IV Nombres complexes

11 août 2020

1. Corps des nombres complexes

1.1. Construction à partir de $\mathbb{R}$

Définition 1.1.1.
Soit E un ensemble. On appelle *loi de composition interne sur E* , ou plus simplement *loi (interne) sur E*, toute application de $E \times E$ dans E.

Remarque 1.1.2.
Une loi de composition interne est ce que vous appeliez auparavant une « opération » : l'addition des réels, la multiplication, l'addition des vecteurs...

Nous allons maintenant donner *une* construction de $\mathbb{C}$, ainsi que des opérations usuelles sur $\mathbb{C}$: addition et multiplication.

1. On suppose connu $\mathbb{R}$ muni de ses deux lois : l'addition $+$ et la multiplication $\times$.
2. Nous allons construire $\mathbb{C}$ comme l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, que nous munirons ensuite de deux lois. Le choix de $\mathbb{R}^2$ pour cette construction n'est pas essentiel (d'autres façons équivalentes de construire $\mathbb{C}$ existent). On ne considérera pas par la suite que $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ sont égaux, même s'il est parfois naturel de les identifier.
3. Construire $\mathbb{C}$ comme l'ensemble $\mathbb{R}^2$ n'est pas nécessairement très intuitif car on a l'impression que, pour construire $\mathbb{C}$, il faut chercher un sur ensemble de $\mathbb{R}$, or $\mathbb{R}^2$ n'en est pas un. L'idée est que l'ensemble $\mathbb{C}$ que nous allons construire contiendra une « copie » de $\mathbb{R}$. Par la suite, on identifiera cette copie et $\mathbb{R}$ lui-même.
4. Nous définissons donc deux lois de composition interne sur $\mathbb{R}^2$, notées provisoirement $\oplus$ et $\otimes$. Ce sont les lois telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{C}$ et tout $(x', y') \in \mathbb{C}$, on a :
$$\begin{aligned}(x, y) \oplus (x', y') &= (x + x', y + y'),\\ (x, y) \otimes (x', y') &= (xx' - yy', xy' + yx').\end{aligned}$$
5. $\mathbb{R}^2$ muni de ces deux lois est appellé $\mathbb{C}$.
6. Nous identifions à présent, pour tout réel x, le réel x et l'élément de $\mathbb{C}$ $(x, 0)$. Cela signifie que, pour $x \in \mathbb{R}$, nous noterons maintenant x à la place de $(x, 0)$. Via cette identification, $\mathbb{R}$ peut être vu comme une partie de $\mathbb{C}$. En particulier 1 désigne le couple $(1, 0)$.
7. On peut remarquer qu'on a alors, pour tous réels x et x' :
$$\begin{aligned}x \oplus x' &= (x, 0) \oplus (x', 0) = (x + x', 0) = x + x',\\ x \otimes x' &= (x, 0) \otimes (x', 0) \quad = (xx', 0) = xx'.\end{aligned}$$
Autrement dit, sur $\mathbb{R}$, $\oplus$ se confond avec l'addition usuelle et $\otimes$ avec la multiplication usuelle. $\oplus$ et $\otimes$ sont donc des prolongements à $\mathbb{C}$ des lois usuelles de $\mathbb{R}$. On reprendra donc les notations $+$ et $\times$, le symbole $\times$ étant souvent omis, comme dans $\mathbb{R}$.
8. Nous avons décidé plus haut de noter 1 le complexe $(1, 0)$, nous décidons maintenant de noter i le complexe $(0, 1)$. Notons alors que pour tous réels x et y, on a
$$\begin{aligned}x + i \times y &= (x, 0) + (0, 1) \times (y, 0)\\ &= (x, 0) + (0, y)\\ &= (x, y).\end{aligned}$$
Par ailleurs,
$$\begin{aligned}i^2 &= (0 \times 0 - 1 \times 1, 0 \times 1 + 0 \times 1)\\ &= (-1, 0)\\ &= -1.\end{aligned}$$

Exercice 1.1.3.
On considère les matrices
$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que l'on construit bien $\mathbb{C}$ en posant $\mathbb{C} = \{ a1 + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \}$.

Définition 1.1.4 (Parties réelle et imaginaire)**.**
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe un unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $z = x + iy$. Le réel x est

appelé *partie réelle* de z et est noté $\mathrm{Re}(z)$, et le réel y est appelé *partie imaginaire* de z et est noté $\mathrm{Im}(z)$.

Cette écriture $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, est appelée *forme algébrique* du nombre complexe z.

Démonstration.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. D'après ce qui précède $x + iy = (x, y)$, donc

$$z = x + iy \iff z = (x, y).$$

Il existe donc bien un unique couple (x, y) vérifiant $z = x + iy$. □

Remarque 1.1.5.
Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, on a

$$z = z' \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \text{ et } \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z').$$

Démonstration.
C'est une conséquence directe de la définition précédente. □

Définition 1.1.6 (Réels et imaginaires purs)**.**
Un complexe est dit *réel* si sa partie imaginaire est nulle. Il est dit *imaginaire pur* si sa partie réelle est nulle.

1.2. Propriétés des lois $+$ et $\times$

a. Commutativité

Proposition 1.2.1.
$+$ et $\times$ sont commutatives.

Démonstration.
Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes, avec x, x', y, y' des réels. Alors,

$$\begin{aligned} z + z' &= (x + x') + i(y + y') \\ &= (x' + x) + i(y' + y) \\ &= z' + z \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} z \times z' &= (xx' - yy'') + i(x'y + xy') \\ &= (x'x - y'y) + i(xy' + x'y) \\ &= z' \times z. \end{aligned}$$

□

b. Associativité

Proposition 1.2.2.
$+$ et $\times$ sont associatives.

Démonstration.
Soit $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$ et $z'' = x'' + iy''$ trois nombres complexes, avec x, x', x'', y, y', y'' des réels. Alors,

$$\begin{aligned} (z + z') + z'' &= [(x + x') + i(y + y')] + [x'' + iy''] \\ &= (x + x' + x'') + i(y + y' + y'') \\ &= (x + iy) + [(x' + x'') + i(y' + y'')] \\ &= z + (z' + z'') \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (z \times z') \times z'' &= [(xx' - yy'') + i(x'y + xy')] \times z'' \\ &= [(xx' - yy') + i(x'y + xy')](x'' + iy'') \\ &= (xx'x'' - yy'x'' - yx'y'' - xy'y'') \\ &\qquad + i(yx'x'' + xy'x'' + xx'y'' - yy'y'') \\ &= [x(x'x'' - y'y'') - y(y'x'' + x'y'')] \\ &\qquad + i[x(y'x'' + x'y'') + y(x'x'' - y'y'')] \\ &= (x + iy) \times [(x'x'' - y'y'') + i(y'x'' + x'y'')] \\ &= z \times (z' \times z''). \end{aligned}$$

□

c. Distributivité de $\times$ sur $+$

Proposition 1.2.3.
La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Démonstration.
Soit $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$ et $z'' = x'' + iy''$ trois nombres complexes, avec x, x', x'', y, y', y'' des réels. Alors,

$$\begin{aligned} z \times (z' + z'') &= (x + iy) \times [(x' + x'') + i(y' + y'')] \\ &= xx' + xx'' - yy' - yy'' \\ &\qquad + i(yx' + yx'' + xy' + xy'') \\ &= [xx' - yy' + i(yx' + xy')] \\ &\qquad + [xx'' - yy'' + i(yx'' + xy'')] \\ &= (z \times z') + (z \times z''). \end{aligned}$$

□

d. Éléments neutres

Définition 1.2.4.
Soit $\#$ une loi de composition interne sur un ensemble E. On dit que e est un élément neutre pour $\#$ si pour tout $x \in E$, $e\#x = x\#e = x$.

Proposition 1.2.5.
Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $\#$. Si $\#$ admet un élément neutre, alors celui-ci est unique.

