Devoir à la maison n° 15

À rendre le 25 mars

Soit E un espace vectoriel réel, non réduit au vecteur nul. On utilisera les notations usuelles d'anneau pour $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$. Notamment, la notation uv désigne $u \circ v$.

On note $\mathscr{H}$ l'ensemble des homothéties de E, et $\mathscr{P}$ celui des projecteurs de E.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note alors A_λ l'ensemble des endomorphismes u de E vérifiant $u^2 = \lambda u$.

1) Quels sont les éléments de A_λ qui sont des automorphismes de E ?

2) On suppose ici que $\lambda = 0$, et $u \in \mathscr{L}(E)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ pour que $u \in A_0$.

Dorénavant, nous supposerons que $\lambda \neq 0$.

3) Soit $u \in A_\lambda$.

- **a)** Déterminer $u(x)$ si $x \in \mathrm{Im}(u)$.
- **b)** Montrer que $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont supplémentaires dans E.
- **c)** Montrer que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$.
- **d)** Que peut-on dire de $u - \lambda \mathrm{Id}_E$? Déduire de la question précédente que $\mathrm{Im}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(u)$.

4) <u>Exemple</u> : dans cette partie, on suppose que $E = \mathbb{R}^4$. On considère

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} -9x & -4y & -8z & \\ 2x & -4y & -6y & -8t \\ 8x & +6y & +11z & +4t \\ -9x & -4y & -8z & \end{pmatrix} \end{array} \right. .$$

- **a)** Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ unique tel que $u \in A_\lambda$. Quel est ce λ ?
- **b)** Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u)$ ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$.
- **c)** Construire à partir de ces deux bases précédentes une base de $\mathbb{R}^4$.

5)
- **a)** Pour $u \in A_\lambda$, existe-t-il $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que αu est un projecteur ?
- **b)** En déduire une écriture explicite de A_λ, en fonction notamment de $\mathscr{P}$ et de λ.

Dans la suite, nous considérerons $u, v \in A_\lambda$.

6) Montrer que si $uv + vu = 0_{\mathscr{L}(E)}$, alors $uv = vu = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

7) **a)** Montrer que $u + v \in A_\lambda$ si et seulement si $uv = vu = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

On se place alors dans le cas où $u + v \in A_\lambda$.

b) Montrer que $\mathrm{Im}(u + v) = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.

c) Montrer que $\mathrm{Ker}(u + v) = \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$.

8) Dans cette question, on suppose uniquement que $uv = vu$.

a) Montrer qu'il existe $\lambda' \in \mathbb{R}$ tel que $uv \in A_{\lambda'}$. Ce λ' est-il unique ? Le déterminer le cas échéant.

b) Montrer aussi que

$$\mathrm{Im}(uv) = \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v) \ \text{ et } \ \mathrm{Ker}(uv) = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v).$$

— **FIN** —