III Quelques fondamentaux

25 février 2018

1. Propositions.

Définition 1.0.1.
Une *proposition* est un énoncé qui peut prendre deux valeurs de vérité : « vrai » (V) ou « faux » (F).

Exemple 1.0.2.
• $2 > 7$
• Pour tout nombre réel x, il existe un entier n tel que $n \leqslant x < n + 1$.

2. Connecteurs logiques.

Définition 2.0.1.
Un **connecteur logique** est un outil mathématique permettant de construire une proposition à partir d'une ou plusieurs propositions.

Définition 2.0.2.
La *table de vérité* d'une proposition construite à partir de connecteurs logiques est la donnée de la valeur de vérité de cette proposition pour chaque jeu de valeur de vérité des propositions prises en argument des connecteurs.

Définition 2.0.3.
Deux propositions sont dites ***équivalentes*** si elles ont la même table de vérité. On utilise alors le connecteur $\equiv$.

Les paragraphes suivants présentent les connecteurs logiques les plus utilisés en mathématiques.

2.1. Négation.

Définition 2.1.1.
Soit p une proposition. La proposition « non p », notée $\neg p$, est la proposition qui est vraie quand p est fausse, et fausse quand p est vraie. Sa table de vérité est :

p	$\neg p$
V	F
F	V

Théorème 2.1.2 (Loi de la double négation)**.**
Soit p une proposition, p et « non (non p) » sont deux propositions équivalentes, ce qui s'écrit :

$$p \equiv \neg(\neg p).$$

Démonstration.
Avec une table de vérité :

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
V	F	V
F	V	F

□

2.2. Conjonction « et » et disjonction « ou ».

Définition 2.2.1.
Soient p et q deux propositions.
— La *conjonction* de p et q est une proposition dite « p et q » et notée $p \wedge q$, qui est vraie si p et q sont vraies, et qui est fausse sinon.
— La *disjonction* de p et q est une proposition dite « p ou q » et notée $p \vee q$, qui est fausse si p et q sont fausses, et qui est vraie sinon.

Les tables de vérités de ces connecteurs sont donc :

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
V	V	V	V
F	V	F	V
F	F	F	F
V	F	F	V

Remarque 2.2.2.
Il existe un autre « ou », le « ou exclusif » : si p et q sont deux propositions, la proposition « p ou

exclusif q » est vraie si et seulement si p est vraie ou q est vraie, mais pas les deux. Autrement dit, cette proposition est fausse si et seulement si p et q ont même valeur de vérité.
Dans la vie courante, on utilise intuitivement le ou exclusif. Ex : fromage ou dessert.
Très classique : un logicienne, enceinte, croise un ami.
L'ami : « c'est un garçon ou une fille ? »
La logicienne : « Oui. »

Proposition 2.2.3 (Tiers exclu)**.**
Pour toute proposition p, $p \vee \neg p$ est vraie.

Proposition 2.2.4 (Non contradiction)**.**
Pour toute proposition p, $p \wedge \neg p$ est fausse.

Démonstration.
Écrire les tables de vérités de $p \vee \neg p$ et $p \wedge \neg p$. □

Théorème 2.2.5 (Lois de De Morgan)**.**
Soit p et q deux propositions.

1. $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$.
2. $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$.

Démonstration.
1. Construire les tables de vérité de ces deux propositions et constater que ce sont les mêmes.
2. Par le premier point et la loi de double négation,

$$\begin{aligned}\neg(p \vee q) &\equiv \neg([\neg\neg p] \vee [\neg\neg q]) \\ &\equiv \neg(\neg[(\neg p) \wedge (\neg q)]) \\ &\equiv (\neg p) \wedge (\neg q).\end{aligned}$$

□

Exemple 2.2.6.
• Nier « je n'aime ni le chocolat ni la vanille ».
• Dans $\mathbb{R}^2$, dessiner l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 2 \text{ et } y \leqslant 3\}$, dessiner et décrire son complémentaire.

Remarque 2.2.7.
Le $\wedge$ et le $\vee$ sont commutatifs et associatifs.

Exercice 2.2.8.
Soit p, q et r trois propositions. À quoi sont logiquement équivalentes $p \wedge (q \vee r)$ et $p \vee (q \wedge r)$?

2.3. Implication.

Définition 2.3.1.
Soient p et q deux propositions. On appelle $p \Rightarrow q$, qui se dit « p implique q », ou « si p alors q », la proposition $(\neg p) \vee q$. Dans l'implication $p \Rightarrow q$, p est l'antécédent, q le conséquent.

Exercice 2.3.2.
Construire la table de vérité de $p \Rightarrow q$.

Remarque 2.3.3.
En pratique, pour démontrer une implication, on commence toujours, bêtement, par « supposons p vraie ». Il faut alors montrer que sous cette hypothèse q est vraie.

