Devoir surveillé n° 01 - Remarques

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 30 points, ramené sur 5 points.
- Problèmes : exercice vu en TD sur 8 points, et les autres questions sur 4 points, ramené sur 15 points.

Statistiques descriptives.

	Calculs	Problème	Note finale
Note maximale	27	61	20
Note minimale	7	1	$2,5$
Moyenne	$\approx 15,67$	$\approx 22,23$	$\approx 10,14$
Écart-type	$\approx 4,88$	$\approx 11,31$	$\approx 3,87$

Remarques générales.

• Vous usez et surtout abusez des “ssi”. Premièrement, cet objet est un **connecteur** servant à fabriquer une nouvelle proposition à partir de deux autres. Il faudrait déjà qu'il y ait une proposition à gauche de ce ssi, et une autre à droite, sans quoi votre rédaction n'aura aucun sens. Par exemple :

$$\begin{array}{rl} h(z) & = \text{toto} \\ \text{ssi} & = \text{titi} \end{array}$$

ne veut absolument rien dire.
Dans le même genre, même si cela n'est pas inexact, rédiger :

$$\begin{array}{rll} & h(z) & = \text{toto} \\ \text{ssi} & h(z) & = \text{titi} \\ \text{ssi} & h(z) & = \text{tutu} \end{array}$$

est affreusement lourd. Pourquoi ne pas tout simplement écrire :

$$\begin{aligned} h(z) &= \text{toto} \\ &= \text{titi} \\ &= \text{tutu} \quad ? \end{aligned}$$

Plus subtil, regardons la rédaction suivante :

“Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$
ssi $\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = 1$.”

Ssi reliant deux propositions pour en créer une nouvelle, ceci signifie : “Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que ($|z| = 1$ ssi $\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = 1$)”, ou encore : “Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que l’équivalence ($|z| = 1$ ssi $\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = 1$) soit vraie”. Cette équivalence étant toujours vraie, z est alors supposé quelconque dans $\mathbb{C}$, et tout cela n’a aucun intérêt. Ce que vous voulez dire, c’est en fait :

“Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$.
Or, $|z| = 1$ ssi $\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = 1$”
et cela n’a plus rien à voir avec ce qui précède.

Dans le même genre, écrire comme conclusion à la question **3)** :
$\forall z \in \mathbb{U}$, $|h(z)| = 1$ ssi $h(z) \in \mathbb{U}$
signifie que vous avez montré que pour tout $z \in \mathbb{U}$, l’équivalence “$|h(z)| = 1$ ssi $h(z) \in \mathbb{U}$” était vraie (ce qui n’a rien à voir avec la question), alors que vous vouliez dire : “$|h(z)| = 1$, ce qui est la même chose que $h(z) \in \mathbb{U}$”.

Deuxièmement, pour être correct, un ssi doit être vrai **dans les deux sens** : une équivalence, ce sont deux implications ! Et dans ce devoir, les deux premiers raisonnements de nombreux élèves ont été :

$$\begin{array}{rrcl} & \overline{z} & = & z^3 \\ \text{ssi} & |\overline{z}| & = & |z^3| \\ \text{ssi} & |z| & = & 1 \end{array}$$

ce qui constitue deux erreurs abominables. C’étaient les deux “pièges” de cet exercice. Le premier ssi est faux car l’implication de bas en haut est abominablement fausse, et le second ssi est faux car cette fois l’implication de haut en bas est fausse (si $z = 0$). Était-ce une erreur de logique ou de manipulation des complexes ? Je ne sais pas, mais c’est assez grave.

Enfin, et pour la centième fois en seulement 3 semaines de cours, si vous n’avez besoin que d’une implication, pourquoi raisonner par équivalence ? Vous devez alors justifier deux fois plus de résultats, et si par malheur une des équivalences est fausse alors que vous n’en aviez pas besoin, vous perdrez stupidement des points. Dans le problème, il n’était **jamais** nécessaire de raisonner par équivalence. Prenons par exemple la question **2.a)** : il vous est demandé de montrer : $z \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; h(z) \in \mathbb{U}$. En rédigeant votre démonstration avec des ssi, vous montrez en fait : $z \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; h(z) \in \mathbb{U}$. Cette équivalence est exacte, mais vous auriez aussi bien pu démontrer dans cette question le théorème de Fermat, on s’en moquait.

