Devoir surveillé n°8
Version n°1
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice non vu en TD.

Soit A une partie d'un ensemble E à n éléments. On pose $p = \mathrm{Card} A$.

1) Combien y a-t-il de parties X de E contenant A ?

2) Combien y a-t-il de parties X de E à $m \in \{p, \dots, n\}$ éléments contenant A ?

3) Combien y a-t-il de couples (X, Y) de parties de E tels que $X \cap Y = A$?

II. Une suite d'intégrales.

On considère, pour tout entier naturel n, l'application φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_n(x) = (1-x)^n \mathrm{e}^{-2x},$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x)\mathrm{d}x.$$

On se propose de déterminer un développement asymptotique de I_n de la forme

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

1) Calculer I_0 et I_1.

2) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) Déterminer le signe de I_n, pour tout entier n.

4) Qu'en déduit-on pour la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

5) Majorer la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$ sur $[0, 1]$ et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

6) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n.$$

8) En déduire la limite de la suite $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

9) Déterminer la limite de la suite $(n(nI_n - 1))_{n\in\mathbb{N}}$.

10) Conclure quant à l'existence et la valeur de a, b et c.

III. Étude d'un endomorphisme.

On note $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x & + & y & - & z \\ x & + & 2y & + & z \\ -x & + & y & + & 2z \end{pmatrix} \end{array}.$$

1) Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ et déterminer les vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$.

2) Déterminer une base et la dimension du noyau de f. L'application f est-elle injective ?

3) **a)** Résoudre l'équation $f(x, y, z) = (1, -1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

b) En déduire que $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}^3$.

c) Soit $v_1 = f(e_1)$ et $v_2 = f(e_2)$. Montrer que (v_1, v_2) est une base de $\operatorname{Im} f$.

d) Vérifier que $\operatorname{Im} f$ est stable par f.

4) Montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

5) Soit v_3 un vecteur non nul de $\operatorname{Ker} f$. Montrer que (v_3) est une base de $\operatorname{Ker} f$ et que $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

6) Écrire $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$ en fonction de v_1, v_2 et v_3.

On appelle p la projection sur $F = \operatorname{Im} f$ parallèlement à $G = \operatorname{Ker} f$.

7) Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (a, b, c) dans la base $\mathscr{B}$.

a) Écrire les coordonnées de $p(u)$ dans la base $\mathscr{B}$.

b) Écrire les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathscr{B}$.

8) En déduire que f est la composée de p et d'une homothétie h dont on déterminera le rapport. Montrer que $f = p \circ h = h \circ p$.

9) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = h^n \circ p = p \circ h^n$.

— FIN —