DS n°5 : Fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom : | | Note : | |

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

Suites

Donner un exemple de suite réelle sans limite, dont toutes les suites extraites divergent.

$$\boxed{} \quad (1)$$

Déterminer la suite réelle u vérifiant : $u_1 = 7$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 4$.

$$\boxed{}\ . \quad (2)$$

Pour chacune de ces suites définies par récurrence, donner sa limite si elle existe, et écrire Div en cas de divergence sans limite.

$$u_0 = \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{2} \ : \qquad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{} \quad (3)$$

$$v_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \mathrm{e}^{v_n} - 1 \ : \qquad v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{} \quad (4)$$

$$w_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = 1 - 2w_n \ : \qquad w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{} \quad (5)$$

$$z_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n - 2}{z_n + 1 + i} \ : \qquad z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{} \quad (6)$$

Pour chacune de ces suites définies par récurrence, donner l'ensemble maximal auquel appartient le premier terme pour que la suite soit définie.

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1+u_n), \quad u_0 \in \boxed{}$ (7)

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \sqrt{1-v_n}, \quad v_0 \in \boxed{}$ (8)

Groupes

Soit $G = (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \star)$ le groupe défini par $(x,y) \star (x',y') = (xx', x'y + y')$, noté multiplicativement.

$1_G = \boxed{}$. (9) $\quad (x,y)^{-1} = \boxed{}$. (10)

G est-il commutatif (répondre OUI ou NON) ? $\boxed{}$. (11)

Soit l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: $\varphi \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$. Alors

$\operatorname{Ker}\varphi = \boxed{}$ (12)

Limites de fonctions

Donner les limites suivantes (écrire **N'EXISTE PAS** si la limite n'existe pas).

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\ln^3(x) - x\ln^5(x) + 1}{-x\ln(x) + 2} = \boxed{} \quad (13)$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin\left(2x^2 + x\right)}{x^2} = \boxed{} \quad (14)$$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{\ln\left(x - \lfloor x \rfloor\right)}{x} = \boxed{} \quad (15)$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left[\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right] = \boxed{} \quad (16)$$

— **FIN** —