En définitive, je vais tout simplement sanctionner les ssi mal utilisés, faux ou inutiles (pour votre bien, évidemment), car dans la majorité écrasante de vos copies, le seul connecteur utilisé était ssi, et il était utilisé un nombre hallucinant de fois, alors qu’il n’y en avait jamais besoin.

• Il vous est demandé d’encadrer systématiquement la conclusion. Beaucoup encadrent le résultat d’un calcul, mais pas la conclusion. Ainsi, en réponse à la question **3)** par exemple :
“$h(z) =$toto$=$titi$\boxed{= 1}$
donc $h(z) \in \mathbb{U}$”
sera sanctionné. De plus, la conclusion doit être rédigée dans son entier : “$\boxed{\text{pour tout } z \in \mathbb{U},\ h(z) \in \mathbb{U}}$”. En clair, vous recopiez la question de l’énoncé, mais sur le mode affirmatif, et vous encadrez.

• Toutes les lettres utilisées doivent être définies. Par exemple commencer la réponse à la question **1.a)** par :
"$h(z)$ =toto,titi, etc"
sera sanctionné. Qui est z ? Il n'est pas défini dans l'énoncé, donc c'est à vous de le faire. De plus, $z = 1$ posait problème, il fallait le dire :
"Soit $z \in \mathbb{U}\backslash\{1\}$. Alors $h(z)$ =toto,titi, etc".

• Les formules "soit", "soit ... tel que" sont encore très mal maîtrisées. Par exemple, "soit $z \in \mathbb{U}$, soit $\theta \in \mathbb{R}$, alors $z = \mathrm{e}^{i\theta}$" signifie : "prenons z un complexe de $\mathbb{U}$ **quelconque** et θ un réel **quelconque**, alors nous aurons toujours $z = \mathrm{e}^{i\theta}$". C'est bien évidemment faux ! Par exemple : "prenons $z = 1$ et $\theta = \pi$, alors $1 = \mathrm{e}^{\pi}$".
Ici θ doit dépendre de z, donc il faut rédiger : "soit $z \in \mathbb{U}$, alors **il existe** $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \mathrm{e}^{i\theta}$", ou pour aller plus vite : "soit $z \in \mathbb{U}$, et soit $\theta \in \mathbb{R}$ **tel que** $z = \mathrm{e}^{i\theta}$".

• Pour faire des calculs avec des complexes, utiliser la forme algébrique est rarement une bonne idée, à plus forte raison si le calcul contient des produits ou des quotients. Déjà, un complexe c'est z avant d'être $a + ib$: dans ce problème, presque tous les calculs se faisaient très bien avec z, sans parler de partie réelle, imaginaire ou argument. Ensuite, s'il faut écrire z autrement, regarder d'abord si la forme trigonométrique ne serait pas plus facile à manier que la forme algébrique.

Exercice vu en TD.

Comme dit au-dessus, il fallait traiter à part le cas $z = 0$ et ne surtout pas passer de $|z| = |z^3|$ à $|z| = 1$ sans voir que cela était faux.
Ensuite, on pouvait raisonner par analyse - synthèse : "si z est solution non nulle, alors $|z| = 1$, donc blalblabla, donc $z = 1, -1, i$ ou $-i$". Et ensuite vérifier si ces valeurs étaient solutions.
On pouvait aussi raisonner par équivalence, en parlant simultanément du module et de l'argument (toujours dans le cas $z \neq 0$) : "z solution non nulle ssi ($|z| = 1$ et $-\arg(z) = 3\arg(z)\ [2\pi]$)". Mais surtout ne pas écrire "z solution non nulle ssi $|z| = 1$". D'ailleurs ceux qui ont écrit cela ont souvent, en se souvenant du résultat qu'il fallait trouver, écrit : "$|z| = 1$ ssi $z = 1, -1, i$ ou $-i$", ce qui est tout de même une escroquerie de première catégorie.

Homographies.

1.a) Écrire $\mathrm{Im}\left(i\dfrac{1+z}{1-z}\right) = \dfrac{1+z}{1-z}$ est très inquiétant : prendre la partie imaginaire d'un complexe ne signifie pas garder les termes avec des i, et enlever les i. Calculer $i\dfrac{1+i}{1-i}$ sous forme algébrique et prenez la partie imaginaire pour voir : trouvez-vous $\dfrac{1+i}{1-i}$?

1.c) Pour répéter ce qui a été dit en cours : IL EST INTERDIT D'ÉCRIRE $\sqrt{z}$ si z n'est pas un réel positif. Ici, il y a eu beaucoup de $\sqrt{-6i}$ ...