— $p \Rightarrow q$ peut être vraie même si p et q n'ont rien à voir. Par exemple : si $1 \geqslant 0$ alors l'eau mouille.
— $p \Rightarrow q$ est toujours vraie si p est fausse (le faux implique n'importe quoi) ou q est vraie. Ainsi, si « $0 \neq 0$ » alors « $0 = 0$ »(cela peut paraître étonnant, on reviendra dessus à la fin du paragraphe « équivalence ») .
— $p \Rightarrow q$ n'implique ni que p est vraie ni que q est vraie. Par exemple : Si les pommes étaient des citrouilles, Newton serait mort assommé. Ou bien : si je mesurais 2 m 20, je serais entraîneur de basket.

Proposition 2.3.4 (Modus Ponens)**.**
Soit p et q deux proposition. Si $p \Rightarrow q$ est vraie et si p est vraie, alors q est vraie.
Autrement dit, $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ est toujours vraie.

Démonstration.
Consulter la table de vérité de $p \Rightarrow q$ ou de $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$. □

Théorème 2.3.5 (Négation d'une implication)**.**
Soit p et q deux propositions, alors $\neg(p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge (\neg q))$.

Démonstration.
C'est une conséquence simple de la loi de De Morgan. □

Exemple 2.3.6.
En pratique, pour montrer $p \Rightarrow q$ est fausse on peut trouver un exemple où p est vraie mais où q est fausse.

Ainsi, avoir 18 ans n'implique pas d'avoir droit de vote (ex : si on a casier judiciaire). De même, mesurer 2 m 20 n'implique pas d'être un joueur de basket.

Théorème 2.3.7 (Contraposition)**.**
Soit p et q deux propositions, alors $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$.

Démonstration.
C'est une conséquence simple de la loi de double négation. □

Remarque 2.3.8.
On peut formaliser ainsi le principe de « démonstration par l'absurde » : on veut montrer que p est vraie, sachant qu'une certaine proposition q est fausse.

On suppose alors que p est fausse et si l'on arrive à montrer que q est vraie : on a obtenu une contradiction ! En fait on a montré $\neg p \Rightarrow q$, et donc $\neg q \Rightarrow p$. Comme $\neg q$ est vraie, on a p qui est vraie.

Exemple 2.3.9.
Un entier ne peut pas être pair et impair.

Démonstration.
Soit n pair et impair. Alors il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que $n = 2k = 2k' + 1$, donc $k - k' = 1/2$ est un entier, ce qui est absurde. □

Remarque 2.3.10 (Transitivité)**.**
Pour toutes propositions P, Q, R, si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$, alors $P \Rightarrow R$.

2.4. Équivalence.

Définition 2.4.1.
Soient p et q deux propositions. La proposition $p \Leftrightarrow q$, qui se lit « p équivaut à q », est la proposition qui est vraie si et seulement si p et q ont la même valeur de vérité.

Exercice 2.4.2.
Construire la table de vérité de $p \Leftrightarrow q$.

Théorème 2.4.3 (Équivalence et double implication)**.**
Soit p et q deux propositions, alors

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv ([p \Rightarrow q] \wedge [q \Rightarrow p])$$

Démonstration.
Il suffit d'écrire les tables de vérités de ces propostions. □

Définition 2.4.4.
$q \Rightarrow p$ est appelée la *réciproque* de $p \Rightarrow q$.

Remarque 2.4.5.
Le $\Leftrightarrow$ est commutatif (si $P \Leftrightarrow Q$, alors $Q \Leftrightarrow P$), transitif (si $P \Leftrightarrow Q$ et $Q \Leftrightarrow R$, alors $P \Leftrightarrow R$) et réflexif (on a toujours $P \Leftrightarrow P$).

Remarque 2.4.6.
En pratique, pour montrer $p \Leftrightarrow q$, il y a 2 méthodes :

1. Montrer $q \Rightarrow p$ puis $p \Rightarrow q$;
2. Montrer $p \Rightarrow q$ puis la contraposée de sa réciproque, *i.e.* $\neg p \Rightarrow \neg q$

On peut bien entendu montrer un schéma du type $p \Leftrightarrow p_1 \Leftrightarrow p_2 \ldots \Leftrightarrow q$, où les p_i sont des propositions intermédiaires.

Définition 2.4.7.
Soient p et q deux propositions.
On dit que la proposition p est *nécessaire* pour avoir la proposition q si $q \Rightarrow p$ est vraie.
On dit que la proposition p est *suffisante* pour avoir la proposition q si $p \Rightarrow q$ est vraie.
On dit que la proposition p est *nécessaire et suffisante* pour avoir la proposition q si $q \Leftrightarrow p$ est vraie.

Remarque 2.4.8.
Revenons sur la table de vérité de l'implication.

Intuitivement, si p est vraie et q fausse, $p \Rightarrow q$ est fausse. De même, si p et q sont vraies, on conçoit que $p \Rightarrow q$ le soit.