Démonstration.
Soient e et e' deux neutres. Alors, e' étant neutre, on a $e\#e' = e$ et e étant neutre, on a $e\#e' = e'$. On a donc $e = e'$. □

Exemple 1.2.6.
L'addition sur l'ensemble des entiers naturels (resp. relatifs) admet un unique neutre : 0. L'addition sur l'ensemble des entiers naturels non nuls n'admet aucun neutre.

Proposition 1.2.7.
Dans $\mathbb{C}$, 0 est un élément neutre pour $+$, 1 est un élément neutre pour $\times$.

Démonstration.
Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors,

$$z + 0 = (x + iy) + (0 + i0) = (x + 0) + i(y + 0) = x + iy = z$$

et

$$\begin{aligned} z \times 1 &= (x + iy) \times (1 + i0) \\ &= (1x - 0y) + i(1y + 0x) \\ &= x + iy \\ &= z. \end{aligned}$$

□

e. Inverses

Définition 1.2.8.
Soient $(E, \#)$ un ensemble muni d'une loi interne, ayant un neutre e. On dit que $x \in E$ est *inversible* s'il existe un $x' \in E$ tel que $x\#x' = e$ **et** $x'\#x = e$.

Remarque 1.2.9.
Attention de bien vérifier les deux égalités, comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 1.2.10.
On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, et on le munit de la lci $\circ$, qui dénote la composition de deux applications.

1. $(\mathscr{F}, \circ)$ a-t-il un élément neutre ?

2. Soients $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n + 1$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n - 1 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$. Étudier $g \circ f$ et $f \circ g$. Que peut-on dire ?

Proposition 1.2.11.
Soit E un ensemble muni d'une lci ***associative*** $\#$ admettant un neutre e.

Pour tout élément x de E, si x est inversible pour $\#$, alors son inverse est unique.

Démonstration.
Soient y et y' deux inverses de x. Alors $y\#x = e$ donc $y\#x\#y' = e\#y' = y'$. D'autre part, $x\#y' = e$ donc $y\#x\#y' = y\#e = y$. □

Proposition 1.2.12.
Soit $z \in \mathbb{C}$.

z est inversible pour $+$, d'inverse $-z$.

Si $z \neq 0$, z est aussi inversible pour $\times$, d'inverse $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$, où $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.

0 n'est pas inversible pour $\times$ dans $\mathbb{C}$.

Démonstration.
C'est simple pour l'addition.

Comme la multiplication complexe est commutative, on n'a besoin de vérifier qu'une égalité. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Alors $x^2 + y^2 \neq 0$ et

$$\begin{aligned} &\left[\frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}\right] \times (x + iy) \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2}\left[x^2 + y^2 + i(xy - yx)\right] \\ &= \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Enfin, on vérifie aisément que 0 est absorbant : pour tout complexe z, $0z = 0$. Si 0 était inversible, son inverse z ne pourrait donc vérifier $0z = 1$, car $1 \neq 0$! □

Remarque 1.2.13.
Si z et z' sont deux nombres complexes, avec $z' \neq 0$, on note $\dfrac{z}{z'} = z \times (z')^{-1}$.

Exercice 1.2.14.
Mettre sous forme algébrique les fractions suivantes.

$$\frac{4-i}{3+i\sqrt{2}};\ \frac{(1+i)^2}{i(2+i)^3}\ ;\ \frac{8-3i}{(1-i)^7}.$$

Définition 1.2.15.
On appelle *monoïde* tout couple $(G, \star)$ où G est un ensemble et

1. $\star$ est une loi de composition interne sur G ;
2. $\star$ est associative ;
3. et $\star$ possède un élément neutre.

On appelle *groupe* tout monoïde $(G, \star)$ dont tous les éléments sont inversibles.

On dit qu'un monoïde ou un groupe est *commutatif* si sa loi de composition interne l'est.

On appelle *anneau* tout triplet $(G, \star, \#)$ tel que

1. $(G, \star)$ est un groupe **commutatif** ;
2. $(G, \#)$ est un monoïde ;
3. et $\#$ est distributive par rapport à $\star$.

On dit qu'un anneau est *commutatif* si $\#$ est commutative.

Enfin, on appelle *corps* tout anneau **commutatif** $(G, \star, \#)$ tel que tout élément de G différent du neutre de $\star$ est inversible pour $\#$.

Exercice 1.2.16.
Chacun des ensembles $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{C}$, muni des lois usuelles, est-il un monoïde, un groupe, un anneau, un corps ?

1.3. Interprétation géométrique

Définition 1.3.1 (Affixe et image)**.**
Soit M un point du plan de coordonnées (x, y). On appelle *affixe* de M le complexe $x + iy$.

Soit z un complexe de partie réelle x et de partie imaginaire y. On appelle *image* de z le point du plan de coordonnées (x, y).

Remarque 1.3.2.
On peut identifier $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ au plan euclidien (l'ensemble des points du plan) muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, c'est-à-dire qu'un point du plan euclidien est identifié à ses coordonnées [1] dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

On peut également identifier $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ à l'ensemble des vecteurs du plan, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ étant identifié au point M, et donc à son affixe.

Théorème 1.3.3 (Règles de calcul)**.**
On a les propriétés suivantes :

(i) Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ deux vecteurs d'affixes respectifs z et z', et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors le vecteur $\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{u}'$ a pour affixe $z + \lambda z'$. En particulier, pour tout couple de vecteurs, l'affixe de la somme de ces vecteurs est la somme des affixes et pour tout scalaire λ et tout vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe z, l'affixe de $\lambda\overrightarrow{u}$ est λz.

(ii) Soient A et B deux points d'affixes respectifs a et b. Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b-a$.

Démonstration. (i) Notons x et y respectivement les parties réelle et imaginaire de z, et x' et y' celles de z'. Alors $\overrightarrow{u}$ (resp. $\overrightarrow{u}'$) a pour coordonnées (x, y) (resp. (x', y')). $\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{u}'$ a alors pour coordonnées $(x+\lambda x', y+\lambda y')$, donc pour affixe $(x+\lambda x')+i(y+\lambda y')$. Or on a

$$\begin{aligned} z + \lambda z' &= (x + iy) + \lambda(x' + iy') \\ &= (x + \lambda x') + i(y + \lambda y') \end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{u}'$ a bien pour affixe $z + \lambda z'$.
Il suffit alors d'étudier les cas particuliers où $\lambda = 1$, où $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et où $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et $\lambda = -1$ pour conclure.

1. Notez la différence entre « identifié par » et « identifié à ».

(ii) Il suffit d'utiliser la relation fondamentale $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ et le point précédent pour conclure. □

Remarque 1.3.4.
Soit $b \in \mathbb{C}$. L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z+b \end{array}$$

s'interprète géométriquement comme la translation de vecteur d'affixe b.

1.4. Conjugué et module d'un nombre complexe

Définition 1.4.1.
On appelle *conjugué d'un complexe* z le complexe $\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$.
On appelle *module d'un complexe* z le réel positif $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$.

Remarque 1.4.2.
Sur $\mathbb{R}$, le module coïncide avec la valeur absolue.

Proposition 1.4.3 (Interprétation géométrique)**.**
Soit $M(z)$ un point du plan. Alors $|z| = OM$ et $\overline{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe $(O\vec{\imath})$ (voir figure 1).

Démonstration.
Immédiat □

Proposition 1.4.4 (Règles de calcul)**.**
Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a les identités suivantes.

$$\begin{array}{cc} \mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2} & \mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i} \\ \overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} & \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'} \\ \overline{\overline{z}} = z & z\overline{z} = |z|^2 \\ |\overline{z}| = |z| & |zz'| = |z| \times |z'| \end{array}$$

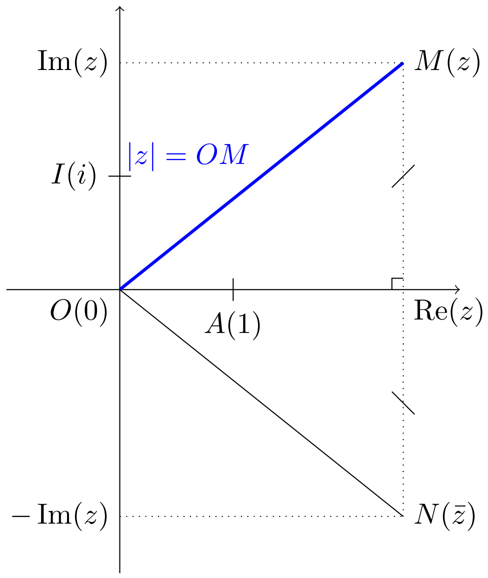

FIGURE 1 – Interprétation géométrique du module et du conjugué de $z \in \mathbb{C}$.

