Feuille d'exercice n° 16 : **Fractions rationnelles - Corrigé**

Exercice 5

1) On a $X^3-3X^2+X-4=(X-1)(X^2-2X-1)-5$, donc la fraction rationnelle donnée se décompose en $X^2-2X-1-\dfrac{5}{X-1}$.

2) On a affaire à une fraction rationnelle de degré strictement négatif donc de partie entière nulle et qui n'a que des pôles simples. D'après le cours, on a donc : $\dfrac{X}{X^2-4}=\dfrac{a}{X-2}+\dfrac{b}{X+2}$ où $a=\dfrac{2}{2+2}$ et $b=\dfrac{-2}{-2-2}$. Donc $\dfrac{X}{X^2-4}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{X-2}+\dfrac{1}{X+2}\right)$.

3) On a $X^2+iX+2=(X-i)(X+2i)$, donc la fraction rationnelle donnée n'a que des pôles simples. De plus, elle est de degré strictement négatif, donc de partie entière nulle.

$$\frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2}=\frac{a}{X-i}+\frac{b}{X+2i}$$

où $a=\dfrac{(3-2i)i-5+3i}{i+2i}=2+i$ et $b=\dfrac{(3-2i)(-2i)-5+3i}{-2i-i}=1-3i$.

4) On a $\dfrac{X}{(X+i)^2}=\dfrac{X+i-i}{(X+i)^2}=\dfrac{1}{X+i}-\dfrac{i}{(X+i)^2}$

5) On a

$$\frac{X^5+X+1}{X^4-1}=\frac{X(X^4-1)+2X+1}{X^4-1}=X+\frac{2X+1}{X^4-1}$$

Or $\frac{2X+1}{X^4-1}$ a pour pôles 1, i, -1, $-i$, tous simples. Notons A son numérateur et B son dénominateur. D'après le cours, comme il s'agit d'une fraction rationnelle à coefficients réels, on a

$$\frac{X^5+X+1}{X^4-1}=X+\frac{a}{X-1}+\frac{b}{X-i}+\frac{c}{X+1}+\frac{\overline{b}}{X+i}$$

où $a=\dfrac{A(1)}{B'(1)}=\dfrac{3}{4}$, $b=\dfrac{A(i)}{B'(i)}=\dfrac{2i+1}{-4i}=\dfrac{-2+i}{4}$ et $c=\dfrac{A(-1)}{B'(-1)}=\dfrac{-1}{-4}=\dfrac{1}{4}$.

6) Posons $A=X^5+X^4+1$, $B=(X-1)^3(X+1)^2$ et $R=A-B$. R est de degré strictement inférieur à 5 et $A=B+R$. Donc A/B a pour partie entière 1 et s'écrit donc sous la forme :

$$\frac{A}{B}=1+\frac{a}{(X-1)^3}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{X-1}+\frac{d}{(X+1)^2}+\frac{f}{(X+1)}$$

où $a=\dfrac{A(1)}{(1+1)^2}$, $d=\dfrac{B(-1)}{(-1-1)^3}$, et b, c et f sont des réels à déterminer. On a $a=3/2^2=3/4$, $d=1/(-2)^3=-1/8$. Posons $R_1=\dfrac{A}{B}-\dfrac{a}{(X-1)^3}$ On a

$$\begin{aligned}R_1&=\frac{4(X^5+X^4+1)-3(X+1)^2}{4(X-1)^3(X+1)^2}\\&=\frac{4X^5+4X^4-3X^2-6X+1}{4(X-1)^3(X+1)^2}\\&=\frac{4X^4+8X^3+8X^2+5X-1}{4(X-1)^2(X+1)^2}\end{aligned}$$

Posons $R_2 = R_1 - \dfrac{d}{(X+1)^2}$ On a

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{8X^4+16X^3+16X^2+10X-2+X^2-2X+1}{8(X-1)^2(X+1)^2} \\ &= \frac{8X^4+16X^3+17X^2+8X-1}{8(X-1)^2(X+1)^2} \\ &= \frac{8X^3+8X^2+9X-1}{8(X-1)^2(X+1)} \end{aligned}$$

or $R_2 = 1 + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-1} + \frac{f}{(X+1)}$ donc $b = \dfrac{24}{8\times 2} = \dfrac{3}{2}$ et $f = \dfrac{-10}{8(-2)^2} = -\frac{5}{16}$. Posons $R_3 = R_2 - \dfrac{b}{(X-1)^2}$. On a

$$\begin{aligned} R_3 &= \frac{8X^3+8X^2+9X-1-12(X+1)}{8(X-1)^2(X+1)} \\ &= \frac{8X^3+8X^2-3X-13}{8(X-1)^2(X+1)} \\ &= \frac{8X^2+16X+13}{8(X-1)(X+1)} \end{aligned}$$

or $R_3 = 1 + \frac{c}{X-1} + \frac{f}{(X+1)}$, donc $c = \frac{37}{8\times 2} = \frac{37}{16}$. On a donc

$$\frac{X^5+X^4+1}{(X-1)^3(X+1)^2} = 1 + \frac{3}{4(X-1)^3} + \frac{3}{2(X-1)^2} + \frac{37}{16(X-1)} - \frac{1}{8(X+1)^2} - \frac{5}{16(X+1)}$$

