

**DS n°8 : Fiche de calculs**

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom :

Note :

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

**Intégration.**

Calculer les primitives ou intégrales suivantes :

$$\int \frac{x-4}{x(x^2+4)} dx = \quad \quad \quad (1)$$

$$\int \frac{\cos x \, dx}{1 + \cos^2 x} = \quad \quad \quad (2)$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x} = \quad \quad \quad (\text{poser } u = \tan(x/2)) \quad (3)$$

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} \, dx = \quad \quad \quad (4)$$

On considère la fonction  $\psi : x \rightarrow \int_{3x}^{x^2} e^{x+t} dt$ . Alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\psi'(x) = \quad \quad \quad (5)$$

Donner une valeur approchée rationnelle à  $10^{-5}$  près de  $\cos(1)$ .

$$\quad \quad \quad (6)$$

Donner un équivalent simple pour chacune des expressions suivantes.

$$\sum_{k=1}^n \frac{3k^2n + 2n^3}{k^3n + 2kn^3 + n^4} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \quad \quad \quad (7)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^2}{k^2 + 3n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \quad \quad \quad (8)$$

$$\prod_{k=1}^n \left( \frac{n+2k}{n} \right)^{\frac{1}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \quad \quad \quad (9)$$

## Dénombrement.

On range les  $n$  tomes d'une encyclopédie sur une étagère. Combien y a-t-il de manières différentes de placer ces tomes, de sorte que les tomes n° 1 et 2 soient côte à côte, et dans cet ordre ?

(10)

Soit  $E$  un ensemble contenant  $n \in \mathbb{N}^*$  éléments. Combien y a-t-il d'applications  $f$  de  $E$  dans  $\mathbb{N}$  telles que  $\text{Im}(f) = \{0, 1\}$  ?

(11)

La belote se joue à 4 joueurs, avec un paquet de 32 cartes de quatre couleurs différentes (cœurs, carreaux, piques, trèfles). Chaque couleur contient huit cartes (sept, huit, neuf, dix, valet, dame, roi, as). Une main est la donnée de l'ensemble des huit cartes distribuées à un joueur.

Combien de mains existe-il en tout (ne pas simplifier le résultat) ?

(12)

Combien de mains comportent au moins 6 cartes de la même couleur (simplifier le résultat) ?

(13)

## Algèbre linéaire.

Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3x & +y & +8z \\ x & & -2z \\ 2x & +7y & +3z \\ x & -y & +z \end{pmatrix}$ .

$\text{rg}(f) =$

(14)

$\dim(\text{Ker}(f)) =$

(15)

Soit  $H = \{ P \in \mathbb{R}_8[X] \mid P''(1) = 0 \}$ .

$\dim(H) =$

(16)

Soit  $E = \mathbb{R}_3[X]$  et  $F = \left\{ P \in E, \int_0^1 P = P'(0) = 0 \right\}$ . Un supplémentaire de  $F$  dans  $E$  est :

(17)

— FIN —