Dans les deux autres cas, l'intuition se perd. Constatons que si $p \Rightarrow q$ était vraie si p était fausse et q vraie, ou si $p \Rightarrow q$ était fausse si p et q étaient fausses, la table de l'implication serait la même que celle d'une autre connecteur logique déjà connu (construire et identifier les tables de tous les connecteurs possibles de deux propositions pour s'en convaincre).

Exemple 2.4.9.
Montrons que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration.
On montre d'abord que, si n est un entier, alors « n est pair » si et seulement si « n^2 est pair ».

Si n est pair, son reste dans la division euclidienne par 2 est nul : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. Donc $n^2 = 2 \times 2k^2$ est pair.

Si n est impair, son reste dans la division euclidienne par 2 n'est pas nul, donc vaut 1 : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. Donc $n^2 = 2 \times (2k^2 + 2k) + 1$ est impair.

On vient bien de montrer l'équivalence annoncée.

Puis, on suppose que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ et l'on écrit $\sqrt{2}$ sous forme fractionnelle irréductible : il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ sans diviseurs communs autres que 1 ou -1, tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$.

On élève au carré : $p^2 = 2q^2$, donc p^2 est pair, donc p aussi. Il existe donc $p' \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2p'$, et l'on a alors $q^2 = 2p'^2$, donc q^2 est pair et q est pair aussi.

Ainsi, p et q ont bien un diviseur non trivial, 2, c'est absurde, donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\square$

Remarque 2.4.10.
Vous remarquerez que les symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ n'ont pas été utilisés dans la démonstration précédente. C'est normal : ils servent à construire des phrases formelles, pas à les démontrer. On ne les utilise donc JAMAIS dans une démonstration : à la place, on rédige EN FRANÇAIS, en utilisant par exemple la conjonction de coordination « donc ».

3. Quantificateurs universel et existentiel.

3.1. Définition.

Définition 3.1.1.
On appelle *prédicat* toute proposition dépendant d'une ou plusieurs variables, et qui, pour chaque jeu de valeurs de ces variables, prend la valeur V ou F.

Exemple 3.1.2.
$P(x, y) \equiv x + y = 2$.

Définition 3.1.3.
Si P est un prédicat qui dépend de la variable x et éventuellement d'autres variables, alors $\forall x, P(x)$ et $\exists x, P(x)$ sont deux prédicats qui ne dépendent pas de x et :
- $\forall x, P(x)$ est vrai si, pour toutes les valeurs de x, $P(x)$ est vrai ;
- $\exists x, P(x)$ est vrai s'il existe une valeur de x pour laquelle $P(x)$ est vrai.

$\forall$ est appelé *quantificateur universel* et $\exists$ est le *quantificateur existentiel.*

Remarque 3.1.4.
On spécifiera tout le temps dans les quantificateurs les ensembles sur lesquels sont considérées les variables. On écrira par exemple

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$$

et

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{Z},\ a \geqslant n.$$

Remarque 3.1.5.
Si P est un prédicat d'une variable, $\forall x, P(x)$ est un prédicat de zéro variables, c'est-à-dire une proposition.

Exemple 3.1.6.
• Soit $P(x, y) \equiv xy = 0$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ P(x, y)$ est fausse, mais $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ P(x, y)$ est vraie.
• Soit $P'(x) \equiv x.0 = 0$: alors $\forall x \in \mathbb{C},\ P'(x)$ est vraie.

Les quantificateurs sont des symboles mathématiques utilisés pour construire des phrases mathématiques. Ils ne sont en aucun cas à utiliser au cours d'une démonstration. En pratique :

— Pour montrer que $\forall x \in E, P(x)$ est vraie, on commencera (presque) toujours par écrire « Soit x un élément de E » : x est maintenant fixé (et pris quelconque), on peut maintenant montrer $P(x)$.

— Pour montrer que $\exists x \in E, P(x)$ est vraie, il « suffira » d'exhiber une valeur de x dans E telle que $P(x)$ soit vraie.

Remarque 3.1.7.
Dans les propositions $\forall x, P(x)$ et $\exists x, P(x)$, la variable x est muette. On peut donc remplacer la lettre x par n'importe quelle autre lettre.

Par exemple, $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -1$ est la même proposition que $\exists \xi \in \mathbb{R}, \xi^2 = -1$ et que $\exists \heartsuit \in \mathbb{R}, \heartsuit^2 = -1$

3.2. Permutation de quantificateurs.

Proposition 3.2.1.
On peut permuter les $\forall$ entre eux et les $\exists$ entre eux.

Démonstration.
Admis. □

Remarque 3.2.2.
On abrégera parfois $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ P(x,y)$ en $\forall x, y \in E,\ P(x,y)$. C'est aussi équivalent à $\forall (x,y) \in E^2,\ P(x,y)$.

Exemple 3.2.3.
$\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, x.y \geqslant 0 \equiv \forall y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, x.y \geqslant 0$
$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leqslant 0 \equiv \exists y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x + y \leqslant 0$

On ne peut en général pas permuter un $\forall$ et un $\exists$.

