Devoir à la maison n° 6

À rendre le 14 novembre

I. Longueur d'un chemin complexe.

Un *chemin de classe* $\mathscr{C}^1$ est une fonction $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$, où a et b sont deux réels vérifiant $a < b$.
Deux chemins de classe $\mathscr{C}^1$ $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ sont dits équivalents (noté $\gamma_1 \sim \gamma_2$) s'il existe une fonction $\rho : [a,b] \to [c,d]$ de classe $\mathscr{C}^1$, strictement croissante, vérifiant $\rho(a) = c$ et $\rho(b) = d$ et $\gamma_2 \circ \rho = \gamma_1$.
Ainsi, deux chemins de classe $\mathscr{C}^1$ γ_1 et γ_2 sont équivalents s'ils sont deux paramétrisations d'une même «courbe» : $\mathrm{Im}(\gamma_1)$.
On admettra l'inégalité triangulaire : si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ est un chemin de classe $\mathscr{C}^1$, alors

$$\left| \int_a^b \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

1) Soit $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_3 : [e,f] \to \mathbb{C}$ trois chemins de classe $\mathscr{C}^1$.

- **a)** Montrer que $\gamma_1 \sim \gamma_1$.
- **b)** Montrer que si $\gamma_1 \sim \gamma_2$, alors $\gamma_2 \sim \gamma_1$.
- **c)** Montrer que si $\gamma_1 \sim \gamma_2$ et $\gamma_2 \sim \gamma_3$, alors $\gamma_1 \sim \gamma_3$.

Remarque : on dit que $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des chemins de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{C}$.

2) Montrer si deux chemins de classe $\mathscr{C}^1$ $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ sont équivalents, alors

$$\int_a^b |\gamma_1'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_c^d |\gamma_2'(t)|\,\mathrm{d}t$$

On définit la longueur d'un chemin de classe $\mathscr{C}^1$ $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ par

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

On vient donc de montrer que deux chemins de classe $\mathscr{C}^1$ équivalents on même longueur. Pour toute courbe $\Gamma \subset \mathbb{C}$, on notera $L(\Gamma)$ la longueur de cette courbe, définie par la longueur de tout chemin de classe $\mathscr{C}^1$ γ vérifiant $\Gamma = \mathrm{Im}(\gamma)$.

3) Calculer $L(\mathbb{U})$.

4) Soit $a < b$ deux réels, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Donner une expression de la longueur de la courbe représentative de f.

5) *Application :* déterminer la longueur de la courbe représentative de la fonction $t \mapsto t^2$, entre les points d'abscisses 0 et 1.

Indication : résoudre $\text{sh}(x) = 2$ et établir les formules de duplication en trigonométrie hyperbolique.

6) Soit $u, v \in \mathbb{C}$ distincts. Donner une paramétrisation du segment $[u, v]$ et retrouver ainsi la formule donnant sa longueur.

7) Soit $u, v \in \mathbb{C}$ distincts. Montrer que la plus petite longueur d'un chemin de classe $\mathscr{C}^1$ joignant u à v est celle du segment $[u, v]$.

II. Une équation différentielle.

On considère sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$x^2 y'' + 3xy' + y = 1 + x^2. \tag{$\mathscr{E}$}$$

On va résoudre cette équation différentielle par plusieurs méthodes différentes. Les questions sont indépendantes.

1) On fait le changement de fonction inconnue $u(x) = xy(x)$.
Former l'équation différentielle (E_1) que satisfait la fonction $u(x)$.
Résoudre (E_1) et en déduire l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$.

2) On pose $v(x) = x^2 y'(x) + xy(x)$.
Déterminer v. En déduire par une autre méthode l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$.

— **FIN** —