

Feuille d'exercice n° 20 : **Intégration - correction**

Exercice 1 Soit f, g uniformément continues. Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Il existe donc $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq \alpha.$$

On vérifie que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(g(x)) - f(g(y))| \leq \varepsilon.$$

Exercice 2 Sinon, prendre $\varepsilon > 0, \alpha > 0$ tq [...], alors pour tout $x > 0$ $\left| \ln x - \ln \left(x + \frac{\alpha}{2} \right) \right| \leq \varepsilon$ et faire tendre x vers 0.

Exercice 3 Sur $[0, 2]$: Heine.

$$\text{Sur } [1, +\infty[: |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|x - y|.$$

Par conséquent, si on prend $\varepsilon > 0$, prendre $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2, \frac{1}{2})$ pour ne pas chevaucher.

Exercice 4 f est uniformément continue, donc :

il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x, y \in I, |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 1$.

Commençons par remarquer qu'on a le résultat suivant : Pour tout $x, y \in I$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $|x - y| \leq p\alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq p$.

En effet, soient $x, y \in I$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $|x - y| \leq p\alpha$, et supposons par exemple que $x < y$. Coupons l'intervalle $[x, y]$ en p intervalles de même longueur : pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, on pose $x_k = x + \frac{k}{p}(y - x)$.

On a alors $x_0 = x$ et $x_p = y$. De plus, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a $|x_{k-1} - x_k| = \frac{1}{p}(y - x) \leq \alpha$, donc $|f(x_{k-1}) - f(x_k)| \leq 1$. Or $|f(x) - f(y)| = |f(x_0) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_2) \dots + f(x_{p-1}) - f(x_p)| \leq$
 $|f(x_0) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| \dots + |f(x_{p-1}) - f(x_p)| \leq p \times 1$. Notre remarque est donc justifiée. I.T

On pose alors $p = \lfloor 1/\alpha \rfloor + 1$, donc $p \geq \frac{1}{\alpha}$. Fixons également un réel M .

Alors, puisque $f(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, on a : il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow f(n) \geq M + p$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq N$. On pose $n = \lfloor x \rfloor + 1$. Alors $|x - n| \leq 1 \leq p\alpha$, d'où $|f(x) - f(n)| \leq p$, et ainsi $f(x) \geq f(n) - p$. Mais $n \geq N$, donc $f(n) \geq M + p$, et on en tire $f(x) \geq M$.

Ainsi, pour tout $M \in \mathbb{R}$, on a trouvé un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq N \Rightarrow f(x) \geq M$: ceci signifie bien que $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

Exercice 5 $f([a; b]) = [m; M]$ et g positive, donc pour tout x , $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ on intègre.

Puis : soit $\int_a^b g = 0$ alors c'est OK, sinon, $\frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \in [m; M]$ et donc par le tvi, ce rapport vaut $f(c)$ pour un certain c .

Exercice 6 Si pour tout $x \in]0, 1[$, $f(x) > x$ alors, comme $x \mapsto f(x) - x$ est continue et strictement positive, $\int_0^1 (f(x) - x) dx > 0$ i.e. $\int_0^1 f > \int_0^1 x dx = 1/2$: c'est exclu.

Même chose pour : $\forall x \in]0, 1[, f(x) > x$.

Et alors, $f(x) - x$ change de signe sur $]0, 1[$, et par le TVI il existe un $c \in]0, 1[$ tel que $f(c) = c$.

On pouvait aussi appliquer le théorème de Rolle à $x \mapsto \int_0^x (f(t) - t) dt$ sur $[0, 1]$.

Exercice 7 On suppose que f a au plus n points d'annulations, et on note x_1, \dots, x_n les points d'annulation où f change de signe.

Par linéarité de l'intégrale, si P est un polynôme de degré au plus n s'écrivant $P = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, alors

$\int_0^1 f \times P = \sum_{k=0}^n a_k \int_0^1 f(x) \cdot x^k dx = 0$. Posons alors $P = (X - x_1) \dots (X - x_n)$. Le polynôme P change de signe exactement aux mêmes points que f , et ainsi la fonction $f \times P$ est de signe constant. De plus elle est continue et d'intégrale nulle : elle est donc nulle. Ainsi f est nulle sur $\mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$. Et par continuité, f est nulle sur \mathbb{R} : c'est absurde.