Si $z' \neq 0$,

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \text{et} \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}.$$

Démonstration.
Ces identités sont élémentaires et se vérifient directement en posant $z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

L'égalité $z\overline{z} = |z|^2$ a déjà été vue lors du calcul de l'inver d'un nombre complexe.

Remarquons aussi que, facilement, $|zz'|^2 = zz'\overline{zz'} = zz'\overline{z}\,\overline{z'} = z\overline{z}z'\overline{z'} = |z|^2|z'|^2$. □

Corollaire 1.4.5.
Soit $z \in \mathbb{C}$, on a

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z,$$
$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z.$$

Exercice 1.4.6.
Soit $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points du plan distincts deux à deux.

1. Déterminer l'équation complexe de la médiatrice de $[AB]$.
2. Déterminer l'affixe du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Proposition 1.4.7 (Comparaisons usuelles)**.**
Soit $z \in \mathbb{C}$, on a

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0,$$
$$|\operatorname{Re}(z)| \leqslant |z| \quad \text{et} \quad |\operatorname{Im}(z)| \leqslant |z|.$$

Démonstration.
Soit $z \in \mathbb{C}$, soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $z = x + iy$. On a $0 \leqslant x^2 \leqslant x^2 + y^2$, ce qui prouve bien que si $|z| = 0$, alors $z = 0$ (l'autre implication est évidente). Cela prouve aussi que $\operatorname{Re}(z)^2 \leqslant |z|^2$, donc que $|\operatorname{Re}(z)| \leqslant |z|$ (*idem* pour $\operatorname{Im}(z)$). □

Corollaire 1.4.8.
Soit $a, b \in \mathbb{C}$, si $ab = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.

Théorème 1.4.9 (Inégalité triangulaire)**.**
Soit $z, z' \in \mathbb{C}$, on a

$$\big| |z| - |z'| \big| \leqslant |z \pm z'| \leqslant |z| + |z'|.$$

De plus, $|z + z'| = |z| + |z'|$ si et seulement s'il existe $(\lambda, \lambda') \in (\mathbb{R}^+)^2$ tel que $(\lambda, \lambda') \neq (0, 0)$ et $\lambda z = \lambda' z'$.

Démonstration.
On montre l'encadrement pour $|z + z'|$. Pour $|z - z'|$ il suffit de remplacer z' par $-z'$.

Pour montrer $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$, il suffit de montrer $|z + z'|^2 \leqslant (|z| + |z'|)^2$. Posons $d = (|z| + |z'|)^2 - |z + z'|^2$ et calculons d. On obtient successivement

$$\begin{aligned}
d &= |z|^2 + \left|z'\right|^2 + 2|z|\left|z'\right| - \left(z + z'\right)\left(\overline{z} + \overline{z'}\right) \\
&= 2|z|\left|z'\right| - z\overline{z'} - z'\overline{z} \\
&= 2\left(|z|\left|z'\right| - \frac{z\overline{z'} + z'\overline{z}}{2}\right) \\
&= 2\left(|z|\left|\overline{z'}\right| - \frac{z\overline{z'} + \overline{z\overline{z'}}}{2}\right) \\
&= 2\left(\left|z\overline{z'}\right| - \operatorname{Re}\left(z\overline{z'}\right)\right) \\
&\geqslant 0
\end{aligned}$$

On a donc $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

Pour la seconde inégalité : $|z| = |(z + z') + (-z')| \leqslant |z + z'| + |-z'|$, d'où $|z| - |z'| \leqslant |z + z'|$. On permute les rôles de z et z' et on a $|z'| - |z| \leqslant |z + z'|$, ce qui permet de conclure, car

$$\big| |z| - |z'| \big| = \max\big(|z| - |z'|; |z'| - |z|\big).$$

Montrons maintenant le cas d'égalité. Dans le cas où $z = z' = 0$, le résultat est immédiat.

Sinon, d'après la démonstration de l'inégalité triangulaire, l'égalité est vérifiée si et seulement si $\left|z\overline{z'}\right| = \operatorname{Re}\left(z\overline{z'}\right)$, *i.e.* si et seulement si $z\overline{z'}$ est un réel positif.

Dans le cas où $z' \neq 0$, on remarque que $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{z\overline{z'}}{|z'|^2}$, donc l'égalité est vérifiée si et seulement si $\dfrac{z}{z'} \in \mathbb{R}_+$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z = \lambda z'$.

En inversant les rôles de z et z' dans le cas où $z' = 0$ on obtient le résultat voulu. □

Remarque 1.4.10.
• En pratique : on se sert de $z\overline{z} = |z|^2$ pour calculer la forme algébrique de l'inverse d'un complexe :

$$\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

• Le module d'un complexe est la norme du vecteur ayant ce complexe pour affixe.
• En particulier, soit a et z deux complexes et $R \geqslant 0$. Notons M et A les points du plans d'affixes respectives z et a. Alors $|z - a|$ est la distance AM. Et M appartient au cercle (resp. disque ouvert, resp. disque fermé) de centre A et de rayon R si et seulement si $|z - a| = R$ (resp. $|z - a| < R$, resp. $|z - a| \leqslant R$).
• Géométriquement, il y a égalité dans l'inégalité triangulaire survient donc quand les images de z et z' sont sur une même demi-droite d'origine O.
• Le bloc « il existe $(\lambda, \lambda') \in (\mathbb{R}^+)^2$ tel que $(\lambda, \lambda') \neq (0, 0)$ » s'écrit aussi « $\exists(\lambda, \lambda') \in (\mathbb{R}^+)^2 \setminus \{(0, 0)\}$ » et se lit « il existe deux complexes λ et λ' non tous nuls ».

2. Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

2.1. Définition et caractérisation

Définition 2.1.1.
On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Muni de la multiplication usuelle entre complexes, c'est un groupe de neutre 1.

Remarque 2.1.2.
$\mathbb{U}$ est l'ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique

Définition 2.1.3.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle *exponentielle complexe de* $i\theta$ le complexe $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

L'écriture $\mathrm{e}^{i\theta}$ n'est qu'une **notation** : en aucun cas il ne s'agit du réel e élevé à la puissance $i\theta$, ce qui n'a aucun sens.

Théorème 2.1.4 (Formules d'Euler)**.**
Soit $\theta \in \mathbb{R}$, alors

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2},$$
$$\sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}.$$

Démonstration.
Direct. □

Théorème 2.1.5.
Soit $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, alors $\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{i\theta'}$.

Notamment, $\mathrm{e}^{i\theta} \neq 0$ et $\overline{\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{-i\theta} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}}$, donc $\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{U}$.

Démonstration.
C'est un simple développement utilisant les formules trigonométriques d'addition.

Ces formules peuvent se démontrer géométriquement. Consulter par exemple la page Wolfram

http ://preview.tinyurl.com/pzkqg5q

Une autre approche possible serait d'admettre cette propriété et d'en déduire toutes les autres, ainsi que les formules de trigonométrie.

Ensuite, $\mathrm{e}^{i\theta} \times \mathrm{e}^{-i\theta} = \mathrm{e}^{i0} = 1$, donc $\mathrm{e}^{i\theta}$ et $\mathrm{e}^{-i\theta}$ sont inverses l'un de l'autre. En particulier $\mathrm{e}^{i\theta} \neq 0$.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \\ &= \cos\theta - i\sin\theta \\ &= \overline{\mathrm{e}^{i\theta}} \end{aligned}$$

Donc $1 = \mathrm{e}^{i\theta}.\overline{\mathrm{e}^{i\theta}} = \left|\mathrm{e}^{i\theta}\right|^2$, donc $\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{U}$.

