

Feuille d'exercice n° 16 : **Fractions rationnelles - Corrigé**

Exercice 5

1) On a $X^3 - 3X^2 + X - 4 = (X - 1)(X^2 - 2X - 1) - 5$, donc la fraction rationnelle donnée se décompose en $X^2 - 2X - 1 - \frac{5}{X - 1}$.

2) On a affaire à une fraction rationnelle de degré strictement négatif donc de partie entière nulle et qui n'a que des pôles simples. D'après le cours, on a donc : $\frac{X}{X^2 - 4} = \frac{a}{X - 2} + \frac{b}{X + 2}$ où $a = \frac{2}{2 + 2}$ et $b = \frac{-2}{-2 - 2}$. Donc $\frac{X}{X^2 - 4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X - 2} + \frac{1}{X + 2} \right)$.

3) On a $X^2 + iX + 2 = (X - i)(X + 2i)$, donc la fraction rationnelle donnée n'a que des pôles simples. De plus, elle est de degré strictement négatif, donc de partie entière nulle.

$$\frac{(3 - 2i)X - 5 + 3i}{X^2 + iX + 2} = \frac{a}{X - i} + \frac{b}{X + 2i}$$

$$\text{où } a = \frac{(3 - 2i)i - 5 + 3i}{i + 2i} = 2 + i \text{ et } b = \frac{(3 - 2i)(-2i) - 5 + 3i}{-2i - i} = 1 - 3i.$$

4) On a $\frac{X}{(X + i)^2} = \frac{X + i - i}{(X + i)^2} = \frac{1}{X + i} - \frac{i}{(X + i)^2}$

5) On a

$$\frac{X^5 + X + 1}{X^4 - 1} = \frac{X(X^4 - 1) + 2X + 1}{X^4 - 1} = X + \frac{2X + 1}{X^4 - 1}$$

Or $\frac{2X+1}{X^4-1}$ a pour pôles 1, i , -1 , $-i$, tous simples. Notons A son numérateur et B son dénominateur. D'après le cours, comme il s'agit d'une fraction rationnelle à coefficients réels, on a

$$\frac{X^5 + X + 1}{X^4 - 1} = X + \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X - i} + \frac{c}{X + 1} + \frac{\bar{b}}{X + i}$$

$$\text{où } a = \frac{A(1)}{B'(1)} = \frac{3}{4}, b = \frac{A(i)}{B'(i)} = \frac{2i + 1}{-4i} = \frac{-2 + i}{4} \text{ et } c = \frac{A(-1)}{B'(-1)} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}.$$

6) Posons $A = X^5 + X^4 + 1$, $B = (X - 1)^3(X + 1)^2$ et $R = A - B$. R est de degré strictement inférieur à 5 et $A = B + R$. Donc A/B a pour partie entière 1 et s'écrit donc sous la forme :

$$\frac{A}{B} = 1 + \frac{a}{(X - 1)^3} + \frac{b}{(X - 1)^2} + \frac{c}{X - 1} + \frac{d}{(X + 1)^2} + \frac{f}{(X + 1)}$$

$$\text{où } a = \frac{A(1)}{(1 + 1)^2}, d = \frac{B(-1)}{(-1 - 1)^3}, \text{ et } b, c \text{ et } f \text{ sont des réels à déterminer. On a } a = 3/2^2 = 3/4,$$

$$d = 1/(-2)^3 = -1/8. \text{ Posons } R_1 = \frac{A}{B} - \frac{a}{(X - 1)^3} \text{ On a}$$

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{4(X^5 + X^4 + 1) - 3(X + 1)^2}{4(X - 1)^3(X + 1)^2} \\ &= \frac{4X^5 + 4X^4 - 3X^2 - 6X + 1}{4(X - 1)^3(X + 1)^2} \\ &= \frac{4X^4 + 8X^3 + 8X^2 + 5X - 1}{4(X - 1)^2(X + 1)^2} \end{aligned}$$

Posons $R_2 = R_1 - \frac{d}{(X+1)^2}$ On a

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{8X^4 + 16X^3 + 16X^2 + 10X - 2 + X^2 - 2X + 1}{8(X-1)^2(X+1)^2} \\ &= \frac{8X^4 + 16X^3 + 17X^2 + 8X - 1}{8(X-1)^2(X+1)^2} \\ &= \frac{8X^3 + 8X^2 + 9X - 1}{8(X-1)^2(X+1)} \end{aligned}$$

or $R_2 = 1 + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-1} + \frac{f}{(X+1)}$ donc $b = \frac{24}{8 \times 2} = \frac{3}{2}$ et $f = \frac{-10}{8(-2)^2} = -\frac{5}{16}$. Posons $R_3 = R_2 - \frac{b}{(X-1)^2}$. On a

$$\begin{aligned} R_3 &= \frac{8X^3 + 8X^2 + 9X - 1 - 12(X+1)}{8(X-1)^2(X+1)} \\ &= \frac{8X^3 + 8X^2 - 3X - 13}{8(X-1)^2(X+1)} \\ &= \frac{8X^2 + 16X + 13}{8(X-1)(X+1)} \end{aligned}$$

or $R_3 = 1 + \frac{c}{X-1} + \frac{f}{(X+1)}$, donc $c = \frac{37}{8 \times 2} = \frac{37}{16}$. On a donc

$$\frac{X^5 + X^4 + 1}{(X-1)^3(X+1)^2} = 1 + \frac{3}{4(X-1)^3} + \frac{3}{2(X-1)^2} + \frac{37}{16(X-1)} - \frac{1}{8(X+1)^2} - \frac{5}{16(X+1)}$$

