C4 : Modélisation cinématiques des systèmes composés de chaines de solides
C4-2 : Calcul vectoriel

Émilien DURIF

Lycée La Martinière Monplaisir Lyon

Classe de MPSI

4 Décembre 2018

Plan

1. Notions de bases et repères
   - Introduction
   - Base et repère
     - Base
     - Repère
     - Système de coordonnées
2. Opérations vectorielles
   - Introduction
   - Opérations de base
     - L'addition
   - Produit scalaire
   - Produit vectoriel
   - Produit mixte
   - Changement de base

Plan

1. Notions de bases et repères
   - Introduction
   - Base et repère
     - Base
     - Repère
     - Système de coordonnées
2. Opérations vectorielles
   - Introduction
   - Opérations de base
     - L'addition
   - Produit scalaire
   - Produit vectoriel
   - Produit mixte
   - Changement de base

Introduction

Calculs vectoriels

- L'objet de ce cours est d'introduire les outils mathématiques et géométriques qui serviront aux diverses modélisations de phénomènes physiques que nous verrons tout au long de cette année et de l'année prochaine (*cinématique, statique, cinétique et dynamique*).
- Nous n'utiliserons que les aspects *pratiques* des notions de "**vecteurs**" et "**d'espaces vectoriels**" dont les aspects plus poussés ont été développé lors des cours de mathématiques.

Introduction

Calculs vectoriels

- L'objet de ce cours est d'introduire les outils mathématiques et géométriques qui serviront aux diverses modélisations de phénomènes physiques que nous verrons tout au long de cette année et de l'année prochaine (*cinématique, statique, cinétique et dynamique*).
- Nous n'utiliserons que les aspects *pratiques* des notions de "**vecteurs**" et "**d'espaces vectoriels**" dont les aspects plus poussés ont été développé lors des cours de mathématiques.

Plan

1 Notions de bases et repères
- Introduction
- Base et repère
  - Base
  - Repère
  - Système de coordonnées

2 Opérations vectorielles
- Introduction
- Opérations de base
  - L'addition
- Produit scalaire
- Produit vectoriel
- Produit mixte
- Changement de base

Base

Propriétés

On se donne un espace vectoriel E^n. Tout vecteur de E^n peut être exprimé par une **combinaison linéaire** d'un nombre limité de **vecteurs linéairement indépendants**.

Cas de la dimension 3

En dimension 3, tout vecteur $\overrightarrow{V} \in E^3$ peut être exprimé comme une combinaison de 3 vecteurs linéairement indépendants, par exemple $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$:

$$\overrightarrow{V} = \alpha\,\overrightarrow{e_x} + \beta\,\overrightarrow{e_y} + \gamma\,\overrightarrow{e_z}$$

Base

Propriétés

On se donne un espace vectoriel E^n. Tout vecteur de E^n peut être exprimé par une **combinaison linéaire** d'un nombre limité de **vecteurs linéairement indépendants**.

Cas de la dimension 3

En dimension 3, tout vecteur $\overrightarrow{V} \in E^3$ peut être exprimé comme une combinaison de 3 vecteurs linéairement indépendants, par exemple $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$:

$$\overrightarrow{V} = \alpha\,\overrightarrow{e_x} + \beta\,\overrightarrow{e_y} + \gamma\,\overrightarrow{e_z}$$

Base

Remarque

- En dimension 2, "*linéairement indépendants*" signifie "*non-colinéaires*".
- En dimension 3, "*linéairement indépendants*" signifie "*non-coplanaires*".

dimension d'un espace vectoriel

On appelle **dimension** n de l'espace vectoriel E^n le nombre minimum de vecteurs permettant d'engendrer n'importe quel vecteur $\overrightarrow{V} \in E^n$ par combinaison linéaire.

Base

Remarque

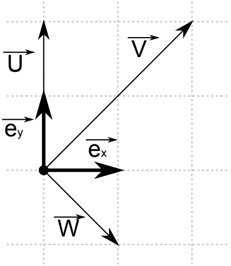
- En dimension 2, " *linéairement indépendants*" signifie " *non-colinéaires*".
- En dimension 3, " *linéairement indépendants*" signifie " *non-coplanaires*".

dimension d'un espace vectoriel

On appelle **dimension** n de l'espace vectoriel E^n le nombre minimum de vecteurs permettant d'engendrer n'importe quel vecteur $\overrightarrow{V} \in E^n$ par combinaison linéaire.

Base

- Dans le plan, chaque vecteur peut-être exprimé comme combinaison de deux vecteurs $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$.

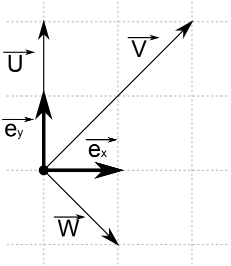


$$\overrightarrow{U} = 0\,\overrightarrow{e_x} + 2\,\overrightarrow{e_y}$$
$$\overrightarrow{V} = 2\,\overrightarrow{e_x} + 2\,\overrightarrow{e_y}$$
$$\overrightarrow{W} = 1\,\overrightarrow{e_x} - 1\,\overrightarrow{e_y}$$

- Les vecteurs du plan constituent donc un espace vectoriel de dimension 2.

Base

- Dans le plan, chaque vecteur peut-être exprimé comme combinaison de deux vecteurs $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$.

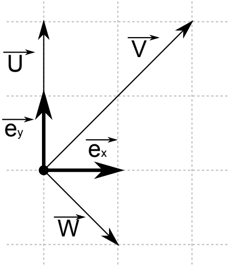


- $$\overrightarrow{U} = 0\ \overrightarrow{e_x} + 2\ \overrightarrow{e_y}$$
  $$\overrightarrow{V} = 2\ \overrightarrow{e_x} + 2\ \overrightarrow{e_y}$$
  $$\overrightarrow{W} = 1\ \overrightarrow{e_x} - 1\ \overrightarrow{e_y}$$

- Les vecteurs du plan constituent donc un espace vectoriel de dimension 2.

Base

- Dans le plan, chaque vecteur peut-être exprimé comme combinaison de deux vecteurs $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$.

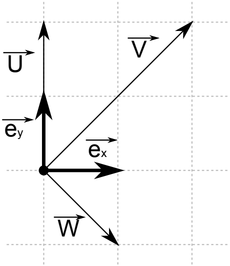


$$\overrightarrow{U} = 0\ \overrightarrow{e_x} + 2\ \overrightarrow{e_y}$$
$$\overrightarrow{V} = 2\ \overrightarrow{e_x} + 2\ \overrightarrow{e_y}$$
$$\overrightarrow{W} = 1\ \overrightarrow{e_x} - 1\ \overrightarrow{e_y}$$

- Les vecteurs du plan constituent donc un espace vectoriel de dimension 2.

Base

- Dans le plan, chaque vecteur peut-être exprimé comme combinaison de deux vecteurs $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$.



$$\overrightarrow{U} = 0\ \overrightarrow{e_x} + 2\ \overrightarrow{e_y}$$
$$\overrightarrow{V} = 2\ \overrightarrow{e_x} + 2\ \overrightarrow{e_y}$$
$$\overrightarrow{W} = 1\ \overrightarrow{e_x} - 1\ \overrightarrow{e_y}$$

- Les vecteurs du plan constituent donc un espace vectoriel de dimension 2.

