

Devoir facultatif n° 2

On définit par récurrence les fonction $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ de la façon suivante.

- Si $x \in [0, 1]$, $f_0(x) = x$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, si f_n est construite alors $f_{n+1}(1) = 1$ et :
 - pour tout $k \in \{0, 1, \dots, 3^{n+1} - 1\}$, f_{n+1} est affine sur $\left[\frac{k}{3^{n+1}}, \frac{k+1}{3^{n+1}}\right]$;
 - pour tout $k \in \{0, 1, \dots, 3^n - 1\}$, $f_{n+1}\left(\frac{k}{3^n}\right) = f_n\left(\frac{k}{3^n}\right)$;
 - pour tout $k \in \{0, 1, \dots, 3^n - 1\}$, $f_{n+1}\left(\frac{k}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) = f_n\left(\frac{k}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}}\right)$;
 - pour tout $k \in \{0, 1, \dots, 3^n - 1\}$, $f_{n+1}\left(\frac{k}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}}\right) = f_n\left(\frac{k}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}\right)$.

I – Définition de f .

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, 1, \dots, 3^n - 1\}$. Connaissant

$$x_{n,k} = \frac{k}{3^n} \quad \text{et} \quad y_{n,k} = \frac{k+1}{3^n},$$

ainsi que

$$x'_{n,k} = f_n(x_{n,k}) \quad \text{et} \quad y'_{n,k} = f_n(y_{n,k}),$$

tracer le graphe de f_{n+1} sur $[x_{n,k}, y_{n,k}]$.

- 2) Avec les mêmes notations et en s'appuyant sur le tracé précédent, montrer les propriétés suivantes.

- a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0, 1]$.
- b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $k \in \llbracket 0; 3^n - 1 \rrbracket$ et tout $m \geq n$,

$$f_m([x_{n,k}, y_{n,k}]) = \left[\min(x'_{n,k}, y'_{n,k}); \max(x'_{n,k}, y'_{n,k}) \right]$$

On remarquera que l'on en déduit que

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0; 3^n - 1 \rrbracket, \forall x \in [x_{n,k}, y_{n,k}], \\ \forall m \geq n, f_m(x) \in \left[\min(x'_{n,k}, y'_{n,k}); \max(x'_{n,k}, y'_{n,k}) \right]. \end{aligned}$$

c) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0; 3^n - 1 \rrbracket, |x'_{n,k} - y'_{n,k}| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n.$

3) Dessiner sur une même figure les graphes de f_0, f_1, f_2, f_3 .

4) Soit $x \in [0, 1[$.

a) Montrer qu'il existe une unique suite d'entiers $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{k_n}{3^n} \leq x < \frac{k_n + 1}{3^n}.$$

b) Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = \frac{k_n}{3^n}$ et $y_n = \frac{k_n + 1}{3^n}$, ainsi que $x'_n = f_n(x_n)$ et $y'_n = f_n(y_n)$. Montrer que les suites de termes généraux respectifs $\min(x'_n, y'_n)$ et $\max(x'_n, y'_n)$ sont adjacentes.

Dorénavant, nous noterons $f(x)$ leur limite commune et l'on pose $f(1) = 1$.

II – Continuité de f .

5) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], |f_n(x) - f(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

6) Montrer que la fonction f est continue sur $[0, 1]$.

Indication : on pourra utiliser, en la justifiant, l'inégalité

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|.$$

III – Dérivabilité de f .

7) Montrer que, pour toute fonction numérique g continue, définie au voisinage d'un réel x_0 , pour tout $\ell \in \mathbb{R}$, g est dérivable en x_0 et $g'(x_0) = \ell$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall h, k > 0, 0 < h + k < \alpha \Rightarrow \left| \frac{g(x_0 + h) - g(x_0 - k)}{h + k} - \ell \right| < \varepsilon.$$

8) Soit $x \in]0, 1[$. Avec les notations de la partie 4), on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D_n = 3^n(y'_n - x'_n).$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_{n+1} = 2D_n$ ou $D_{n+1} = -D_n$.

9) En déduire que (D_n) n'admet pas de limite finie puis que f n'est dérivable en aucun point de $[0, 1]$.

V – Allure de f .

10) Montrer que f n'est monotone sur aucun sous intervalle de $[0, 1]$ non vide et non réduit à un point.

11) Écrire une fonction `f(n)` en Python, prenant en entrée un entier naturel `n`, et renvoyant en sortie les deux listes contenant 1 et les $x_{n,k}$, et 1 et les $x'_{n,k}$.

Par exemple, `f(0)` renverra le couple $([0, 1], [0, 1])$.

On joindra un tracé du graphe de f_7 .

— FIN —