Bienvenue en MP

Voici une feuille d'exercices pour préparer la rentrée, en plus des incontournables classiques à revoir : trigonométrie, calculs de primitives, résolution d'équations différentielles...

À l'oral des concours CCP, vous aurez en plus d'un exercice noté sur 12, un exercice noté sur 8 parmi ceux proposés dans une liste de 113 exercices corrigés, certains étant de niveau sup. Ces exercices doivent être connus parfaitement au moment de l'oral pour être faits rigoureusement et sans aide en 10/15 mn maxi.
Voici donc les exercices niveau MPSI (les autres suivront l'an prochain) : ils sont à connaître pour la rentrée à titre de révision de votre programme de première année.

Les corrigés sont sur le site de maths de la classe ***mp.lamartin.fr****.*
Ne regardez pas la correction avant d'avoir complètement résolu l'exercice par écrit. Entrainez-vous particulièrement à respecter la rigueur de la rédaction et des calculs. Vous remarquerez certaines questions littéralement de cours, il est en effet indispensable de très bien connaître son cours pour les écrits et oraux de concours.

Si vous avez des questions, vous pouvez me joindre : ***jpberne@lamartin.fr***

Je vérifierai que ce travail à bien été fait convenablement lors du premier DS de maths de l'année.

Très bonnes vacances à tous...

Exercice 1

1) On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
2) Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 2

1) On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2) On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
En utilisant la formule de Leibniz, concernant la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, la valeur de $f^n(x)$.
3) Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Exercice 3

1) Énoncer le théorème des accroissements finis.
2) Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a,b[$.
On suppose que f est continue sur $[a;b]$ et que f est dérivable sur $]a;x_0[$ et sur $]x_0;b[$
Démontrer que, si f' admet une limite en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.
3) Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.
Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1) Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge.

   Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2) Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n!}{n^n}$?

Exercice 5

1) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs. Montrer que :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

2) étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{(i-1)\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)\ln n}$.

Exercice 6

On considère les deux équations suivantes :

$$2xy' - 3y = 0 \qquad (H)$$

$$2xy' - 3y = \sqrt{x} \qquad (E)$$

1) Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2) Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Exercice 7

1) Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quel est le sens géométrique de la somme de Riemann $R_n(f) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$?
   Illustrer par un dessin soigné.

   (b) Démontrer, lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(f) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

2) Déterminer la limite de la suite (x_n) définie par $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{3n^2+k^2}$.

Exercice 8

Soit a un nombre complexe.
On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in (\mathbb{C})^2$.

1) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.

2) Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
   Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
   Indication : discuter suivant les valeurs de a.

Exercice 9

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n.
Soit f l'endomorphisme de E défini par : $\forall\, P \in E,\ f\,(P) = P - P'$.

1) Démontrer que f est bijectif de deux manières :
   (a) sans utiliser de matrice de f,
   (b) en utilisant une matrice de f.
2) Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f\,(P) = Q$.
   Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

Exercice 10

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2\,(\mathbb{R})$ défini par : $f\,(M) = AM$.

1) Déterminer $\mathrm{Ker} f$.
2) f est-il surjectif ?
3) Trouver une base de $\mathrm{Ker} f$ et une base de $\mathrm{Im} f$.

Exercice 11

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = \mathrm{Id}$.

1) Démontrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\ f$.
2) Démontrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\ g$.
3) Démontrer que $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im}\ g$.

Exercice 12

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n.

1) Démontrer que : $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker}\, f \Longrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
2) (a) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$.
   (b) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker}\, f$.

Exercice 13

Soit p, la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$, sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$, parallèlement à la droite D d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

1) Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Exercice 14

1) Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Exercice 15

1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\left(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\right)$.
   (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :
   a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in 0, r-1$, $P^{(k)}(a) = 0$.
2) Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 16

Soit p un nombre premier.

1) (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Prouver que si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.
   (b) Prouver que $\forall k \in 1, p-1$, p divise $\binom{p}{k} k!$ puis que p divise $\binom{p}{k}$.
2) (a) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n^p \equiv n \mod p$.
   Indication : Procéder par récurrence.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, p ne divise pas $n \Longrightarrow n^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

Exercice 17

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit le polynôme $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$.

1) Déterminer a et b pour que 1 soit racine d'ordre au moins 2 de P.
2) Dans ce cas, vérifier que le quotient de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$ est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)X^k$.

Exercice 18

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

1) On suppose $k \in 1, n-1$.
   Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2) On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 19

1) Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
2) Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.
   Soit $c \in \mathbb{N}$.
   Prouver que : $(a|c \text{ et } b|c) \Longleftrightarrow ab|c$.
3) On considère le système (S) : $\left\{\begin{array}{lcll} x & \equiv & 6 & \mathrm{mod}(17) \\ x & \equiv & 4 & \mathrm{mod}(15) \end{array}\right.$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.
   (a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.
   (b) *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

Exercice 20

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1) Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2) Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y.

Exercice 21

Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p(p \in]0, 1[)$.
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1) Donner la loi de X. Justifier.
2) La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in 0, n$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k | X = i)$.
   (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
   (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 22

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1) Déterminer la loi de X.
2) Déterminer la loi de Y.

Exercice 23

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1) Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2) Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3) Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.