Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 point, total sur 28 points, ramené sur 5 points.
- Exercice de TD et problèmes : chaque question sur 4 points, total sur 124 points (V1) ou 96 points (V2), ramené sur 15 points, +115% (V1) ou +195% (V2).

Statistiques descriptives.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \min\left(\frac{1}{10}\lceil 10x \rceil ; 20\right)$.

	Calculs	Problème V1	Problème V2	Note finale
Transformation	c	p_1	p_2	$\varphi\left(\frac{5c}{28} + 2,15\frac{15p_1}{124} + 2,95\frac{15p_2}{96}\right)$
Note maximale	28	44	46	20+
Note minimale	3	15	7	$5,9$
Moyenne	$\approx 14,45$	$\approx 27,15$	$\approx 18,69$	$\approx 10,06$
Écart-type	$\approx 4,42$	$\approx 7,08$	$\approx 11,10$	$\approx 3,21$
Premier quartile	12	$22,25$	10	$8,05$
Médiane	14	$25,5$	15	$9,4$
Troisième quartile	16	$32,75$	21	$11,15$

Remarques générales.

• La première (ou les quelques premières) question d'un problème doit toujours être parfaitement détaillée. On ne vous y passera aucune omission.
• Certains s'amusent encore à ne pas encadrer leurs réponses ou à écrire dans les marges. Le tarif en vigueur est toujours le même : 0 immédiatement à la question. Il est de votre responsabilité de tracer une marge si votre copie n'en comporte pas au préalable. Si vous ne le faites pas... je ne réponds plus de rien quant à votre note.
• À chaque fois que vous utilisez un théorème, justifiez que ses hypothèses sont assurées. Sinon, vous serez systématiquement sanctionnés.
• Dans un contexte polynomial, X n'est pas un nombre mais un symbole formel. Si P est un polynôme, les écritures du type «si $P = 0$» (pour dire si P s'annule), «si $X > 0$», «si $X = 0$» sont au mieux extrêmement maladroites et sont souvent sanctionnées.
• Certains ont encore du mal à introduire correctement leurs variables. C'est inquiétant.
• À chaque fois qu'un étudiant commence une récurrence par «montrons par récurrence P_n : pour tout $n \in \mathbb{N}$, [...]», je ne lis même plus la suite et je mets directement 0 à la question.
• Beaucoup d'entre vous font des erreurs grossières en passant trop vite sur des points techniques simples (ex : dire que $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, dans le III.7). Si c'est votre cas, cela signifie que vous devez étudier consciencieusement CHACUNE de vos affirmations, même les plus élémentaires. Rien n'est simple. Rien n'est évident. Ce travail de remise en question est fastidieux, pénible, mais primordial. Ce n'est que par lui que vous pourrez progresser en devoir.
• Dans la V1, il y avait beaucoup de questions «cadeau» (de mon point de vue : 3 et 7 dans le II, 1, 2a, 2c, 3, 4a, 5a, 6, 9c dans le III, sans compter l'exercice vu en TD). Cela fait au moins 40 points sans réelle difficulté ! Vous devez commencer par identifier ces questions et y répondre sans faute. Avoir moins de 30 points sur ce devoir est anormal. Si c'est votre cas, vous devez interroger votre manière de travailler en devoir, ou l'attention que vous portez à vos calculs et vos réponses.

Un exercice vu en TD.

2) Une racine complexe peut être réelle ! Il convenait de commencer par observer que $P^2 + 1$ n'a pas de racine réelle.

Polynômes et nombres de Bernoulli.

L'équation (b) a été lue par certains «$B_{n+1} = B_n(n+1)$». C'est désolant... et cela fausse complètement le problème ! Lisez attentivement l'énoncé.

1) Question insurmontable pour beaucoup...

2) Que de complications chez certains ! Beaucoup n'ont pas vu que la condition (c) réglait juste la constante laissée libre par la condition (b).

Peu ont su rédiger correctement cette question. Reprenez le corrigé et travaillez-le. Vous retrouverez ce genre de question et devrez savoir y répondre simplement.

