Devoir à la maison n° 10

À rendre le 12 janvier

On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ f(xf(y)) = yf(x) \text{ et } f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty \qquad (*)$$

Soit f une telle fonction.

1) *Questions préliminaires :* Soit $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ un morphisme multiplicatif continu, *i.e.* g est continue et

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ g(xy) = g(x)g(y).$$

a) Montrer que pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$, $g(x^n) = g(x)^n$.

b) En déduire que, pour tout $x > 0$, $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$, $g(x^{p/q}) = g(x)^{p/q}$.

c) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > 0$, $g(x) = x^\alpha$.
Indication : On pourra raisonner par analyse-synthèse pour exprimer un tel éventuel α en fonction de $g(\mathrm{e})$ dans la synthèse, puis dans l'analyse, commencer par montrer le résultat pour les réels dont le logarithme est rationnel.

d) Les fonctions de cette forme là sont-elles toutes des morphismes multiplicatifs continus de $\mathbb{R}_+^*$?

2) **a)** Montrer que f est injective.

b) En déduire la valeur de $f(1)$.

c) Montrer que f est involutive, *i.e.* que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+^*}$.

3) **a)** Montrer que f est un endomorphisme multiplicatif de $\mathbb{R}_+^*$.

b) En déduire que, si $0 < x < 1$, alors $f(x) > 1$.

c) Que peut-on en déduire quant à la monotonie de f ?

d) En déduire que f est continue.

4) **a)** Déduire des questions précédentes la forme nécessaire de f.

b) Conclure.

— FIN —