Devoir surveillé n° 5 - Remarques

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 36 points, ramené sur 5 points.
- Problèmes : exercice de TD sur 4 points, chaque question sur 4 points, total sur 124 points (v1) et 128 points (v2), ramené sur 15 points avec la formule note$\times\dfrac{6}{35}+\dfrac{27}{35}$ pour les deux versions.

Statistiques descriptives.

	Calculs	v1	v2	Note finale
Note maximale	32	73	83	19
Note minimale	8	13	25	5
Moyenne	$\approx 23,23$	$\approx 41,37$	$52,67$	$\approx 11,13$
Écart-type	$\approx 5,41$	$\approx 16,80$	$16,68$	$\approx 3,34$

Remarques générales.

La qualité de votre rédaction s'est bien améliorée : bravo !

Un exercice vu en TD (v1).

Cet exercice a été bien traité. Attention toutefois dans la conclusion : ne vous éparpillez pas en blabla sur des considérations de sous-suites qui contiennent tous les termes de (u_n) et ne parlez pas non plus de sous-suites en général. Utilisez le théorème du cours : si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, (u_n) aussi, et c'est tout. En en rajoutant vous risquez d'écrire des choses fausses ou d'être moins convaincants.
N'oubliez pas non plus que les suites et les sous-suites s'écrivent entre parenthèses.

Étude d'une suite récurrente (v1).

Bien traité en général. Vous avez été très nombreux à aborder toutes les questions. Celles sur lesquelles je ne fais pas de remarque ont été globalement bien résolues.

1.a. La dérivée de f est clairement strictement négative, pas besoin de partir sur une équivalence « $f'(x) \leqslant 0$ ssi ... ». Les limites se calculent facilement et n'ont aucun rapport avec les croissances comparées. J'ai eu un peu l'impression que les croissances comparées étaient une formule magique très puissante qui permettait de donner la valeur de n'importe quelle limite avec un bout d'exp ou de ln sans rien justifier. Ce n'est pas le cas. Lorsque vous dites que vous démontrez un résultat grâce au théorème `toto`, alors que `toto` n'a rien voir avec la question, vous perdez des points.

1.b. Utilisez le cours : $\mathbb{R}_+^*$ est stable par f et $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, et c'est tout. Mais il faut le justifier : impossible de le dire ici sans utiliser que f est strictement décroissante ou que $f > 0$, sinon on pourrait avoir 0 dans l'image de f. Et attention au vocabulaire : « f est stable sur $\mathbb{R}_+^*$ » ne veut rien dire.

2. On ne peut pas conjecturer grand'chose sans utiliser le cours : f est décroissante donc (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraires. À partir de là on peut discuter.

3.a. D'une part vous ne devriez même pas dériver g pour conclure : g est une somme de fonctions strictement décroissantes et c'est tout. Si jamais vous dérivez g, ce n'est pas un problème, mais vous devez impérativement voir que sur $\mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = -\mathrm{e}^{-x} - 2x < 0$. Calculer g'' pour trouver le signe de g' est assez grotesque.

3.b. Vous avez dû remarquer que dans 90% des problèmes d'analyse il y a cette question. Vous devez donc être irréprochables dans sa résolution, d'une part car ça vous servira à coup sûr aux concours, d'autre part car on l'a déjà traitée 10000 fois. Et pourtant, elle est souvent maltraitée.
Donc je réinsiste : g est continue sur $\mathbb{R}_+$, $g(0) > 0$, $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$, donc d'après le TVI (à l'infini), g s'annule sur

$\mathbb{R}_+^*$. D'autre part, g est strictement monotone donc elle est injective, donc ce point d'annulation est unique.
Si vous voulez donner toutes les hypothèses en une fois et conclure en une fois, il ne faut pas utiliser le TVI, qui ne donne pas l'unicité. Il faut utiliser le théorème de la bijection strictement monotone.
Et surtout, n'oubliez aucune hypothèse : intervalle + continuité + strictement monotone + valeurs ou limites en 2 points.

5.b. Attention aux simplifications par x sans s'assurer que $x \neq 0$! Ceux qui n'y ont pas pris garde n'ont pas vu que 0 était un point fixe.

