

Feuille d'exercice n° 30 : **Fonctions de deux variables**

Exercice 1 (✎) Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

Exercice 2 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = |x|^y$, avec la convention $0^0 = 1$.
En quels points la fonction f est-elle continue ?

Exercice 3 (✎) Étudier l'existence et, le cas échéant, calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

1) $f(x, y) = 2xy^3 - 3y$

2) $g(x, y) = \max(|x|, |y|)$

3) $h(x, y) = \sqrt{1 + x^2 y^2}$

Exercice 4 On définit sur \mathbb{R}^2 la fonction f par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{|x| + |y|} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}.$$

La fonction f est-elle continue ? De classe \mathcal{C}^1 ?

Exercice 5 (✎) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Déterminer les dérivées (éventuellement partielles) des fonctions suivantes.

1) $g : x \mapsto f(x, x)$

2) $h : (x, y) \mapsto f(y, f(x, x))$

Exercice 6 – **Fonctions positivement homogènes** –

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction f est dite *positivement homogène de degré α* si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y).$$

- 1) Donner un exemple de fonction positivement homogène (avec son degré), et un exemple de fonction non homogène.
- 2) Montrer que si f est positivement homogène de degré α , alors ses dérivées partielles sont positivement homogènes de degré $\alpha - 1$.
- 3) Montrer que f est positivement homogène de degré α si et seulement si f vérifie la relation d'Euler :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y).$$

Indication : étudier $\varphi : t \mapsto f(tx, ty)$.

Exercice 7 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre sur \mathbb{R}^2 l'équation aux dérivées partielles suivantes, en utilisant le changement de variables $u = x + y$ et $v = x - y$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda.$$

Exercice 8 (🚲) – **Coordonnées polaires** –

On définit $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}_-\}$. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , on définit sur $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$ la fonction

$$g : (r, \theta) \mapsto f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$

- 1) Représenter D et montrer que D est un ouvert de \mathbb{R}^2 .
- 2) Justifier que g est de classe \mathcal{C}^1 .
- 3) Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f , et réciproquement.
- 4) *Exemple* : dériver $u \mapsto \|u\|$ en coordonnées cartésiennes et en coordonnées polaires.
- 5) *Application* : résoudre sur D les équations aux dérivées partielles suivantes, en utilisant les coordonnées polaires.

a) $x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = 0$

b) $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}.$

Exercice 9 (📎) Étudier les extremums globaux des fonctions suivantes.

- 1) $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3$, sur \mathbb{R}^2 .
- 2) $g : u \mapsto \|u\|^2 + \sin(\|u\|^2)$, sur $] -1, 1[^2$.
- 3) $h : (x, y) \mapsto x^2 + 3y^2 - 2x - 10y + 2xy + 6$ sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 10 On note

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < y < 1 \right\},$$

$$\overline{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq y \leq 1 \right\}.$$

On admet que D est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

- 1) Représenter D et \overline{D} .
- 2) Étudier sur \overline{D} les extremums de la fonction

$$f : (x, y) \mapsto x^3 + 5y^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 3y^2.$$