Exemple 3.2.4.
Comparer les propositions : « pour toute poule il existe un oeuf d'où est sortie la poule » et « il existe un oeuf d'où sont sorties toutes les poules ».

Exercice 3.2.5.
Donner un exemple formel du dernier point.

3.3. Négation d'un quantificateur.

Proposition 3.3.1.
Soit P un prédicat.

1. La négation de $\forall x P(x)$ est $\exists x, \neg P(x)$.
2. La négation de $\exists x, P(x)$ est $\forall x, \neg P(x)$.

Démonstration.
Admis. □

• En pratique, il faut savoir nier une phrase avec des $\forall$ et $\exists$.

Exemple 3.3.2.
$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{Z}$ tq $x \leqslant y$ se nie en $\exists x \in \mathbb{R}$ tq $\forall y \in \mathbb{Z}, x > y$.

3.4. Le pseudo-quantificateur $\exists!$.

Pour simplifier la rédaction, il existe le pseudo-quantificateur $\exists!$. La proposition $\exists! x, P(x)$ signifie : il existe un unique x tel que $P(x)$. Pour démontrer une telle proposition, il faut montrer d'un côté la partie existence, et d'un autre côté la partie unicité.

Exercice 3.4.1.
Écrire $\exists! x, P(x)$ en n'utilisant que les symboles $\forall$ et $\exists$.

3.5. Quantificateurs et inégalités.

On commet souvent un abus d'écriture, notamment en analyse, en raccourciçant la phrase

$$\forall x \in \mathbb{R},\ [x \geqslant M \Rightarrow P(x)]$$

en

$$\forall x \geqslant M, P(x).$$

Dans la deuxième écriture, la quantification porte implicitement sur x et non sur M (qui doit avoir été fixé ou quantifié auparavant). De plus, le domaine de P n'est plus explicitement défini.

Exemple 3.5.1.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, la proposition « $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ » (qui se lit « (u_n) tend vers $+\infty$ ») s'écrit formellement

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant A,$$

mais on l'écrira plutôt

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant A.$$

4. Raisonnements par récurrence.

L'objectif de cette partie est de montrer comment rédiger une récurrence, à partir d'exemples, en présentant en particulier quelques erreurs courantes, mais aussi de présenter une autre technique de démonstration, extrêmement puissante, appelée principe du minimum.

Il y a plusieurs façons possibles de rédiger une récurrence. Néammoins l'expérience montre que les étudiants qui essaient de l'écrire de façon originale l'écrivent rarement correctement.

En d'autres termes : nous vous conseillons *très fortement* de suivre les modèles donnés ici, mais vous êtes absolument libres de ne pas suivre les conseils ci-dessous. Pour mémoire, dans 9 cas sur dix, ceux qui n'ont pas suivi le modèle donné ici rédigent mal leurs raisonnements par récurrence et perdent en conséquence les points correspondants dans leurs DS.

Pour fixer les idées, nous travaillerons essentiellement sur des exemples, et parfois sur des exemples très simples.

4.1. Principe du minimum.

Définition 4.1.1.
Soit E un ensemble de réels. On appelle *minimum* de E, tout réel x vérifiant $x \in E$ et $\forall y \in E \quad x \leqslant y$.

Remarque 4.1.2. 1. Certains ensembles de réels n'admettent pas de minimum. Exemples : $]0,1]$, $]0,1[$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-$.

2. Tout ensemble de réels admet **au plus** un minimum.

Lorsqu'il existe, le minimum d'un ensemble E est noté $\min(E)$.

L'ensemble des entiers naturels possède la propriété fondamentale suivante qu'on admettra :

Proposition 4.1.3.
Tout ensemble E d'entiers naturels non vide admet un minimum.

Remarque 4.1.4.
Pour tout ensemble d'entiers naturels E, on a

$$\forall x \in [\![0, \min(E)[\![\quad x \notin E.$$

Corollaire 4.1.5.
Tout sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ minoré (resp. majoré) non vide admet un minimum (resp. maximum).

Proposition 4.1.6 (Principe du minimum)**.**
Soit P un prédicat sur les entiers naturels. Supposons qu'il existe au moins un entier rendant faux le prédicat P. Alors l'ensemble des entiers naturels sur lesquels P est faux admet un plus petit élément n_0 et on a

1. non $(P(n_0))$,
2. et $\forall n \in [\![0, n_0[\![\quad P(n)$.

Exercice 4.1.7.
Soit N un entier non nul et a_0, a_1, …, a_N des réels. On pose

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k x^k \end{array}.$$

On suppose $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0$.

Montrer que les coefficients a_0, a_1, …, a_N sont tous nuls.

Indication : si ces coefficients ne sont pas tous nuls, on pourra s'intéresser au plus dernier coefficient a_k non nul et regarder la limite de f en $+\infty$. On pourra aussi considérer le premier coefficient a_k non nul et s'intéresser à une limite en zéro.

