$0 = 1,3K_T - R_m C_0$$

$$C_0 = \frac{1,3K_T}{R_m} = 0,116 \text{ mN.m}$$

La pente de la droite tracée en question précédent vaut :

$$\frac{K_T}{fR_m + K_T^2} = \frac{1730 - 0}{4,84 - 1,3} = 488$$

$$f = \frac{K_T - 488K_T^2}{488R_m} = 1,33 \cdot 10^{-8} \frac{\text{N.m}}{\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)}$$

Q 18 : Placer sur la courbe les incertitudes dues à la dispersion des mesures.

Q 19 : En tenant compte des incertitudes dans la mesure de vitesse, donner un encadrement de C_0 et de f .
Très difficile de répondre à cette question. En effet, graphiquement, une seule droite passe par l'ensemble des intervalles de tolérance.

Mais de façon un peu artificielle, on peut encadrer la courbe précédente par deux droites définies en pointillées sur le DR.

- $C_{0,1} = 0,116 \text{ mN.m}$; $f_1 = 1,54 \cdot 10^{-8} \frac{\text{N.m}}{\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)}$
- $C_{0,2} = 0,123 \text{ mN.m}$; $f_2 = 9,89 \cdot 10^{-9} \frac{\text{N.m}}{\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)}$

On pourrait donc encadrer les deux valeurs par :

$$0,116 \cdot 10^{-3} \leq C_0 \leq 0,123 \cdot 10^{-3}$$

$$9,89 \cdot 10^{-9} \leq f \leq 1,54 \cdot 10^{-8}$$

Avec cet encadrement, la tolérance sur le second point de mesure n'est pas respectée.

Q 20 : On pose $\Omega_m(p) = H_u(p) \cdot U_m(p) + H_c(p) \cdot C_0(p)$. Exprimer $H_u(p)$ et $H_c(p)$ en fonction de A , B , C et D .
Par théorème de superposition :

- Détermination de $H_u(p)$: on prend $C_0(p) = 0$ et $U_m(p) \neq 0$. Par la formule de Black :

$$H_u(p) = \frac{ABC}{1 + ABCD}$$

- Détermination de $H_c(p)$: on prend $C_0(p) \neq 0$ et $U_m(p) = 0$. Par la formule de Black :

$$H_c(p) = \frac{C}{1 + ABCD}$$

Q 21 : En utilisant le résultat de la question 9, montre que l'on peut mettre $H_u(p)$ et $H_c(p)$ sous la forme :

$$\begin{cases} H_u(p) = \frac{K_m}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \\ H_c(p) = \frac{K_c(1 + \tau_m p)}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \end{cases}$$

On donner les expression de K_m , K_c , τ_m , ξ et ω_0 en fonctions des constantes du problème.

D'après la question 9 :

$$A = \frac{1}{R_m + L_m \cdot p} ; B = K_T ; C = \frac{1}{J \cdot p + f} \text{ et } D = K_e$$

On obtient alors :

$$H_u(p) = \frac{\frac{K_T}{(R_m + L_m \cdot p)(J \cdot p + f)}}{1 + \frac{K_T \cdot K_e}{(R_m + L_m \cdot p)(J \cdot p + f)}} = \frac{K_T}{(R_m + L_m \cdot p)(J \cdot p + f) + K_T \cdot K_e}$$

$$= \frac{\frac{K_T}{K_T \cdot K_e + R_m \cdot f}}{1 + \frac{L_m \cdot f + J \cdot R_m}{K_T \cdot K_e + R_m \cdot f} p + \frac{J \cdot L_m}{K_T \cdot K_e + R_m \cdot f} p^2}$$

On trouve alors $K_m = \frac{K_T}{K_T \cdot K_e + R_m \cdot f}$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_T \cdot K_e + R_m \cdot f}{J \cdot L_m}}$ et

$$\xi = \frac{\omega_0}{2} \frac{L_m \cdot f + J \cdot R_m}{K_T \cdot K_e + R_m \cdot f} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K_T \cdot K_e + R_m \cdot f}{J \cdot L_m}} \frac{L_m \cdot f + J \cdot R_m}{K_T \cdot K_e + R_m \cdot f}$$

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{L_m \cdot f + J \cdot R_m}{\sqrt{(K_T \cdot K_e + R_m \cdot f) J \cdot L_m}}$$

$$H_c(p) = \frac{\frac{1}{J \cdot p + f}}{1 + \frac{K_T \cdot K_e}{(R_m + L_m \cdot p)(J \cdot p + f)}} = \frac{R_m + L_m \cdot p}{(R_m + L_m \cdot p)(J \cdot p + f) + K_T \cdot K_e}$$

$$= \frac{R_m}{K_T \cdot K_e + R_m \cdot f} \frac{1 + \frac{L_m}{K_T \cdot K_e + R_m \cdot f} p}{1 + \frac{L_m \cdot f + J \cdot R_m}{K_T \cdot K_e + R_m \cdot f} p + \frac{J \cdot L_m}{K_T \cdot K_e + R_m \cdot f} p^2}$$