Exercice 8

Premier cas : $\int_a^b f > 0$, alors $\int_a^b (|f| - f) = 0$ avec $(|f| - f) \geq 0$, d'où $|f| = f$ i.e. f positive

Second cas, idem

Exercice 9

- 1) La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x^n}$ est croissante, donc si $x \in \left[1, 1 + \frac{1}{n}\right]$, $f(1) \leq f(x) \leq f\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
- 2) Avec la première question, $\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n} \sqrt{1 + (1 + 1/n)^n}$ puis $\lim(1 + 1/n)^n = e$ et donc par le théorème des gendarmes, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 10 Faire un dessin !

Soit $\varepsilon > 0$, $y = f(1 - \varepsilon) < 1$. Alors pour tout $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq f(t) \leq y \mathbf{1}_{t \leq 1-\varepsilon} + \mathbf{1}_{t \geq 1-\varepsilon}$ donc

$$0 \leq \int_0^1 f^n \leq y^n(1 - \varepsilon) + \varepsilon.$$

Il suffit de prendre n suffisamment grand pour que $y^n \leq \varepsilon$, alors $0 \leq \int_0^1 f^n \leq 2\varepsilon$.

Exercice 11 Soit m un point où le $s = \sup f$ est atteint, $\varepsilon > 0$, $I = [c, d] \subset [a, b]$ contenant m sur lequel $f \geq s - \varepsilon$, on pose $g = s$ et $h = (s - \varepsilon) \mathbf{1}_I : h \leq f \leq g$.

Facilement, $\left(\int_a^b g^n\right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow s$ et $\left(\int_a^b h^n\right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow s - \varepsilon$. Il suffit de prendre n suffisamment grand pour lequel $\left(\int_a^b h^n\right)^{\frac{1}{n}} \geq s - 2\varepsilon$, par encadrement $s - 2\varepsilon \leq \left(\int_a^b f^n\right)^{\frac{1}{n}} \leq s$.

Exercice 12 On a

- a) Pour tout ε , il existe un x_0 à partir duquel $1 - \varepsilon \leq \cos(1/t) \leq 1$. Donc si $x \geq x_0$, $\int_x^{2x} \frac{1 - \varepsilon}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$, soit $(1 - \varepsilon) \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} dt \leq \ln 2$. Finalement, $\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ln 2$.
- b) IPP : $\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_x^{2x} - \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t^2} dt$. Or \cos est bornée et $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $\left[-\frac{\cos t}{t}\right]_x^{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Et $\left|\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t^2} dt\right| \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t^2} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc $\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
- c) Pour tout ε , il existe un x à partir duquel $1 \leq e^{1/t} \leq 1 + \varepsilon$, et on finit comme pour la première question.

Exercice 13

- 1) IPP pour calculer $\int \ln(1+x) dx$: $\int_0^1 (e^x + \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)) dx = e + \frac{1}{6} - \ln(4)$
- 2) IPP : $\int_0^1 x(x+2-e)e^x dx = 0$
- 3) $\frac{x-2}{(2x-3)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-3)-1}{(2x-3)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x-3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2x-3)^2}$ donc : $\int_0^1 \frac{x-2}{(2x-3)^2} dx = -\frac{1}{4} \ln(3) - \frac{1}{6}$
- 4) On linéarise : $\cos^4 x \sin^2 x = \frac{1}{32}(\cos(2x) - 2\cos(4x) + 2 - \cos(6x))$, et donc $\int_0^{\pi/4} \cos^4 x \sin^2 x dx = \frac{1}{16}(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3})$
- 5) $\int_1^2 \frac{x^3}{(1+x^4)^2} dx = \frac{15}{136}$
- 6) Méthode par changement de variable : en posant $x = \tan u$, $dx = (1+\tan^2 u) du$, $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1+\tan^2 u}{(1+\tan^2 u)^2} du = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\tan^2 u} du = \int_0^{\pi/4} \cos^2 u du$ et il reste à linéariser. On trouve : $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$.

