Complexes - des exercices supplémentaires

1. Exercices fondamentaux

Exercice 1 Mettre sous la forme $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ les nombres suivants :

$$\text{a)}\ \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i} \quad ; \quad \text{b)}\ \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \text{c)}\ \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i}.$$

Exercice 2 Mettre sous forme algébrique $(\sqrt{3} - i)^8$ et $(-1 + i)^{10}$.

Exercice 3 Comment choisir l'entier naturel n pour que $(\sqrt{3} + i)^n$ soit un réel ? un imaginaire pur ?

Exercice 4 Déterminer les ensembles de solutions des équations suivantes, de la variable complexe z.

1) $z^2 - (1 + i)z - 4 + 8i = 0$
2) $z^2 + (-5 + 2i)z + 4 - 8i = 0$
3) $z^2 - 7z + 1 + 7i = 0$
4) $z^2 - (2 + 6i)z - 5 + 10i = 0$

Exercice 5

1) Déterminer, sous forme trigonométrique, les solutions complexes de l'équation

$$z^3 = 4\sqrt{2}(-1 + i).$$

2) En utilisant les racines cubiques de l'unité, écrire les solutions de cette équation sous forme algébrique.

3) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$, puis celles de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 6 Linéariser les expressions suivantes, où $x \in \mathbb{R}$.

1) $\sin^3(x)\cos(x)$
2) $\cos^2(x) + \cos^4(x) + \cos^6(x)$
3) $\cos^2(x)\sin^2(x)$
4) $\cos^3(x)\sin^3(x) + 3\sin(x)\cos^2(x)$

2. Exercices standards

Exercice 7 Déterminer les racines quatrièmes de $-7 - 24i$.

Exercice 8 Soit α une racine 7-ième de l'unité, différente de 1. Montrer que :

$$\frac{\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha^4} + \frac{\alpha^3}{1+\alpha^6} = -2.$$

Exercice 9 Résoudre les équations suivantes :

$$z^6 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \quad ; \quad z^4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}.$$

Exercice 10

1) Soient z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes distincts ayant le même cube.
Exprimer z_2 et z_3 en fonction de z_1.

2) Donner, sous forme trigonométrique, les solutions dans $\mathbb{C}$ de :

$$z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0.$$

Exercice 11 Déterminer le lieu géométrique des complexes z vérifiant :

1) z^2 , $1-z$ et $\bar{z}$ ont même module.

2) $\mathrm{Re}(z^3) = \mathrm{Im}(z^3)$.

3) Les points d'affixe 1, z et $1+z^2$ sont alignés.

3. Exercices plus difficiles

Exercice 12 () Montrer que $\dfrac{3+4i}{5}$ n'est pas une racine n^{ieme} de l'unité.

On pourra :

— *Montrer* : $\exists \theta \in \mathbb{R},\ \dfrac{3+4i}{5} = \exp(i\theta)$

— *Montrer* : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ \exists (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$,
$\cos(n\theta) = 2^{n-1}\cos^n\theta + \alpha_1 \cos^{n-1}\theta + \ldots \alpha_{n-1}\cos\theta + \alpha_n$.

— *Calculer* $\cos n\theta$ *et* $\cos\theta$.

— *Conclure*

Exercice 13 () Sur une horloge à aiguilles, combien y a-t-il de configurations possibles telles que, lorsque l'on échange les aiguilles des heures et des minutes, cela donne aussi une heure valide ?