Devoir surveillé n° 6
– Version 1 –
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Étant donné α dans $]0,1[$, montrer que pour tout entier naturel n non nul

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leqslant (n+1)^\alpha - n^\alpha \leqslant \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

En déduire la limite de la suite de terme général $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^\alpha}$.

II. Polynômes de Tchebychev.

On définit la suite de polynômes de Tchebychev, notée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$, par :

$$P_0 = 1, \qquad P_1 = X, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n.$$

On dit qu'un polynôme P est pair si $P(-X) = P$, impair si $P(-X) = -P$.

1) **a)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré n.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n a pour coefficient dominant 2^{n-1}.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n est de même parité que n.

d) Calculer $P_n(1)$, $P_n(-1)$ et $P_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e) Soit $x \in \mathbb{R}$, quelle relation de récurrence vérifie la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$? En déduire la valeur de $P_n(x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On discutera les trois cas suivants.

i) Si $|x| > 1$.

ii) Si $|x| = 1$.

iii) Si $|x| < 1$.

2) **a)** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ P_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant la relation : $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ P_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$.

c) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, toutes les racines de P_n.

d) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, toutes les racines de P_n'.

3) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n \wedge P_{n+1} = 1$.

4) Écrire dans le langage Python une fonction `Tchebychev(n)`, prenant en argument un entier naturel `n` et renvoyant la liste des coefficients de $P_{\mathtt{n}}$. Ainsi, `Tchebychev(2)` renverra `[2,0,-1]`, car $P_2 = 2X^2 - 1$.
Bien entendu, toutes les boucles seront accompagnées de leurs invariants respectifs.

III. Méthode de Newton.

Soit un réel $a \in]0, 29[$, on considère la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ H(t) = 10\ t^3 + 31\ t^2 + 71\ t - a.$$

1) **a)** Montrer qu'il existe un unique réel noté ℓ tel que $H(\ell) = 0$.

b) Montrer que $\ell \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$.

2) On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$.
Pour tout entier n, u_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe d'équation $y = H(x)$, au point de coordonnées $(u_n, H(u_n))$.

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - \frac{H(u_n)}{H'(u_n)}.$$

b) Déterminer le sens de variation de l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t - \dfrac{H(t)}{H'(t)} \end{array} \right.$.

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\ell, \frac{1}{2}\right].$$

c) Soit $x, y \in \left[\ell, \frac{1}{2}\right]$ avec $x \neq y$, soit $A \in \mathbb{R}$, posons

$$g : \left| \begin{array}{ccc} \left[\ell, \dfrac{1}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & H(x) - H(t) - (x-t)H'(t) - \dfrac{(x-t)^2}{2}A \end{array} \right. .$$

Déterminer A de manière à ce que $g(x) = g(y) = 0$.

d) En déduire que, pour tout $x, y \in \left[\ell, \frac{1}{2}\right]$, il existe $c \in \left[\ell, \frac{1}{2}\right]$ tel que

$$H(x) = H(y) + (x-y)H'(y) + \frac{(x-y)^2}{2}H''(c).$$

e) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |H(\ell) - H(u_n) - (\ell - u_n)H'(u_n)| \leqslant 46|u_n - \ell|^2.$$

f) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{46\ |u_n - \ell|^2}{71},$$

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{7\ |u_n - \ell|^2}{10}.$$

g) Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?

h) Pour tout réel $a \in]0, 29[$, vérifier que u_2 est une valeur approchée de ℓ à 3×10^{-2} près.

3) Application informatique. On utilisera le langage `Python` sans aucune bibliothèque supplémentaire.
Écrire une fonction `suite(a,n)` en langage `Python` qui prend en entrée le paramètre a et un entier n et qui renvoie la liste $[u_0, u_1, \ldots, u_n]$ des $n+1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la question **2)**.

— **FIN** —