Exercice 14

- 1) Première IPP : $\int \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) \times e^{\text{Arcsin } x} dx = -\sqrt{1-x^2} \times e^{\text{Arcsin } x} + \int \sqrt{1-x^2} \times \frac{e^{\text{Arcsin } x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$.
 Seconde IPP : $\int x \times \left(\frac{e^{\text{Arcsin } x}}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = x \times e^{\text{Arcsin } x} - \int 1 \times e^{\text{Arcsin } x} dx$.
 En prenant la demi-somme de ces deux résultats : $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{\text{Arcsin } x} dx = \frac{x - \sqrt{1-x^2}}{2} e^{\text{Arcsin } x}$.
- 2) Par IPP, $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx = \ln(1+x^2) = 1 \times \ln(1+x^2)$ et par IPP, $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx = \frac{\pi}{2} + \ln(2) - 2$.
- 3) Par IPP, $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.
- 4) $\frac{x dx}{\sqrt{x+1}\sqrt{x+3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2-1}} - \frac{2}{\sqrt{(x+2)^2-1}}$ donc $\int \frac{x dx}{\sqrt{x+1}\sqrt{x+3}} = \sqrt{(x+2)^2-1} - 2 \ln \left| (x+2) + \sqrt{(x+2)^2-1} \right|$.
- 5) avec $u = \sqrt{1+x}$, $\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{1+x}} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2u(u^2-1)}{1+u} du = \int_0^{\sqrt{2}} 2u(u-1) du = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{5}{3}$.
- 6) $4 - 2\text{Arctan}(2)$ en posant $u = \sqrt{x-1}$
- 7) $\ln(\sqrt{5}-1) - \ln 2 - \ln(\sqrt{2}-1)$ en posant $u = \sqrt{1+x^2}$ et $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$
- 8) $-\frac{4}{3}(1-\sqrt{x})^{3/2}$
- 9) $\pi - 2$

Exercice 15 Que des IPP !

- 1) $\int \ln t dt = t \ln t - t$
- 2) $\int t \arctan t dt = \frac{1}{2} t^2 \arctan(t) - \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \arctan(t)$
- 3) $\int (t^2 - t + 1)e^{-t} dt = -(2+t+t^2)e^{-t}$
- 4) $\int (t-1) \sin t dt = \sin t + \cos t - t \cos t$

- 5) $\int (t+1) \operatorname{ch} t \, dt = -\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t + t \operatorname{sh} t$
- 6) $\int t \sin^3 t \, dt = t \left(-\frac{1}{3} (\sin(t))^2 \cos(t) - \frac{2}{3} \cos(t) \right) + \frac{1}{9} (\sin(t))^3 + \frac{2}{3} \sin(t)$

Exercice 16

- 1) Majorer par x^n .
- 2) Soit $\varepsilon > 0$, $0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^2) \leq (1-\varepsilon) \ln(1+(1-\varepsilon)^n) + \varepsilon \ln 2$ puis prendre n assez grand pour que $\ln(1+(1-\varepsilon)^n) \leq \varepsilon$.
Mieux : $\ln(1+x^n) \leq x^n$.
- 3) $\int_0^1 \ln(1+x^n) \, dx = [x \ln(1+x^n)]_0^1 - n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} \, dx = \ln 2 - n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} \, dx = o(1)$.

Exercice 17

- 1) $I_0 = e - 1$, $I_1 = 1$.
- 2) IPP : $I_{n+1} = [x(\ln x)^{n+1}]_1^e - (n+1) \int_1^e (\ln x)^n \, dx = e - (n+1)I_n$.
- 3) $I_n > 0$ et comme $I_{n+1} > 0$, $I_n \leq \frac{e}{n+1}$.
- 4) $I_n \rightarrow 0$, $I_{n+1} \rightarrow 0$ donc $(n+1)I_n \rightarrow e$ donc $I_n \sim \frac{e}{n}$.
- 5) $D_{n+1} = (n+1)D_n$ donc $D_n = n!D_0$ puis $|u_n| \geq D_n - I_n$.

Exercice 18

La fonction f est continue, donc admet une primitive F qui est de classe \mathcal{C}^1 .

