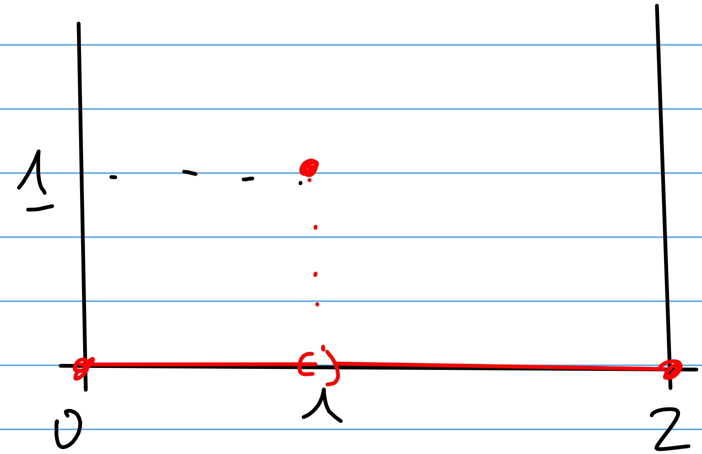
2.7.12 : ⚠ $\underline{\underline{f \in \mathcal{C}^0}}$ indispensable.

Ex :



$$f : [0,2] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq 1 \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

a) $\displaystyle\int_0^2 f = 0$

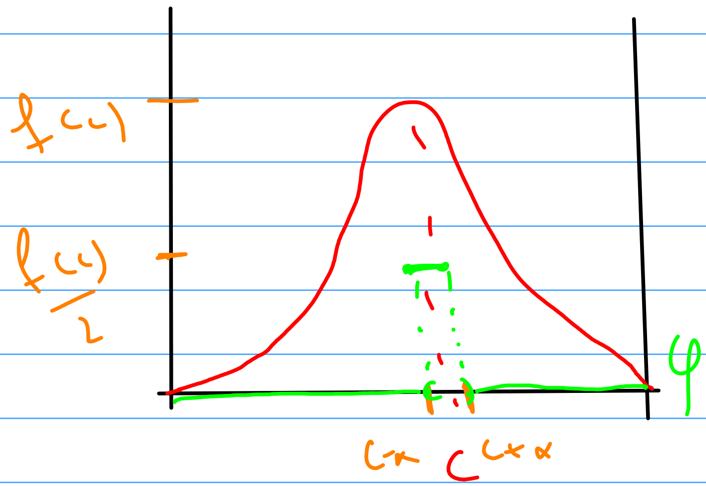
car $f = 0$ à 1 pt près.

b) $f \geqslant 0$ et pourtant $f \not\equiv 0$!!

$$\boxed{\text{S : } f \in \mathcal{C}^0} \quad \begin{cases} \int_a^b f = 0 \\ f \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow f = 0$$

<u>Contraposée :</u> $\begin{cases} \cdot\ f \geq 0 \\ \cdot\ f \neq 0 \quad (\text{i.e } \exists c \in [a,b],\ f(c)>0) \\ \cdot\ f \text{ continue} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f > 0 \quad \left(\cdot \int_a^b f \geq 0,\ \int_a^b f \neq 0\right)$$



$f(c) > 0$, $\varepsilon = f(c)/2$

$\exists \alpha > 0, \forall x \in]c-\alpha, c+\alpha[,$

$$0 < \underbrace{f(c) - \varepsilon}_{= f(c)/2} < f(x) < f(c) + \varepsilon$$

$f \geq \varphi$, $\int_a^b f \geq \int_a^b \varphi > 0$.

Th. 32.T : $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, mq :

$$F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

est 1 primitive de f.

Soit $x_0 \in [a,b]$, mq. F est dérivable en x_0,
et $F'(x_0) = f(x_0)$.