Base

Définition d'une base

L'ensemble de ces n vecteurs linéairement indépendants, capables d'engendrer n'importe quel vecteur de E^n, forme ce que l'on appelle **une base** de l'espace vectoriel E^n. On la note par un n-uplet de vecteurs. Pour un espace E^3, nous la noterons par un triplet de vecteurs, par exemple :

$$\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$$

Attention

Tout comme les vecteurs, une base n'est liée à **aucun** point.

Base

Définition d'une base

L'ensemble de ces n vecteurs linéairement indépendants, capables d'engendrer n'importe quel vecteur de E^n, forme ce que l'on appelle **une base** de l'espace vectoriel E^n. On la note par un n-uplet de vecteurs. Pour un espace E^3, nous la noterons par un triplet de vecteurs, par exemple :

$$\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$$

Attention

Tout comme les vecteurs, une base n'est liée à **aucun** point.

Base

Différents types de base

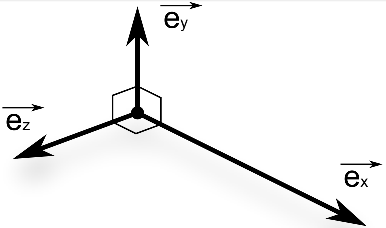
- Une base est dite **orthogonale** si :

$$\boxed{\overrightarrow{e_x} \perp \overrightarrow{e_y} \perp \overrightarrow{e_z} \perp \overrightarrow{e_x}.} \tag{1}$$

- Une base est dite **normée** si :

$$\boxed{\|\overrightarrow{e_x}\| = \|\overrightarrow{e_y}\| = \|\overrightarrow{e_z}\| = 1.} \tag{2}$$

- Une base est dite **orthonormée** si elle est à la fois **orthogonale** et **normée**.
- Une base est dite **directe** si le trièdre $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ est **direct**.



Base

Différents types de base

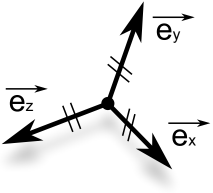
- Une base est dite **orthogonale** si :

$$\boxed{\overrightarrow{e_x} \perp \overrightarrow{e_y} \perp \overrightarrow{e_z} \perp \overrightarrow{e_x}.} \tag{1}$$

- Une base est dite **normée** si :

$$\boxed{\|\overrightarrow{e_x}\| = \|\overrightarrow{e_y}\| = \|\overrightarrow{e_z}\| = 1.} \tag{2}$$

- Une base est dite **orthonormée** si elle est à la fois **orthogonale** et **normée**.
- Une base est dite **directe** si le trièdre $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ est **direct**.



Base

Différents types de base

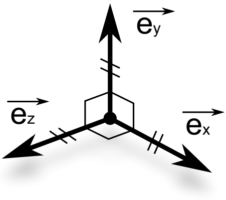
- Une base est dite **orthogonale** si :

$$\boxed{\overrightarrow{e_x} \perp \overrightarrow{e_y} \perp \overrightarrow{e_z} \perp \overrightarrow{e_x}.} \tag{1}$$

- Une base est dite **normée** si :

$$\boxed{\|\overrightarrow{e_x}\| = \|\overrightarrow{e_y}\| = \|\overrightarrow{e_z}\| = 1.} \tag{2}$$

- Une base est dite **orthonormée** si elle est à la fois **orthogonale** et **normée**.
- Une base est dite **directe** si le trièdre $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ est **direct**.



Base

Différents types de base

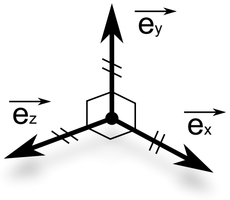
- Une base est dite **orthogonale** si :

$$\boxed{\overrightarrow{e_x} \perp \overrightarrow{e_y} \perp \overrightarrow{e_z} \perp \overrightarrow{e_x}.} \quad (1)$$

- Une base est dite **normée** si :

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{e_x}\right\| = \left\|\overrightarrow{e_y}\right\| = \left\|\overrightarrow{e_z}\right\| = 1.} \quad (2)$$

- Une base est dite **orthonormée** si elle est à la fois **orthogonale** et **normée**.
- Une base est dite **directe** si le trièdre $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ est **direct**.



Base

Différents types de base

- Une base est dite **orthogonale** si :

$$\boxed{\overrightarrow{e_x} \perp \overrightarrow{e_y} \perp \overrightarrow{e_z} \perp \overrightarrow{e_x}.} \qquad (1)$$

- Une base est dite **normée** si :

$$\boxed{\|\overrightarrow{e_x}\| = \|\overrightarrow{e_y}\| = \|\overrightarrow{e_z}\| = 1.} \qquad (2)$$

- Une base est dite **orthonormée** si elle est à la fois **orthogonale** et **normée**.
- Une base est dite **directe** si le trièdre $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ est **direct**.

Remarque

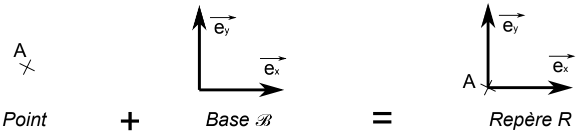
La plupart du temps, on utilisera une base $\mathscr{B}$ **orthonormée directe**, même si cela n'est pas précisé.

Repère

Repère

Un repère R est l'association d'une base $\mathscr{B}$ avec un point A (fig.??) :

$$\boxed{R = \left(A, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)} \tag{3}$$



Système de coordonnées

Soit,

$$\overrightarrow{U} = u_x\ \overrightarrow{e_x} + u_y\ \overrightarrow{e_y} + u_z\ \overrightarrow{e_z}$$

Système de coordonnées

- Les coefficients (u_x, u_y, u_z) sont des réels appelés coordonnées de $\overrightarrow{U}$ dans la base $\mathscr{B}$.
- On notera ces coordonnées sous la forme d'un *vecteur colonne* comme ci-dessous :

$$\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} \qquad (4)$$

Important

L'écriture d'un vecteur colonne doit toujours faire apparaître la base dans laquelle il est exprimé (ici : $\mathscr{B}$)

Système de coordonnées

Soit,

$$\overrightarrow{U} = u_x \ \overrightarrow{e_x} + u_y \ \overrightarrow{e_y} + u_z \ \overrightarrow{e_z}$$

Système de coordonnées

- Les coefficients (u_x, u_y, u_z) sont des réels appelés **coordonnées** de $\overrightarrow{U}$ dans la base $\mathscr{B}$.
- On notera ces coordonnées sous la forme d'un *vecteur colonne* comme ci-dessous :

$$\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} \tag{4}$$

Important

L'écriture d'un vecteur colonne doit toujours faire apparaître la base dans laquelle il est exprimé (ici : $\mathscr{B}$)

Système de coordonnées

Soit,

$$\overrightarrow{U} = u_x \ \overrightarrow{e_x} + u_y \ \overrightarrow{e_y} + u_z \ \overrightarrow{e_z}$$