4.2. Principe de récurrence simple.

Définition 4.2.1.
Soit P un prédicat sur les entiers naturels. Pour $n \in \mathbb{N}$, on dit que P est *héréditaire au rang* n si on a $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (autrement dit, P n'est pas héréditaire au rang n si et seulement si on a $P(n)$ et $\neg P(n+1)$)

On dit que P est *héréditaire* sur $\mathbb{N}$ si P est héréditaire à tout rang, c'est-à-dire si et seulement si on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (P(n) \Rightarrow P(n+1))$$

Exemple 4.2.2.
Le prédicat : $P(n)$: $\sum_{k=0}^{n} k = n^2$ est-il héréditaire ?
Et le prédicat $Q(n)$: $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$?
Et le prédicat $R(n)$: $\sum_{k=0}^{n} k = 2 + \frac{n(n+1)}{2}$?

Théorème 4.2.3 (Principe de récurrence simple)**.**
Soit P un prédicat sur les entiers naturels. Supposons qu'on a $P(0)$ et que P est héréditaire. Alors P est vraie pour tout entier naturel n.

Démonstration.
Il suffit d'appliquer le principe du minimum à $\neg P$: s'il existe un entier naturel n tel que $P(n)$ est fausse, on peut alors considérer le plus petit de ces entiers, noté n_0. Comme $P(0)$ est vraie, $n_0 > 0$ et donc $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$. Ainsi, $P(n_0 - 1)$ est vraie et, comme P est héréditaire, $P(n_0)$ est aussi vraie, ce qui est absurde. On obtient donc bien que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$. □

Exemple 4.2.4.
Soit n un entier naturel. Montrons que $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ l'assertion

$$«\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}».$$

Montrons $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$ par récurrence.

— Montrons $P(0)$.
On a
$$\sum_{k=0}^{0} k = 0 = \frac{0(0+1)}{2},$$
donc on a $P(0)$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.
Alors, on a
$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2},\end{aligned}$$
donc on a $P(n+1)$.

On a donc
$$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n).$$

4.3. Erreurs classiques.

Nous listons ici des erreurs fréquemment trouvées dans les copies.

Mauvaise définition de l'assertion Forme classique de cette erreur :

Notons $P(n)$ l'assertion

$$«\forall n \in \mathbb{N}\ \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}»$$

Explications : cette définition, mathématiquement, signifie exactement la même chose que :

Notons $P(n)$ l'assertion

$$«\forall p \in \mathbb{N}\ \sum_{k=0}^{p} k = \frac{p(p+1)}{2}»$$

Autrement dit, $P(n)$ ne dépend pas de n. Inutile alors de tenter une démonstration par récurrence...

Variante 1 :

Notons $P(n)$ l'assertion

$$«\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{p} k = \frac{n(n+1)}{2}».$$

Variante 2 :

Notons $P(n)$ l'assertion «$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$».

En revanche, la formulation suivante est acceptable, bien qu'à éviter :

Notons $P(n)$ l'assertion «$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$» pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Mauvaise énonciation de l'objectif Forme classique de cette erreur :

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ l'assertion

$$«\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}».$$

Montrons $P(n)$ par récurrence.

Explications : on ne précise pas ici ce qu'est n. De plus, le principe de récurrence ne montre pas $P(n)$ pour un n donné mais pour tout n. Il convient donc d'écrire

Montrons $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$ par récurrence

ou une variante, comme

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n on a $P(n)$.

Mauvaise démonstration de l'hérédité Forme classique de cette erreur :

Supposons $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$.
Montrons $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n+1)$.

Explications : une fois que l'on a supposé $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$, il n'y a pas beaucoup de travail à fournir pour montrer $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$ ...

Variante 1 :

Supposons $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$.
Montrons $P(n+1)$.

Variante 2 :

Supposons, pour tout entier naturel n, $P(n)$ et montrons $P(n+1)$

Variante 3 :

Supposons, pour tout entier naturel n, $P(n)$ et montrons pour tout entier naturel n, $P(n+1)$.

4.4. Bonne définition d'une suite définie par récurrence.

Notons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ \text{et } \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = 2 + \sqrt{u_n - 1} \end{cases}$$

Montrer que la suite u est bien définie.

Ici, le terme «bien définie» signifie non seulement que pour tout n, on a bien donné une expression pour définir u_n mais aussi que cette expression est définie, c'est-à-dire qu'elle a mathématiquement un sens.

Pour n donné, montrer que u_n est bien définie est un préalable à la démonstration de toute propriété de u_n.

Ici, il s'agit de montrer que pour tout n l'expression $2 + \sqrt{u_n - 1}$ est bien définie, c'est-à-dire que $u_n - 1$ est positif ou nul, autrement dit $u_n \geqslant 1$.