Soit $x \in [a,b] \setminus \{x_0\}$,

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \left| \frac{\int_a^x f - \int_a^{x_0} f}{x - x_0} - f(x_0) \right|$$

$$= \left| \frac{\int_{x_0}^{x} f}{x - x_0} - f(x_0) \right| \qquad (A)$$

1^{er} cas : $x < x_0$:

$$(A) = \left| \frac{\cancel{-}\int_{x}^{x_0} f}{\cancel{-}(x_0 - x)} - \frac{1}{(x_0 - x)} \int_{x}^{x_0} \overbrace{f(x_0)}^{= C^{te}} \right|$$

$$= \frac{1}{\underbrace{x_0 - x}_{> 0}} \left| \int_{x}^{x_0} (f - f(x_0)) \right|$$

$$\underset{i.t}{\leq} \frac{1}{x_0 - x} \int_{x}^{x_0} |f - f(x_0)|$$

⚠ si $x > x_0$:

$$\left| \int_{x}^{x_0} \varphi \right| \leq \int_{x_0}^{x} |\varphi|$$

car $\int_{x}^{x_0} |\varphi| \leq 0$!!

f est continue en x_0 : si $\varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$ tq. $\forall x \in [a,b)$:

$$|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

de ici : si $x \in \left]x_0 - \alpha, x_0\right[$, on a :

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{x_0 - x} \int_x^{x_0} |f(t) - f(x_0)|\, dt$$

car : $t \in [x, x_0]$

$\in \left]x_0 - \alpha, x_0\right]$

de $|t - x_0| < \alpha$

$$\leq \frac{1}{x_0 - x} \int_x^{x_0} \varepsilon \, dt$$

$$\leq \varepsilon$$

de $\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0^-]{} f(x_0)$, idem à dte.

$\square$

5) Formules de Taylor :

Th : formule de Taylor avec reste intégral :

Soit $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$, $a, b \in I$.

alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n \, dt$$

⚠ ressemble à T-Y, grosse différence :

T.Y : local, T. reste $\int$: global

T.Y : valable que si $b \to a$, et dans ce cas le reste tend vers 0 et le reste est inconnu : $o((b-a)^n)$

On ne connait pas sa valeur, et on a juste 1 idée de la vitesse à laquelle le reste $\to 0$ qd $b \to a$.

Taylor : <u>toujours</u> valable $\hat{m}$ si b est très loin de a. Par contre, le reste peut être grand.

<u>Cor</u> : inégalité de Taylor-Lagrange :
$\hat{M}$ hypothèses ; on rajoute $a<b$ pour que (a,b) soit "à l'endroit".

Taylor avec reste intégral :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^n \right| = \left| \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n \, dt \right|$$

$$\underset{i.t}{\leq} \int_a^b \frac{\left|f^{(n+1)}(t)\right|}{n!} \underbrace{(b-t)^n}_{\geq 0} \, dt$$

$$\leq \int_a^b \max_{[a,b]} \left|f^{(n+1)}\right| \times \frac{(b-t)^n}{n!} \, dt$$

max existe car $f^{(n+1)}$ est cont. sur le seg^t $[a,b]$

$$\leq \max_{[a,b]} \left|f^{(n+1)}\right| \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_a^b$$

$$\leq \max_{[a,b]} \left|f^{(n+1)}\right| \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

En rajoutant le cas $a > b$, on peut obtenir 1 inégalité ds le cas g^{al} :

$\forall a,b \in I$ ($a<b$ ou $b<a$) :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leq \max \left| f^{(n+1)} \right| \times \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

2 applica° : ex. 22 feuille 20.

ex : T.o.L : Mq. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^x$

ie : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

ici on applique T. Lagrange avec :

$f = \exp$: $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

$a = 0$; $b = x$.

$\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\left| e^{x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^{k} \right| \leq \max_{\substack{[0,x] \\ \text{ou } [x,0]}} \left|\exp^{(n+1)}\right| \times \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

car $x \leq 0$ car $x > 0$

i.e. : $$\left| e^{x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k}}{k!} \right| \leq \underbrace{\max(1, e^{x})}_{= C^{te}} \times \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

x est <u>fixé</u>, c'est 1 c^{te}, c'est $n \longrightarrow +\infty$.