Système de coordonnées

- Les coefficients (u_x, u_y, u_z) sont des réels appelés **coordonnées** de $\overrightarrow{U}$ dans la base $\mathscr{B}$.
- On notera ces coordonnées sous la forme d'un *vecteur colonne* comme ci-dessous :

$$\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} \qquad (4)$$

Important

L'écriture d'un vecteur colonne doit toujours faire apparaître la base dans laquelle il est exprimé (ici : $\mathscr{B}$)

Système de coordonnées

Soit,

$$\overrightarrow{U} = u_x\ \overrightarrow{e_x} + u_y\ \overrightarrow{e_y} + u_z\ \overrightarrow{e_z}$$

Système de coordonnées

- Les coefficients (u_x, u_y, u_z) sont des réels appelés **coordonnées** de $\overrightarrow{U}$ dans la base $\mathscr{B}$.
- On notera ces coordonnées sous la forme d'un *vecteur colonne* comme ci-dessous :

$$\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} \qquad (4)$$

Important

L'écriture d'un vecteur colonne doit toujours faire apparaître la base dans laquelle il est exprimé (ici : $\mathscr{B}$)

Système de coordonnées

Attention

L'écriture d'un vecteur colonne doit toujours faire apparaître la base dans laquelle il est exprimé (ici : $\mathscr{B}$)

Remarque

- Il est clair que selon la base choisie, les coordonnées ne seront pas les mêmes.
- On peut abusivement écrire un repère au lieu d'une base, au pied d'un vecteur colonne. Par exemple : $\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix}_R$ au lieu de $\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$

Système de coordonnées

Attention

L'écriture d'un vecteur colonne doit toujours faire apparaître la base dans laquelle il est exprimé (ici : $\mathscr{B}$)

Remarque

- Il est clair que selon la base choisie, les coordonnées ne seront pas les mêmes.
- On peut abusivement écrire un repère au lieu d'une base, au pied d'un vecteur colonne. Par exemple : $\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix}_R$ au lieu de $\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$

Système de coordonnées

Attention

L'écriture d'un vecteur colonne doit toujours faire apparaître la base dans laquelle il est exprimé (ici : $\mathscr{B}$)

Remarque

- Il est clair que selon la base choisie, les coordonnées ne seront pas les mêmes.
- On peut abusivement écrire un repère au lieu d'une base, au pied d'un vecteur colonne. Par exemple : $\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix}_R$ au lieu de $\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$

Plan

1 Notions de bases et repères
- Introduction
- Base et repère
  - Base
  - Repère
  - Système de coordonnées

2 Opérations vectorielles
- Introduction
- Opérations de base
  - L'addition
- Produit scalaire
- Produit vectoriel
- Produit mixte
- Changement de base

Opérations vectorielles : introduction

On se donne une base $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ et trois vecteurs :

$$\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}, \qquad \overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}, \qquad \overrightarrow{W} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}},$$

Plan

1 Notions de bases et repères
- Introduction
- Base et repère
  - Base
  - Repère
  - Système de coordonnées

2 Opérations vectorielles
- Introduction
- Opérations de base
  - L'addition
- Produit scalaire
- Produit vectoriel
- Produit mixte
- Changement de base

Opérations vectorielles de base : addition

Addition de deux vecteurs

L'**addition de deux vecteurs** est une application $E^3 \times E^3 \longmapsto E^3$cdont le résultat est un vecteur pour lequel les coordonnées sont simplement la somme des coordonnées de ces deux autres vecteurs (**à condition qu'ils soient exprimés dans la même base**) :

- $$\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \\ u_z + v_z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} .$$

Propriétés

- L'addition de deux vecteurs est associative (*i.e.* *"on peut déplacer les parenthèses"*) : $\left(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}\right) + \overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} + \left(\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}\right)$.
- L'addition de deux vecteurs est commutative (*i.e.* *"on peut inverser l'ordre de l'opération"*) : $\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} = \overrightarrow{V} + \overrightarrow{U}$.

Opérations vectorielles de base : addition

Addition de deux vecteurs

L'**addition de deux vecteurs** est une application $E^3 \times E^3 \longmapsto E^3$cdont le résultat est un vecteur pour lequel les coordonnées sont simplement la somme des coordonnées de ces deux autres vecteurs (**à condition qu'ils soient exprimés dans la même base**) :

- $$\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \\ u_z + v_z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}.$$

Propriétés

- L'addition de deux vecteurs est associative (*i.e.* "*on peut déplacer les parenthèses*") : $\left(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}\right) + \overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} + \left(\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}\right)$.
- L'addition de deux vecteurs est commutative (*i.e.* "*on peut inverser l'ordre de l'opération*") : $\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} = \overrightarrow{V} + \overrightarrow{U}$.

Opérations vectorielles de base : addition

Addition de deux vecteurs

L'**addition de deux vecteurs** est une application $E^3 \times E^3 \longmapsto E^3$cdont le résultat est un vecteur pour lequel les coordonnées sont simplement la somme des coordonnées de ces deux autres vecteurs (**à condition qu'ils soient exprimés dans la même base**) :

-
$$\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \\ u_z + v_z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} .$$

Propriétés

- L'addition de deux vecteurs est **associative** (*i.e. "on peut déplacer les parenthèses"*) : $\left(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}\right) + \overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} + \left(\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}\right)$.
- L'addition de deux vecteurs est **commutative** (*i.e. "on peut inverser l'ordre de l'opération"*) : $\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} = \overrightarrow{V} + \overrightarrow{U}$.

Opérations vectorielles de base : addition

Addition de deux vecteurs

L'**addition de deux vecteurs** est une application $E^3 \times E^3 \longmapsto E^3$cdont le résultat est un vecteur pour lequel les coordonnées sont simplement la somme des coordonnées de ces deux autres vecteurs (**à condition qu'ils soient exprimés dans la même base**) :

-
$$\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \\ u_z + v_z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} .$$

Propriétés

- L'addition de deux vecteurs est **associative** (*i.e. "on peut déplacer les parenthèses"*) : $\left(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}\right) + \overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} + \left(\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}\right)$.
- L'addition de deux vecteurs est **commutative** (*i.e. "on peut inverser l'ordre de l'opération"*) : $\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} = \overrightarrow{V} + \overrightarrow{U}$.

Opérations vectorielles de base : addition

Addition de deux vecteurs

L'**addition de deux vecteurs** est une application $E^3 \times E^3 \longmapsto E^3$cdont le résultat est un vecteur pour lequel les coordonnées sont simplement la somme des coordonnées de ces deux autres vecteurs (**à condition qu'ils soient exprimés dans la même base**) :

- $$\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \\ u_z + v_z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}.$$

Propriétés

- L'addition de deux vecteurs est **associative** (*i.e. "on peut déplacer les parenthèses"*) : $\left(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}\right) + \overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} + \left(\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}\right)$.
- L'addition de deux vecteurs est **commutative** (*i.e. "on peut inverser l'ordre de l'opération"*) : $\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} = \overrightarrow{V} + \overrightarrow{U}$.