Pour n donné, on voit alors que d'une part, pour montrer que u_{n+1} est bien défini, il va falloir montrer tout d'abord $u_n \geqslant 1$ et d'autre part, pour montrer $u_n \geqslant 1$, on va avoir besoin au préalable de s'assurer que u_n est bien défini.

Autrement dit : on va avoir besoin de démontrer simultanément ces deux propriétés.

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ l'assertion

$$«u_n \text{ est bien défini et } u_n \geqslant 1»$$

Montrons $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$ par récurrence :
— On a clairement $P(0)$.
— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.
u_n est bien défini et $u_n \geqslant 1$.
Donc $u_n - 1 \geqslant 0$.
Donc $\sqrt{u_n - 1}$ est bien défini.
Donc u_{n+1} est bien défini, et de plus

$$u_{n+1} \geqslant 2 + \sqrt{u_n - 1} \geqslant 2 \geqslant 1$$

Donc on a $P(n+1)$.

On a donc
$$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$$

La suite u est donc bien définie (et de plus pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$).

Problème de définition non étudié On trouve parfois la réponse erronée suivante :

> Pour tout entier naturel n, $n = 0$ ou n est de la forme $k+1$. On a donné une définition à u_n dans chacun de ces deux cas, donc u est bien définie.

Manifestement, l'auteur du texte ci-dessus n'a pas compris que la définition $u_{n+1} = 2 + \sqrt{u_n - 1}$ pouvait poser problème.

4.5. Récurrence double.

a. Exemple : suite définie par récurrence.

Notons u la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 1 + \sqrt{u_n + u_{n+1} - 2} \end{cases}$$

Montrer que u est bien définie.

On s'aperçoit vite qu'il va falloir montrer simultanément que u_n est bien défini et qu'on a $u_n \geqslant 1$.

On va donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, définir $P(n)$ comme l'assertion

$$\text{«}u_n \text{ est bien défini et } u_n \geqslant 1\text{»}$$

De plus, pour montrer cette P à un rang donné, il va falloir supposer qu'elle est vérifiée au deux rangs précédents.

Il ne suffit donc pas de chercher à démontrer P par récurrence. Pour répondre à cette question on va utiliser un principe de récurrence double, dans lequel l'initialisation consiste à montrer $P(0)$ et $P(1)$ et la démonstration de l'hérédité consiste à montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \Big((P(n) \text{ et } P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)\Big)$$

b. Énoncé du principe.

Théorème 4.5.1 (Principe de récurrence double)**.**
Soit P un prédicat portant sur $\mathbb{N}$. Si :
- $P(0)$ et $P(1)$ sont vrais,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vrais alors $P(n+2)$ est vrai,

alors $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$.

Démonstration.
On peut montrer par récurrence simple que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q(n)$: « $P(n)$ et $P(n+1)$ ».

Ou bien on peut utiliser le principe du minimum : si P n'est pas toujours vrai, on considère le plus petit entier pour lequel P est faux *etc.* □

c. Rédaction par récurrence double.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété

$$\text{«}u_n \text{ est bien défini et } u_n \geqslant 1\text{»}$$

Montrons $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$ par récurrence double.
— On a clairement $P(0)$.
— On a clairement $P(1)$.
— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ et montrons $P(n+2)$.
u_n et u_{n+1} sont bien définis et de plus $u_n \geqslant 1$ et $u_{n+1} \geqslant 1$.
Donc $u_n + u_{n+1} - 2 \geqslant 0$.
Donc u_{n+2} est bien défini et de plus, $u_{n+2} = 1 + \sqrt{u_n + u_{n+1} - 2} \geqslant 1$.
Donc on a $P(n+2)$.

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$$

En particulier la suite u est bien définie.

Exercice 4.5.2.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suité vérifiant $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 1$.

4.6. Récurrence triple, etc.

On peut, de la même façon, avoir besoin de principes de récurrence triple, quadruple, ...

Si cela s'avère nécessaire, on pourra les utiliser sans démonstration.

Ainsi, appliquer le principe de récurrence triple pour démontrer $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$ consistera à démontrer d'une part $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$, et d'autre part à démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si on a $P(n)$ et $P(n+1)$ et $P(n+2)$ alors on a $P(n+3)$.

Là encore, si l'on préfère, on pourra se passer d'une récurrence triple et utiliser simplement la récurrence ordinaire. Il suffira pour cela de définir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q(n)$ comme

$$«P(n) \text{ et } P(n+1) \text{ et } P(n+2)»$$

et de montrer $\forall n \in \mathbb{N}\ Q(n)$ par récurrence simple.

Enfin, on peut évidemment là aussi se passer de tout principe de récurrence en utilisant le principe du minimum.

4.7. Récurrence forte.

Enfin, il existe des cas où ni une récurrence simple, ni une récurrence double, ni une récurrence triple ne semblent suffire.

Dans ces cas, on pourra utiliser le principe de récurrence forte.

a. Exemple : suite définie par récurrence.