On trouve donc $\tau_m = \frac{L_m}{K_T \cdot K_e + R_m \cdot f}$ et $K_c = \frac{R_m}{K_T \cdot K_e + R_m \cdot f}$

Q 22 : Déterminer l'expression de la fonction de transfert E .

$$\omega_m(t) = \frac{d\theta_m(t)}{dt} \text{ ainsi } \Omega_m(p) = p \cdot \theta_m(p), \text{ d'où } E = \frac{1}{p}$$

Q 23 : Donner l'expression du gain d'adaptation K_a en fonction des grandeurs définies dans le schéma bloc (figure??) pour que le système soit correctement asservi.

Pour que le système soit correctement asservi, il faut vérifier :

$$\varepsilon(p) = 0 \Leftrightarrow D_c(p) = D_l(p).$$

Or,

$$\varepsilon(p) = K_a \cdot D_c(p) - \frac{K_{cod} K_{pc}}{K_{cin}} D_l(p)$$

On obtient alors :

$$K_a = \frac{K_{cod} K_{pc}}{K_{cin}}$$

Q 24 : Donner l'expression de $\varepsilon(p)$ en fonction de $D_c(p)$ et des constantes K_a , K_{cin} , K_m , ξ et ω_0 .

$$\varepsilon(p) = K_a \cdot (D_c(p) - D_l(p)) = K_a \cdot \left[D_c(p) - \frac{K_{cin}}{p} H_u(p) \cdot K_p \cdot \varepsilon(p) \right]$$

On obtient donc :

$$\varepsilon(p) = \frac{K_a}{1 + \frac{K_{cin} \cdot K_p}{p} H_u(p)} \cdot D_c(p) = \frac{K_a}{1 + \frac{K_{cin} \cdot K_p \cdot K_m}{p \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}} \cdot D_c(p)$$

Q 25 : En déduire l'erreur statique théorique issue de la modélisation et conclure vis-à-vis du cahier des charges.

Pour déterminer l'erreur statique ε_s on pose $D_c(p) = \frac{D_0}{p}$.

On calcule alors $\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p)$.

On obtient donc :

$$\lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \frac{p \cdot K_a}{1 + \frac{K_{cin} \cdot K_p \cdot K_m}{p \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}} \cdot \frac{D_0}{p} = 0$$

Le cahier des charges est bien respecté.

Q 26 : Conclure sur l'étude en indiquant :

- **les critères du cahier des charges qui sont validés avec les valeurs ;**
- **les hypothèses ;**
- **les sources des écarts observés entre le comportement simulé, souhaité et réel de l'objectif photographique ;**
- **Critères du cahier des charges :**
 - Erreur statique : la courbe de la réponse indicielle semble avoir une asymptote à 2 mm en $t \rightarrow \infty$ malgré l'indication de 1,994 mm ; l'erreur statique serait donc nulle et le critère respecté.
 - Rapidité : $t_{r5\%} = 0,13 \text{ s} < 0,6 \text{ s}$ donc critère respecté.
 - Aucun dépassement : critère respecté.
- **Hypothèses :**
 - Le modèle cinématique ne prend pas en compte les éventuels jeux dans la transmission, l'éventuel glissement de la courroie et son élasticité.
 - Les masses et inerties de certains solides sont négligées pour le calcul de l'inertie équivalente.
 - On fait l'hypothèse que le moteur est alimenté en courant continu alors qu'il est vraisemblablement alimenté par un hacheur.
 - On considère un modèle couple de frottement sec constant.
- **Ecarts :** les courbes de réponses indicielles simulée et réelle sont très proches, il est difficile de statuer sur les écarts. Les jeux dans la transmission pourraient expliquer le retard sur la réponse indicielle mesurée. Cependant, les autres causes d'écarts pourraient être :
 - L'estimation de K_e , C_0 et f est faite à partir de grandeurs entachées d'erreurs de mesure et de la chaîne d'acquisition notamment le filtrage numérique qui peut induire un retard et une erreur due à la discrétisation.
 - La stabilité du système n'est vérifiée que sur le modèle linéarisé.
 - Le correcteur utilisé réellement est vraisemblablement un correcteur numérique.
 - Il existe des modèles de frottement plus complexes que celui choisi.