Lycée La Martinière Monplaisir — Année 2020/2021
MPSI - Mathématiques — le 29 avril

Devoir à la maison n° 18

À rendre le 6 mai

Des bits d'information, c'est-à-dire des 0 et des 1, sont transmis par l'intermédiaire d'un canal (*c.f.* la figure 1). Ce canal n'est pas complètement fiable. On observe qu'un bit envoyé, un 1 ou un 0, peut être altéré en sortie, c'est-à-dire qu'un 1 (respectivement un 0) en entrée du canal peut devenir un 0 (respectivement un 1) en sortie.

On note b le bit envoyé et b' le bit reçu ($b \in \{0,1\}$ et $b' \in \{0,1\}$).

$$b \longrightarrow \boxed{\text{Canal bruité}} \longrightarrow b'$$

Figure 1 – Transmission d'un bit par le canal bruité.

Après observation, on modélise la transmission d'un bit de façon probabiliste.

- Le bit envoyé définit une variable aléatoire b : on note α la probabilité qu'un 1 soit envoyé (c'est-à-dire $\alpha = P(b=1)$) et donc $1-\alpha$ la probabilité qu'un 0 soit envoyé.
- La perturbation dans le canal est aussi modélisée de façon probabiliste.
  — On désigne par p la probabilité qu'un 1 en entrée ne soit pas altéré par la transmission (c'est-à-dire $p = P(b'=1 \mid b=1)$) et donc $1-p$ désigne la probabilité qu'un 1 en entrée devienne un 0 en sortie.
  — On désigne par q la probabilité qu'un 0 en entrée ne soit pas altéré par la transmission et donc $1-q$ désigne la probabilité qu'un 0 en entrée devienne un 1 en sortie.

1) On a écrit ci-dessus $p = P(b'=1 \mid b=1)$. Exprimer de la même manière $1-p$, q et $1-q$ en terme de probabilités conditionnelles.

2) Un bit est envoyé. Quelle est la probabilité de recevoir un 1 en sortie ?

3) On reçoit le bit 1. Quelle est la probabilité qu'un 1 ait été envoyé en entrée ?

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On décide d'envoyer n fois le même bit b (*c.f.* la figure 2). On note $b'_1, \ldots, b'_n$ les n bits obtenus en sortie et l'on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de 1 en sortie. On remarque que les valeurs possiblement prises par X sont $0, 1, \ldots, n$.

4) Soit k un entier entre 0 et n. Exprimer $P(X=k)$ en fonction des paramètres p, q et α.

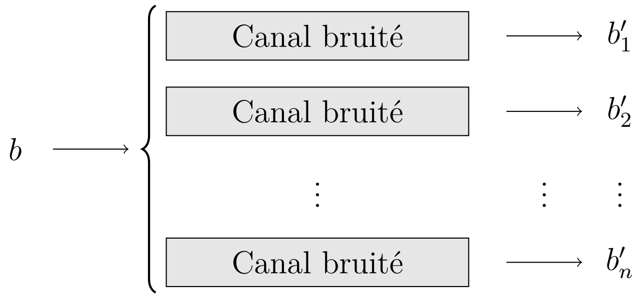

FIGURE 2 – Transmission d'un bit par le canal bruité.

5) En déduire l'espérance de X en fonction des paramètres p, q et α.

6) Soit k un entier entre 0 et n. Exprimer la probabilité que le bit 1 ait été envoyé, sachant que le nombre de 1 en sortie vaut k.

Le canal est désormais supposé symétrique, c'est-à-dire que chaque bit, que ce soit un 1 ou un 0, peut être altéré avec la même probabilité $1 - p$. On suppose $\frac{1}{2} < p < 1$.

7) **a)** Déterminer, en fonction des paramètres p et α, l'ensemble des valeurs k prises par X pour lesquelles il est plus probable (au sens strict) qu'un 1 ait été envoyé plutôt qu'un 0.

b) Que devient ce résultat lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$?

8) On suppose $\alpha = \frac{1}{2}$. On note $f(n)$ la probabilité que l'interprétation de l'observation en sortie soit fausse, c'est-à-dire que le bit en entrée n'est pas celui le plus probable (en fonction de la sortie).

a) Exprimer $f(n)$ en fonction des $P(X = k)$, pour des entiers k entre 0 et n.

b) Donner une expression de $f(n)$ en fonction de n et p.

c) Écrire une fonction `binome` en langage `Python` qui prend en entrée un entier naturel N et un entier naturel k compris entre 0 et N et qui renvoie la valeur du coefficient binomial $\binom{N}{k}$.

d) On suppose $p = 0,95$. Écrire une fonction `f(n)` en langage `Python` qui prend en entrée l'entier n et donne une estimation de $f(n)$.

— **FIN** —