**Devoir surveillé n° 05 - Remarques**

# Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 26 points, ramené sur 5 points.
- Problèmes : exercice vu en TD sur 8 points, et les autres questions sur 4 points, ramené sur 15 points.

# Statistiques descriptives.

| | Calculs | Sujet 1 (sur 60) | Sujet 2 (sur 80) | Note finale |
|---|---|---|---|---|
| Note maximale | 20 | 33 | 60 | 19 |
| Note minimale | 1 | 2 | 20 | $2,5$ |
| Moyenne | $\approx 9,26$ | $\approx 16,23$ | $\approx 32,25$ | $\approx 9,23$ |
| Écart-type | $\approx 4,25$ | $\approx 8,39$ | $\approx 10,75$ | $\approx 3,32$ |

# I. Version 1.

## A). Exercice vu en TD.

Vous avez été relativement peu à l'aborder, et ce n'est pas normal. J'ai bien peur que vous ne pensiez dans votre tête quelque chose comme « cet exo j'y ai goûté, je n'aime pas, je vais essayer le reste, on ne sait jamais, avec de la chance ce sera meilleur ». Malheureusement la suite n'était pas plus facile qu'un exo plutôt simple à la base, et déjà traité en TD de surcroît ...
Ceux qui l'ont traité l'ont en général plutôt bien fait, mais surtout n'oubliez pas les hypothèses avant d'utiliser le théorème de Rolle (celles concernant la continuité et la dérivabilité, car bien sûr l'autre hypothèse n'est jamais oubliée).
J'ai tout de même rencontré plusieurs fois une erreur assez impressionnante : $g(c) = 0$ donc $g'(c) = 0$ ! En effet, c'est bien normal, quand on dérive 0 on obtient 0, donc $g'(c) = 0$. Par exemple, $\sin(0) = 0$, donc $\sin'(0) = 0$, donc $\cos(0) = 0$, c'est bien connu. Plus visuel : toute fonction qui coupe l'axe des abscisses a une tangente horizontale en ce point d'intersection, c'est bien connu aussi.
D'ailleurs, en poussant le raisonnement, si on avait eu $g(c) = 2$, on aurait aussi eu $g'(c) = 0$ tout pareil, car la dérivée de 2 est 0. Finalement, pour n'importe quelle fonction, on obtient par ce raisonnement que sa dérivée est nulle, donc toutes les fonctions sont constantes.
Cette même erreur est aussi apparue dans le problème sur l'interpolation de Hermite : $Q_i(x_k) = 0$ donc $Q_i'(x_k) = 0$.

## B). Interpolation polynomiale de Hermite.

**1.a)** S'il faut montrer $A \Rightarrow B$, vous pouvez raisonner par contraposition : il s'agit alors de montrer que $\neg B \Rightarrow \neg A$. Vous pouvez aussi raisonner par l'absurde : il s'agit alors de montrer que $A \wedge \neg B$ mène à une contradiction. Mais montrer $\neg A \Rightarrow \neg B$ ne sert absolument à rien. Ce sont les outils logiques de base, il faut les maîtriser.

J'ai aussi rencontré beaucoup d'erreurs de cours : « $P$ et $Q$ ne sont pas premiers entre eux donc $P|Q$ » ou « donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $P = \lambda Q$ ».

**1.b)** Il est stupéfiant qu'une question de cours aussi basique ait été aussi mal traitée.

**2)** Définir $Q$ et $P$ avant l'hypothèse de récurrence n'a aucun sens. $P$ et $Q$ dépendent de $n$ ! Vous vous retrouvez alors à vouloir montrer $(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$ avec le même polynôme $Q$ dans les deux énoncés, mais avec des $n$ différents et pourtant les mêmes ... n'importe quoi. $Q$ et $P$ doivent être définis dans l'énoncé de l'hypothèse de récurrence.

**3.a)** Une erreur quasi-systématique pourtant déjà signalée en interro de cours : vous ne pouvez pas écrire la formule de Taylor $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$ sans dire qui est $n$ ! Déjà, utiliser une variable sans l'avoir introduite n'a aucun sens. De plus, $n$ peut être n'importe quel entier supérieur au degré de $P$, mais si $n < \deg P$, cette formule est tout à fait fausse.
Enfin, dans cette question il s'agissait de démontrer un résultat du cours ; c'était une question de cours. Dire « $a$ est racine double donc $(X-a)^2|P$ » ne répondait donc pas à la question.

**3.b)** Les questions où il s'agit de montrer qu'une application est un morphisme sont de purs cadeaux. Si vuos conaissez la définition, il n'y a aucune difficulté.

**3.c)** Utilisez le noyau ...
Cette question est l'occasion de donner un exemple d'erreur qui ne devrait pas être vue, et qui a pourtant surgi plusieurs fois : la résolution commence par « soit $P, Q \in \mathbb{R}_{2p-1}[X]$ tels que $\varphi(P) = \varphi(Q)$ », ensuite il est bien remarqué que $P$ et $Q$ ont $p$ racines communes, et là la fantasmagorie commence : déjà le fait que $P'$ et $Q'$ aient aussi $p$ racines communes n'est pas exploité, ce qui devrait tout de même paraître suspect, et surtout la conclusion est « $\deg P < p$ et $\deg Q < p$ donc $P = Q$ », alors que deux lignes plus haut on avait « $P, Q \in \mathbb{R}_{2p-1}[X]$ » ! C'est typiquement dans ce genre de cas que je vous écris en remarque : « soyez plus attentifs ». Réfléchissez à ce que vous écrivez à chaque fois que vous posez le stylo sur votre copie, relisez-vous, faites ce que vous voulez mais il est franchement dommage de laisser passer des erreurs comme celle-là.

**3.d)** Question cadeau ! C'est juste la bijectivité de $\varphi$, rien d'autre. Et pourtant, cette question a posé de gros problèmes.

**4)** Résolution d'un système $4 \times 4$ dont les coefficients ne sont que des 0, des 1, des 2 ou des 3. Cela ne devrait poser aucun problème, mais là encore, le taux d'échec est effrayant.

**6.c)** Si vous vouliez calculer $P(x_i)$, il ne fallait surtout pas appeler $i$ l'indice de la somme ! Vous vous retrouviez alors avec deux objets différents portant le même nom, et ensuite c'est tout à fait folkorique. À la fin ceux qui ont fait cela aboutissent à $P(x_i) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_i$ et concluent allégrement que tout va bien ! Mais il fallait montrer que $P(x_i) = a_i$ ; trouver autre chose aurait quand même dû vous intriguer.

# II. Version 2.

Ce problème n'a pas donné lieu à des erreurs récurrentes. Vous avez grosso modo traité les mêmes questions, sans réellement écrire d'horreurs. Par contre il y a beaucoup d'affirmations non justifiées, ou alors des justifications très peu convaincantes, soit peu claires soit incomplètes.