Ex. 19 : 1) Si $x \geq 0$, $F(x) = \int_0^{\pi} \frac{|\sin(tx)|}{t} dt$

est définie.

Pb : $f_x : t \longmapsto \frac{|\sin(tx)|}{t}$ n'est pas définie en 0.

Mais : $f_x \xrightarrow[t \to 0]{} |x| = x$

en effet : si t est "petit" et > 0, $tx \in]0, \pi/2[$

donc $|\sin(tx)| = \sin(tx)$

et donc $f_x(t) = \frac{\sin tx}{tx} \times x \xrightarrow[t \to 0]{} x$

Posons : $\tilde{f}_x : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \longmapsto \begin{cases} \frac{|\sin(tx)|}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ x & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

$\tilde{f}_x$ est continue donc $\int_0^{\pi} \tilde{f}_x$ existe : on la note $F(x)$.

abus de notation : $\int_0^{\pi} \tilde{f}_x$ est encore notée $\int_0^{\pi} f_x$.

2) Rappel : si φ, ψ sont 2 fonctions dérivables, et f continue.

Soit : $F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt$.

Alors F est dérivable et $F'(x) = \psi'(x) f(\psi(x)) - \varphi'(x) f(\varphi(x))$.

Ici : $F(x) = \int_0^{\pi} \frac{|\sin(tx)|}{t}\,dt \underset{\substack{u=tx \\ du = x\,dt}}{=} \int_0^{\pi x} \frac{|\sin(u)|}{\frac{u}{x}} \times \frac{du}{x}$

$= \int_0^{\pi x} \frac{|\sin u|}{u}\,du = \int_0^{\pi x} \tilde{f}(u)\,du$

avec $\tilde{f} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

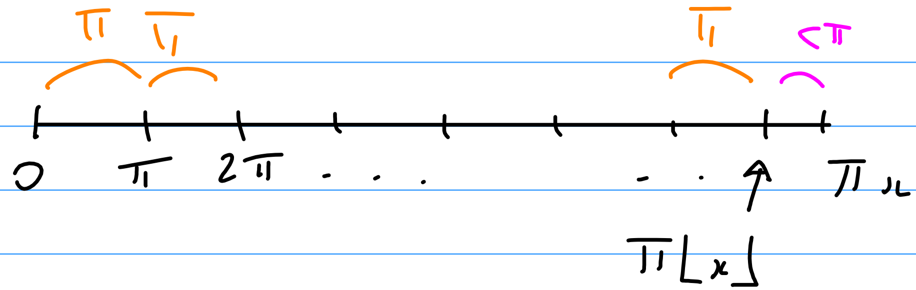
$$u \longmapsto \begin{cases} \dfrac{|\sin u|}{u} & \text{si } u \neq 0 \\ 1 & \text{si } u = 0 \end{cases}$$

F est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}_+$:

$$F'(x) = \pi \times \tilde{f}(\pi x) = \begin{cases} \pi \dfrac{|\sin(\pi x)|}{\pi x} & \text{si } x \neq 0 \\ \pi & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{|\sin(\pi x)|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \pi & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3) a) $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi x} \frac{|\sin t|}{t}\, dt$



relation de Chasles : $F(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor - 1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt + \int_{\lfloor x \rfloor \pi}^{\pi x} \frac{|\sin t|}{t} dt$

b) Rappel : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln n$.

Nous allons utiliser : $\forall t \in [k\pi, (k+1)\pi]$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

d'où : $F(x) \geqslant \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor - 1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{(k+1)\pi} dt + \int_{\pi \lfloor x \rfloor}^{\pi x} \frac{|\sin t|}{t} dt$.

or : $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{(k+1)\pi} dt = \frac{1}{(k+1)\pi} \times \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \, dt$

$$= \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin t \, dt \quad \text{car} \left| \begin{array}{l} |\sin| \text{ est } \pi\text{-périodique} \\ \sin \geq 0 \text{ sur } [0,\pi] \end{array} \right.$$

$$= \frac{2}{(k+1)\pi}$$

dc. $$F(x) \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor - 1} \frac{1}{(k+1)} + \int_{\pi \lfloor x \rfloor}^{\pi x} \frac{|\sin t|}{t} \, dt$$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor - 1} \frac{1}{(k+1)} = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{k} \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln \lfloor x \rfloor .$$

$$\underset{x \to +\infty}{\sim} \ln x$$

car : $\ln(x-1) \leq \ln \lfloor x \rfloor \leq \ln x$

et $\ln(x-1) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln x$

$$0 \leq \int_{\pi \lfloor x \rfloor}^{\pi x} \frac{|\sin t|}{t} \, dt \leq \int_{\pi \lfloor x \rfloor}^{\pi x} \frac{1}{t} \, dt$$

Or $\displaystyle\int_{\pi\lfloor x\rfloor}^{\pi x} \frac{1}{t}\,dt = \ln(\pi x) - \ln(\pi\lfloor x\rfloor)$

$= \ln(x) - \ln\lfloor x\rfloor \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

$= o(\ln x)$

$$f(x) \geqslant \underbrace{\underbrace{\frac{2}{\pi}\sum \cdots}_{\sim \frac{2}{\pi}\ln x} + \underbrace{\int \cdots}_{= o(\ln x)}}_{\sim \frac{2}{\pi}\ln x\,.}$$

On montre aussi que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor -1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt = \int_0^{\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt + \sum_{k=1}^{\lfloor x\rfloor -1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt$

$$\leq \underbrace{\underbrace{\int_0^{\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt}_{\substack{= cte \\ = o(\ln x)}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\lfloor x\rfloor -1} \frac{1}{k\pi} \times \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,dt}_{\sim \frac{2}{\pi}\ln x}}_{\sim \frac{2}{\pi}\ln x}$$

Finalement : F est encadrée par 2 fonctions équivalentes

à $\frac{2}{\pi}\ln x$ qd $x \to +\infty$, dc : $\boxed{F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}\ln x}$.