Suites - exercices supplémentaires

Exercice 1 ( ) Soit (u_n) la suite réelle définie par récurrence en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ si $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que (u_n) est croissante et majorée.

2) Montrer que (u_n) converge vers le nombre réel positif l qui vérifie $l^2 - l - 1 = 0$ et calculer l.

Exercice 2 ( ) Soient (u_n) et (v_n) les suites déterminées par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 3u_n + 2v_n$ et $v_{n+1} = 2u_n + 3v_n$.

1) Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est constante.

2) Prouver que (u_n) est une suite arithmético-géométrique.

3) Exprimer les termes généraux des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 3 ( ) On considère la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \dfrac{1}{2}(-x + x^2)$, et $u_0 = \dfrac{1}{16}$. Montrer que $\left[-\dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{16}\right]$ est stable par f. Étudier les points fixes de $f \circ f$ et en déduire la nature et la limite de (u_n).

Exercice 4 ( ) Soit la suite définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}}$.

1) Étudier les variations de (u_n) ainsi que sa limite.

2) Donner la limite de la suite $(u_{n+1} - u_n)$.