Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 point, total sur 28 points, ramené sur 5 points, +10%.
- Problème et exercice de TD : chaque question sur 4 points, total sur 104 points, ramené sur 15 points, +65%.

Statistiques descriptives.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \min\left(\frac{1}{10}\lceil 10x \rceil\,;20\right)$.

	Calculs	Problème	Note finale
Transformation	c	p	$\varphi\left(1,1\frac{5c}{28}+1,65\frac{15p}{104}\right)$
Note maximale	$22,5$	$59,5$	$18,6$
Note minimale	2	14	$4,7$
Moyenne	$\approx 12,42$	$\approx 32,89$	$\approx 10,32$
Écart-type	$\approx 4,85$	$\approx 10,47$	$\approx 3,10$
Premier quartile	9	27	$8,2$
Médiane	$12,5$	32	$10,25$
Troisième quartile	16	38	$11,85$

Remarques générales.

• Ne recopiez pas l'énoncé (*cf.* fiche précédente).
• Je vous demande d'encadrer la *conclusion* de votre réponse, et non une étape intermédiaire, même si c'est la dernière. Certains ont du mal à savoir ce qu'est la conclusion. Un indice : on n'écrit rien après la conclusion ! Si vous sentez le besoin d'ajouter quelque chose, c'est bien que ce que vous avez encadré n'était pas la conclusion demandée.
Pour ceux qui n'en ont pas, merci de ne pas attendre Noël pour vous offrir une règle. Vous avez deux DS de maths d'ici là à encadrer.
• Arrêtez d'utiliser $\Leftrightarrow$ pour exprimer une déduction. Cela a été systématiquement sanctionné.
• Écrire $\sum_{k=1}^{n} u_{k+1} - u_k = \sum_{k=1}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=2}^{n+1} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k = u_{n+1} - u_1$ est franchement dommage : vous passez à côté de la sommation télescopique.
• À chaque fois que vous utilisez un résultat, vous devez le mentionner, y compris pour les décalages d'indices ou les simplifications télescopiques. Ce n'est pas au correcteur de choisir l'argument validant votre manipulation !
• Lorsque vous rédigez un raisonnement par récurrence, l'étape d'écriture de l'hypothèse (primordiale !) a trop souvent été bâclée. Profitez-en pour indiquer clairement le type de récurrence mené (simple, double, forte).
• Dire « Soit $n \in \mathbb{N}$, la suite u est décroissante si $u_{n+1} \leqslant u_n$ » est incorrect : la décroissance d'une telle suite dépendrait juste d'une comparaison à un rang.
• Toute affirmation doit être justifiée. Ceux qui se permettent de sauter ces justifications sont souvent ceux qui ne peuvent se le permettre. Vous gagnez bien plus en détaillant vos réponses.
• La locution « par identification » est interdite. Après avoir justifié une propriété d'unicité, vous pouvez identifier deux termes. Mieux vaut de toute façon dire « par unicité de [...] ».
• Un point de satisfaction : pour la plupart, vous avez fait des efforts de rédaction et de présentation. De plus, vous avez souvent réussi à clarifier votre propos. C'est bien !

I – Exercice vu en TD.

Pour trouver A^{-1}, vous pouviez raisonner par analyse-synthèse. La synthèse suffit : vous pouviez exhiber $B = \frac{1}{2}(A - I_3)$ et calculer $AB = BA = I_3$.
Vous devez justifier que A est inversible avant d'écrire A^{-1}.
Vous ne pouvez écrire $A^2 - A = A(A-1)$: vous soustrayez un nombre à une matrice !

II – Étude de la série harmonique.

1) Conclure à la croissance de (H_n) est insuffisant : elle l'est *strictement*.

3) $H_{2n+2} \geqslant H_{2n}$ et $H_{n+1} \geqslant H_n$, mais cela n'implique pas que $H_{2n+2} - H_{n+1} \geqslant H_{2n} - H_n$. Vous avez $-H_{n+1} \leqslant -H_n$.
Vous ne pouvez JAMAIS soustraire des inégalités !

Cela pouvait se montrer par récurrence. Il fallait bien voir qu'au rang $n+1$ cela donnait $H_{2(n+1)} - H_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{2}$, et non $H_{2n+1} - H_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{2}$.

4) Cette question se montrait facilement par récurrence (en remarquant que $2^{n+1} = 2 \times 2^n$), mais a rencontré peu de succès.

6) p, q ne sont pas introduits. Si vous voulez utiliser P_n, vous devez donc commencer par « il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que ... ».
Si vous utilisez les p, q de P_n, vous ne pouvez pas écrire que $n = 2p$.
Nulle récurrence ici (sur les entiers pairs ?), on vous demande juste $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

9) Écrire, si n est impair, $H_{n+1} = \dfrac{H_{m+1} + 2r}{2}$ ne convient pas : $H_{m+1} + 2r$ n'est pas entier.

10) Vous ne pouvez pas utiliser sans démonstration : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 1 + x < \mathrm{e}^x$.

10-11) Définir $f : x \mapsto x - \ln(1+x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est maladroit : formellement, vous ne pouvez pas calculer $f(0)$, mais juste une limite.
La croissance de f et $f(0) = 0$ ne permet pas de justifier que f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

12) Transformer $\ln(n+1) - \ln(n)$ en $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ n'apporte rien. De manière générale, ne procédez à une manipulation ou une modification de forme que si c'est nécessaire.

13) Obtenir $\ln(n) - \ln(n-1) \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n)$ est absurde : vous contredisez le résultat précédent.

14) Quel dommage de ne pas voir la sommation géométrique après avoir camouflé le $\ln(k+1) - \ln(k)$ en $\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right)$ à la question précédente ! Encore une fois, ne procédez à une modification que si c'est nécessaire.
La majoration précédente n'était pas valable en $k = 1$, elle aurait fait apparaître un horrible $\ln(0)$!

15) Vous devez justifier que $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

18) Écrire $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{j-i} = \sum_{j=i+1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{j-i}$ est une ☠HORREUR☠ : la variable muette i est sortie de sa somme !

Certains écrivent $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i}$. Quelle ☠HORREUR☠ ! Cela revient à dire que $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{a+b}$ ...

19) On ne vous demande pas d'expliquer comment vous avez trouvé a et b, juste de les exhiber et de justifier qu'ils conviennent.
a et b sont des nombres : ils ne peuvent dépender de k !
Si vous fixez $k \in \mathbb{N}$, écrire « $1 = k(a+b) + 2a + b \Leftrightarrow (a + b = 0$ et $2a + b = 1)$ » est grossièrement faux.
Si k est fixé, vous ne pouvez pas dire « pour que $1 = k(a+b) + 2a + b$, il faut que $a = 1$ et $b = -1$ ». La version correcte est : « pour que $1 = k(a+b) + 2a + b$, il *suffit* que $a = 1$ et $b = -1$ ». Mieux : « si $a = 1$ et $b = -1$, alors $1 = k(a+b) + 2a + b$ ».

21) Vous ne pouvez pas faire de « récurrence sur (m, n) ». Quantifiez m dans l'hypothèse de récurrence (portant sur n) ou fixez le avant.
L'initialisation appelait une discussion sur m.

Vous ne pouvez pas écrire : « montrons pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ la propriété P_n : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$ ». En effet, P_n dépend aussi de m, cela doit apparaître dans la notation de l'hypothèse.