- 1) On a $\varphi(x) = F(x^2) - F(2x)$, donc φ est \mathcal{C}^1 par opération sur les fonctions de classe \mathcal{C}^1 .
 $\varphi'(x) = 2xf(x^2) - 2f(2x)$.
- 2) On a $\chi(x) = x \int_0^x f(t) \, dt = x(F(x) - F(0))$. De même, χ est \mathcal{C}^1 par opération sur les fonctions de classe \mathcal{C}^1 .
 $\chi'(x) = F(x) - F(0) - xf(x) = \int_0^x f(t) \, dt - xf(x)$.
- 3) On pose $u = t + x$ et $\psi(x) = \int_x^{2x} f(u) \, du = F(2x) - F(x)$. De même, ψ est \mathcal{C}^1 par opération sur les fonctions de classe \mathcal{C}^1 .
 $\psi'(x) = 2f(2x) - f(x)$.

Exercice 19

- 1) Prolongement par continuité en 0.
- 2) Avec $u = tx$, $F(x) = \int_0^{\pi x} \frac{|\sin u|}{u} \, du$, on dérive : $F'(x) = \pi \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \frac{\sin(\pi x)}{x}$.
- 3) a) Relation de Chasles.
- b) Directement, $\int_{\pi[x]}^{\pi x} \frac{|\sin t|}{t} \, dt = o(1)$. Ensuite,

$$\sum_{k=0}^{[x]-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} \, dt \geq \sum_{k=0}^{[x]-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{(k+1)\pi} \, dt = \frac{\int_0^{\pi} \sin t \, dt}{\pi} \sum_{k=1}^{[x]} \frac{1}{k} = \frac{2}{\pi} (\ln [x] + o(\ln([x])))$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{[x]-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} \, dt &\leq \int_0^{\pi} \frac{|\sin t|}{t} \, dt + \sum_{k=1}^{[x]-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{k\pi} \, dt \\ &\leq O(1) + \frac{\int_0^{\pi} \sin t \, dt}{\pi} \sum_{k=1}^{[x]-1} \frac{1}{k} \\ &\leq \frac{2}{\pi} (\ln [x] + o(\ln([x]))). \end{aligned}$$

Exercice 20

- 1) OK par $0 \leq \sin \leq 1$.
 2) IPP à la Wallis :

$$\begin{aligned}
 f(x+1) &= \int_0^{\pi/2} \sin t (\sin t)^x dt \\
 &= [-\cos t (\sin t)^x]_0^\pi + x \int_0^\pi \cos^2 t (\sin t)^{x-1} dt \\
 &= 0 - x \int_0^\pi (1 - \sin^2 t) (\sin t)^{x-1} dt \\
 &= x f(x-1) - x f(x+1)
 \end{aligned}$$

d'où le résultat.

- 3) $\varphi(x+1) = (x+1)f(x+1)f(x) = xf(x-1)f(x) = \varphi(x)$.
 4) $\varphi(n) = \varphi(1) = f(0)f(1) = \frac{\pi}{2}$.
 5) De 2) on tire $f(x+1) \sim f(x-1)$, f est décroissante donc $f(x-1) \leq f(x) \leq f(x+1)$ donc $f(x) \sim f(x+1)$, on injecte dans $\varphi : xf^2(x) \sim \varphi(x)$.

Donc sur \mathbb{N}^* , $nf^2(n) \sim \frac{\pi}{2}$ donc $f(n) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Par décroissance de f , on tire $f(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$, donc $\varphi(x) = xf(x)f(x-1) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ et cela montre que φ est constante.

Exercice 21

- 1) Soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ tel que si $0 \leq x \leq \alpha$, $|f(x)| \leq \varepsilon$. Alors si $0 \leq bx \leq \alpha$,

$$\left| \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt \right| \leq \varepsilon \int_{ax}^{bx} \frac{dt}{t} = \varepsilon [\ln t]_{ax}^{bx} = \varepsilon \ln \frac{b}{a}.$$

- 2) Avec $f = f - f(0) + f(0)$, il suffit de montrer que $\int_{ax}^{bx} \frac{f(0)}{t} dt = f(0) \ln \frac{b}{a}$.

