# Devoir à la maison n° 2

À rendre le 16 septembre

Pour deux nombres complexes $z$ et $z'$ écrits sous forme algébrique $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, on définit le produit scalaire $\langle z, z'\rangle = xx' + yy'$.

**1)** Pour $z \in \mathbb{C}$, que vaut $\langle z, z\rangle$ ?

**2)** Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, exprimer $\langle z, z'\rangle$ en fonction de $z\overline{z'}$.

**3)** En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle z, z'\rangle| \leqslant |z||z'|.$$

Soient $a$ et $b$ deux complexes de même module non nul $r$, d'arguments $\alpha$ et $\beta$ respectivement. On note $A$ et $B$ les points d'affixe $a$ et $b$ respectivement.

**4)** Interpréter géométriquement les conditions $ab = r^2$ puis $ab = -r^2$.

**5)** On suppose désormais que $ab \neq r^2$ et $ab \neq -r^2$.

- **a)** Montrer, sans les calculer, que les complexes $z_1 = \dfrac{a+b}{r^2+ab}$ et $z_2 = \dfrac{a-b}{r^2-ab}$ sont réels.
- **b)** Exprimer $z = rz_1$ en fonction des cosinus de $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ et $\dfrac{\alpha-\beta}{2}$. Qu'en est-il de $\zeta = rz_2$ ?
- **c)** Prouver l'inégalité $z_1^2 + z_2^2 \geqslant \dfrac{1}{r^2}$.
- **d)** Quels sont les cas d'égalité ?

**— FIN —**