

Fonctions usuelles - un problème supplémentaire

1) Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par

$$\forall x \in [0, \pi] \quad f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{5 - 4 \cos x}} .$$

a) Calculer la dérivée de f . Vérifier que $f'(x)$ est du même signe que $\cos(x) - \frac{1}{2}$.

b) En déduire les variations de f sur $[0, \pi]$ et tracer sa courbe représentative.

2) Soit g la fonction définie sur $[0, \pi]$ par

$$\forall x \in [0, \pi] \quad g(x) = \operatorname{Arccos} \left(\frac{4 - 5 \cos x}{5 - 4 \cos x} \right) .$$

a) Vérifier que g est bien définie en tout point de $[0, \pi]$.

b) Pour $x \in [0, \pi]$, simplifier les expressions $\cos(g(x))$ et $\sin(g(x))$.

c) Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0, \pi[$ (pour cela, on pourra dériver la relation donnant $\cos(g(x))$ obtenue à la question précédente).

d) Vérifier que $\forall x \in [0, \pi] \quad g(g(x)) = x$.

Qu'en déduit-on concernant la courbe (Γ) représentant g ?

e) Construire la courbe (Γ) .