Devoir surveillé n° 3 - Remarques

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 34 points, ramené sur 5 points.
- Problèmes : exercice de TD sur 8 points, chaque question sur 4 points, total sur 104 points, ramené sur 15 points.

Statistiques descriptives.

	Calculs	Problème	Note finale
Note maximale	31	92	20
Note minimale	2	4	4
Moyenne	$\approx 17,65$	$\approx 34,51$	$\approx 10,32$
Écart-type	$\approx 7,48$	$\approx 19,82$	$\approx 3,71$

Remarques générales.

La rédaction demeure tout à fait bonne dans l'ensemble, même si beaucoup oublient encore d'introduire leurs variables.
Les résultats non encadrés n'ont pas été pris en compte.
Il y a encore beaucoup d'équivalences là où on ne demande qu'une implication.
Certains résolvent les équations en ne faisant qu'une analyse, visiblement sans s'en rendre comptes. Et il n'y a bien sûr pas de synthèse. Attention à la logique !
Les complexes vous posent encore beaucoup de problèmes, vous n'êtes pas à l'aise. Il faut absolument les retravailler si c'est votre cas.

I. Un exercice vu en TD.

Précisez clairement que $1+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6=0$ car la somme des racines 7-èmes de l'unité est nulle (2 points pour cette première partie, où l'on calcule $A+B$ et AB).
Ensuite, expliquez que A et B sont les racines de $X^2-(A+B)X+AB$, et ne retrouvez pas ce polynôme avec des méthodes baroques et des substitutions (2 points).
Calcul des racines (2 points).
Pour déterminer le signe des parties imaginaires, soyez précis sur les encadrements des angles, la croissance ou la positivité de sinus sur tel ou tel intervalle (2 points).

II. Homographies du plan complexe.

J'ai lu un nombre d'énormités assez incroyable : par pitié, retenez-vous ... soyez attentifs et relisez-vous !

Pêle-mêle : chercher les racines carrées de $-6i$ sous forme algébrique, $\dfrac{ai+1-b}{ai-1-b}=\dfrac{t}{\bar{t}}$ (sans dire qui est t), $\dfrac{1+\mathrm{e}^{i\theta}}{1-\mathrm{e}^{i\theta}}=\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{i\theta}}{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{i\theta}}$, $\dfrac{i(1+z)}{1-z}=\dfrac{i(1+z)^2}{|1-z|^2}$, $\dfrac{z-i}{z+i}=\dfrac{x-i}{x+i}$ (avec $z=x+iy$), $|x+i|=|x^2-1|$, si $|z|<1$

alors $0 < z\bar{z} < 1$ donc $0 < z < 1$, si $z \in \mathbb{R}$ alors $z = \bar{z}$ donc $\dfrac{z^2}{|z|^2} = 1$ donc $z = 1$... etc.

Aucune des questions de ce problème ne nécessitait d'écrire z sous forme algébrique ou trigonométrique : ces dernières méthodes sont la plupart du temps « bien bourrines ».

1.a. Beaucoup d'erreurs de signe parmi ceux qui ont opté pour la technique de l'angle moitié.

2.a. Si $z \in \mathbb{R}$, pourquoi introduire $a \in \mathbb{R}$ tel que $z = a$? Quel est l'intérêt ? Et si $z \in \mathbb{R}$, $|z+i| = |z-i| = \sqrt{z^2+1}$ et c'est fini.

3. Mais pourquoi donc écrire $z = \mathrm{e}^{i\lambda}$ afin de calculer $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}}{z}\right|$???? Vous trouvez ça trop simple de se contenter de $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}}{z}\right| = \dfrac{\left|\mathrm{e}^{i\theta}\right|}{|z|} = \dfrac{1}{1} = 1$? Pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué ...

Le pire était bien sûr d'écrire $z = \mathrm{e}^{i\theta}$, avec le même θ que celui introduit dans l'énoncé. On trouvait alors que h était constante égale à 1, ce qui est parfaitement idiot. Il n'y a pas qu'une lettre dans l'alphabet.

4.a. Répondez aux deux points demandés : est-ce une homographie ? Est-elle définie sur $\mathbb{U}$? N'en oubliez pas.

III. Une équation différentielle.

1. Écrire « on remarque que $x \mapsto \dfrac{1}{2}(\sin x - \cos x)$ est une solution particulière » est une arnaque, car cette solution est donnée dans l'énoncé de la question 2.c. Donc n'importe quel élève rusé qui ne sait pas résoudre une équation différentielle peut écrire cela. À défaut d'expliquer comment on peut trouver cette solution, il faut au minimum vérifier **très soigneusement** que cette fonction est solution : il faut la dériver deux fois, injecter tout ça dans l'équation différentielle et conclure. Sinon vous n'avez pas les points, c'est très simple.

2.a. C'est une question extrêmement simple, il faut détailler un minimum. Dire « f et sin sont dérivables donc f' est dérivable comme somme de fonctions dérivables » est éxagéré. Il faut parler de $x \mapsto x - \pi$, qui est aussi dérivable, donc f' l'est comme somme **et composition** de fonctions dérivables.

2.d. Attention, $\mathrm{e}^{2\pi} \neq 1$, vous confondez avec $\mathrm{e}^{2i\pi}$.

3. Ne pas oublier la moitié de ce qu'il faut vérifier. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2}(\sin x - \cos x)$ vérifie-t-elle l'équation ? Est-elle 2π-périodique ?