Champ à force centrale

Exercice 1

Referentiel : $\mathcal{R}_G$ Galileen
Systeme : la Lune
Force : $\vec{F} = -G \frac{M_L M_T}{r_1^2} \vec{u}$

3ᵉ loi de Kepler : $\frac{T_L^2}{r_1^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$

$$\boxed{M_T = \frac{4\pi^2 r_1^3}{T_L^2 G} = 6{,}1 \; 10^{24} \text{ kg}}$$

(Si on demande la demonstration : 2ᵉ loi de Newton pour le mouvement circulaire, on obtient v, puis T)

Exercice 2.

Referentiel : Jupicentrique Galileen
Systeme : Satellite m
Force : $\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{u}$

1. Relation

3ᵉ loi de Kepler : $\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}}$

---

2. Masse de jupiter

T^2	$2{,}33\,10^{9}$	$9{,}41\,10^{10}$	$38{,}2\,10^{10}$	$208\,10^{10}$
r^3	$7{,}51\,10^{25}$	$30{,}2\,10^{25}$	$122{,}5\,10^{25}$	$664{,}5\,10^{25}$

on pose $x = r^3$ $y = T^2$ on a $ax + b = y$ est une droite de pente $4\pi^2/GM$

on obtient $T^2 = 9{,}11\,10^{-6} r^3 + 1{,}12\,10^{10}$

d'où $\boxed{M = \frac{4\pi^2}{Ga} = 1{,}9\,10^{27} \text{ kg}}$

Exercice 3

Referentiel : $\mathcal{R}_G$ Galiléen

Système : Satellite

1. Trajectoire circulaire

Force : $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{u}_r$

Loi : 2° loi de Newton $m\vec{a} = \vec{F}$

Projections : $\begin{cases} -m\frac{v^2}{r} = -\frac{GMm}{r^2} \\ m\frac{dv}{dt} = 0 \end{cases}$

le mouvement est uniforme $\boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{R_T + h_0}}}$

Energie potentielle : $E_p = -\frac{GMm}{r}$

Energie cinetique : $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$

Energie mecanique $\boxed{E_m = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r}}$

La periode $T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\frac{(R_T + h_0)^{3/2}}{\sqrt{GM}}}$

2. Forme globale de la trajectoire

Du fait des frottements l'energie mecanique diminue. Donc le rayon de l'orbite diminue aussi (à cause du signe ⊖)

spirale

3. Variation d'altitude

On suppose que l'orbite reste quasi-circulaire

Pour un tour $\Delta h = -\alpha T$ (α est constant)

Theoreme des petites variations :

$$\Delta v \simeq v'(h)\Delta h = \frac{-\sqrt{GM}}{2(R_T+h)^{3/2}}\,\Delta h$$

or $T = \dfrac{2\pi (R_T+h)^{3/2}}{\sqrt{GM}}$

on a alors $\Delta v \simeq -\Delta h \cdot \dfrac{2}{T}$

d'où $\boxed{\Delta v = a\pi}$

La vitesse augmente $(E_c = -E_m)$

Exercice 4

Referentiel : $\mathcal{R}_G$ Galileen
Systeme : le satellite
Force : $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{u}$

1. Satellite rasant

- Vitesse pour une orbite circulaire $v = \sqrt{\frac{GM}{R_T + h}}$

or $h = 0$

et sur terre $F = \frac{mGM}{r_0^2} = mg_0$

d'où $GM = r_0^2 g_0$

$\Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{r_0 g} = 7,92 \text{ km/s}}$

- 3e loi de Kepler : $\frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \frac{4\pi^2}{r_0^2 g_0}$

d'où $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{r_0}{g_0}} = 5077 s = 1^h 24 mn 37 s}$

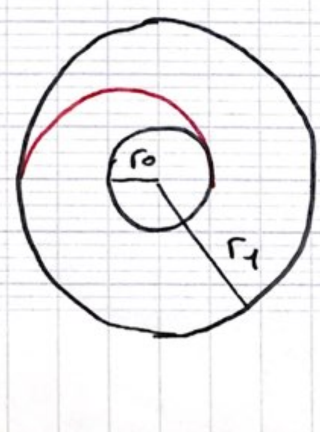
2. Satellite Geostationnaire

- 3e loi de Kepler $\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{4\pi^2}{r_0^2 g_0}$

d'où $\boxed{r_1 = \left(\frac{T_1}{2\pi} r_0\right)^{2/3} g_0^{1/3} = 42,3 \, 10^3 \text{ km}}$

- Mouvement circulaire $\boxed{v_1 = r_0\sqrt{\frac{g_0}{r_1}} = 3,08 \text{ km/s}}$

3.1 Schema



3.2. Vitesse sur l'orbite elliptique

Energie mecanique sur l'orbite elliptique :

$$E_m = -\frac{GMm}{2a} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

d'où $$-\frac{r_0^2 g}{r_0+r_1} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{r_0^2 g_0}{r}$$

d'où $$v = \sqrt{2g_0 r_0^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0+r_1}\right)}$$

en P $r = r_0$ $$\boxed{v_P = v_0' = \sqrt{2g_0 \frac{r_0 r_1}{r_1+r_0}} = 10,4 \text{ km/s}}$$

en A $r = r_1$ $$\boxed{v_A = v_1' = \sqrt{2g_0 \frac{r_0^3}{r_1(r_0+r_1)}} = 1,58 \text{ km/s}}$$

3.3 Duree du transfert

Le transfert correspond à une demi ellipse $\tau = \frac{T_e}{2}$

3° loi de Kepler $\frac{T_e^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{g_0 r_0^2}$

$$\Rightarrow T_e = \frac{2\pi}{r_0\sqrt{g_0}} \cdot \frac{(r_1+r_0)^{3/2}}{2\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\tau = \frac{\pi}{r_0\sqrt{g_0}} \frac{(r_1+r_0)^{3/2}}{2\sqrt{2}} = 1,88\ 10^4 \text{ s} = 5 \text{ h } 14 \text{ mn.}}$$

Exercice 5

Referentiel : $\mathcal{R}_G$ Galiléen
Systeme : Satellite
Force : $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{u}$

1. Schema

2 Le demi grand axe

$$a = \frac{r_A + r_P}{2}$$

$$\boxed{a = \frac{d_A + d_P + 2R_T}{2} = 24,4\ 10^3\ km}$$

3. Energie mecanique

$$\boxed{E_m = -\frac{GMm}{2a} = -8,97\ 10^{12}\ J}$$

La periode
3e loi de Kepler : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} = 38\ 10^3 s = 0,44\ Jours}$$

4. Le moment cinetique

En A et en P la vitesse et le rayon vecteur sont perpendi-
-culaires

$\boxed{L_O = m r_A v_A = m r_P v_P}$ car le moment cinetique est constant.

5. Vitesse en P

D'apres la question 4 $\boxed{v_P = v_A \frac{r_A}{r_P} = 22,4\ 10^3\ m/s}$