Opérations vectorielles de base : multiplication par un scalaire

Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La multiplication d'un vecteur $\overrightarrow{U}$ par un scalaire λ est une application $\mathbb{R} \times E^3 \longmapsto E^3$ définie par :

$$\boxed{\lambda\,\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} \lambda\,u_x \\ \lambda\,u_y \\ \lambda\,u_z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} .} \tag{5}$$

Propriétés

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

- La multiplication par un scalaire est associative :

$$\boxed{\lambda\left(\mu\,\overrightarrow{U}\right) = (\lambda\,\mu)\,\overrightarrow{U}.} \tag{6}$$

- La multiplication par un scalaire est distributive par rapport à l'addition (et inversement) :

$$\boxed{(\lambda+\mu)\left(\overrightarrow{U}+\overrightarrow{V}\right) = \lambda\,\overrightarrow{U}+\lambda\,\overrightarrow{V}+\mu\,\overrightarrow{U}+\mu\,\overrightarrow{V}.} \tag{7}$$

Opérations vectorielles de base : multiplication par un scalaire

Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La multiplication d'un vecteur $\overrightarrow{U}$ par un scalaire λ est une application $\mathbb{R} \times E^3 \longmapsto E^3$ définie par :

$$\boxed{\lambda\,\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} \lambda\,u_x \\ \lambda\,u_y \\ \lambda\,u_z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}.} \tag{5}$$

Propriétés

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

- La multiplication par un scalaire est **associative** :

$$\boxed{\lambda\,\left(\mu\,\overrightarrow{U}\right) = (\lambda\,\mu)\,\overrightarrow{U}.} \tag{6}$$

- La multiplication par un scalaire est **distributive** par rapport à l'addition (et inversement) :

$$\boxed{(\lambda+\mu)\left(\overrightarrow{U}+\overrightarrow{V}\right) = \lambda\,\overrightarrow{U} + \lambda\,\overrightarrow{V} + \mu\,\overrightarrow{U} + \mu\,\overrightarrow{V}.} \tag{7}$$

Opérations vectorielles de base : multiplication par un scalaire

Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La multiplication d'un vecteur $\overrightarrow{U}$ par un scalaire λ est une application $\mathbb{R} \times E^3 \longmapsto E^3$ définie par :

$$\boxed{\lambda \overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} \lambda\, u_x \\ \lambda\, u_y \\ \lambda\, u_z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}.} \quad (5)$$

Propriétés

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

- La multiplication par un scalaire est **associative** :

$$\boxed{\lambda \left(\mu \overrightarrow{U}\right) = (\lambda\, \mu)\ \overrightarrow{U}.} \quad (6)$$

- La multiplication par un scalaire est **distributive** par rapport à l'addition (et inversement) :

$$\boxed{(\lambda + \mu)\left(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}\right) = \lambda \overrightarrow{U} + \lambda \overrightarrow{V} + \mu \overrightarrow{U} + \mu \overrightarrow{V}.} \quad (7)$$

Opérations vectorielles de base : multiplication par un scalaire

Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La multiplication d'un vecteur $\overrightarrow{U}$ par un scalaire λ est une application $\mathbb{R} \times E^3 \longmapsto E^3$ définie par :

$$\boxed{\lambda\,\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} \lambda\, u_x \\ \lambda\, u_y \\ \lambda\, u_z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}.} \tag{5}$$

Propriétés

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

- La multiplication par un scalaire est **associative** :

$$\boxed{\lambda\,\left(\mu\,\overrightarrow{U}\right) = (\lambda\,\mu)\,\,\overrightarrow{U}.} \tag{6}$$

- La multiplication par un scalaire est **distributive** par rapport à l'addition (et inversement) :

$$\boxed{(\lambda + \mu)\left(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}\right) = \lambda\,\overrightarrow{U} + \lambda\,\overrightarrow{V} + \mu\,\overrightarrow{U} + \mu\,\overrightarrow{V}.} \tag{7}$$

Plan

1 Notions de bases et repères
- Introduction
- Base et repère
  - Base
  - Repère
  - Système de coordonnées

2 Opérations vectorielles
- Introduction
- Opérations de base
  - L'addition
- Produit scalaire
- Produit vectoriel
- Produit mixte
- Changement de base

Opérations vectorielles de base : produit scalaire

Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs est une application, définie ici par :

$$\begin{aligned} E^3 \times E^3 &\longmapsto \mathbb{R} \\ \left(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right) &\longmapsto \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V} = \left\|\overrightarrow{U}\right\| \left\|\overrightarrow{V}\right\| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Propriétés

Le produit scalaire peut se calculer directement à partir des composantes des vecteurs :

$$\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V} = u_x\ v_x + u_y\ v_y + u_z\ v_z.$$

Opérations vectorielles de base : produit scalaire

Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs est une application, définie ici par :

$$\begin{aligned} E^3 \times E^3 &\longmapsto \mathbb{R} \\ \left(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right) &\longmapsto \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V} = \left\|\overrightarrow{U}\right\| \left\|\overrightarrow{V}\right\| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Propriétés

Le produit scalaire peut se calculer directement à partir des composantes des vecteurs :

$$\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V} = u_x\ v_x + u_y\ v_y + u_z\ v_z.$$

Opérations vectorielles de base : produit scalaire

Propriétés

Soient $\left(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\right) \in \left(E^3\right)^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

- Le produit scalaire d'un vecteur par lui même est sa norme au carré :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{U} &= \left\|\overrightarrow{U}\right\|^2 \\ &= \overrightarrow{U}^2 && \text{(notation)} \\ &= u_x^2 + u_y^2 + u_z^2.\end{aligned}$$

- Le produit scalaire est **commutatif** :

$$\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V} = \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{U}.$$

- Le produit scalaire est **bilinéaire** (*i.e. linéaire sur chacun de ses termes*) ce qui signifie qu'il est :
  - **distributif** par rapport à l'addition : $\overrightarrow{U} \cdot \left(\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}\right) = \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V} + \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{W}$.
  - **associatif** avec la multiplication par une scalaire. $\lambda \left(\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V}\right) = \left(\lambda \overrightarrow{U}\right) \cdot \overrightarrow{V} = \overrightarrow{U} \cdot \left(\lambda \overrightarrow{V}\right)$.

Opérations vectorielles de base : produit scalaire

Propriétés

Soient $\left(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\right) \in \left(E^3\right)^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

- Le produit scalaire d'un vecteur par lui même est sa norme au carré :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{U} &= \left\|\overrightarrow{U}\right\|^2 \\ &= \overrightarrow{U}^2 && \text{(notation)} \\ &= u_x^2 + u_y^2 + u_z^2. \end{aligned}$$

- Le produit scalaire est **commutatif** :

$$\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V} = \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{U}.$$

- Le produit scalaire est **bilinéaire** (*i.e. linéaire sur chacun de ses termes*) ce qui signifie qu'il est :
  * **distributif** par rapport à l'addition : $\overrightarrow{U} \cdot \left(\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}\right) = \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V} + \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{W}$.
  * **associatif** avec la multiplication par une scalaire. $\lambda\left(\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V}\right) = \left(\lambda\overrightarrow{U}\right) \cdot \overrightarrow{V} = \overrightarrow{U} \cdot \left(\lambda\overrightarrow{V}\right)$.