7) Posons $A = X^5 + X + 1$ et $B = X^6 - 1$ et $\omega = e^{i\frac{2\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. On a $B' = 6X^5$. Les pôles de A sont les ω^k , pour $k = 0, \dots, 5$ qui sont tous simples. A/B s'écrit donc sous la forme

$$\sum_{k=0}^5 \frac{a_k}{X - \omega^k}$$

où $a_k = A(\omega^k)/B'(\omega^k)$. On trouve $a_0 = 1/2$, $a_1 = (1 + i\sqrt{3})/6$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1/6$. Par ailleurs, on a $\bar{\omega}^2 = \omega^4$ et $\bar{\omega} = \omega^5$, donc $a_4 = \bar{a}_2 = 0$ et $a_5 = \bar{a}_1 = (1 - i\sqrt{3})/6$.

$$8) \frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)} = \frac{1}{6} \frac{1}{(-X+2i)} + \frac{1}{6} \frac{1}{(X+i)} - \frac{1}{6} \frac{1}{(X+2i)} - \frac{1}{6} \frac{1}{(-X+i)} = -\frac{1}{3} \frac{X}{(X^2+4)} + \frac{1}{3} \frac{X}{(X^2+1)}$$

$$\begin{aligned} 9) \frac{X^7+3}{(X^2+X+2)^3} &= X - 3 - \frac{\frac{4}{49}i(19+7i\sqrt{7})\sqrt{7}}{(-2X-1+i\sqrt{7})^3} + \frac{\frac{996}{343}i\sqrt{7}}{-2X-1+i\sqrt{7}} + \frac{1}{49} \frac{376-84i\sqrt{7}}{(2X+1+i\sqrt{7})^2} + \\ &\quad \frac{1}{49} \frac{376+84i\sqrt{7}}{(-2X-1+i\sqrt{7})^2} + \frac{\frac{4}{49}i(-19+7i\sqrt{7})\sqrt{7}}{(2X+1+i\sqrt{7})^3} + \frac{\frac{996}{343}i\sqrt{7}}{2X+1+i\sqrt{7}} \\ &= X - 3 + \frac{13+7X}{(X^2+X+2)^3} + \frac{-21-7X}{(X^2+X+2)^2} + \frac{14}{(X^2+X+2)} \end{aligned}$$

Exercice 6 Nous utilisons ici le logiciel libre Maxima pour faire les calculs.

Une procédure (fonction) nommée **exercice** est d'abord écrite, qui fait appel aux fonction **partfrac**, qui décompose une fraction rationnelle en éléments simples, et **integrate**, qui fait ce que vous devinez probablement qu'elle fait. Pour ces deux fonctions, on donne en argument une expression **expr** et la variable **var** selon laquelle on veut décomposer ou intégrer.

```

(%i1) exercice(expr,var) := block([],
res : integrate(partfrac(expr,var),var),
return(res)
)$
(%i2) exercice(1/(1-x**2),x) ;
(%o2)

$$\frac{\log(x + 1)}{2} - \frac{\log(x - 1)}{2}$$

(%i3) exercice(x/(x**4+16),x) ;
(%o3)

$$\frac{\operatorname{atan}\left(\frac{x}{4}\right)}{8}$$

(%i4) exercice(1/(x**3-7*x+6),x) ;
(%o4)

$$\frac{\log(x + 3)}{20} - \frac{\log(x - 1)}{4} + \frac{\log(x - 2)}{5}$$

(%i5) exercice((4*x**2)/(x**4-1),x) ;
(%o5)

$$-\log(x + 1) + 2 \operatorname{atan}(x) + \log(x - 1)$$

(%i6) exercice((x**3+2*x+1)/(x**3-3*x+2),x) ;
(%o6)

$$-\frac{11 \log(x + 2)}{9} + \frac{11 \log(x - 1)}{9} + x - \frac{4}{3(x - 1)}$$

(%i7) exercice((-2*x**2+6*x+7)/(x**4+5*x**2+4),x) ;
(%o7)

$$-\log(x^2 + 4) + \log(x^2 + 1) + 3 \operatorname{atan}(x) - \frac{5 \operatorname{atan}\left(\frac{x}{2}\right)}{2}$$


```