Exercice 22 $f(0) = 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \text{ donc } f'(0) = 1.$$

$$\text{Si } n \geq 1, f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \text{ donc } f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!.$$

Inégalité de Taylor-Lagrange :

$$|f(1) - u_n| \leq \frac{1}{n!} \sup |f^{(n)}| \leq \frac{1}{n}.$$

Exercice 23 On trouve :

- 1) $\arctan(t) - 1/2 i \ln(t^2 + 1)$
 2) $1/2 e^t \cos(t) + 1/2 e^t \sin(t)$
 3) $(-1/2 t + 1/2) e^t \cos(t) + 1/2 t e^t \sin(t)$

Exercice 24 Si $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{t-\lambda} = \frac{1}{(t-a)+ib} = \frac{t-a-ib}{(t-a)^2+b^2} = \frac{1}{2} \frac{2(t-a)}{(t-a)^2+b^2} + \frac{i}{b} \frac{1}{\left(\frac{t-a}{b}\right)^2+1}.$$

Cela se primitive bien en

$$\ln |t - \lambda| + i \operatorname{Arctan} \left(\frac{t - a}{b} \right)$$

Exercice 25 Il s'agit d'une somme de Riemann. On trouve $\ln 3/12$.

Exercice 26
$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+2t}} = \left[\sqrt{1+2t} \right]_0^1 = \sqrt{3} - 1.$$

Exercice 27 Cette somme est nulle ! (Ajouter un terme pour $k = 0$ et effectuer le changement de variables $k' = n - k$ pour le voir)

Exercice 28

$$\prod_{k=n+1}^{2n} k^{\frac{1}{k}} = \prod_{k=1}^n (n+k)^{\frac{1}{n+k}}$$

On passe au log :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \ln(n+k) = \frac{\ln n}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)}{1 + \frac{k}{n}}$$

Comme $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ et $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ sont continues, par le théorème de convergence des sommes de Riemann,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dt}{1+t}$$

et

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)}{1 + \frac{k}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t} dt.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \ln(n+k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

donc, $P_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Comme $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ et $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ sont \mathcal{C}^1 , par le théorème de convergence des sommes de Riemann,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} + O\left(\frac{1}{n}\right) = \ln(2) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

et

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)}{1 + \frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t} dt + O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\ln^2(2)}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \ln(n+k) = \ln(n) \ln(2) + \frac{\ln^2(2)}{2} + O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) = \ln(n) \ln(2) + \frac{\ln^2(2)}{2} + o(1),$$

donc

$$P_n = 2^n \exp \left(\frac{\ln^2(2)}{2} \right) \exp(o(1)) \sim 2^n \exp \left(\frac{\ln^2(2)}{2} \right).$$

Exercice 29

$$\frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{p=1}^n (n+p)} = \sqrt[n]{\prod_{p=1}^n \left(1 + \frac{p}{n}\right)}$$

On passe au log : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{p}{n}\right) \rightarrow \int_0^1 \ln(1+t) dt$.

Exercice 30 Fixons $n \in \mathbb{N}^*$, notons

$$T_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \sqrt{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} = n\sqrt{n} \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}.$$

Par le théorème de convergence des sommes de Riemann, on a

$$T_n \sim n\sqrt{n} \int_0^1 \sqrt{t} dt \sim \frac{3}{2} n\sqrt{n}$$

On pouvait retrouver cela par comparaison série-intégrale en écrivant sur pour $n-1 \leq t \leq n \leq u \leq n+1$:

$$\sqrt{t} \leq \sqrt{n} \leq \sqrt{u}$$

et en intégrant :

$$\int_{n-1}^n \sqrt{t} dt \leq \sqrt{n} \leq \int_n^{n+1} \sqrt{u} du$$

soit

$$\frac{2}{3} (n\sqrt{n} - (n-1)\sqrt{n-1}) \leq \sqrt{n} \leq \frac{2}{3} ((n+1)\sqrt{n+1} - (n)\sqrt{n})$$

ce qui permet d'obtenir par sommation télescopique

$$\frac{2}{3} (n\sqrt{n}) \leq T_n \leq \frac{2}{3} ((n+1)\sqrt{n+1} - 1).$$

Dans les deux cas,

$$u_n \sim \frac{2}{3} \times \frac{1}{n^{\alpha-3/2}}$$

Comme $\left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{\alpha-3/2}}\right)_{N \geq 1}$ converge si et seulement si $\alpha - \frac{3}{2} > 1$ (série de Riemann de paramètre $\alpha - \frac{3}{2}$),

par comparaison de séries à termes positifs, $\left(\sum_{n=1}^N u_n\right)_{N \geq 1}$ converge si et seulement si $\alpha > \frac{5}{2}$.