7) Posons $A = X^5 + X + 1$ et $B = X^6 - 1$ et $\omega = e^{i\frac{2\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On a $B' = 6X^5$. Les pôles de A sont les ω^k, pour $k = 0, \ldots, 5$ qui sont tous simples. A/B s'écrit donc sous la forme

$$\sum_{k=0}^{5} \frac{a_k}{X - \omega^k}$$

où $a_k = A(\omega^k)/B'(\omega^k)$. On trouve $a_0 = 1/2$, $a_1 = (1+i\sqrt{3})/6$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1/6$. Par ailleurs, on a $\overline{\omega^2} = \omega^4$ et $\overline{\omega} = \omega^5$, donc $a_4 = \overline{a_2} = 0$ et $a_5 = \overline{a_1} = (1-i\sqrt{3})/6$.

8) $\dfrac{X}{(X^2+1)(X^2+4)} = \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{(-X+2\,i)} + \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{(X+i)} - \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{(X+2\,i)} - \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{(-X+i)} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{X}{(X^2+4)} + \dfrac{1}{3}\dfrac{X}{(X^2+1)}$

9) $$\begin{aligned} \frac{X^7+3}{(X^2+X+2)^3} = X - 3 &- \frac{\frac{4}{49}\,i\left(19+7\,i\sqrt{7}\right)\sqrt{7}}{\left(-2\,X-1+i\sqrt{7}\right)^3} + \frac{\frac{996}{343}\,i\sqrt{7}}{-2\,X-1+i\sqrt{7}} + \frac{1}{49}\frac{376-84\,i\sqrt{7}}{\left(2\,X+1+i\sqrt{7}\right)^2} + \\ &\frac{1}{49}\frac{376+84\,i\sqrt{7}}{\left(-2\,X-1+i\sqrt{7}\right)^2} + \frac{\frac{4}{49}\,i\left(-19+7\,i\sqrt{7}\right)\sqrt{7}}{\left(2\,X+1+i\sqrt{7}\right)^3} + \frac{\frac{996}{343}\,i\sqrt{7}}{2\,X+1+i\sqrt{7}} \\ = X - 3 &+ \frac{13+7\,X}{\left(X^2+X+2\right)^3} + \frac{-21-7\,X}{\left(X^2+X+2\right)^2} + \frac{14}{(X^2+X+2)} \end{aligned}$$

Exercice 6 Nous utilisons ici le logiciel libre Maxima pour faire les calculs.
Une procédure (fonction) nommée `exercice` est d'abord écrite, qui fait appel aux fonction `partfrac`, qui décompose une fraction rationnelle en éléments simples, et `integrate`, qui fait ce que vous devinez probablement qu'elle fait. Pour ces deux fonctions, on donne en argument une expression `expr` et la variable `var` selon laquelle on veut décomposer ou intégrer.

```
(%i1) exercice(expr,var)  := block([],
res  : integrate(partfrac(expr,var),var),
return(res)
)$
(%i2) exercice(1/(1-x**2),x) ;
                         log(x + 1)   log(x - 1)
(%o2)                    ---------- - ----------
                             2            2
(%i3) exercice(x/(x**4+16),x) ;
                                       2
                                      x
                                 atan(--)
                                      4
(%o3)                            --------
                                    8
(%i4) exercice(1/(x**3-7*x+6),x) ;
                   log(x + 3)   log(x - 1)   log(x - 2)
(%o4)              ---------- - ---------- + ----------
                       20           4            5
(%i5) exercice((4*x**2)/(x**4-1),x) ;
(%o5)             - log(x + 1) + 2 atan(x) + log(x - 1)
(%i6) exercice((x**3+2*x+1)/(x**3-3*x+2),x) ;
               11 log(x + 2)   11 log(x - 1)           4
(%o6)        - ------------- + ------------- + x - ---------
                     9               9             3 (x - 1)
(%i7) exercice((-2*x**2+6*x+7)/(x**4+5*x**2+4),x) ;
                                                           x
                                                    5 atan(-)
                 2             2                           2
(%o7)      - log(x  + 4) + log(x  + 1) + 3 atan(x) - ---------
                                                         2
```