

Devoir à la maison n° 3

À rendre le 04 octobre

I. Puissances d'une matrice

On introduit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 8 \\ -5 & 1 & 11 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Soit $Y = \begin{pmatrix} t \\ u \\ v \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Résoudre en X le système $PX = Y$.
- 2) En déduire que P est inversible ainsi que l'expression¹ de P^{-1} .
- 3) Calculer $N = P \times A \times P^{-1}$.
- 4) Calculer N^2 , N^3 et en déduire une expression de N^n , pour tout entier naturel n .
- 5) En déduire une expression de A^n , pour tout entier naturel n .
- 6) La matrice A est-elle inversible ?

II. Une somme

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \binom{n}{k} (-1)^{k-1}.$$

On se propose de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1. La suite de l'exercice dépend de cette réponse, il vous est *fortement* conseillé de vérifier votre calcul d'inverse.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \left[\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} \right] (-1)^{k-1}.$$

2) En déduire une expression simplifiée de $S_{n+1} - S_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Montrer que, pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k} \binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k}.$$

4) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1}.$$

5) Conclure, sans utiliser de raisonnement par récurrence.

— **FIN** —