

Devoir à la maison n° 16

À rendre le 2 avril

Pour ce DM, vous rendrez un exercice (au choix) si vous le rendez seul, deux exercices (au choix) si vous le rendez en binôme, trois exercices (au choix !) si vous le rendez en trinôme.

I. Premier exercice

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue, vérifiant $\int_0^1 f = \int_0^1 f^2$. Montrer que $f = 0$ ou $f = 1$.

II. Deuxième exercice

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, vérifiant $f(0) = 1$ et $\forall x \geq \frac{1}{2}$, $f(x) = 0$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{\mathbb{R}_+} |f^{(n)}| \geq 2^n n! .$$

III. Troisième exercice

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, A_1, \dots, A_n sont les sommets consécutifs d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n A_1 A_k .$$

— FIN —