Opérations vectorielles de base : produit scalaire

Propriétés

Soient $\left(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\right) \in \left(E^3\right)^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

- Le produit scalaire d'un vecteur par lui même est sa norme au carré :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{U} &= \left\|\overrightarrow{U}\right\|^2 \\ &= \overrightarrow{U}^2 && \text{(notation)} \\ &= u_x^2 + u_y^2 + u_z^2.\end{aligned}$$

- Le produit scalaire est **commutatif** :

$$\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V} = \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{U}.$$

- Le produit scalaire est **bilinéaire** (*i.e. linéaire sur chacun de ses termes*) ce qui signifie qu'il est :
  - **distributif** par rapport à l'addition : $\overrightarrow{U} \cdot \left(\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}\right) = \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V} + \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{W}$.
  - **associatif** avec la multiplication par une scalaire. $\lambda\left(\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V}\right) = \left(\lambda\overrightarrow{U}\right) \cdot \overrightarrow{V} = \overrightarrow{U} \cdot \left(\lambda\overrightarrow{V}\right)$.

Opérations vectorielles de base : produit scalaire

Propriétés

Soient $\left(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\right) \in \left(E^3\right)^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

- Le produit scalaire d'un vecteur par lui même est sa norme au carré :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{U} &= \left\|\overrightarrow{U}\right\|^2 \\ &= \overrightarrow{U}^2 && \text{(notation)} \\ &= u_x^2 + u_y^2 + u_z^2. \end{aligned}$$

- Le produit scalaire est **commutatif** :

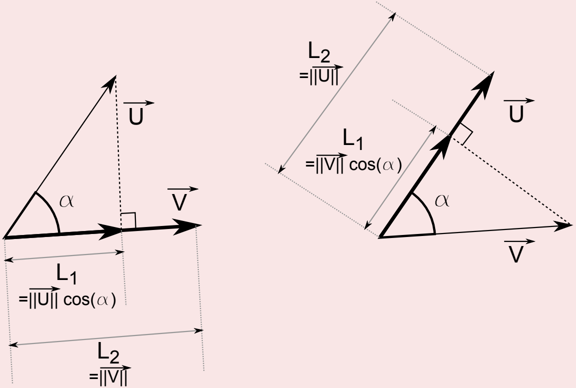
$$\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V} = \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{U}.$$

- Le produit scalaire est **bilinéaire** (*i.e. linéaire sur chacun de ses termes*) ce qui signifie qu'il est :
  * **distributif** par rapport à l'addition : $\overrightarrow{U} \cdot \left(\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}\right) = \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V} + \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{W}$.
  * **associatif** avec la multiplication par une scalaire.
    $\lambda \left(\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V}\right) = \left(\lambda \overrightarrow{U}\right) \cdot \overrightarrow{V} = \overrightarrow{U} \cdot \left(\lambda \overrightarrow{V}\right)$.

Opérations vectorielles de base : produit scalaire

Remarque

Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V}$ correspond au produit des normes des projections sur l'un des deux (soit sur $\overrightarrow{U}$, soit sur $\overrightarrow{V}$) : $\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V} = L_1\ L_2$



Plan

1 Notions de bases et repères
- Introduction
- Base et repère
  - Base
  - Repère
  - Système de coordonnées

2 Opérations vectorielles
- Introduction
- Opérations de base
  - L'addition
- Produit scalaire
- Produit vectoriel
- Produit mixte
- Changement de base

Opérations vectorielles de base : produit vectoriel

Produit vectoriel

Le produit vectoriel est une application définie par :

$$\begin{aligned} E^3 \times E^3 &\longmapsto E^3 \\ \left(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right) &\longmapsto \overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}, \end{aligned} \tag{9}$$

où $\overrightarrow{W}$ est défini par les conditions suivantes :

- **direction :** $\overrightarrow{W} \perp \overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{W} \perp \overrightarrow{V}$
- **norme :** $\left\|\overrightarrow{W}\right\| = \left\|\overrightarrow{U}\right\| \left\|\overrightarrow{V}\right\| \left|\sin(\alpha)\right|$;
- **sens :** tel que $\left(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\right)$ soit un **trièdre direct**.

Opérations vectorielles de base : produit vectoriel

Produit vectoriel

Le produit vectoriel est une application définie par :

$$\begin{aligned} E^3 \times E^3 &\longmapsto E^3 \\ \left(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right) &\longmapsto \overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}, \end{aligned} \tag{9}$$

où $\overrightarrow{W}$ est défini par les conditions suivantes :

- **direction :** $\overrightarrow{W} \perp \overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{W} \perp \overrightarrow{V}$
- **norme :** $\left\|\overrightarrow{W}\right\| = \left\|\overrightarrow{U}\right\| \left\|\overrightarrow{V}\right\| \left|\sin(\alpha)\right|$;
- **sens :** tel que $\left(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\right)$ soit un **trièdre direct**.

Opérations vectorielles de base : produit vectoriel

Produit vectoriel

Le produit vectoriel est une application définie par :

$$\begin{aligned} E^3 \times E^3 &\longmapsto E^3 \\ \left(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right) &\longmapsto \overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}, \end{aligned} \tag{9}$$

où $\overrightarrow{W}$ est défini par les conditions suivantes :

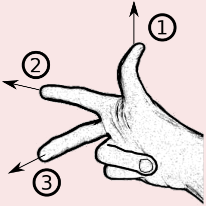
- **direction :** $\overrightarrow{W} \perp \overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{W} \perp \overrightarrow{V}$
- **norme :** $\left\|\overrightarrow{W}\right\| = \left\|\overrightarrow{U}\right\| \left\|\overrightarrow{V}\right\| \left|\sin\left(\alpha\right)\right|$;
- **sens :** tel que $\left(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\right)$ soit un **trièdre direct**.

Opérations vectorielles de base : produit vectoriel

Astuce

Pour savoir si $\left(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\right)$ est direct, plusieurs méthodes existent :

- Si le 1er vecteur *pointe* vers nous, les deux autres vecteurs *dans l'ordre* sont dans le sens directe.
- On peut utiliser la "*règle de la main droite*" : Si on représente respectivement $\overrightarrow{U}$, $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{W}$ par le pouce, l'indexe et le majeur de la main droite, tels que représenté sur la figure ci-dessous, alors le trièdre est direct.



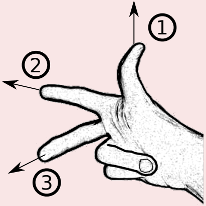
$$\begin{aligned}(①, ②, ③) &\equiv \left(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\right)\\ &\equiv \left(\overrightarrow{W}, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right)\\ &\equiv \left(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}, \overrightarrow{U}\right).\end{aligned}$$

Opérations vectorielles de base : produit vectoriel

Astuce

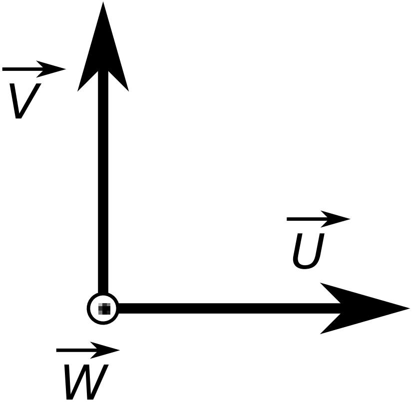
Pour savoir si $\left(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\right)$ est direct, plusieurs méthodes existent :

- Si le 1er vecteur *pointe* vers nous, les deux autres vecteurs *dans l'ordre* sont dans le sens directe.
- On peut utiliser la "*règle de la main droite*" : Si on représente respectivement $\overrightarrow{U}$, $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{W}$ par le pouce, l'indexe et le majeur de la main droite, tels que représenté sur la figure ci-dessous, alors le trièdre est direct.



