Devoir surveillé n°1

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} 2^{3x+2y} & = & 5 \\ 4^{2x} & = & 2^{2y+3} \end{cases}$.

II. Argument tangente hyperbolique.

L'objectif de ce problème est d'étudier la fonction réciproque de la tangente hyperbolique : l'*argument tangente hyperbolique*, notée argth.

Dans tout le problème, on considère un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Définition en tant que réciproque.

- **a)** Rappeler sans démonstration le tableau de variations de la fonction th.
- **b)** Démontrer que th admet une réciproque, que nous noterons argth, et déterminer son tableau de variations.
- **c)** Exprimer th' en fonction de th (on justifiera le résultat).
- **d)** Étudier la dérivabilité de argth et déduire de la question précédente une expression explicite de argth'.
- **e)** Étudier la position relative de la courbe de argth et de sa tangente au point d'abscisse 0.
- **f)** Tracer sur un même dessin les courbes de th, argth et la droite d'équation $y = x$.

2) Expression explicite de l'argument tangente hyperbolique.

- **a)** Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre en x l'équation $y = \operatorname{th}(x)$ et en déduire une expression explicite de $\operatorname{argth}(y)$.
- **b)** Retrouver à partir de cette expression de $\operatorname{argth}(y)$ l'expression de de $\operatorname{argth}'(y)$ obtenue à la question **1)d)**.

3) Une étude de fonction.

On considère la fonction $f : x \mapsto \operatorname{argth}\left(\dfrac{3\operatorname{th}(x)+1}{3+\operatorname{th}(x)}\right)$.

- **a)** Déterminer le domaine de définition de f.
- **b)** Déterminer le domaine de dérivabilité de f ainsi qu'une expression simplifiée de $f'(x)$, lorsque c'est possible.
- **c)** En déduire une expression simplifiée de f.

4) Une autre étude de fonction.

On considère la fonction $g : x \mapsto \operatorname{argth}\left(\sqrt{\dfrac{\operatorname{ch}(x)-1}{\operatorname{ch}(x)+1}}\right)$.

a) Déterminer le domaine de définition de g.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, posons $y = \mathrm{ch}(x)$. Montrer que $g(x) = \dfrac{1}{2} \ln \left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$.

c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{|x|}{2}$.

5) <u>Un calcul de somme.</u>

a) Montrer que si $x, y \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathrm{th}(x+y) = \frac{\mathrm{th}(x) + \mathrm{th}(y)}{1 + \mathrm{th}(x)\,\mathrm{th}(y)}.$$

b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{argth}\left(\frac{1}{k^2+3k+1}\right) = \mathrm{argth}\left(\frac{1}{k+1}\right) - \mathrm{argth}\left(\frac{1}{k+2}\right)$$

c) En déduire l'existence et la valeur de la limite de la suite de terme général :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{argth}\left(\frac{1}{k^2+3k+1}\right) = \mathrm{argth}\left(\frac{1}{1^2+3\times 1+1}\right) + \cdots + \mathrm{argth}\left(\frac{1}{n^2+3n+1}\right).$$

III. Polynômes de Tchebychev.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $F_n : x \mapsto \cos(n \,\mathrm{Arccos}(x))$.

1) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, déterminer l'ensemble de définition de F_n, que l'on notera $\mathscr{D}_n$.

2) Expliciter F_0, F_1 et F_2.

3) Montrer que, pour tout $x \in \mathscr{D}_3$, $F_3(x) = 4x^3 - 3x$.

4) Soit $x \in [-1, 1]$. Exprimer $\mathrm{Arccos}(-x)$ en fonction de $\mathrm{Arccos}(x)$.

5) En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer la parité de F_n pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $F_{n+1} + F_{n-1}$ en fonction de F_n.

7) Retrouver à partir de ce résultat l'expression de F_3 obtenue à la question **3)** et déterminer F_4.

8) Déterminer F_n' et F_n'' pour tout $n \in \mathbb{N}$. On s'attachera à déterminer les ensembles de dérivabilité des fonctions en jeu.

9) Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(1 - x^2)F_n''(x) - xF_n'(x) + n^2 F_n(x) = 0.$$

— **FIN** —