<u>ex classique</u> : $\frac{|x|^{n}}{n!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. $\frac{|x|^{n}}{n!} = \underbrace{\left(\frac{|x|}{1} \times \frac{|x|}{2} \times \cdots\right)}_{\text{borné}} \times \underbrace{\left(\frac{|x|}{n}\right)}_{\to 0}$

Si $n > \lfloor |x| \rfloor$: $\frac{|x|}{n} < 1$.

dc : si $n > \lfloor |x| \rfloor$:

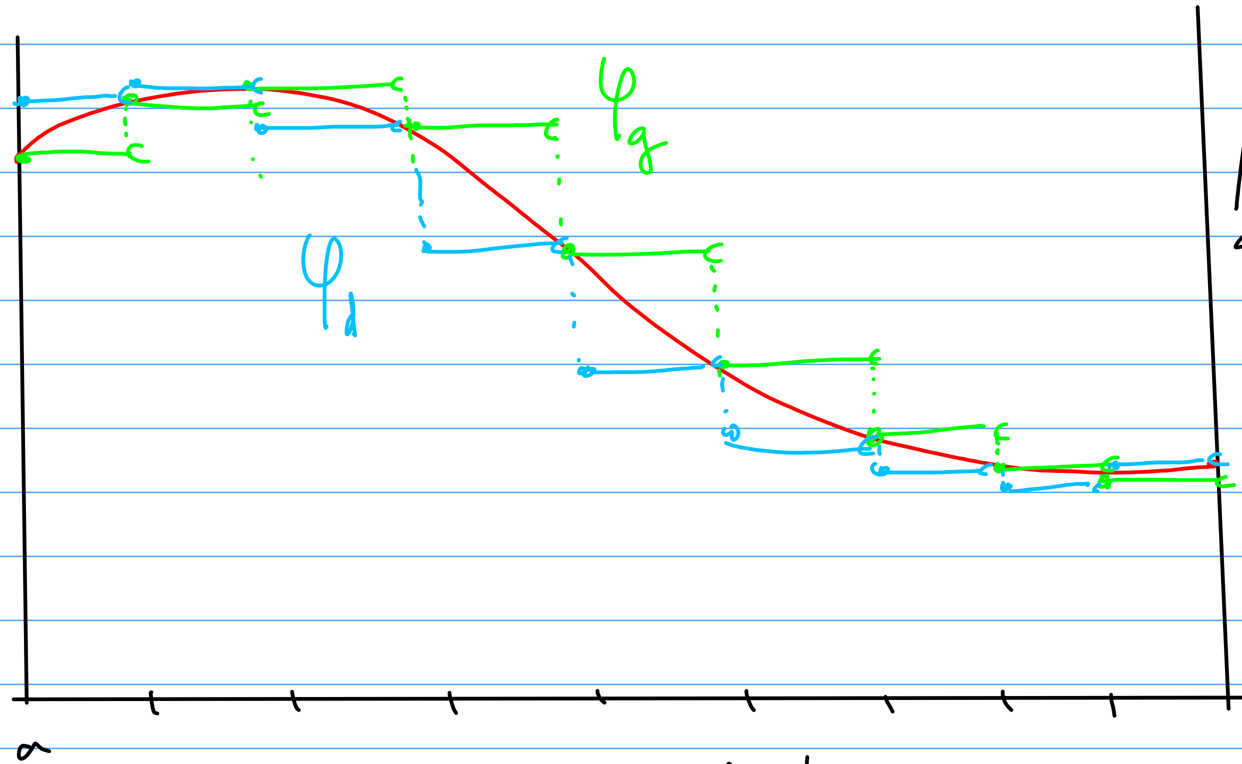
$$\frac{|x|^n}{n!} = \underbrace{\overbrace{\left[\frac{|x|}{1} \times \dots \times \frac{|x|}{\lfloor |x| \rfloor}\right]}^{\geq A} \times \overbrace{\left[\frac{|x|}{\lfloor |x| \rfloor + 1} \times \dots \times \frac{|x|}{n-1}\right]}^{<1}}_{< A \text{, dc borné}} \times \underbrace{\frac{|x|}{n}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

avec le th. des gendarmes :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{: cqfd.}$$

7) Approximation d'intégrales :



$$\int_a^b \varphi_g = \sum_{k=0}^{n-1} \overbrace{\frac{b-a}{n}}^{\text{base}} \times \underbrace{f(a_k)}_{\text{hauteur}}$$

hauteur // f (borne de gauche de $[a_k, a_{k+1}]$)

$$\int_a^b \varphi_d = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \times f(a_{k+1}) =$$

