Fractions rationnelles et tout depuis le début de l'année - exercices supplémentaires

Exercice 1
Effectuer la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles suivantes :

1) $\dfrac{1}{X(X-1)^2}$;

2) $\dfrac{4}{(X^2+1)^2}$;

3) $\dfrac{3X-1}{X^2(X+1)^2}$;

4) $\dfrac{1}{X^4+X^2+1}$.

Exercice 2
Calculer les primitives suivantes :

$$1)\ \int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}\,\mathrm{d}x \quad ; \quad 2)\ \int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x \quad ; \quad 3)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x + \sin^4 x}.$$

Exercice 3 Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.

1) Soit a un zéro d'ordre $\alpha \geqslant 1$ de F. Montrer que a est zéro d'ordre $\alpha - 1$ de F'.

2) Comparer les pôles de F et de F', ainsi que leur ordre de multiplicité.

Exercice 4 Déterminer le lieux des points du plan d'affixe $z \in \mathbb{C}^*$ tels que les points d'affixes z, $\dfrac{1}{z}$ et z^2 soient alignés.

Exercice 5 Trouver toutes les courbes $\mathscr{C}$ d'équation $y = f(x)$ telles que

— f est définie, continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$;

— pour tout point quelconque $M \in \mathscr{C}$, si T est l'intersection de la tangente à $\mathscr{C}$ en M avec (Ox) et si P est la projection de M sur (Ox), alors O est le milieu de T et de P.

Exercice 6
Soit E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application et G un troisième ensemble, ayant au moins deux éléments. On construit deux nouvelles applications :

$$f_* : \left\{ \begin{array}{ccc} E^G & \to & F^G \\ \varphi & \mapsto & f \circ \varphi \end{array} \right. \text{ et } f^* : \left\{ \begin{array}{ccc} G^F & \to & G^E \\ \varphi & \mapsto & \varphi \circ f \end{array} \right. .$$

Montrer les équivalences suivantes :

$$f \text{ est injective} \iff f_* \text{ est injective} \iff f^* \text{ est surjective.}$$

Exercice 7 Soit α un nombre irrationnel positif et (p_n) et (q_n) deux suites d'éléments de $\mathbb{N}^*$ telles que $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{p_n}{q_n}$.

1) Montrer que si (p_n) et (q_n) sont majorées, $\dfrac{p_n}{q_n}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Conclusion ?

2) Montrer que si (p_n) est majorée mais pas (q_n), $\alpha = 0$. Conclusion ?

3) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \lim\limits_{n\to\infty} p_n = +\infty$.