On aurait aussi pu utiliser que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. □

Proposition 2.1.6 (Formule de De Moivre)**.**
Soit θ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\mathrm{e}^{in\theta} = \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n,$$
$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n.$$

Démonstration.
Se démontre par une récurrence immédiate sur n. □

Théorème 2.1.7 (Paramétrisation de $\mathbb{U}$)**.**
L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ \theta & \mapsto & \mathrm{e}^{i\theta} \end{array}$$

est *un paramétrage de* $\mathbb{U}$, autrement dit, pour tout nombre complexe z on a

$$z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \exists\theta \in \mathbb{R} \quad z = \mathrm{e}^{i\theta} \tag{1}$$

De plus, pour tout complexe $z \in \mathbb{U}$ donné, le paramètre correspondant est *unique à* 2π *près*, autrement dit, on a

$$\forall(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2 \quad \mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta = \theta'[2\pi] \tag{2}$$

Remarque 2.1.8.
Ce résultat a une interprétation géométrique intuitive.

Démonstration.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrons l'équivalence (1). L'implication de droite à gauche est évidente : s'il existe θ tel que z s'écrive $\cos\theta + i\sin\theta$, alors $|z|^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, donc $z \in \mathbb{U}$. Réciproquement, soit $z \in \mathbb{U}$, alors $(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 = 1$ donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ vérifiant $\operatorname{Re} z = \cos\theta$ et $\operatorname{Im} z = \sin\theta$.

Pour l'équivalence (2), il suffit de remarquer que pour tout couple (θ, θ') de réels, l'égalité $\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\theta'}$ implique l'égalité des cosinus ainsi que des sinus de θ et θ', donc l'égalité de θ et θ' à 2π près. L'autre sens découle de la proposition 2.1.5. $\square$

2.2. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition 2.2.1.
Soit $z \neq 0$. Alors $z/|z| \in \mathbb{U}$, donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ vérifiant $z/|z| = \mathrm{e}^{i\theta}$, c'est-à-dire $z = |z|\mathrm{e}^{i\theta}$.

Le réel θ est alors appelé ***un** argument* de z. Il existe à 2π près. Il existe alors un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$ vérifiant $z = |z|\mathrm{e}^{i\theta}$. Ce réel est appelé *l'argument principal* de z, et noté $\arg z$.
L'écriture « $z = |z|\mathrm{e}^{i\theta}$ » est appelée *écriture trigonométrique* de z.

Remarque 2.2.2.
1. Attention à la non unicité de l'argument.
2. Le complexe 0 n'a pas d'argument.
3. Pour tout z non nul, $(|z|, \arg z)$ est un couple de coordonnées polaires du point d'affixe z.

Proposition 2.2.3.
Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$. On a :

$$\begin{aligned} \arg \overline{z} &= -\arg z [2\pi] \\ \arg zz' &= \arg z + \arg z' [2\pi] \\ \text{et } \arg(1/z) &= -\arg z [2\pi]. \end{aligned}$$

Démonstration.
Utiliser l'écriture trigonométrique. $\square$

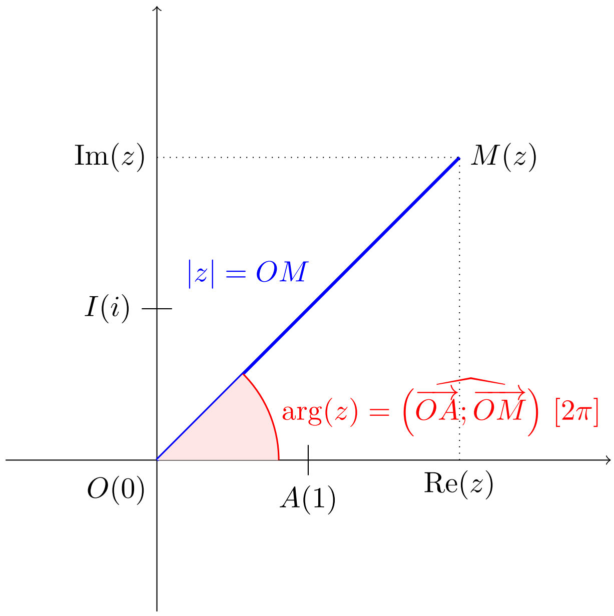

FIGURE 2 – Interprétation géométrique du module et de l'argument de $z \in \mathbb{C}^*$.

Exercice 2.2.4.
Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants.

$$\sqrt{6} + i\sqrt{2}; \ (2 - 2i)^7.$$

Remarque 2.2.5.
L'écriture $a = b$ [2π] signifie que a et b sont égaux à un multiple de 2π près, *i.e.* $\exists k \in \mathbb{Z}$, $a = b + 2k\pi$.

Les manipulations d'arguments doivent toujours s'effectuer en indiquant à quel angle près cela s'entend ([π], [2π] le plus souvent).

Exercice 2.2.6.
Si $a = b$ [2π], a-t-on $\frac{a}{2} = \frac{b}{2}$ [2π] ? A-t-on $2a = 2b$ [2π] ?

2.3. Technique de l'angle moitié

La factorisation suivante est indispensable. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{iy} &= \mathrm{e}^{i\frac{(x+y)}{2}} \left(\mathrm{e}^{i\frac{(x-y)}{2}} + \mathrm{e}^{-i\frac{(x-y)}{2}} \right) \\ &= 2\mathrm{e}^{i\frac{(x+y)}{2}} \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \end{aligned}$$

Cette technique permet en particulier de montrer

Proposition 2.3.1.
Soit $t \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} 1 + \mathrm{e}^{it} &= \quad 2\mathrm{e}^{i\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ 1 - \mathrm{e}^{it} &= -2\mathrm{e}^{i\frac{t}{2}} i \sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

Démonstration.
Il suffit de remarquer que $1 = e^{i0}$ et d'appliquer la technique. □

Exercice 2.3.2.
Mettre sous forme trigonométrique les nombre complexe $\mathrm{e}^{3i\pi/5} + \mathrm{e}^{4i\pi/9}$.

2.4. Racines énièmes.

Définition 2.4.1.
Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *racine n^e de z* tout complexe t tel que $t^n = z$.

Les racines de 1 sont appelées *racines n^{es} de l'unité*.

L'ensemble des racines n^{es} de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.

Remarque 2.4.2.
La notation $\sqrt[n]{.}$ est **interdite** sur les complexes quelconques. En effet, elle désigne l'application réciproque de la fonction $x \mapsto x^n$ qui n'est bijective que considérée comme application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ si n est pair et de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ si n est impair.

Théorème 2.4.3.
1. La seule racine n^{e} de zéro est zéro.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ non nul, donné sous une forme trigonométrique $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$, avec $r > 0$. Alors z possède exactement n racines n^{es}, qui sont les nombres complexes
$$\sqrt[n]{r} \times \mathrm{e}^{\left(\frac{i\theta}{n} + \frac{2ik\pi}{n}\right)}$$
pour k décrivant l'ensemble $[\![0, n-1]\!]$ (ou $[\![1, n]\!]$).
3. En particulier
$$\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \;\middle|\; k \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

Démonstration.
1. Soit $t \in \mathbb{C}$. Alors $t \neq 0 \Rightarrow t^n \neq 0$ donc $t^n = 0 \Rightarrow t = 0$. On vérifie enfin que $t = 0 \Rightarrow t^n = 0$, pour $n > 0$.
2. Soit $(z, t) \in \mathbb{C}^2$, $z \neq 0$.
   — 1er cas : $z = 1$: on note $\rho = |t|$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ un argument de t. On a : $t^n = 1$ si et seulement si $\rho^n.\mathrm{e}^{in\varphi} = 1.\mathrm{e}^{i0}$ si et seulement si $\rho^n = 1$ et $n\varphi = 0[2\pi]$ si et seulement si $\rho = 1$ et $\varphi = \dfrac{2k\pi}{n}$.
   — 2nd cas : z est quelconque non nul donc s'écrit sous la forme $r\mathrm{e}^{i\theta}$ où $r > 0$. On pose $\alpha = \sqrt[n]{r} \times \mathrm{e}^{i\theta/n}$, donc $\alpha^n = z$. Alors, si $t = \rho.\mathrm{e}^{i\varphi}$, $t^n = z$ si et seulement si $\left(\dfrac{t}{\alpha}\right)^n = 1$ et on utilise le premier cas.