$= a_0 \quad \dots \quad \dots \quad a_k = a + k \times \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{=h} \quad = a_n$

On note les 2 sommes : $S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$

$$S'_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_{k+1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a_k)$$

Th : si $f \in \mathcal{C}^0$, $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f$

$S'_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f$

Det, si $f \in \mathcal{C}^1$: $\left| S_n - \int_a^b f \right| = O\left(\frac{1}{n}\right)$
$\left| S'_n - \int_a^b f \right| = O\left(\frac{1}{n}\right)$ cv. lente^{t}.

Dém : montrons le résultat si $f \in \mathcal{C}^0$.

$$\int_a^b f = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f \quad (\text{chasles})$$

On a : $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k) = f(a_k) \times (a_{k+1} - a_k)$

$$= f(a_k) \times \frac{b-a}{n}$$

Donc : $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k)$

d'où $\left|S_n - \int_a^b f\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} \big(f(a_k) - f(x)\big)\,dx\right|$

$$\underset{\text{I.T.}}{\le} \ (1)\ \sum_{k=0}^{n-1} \ (2)\ \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(a_k) - f(x)|\,dx.$$

Heine : f est unif. cont. sur $[a,b]$. Donc, si $\varepsilon > 0$,

il existe $\alpha > 0$ tq. $\forall x,y \in [a,b]$, $|x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

Si n est assez grand, tq. $\frac{b-a}{n} < \alpha$, alors, $\forall k$, $|a_{k+1} - a_k| < \alpha$ donc $\forall x \in [a_k, a_{k+1}]$,

$$|f(x) - f(a_k)| < \varepsilon$$

d'où :

$$\left| S_n - \int_a^b f \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(a_k) - f(x)| \, dx$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \varepsilon$$

$$\leq \varepsilon \times \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)$$

$$\leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} = (b-a)\varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left| S_n - \int_a^b f \right| \leq (b-a)\varepsilon$

dc $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f$, idem avec S'_n.

<u>Si $f \in \mathcal{C}^1$:</u> on a de + : f' est cont. sur $[a,b]$

re f' bornée, dc f est lipsch. $\square$

Cette méthode d'approxima° de $\int_a^b f$ est appelée méthode des rectangles.

On appelle somme de Riemann une somme de la forme S_n ou S'_n.

$a_k = a + k\frac{b-a}{n} = 0 + k \times \frac{1-0}{n} = \frac{k}{n}$

ds 99% des cas: $a=0$, $b=1$

ds ce cas: $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $S'_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

On a tjrs $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f$, $S'_n \longrightarrow \int_0^1 f$.

il y a pas mal d'exos de ce style :

" calculer la lim de $\sum_{k=0}^{n} z_k$ ".

il y a plusieurs manières d'étudier ces exos. On pense naturellement à 1 exo sur les séries. Mais parfois c'est 1 somme de Riemann : il faut apprendre à les repérer.

<u>ex 7.1.5</u> : $S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+3n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{k^2+3n^2}$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+3} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où : $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+3}$. f est continue sur $[0,1]$

Nous avons dc la somme de Riemann et :

$$S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f$$

et
$$\int_0^1 f = \int_0^1 \frac{1}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan \frac{x}{\sqrt{3}}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\pi}{6}$$

<u>Ex 7.1.6</u> : Soit $p \in \mathbb{N}$. $S_n^p = \sum_{k=1}^{n} k^p = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p \times n^p$

$$= \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\right) \times n^{p+1}$$