Notons u la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = \sqrt{1/2} - 1 \\ \text{et } \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \sqrt{1/2 + n + 1 + \sum_{k=0}^{n} u_k} - 1 \end{cases}$$

Montrez que u est bien définie.

On s'aperçoit assez vite qu'on peut espérer montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geqslant -1$. Mais pour montrer la propriété pour n donné, il va falloir supposer qu'elle est vraie pour toutes les entiers naturels strictement inférieurs.

On va donc utiliser le principe de récurrence forte.

Celui-ci peut s'énoncer comme suit :

1. Étant donné un entier naturel n, on dit qu'une propriété P est *fortement héréditaire au rang* n si

$$\Big(\forall m \in [\![0, n]\!]\ P(m)\Big) \Rightarrow P(n+1)$$

   (ou de façon équivalente, si $P(0)$ et $P(1)$ et ... et $P(n)$ implique $P(n+1)$)
2. On dit qu'une propriété P est *fortement héréditaire* si pour tout entier naturel n, P est fortement héréditaire au rang n.
3. Le principe de récurrence forte dit simplement qu'une propriété P vraie en 0 et fortement héréditaire est vraie pour tout entier naturel.

Remarque 4.7.1.
Dire que P est fortement héréditaire au rang n est équivalent à dire que n ne peut pas être l'entier minimum pour lequel P est faux.

Exemple 4.7.2.
On peut montrer que tout prédicat héréditaire est fortement héréditaire. La réciproque est fausse comme le montre le prédicat P défini comme suit : pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est l'assertion «$n(n-2) \neq 0$».

b. Énoncé du principe.

Théorème 4.7.3 (Principe de récurrence forte)**.**
Soit P un prédicat portant sur $\mathbb{N}$. Si :
- $P(0)$ est vrai,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $P(0)$, $P(1)$, ..., $P(n)$ sont vrais, alors $P(n+1)$ est vrai,

alors $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$.

Démonstration.
On peut montrer par récurrence simple que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R(n)$: « $P(0)$ et $P(1)$ et ... et $P(n)$ ».

Ou bien on peut utiliser le principe du minimum : si P n'est pas toujours vrai, on considère le plus petit entier pour lequel P est faux *etc.* □

c. Rédaction par récurrence forte.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété

$$\text{«}u_n \text{ est bien défini et } u_n \geqslant -1\text{»}$$

Montrons par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P(n)$.

— On a clairement $P(0)$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $m \in \mathbb{N}$ vérifiant $m \leqslant n$, on a $P(m)$.
Montrons $P(n+1)$.
Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, u_k est bien défini, donc la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$ est bien définie.
En outre, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $u_k \geqslant -1$, donc

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \geqslant \sum_{k=0}^{n} -1 = -n-1$$

Donc

$$1/2 + n + 1 + \sum_{k=0}^{n} u_k \geqslant 0$$

Donc u_{n+1} est bien défini, et de plus, on a

$$u_{n+1} = \sqrt{1/2 + n + 1 + \sum_{k=0}^{n} u_k} - 1 \geqslant -1$$

Donc on a $P(n+1)$

Par le principe de récurrence forte, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \ P(n)$$

Donc u est bien définie.

Exercice 4.7.4.
Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p, q \in \mathbb{N},\ n = 2^p(2q+1).$$

4.8. Récurrence à partir d'un certain rang.

Il s'agit maintenant de faire démarrer une récurrence (simple, multiple ou forte) à un autre rang que le rang 0.

Exemple. Soit u une suite, n_0 un entier et α un réel strictement positif.

On suppose que pour tout $n \geqslant n_0$, on a

$$|u_{n+1}| \leqslant \alpha |u_n|$$

Montrer

$$\forall n \geqslant n_0 \quad |u_n| \leqslant \alpha^{n-n_0} |u_{n_0}|$$

Modèle de rédaction proposé. Pour tout $n \geqslant n_0$, notons $P(n)$ la propriété $|u_n| \leqslant \alpha^{n-n_0}$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant n_0$, $P(n)$ est vraie.

— On a $|u_{n_0}| = \alpha^{n_0-n_0}|u_{n_0}|$. Donc on a $P(n_0)$.

— Soit $n \geqslant n_0$. Supposons $P(n)$.
Montrons $P(n+1)$.
On a $|u_{n+1}| \leqslant \alpha|u_n|$ car $n \geqslant n_0$.
Par ailleurs $|u_n| \leqslant \alpha^{n-n_0}|u_{n_0}|$.
Donc $\alpha|u_n| \leqslant \alpha^{n+1-n_0}|u_{n_0}|$.
Donc $|u_{n+1}| \leqslant \alpha^{n+1-n_0}|u_{n_0}|$.
On a donc $P(n+1)$

On a donc

$$\forall n \geqslant n_0 \ P(n)$$

4.9. Récurrence sur un intervalle fini d'entiers

Il s'agit de démontrer un résultat valable pour un ensemble fini d'entiers seulement, de la forme $[\![a, b]\!]$, où $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a < b$. Il faudra faire attention à initialiser la propriété pour $n = a$, et lors de l'hérédité, il faudra supposer que cette propriété est vraie pour un certain $n \in [\![a, b-1]\!]$ et montrer qu'elle est vraie au rang $n+1$.