□

Remarque 2.4.4 (Interprétation géométrique)**.**
Soit $n \geqslant 3$. Posons $z_i = \frac{2ik\pi}{n}$ et notons A_i le point d'affixe z_i pour $i \in [\![0, n-1]\!]$. Alors $A_0 A_1 \dots A_n$ est un polygones réguliers à n côtés, inscrit dans le cercle unité.

Les racines deuxièmes de 1 sont -1 et 1 (racines carrées de 1).

En posant $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$, les racines troisièmes de l'unité sont 1, j et j^2 (et on a $j^2 = \overline{j}$). Ce sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrits dans le cercle unité.

Les racines quatrièmes de l'unité sont 1, i, -1 et $-i$: ce sont les sommets d'un carré inscrit dans le cercle unité.

Les racines cinquièmes de l'unité sont 1, $\mathrm{e}^{2i\pi/5}$, $\mathrm{e}^{4i\pi/5}$, $\mathrm{e}^{-4i\pi/5}$ et $\mathrm{e}^{-2i\pi/5}$: ce sont les sommets d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle unité.

Les racines sixièmes de l'unité sont 1, $\mathrm{e}^{i\pi/3}$, j, -1, j^2 et $\mathrm{e}^{-i\pi/3}$: ce sont les sommets d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle unité.

Tout cela est représenté dans la figure 3.

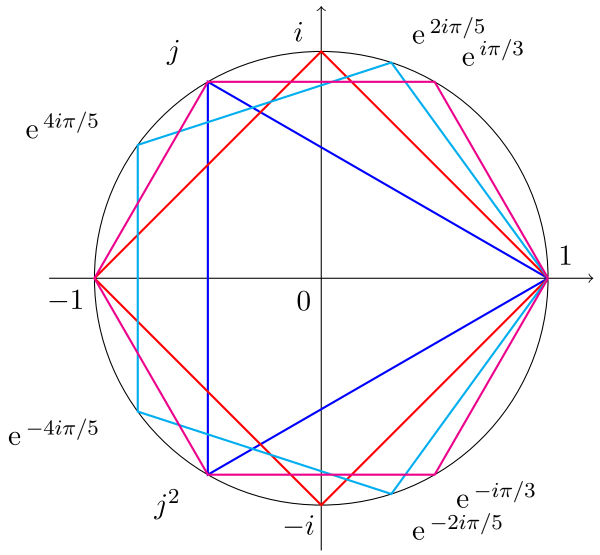

FIGURE 3 – Racines n^{es} de l'unité pour $1 \leqslant n \leqslant 6$.

Proposition 2.4.5.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a les égalités suivantes :

$$\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (z-\omega) = \prod_{k=0}^{n-1} (z - e^{\frac{2ik\pi}{n}}) = z^n - 1$$

$$\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} (z-\omega) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(z - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

La somme des racines n^{e} de l'unité est nulle, *i.e.* :

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0.$$

En particulier $1 + j + \overline{j} = 1 + j + j^2 = 0$.

Démonstration.
Pour démontrer ce résultat on admettra provisoirement le résultat suivant : Pour tout entier n et tout polynôme P un polynôme de degré n admettant n racines distinctes z_1, ..., z_n, de coefficient dominant α, on a

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad P(z) = \alpha(z-z_1)\ldots(z-z_n).$$

On rappelle aussi la formule de sommation géométrique : pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$z^n - 1 = (z-1)(1 + z + \cdots + z^{n-1}).$$

La première égalité est une application directe du résultat admis, en posant $P : z \mapsto z^n - 1$; P est alors un polynôme de degré n et de coefficient dominant 1.

La seconde est une application directe du même résultat en considérant $P : z \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} z^k$. De plus $n \neq 1$ donc $e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1$ donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k = \frac{1 - \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} = 0.$$

□

3. Équations du second degré

3.1. Calcul des racines carrées d'un complexe sous forme algébrique

Soit z et t deux complexes. On veut résoudre explicitement l'équation $t^2 = z$, d'inconnue z, que nous noterons (E).

On peut écrire z sous la forme $x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et t sous la forme $a + ib$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Pour résoudre (E), il y a une astuce très utile.

Astuce.
Soit t et z deux complexes. Alors

$$t^2 = z \iff \begin{cases} t^2 = z \\ |t|^2 = |z| \end{cases}$$

On en déduit successivement :

$$(E) \iff \begin{cases} a^2 - b^2 + i2ab = x + iy \\ a^2 + b^2 = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$(E) \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ 2ab = y \\ a^2 + b^2 = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$(E) \iff \begin{cases} a^2 = \dfrac{x + \sqrt{x^2+y^2}}{2} \\ b^2 = \dfrac{-x + \sqrt{x^2+y^2}}{2} \\ 2ab = y \end{cases}$$

Exercice 3.1.1.
Trouver les racines carrées de $z = 3 - 4i$.

3.2. Résolution des équations du second degré

Théorème 3.2.1.
Soient a, b, $c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ sont $\dfrac{-b \pm \delta}{2a}$, où δ est l'une quelconque des deux racines carrées du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

La somme de ces solutions vaut $-\dfrac{b}{a}$ et leur produit $\dfrac{c}{a}$.

Démonstration.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}
az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right] \\
&= a\left[z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right]\left[z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right] \\
&= a\left(z - \frac{-b-\delta}{2a}\right)\left(z - \frac{-b+\delta}{2a}\right)
\end{aligned}$$

On calcule finalement :

$$\begin{aligned}
\frac{-b-\delta}{2a} + \frac{-b+\delta}{2a} &= -\frac{b}{a}, \\
\frac{-b-\delta}{2a} \times \frac{-b+\delta}{2a} &= \frac{b^2 - \delta^2}{4a^2} = \frac{c}{a}.
\end{aligned}$$

□

Remarque 3.2.2.
• N'importe quelle racine carrée du discriminant convient, puisqu'elles sont égales au signe près.
• Si le discriminant est nul, il n'y a qu'une racine, qui est alors dite *double*.
• Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, alors le discriminant est réel. S'il est strictement positif, il y a deux racines réelles distinctes ; s'il est nul, il y a une racine réelle double ; s'il est strictement négatif, il y a deux racines complexes non réelles conjuguées.
• Avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a la relation suivante :

$$(X - \alpha)(X - \beta) = X^2 - (\alpha + \beta)X + \alpha\beta.$$

• On peut donc connaître la somme et le produit des deux racines sans connaître les racines. Réciproquement, si l'on connaît la somme et le produit de deux nombres complexes, alors on connaît une équation polynomiale du second degré dont ils sont exactement les racines.

Exercice 3.2.3.
Trouver a et b tels que $ab = 2$ et $a + b = i$.

4. Techniques de calcul

4.1. Formules trigonométriques

Nous avons utilisé les formules de trigonométrie (*cf.* formulaire de trigonométrie) dans la démonstration de 2.1.5.

Néanmoins, les propriétés de l'exponentielle « de $i\theta$ » permettent de retrouver ces formules, dans le cas inenvisageable où vous les auriez oubliées.

Par exemple : développer $\mathrm{e}^{i(a+b)}$ de deux manières différentes, identifier les expressions obtenues et retrouver les formules donnant $\sin(a + b)$ et $\cos(a + b)$.

