Devoir surveillé n°9
Version 1

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en classe.

Dans un sac de dés (à six faces), il y a une proportion de $p \in [0,1]$ dés pipés. Chaque dé pipé donne une probabilité de $\frac{1}{2}$ d'obtenir un six.
On pioche un dé, on le lance, et l'on obtient un six : quelle est la probabilité d'avoir tiré un dé pipé ?

II. Étude d'un endomorphisme.

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à deux. Pour tout $P \in E$, on note

$$f(P) = (X^2 + X - 2)P' - (2X - 1)P + P(1).$$

1) **a)** Calculer $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^2)$.

b) Montrer que f est un **endomorphisme** de E.

c) Comparer $f(1) + f(X^2)$ et $f(X)$, puis préciser le rang de f. Que peut-on en déduire ?

2) **a)** Déterminer une base du noyau $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de l'image $\mathrm{Im}(f)$.

b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sous-espaces supplémentaires de E.

3) Soit la famille $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ où

$$P_0 = X^2 + X - 2, \quad P_1 = X^2 - 2X + 1 \quad \text{et} \quad P_2 = X^2 + 3X + 1.$$

a) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de E.

b) Calculer les images par f des vecteurs de $\mathscr{B}$, et exprimer le résultat en fonction des P_i.

c) Soit $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$, et $Q = a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2$ un vecteur de E.
Calculer $f(Q)$ en fonction de a_0, a_1 et a_2.

d) Soit $Q = 2X^2 + X + 2$: pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $f^n(Q)$ et déterminer ses racines.

e) L'endomorphisme f est-il nilpotent (c'est-à-dire existe-t-il un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n = 0$) ?

III. Images et noyaux itérés d'un endomorphisme.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, soit f un endomorphisme de E. On cherche à démontrer le résultat suivant :

$$\exists\, p \in [\![1, n]\!], \quad E = \operatorname{Ker} f^p \oplus \operatorname{Im} f^p.$$

1) Cas général.

- **a)** Montrer que $\operatorname{Ker} f^k \subset \operatorname{Ker} f^{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- **b)** En déduire que la suite $(\dim \operatorname{Ker} f^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente.
- **c)** Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel k tel que $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+1}$. On le notera p. Cet entier p est appelé *l'indice* de f.
- **d)** Montrer qu'il existe une famille $(x_1, \ldots, x_p)$ telle que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $x_i \in \operatorname{Ker} f^i \setminus \operatorname{Ker} f^{i-1}$.
- **e)** Montrer que cette famille est libre.
- **f)** En déduire que $p \leqslant n$.
- **g)** Montrer par récurrence que $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^p$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant p$.
- **h)** En déduire que $E = \operatorname{Ker} f^p \oplus \operatorname{Im} f^p$.

2) Quelques exemples.

- **a)** Calculer l'indice de f si f est nul ou si f est un automorphisme de E.
- **b)** Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$f_a : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} ax + y + az \\ y + az + t \\ x + y + az \\ y \end{pmatrix}.$$

  Déterminer pour quelles valeurs de a l'application f_a est bijective, et déterminer l'indice de f_a pour les valeurs de a pour lesquelles f_a n'est pas un automorphisme.

3) Contre-exemples. On ne suppose maintenant plus E de dimension finie.

- **a)** Existe t-il nécessairement k tel que $\operatorname{Im} f^{k+1} = \operatorname{Im} f^k$?
- **b)** Existe t-il nécessairement k tel que $\operatorname{Ker} f^{k+1} = \operatorname{Ker} f^k$?
- **c)** On pose $F = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Im} f^k$ et $G = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker} f^k$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
- **d)** A t-on nécessairement $E = F \oplus G$ dans le cas où E est de dimension finie ?
- **e)** Et dans le cas où E n'est pas de dimension finie ?

— FIN —