Feuille d'exercice n° 05 : **Intégration pour les équations différentielles - fiche d'entraînement - correction**

Exercice 1

1) $\displaystyle\int x^3\sqrt{4+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{(x^4+4)^{3/2}}{6}$

2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \ln(\ln x)$

3) $\displaystyle\int \frac{(x+5)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+4}} = 2\left(\frac{(x+4)^{3/2}}{3} + \sqrt{x+4}\right)$

4) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{-x/10}\,\mathrm{d}x = (-10x-100)\mathrm{e}^{-x/10}$

5) $\displaystyle\int x^2\mathrm{e}^{-x/10}\,\mathrm{d}x = (-10x^2-200x-2000)\mathrm{e}^{-x/10}$

6) $\displaystyle\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^3\ln x}{3} - \frac{x^3}{9}$

7) $\displaystyle\int x^n\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$ si $n \neq -1$, $\displaystyle\frac{\ln^2 x}{2}$ si $n=-1$

8) $\displaystyle\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x = 2x\sin x + (2-x^2)\cos x$

9) $\displaystyle\int x^3\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{(-x^2-1)\mathrm{e}^{-x^2}}{2}$

10) $\displaystyle\int x^3\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2(x^2+1)^{3/2}}{5} - \frac{2(x^2+1)^{3/2}}{15}$

11) $\displaystyle\int \operatorname{Arcsin}(x)\,\mathrm{d}x = x\operatorname{Arcsin}x + \sqrt{1-x^2}$

12) $\displaystyle\int \operatorname{Arcsin}^2(x)\,\mathrm{d}x = x\operatorname{Arcsin}^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\operatorname{Arcsin}x - 2x$

13) $\displaystyle\int \operatorname{Arctan}(x)\,\mathrm{d}x = x\operatorname{Arctan}x - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$

14) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{Arcsin}(x/3) - \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$

15) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}} = -\ln\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} + \frac{1}{|x|}\right)$ (poser $x=\cos u$ puis $t=\dfrac{1}{\cos u}+\tan u$) ou plus rapide $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}} = -\operatorname{Argch}(1/|x|)$ en posant : $1/|x| = \operatorname{ch}u$.

16) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a}{|x|}+\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{|x|}\right)$ (poser $x = a\tan u$ puis $t = \dfrac{1}{\sin u}+\mathrm{cotan}\, u$) ou plus rapide : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a}\,\mathrm{Argsh}(a/|x|)$ en posant $a/|x| = \mathrm{sh}\, u$.

17) $\displaystyle\int \sqrt{4+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{Argsh}(x/2) + \frac{x\sqrt{x^2+4}}{2}$

18) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{\ln(x+a)}{2a} - \frac{\ln(x-a)}{2a}$

19) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,\mathrm{d}x = a\,\mathrm{Arcsin}(a/|x|) + \sqrt{x^2-a^2}$

20) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^2} = \frac{\mathrm{Arctan}(x/a)}{2a^3} + \frac{x}{2a^2x^2+2a^4}$ (poser $x = a\tan u$).

Exercice 2

1) on pose $u = x^2 =$, et ensuite on fait une ipp : $\displaystyle\int x^3 f(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int u f(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(ug(u) - \int g(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(x^2 g(x^2) - h(x^2))$

2) $\displaystyle\int x^{2n-1} f(x^n)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}(x^n g(x^n) - h(x^n))$ par analogie.

Exercice 3 Dans les primitives suivantes, trouver un entier n qui permette un calcul par changement de variable, et calculer la primitive :

1) avec $n = 3$, $\displaystyle\int x^n\sqrt{1-x^4}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}(1-x^4)^{3/2}$.

2) avec $n = 3$: $\displaystyle\int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sqrt{1-x^4}$, et avec $n = 1$: $\displaystyle\int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Arcsin}(x^2)$.

3) avec $n = 9$: $\displaystyle\int \frac{x^n}{1+x^{10}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\ln(1+x^10)$, et avec $n = 4$, $\displaystyle\int \frac{x^n}{1+x^{10}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\,\mathrm{Arctan}(x^5)$.

4) avec $n = 7$, $\displaystyle\int \frac{x^6}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{7}\ln(1+x^7)$, et avec $n = 14$, $\displaystyle\int \frac{x^6}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{7}\,\mathrm{Arctan}(x^7)$.

5) avec $n = 1$, $\displaystyle\int x^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$.

6) avec $n = 4$, $\displaystyle\int x^n \mathrm{e}^{2x^5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\mathrm{e}^{2x^5}$.

7) avec $n = 6$, $\displaystyle\int x^5\sqrt{1-x^n}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{9}(1-x^6)^{3/2}$.

8) avec $n = 7$, $\displaystyle\int \frac{x^6}{\sqrt{1-x^n}}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{7}\sqrt{1-x^7}$, et avec $n = 14$, $\displaystyle\int \frac{x^6}{\sqrt{1-x^n}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{7}\,\mathrm{Arcsin}(x^7)$.

9) avec $n = 1$, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^n \ln x} = \ln(\ln x)$.

10) avec $n = 1$, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^n(\ln x)^7} = -\frac{1}{6\ln^6 x}$

11) avec $n = 5$, $\displaystyle\int x^n \sin(x^6)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\cos(x^6)$.

12) avec $n=3$, $\displaystyle\int \frac{\sin^n x \cos x}{\sqrt{3+\sin^4 x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{3+\sin^4 x}$.

13) avec $n=4$, $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x \cos x}{\sqrt{3+\sin^n x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{3+\sin^4 x}$.