4.2. Technique de l'angle moitié

Déjà vu. Elles permet aussi de retrouver les formules de factorisation du type $\cos(a) + \cos(b)$.

4.3. Factorisation

Utilise la technique de l'angle moitié, souvent après avoir identifié la somme en question comme la partie réelle ou imaginaire d'un type de somme bien connue. On utilise très souvent les formules suivantes.

Sommation géométrique : Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} n+1 & \text{si} \quad z = 1, \\ \dfrac{z^{n+1} - 1}{z - 1} & \text{si} \quad z \neq 1. \end{cases}$$

Binôme de Newton : Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

On peut calculer les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ avec le triangle de Pascal.

Exemple 4.3.1.

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(4kx) = \begin{cases} \frac{\sin(2(n+1)x)\cos(2nx)}{\sin(2x)} & \text{si } x \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \\ n+1 & \text{si } x \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \end{cases}$$

4.4. Linéarisation

Méthode pour supprimer les produits et puissances dans une expression en cosinus et sinus :

1- Utiliser la formule d'Euler et développer par la formule du binôme.

2- Regrouper les puissances pour réutiliser les formules d'Euler, mais dans l'autre sens.

Exemple 4.4.1.

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x$$

$$\sin^3(x)\cos^2(x) = -\frac{1}{16}\sin(5x) + \frac{1}{8}\sin(x) + \frac{1}{16}\sin(3x)$$

5. L'exponentielle complexe

Définition 5.0.1.
Soit $z \in \mathbb{C}$, donné sous forme algébrique $z = x+iy$. On appelle *exponentielle de z* notée e^{z} le nombre complexe $\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{iy}$.

Remarque 5.0.2.
e^{z} n'est toujours pas une puissance : ce n'est qu'une notation.

Exemple 5.0.3.
$\mathrm{e}^{2+i\pi/2} = i\mathrm{e}^{2}$.

Théorème 5.0.4. 1. L'exponentielle complexe est $2i\pi$-périodique.

2. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^{z}\mathrm{e}^{z'}$: on dit que l'exponentielle transforme les sommes en produits.
3. L'exponentielle complexe ne s'annule pas.
4. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $t \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\mathrm{e}^{z} = t \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z = \ln|t| + i\arg t + 2ik\pi.$$

Démonstration. 1. Immédiat.

2. Séparer parties réelle et imaginaire.
3. L'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et $\mathrm{e}^{i\theta}$ non plus (déjà vu).
4. $\mathrm{e}^{z} = t$ si et seulement si $\mathrm{e}^{\operatorname{Re} z} = |t|$ et $\operatorname{Im} z = \arg t[2\pi]$.

□

Remarque 5.0.5.
L'exponentielle n'est ni surjective, ni injective, et il n'existe pas de « logarithme complexe ».

6. Nombres complexes et géométrie plane

Dans toute cette partie, on considère un plan, muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

6.1. Colinéarité et orthogonalité

a. Interprétation géométrique du rapport

Théorème 6.1.1.
Soit z et z' deux complexes non nuls. On note $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ les vecteurs d'affixes respectives z et z'. Alors

$$\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{\|\overrightarrow{u}'\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$$

$$\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}') \quad [2\pi]$$

Démonstration.
Le premier point est immédiat, le second découle de l'interprétation géométrique de l'argument. En notant $\overrightarrow{i}$ le vecteur d'affixe 1, et en posant $\theta = \arg z$, on a $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, donc $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}) = \arg z \quad [2\pi]$. De même $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}') = \arg z'[2\pi]$. D'où

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}') &= (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}') - (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}) && [2\pi]\\ &= \arg z' - \arg z && [2\pi]\\ &= \arg\left(\frac{z'}{z}\right) && [2\pi]\end{aligned}$$

□

Corollaire 6.1.2.
Soit A, B et M trois points deux à deux distincts d'affixes respectives a, b et z. Alors

(i) A, B et M sont alignés si et seulement si $\dfrac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R}$;

(ii) $(AM)\perp(BM)$ si et seulement si $\dfrac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R}$.

Exemple 6.1.3.
i, 1 et $2-i$ sont alignés, et $1+i$, 2 et $-2i$ forment un angle droit en 2.

Exercice 6.1.4.
Soit $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points du plan.

On rappelle que le centre de gravité du triangle ABC est le point d'affixe $\dfrac{1}{3}(a+b+c)$.

Montrer que ce centre de gravité est le point d'intersection des médianes de ABC.

Exercice 6.1.5.
Soit $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points du plan. On suppose que le cercle circonscrit au triangle ABC a pour centre $O(0)$.

Montrer que l'orthocentre de ABC a pour affixe $a+b+c$.

6.2. Transformations usuelles

Définition 6.2.1 (Translation)**.**
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur

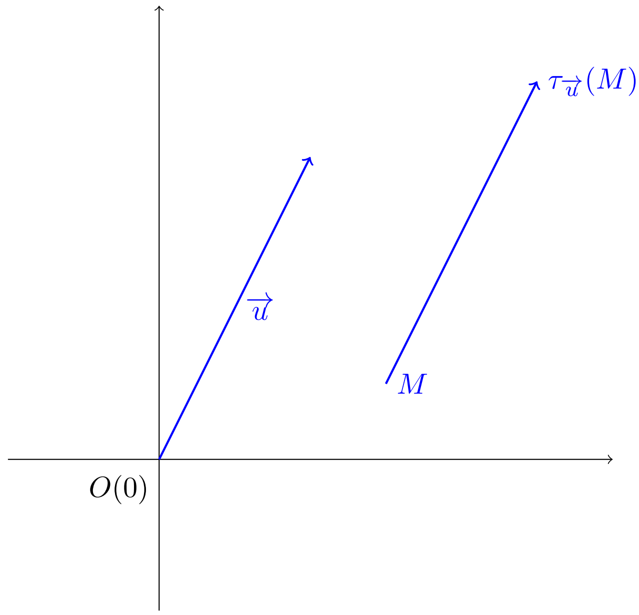

FIGURE 4 – Translation de vecteur $\vec{u}$.

La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est l'application qui envoie un point M sur le point M' vérifiant $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$ (voir figure 4). On la note souvent $\tau_{\overrightarrow{u}}$.

Remarque 6.2.2.
La translation de vecteur nul est l'identité. Si $\overrightarrow{u}$ n'est pas nul, la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ n'a pas de point fixe.

Définition 6.2.3 (Rotation)**.**
Soit Ω un point du plan, $\theta \in \mathbb{R}$.

La rotation de centre Ω et d'angle θ est l'application qui et

— fixe Ω ;

— envoie tout point M différent de Ω sur le point M' vérifiant $\Omega M = \Omega M'$ et $\widehat{(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})} = \theta[2\pi]$.

On la note souvent $\rho_{\Omega,\theta}$ (voir figure 5).

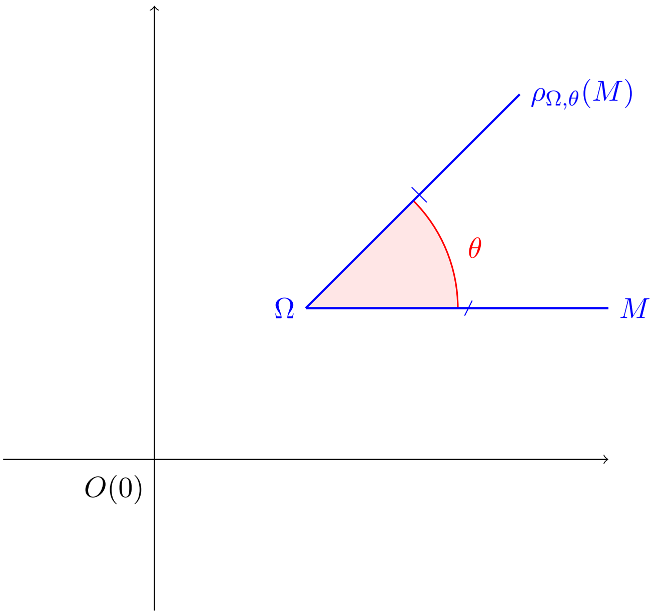

FIGURE 5 – Rotation de centre Ω, d'angle θ.

