Informatique tronc commun
Devoir n° 03
Première partie, sur papier

Samedi 8 avril 2017

Consignes de rédaction

À chaque fois que l'on écrira du code `Python`, on indiquera les niveaux d'indentation par des traits verticaux placés à gauche du code, comme cela a été fait en cours.

On numérotera chaque ligne de chaque bloc de code `Python`.

Lorsque l'on vous demande d'écrire un invariant, un variant ou d'étudier une complexité, on fera systématiquement référence aux lignes du bloc de code étudié. Par exemple : « Un invariant pour la boucle `for` des lignes n° 42 à 1515 est [...] ».

Lorsque l'on vous demande de justifier des invariants, des variants ou complexité, on fera systématiquement référence à une ligne du bloc de code étudié. Par exemple : « juste avant la ligne n° 42, on a que [...] », ou « juste après la ligne n° 1515, on sait que [...] » ou « le bloc des lignes 3 à 7 s'exécute en [...] ».

Lorsque l'on écrit une fonction `Python`, on ne demande pas de vérifier que les arguments donnés sont corrects. Cependant, il sera apprécié d'indiquer les préconditions vérifiées par ces arguments dans la *docstring* de la fonction.

1 Indice d'une occurence du maximum d'un tableau

Q1 Écrire une fonction `Python` renvoyant un indice du maximum d'un tableau de nombres `T`.

Q2 Écrire un invariant de boucle pour cet algorithme. Démontrer que l'algorithme précédent donne le bon résultat.

Q3 Donner la complexité dans le pire des cas du calcul d'un indice du maximum de `T` par cette fonction, en fonction de la longueur de `T`, que l'on notera n.

2 Méthode d'Euler

On considère une équation différentielle $(\mathscr{E}) : y' = F(y,t)$, où F est une fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, et où l'inconnue y est une fonction de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, avec la condition initiale $y(t_0) = y_0$.

Q4 Décrire le principe de la méthode d'Euler. On donnera clairement la relation de récurrence qui est au coeur de cette méthode, en expliquant bien ce que représente la suite vérifiant cette relation de récurrence.

Q5 Écrire en `Python` une fonction mettant en œuvre la méthode d'Euler et permettant de résoudre numériquement $(\mathscr{E})$ sur le segment $[a,b]$, où $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Vous écrirez une docstring décrivant tous les arguments de cette fonction.

On considère l'équation différentielle d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ et les conditions initiales suivantes :

$$y'' + \cos(t)y' - t^2 y = \mathrm{e}^t, \qquad y(0) = 4,\ y'(0) = 2. \tag{$\mathscr{E}$}$$

Q6 Donnez une fonction F et une variable X telle que $(\mathscr{E})$ soit équivalente à l'équation $X' = F(X,t)$. On précisera bien les ensembles de définition et d'arrivée de F, et l'ensemble auquel appartient la variable X, ainsi que la condition initiale à utiliser.

3 Un algorithme mystère

On considère la fonction `Python` suivante.

```python
def mystere(u,v):
    """u,v : tableaux d'entiers"""
    m = 0
    p,q = len(u),len(v)
    for i in range(p) :
        for a in range(q) :
            k = 0
            while i+k < p and a+k < q and u[i+k] == v[a+k] :
                k = k+1
            if k > m :
                m = k
    return m
```

Q7 Que contient le résultat renvoyé par `mystere(u,v)` ? Justifier.

Q8 Quelle est la complexité de la fonction `mystere(u,v)`, en fonction du maximum des longueurs de `u` et `v`, que l'on notera n ?