

Feuille d'exercice n° 6 : **Intégration pour les équations différentielles - fiche  
d'entraînement - correction**

**Exercice 1**

- 1)  $\int^x t^3 \sqrt{4+t^4} dt = \frac{(x^4+4)^{3/2}}{6}$
- 2)  $\int^x \frac{dt}{t \ln t} = \ln(\ln x)$
- 3)  $\int^x \frac{(t+5) dt}{\sqrt{t+4}} = 2 \left( \frac{(x+4)^{3/2}}{3} + \sqrt{x+4} \right)$
- 4)  $\int^x t e^{-t/10} dt = (-10x - 100)e^{-x/10}$
- 5)  $\int^x t^2 e^{-t/10} dt = (-10x^2 - 200x - 2000)e^{-x/10}$
- 6)  $\int^x t^2 \ln t dt = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9}$
- 7)  $\int^x t^n \ln t dt = \frac{x^{n+1} \ln(x)}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$  si  $n \neq -1$ ,  $\frac{\ln^2 x}{2}$  si  $n = -1$
- 8)  $\int^x t^2 \sin t dt = 2x \sin x + (2-x^2) \cos x$
- 9)  $\int^x t^3 e^{-t^2} dt = \frac{(-x^2-1)e^{-x^2}}{2}$
- 10)  $\int^x t^3 \sqrt{1+t^2} dt = \frac{x^2(x^2+1)^{3/2}}{5} - \frac{2(x^2+1)^{3/2}}{15}$
- 11)  $\int^x \text{Arcsin}(t) dt = x \text{Arcsin } x + \sqrt{1-x^2}$
- 12)  $\int^x \text{Arcsin}^2(t) dt = x \text{Arcsin}^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \text{Arcsin } x - 2x$
- 13)  $\int^x \text{Arctan}(t) dt = x \text{Arctan } x - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$
- 14)  $\int^x \frac{\sqrt{9-t^2}}{t^2} dt = -\text{Arcsin}(x/3) - \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$
- 15)  $\int^x \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} = -\ln \left( \frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} + \frac{1}{|x|} \right)$  (poser  $t = \cos u$  puis  $v = \frac{1}{\cos u} + \tan u$ ) ou plus rapide  
 $\int^x \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} = -\text{Argch}(1/|x|)$  en posant :  $1/|t| = \text{ch } u$ .

- 16)  $\int^x \frac{dt}{t\sqrt{a^2+t^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left( \frac{a}{|x|} + \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{|x|} \right)$  (poser  $t = a \tan u$  puis  $v = \frac{1}{\sin u} + \cotan u$ ) ou plus rapide  
:  $\int^x \frac{dt}{t\sqrt{a^2+t^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{Argsh}(a/|x|)$  en posant  $a/|t| = \operatorname{sh} u$ .
- 17)  $\int^x \sqrt{4+t^2} dt = 2 \operatorname{Argsh}(x/2) + \frac{x\sqrt{x^2+4}}{2}$
- 18)  $\int^x \frac{dt}{a^2-t^2} = \frac{\ln(x+a)}{2a} - \frac{\ln(x-a)}{2a}$
- 19)  $\int^x \frac{\sqrt{t^2-a^2}}{t} dt = a \operatorname{Arcsin}(a/|x|) + \sqrt{x^2-a^2}$
- 20)  $\frac{dt}{(a^2+t^2)^2} = \frac{\operatorname{Arctan}(x/a)}{2a^3} + \frac{x}{2a^2x^2+2a^4}$  (poser  $t = a \tan u$ ).

### Exercice 2

- 1) on pose  $u = t^2$ , et ensuite on fait une IPP :

$$\int^x t^3 f(t^2) dt = \frac{1}{2} \int^x u f(u) du = \frac{1}{2} (u g(u) - \int^x g(u) du = \frac{1}{2} (x^2 g(x^2) - h(x^2))$$

- 2)  $\int^x t^{2n-1} f(t^n) dt = \frac{1}{n} (x^n g(x^n) - h(x^n))$  par la même méthode.

### Exercice 3

- 1) avec  $n = 3$ ,  $\int^x t^n \sqrt{1-t^4} dt = -\frac{1}{6} (1-x^4)^{3/2}$ .
- 2) avec  $n = 3$  :  $\int^x \frac{t^n}{\sqrt{1-t^4}} dt = -\frac{1}{2} \sqrt{1-x^4}$ , et avec  $n = 1$  :  $\int^x \frac{t^n}{\sqrt{1-t^4}} dt = -\frac{1}{2} \operatorname{Arcsin}(x^2)$ .
- 3) avec  $n = 9$  :  $\int^x \frac{t^n}{1+t^{10}} dt = \frac{1}{10} \ln(1+x^{10})$ , et avec  $n = 4$ ,  $\int^x \frac{t^n}{1+t^{10}} dt = \frac{1}{5} \operatorname{Arctan}(x^5)$ .
- 4) avec  $n = 7$ ,  $\int^x \frac{t^6}{1+t^n} dt = \frac{1}{7} \ln(1+x^7)$ , et avec  $n = 14$ ,  $\int^x \frac{t^6}{1+t^n} dt = \frac{1}{7} \operatorname{Arctan}(x^7)$ .
- 5) avec  $n = 1$ ,  $\int^x t^n e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$ .
- 6) avec  $n = 4$ ,  $\int^x t^n e^{2t^5} dt = \frac{1}{10} e^{2x^5}$ .
- 7) avec  $n = 6$ ,  $\int^x t^5 \sqrt{1-t^n} dt = -\frac{1}{9} (1-x^6)^{3/2}$ .
- 8) avec  $n = 7$ ,  $\int^x \frac{t^6}{\sqrt{1-t^n}} dt = -\frac{2}{7} \sqrt{1-x^7}$ , et avec  $n = 14$ ,  $\int^x \frac{t^6}{\sqrt{1-t^n}} dt = \frac{1}{7} \operatorname{Arcsin}(x^7)$ .
- 9) avec  $n = 1$ ,  $\int^x \frac{dt}{t^n \ln t} = \ln(\ln x)$ .
- 10) avec  $n = 1$ ,  $\int^x \frac{dt}{t^n (\ln t)^7} = -\frac{1}{6 \ln^6 x}$
- 11) avec  $n = 5$ ,  $\int^x t^n \sin(t^6) dt = -\frac{1}{6} \cos(x^6)$ .

**12)** avec  $n = 3$ ,  $\int^x \frac{\sin^n t \cos t}{\sqrt{3 + \sin^4 t}} dt = \frac{1}{2} \sqrt{3 + \sin^4 x}.$

**13)** avec  $n = 4$ ,  $\int^x \frac{\sin^3 t \cos t}{\sqrt{3 + \sin^n t}} dt = \frac{1}{2} \sqrt{3 + \sin^4 x}.$