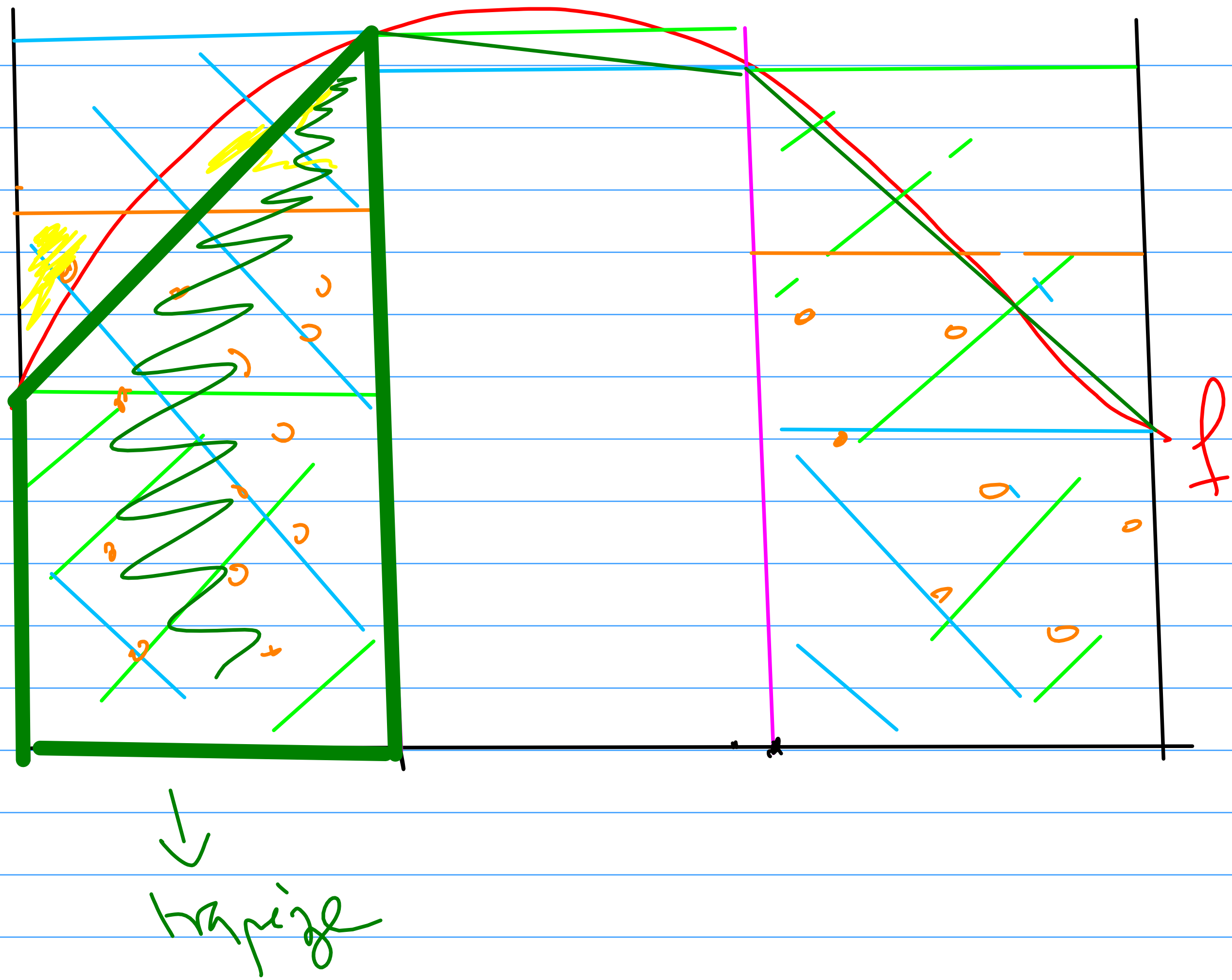
Or : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p$ est 1 somme de Riemann

qui a pr limite $\int_0^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1} \neq 0$

dc : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p+1}$

dc $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}$.

<u>Méthode des trapèzes</u> :



= moyenne de

et de

$$T_n = \frac{1}{2}\left(S_n + S'_n\right) = \frac{1}{2} \times \frac{(b-a)}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) + \sum_{k=1}^{n} f(a_k)\right)$$

+ 1 calcul

$$= \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(a_i) + \frac{1}{2}f(b)\right)$$

Calcul de S_n : calculer f en n pts
Calcul de T_n : ——————→ $n+1$ pts

) même complexité

"miracle" : si $f \in \mathcal{C}^2$, $\left| T_n - \int_a^b f \right| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

cvge bcp + rapide que S_n, pour le même prix.