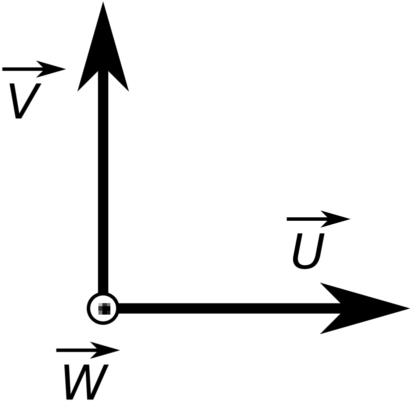
$$
\begin{aligned}
(①, ②, ③) &\equiv \left(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\right) \\
&\equiv \left(\overrightarrow{W}, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right) \\
&\equiv \left(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}, \overrightarrow{U}\right).
\end{aligned}
$$

Opérations vectorielles de base : produit vectoriel



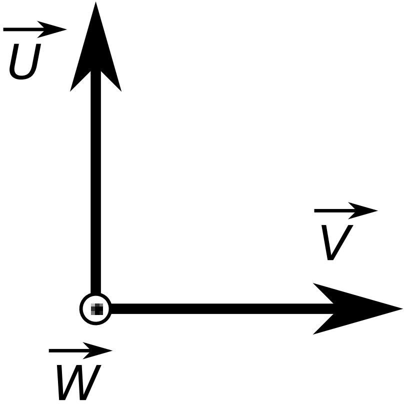
- Sens direct

Opérations vectorielles de base : produit vectoriel



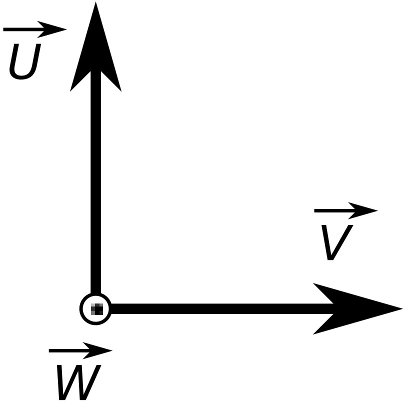
- **Sens direct**

Opérations vectorielles de base : produit vectoriel



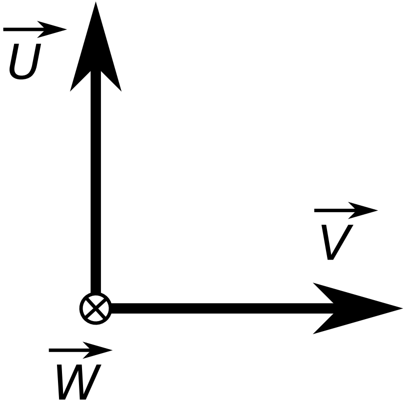
- Sens indirect

Opérations vectorielles de base : produit vectoriel



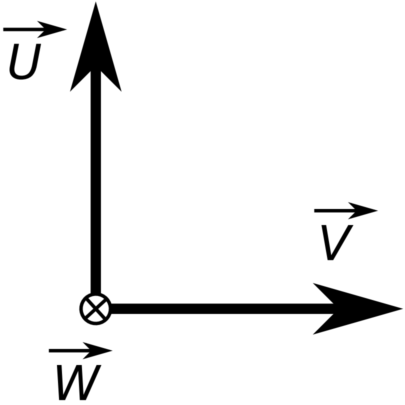
- **Sens indirect**

Opérations vectorielles de base : produit vectoriel



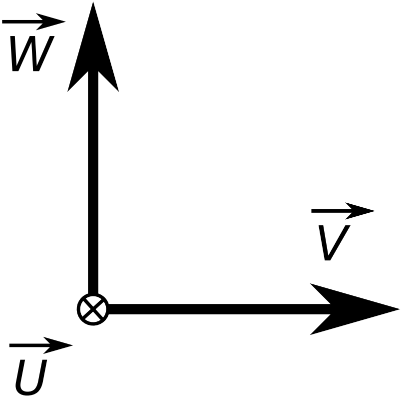
- Sens direct

Opérations vectorielles de base : produit vectoriel



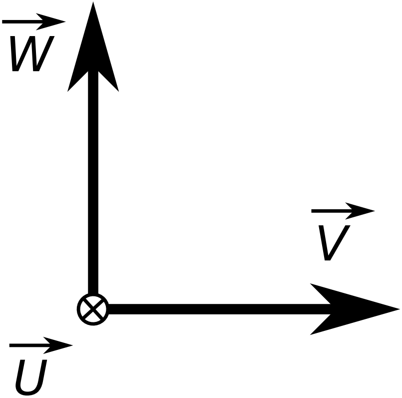
- **Sens direct**

Opérations vectorielles de base : produit vectoriel



- Sens indirect

Opérations vectorielles de base : produit vectoriel



- **Sens indirect**

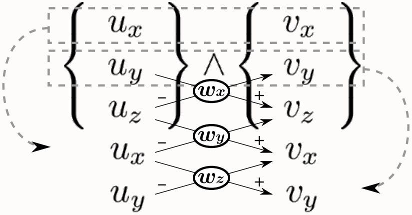
Opérations vectorielles de base : produit vectoriel

Les coordonnées de $\overrightarrow{W}$ dans la base $\mathscr{B}$ s'obtiennent par le calcul suivant :

$$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} \wedge \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$

$$\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} u_y\ v_z - u_z\ v_y \\ u_z\ v_x - u_x\ v_z \\ u_x\ v_y - u_y\ v_x \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} .$$

Astuce



Il est à noter que cette méthode fonctionne tout le temps, mais qu'elle n'est pas forcément la plus judicieuse.

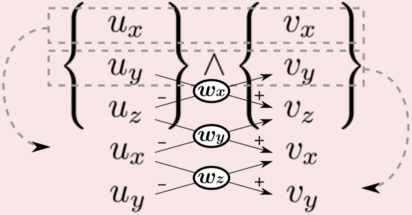
Opérations vectorielles de base : produit vectoriel

Les coordonnées de $\overrightarrow{W}$ dans la base $\mathscr{B}$ s'obtiennent par le calcul suivant :

$$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} \wedge \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$

$$\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} u_y\ v_z - u_z\ v_y \\ u_z\ v_x - u_x\ v_z \\ u_x\ v_y - u_y\ v_x \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}.$$

Astuce



Il est à noter que cette méthode fonctionne tout le temps, mais qu'elle n'est pas forcément la plus judicieuse.

