Chapitre XXI : Dénombrement :

Déf : S'il existe une bijection de E dans F, on dit que E et F sont équipotents.

⚠ ça ne veut pas dire que toutes les fonctions de E dans F sont des bijections.

Prop : La relation d'équipotence est une relation d'équivalence.

Notation : Si : $\varphi : E \to F$ qui est une bijection

alors on notera (non officiel) : $\varphi : E \xrightarrow{\sim} F$

<u>Ex</u> : $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$, $id : E \xrightarrow{\sim} F$

donc $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, elle n'a aucune raison d'être bijective.

<u>Déf</u> : Soit E un ensemble. On dit qu'il est <u>fini</u> s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tq. E et $[\![1, n]\!]$ sont équipotents.

Si ce n'est pas le cas, E est dit <u>infini</u>.

<u>Rq</u> : quid de $\emptyset$? <u>1ère possibilité</u> : on part de la "zoologie" :

on a : $[\![1, 0]\!] = \emptyset$

donc $\emptyset$ est équipotent à $[\![1, 0]\!]$

donc il est fini.

2ème possibilité : on change la déf :

E est fini si $E = \emptyset$ ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tq. E et $[\![1, n]\!]$ sont équipotents.

Ex :

$$f : [\![3, 5]\!] \longrightarrow [\![1, 3]\!]$$
$$x \longmapsto x - 2$$

f est bijective, donc $[\![3, 5]\!]$ est fini.

Th :

1) Si $n, m \in \mathbb{N}^*$, tq. $[\![1, n]\!] \simeq [\![1, m]\!]$

équipotents

alors $n = m$.

2) Si E est fini, et $E \neq \emptyset$, il existe

alors unique $n \in \mathbb{N}^*$ tq. $E \simeq [\![1,n]\!]$.

alors ce n est appelé cardinal de E

et il est noté : card E, $\# E$, $|E|$

Par convention, on pose card $\emptyset = 0$.

<u>Dém</u> : 1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

P_n : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, si $[\![1,n]\!] \simeq [\![1,m]\!]$,

alors $n = m$.

- <u>pour $n=1$</u> : mq. P_1. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, on suppose

que $[\![1,1]\!] \simeq [\![1,m]\!]$.

Soit $\varphi : [\![1,m]\!] \xrightarrow{\sim} [\![1,1]\!] = \{1\}$

Si $n > 1$, alors $1, 2 \in [\![1, n]\!]$.

donc $\varphi(1)$ et $\varphi(2)$ existent, et $\varphi(1), \varphi(2) \in \{1\}$

donc $\varphi(1) = \varphi(2) = 1$: absurde car φ est bijective donc injective.

donc $n = 1$, et on a montré P_1.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tq. P_n est vraie.

Montrons P_{n+1}. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tq. $[\![1, n]\!] \simeq [\![1, n+1]\!]$.

Soit : $\varphi : [\![1, n+1]\!] \longrightarrow [\![1, m]\!]$.

notons : $\varphi(n+1) = a \in [\![1, m]\!]$.

Si $\varphi(n+1) = m$: on est contents.

Sinon, on pose $\tau : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!]$

tq : $\tau(a) = n$ et $\tau(n) = a$

et $\forall x \in [\![1,n]\!] \setminus \{a,n\}$: $\tau(x) = x$.

ie : τ est la transposition qui échange a et n.

On pose $\psi = \tau \circ \varphi : [\![1,n+1]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!]$

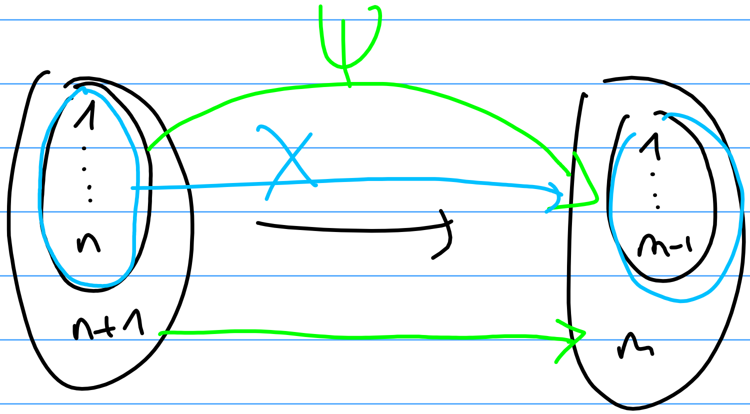
et tq : $\psi(n+1) = \tau(\varphi(n+1)) = \tau(a) = n$

et ici τ et φ sont des bijections, ψ aussi.

