Feuille d'exercice n° 18 : **Fractions rationnelles - Indications**

Exercice 7

1) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\left(X+\dfrac{1}{X}\right)\left(X^n+\dfrac{1}{X^n}\right)-\left(X^{n-1}+\dfrac{1}{X^{n-1}}\right)$.

b) Par récurrence double, montrer, que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que

$$X^n+\frac{1}{X^n}=P_n\left(X+\frac{1}{X}\right).$$

c) Montrer que pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, on a $2\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2}=\left(\mathrm{e}^{\frac{(2k+1)\pi}{2n}}\right)^n+\dfrac{1}{\left(\mathrm{e}^{\frac{(2k+1)\pi}{2n}}\right)^n}$.

d) En déduire n racines distinctes de P_n.

e) Montrer que P_n est unique et donnez sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0,n-1]\!]$. On note $\lambda_k=2\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ et $\mu_k=\mathrm{e}^{\frac{(2k+1)\pi}{2n}}$.

a) Montrer que $nX^n-\dfrac{n}{X^n}=\left(X-\dfrac{1}{X}\right)P_n'\left(X+\dfrac{1}{X}\right)$.

b) Montrer que $\dfrac{1}{P_n'(\lambda_k)}=\dfrac{\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}}{n\sin\frac{(2k+1)\pi}{2}}$.

c) Décomposer $\dfrac{1}{P_n}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

Exercice 1 Montrer que la dérivée d'une fraction rationnelle n'est jamais de degré -1 (relisez une certaine démo du cours !). Puis utilisez la DEES.