3) On vous donne B_3 : vous devez donc détailler le calcul de B_1 et B_2, sans quoi le correcteur pensera que vous avez dérivé B_3 pour obtenir B_2 puis B_1.

On vous donne B_3 : vous n'avez pas le droit d'échouer à cette question. Si vous commettez une erreur de calcul (cela arrive), vous devez la détecter sur B_3 et recommencer votre calcul.

Je rencontre encore trop d'écritures du type : «soit $c \in \mathbb{R}$, $B_1' = 1$, donc $B_1 = X + c$». Cela signifie : $\forall c \in \mathbb{R}$, $B_1 = X + c$. C'est absurde ! Vous devez soigner l'introduction de vos variables, sans quoi vous ne pourrez pas comprendre les questions qui vous seront bientôt posées.

4) Inutile ici de faire deux récurrences successives.

Primitiver B_n en $\frac{1}{n+1}XB_n$ est assez inquiétant...

5) Nul besoin de récurrence ici ! Si vous en avez rédigé une, c'est que vous ne travaillez pas correctement au brouillon en amont.

7) Question cadeau pour qui a fait la question **3)** (en théorie : tout le monde, en pratique : ce n'est pas le cas).

Autour de la constante d'Euler.

1) L'inégalité «$\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$» était à redémontrer.

C'est une question très classique, les inégalités montrées ici sont fondamentales et vous devez savoir les redémontrer facilement. Le faire par étude de fonction est fastidieux, mieux vaut le faire en appliquant l'IAF au logarithme.

2c) Dire «(u_n) est bornée donc converge» n'est pas acceptable.

Nul argument d'encadrement ici.

Lu plusieurs fois : «$u_n \geqslant \frac{1}{n}$ donc par passage à la limite $u_n \geqslant 0$». Quelle ☠HORREUR☠ ! Qu'est-ce que n *après* le passage à la limite ?

4a) Que d'erreurs dans l'étude de f_k. Presqu'aucune n'est correcte ! C'est désespérant.

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$...

8) Si vous n'avez pas répondu à la question précédente, vous ne pouvez pas affirmer que g_1 est négative et que g_2 est positive. Il est facile de voir que c'est équivalent à l'inégalité demandée : une telle affirmation passera immédiatement pour une escroquerie...

9c) Question élémentaire, d'autant plus que l'on vous donne le résultat. Encore fallait-il savoir mettre les fractions sur le même dénominateur, ce qui est loin d'être gagné pour tout le monde...

Règle de Descartes et localisation de racines.

1) Si $n = 1$, P n'est pas de degré 1, mais de degré b_1.

Que de contorsions chez certains pour résoudre $a_0 + a_1 x^{b_1} = 0$! Il convenait de justifier que la racine réelle de cette équation était simple.

3) ℓ est le nombre de racines strictement positives de P, mais pas comptées avec leurs multiplicités !

5a) «$P(x) > P(0)$ au voisinage de 0» à droite ne signifie pas que P est strictement croissante au voisinage de 0, à droite.

Vous n'aviez pas $P'(0) > 0$: $P = a_0 + a_1 X^{b_1} + \dots$, si $b_1 > 1$ alors $P'(0) = 0$.

5b) Le mieux était d'appliquer le résultat de la question précédente à $-P$.

7) La négation de «r est isolé» est «pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r' \in [r-\varepsilon, e+\varepsilon]$ tel que $f(r') = 0$ et $r' \neq r$». Avec le théorème de Rolle, cela permettait effectivement de construire une suite de zéros de f', tendant vers r.

Beaucoup ont oublié que le coefficient dominant de P valait 1.

Pour calculer $V(P)$, il fallait justifier qu'il y a au moins un changement de signe dans les coefficients de P. Il suffisait d'observer que $a_0 < 0$.

13a) Une fonction s'annulant une infinité de fois au voisinage d'un point (on a alors un zéro non isolé) n'est pas forcément constante au voisinage de ce point. Comme d'habitude, considérez $x \mapsto x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.