Devoir facultatif n° 8

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E.
Un sous-espace vectoriel V de E est dit *stable* par u lorsque pour tout $x \in V$, on a $u(x) \in V$.
Lorsque qu'un sous-espace vectoriel V est stable par u, on peut considérer la restriction de u à V notée $u|_V \ : \ V \to V$. Il est clair que $u|_V$ est un endomorphisme de V.
Pour $n \in \mathbb{N}$, u^n désigne l'endomorphisme défini par récurrence par : $u^0 = \mathrm{Id}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^{n+1} = u \circ u^n$ (où Id désigne l'endomorphisme identité de E).

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n = \operatorname{Im} u^n$ et $G_n = \operatorname{Ker} u^n$.

- **a)** Par quel argument simple peut-on affirmer que F_n et G_n sont des sous-espaces vectoriels de E ?
- **b)** Montrer que les suites de sous-espaces vectoriels (F_n) et (G_n) sont respectivement décroissante et croissante pour l'inclusion.

2) On pose $F = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ et $G = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} G_n$.

- **a)** Établir que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
- **b)** Montrer que F et G sont stables par u.
- **c)** Déterminer F et G lorsque u est un automorphisme de E.

3) Dans cette question, on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $F_{n+1} = F_n$.

- **a)** Établir que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $F_{n+p} = F_n$.
- **b)** Justifier de l'existence d'un plus petit entier $m \in \mathbb{N}$ vérifiant $F_{m+1} = F_m$.

Celui-ci sera désormais noté $r(u)$.

- **c)** À partir de quel terme la suite (F_n) est-elle égale à F ?
- **d)** Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $u^{r(u)}(x) = u^{2r(u)}(a)$. On pose alors $y = u^{r(u)}(a)$ et $z = x - y$. Montrer que $z \in G_{r(u)}$. En déduire que $E = F + G_{r(u)}$.

4) Dans cette question, on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $G_{n+1} = G_n$.

- **a)** Établir que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $G_{n+p} = G_n$.
- **b)** Justifier l'existence d'un plus petit entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $G_{m+1} = G_m$.

Celui-ci sera désormais noté $s(u)$.

- **c)** À partir de quel terme la suite (G_n) est-elle égale à G ?
- **d)** Montrer que $F_{s(u)} \cap G = \{0\}$.

5) À la lumière des questions précédentes (on supposera que les hypothèses des parties **3)** et **4)** sont vérifiées) :

- **a)** Montrer que $E = F \oplus G$.
- **b)** Montrer que $s(u) = r(u)$.

— **FIN** —