2.a) Raisonnement souvent rencontré :
"Écrivons $z = a + ib$, avec $b > 0$.
Puisque $b > 0$, alors $b - 1 < b + 1$,
et donc $(b-1)^2 < (b+1)^2$".

Savoir que $b > 0$ est totalement inutile pour avoir $b - 1 < b + 1$ (tout simplement car $-1 < 1$) : vous donnez un argument inutile, donc vous n'avez probablement pas compris, donc vous perdez des points.

Par contre à la ligne suivante, $b > 0$ est indispensable, sinon le résultat est faux, mais cela n'est pas mentionné, et il n'y a aucune justification : vous ne donnez pas un argument crucial, donc vous n'avez probablement pas compris, donc vous perdez des points.

3) Faites les choses simplement : $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}}{z}\right| = \dfrac{\left|\mathrm{e}^{i\theta}\right|}{|z|} = \dfrac{1}{1} = 1$, et c'est tout. Pourquoi multiplier par la quantité conjuguée ? Ou pire encore, tout écrire sous forme algébrique ?

5.a) Arnaque : $|\alpha+\beta|^2 = |\alpha+\beta|.|\overline{\alpha}+\overline{\beta}| = |(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})| = ||\alpha|^2+|\beta|^2+2\,\mathrm{Re}(\overline{\alpha}\beta)| = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{\alpha}\beta)$: les valeurs absolues ont disparu par enchantement à la dernière étape ! Il fallait commencer par : $|\alpha+\beta|^2 = (\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$.

5.b) $a \neq b \neq 0$ ne veut absolument rien dire. Cela ne veut pas dire "$a \neq b$ et $b \neq 0$", ni "a, b et 0 sont deux à deux distincts", et certainement pas "$a \neq 0$ et $b \neq 0'$". Si vous voulez une de ces trois choses, il faut l'écrire comme cela est fait dans la phrase qui précède, avec deux inégalités.

6.a) Le résultat à démontrer était un résultat de la forme "$\forall\theta \in \mathbb{R}$...". Si vous ne commencez pas par "soit $\theta \in \mathbb{R}$", votre raisonnement sera faux presque à coup sûr. En particulier, si vous commencez par "soit $z \in \mathbb{U}$, alors soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \mathrm{e}^{i\theta}$", vous allez montrer un résultat en "$\forall z \in \mathbb{U}$", ce qui n'est pas ce qui est voulu. Il fallait introduire les variables dans l'autre sens : "soit $\theta \in \mathbb{R}$, posons $z = \mathrm{e}^{i\theta}$".

6.b) Des horreurs particulièrement glaçantes ici. Tout d'abord "$\mathrm{Re}(\overline{a}b\mathrm{e}^{-i\theta}) = \mathrm{Re}(\overline{c}d\mathrm{e}^{-i\theta})$ donc $\overline{a}b = \overline{c}d$" : là vous dites carrément que deux complexes qui ont la même partie réelle sont égaux, comme 1 et $1+i$ par exemple. Après avoir dit dans l'exercice que deux complexes qui ont le même module sont égaux, ça fait très mal.

Et ensuite, "$|a|^2 + |b|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{a}b\mathrm{e}^{-i\theta}) = |c|^2 + |d|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{c}d\mathrm{e}^{-i\theta})$ donc par identification, $|a|^2+|b|^2 = |c|^2+|d|^2$ et $\mathrm{Re}(\overline{a}b\mathrm{e}^{-i\theta}) = \mathrm{Re}(\overline{c}d\mathrm{e}^{-i\theta})$". Là vous dites allégrement que si $n+m = k+l$ alors $n = k$ et $m = l$. C'est idiot, car on pourrait tout aussi bien avoir $n = l$ et $k = m$, et donc vous dites que si $3+4 = 5+2$ alors $3 = 5$ et $4 = 2$ (à moins que ce ne soit $3 = 2$ et $4 = 5$?).

On ne peut identifier deux termes que lorsqu'il y a un résultat d'**unicité** d'une écriture. Par exemple un complexe s'écrit de manière unique $z = a+ib$ avec a et b réels, donc si $a+ib = x+iy$, alors $a = x$ et $b = y$. On pourrait donner d'autres exemples. Mais un réel ne s'écrit jamais de manière unique comme la somme de deux autres réels, donc $n+m = k+l$ ne permet aucune identification.