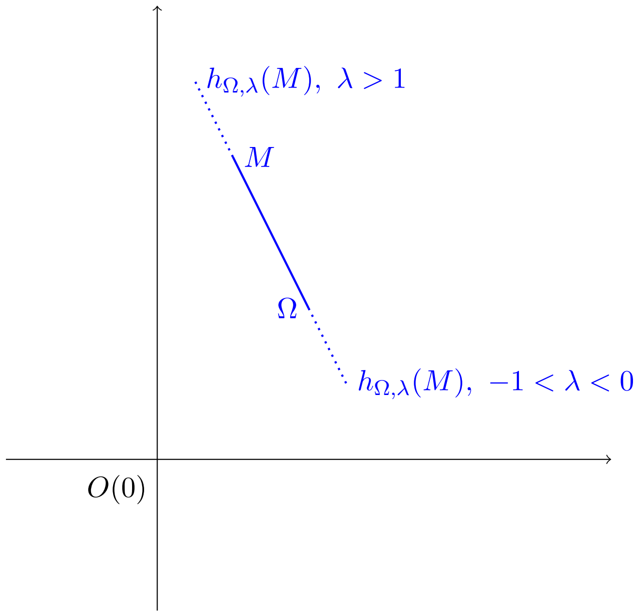

FIGURE 6 – Quelques homothéties de centre Ω.

Remarque 6.2.4.
Si θ est un multiple de 2π, toute rotation d'angle θ est l'identité.

Sinon, une rotation d'angle θ n'a qu'un point fixe : son centre.

Enfin, si $\theta = \pi\ [2\pi]$, la rotation d'angle θ et de centre Ω est la symétrie (centrale) par rapport à Ω.

Définition 6.2.5 (Homothétie)**.**
Soit Ω un point du plan, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

L'homothétie de centre Ω et de rapport λ est l'application qui envoie tout point M sur la point M' vérifiant $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$ (voir figure 6). On la note souvent $h_{\Omega,\lambda}$.

Remarque 6.2.6.
Si $\lambda = 1$, toute homothétie de rapport λ est l'identité.

Sinon, une homothétie de rapport λ n'a qu'un point fixe : son centre.

Si $\lambda = 0$, l'homothétie de rapport λ et de centre Ω envoie tout point sur Ω. Enfin, l'homothétie de rapport -1 et de centre Ω est la symétrie (centrale) par rapport à Ω.

Théorème 6.2.7.
Soit M un point d'affixe z, et Ω un point d'affixe ω.

1. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur d'affixe u. L'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour affixe le nombre complexe $z + u$;
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport λ a pour affixe le nombre complexe $\omega + \lambda(z - \omega)$;
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. L'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle de mesure θ a pour affixe le nombre complexe $\omega + \mathrm{e}^{i\theta}(z - \omega)$. En particulier, iz est l'affixe de l'image de M par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$;
4. L'image de M par la symétrie centrale de centre O a pour affixe le nombre complexe $-z$;

5. L'image de M par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses (Ox) a pour affixe le nombre complexe $\overline{z}$;
6. L'image de M par la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées (Oy) a pour affixe le nombre complexe $-\overline{z}$.

Démonstration. 1. L'image M' de M est telle que $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{u}$. On traduit cela en termes d'affixes.
2. $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$, donc $z' - \omega = \lambda(z - \omega)$.
3. $\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}) = \theta[2\pi]$, donc $|z - \omega| = |z' - \omega|$ et $\arg(z' - \omega) - \arg(z - \omega) = \theta[2\pi]$, d'où $z' - \omega = \mathrm{e}^{i\theta}(z - \omega)$.
4. C'est une homothétie de centre O et de rapport -1.
5. Déjà vu.
6. On compose.

□

Exemple 6.2.8. 1. L'homothétie de centre $(2 - i)$ et de rapport 3 s'écrit : $z \mapsto 3(z - 2 + i) + 2 - i = 3z - 4 + 2i$.
2. La rotation de centre 0 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ s'écrit $z \mapsto iz$.
3. La rotation de centre $(1 + i)$ et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ s'écrit $z \mapsto j(z - 1 - i) + 1 - i$.

Exercice 6.2.9.
Soit quatre points du plan $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ et $D(d)$.

1. On suppose que $ABCD$ est un carré et que a et b ont des parties imaginaires et réelles entières. Montrer qu'il en est de même pour c et d.
2. On suppose que ABC est un triangle équilatéral et que a et b ont des parties imaginaires et réelles entières. Peut-il en être de même pour c ?

6.3. Similitudes et isométries

Définition 6.3.1.
Soit $\lambda > 0$. On appelle *similitude (plane) de rapport* λ toute application f du plan dans lui-même telle que pour tous points M, N on ait :

$$f(M)f(N) = \lambda MN.$$

On appelle *isométrie (plane)* toute application f du plan dans lui-même telle que pour tous points M, N on ait :

$$f(M)f(N) = MN.$$

Remarque 6.3.2. 1. Comme le nom l'indique (racines grecques), les isométries préservent les distances.
2. Les isométries sont les similitudes de rapport 1.
3. La composée de deux isométries est une isométrie.
4. La composée de deux similitudes est une similitude de rapport le produit des rapports de celles-ci.
5. Il est clair que toute similitude est injective. On verra ci-dessous que toute similitude est en fait bijective.

Exemple 6.3.3.
Les translations, les rotations, les symétries et les homothéties sont des similitudes.

Dans la suite de ce chapitre, on identifiera le plan complexe et $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'on identifiera un point avec son affixe. Les applications du plan dans lui-même sont donc les applications de $\mathbb{C}$ dans lui-même. En ce qui concerne les similitudes, on a alors le résultat suivant :

Théorème 6.3.4. 1. Les similitudes planes sont exactement toutes les applications de la forme $z \mapsto az+b$ ou $z \mapsto a\overline{z}+b$, où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a \neq 0$.
2. Les isométries planes sont exactement toutes les applications de la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\overline{z} + b$, où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, et $|a| = 1$.

Démonstration.
Soit f une application de la forme $z \mapsto a\overline{z}+b$, où $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ avec a non nul.

Alors, soit $(z,z') \in \mathbb{C}^2$. On a $|f(z') - f(z)| = |a|\left|\overline{z'} - \overline{z}\right| = |a||z' - z|$. Donc f est une similitude de rapport $|a|$.

De même, toute application f de la forme $z \mapsto az+b$, où $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $a \neq 0$ est également une similitude de rapport $|a|$.

Donc les application de la forme données dans l'énoncé du théorème sont bien des similitudes dans le cas général et des isométries dans le cas où $|a| = 1$.

Il reste à montrer que toutes les similitudes et les isométries sont de la forme donnée dans l'énoncé.

1. Remarquons tout d'abord qu'il existe une unique isométrie plane fixant 0, 1 et i. En effet, soit f une telle isométrie, c'est-à-dire vérifiant $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(i) = i$.

   Alors, soit $z \in \mathbb{C}$. z s'écrit sous la forme $x + iy$ et $f(z)$ sous la forme $x' + iy'$ où $(x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4$.

   On a $|f(z) - f(0)| = |z - 0|$, donc $x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$.

   De plus $|f(z) - f(1)| = |z - 1|$, donc $(x'-1)^2 + y'^2 = (x-1)^2 + y^2$.

   Par soustraction de ces deux égalités, on déduit $x' = x$.

   En outre, $|f(z) - f(i)| = |z - i|$, donc $x'^2 + (y'-1)^2 = x^2 + (y-1)^2$.

   Par soustraction de cette égalité à la première, on déduit $y' = y$.

   On a donc $f(z) = z$.

