Feuille d'exercice n° 19 : **Applications linéaires et familles de vecteurs - indications**

Exercice 3 Pour la question 3, vous pouvez par exemple chercher une condition pour que $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ soit un vecteur du noyau et de l'image. Posez-vous les question suivantes : si $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est de la forme $\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}$, à quelles conditions sur a, b, c, d le vecteur $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ est-il dans le noyau ? dans l'image ?

Exercice 4 Les deux premières questions se traitent sans surprise : il faut connaître le cours et appliquer rigoureusement les méthodes habituelles.
Pour la dernière question, pour démontrer le sens indirect, il faut savoir décomposer un vecteur de E comme la somme d'un vecteur de $\operatorname{Im} f$ et d'un vecteur de $\operatorname{Ker} f$. Faites donc une analyse pour vous mettre sur la piste d'une décomposition qui convient (attention : elle ne sera a priori pas unique). Et n'oubliez pas de bien exploiter toutes les hypothèses.

Exercice 5 Dans cet exercice, nous rencontrons pour la première fois le fait suffisant, absolument primordial : si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}) \iff f(x) = \lambda x.$$

Il faudra utiliser cela dans cet exercice.
Pour la dernière question, comme (presque) toujours dans les décompositions en supplémentaires : analyse - synthèse !

Exercice 6 Si $x \in E$, nous noterons $\lambda(x)$ le scalaire tel que $f(x) = \lambda(x).x$. Ce scalaire est défini de manière unique, sauf pour 0 : $\lambda(0)$ peut prendre n'importe quelle valeur.
Il s'agit de montrer que pour tous $x, y \in E$, $\lambda(x) = \lambda(y)$.
Distinguer deux cas : la famille (x, y) est libre (et étudier $\lambda(x + y)$), ou elle est liée.

Exercice 12 Quand on demande la « nature » d'un endomorphisme, c'est qu'il s'agit d'un endomorphisme particulier (homothétie, projecteur, symétrie ...). Ses éléments caractéristiques sont alors les éléments géométriques qui le définissent : rapport pour une homothétie, espaces sur lequel et parallèlement auquel on projette pour un projecteur, espaces par rapport auquel et parallèlement auquel on effectue une symétrie ...