Opérations vectorielles de base : produit vectoriel

Propriétés

- Le produit vectoriel est **antisymétrique** :

$$\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = -\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{U}.$$

- Le produit vectoriel est **bilinéaire** :

$$\overrightarrow{U} \wedge \left(\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}\right) = \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} + \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{W};$$

$$\left(\lambda \overrightarrow{U}\right) \wedge \overrightarrow{V} = \overrightarrow{U} \wedge \left(\lambda \overrightarrow{V}\right) = \lambda \left(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}\right).$$

- Pour des vecteurs colinéaires (en incluant les vecteurs nuls) :

$$\overrightarrow{U} // \overrightarrow{V} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}.$$

Opérations vectorielles de base : produit vectoriel

Propriétés

- Le produit vectoriel est **antisymétrique** :

$$\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = -\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{U}.$$

- Le produit vectoriel est **bilinéaire** :

$$\overrightarrow{U} \wedge \left(\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}\right) = \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} + \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{W};$$
$$\left(\lambda\overrightarrow{U}\right) \wedge \overrightarrow{V} = \overrightarrow{U} \wedge \left(\lambda\overrightarrow{V}\right) = \lambda\left(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}\right).$$

- Pour des vecteurs colinéaires (en incluant les vecteurs nuls) :

$$\overrightarrow{U} // \overrightarrow{V} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}.$$

Opérations vectorielles de base : produit vectoriel

Propriétés

- Le produit vectoriel est **antisymétrique** :

$$\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = -\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{U}.$$

- Le produit vectoriel est **bilinéaire** :

$$\overrightarrow{U} \wedge \left(\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}\right) = \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} + \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{W};$$
$$\left(\lambda\overrightarrow{U}\right) \wedge \overrightarrow{V} = \overrightarrow{U} \wedge \left(\lambda\overrightarrow{V}\right) = \lambda\left(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}\right).$$

- Pour des vecteurs colinéaires (en incluant les vecteurs nuls) :

$$\overrightarrow{U} // \overrightarrow{V} \qquad \Leftrightarrow \qquad \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}.$$

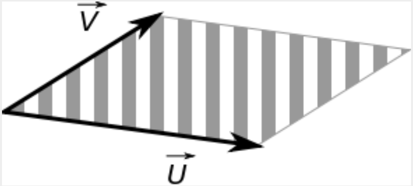
Opérations vectorielles de base : produit vectoriel

Propriétés : norme du produit vectorielle

- La norme du produit vectorielle est donnée par :

$$\boxed{\|\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}\| = \|\overrightarrow{U}\| \cdot \|\overrightarrow{V}\| \cdot |\sin\left(\widehat{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}}\right)|.} \quad (10)$$

- Elle correspond à l'aire du parallélogramme engendré par les deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$.



Calcul du produit vectoriel

Pour calculer un produit vectoriel, on déterminera la **direction** et le **sens** du vecteur obtenu avec les propriétés de cette opération vectorielle et sa **norme** avec la formule énoncée précédemment (équation 10).

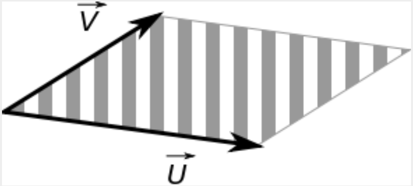
Opérations vectorielles de base : produit vectoriel

Propriétés : norme du produit vectorielle

- La norme du produit vectorielle est donnée par :

$$\boxed{\|\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}\| = \|\overrightarrow{U}\| \cdot \|\overrightarrow{V}\| \cdot \left|\sin\left(\widehat{\overrightarrow{U},\overrightarrow{V}}\right)\right|.} \tag{10}$$

- Elle correspond à l'aire du parallélogramme engendré par les deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$.



Calcul du produit vectoriel

Pour calculer un produit vectoriel, on déterminera la **direction** et le **sens** du vecteur obtenu avec les propriétés de cette opération vectorielle et sa **norme** avec la formule énoncée précédemment (équation 10).

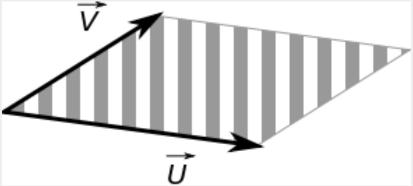
Opérations vectorielles de base : produit vectoriel

Propriétés : norme du produit vectorielle

- La norme du produit vectorielle est donnée par :

$$\boxed{\|\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}\| = \|\overrightarrow{U}\| \cdot \|\overrightarrow{V}\| \cdot |\sin\left(\widehat{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}}\right)|.} \qquad (10)$$

- Elle correspond à l'aire du parallélogramme engendré par les deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$.



Calcul du produit vectoriel

Pour calculer un produit vectoriel, on déterminera la **direction** et le **sens** du vecteur obtenu avec les propriétés de cette opération vectorielle et sa **norme** avec la formule énoncée précédemment (équation 10)

Plan

1. Notions de bases et repères
   - Introduction
   - Base et repère
     - Base
     - Repère
     - Système de coordonnées
2. Opérations vectorielles
   - Introduction
   - Opérations de base
     - L'addition
   - Produit scalaire
   - Produit vectoriel
   - Produit mixte
   - Changement de base

Opérations vectorielles de base : produit mixte

Produit mixte

Le **produit mixte** est une application définie par :

$$\begin{aligned} E^3 \times E^3 \times E^3 &\longmapsto \mathbb{R} \\ \left(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\right) &\longmapsto \left(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}\right) \cdot \overrightarrow{W}. \end{aligned} \tag{11}$$

Propriétés

- Le produit mixte est invariant par permutation circulaire :

$$\left(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}\right) \cdot \overrightarrow{W} = \left(\overrightarrow{W} \wedge \overrightarrow{U}\right) \cdot \overrightarrow{V} = \left(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W}\right) \cdot \overrightarrow{U}.$$

- Si la permutation n'est pas circulaire, le produit mixte change de signe :

$$\left(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}\right) \cdot \overrightarrow{W} = -\left(\overrightarrow{W} \wedge \overrightarrow{V}\right) \cdot \overrightarrow{U} = -\left(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{W}\right) \cdot \overrightarrow{V}.$$

Opérations vectorielles de base : produit mixte

Produit mixte

Le **produit mixte** est une application définie par :

$$\begin{aligned} E^3 \times E^3 \times E^3 &\longmapsto \mathbb{R} \\ \left(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\right) &\longmapsto \left(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}\right) \cdot \overrightarrow{W}. \end{aligned} \tag{11}$$

Propriétés

- Le produit mixte est **invariant par permutation circulaire** :

$$\left(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}\right) \cdot \overrightarrow{W} = \left(\overrightarrow{W} \wedge \overrightarrow{U}\right) \cdot \overrightarrow{V} = \left(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W}\right) \cdot \overrightarrow{U}.$$

- Si la permutation n'est pas circulaire, le produit mixte change de signe :

$$\left(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}\right) \cdot \overrightarrow{W} = -\left(\overrightarrow{W} \wedge \overrightarrow{V}\right) \cdot \overrightarrow{U} = -\left(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{W}\right) \cdot \overrightarrow{V}.$$

Opérations vectorielles de base : produit mixte

Produit mixte

Le **produit mixte** est une application définie par :

$$\begin{aligned} E^3 \times E^3 \times E^3 &\longmapsto \mathbb{R} \\ \left(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}\right) &\longmapsto \left(\vec{U} \wedge \vec{V}\right) \cdot \vec{W}. \end{aligned} \tag{11}$$

