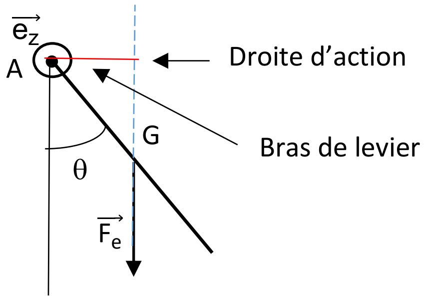
DEVOIR EN TEMPS LIBRE DE MECANIQUE 2

Exercice 1
Référentiel : $\Re$ Galiléen
Système : La portière

1. Les moments



- La liaison de pivot parfaite, pas de frottements $\Rightarrow \mathcal{M}_1 = 0$
- Le poids, il est parallèle à l'axe $\Rightarrow \mathcal{M}_2 = 0$
- La force due au mouvement de la voiture $\Rightarrow \mathcal{M}_{Az} = \left(\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{F_e}\right).\overrightarrow{e_z}$

$= -ma_0 a\sin\theta$

Ainsi $\boxed{\mathcal{M}_{Az} = -ma_0 a\sin\theta}$

---

2. Loi : Théorème du moment cinétique

$J_{AZ}\,\ddot{\theta} = \mathcal{M}_{Az} \quad \Rightarrow \frac{1}{3}\, m4a^2\ddot{\theta} = -ma_0 a\sin\theta$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{3}{4}\frac{a_0}{a}\sin\theta}$

---

3. La vitesse angulaire

On a $\dot{\theta}.\ddot{\theta} = -\frac{3}{4}\frac{a_0}{a}\sin\theta.\dot{\theta}$
Ainsi $\frac{d\dot{\theta}^2}{dt} = \frac{3}{2}\frac{a_0}{a}\frac{d\cos\theta}{dt}$
On intègre entre l'instant t = 0 avec $\dot{\theta} = 0$ et $\theta = \pi/2$ et l'instant t quelconque
On obtient : $\dot{\theta}^2 = \frac{3}{2}\frac{a_0}{a}\cos\theta$
Soit $\boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{a_0}{a}\cos\theta}}$

---

4. Temps pour la fermeture

$\dot{\theta}$ est négatif, en effet θ diminue au cours du temps

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}} = -\sqrt{\frac{3}{2}\frac{a_0}{a}}\,\tau$

Ainsi $\boxed{\tau = 2{,}82.\sqrt{\frac{2}{3}\frac{a}{a_0}}}$

Exercice 2

Référentiel : $\Re_T$ Galiléen
Système : Le satellite
Force : $\vec{F} = -\frac{GM_T m}{r^2}\overrightarrow{e_r}$

1.1. Le mouvement est circulaire uniforme

Loi : Théorème du moment cinétique $\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \vec{m}$
Or la force est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$ donc son moment est nul
D'où $\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \vec{0}$
Le moment cinétique est constant, **le mouvement est donc plan**

Loi : Deuxième loi de Newton : m$\vec{a} = \vec{F}$
Base : Polaire, celle coïncidant avec le plan du mouvement
Projections : $\begin{cases} -m\frac{v^2}{r} = -\frac{GM_T m}{r^2} \\ m\frac{dv}{dt} = 0 \end{cases}$
On observe $\frac{dv}{dt} = 0$ **le mouvement est uniforme**
De la première projection on obtient : $\boxed{\mathbf{v = \sqrt{\frac{GM_T}{R+h}} = 7{,}45\ km.s^{-1}}}$

1.2. La période du mouvement

Mouvement circulaire : v = $\frac{2\pi r}{T}$
D'où $\boxed{\mathbf{T = \frac{2\pi(R+h)}{v} = 6{,}05\ 10^3\ s}}$

2.1. Condition pour un satellite géostationnaire

- Orbite circulaire parcourue dans le même sens que la rotation de la Terre autour de l'axe des pôles
- Orbite dans le plan de l'équateur terrestre
- La période de rotation est égale à celle de la Terre

2.2. Loi de Kepler

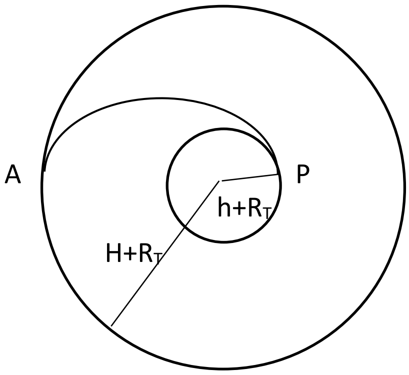
On a v² = $\frac{GM_T}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$
Ainsi $\boxed{\mathbf{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} = k}}$

$k = 9{,}90\ 10^{-14}\ s^2.m^{-3}$

2.3. Orbite de Météosat 8

On a $\frac{T^2}{r^3}$= k ⇒ r = $\left(\frac{T^2}{k}\right)^{1/3}$
On connait T = T_0 = 1436 min
On obtient donc $r = 4{,}22\ 10^7$ m
D'où $H = 3{,}55\ 10^4$ km

2.4. Schéma



2.5. Le demi grand axe

D'après le schéma 2r = 2R+h+H
Soit r= R+(h+H)/2 = 24,48 10^3 km

2.6. Energie cinétique

En P sur les deux orbites le satellite a la même énergie potentielle.
La variation d'énergie mécanique correspond à la variation d'énergie cinétique :

$\Delta E_m = E_{ellipse} - E_{cercle}$
D'où $\boxed{\Delta E_{CP} = -\frac{GM_T m}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R+h}\right) = 22{,}1 \text{ MJ.kg}^{-1}}$

De même en A
$\boxed{\Delta E_{CA} = -\frac{GM_T m}{2}\left(\frac{1}{R+H} - \frac{1}{r}\right) = -3{,}44 \text{ MJ.kg}^{-1}}$

2.7. Durée du transfert

Le transfert correspond à la demi-ellipse
D'où $\tau = T_{ellipse}/2$
On applique la troisième loi de Kepler $\frac{T^2_{ellipse}}{r^3} = k$
Ainsi $\boxed{\tau = \frac{1}{2}\sqrt{kr^3} = 1{,}9\ 10^4 \text{s}}$