Exemple 4.9.1.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : x \mapsto x$. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n^{(k)}(x) = \dfrac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$.

4.10. Récurrence descendante

On cherche à montrer un résultat valable sur un intervalle $[\![a, b]\!]$ comme précédemment, mais cette fois-ci on initialise pour $n = b$, et on montre que la propriété P à un rang n implique cette même propriété au rang $n-1$. Cela se démontre en posant $Q(n) = P(b-n)$. On montre alors par récurrence que $Q(0)$ est vraie et que $Q(n)$ implique $Q(n+1)$.

Exemple 4.10.1.
Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que pour tout $k \in [\![2, N]\!]$, $\sqrt{k\sqrt{(k+1)\sqrt{(k+2)\sqrt{\ldots\sqrt{(N-1)\sqrt{N}}}}}} < k+1$.

4.11. Quelques récurrences fausses.

Exercice : chercher l'erreur dans les pseudo-démonstrations ci-dessous.

a. Suite négative minorée par un réel positif. . .

Notons u la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{\pi}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = 6u_n - 4 \end{cases}$$

(il est clair que u est bien définie)
Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \frac{4}{5}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété

$$«u_n \geqslant \frac{4}{5}»$$

Montrons $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$ par récurrence.
- On a $P(0)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$. Montrons $P(n+1)$.

On a :

$$\begin{aligned} & & u_n &\geqslant \frac{4}{5} \\ &\text{donc} & 6u_n &\geqslant \frac{24}{5} \\ &\text{donc} & 6u_n - 4 &\geqslant \frac{24 - 5\times 4}{5} \\ &\text{donc} & u_{n+1} &\geqslant \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a $P(n+1)$.
Donc on a $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$

Calculons les valeurs approchées des premiers termes de la suite avec Python :

```
def f(x) :
  """Calcule 6*x-4, précondition  : x réel"""
  return 6 * x - 4

from math import pi
x = pi / 4 # u_0
u = [x] # Contient u_0
for i in range(5) :
  x = f(x) # Calcule le terme suivant de u
  u.append(x) # Ajoute le nouveau terme
print(u) # Affiche les valeurs calculées
```

On obtient les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} u_0 &\approx 0.7853982 \\ u_1 &\approx 0.7123890 \\ u_2 &\approx 0.2743339 \\ u_3 &\approx -2,3539967 \\ u_4 &\approx -18.12398 \\ u_5 &\approx -112.74388 \end{aligned}$$

Autrement dit, u_5 est négatif et devrait être supérieur à $\frac{4}{5}$. . .

b. n valeurs sont égales

Montrons que pour tout entier n non nul, et tout n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$, on a

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n$$

Autrement dit : toutes les composantes d'un n-uplet sont égales.

Pour tout $n \geqslant 1$, notons $P(n)$ la propriété

«pour tout n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$, on a
$x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.»

Montrons $\forall n \geqslant 1\ P(n)$ par récurrence.

— On a clairement $P(1)$.
— Soit $n \geqslant 1$.
  Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.
  Soit $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ un $n+1$-uplet.
  $(x_1, \ldots, x_n)$ est un n-uplet donc on a

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n$$

  $(x_2, \ldots, x_{n+1})$ est un n-uplet donc on a

$$x_2 = \ldots = x_{n+1}$$

  Donc on a

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{n+1}$$

  Donc on a $P(n+1)$.

On a donc $\forall n \geqslant 1\ P(n)$.

c. Toutes les puissances valent 1

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Montrons que pour tout entier naturel non nul n, on a $a^{n-1} = 1$.

Notons $P(n)$ la propriété «$a^{n-1} = 1$».
Montrons $\forall n \geqslant 1 \quad P(n)$ par récurrence forte.

— On a clairement $P(1)$.
— Soit $n \geqslant 1$.
  Supposons $\forall m \in [\![1, n]\!] \quad P(m)$.
  Montrons $P(n+1)$.
  On a

$$\begin{aligned} a^{n+1-1} &= a^n \\ &= \frac{a^{n-1} \times a^{n-1}}{a^{(n-1)-1}} \end{aligned}$$

  Or par hypothèse de récurrence, $P(m)$ est vraie pour tout $m \leqslant n$, donc $P(n)$ et $P(n-1)$ sont vraies.
  Donc $a^{n-1} = 1$ et $a^{(n-1)-1} = 1$.
  D'où :

$$a^{n+1-1} = \frac{1 \times 1}{1}$$

  Donc on a $P(n+1)$.

On a donc

$$\forall n \geqslant 1 \quad P(n)$$