Propriétés

- Le produit mixte est **invariant par permutation circulaire** :

$$\left(\vec{U} \wedge \vec{V}\right) \cdot \vec{W} = \left(\vec{W} \wedge \vec{U}\right) \cdot \vec{V} = \left(\vec{V} \wedge \vec{W}\right) \cdot \vec{U}.$$

- Si la permutation n'est pas circulaire, le produit mixte change de signe :

$$\left(\vec{U} \wedge \vec{V}\right) \cdot \vec{W} = -\left(\vec{W} \wedge \vec{V}\right) \cdot \vec{U} = -\left(\vec{U} \wedge \vec{W}\right) \cdot \vec{V}.$$

Opérations vectorielles de base : produit mixte

Produit mixte

Le **produit mixte** est une application définie par :

$$\begin{aligned} E^3 \times E^3 \times E^3 &\longmapsto \mathbb{R} \\ \left(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\right) &\longmapsto \left(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}\right) \cdot \overrightarrow{W}. \end{aligned} \tag{11}$$

Propriétés

- Le produit mixte est **invariant par permutation circulaire** :

$$\left(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}\right) \cdot \overrightarrow{W} = \left(\overrightarrow{W} \wedge \overrightarrow{U}\right) \cdot \overrightarrow{V} = \left(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W}\right) \cdot \overrightarrow{U}.$$

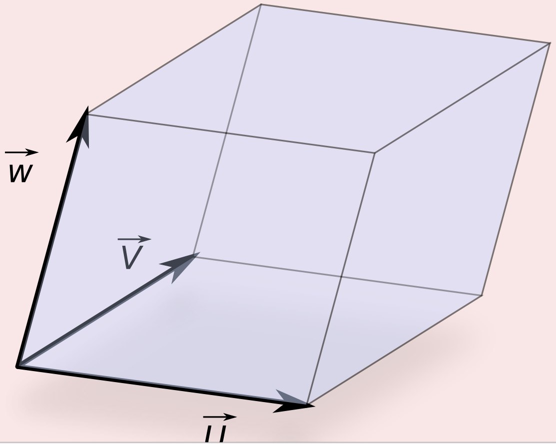
- Si la permutation n'est pas circulaire, le produit mixte change de signe :

$$\left(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}\right) \cdot \overrightarrow{W} = -\left(\overrightarrow{W} \wedge \overrightarrow{V}\right) \cdot \overrightarrow{U} = -\left(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{W}\right) \cdot \overrightarrow{V}.$$

Opérations vectorielles de base : produit mixte

Remarque

Le produit mixte $\left(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}\right) \cdot \overrightarrow{W}$ représente le volume orienté (*i.e.* positif si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est direct) du parallélépipède oblique engendré par ses trois vecteurs.



Plan

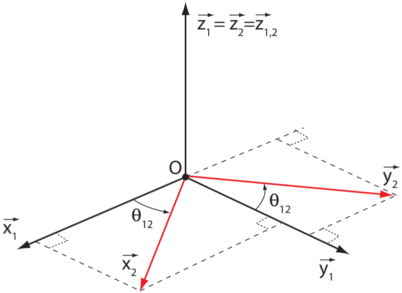
1 Notions de bases et repères
- Introduction
- Base et repère
  - Base
  - Repère
  - Système de coordonnées

2 Opérations vectorielles
- Introduction
- Opérations de base
  - L'addition
- Produit scalaire
- Produit vectoriel
- Produit mixte
- Changement de base

Changement de base

Changement de base

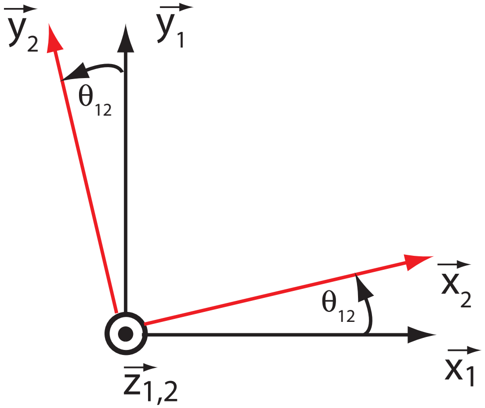
Soit une base orthonormée directe $\mathscr{B}_1 = \left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$ et un repère associé $R_1 = \left(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$.
On définit une nouvelle base orthonormée directe $\mathscr{B}_2 = \left(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}\right)$ et un repère associé $R_2 = \left(O, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}\right)$.
$\mathbb{R}_2$ se déduit de $\mathbb{R}_1$ par une rotation d'un angle θ_{12} autour de l'axe $\left(O, \overrightarrow{z_{1,2}}\right)$.



Changement de base

Remarque

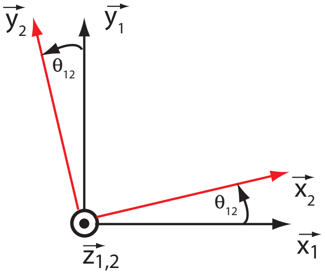
En pratique, on travaillera toujours à partir d'une figure plane de projection qui sera toujours représenté avec un angle θ_{12} positif et à peu près égal à 20°.



Changement de base

- On peut alors exprimer les vecteurs de la nouvelle base $(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ en fonction des vecteurs de la base de départ $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$:

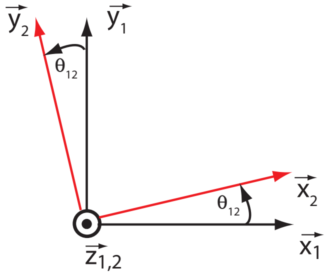
$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{x_2} = \\ \\ \overrightarrow{y_2} = \\ \\ \overrightarrow{z_2} = \end{array} \right.$$



Changement de base

- On peut alors exprimer les vecteurs de la nouvelle base $(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ en fonction des vecteurs de la base de départ $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$:

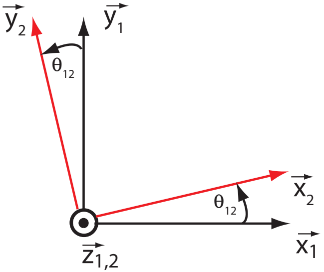
$$\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{x_2} = \cos(\theta_{12})\ \overrightarrow{x_1} + \sin(\theta_{12})\ \overrightarrow{y_1} \\ \overrightarrow{y_2} = \cos(\theta_{12})\ \overrightarrow{y_1} - \sin(\theta_{12})\ \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{z_2} = \overrightarrow{z_1} \end{array} \right.$$



Changement de base

- On peut alors exprimer les vecteurs de la base de départ $\left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$ en fonction des vecteurs de la nouvelle base $\left(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}\right)$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{x_1} = \\ \overrightarrow{y_1} = \\ \overrightarrow{z_1} = \end{cases}$$



Changement de base

- On peut alors exprimer les vecteurs de la base de départ $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ en fonction des vecteurs de la nouvelle base $(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{x_1} = \cos(\theta_{12})\ \overrightarrow{x_2} - \sin(\theta_{12})\ \overrightarrow{y_2} \\ \overrightarrow{y_1} = \cos(\theta_{12})\ \overrightarrow{y_2} + \sin(\theta_{12})\ \overrightarrow{x_2} \\ \overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z_2} \end{cases}$$