   On pouvait aussi raisonner géométriquement : $f(z)$ appartient au cercle de centre 0 et de rayon $|z|$, au cercle de centre 1 et de rayon $|z - 1|$ ainsi qu'au cercle de centre i et de rayon $|z - i|$. Le centre d'un cercle est toujours sur la médiatrice d'une de ses cordes. Les centres des trois cercles précédents n'étant pas alignés, ces cercles ne peuvent donc s'intersecter en plus d'un point. Or il y a un point évident en commun à ces cercles : z. Ainsi, $f(z) = z$.

   Donc f est nécessairement l'identité.

   Réciproquement l'identité est bien une isométrie fixant 0, 1 et i.

2. Montrons maintenant qu'il existe deux isométries planes et deux seulement fixant 0 et 1. Soit f une telle isométrie. $f(i)$ s'écrit sous la forme $x + iy$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   On a $|f(i) - f(0)| = |i - 0| = 1$, donc $x^2 + y^2 = 1$. De plus $|f(i) - f(1)| = |i - 1|$, donc $(x-1)^2 + y^2 = 2$.

   On peut déterminer $f(i)$ géométriquement, comme lieu d'intersection du cercle de centre 0 et de rayon 1 avec celui de centre 1 et de rayon $\sqrt{2}$ (voir figure 7).

   On peut aussi calculer : par soustraction de ces deux égalités, on a donc $2x - 1 = -1$, donc $x = 0$. On en déduit $y^2 = 1$, donc $y = 1$ ou $y = -1$.

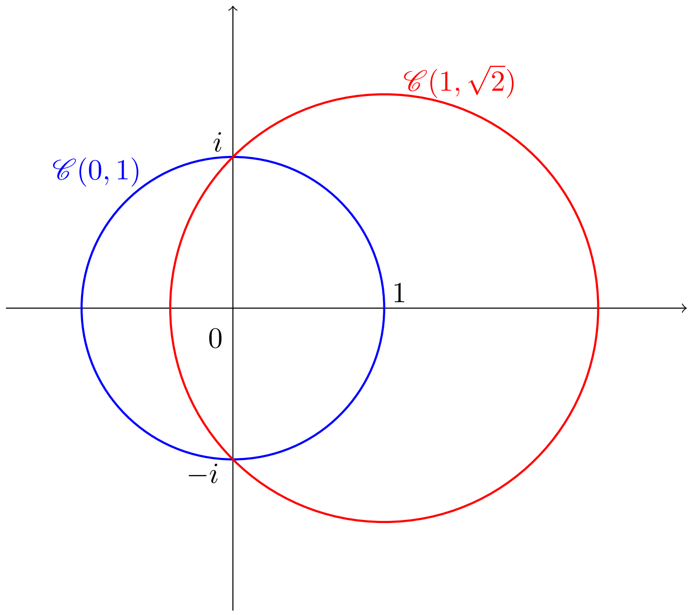

FIGURE 7 – Détermination de $f(i)$.

   Si $y = 1$, alors $f(i) = i$ et d'après ce qui précède, f est nécessairement l'identité.

   Sinon, $y = -1$ et $f(i) = -i$. Notons $s : z \mapsto \overline{z}$. s est bien une isométrie donc $s \circ f$ est une isométrie. Or $s \circ f$ fixe 0, 1 et i. Donc c'est l'identité : $s \circ f = \mathrm{Id}$, donc $s \circ s \circ f = s \circ \mathrm{Id}$, donc $f = s$.

   On a donc $f = \mathrm{Id}$ ou $f = s$.

   Réciproquement s et Id sont bien des isométries fixant 0 et 1.

3. Montrons maintenant que toute similitude fixant 0 est de la forme $z \mapsto az$ ou de la forme $z \mapsto a\overline{z}$ avec $a \neq 0$.

   Soit f une telle similitude. Alors posons $a = f(1)$. On a $f(0) = 0$ et f est injective donc $a \neq 0$. De plus, $|f(1) - f(0)| = |a|$, donc f est de rapport $|a|$.

   Notons alors h la similitude $z \mapsto z/a$, de rapport $1/|a|$, et $g = h \circ f$. Alors $g : z \mapsto \dfrac{f(z)}{a}$, et c'est une similitude en tant que composée de similitudes. Son rapport est le produit des rapports de h et de f, c'est-à-dire 1 : c'est une isométrie.
   De plus, elle fixe 0 et 1.
   On a donc $g = \mathrm{Id}$ ou $g = s$ (où $s : z \mapsto \overline{z}$).

   On en déduit que f est l'application $z \mapsto az$ ou $z \mapsto a\overline{z}$.

4. Montrons maintenant le résultat. Soit f une similitude. Alors posons $b = f(0)$ et $g : z \mapsto z - b$. $g \circ f$ est une similitude fixant 0, donc est de la forme $z \mapsto az$ ou $z \mapsto a\overline{z}$. En composant à gauche par $z \mapsto z + b$, on en déduit que f est de la forme $z \mapsto az + b$ ou de

la forme $z \mapsto a\overline{z} + b$ avec $a \neq 0$.
Dans les deux cas, le rapport de la similitude est $|a|$. Si f est de plus une isométrie, on a donc de plus $|a| = 1$.

□

Définition 6.3.5 (Similitude directe/indirecte)**.** On distingue les similitudes directes et indirectes :

1. Toute similitude plane de la forme $z \mapsto az+b$, avec $a, b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$ préserve les angles orientés de vecteurs, et est dite *directe*.
2. Toute similitude plane de la forme $z \mapsto a\overline{z}+b$, avec $a, b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$ renverse les angles orientés de vecteurs, et est dite *indirecte*.

Démonstration.

1. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq 0$ et soit f la similitude $z \mapsto az + b$. Soient en outre u, v et w trois points distincts. Leurs images respectives par f sont notées u', v' et w'. Alors
$$\frac{u'-w'}{u'-v'} = \frac{(au+b)-(aw+b)}{(au+b)-(av+b)} = \frac{a(u-w)}{a(u-v)} = \frac{u-w}{u-v}$$
d'où égalité des arguments de ces expressions, et l'égalité des angles recherchée.
2. On obtient, de la même façon,
$$\frac{u'-w'}{u'-v'} = \overline{\left(\frac{u-w}{u-v}\right)}$$
d'où le résultat.

□

Exemple 6.3.6.
Translations, rotations et homothéties vs. symétries axiales.

Théorème 6.3.7 (Caractérisation géométrique)**.** Toute similitude plane directe est soit une translation, soit la composée d'une homothétie de rapport strictement positif et d'une rotation de même centre. Dans ce second cas, si f est la composée d'une homothétie de centre ω et de rapport $\lambda > 0$, et d'une rotation de centre ω et d'angle de mesure θ, alors on dit que f est la *similitude (directe) de centre ω, de rapport λ et d'angle de mesure θ.*

Toute isométrie plane directe est soit une translation, soit une rotation.

Démonstration.
Soient $(a, b) \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq 0$ et soit f la similitude $z \mapsto az + b$. Si $a = 1$, alors f est une translation de vecteur d'affixe b. Supposons donc que $a \neq 1$. Alors f possède un unique point fixe, $\omega = \dfrac{b}{1-a}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
f(z) - \omega &= f(z) - f(\omega) \\
&= (az+b) - (a\omega + b) \\
&= a(z-\omega) \\
&= \underbrace{|a| \times \underbrace{\left(e^{i \arg a}(z-\omega)\right)}_{\text{rotation de centre } \omega \text{ et d'angle de mesure } \arg a}}_{\text{homothétie de centre } \omega \text{ et de rapport } |a|>0} \\
&= \underbrace{e^{i \arg a} \times \underbrace{\left(|a|(z-\omega)\right)}_{\text{homothétie de centre } \omega \text{ et de rapport } |a|>0}}_{\text{rotation de centre } \omega \text{ et d'angle de mesure } \arg a}
\end{aligned}$$

Le résultat sur les isométries découle immédiatement de celui sur les similitudes. □

Exemple 6.3.8.
L'application $f \;\; z \mapsto (1+i)z + 2$ est la similitude directe de centre $2i$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{4}$.