Devoir surveillé n° 03 - Remarques

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 32 points, ramené sur 5 points.
- Problèmes : exercice vu en TD sur 8 points, et les autres questions sur 4 points, ramené sur 15 points.

Statistiques descriptives.

	Calculs	Problème	Note finale
Note maximale	19	104	$18,5$
Note minimale	3	15	$6,5$
Moyenne	$\approx 10,10$	≈ 37	$\approx 9,99$
Écart-type	$\approx 3,72$	$\approx 14,67$	$\approx 2,45$

Remarques générales.

Ce sont toujours les mêmes remarques : devrais-je les faire jusqu'en juin ?
• Introduire les variables utilisées. Vos résolutions de l'exercice de TD commencent très souvent par :« Montrons que f injective $\Rightarrow \forall A, A' \in \mathscr{P}(E)$, $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$. Soit $y \in f(A \cap A')$ ... ». Qui sont A et A' dans cette rédaction ? Ce n'est pas parcequ'un jour, à un endroit de l'énoncé ou de votre copie, les lettres A et A' apparaissent, que A et A' sont définies. Qu'est-ce qui empècherait ici de prendre $A, A' \in \mathbb{R}$? Et comment pourrais-je deviner que ce n'est pas ce que vous faites ?
• « $f(x)$ est dérivable », « $f(x)$ est croissante », « $1 + x$ est continue »... je n'en peux plus ! ! ! !
• Mettre en relation deux propositions, dont l'une dépend de x mais pas l'autre, n'a aucun sens. Par exemple : « g est définie si $x \neq -1$ » (qui est x ? et quel rapport avec la fonction g ?). Il faut écrire « $g(x)$ est défini si $x \neq -1$ », après avoir introduit x.
Ou encore : « pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est croissante ». La croissance de f est une propriété GLOBALE, elle ne dépend pas d'un point x ! Il faut rédiger : « f est croissante sur $\mathbb{R}$ ».

I. Exercice vu en TD.

Voilà typiquement le genre d'exercice où il faut suivre scrupuleusement les méthodes vues en cours. Vous voulez montrer que $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$? Alors il faut commencer par : soit $y \in f(A \cap A')$. Si vous commencez par autre chose, c'est faux.
Vous voulez montrer que f est injective ? Alors commencez par : soit $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Sinon, ça ne marche pas.
Ces réflexes ne sont pas encore bien acquis, c'est dommage.
Dernière remarque : si à aucun moment vous n'utilisez que f est injective, mais que vous arrivez tout de même à montrer le résultat, il y a un souci. De manière générale, si vous n'utilisez pas toutes les hypothèses de l'énoncé, vous devez réagir !

II. Étude de trois fonctions.

Une bonne partie des questions portait sur des études de fonctions. Et il y en avait encore une autre dans le problème suivant. Ces études de fonctions ont été très mal traitées. Il y a des problèmes de cours : les ensembles de définition et les dérivées des fonctions usuelles ne sont pas toujours connus. Il y a beaucoup d'erreurs dans les calculs de dérivées. Il y a des résultats théoriques mal connus ou mal utilisés, essentiellement en ce qui concerne le TVI et le théorème de la bijection strictement monotone. Et il y a des problèmes de rédaction.
Ne vous contentez pas de dire qu'une fonction est croissante. Dans la plupart des cas elle sera strictement croissante, et vous devez alors préciser ce « strictement ». Par convention, une flèche ascendante dans un tableau de variations signifie justement une croissance stricte de la fonction. Donc si lors de l'étude théorique vous avez juste montré que la fonction était croissante, vous n'avez pas le droit de tracer une flèche ascendante dans le tableau.

1) La notion de composition est encore très mal comprise. Les nombreuses rédaction du style « Arctan et $\sqrt{.}$ sont définies sur $\mathbb{R}_+$ donc $\operatorname{Arctan}\circ\sqrt{.}$ aussi » en sont le témoin. Écrire cela est la preuve que vous ne comprenez ce qu'est une composition de fonctions. Il y a un point fondamental à vérifier pour étudier $\varphi \circ \psi$: l'ensemble d'**<u>ARRIVÉE</u>** de ψ doit être inclus dans l'ensemble de départ de φ. Plus préciséménet, il faut déterminer une partie D telle que ψ soit définie sur D, et telle que φ soit définie sur $\psi(D)$.
Pour h, il fallait donc écrire : « $\sqrt{.}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, et $\sqrt{.}(\mathbb{R}+) = \mathbb{R}_+$. Or Arctan est définie sur $\mathbb{R}_+$, donc h est définie sur $\mathbb{R}_+$ ». Si vous trouvez que c'est la même chose que de dire « Arctan et $\sqrt{.}$ sont définies sur $\mathbb{R}_+$ donc $\operatorname{Arctan}\circ\sqrt{.}$ aussi », réflechissez encore. Personnellement quand je lis cela, je me dis que vous pensez que si φ et ψ sont définies sur un même ensemble, alors $\varphi\circ\psi$ aussi, ce qui est bien sûr faux. À ce compte-là, $x \mapsto \ln(-\operatorname{Arctan} x)$ serait définie sur $\mathbb{R}_+^*$, car ln et $-\operatorname{Arctan}$ le sont.
Pour g, vérifier que si $x \geqslant 0$, alors $g(x)$ est bien défini, est un bon départ. Mais ce n'est pas tout, car cela ne prouve pas que g n'est pas définie ailleurs que sur $\mathbb{R}_+$. Je vous renvoie au corrigé.

