Devoir à la maison n° 15

À rendre le 30 mars

I. Étude d'une classe d'endomorphismes.

On s'intéresse à l'ensemble noté $F(\lambda)$ des endomorphismes linéaires de $\mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation $f \circ f = \lambda f$, pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

1) Étude générale.
Soit $f \in F(\lambda)$.

- **a)** Montrer que $\operatorname{Im} f = \{ u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = \lambda u \}$.
- **b)** On veut montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$. Soit $x \in \mathbb{R}^3$.
  - **i)** Analyse : on suppose que $x = u + v$, avec $u \in \operatorname{Im} f$ et $v \in \operatorname{Ker} f$. En calculant $f(x)$, trouver la valeur de u, et donc celle de v.
  - **ii)** Procéder à une phase de synthèse.
  - **iii)** Conclure.

2) Un exemple.
On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -x + y + z \\ -6x + 4y + 2z \\ 3x - y + z \end{pmatrix} \end{array}.$$

- **a)** Montrer que f appartient a $F(\lambda)$, pour un certain λ que l'on précisera.
- **b)** Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$, ainsi que de $\operatorname{Im} f$.
- **c)** Le vecteur $w = (7, 6, 5)$ appartient-il a $\operatorname{Im} f$?

II. Seconde formule de la moyenne.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, avec f décroissante et positive.

1) Montrer la formule de transformation d'Abel : si $u, v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k(v_{k+1} - v_k) = u_{n-1}v_n + \sum_{k=1}^{n-1}(u_{k-1} - u_k)v_k - u_0 v_0.$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose
$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \int_{a_k}^{a_{k+1}} g(t)\,\mathrm{d}t$$
avec, pour chaque $0 \leqslant k < n$,
$$a_k = a + k\frac{(b-a)}{n}.$$
Montrer que
$$S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

3) On introduit G la primitive de g s'annulant en a. Montrer que
$$f(a) \min_{[a,b]} G \leqslant S_n \leqslant f(a) \max_{[a,b]} G.$$

4) En déduire qu'il existe $c \in [a,b]$ vérifiant
$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a) \int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t.$$

5) Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues avec f monotone.
Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que
$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a) \int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t + f(b) \int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

— FIN —