Dans tous les cas, on a 1 bijection $\psi : [\![1,n+1]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!]$

tq. $\psi(n+1) = n$.

On pose : $\chi = \psi|_{[\![1,n]\!]}$, il est facile de montrer que χ est 1 bijection de $[\![1,n]\!]$ ds $[\![1,m-1]\!]$.



On applique l'hyp. de réc. P_n : $m-1=n$.

et donc : $m=n+1$: c'est P_{n+1}.

2) Soit E fini, $E\neq\emptyset$.

Par déf, il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tq. $E \cong [\![1,n]\!]$.

Supposons qu'il existe un autre entier $m \in \mathbb{N}^*$ tq.
$$E \cong [\![1,m]\!].$$

il existe donc 2 bijections : $\varphi : [\![1,n]\!] \xrightarrow{\sim} E$
$\psi : E \xrightarrow{\sim} [\![1,m]\!]$

alors : $\psi \circ \varphi : [\![1,n]\!] \xrightarrow{\sim} [\![1,m]\!]$, donc avec

1) , $n = m$, d'où l'unicité de n,

et donc on peut lui donner 1 nom : n est le cardinal de E.

$\square$

B : Soit $n > 0$, E de cardinal n.

Soit $\varphi : [\![1, n]\!] \xrightarrow{\sim} E$

dc par bijectivité : $E = \{\varphi(1), \varphi(2) \dots \varphi(n)\} = \operatorname{Im} \varphi$

$\varphi(1) \dots \varphi(n)$ sont 2 à 2 distincts.

si on note $e_i = \varphi(i)$, alors :

$E = \{e_1 \dots e_n\}$.

On l'utilise tt le tps :

" Soit E de cardinal n, notons $E = \{e_1 \dots e_n\}$ ".

Ex : 1) $[\![1, n]\!] \subseteq \mathbb{Z}$ dc $\#[\![1, n]\!] = n$.

2) Si $a, b \in \mathbb{Z}$ tq. $a \leq b$:

$$\varphi : [\![a, b]\!] \longrightarrow [\![1, b-a+1]\!]$$
$$x \longmapsto x - a + 1$$

On vérifie que l'ens. d'arrivée de φ est correct :

si : $a \leq x \leq b$

$0 \leq x - a \leq b - a$ et $1 \leq x - a + 1 \leq b - a + 1$

Si $\left| \begin{array}{l} y \in [\![1, b-a+1]\!] \\ x \in [\![a, b]\!] \end{array} \right.$: $y = \varphi(x) \Leftrightarrow y = x - a + 1$

$\Leftrightarrow x = y + a - 1 \quad (*)$

or : $1 \leq y \leq b - a + 1 \Rightarrow a \leq y + a - 1 \leq b$

donc : $y = \varphi(x)$ a bien 1 unique sol° dans $[\![a, b]\!]$:

C'est 1 bijection et donc : $\#[\![a,b]\!] = b-a+1$

applica°: $\sum_{k=a}^{b} 1 = \sum_{k \in [\![a,b]\!]} 1 = \underbrace{1+1 \dots +1}_{\#[\![a,b]\!] \text{ fois}}$

$= \#[\![a,b]\!] = b-a+1.$

Rq: Si E est fini : $\sum_{k \in E} 1 = \#E$.

Th. 1.0.4 : Soit E fini. Soit F un ensemble quelconque.

Alors :

(E et F sont équipotents) ssi (F est fini et $\#E = \#F$)

Dém : ($\Rightarrow$) Soit $\varphi : E \xrightarrow{\sim} F$ (existe car E et F sont équipotents)

et soit $n = \operatorname{card} E$ et $\psi : [\![1,n]\!] \xrightarrow{\sim} E$

alors : $\varphi \circ \psi : [\![1,n]\!] \xrightarrow{\sim} F$

donc : • F est fini

• $\# F = n = E$

($\Leftarrow$) idem : si $\varphi : [\![1,n]\!] \xrightarrow{\sim} E$
et $\psi : [\![1,n]\!] \xrightarrow{\sim} F$ } existent car $\# E = \# F = n$

alors : $\psi \circ \varphi^{-1} : E \xrightarrow{\sim} F$. donc $E \simeq F$.