Devoir facultatif n° 1

0. Introduction du problème et résultats utiles

On dit qu'une figure géométrique est *constructible à la règle et au compas* si on peut la tracer en n'utilisant qu'un compas et une règle non graduée. On dit également qu'un réel x est *constructible à la règle et au compas* s'il et possible de tracer à la règle et au compas un segment de longueur x. Nous allons dans ce problème nous intéresser à la construction d'un heptagone à la règle et au compas.
Tout d'abord, vous pourrez vous convaincre du fait suivant, relativement simple : si vous savez tracer un heptagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique de centre 0 et de rayon 1, et ayant pour sommet le point de coordonnées $(1,0)$, alors vous savez tracer un segment de longueur $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$. Réciproquement, si vous savez tracer un segment de longueur $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$, alors vous pouvez tracer deux droites formant un angle de $\frac{2\pi}{7}$, et donc vous pouvez tracer un heptagone régulier.
Par conséquent, l'heptagone régulier est constructible à la règle et au compas si et seulement si $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ l'est.
On utilisera alors le résultat suivant :

Théorème de Wantzel (1837) : Soit x un réel. Si x est racine d'un polynôme de degré impair, à coefficients rationels et n'ayant aucune racine rationelle, alors x n'est pas constructible à la règle et au compas.

Nous allons l'utiliser pour démontrer dans la première partie qu'un heptagone régulier n'est pas constructible à la règle et au compas. Dans la seconde partie, nous construirons à la règle et au compas une figure très proche d'un heptagone régulier.

Nous utiliserons également le résultat suivant :

Proposition : Soient z un complexe différent de 1, et n un entier naturel.
Alors $1+z+z^2+z^3+\ldots+z^n = \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$.

Pour finir, quelques résultats d'arithmétique, connus des élèves ayant choisi l'option mathématiques expertes :

Définition : Soient p et q deux entiers. On dit que p *divise* q s'il existe un entier r tel que $pr = q$.
On dit que p et q sont *premiers entre eux* si 1 est le seul entier naturel qui divise à la fois p et q.

Théorème de Bézout (1730-1783) : Deux entiers $a, b \in \mathbb{Z}$ sont premiers entre eux si et seulement s'il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$.

I. Un heptagone régulier n'est pas constructible à la règle et au compas

1) Soit $z = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{7}}$, et soit $x \in \mathbb{R}$.

- **a)** Montrer que $z^6 + z^5 + z^4 + \ldots + z + 1 = 0$.
- **b)** En déduire que $2\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 1 = 0$.
- **c)** Linéariser $\cos^3(x)$ et $\cos^2(x)$ (c'est-à-dire les écrire comme somme de cosinus).
- **d)** Exprimer $\cos(3x)$ et $\cos(2x)$ en fonction de $\cos x$.
- **e)** Montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ est racine du polynôme $P = 8X^3 + 4X^2 - 4X - 1$.

2) Soient p et q deux entiers relatifs non nuls premiers entre eux. On suppose que $\frac{p}{q}$ est racine du polynôme P.

- **a)** Montrer que q divise $8p^3$.
- **b)** Montrer que p^3 et q sont premiers entre eux, en utilisant le théorème de Bézout. On notera alors U et V deux entiers tels que $Up^3 + Vq = 1$.
- **c)** En utilisant à nouveau U et V, montrer que q divise 8. [1]
- **d)** En suivant le raisonnement des questions précédentes, montrer que p divise q^3 puis que p divise 1.
- **e)** Quelles sont les racines rationnelles potentielles de P ?

3) Conclure : $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ n'est pas constructible à la règle et au compas.

II. Une construction approchée de l'heptagone régulier

On considère à nouveau le polynôme $P = 8X^3 + 4X^2 - 4X - 1$ et la fonction

$$\widetilde{P} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 \end{array},$$

1. Ce résultat est connu sous le nom de *théorème de Gauss*, et sera vu cette année.

et l'on pose $I = \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

4) **a)** Montrer que $\widetilde{P}\,'$ et $\widetilde{P}$ sont strictement croissantes sur I.

b) Montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ et $\frac{4+\sqrt{5}}{10}$ appartiennent à I.

c) Montrer que $0 < \frac{43\sqrt{5}-96}{125}$.

d) En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) < \frac{4+\sqrt{5}}{10}$.

e) Grâce à une intégration, montrer [2] que

$$6\left(\frac{4+\sqrt{5}}{10} - \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right) \leqslant \widetilde{P}\left(\frac{4+\sqrt{5}}{10}\right) - \widetilde{P}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right).$$

f) Montrer que $\sqrt{5} \leqslant \frac{9}{4}$, et en déduire que $\frac{4+\sqrt{5}}{10}$ est une valeur approchée à 10^{-3} près de $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$.

5) Considérons le cercle unité $\mathscr{C}$ de centre O et de diamètres perpendiculaires $[II']$ et $[JJ']$.
Soit K le milieu du segment $[OI]$. La droite $(J'K)$ coupe le cercle $\mathscr{C}$ en L ; la parallèle à $(J'K)$ passant par O coupe le quart supérieur droit du cercle $\mathscr{C}$ en M. Notons L' et M' les projetés orthogonaux de L et M sur (OI), et A' le milieu du segment $[L'M']$.

Montrer que $OA' = \frac{4+\sqrt{5}}{10}$ et en déduire une construction approchée de l'heptagone régulier. [3]
Effectuer cette construction en prenant 8 centimètres comme unité graphique.

— **FIN** —

2. Ce résultat peut être démontré plus rapidement avec *l'inégalité des accroissements finis*, que l'on verra plus tard dans l'année.

3. Il existe d'autres constructions approchées. Il existe également la méthode de Neusis, qui nécessite de reporter et de marquer une longueur sur une règle : ce n'est dons plus une construction "à la règle et au compas".