


Feuille d'exercice n° 01 : **Fonctions usuelles**

**Exercice 1** ( ) Établir le domaine de validité des inégalités suivantes.


- 1)  $\sin(x) \leq x$                                       2)  $\ln(1+x) \leq x$                                       3)  $\exp(x) \geq 1+x$

**Exercice 2** () Factoriser les expressions suivantes, puis déterminer le tableau de signes de chacune.


- 1)  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$                                       3)  $\varphi(x) = x + 8 - \frac{16}{x-7}$   
2)  $g(x) = x \ln(x) - x - 2 \ln(x) + 2$                                       4)  $\psi(x) = xe^x + 3e^x - 2x - 6$

**Exercice 3** () Dériver et dresser les tableaux de variations des fonctions suivantes.

- 1)  $f : x \mapsto x^2 e^x$                                       3)  $\varphi : x \mapsto \ln|x|$   
2)  $g : x \mapsto \frac{x}{\ln(x) - 1}$                                       4)  $\psi : x \mapsto 3 \ln|x-2| + 2 \ln|x+3|$

**Exercice 4** ()

- 1) Montrer que la somme de deux applications croissantes est croissante.  
2) La somme de deux applications monotones est-elle nécessairement monotone ?  
3) Le produit de deux applications croissantes est-il nécessairement une application croissante ?


**Exercice 5** () Déterminer le domaine de définition, de  $g \circ f$  dans chaque cas.

- 1)  $f : x \mapsto 1 + \frac{3}{x-5}$  et  $g = \sqrt{\cdot}$ .                                      3)  $f : x \mapsto x + 3 \ln(x)$  et  $g = \exp$ .  
2)  $f = \cos$  et  $g : x \mapsto \frac{1}{x}$                                       4)  $f = \sin$  et  $g = \ln$ .

**Exercice 6** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f \circ f$  est croissante tandis que  $f \circ f \circ f$  est strictement décroissante. Montrer que  $f$  est strictement décroissante.

**Exercice 7** Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  le système  $\begin{cases} 2^{3x+2y} = 5 \\ 4^{2x} = 2^{2y+3} \end{cases}$ .

**Exercice 8** Résoudre l'équation  $\ln \frac{x+3}{4} = \frac{1}{2}(\ln x + \ln 3)$ .

**Exercice 9** ( ) Tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes.

- 1)  $f : x \mapsto \sin(\operatorname{Arcsin} x)$                                       2)  $g : x \mapsto \operatorname{Arcsin}(\sin x)$

**Exercice 10** (✎) Simplifier les expressions suivantes.

- |  |   |   |                                    |
|--|---|---|------------------------------------|
| 1) $\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ | 3) $\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ | 5) $\operatorname{Arctan}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$ | 7) $\sin(\operatorname{Arccos} x)$ |
| 2) $\operatorname{Arccos}\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)$  | 4) $\operatorname{Arccos}(\cos 4\pi)$                                   | 6) $\tan(\operatorname{Arcsin} x)$                        | 8) $\cos(\operatorname{Arctan} x)$ |

**Exercice 11** (🚲) Démontrer les inégalités suivantes.

- Pour tout  $a \in ]0, 1[$ ,  $\operatorname{Arcsin} a < \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ .
- Pour tout  $a \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\operatorname{Arctan} a > \frac{a}{1+a^2}$ .

**Exercice 12**

- Soit  $x \in [0, \pi/8[$ . Exprimer  $\tan(4x)$  en fonction de  $\tan(x)$ .
- En déduire la formule de Machin :  $\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{239}$ .

*Remarque* : John Machin a pu calculer 100 décimales de  $\pi$  à la main en 1706 grâce à cette relation.

**Exercice 13**

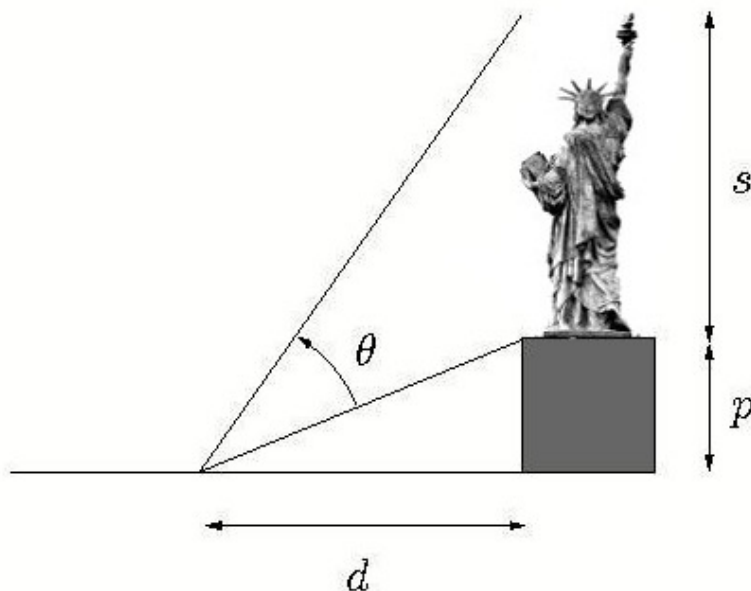


FIGURE 1 – La statue

Une statue de hauteur  $s$  est placée sur un piédestal de hauteur  $p$ . À quelle distance du pied de la statue un observateur (dont la taille est supposée négligeable) doit-il se placer pour la voir sous un angle maximal (*i.e.* pour avoir  $\theta$  maximal, avec les notations de la figure 1) ?

**Exercice 14** (🚲) Sur quelle partie de  $\mathbb{R}$  est définie l'équation  $\operatorname{Arccos} x = \operatorname{Arcsin}(1-x)$  ? La résoudre.

**Exercice 15** On définit les deux fonctions  $f$  et  $g$  par  $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right)$  et  $g : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)$ .

- Déterminer leurs ensembles de définition.
- Calculer, lorsque cela est possible, leurs dérivées.
- Que peut-on en déduire concernant  $f(x)$  et  $g(x)$  ? Donner le maximum de précisions.
- Tracer les courbes représentatives de  $f$  et de  $g$  (sur un même schéma).

**Exercice 16** (🚲) Calculer  $\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{8}$ .

**Exercice 17** (🏔️) Résoudre :  $\operatorname{Arcsin} 2x = \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin} (x\sqrt{2})$ .

**Exercice 18** Soit la fonction  $f : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \longrightarrow \mathbb{R}$  .  

$$x \longmapsto \ln \left( \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right)$$

Montrer que  $f$  est bien définie et que l'on a les relations suivantes, pour tout  $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ .

**1)**  $\operatorname{th} \left( \frac{f(x)}{2} \right) = \tan \left( \frac{x}{2} \right)$

**3)**  $\operatorname{ch} (f(x)) = \frac{1}{\cos(x)}$

**2)**  $\operatorname{th}(f(x)) = \sin(x)$

**4)**  $\operatorname{sh} (f(x)) = \tan(x)$ .

**Exercice 19** Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Résoudre l'équation  $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = 0$ .