4 Il y a une note artistique sur les tracés de graphe. Beaucoup sont passés à côté, en proposant des graphes absolument stupéfiants de laideur. De plus, on vous demande une **allure** du graphe. Calculer 3 ou 4 valeurs de la fonction, et relier les points, c'est bon pour les physiciens (humour). Ceux qui ont fait cela se sont retrouvés avec une asymptote à 4 cm de leur graphe, donc ça ne ressemblait pas une asymptote. On n'attend pas cela. Cela dit, ce n'est pas une raison pour vous écarter radicalement des valeurs que vous connaissez (ici en $\pi/3$ etc), mais elles ne servent que de guide.

5 Là encore, j'ai expliqué 1000 fois comment on rédigeait ce genre de questions, mais ce n'est toujours pas compris. Le TVI donne l'existence d'un antécédent, et la stricte montonie donne l'unicité. Le tout peut être rassemblé dans le théorème de la bijection monotone, mais je vous déconseille fortement de le faire : vous arriverez juste à tout mélanger, ou à donner l'impression que vous mélangez tout. Séparez les deux points : « f est continue, donc avec le TVI, il existe un antécédent. Or f est strictement croissante, donc cet antécédent est unique ».
Plus subtil : dire que $f([0, \pi/2[) = \mathbb{R}_+$, et dire que tout $x \in \mathbb{R}_+$ a un antécédent par f dans $[0, \pi/2[$, c'est exactement la même chose ! Revoyez le cours sur ce point. Et pour montrer que $f([0, \pi/2[) = \mathbb{R}_+$, on utilise le TVI, qui ne sert d'ailleurs qu'à cela. Enfin, dire « f est bijective sur $[0, \pi/2[$ » n'a aucun sens : est-elle bijective de $[0, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$, ou dans $\mathbb{R}_+$, ou encore autre chose ? **Il faut préciser l'ensemble d'arrivée**. Donc ici, ça donnait :
« $f(0) = 0$ et $f \underset{\pi/2}{\longrightarrow} +\infty$, et comme f est continue (et croissante), alors avec le TVI, $f([0, \pi/2[) = \mathbb{R}_+$. Or f est strictement monotone donc injective, donc (et il n'y a plus de théorème à utiliser), f est bijective de $[0, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}_+$, d'où le résultat. »

6 Dans cette question, on vous attendait au tournant sur deux points : le passage de $\sqrt{\tan^2 t}$ à $\tan t$ (car ici $\tan t \geqslant 0$) et celui de $\operatorname{Arctan}(\tan t)$ à t (car ici $t \in [0, \pi/2[$). Toutes les autres étapes étaient à la portée d'un enfant de 6 mois et ne nécessitaient aucune justification.

7 Il s'agissait d'une bête formule de trigo. Certes, il s'agissait de deux expressions de $\tan' t$, mais en parler n'était absolument pas pertinent, et totalement inutile.

9 Petit rappel : la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 ...

11 Pour bien tracer cette courbe, il fallait étudier la pente en 0. Très peu y ont pensé. Et il fallait montrer que la tangente était verticale, car $h'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$.

III. Une équation différentielle.

2.a. Du grand n'importe quoi. Fixer par exemple $x = 0$ et $y \in \mathbb{R}$, et donner une valeur de $f(0)$ dépendant de y ne rime à rien. $f(0)$ ne prend qu'une valeur, donc écrire « si y =ceci, alors $f(0)$ =titi, et si y =cela, alors $f(0)$=tata » est absurde. Et si vous dites : si $y = 0$, alors $f(0) = 0$, pourquoi, tout simplement, n'écrivez-vous pas : $f(0.0) = 0.f(0) + 0.f(0) = 0$, donc $f(0) = 0$? ? ? ? Idem pour $f(1)$.

2.c La définition de « f est impaire », c'est : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$. Donc on en revient aux méthodes : vous prenez x dans $\mathbb{R}$, et vous montrez que $f(-x) = -f(x)$ ... Si vous prenez x et y dans $\mathbb{R}$ et que vous montrez que $f(-xy) = -f(xy)$, alors vous ne pouvez rien conclure, ce n'est pas la définition (si f est impaire, elle vérifie cela, mais pas de chance, on vous demandait l'autre sens ; il « suffisait » de poser alors $y = 1$, mais encore fallait-il le faire).

3.d. L'équation à étudier, $f(xy) = xf(y) + yf(x)$, n'est pas une équation différentielle. Donc évoquer le fait qu'un problème de Cauchy a une unique solution est tout aussi pertinent que d'utiliser le théorème de Bézout pour montrer que tout corps plongé dans l'eau en ressort mouillé.

4.a. Réponse majoritaire : f_1 n'est pas défnie en 0, donc elle n'est pas dérivable en 0. Sauf qu'à la question précédente, vous n'avez pas eu de scrupule à affirmer que vous aviez montré le résultat demandé, dans lequel on vous dit que f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ ... Vous êtes trop souvent prêts à affirmer n'importe quoi quand ça vous arrange, et son contraire deux lignes plus loin quand ça vous arrange.