

Feuille d'exercice n° 04 : **Nombres complexes**

Exercice 1 (✎) Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

1) $\frac{1+2i}{3-4i}$

3) $\frac{(1+i)^3}{(1-i)^2}$

5) $\frac{1}{1+\frac{2}{i}}$

2) $\frac{1}{(1+2i)^2}$

4) $\frac{1+i}{3-i} + \frac{1-i}{3+i}$

6) $(1 + (1 + (1 + 2i)^2)^{-1})$

Exercice 2 Montrer que pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$, il existe $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = m^2 + n^2.$$

Exercice 3 Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $z = \frac{1 + \cos \theta + i \sin \theta}{1 - \cos \theta - i \sin \theta}$. Calculer $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$.

Exercice 4 (✎) Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

1) $(\sqrt{3} - i)^{11}$

2) $(-1 + i)^{17}$

3) $(1 + i\sqrt{3})^{-42}$

Exercice 5 (📐) Résoudre pour $z \in \mathbb{C}$, $2\arg(z+i) = \arg(z) + \arg(i)$ $[2\pi]$.

Exercice 6 Soient z_1 et z_2 deux complexes de module 1, tels que $1 + z_1 z_2 \neq 0$. Montrer que

$$\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7 Soit $a \in [0; 2\pi[$ et n un entier naturel. Déterminer le module et l'argument de $(1 + ie^{ia})^n$.

Exercice 8 Soit $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{7}\right)$. Calculer $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

(Indication : on pourra d'abord calculer AB et $A + B$.)

Exercice 9 (🚲) Déterminer les racines 4^{es} dans \mathbb{C} de $-119 + 120i$

Exercice 10 (📐) Soit $(n, z) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{C}$ tel que $z^n = (z+1)^n = 1$. Montrer que n est multiple de 6 et que $z^3 = 1$.

Exercice 11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation d'inconnue x : $(1+x)^{2n} = (1-x)^{2n}$. Calculer alors le produit des solutions de cette équation.

Exercice 12 (✎) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1) Écrire $-i$ et $1+i$ sous forme trigonométrique.

2) Calculer les racines n^{es} de $-i$ et de $1+i$.

3) Résoudre $z^2 - z + 1 - i = 0$.

4) En déduire les racines de $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$.

Exercice 13 () Soit n un entier naturel non nul, notons $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^n.$$

Exercice 14 Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $\bar{z} = z^3$.

Exercice 15 Résoudre dans \mathbb{C} l'équation d'inconnue z : $z^4 + 2\lambda^2 z^2 (1 + \cos \theta) \cos \theta + \lambda^4 (1 + \cos \theta)^2 = 0$ ($\lambda \in \mathbb{C}, \theta \in [0, \pi]$). Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=1}^4 z_k^n$ où les z_k sont les racines de cette équation.


Exercice 16

- 1) Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
- 2) Calculer les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.


Exercice 17

- 1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.
- 2) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est racine du polynôme $16X^4 - 20X^2 + 5$.
- 3) En déduire la valeur de $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$.
- 4) Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

Exercice 18 () Calculer $\cos 5\theta, \cos 8\theta, \sin 6\theta, \sin 9\theta$, en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

Exercice 19 () Linéariser les quantités suivantes.

- 1) $\cos^3(x) \sin^2(x)$.
- 2) $\cos^6(x) + \sin^6(x)$.

Exercice 20 () Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(a + kb)$ et $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(a + kb)$.

Exercice 21 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z vérifiant chacune des équations suivantes.

- 1) $\left| \frac{z-3}{z-5} \right| = 1$
- 2) $\left| \frac{z-3}{z-5} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 22 Quel est l'ensemble des nombres complexes z tels que $\frac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pur ?

Exercice 23 Déterminer les points d'affixe $z \in \mathbb{C}$ vérifiant chaque situation.

- 1) 1, z et z^2 soient les affixes de trois points alignés.
- 2) z et $\frac{1}{z}$ soient les affixes de deux vecteurs orthogonaux.
- 3) 1, z et $z+i$ soient les affixes des sommets d'un triangle dont le centre du cercle circonscrit est l'origine O du repère.
- 4) $z, \frac{1}{z}$ et $z-1$ soient les affixes de trois points situés sur un même cercle de centre O .

Exercice 24 Soient A , B et C trois points, distincts deux à deux, d'affixes respectifs a , b et c . Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

- 1) ABC est un triangle équilatéral.
- 2) j ou j^2 est racine du polynôme $aX^2 + bX + c$.
- 3) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.
- 4) $(b - a)^2 + (c - b)^2 + (a - c)^2 = 0$.

Exercice 25 Soit A , B , A' et B' quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Montrer qu'il existe une et une seule similitude directe qui transforme A en A' et B en B' .

Exercice 26 (✎)

- 1) Caractériser géométriquement l'application $\begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto (2 + 2i)z - (7 + 4i) \end{cases}$
- 2) Soit r la rotation de centre le point d'affixe $1 + i$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$. Déterminer l'expression complexe de r .
- 3) Soient r la rotation de centre le point d'affixe 1 et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$, et s la symétrie centrale de centre le point d'affixe $i + 3$. Caractériser géométriquement l'application $s \circ r$.