Équation de Pell-Fermat (v1 et v2).

Les questions 1 à 3 ont été bien traitées et abordées par la plupart d'entre vous. Les questions 4 et 5 ont été peu abordées, avec peu de réussite. Il faut dire qu'elles étaient plus difficiles.

1.b. Attention, il y a beaucoup de points à vérifier pour avoir un anneau, il s'agit de ne pas en oublier :
- $(\mathbb{Z}[\sqrt{7}], +)$ doit être abélien (rien à démontrer, + est commutative on le sait, mais il faut le rappeler) ;
- $\times$ est associative, commutative (pour un anneau commutatif seulement) et distributive (là aussi, on le sait, il suffit de le dire) ;
- $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ est stable par produit ;
- $1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$.

2.a. Bizarrement très mal résolu. C'est une démonstration classique, à connaître. Si $\sqrt{7} = \dfrac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a \wedge b = 1$, alors $a^2 \wedge b^2 = 1$ (c'est dans le cours d'arithmétique et peut se démontrer rapidement avec le théorème de Bézout). Or $7b^2 = a^2$, donc $b^2 | a^2$. Ceci n'est possible que si $b = 1$ car $a^2 \wedge b^2 = 1$. Mais alors $\sqrt{7} \in \mathbb{Z}$ ce qui est absurde car $2 < \sqrt{7} < 3$.
On peut aussi utiliser la décomposition en facteurs premiers, mais quand on peut faire autrement je ne suis pas un adepte de ce genre de démonstrations, souvent délicates à rédiger.

2.b. Vous débutez bien la démonstration : on prend deux couples (a, b), (a', b') tels que $a + b\sqrt{7} = a' + b'\sqrt{7}$, donc $(a-a')+(b-b')\sqrt{7} = 0$. Ensuite il y a souvent une de ces deux erreurs : « on identifie donc $a - a' = b - b' = 0$ » : non, si on pouvait identifier on l'aurait fait dès le début ! Or pour identifier il faut justement savoir que l'écriture est unique. Ou alors « $\sqrt{7} = \dfrac{a - a'}{b' - b}$ » : mais pour cela il faut être sûr que $b - b' \neq 0$, cela devient lassant que vous n'y pensiez pas. Certains ont évité le problème en supposant que $(a, b) \neq (a', b')$ (très bien) et en interprétant cela comme : « $a \neq a'$ et $b \neq b'$ », ce qui est faux ! En effet, $(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$, donc avec les lois de Morgan, $(a, b) \neq (a', b') \Leftrightarrow a \neq a'$ ou $b \neq b'$.

2.c. Il est rageant de voir que l'énorme majorité d'entre vous n'a démontré que 1 ou 2 point sur les 3 qu'il y avait à montrer. Pourtant l'énoncé donnait la définition : un morphisme d'anneaux est une application φ telle que φ est un morphisme pour +, pour $\times$, et $\varphi(1) = 1$. Attention dans ce genre de questions à ne pas oublier une partie de la question en route.

3.b. Attention : $N(xx') = xx'\overline{xx'}$. Pour pouvoir dire que cela valait $xx'\bar{x}\bar{x}'$, il fallait utiliser la question 2.c. Ou alors tout développer, ce qui était plus long.

4.a. Beaucoup ont trouvé $2a = x + \bar{x}$. Et ils ont dit directement $x > 0$ donc $\bar{x} > 0$. C'est faux en général : par exemple pour $x = 1 + \sqrt{7}$. Il fallait utiliser que $x\bar{x} = 1$.

4.e. Il s'agissait de montrer qu'un certain ensemble bien choisi avait un minimum, avec le principe du minimum.

5. On attendait les solutions sous forme de couples.

Suites de Cauchy (v2)

En général bien traité. Le problème principal est souvent un manque de précision dans les réponses. Les questions 5.c et 6 n'ont pas été résolues (une seule fois pour 5.c, jamais pour 6).
Remarquez que si vous n'aviez pas réussi à traiter la toute première question dès le début, vous pouviez y revenir après avoir vu les résultats de la question 3 et de la partie 2 !