DS n°10 : Fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom : [ ] Note : [ ]

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

Algèbre linéaire

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$ définie par $f : M \mapsto AM + MA$.

Déterminer en fonction de A : $\operatorname{tr}(f) =$ [ ] (1)

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} 2 & m & 1 \\ m+1 & 1 & 2m \\ m+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\{\, m \in \mathbb{R} \mid \operatorname{rg}(M) = 2 \,\} = \text{[ ]} \qquad (2)$$

Déterminants

Soit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 9 & 2 & 1 & 11 & 4 & 12 & 10 & 6 & 3 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Écrire σ comme produit de cycles à supports disjoints et déterminer sa signature.

$\sigma =$ [ ] (3) $\varepsilon(\sigma) =$ [ ] (4)

Calculer les déterminants suivants.

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -5 \\ 2 & -7 & 1 \end{vmatrix} = \text{[ ]} \quad (5) \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \text{[ ]} \quad (6)$$

Exprimer en fonction de n le déterminant suivant, d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \text{[ ]} \qquad (7)$$

Sommes

Calculer les sommes de séries suivantes.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = \boxed{} \qquad (8) \qquad\qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} = \boxed{} \qquad (9)$$

Calculer les sommes suivantes.

$$\sum_{n,p\in\mathbb{N}} \frac{4^p}{2^n p!} = \boxed{} \qquad (10) \qquad\qquad \sum_{n,p\in\mathbb{N} \text{ tq. } n\leqslant p} \frac{1}{p!} = \boxed{} \qquad (11)$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2(n-p)!}$. Alors,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \boxed{}. \qquad (12)$$

Divers

Calculer « la » primitive suivante (on ne précisera pas l'ensemble de définition) :

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^3(t+1)} = \boxed{} \qquad (13)$$

Soit $f : x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^{1/x}$. Développer à la précision $\dfrac{1}{x}$:

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \boxed{} \qquad (14)$$

Ainsi, f possède une asymptote au voisinage de $+\infty$, dont l'équation est :

$$\boxed{} \qquad (15)$$

et, au voisinage de $+\infty$, par rapport à cette asymptote, le graphe de f se situe

$$\boxed{} \qquad (16)$$

Six couples (H/F, c'est très vieux jeu) vont à un bal masqué. Chaque personne choisit comme cavalier une personne du sexe opposé, au hasard. Calculer la probabilité p_1 que M. S. et M. Z. dansent chacun avec leur compagne respective puis la probabilité p_2 que M. S. ou M. Z. dansent chacun avec leur compagne respective.

$$p_1 = \boxed{} \qquad (17) \qquad\qquad p_2 = \boxed{} \qquad (18)$$

— FIN —