Devoir surveillé n° 09 - Remarques

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 36 points, ramené sur 5 points.
- Problèmes : exercice vu en TD, 6 points par question, et les autres questions sur 4 points (v1 sur 106 points, v2 sur 60 points), ramené sur 15 points.

Statistiques descriptives.

	Calculs	Sujet 1 (sur 106)	Sujet 2 (sur 60)	Note finale
Note maximale	33	38	46	
Note minimale	7	7	9	
Moyenne	$\approx 22,02$	26	$\approx 26,47$	$\approx 9,82$
Écart-type	$\approx 6,30$	$\approx 8,59$	$\approx 10,68$	$\approx 3,21$

Remarques générales.

I. Version 1

A). Exercices vus en TD.

On ne dirait vraiment pas que ces exercices ont été vus en TD. Déprimant ...
Si vous n'avez rien compris à ce qu'on a fait en TD, **POSEZ DES QUESTIONS**, **DEMANDEZ À CE QUE L'ON REFASSE CES EXERCICES !**

B). Tirages dans une urne.

Beaucoup ont confondu événements et variables aléatoires : les B_k sont des v.a., donc $P(B_k)$ n'a aucun sens.

1) Vous affirmez quasiment tous de but en blanc que B_1 suit une loi uniforme. Mais pourquoi serait-ce le cas ? Dire que l'on tire les boules « au hasard » ou « de manière aléatoire » ne prouve rien : et si l'urne est truquée ? Et vous ne pouvez pas non plus affirmer que l'on a cela « d'après l'énoncé », qui ne dit rien à ce sujet.
De manière classique, c'eest à vous de prendre l'initiative et de dire que l'on modélisera le problème en supposant que B_1 suit une loi uniforme. Le correcteur s'attend à lire cela.
Beaucoup confondent la loi uniforme et la loi de Bernoulli (et non Bernouilli). Mais ici B_1 n'est pas à valeurs dans $\{0, 1\}$, donc elle ne peut pas suivre une loi de Bernoulli.
Pour les calculs de l'espérance et de la variance, ce sont des questions de cours et il ne faut donc pas refaire le détail des calculs.

3.b) Quand vous utilisez la formule des probabilités totales, il faut le dire, et il faut aussi préciser le système complet d'événements. Ici, c'était $(B_k = i)_{1 \leqslant i \leqslant k+1}$. Dans le calcul, seuls les événements $(B_k = k)$ et $(B_k = k + 1)$ intervenaient dans le résultat final. Pour autant, n'utiliser que ces deux

événements dès le début était une erreur : ils ne forment pas un système complet !
J'ai mis 2 pts sur 4 à ceux qui ne précisaient pas le système complet mais le faisaient tout de même apparaître dans le calcul, et 0 à ceux qui n'utilisaient pas le bon système au début du calcul.

4) Que d'erreurs pour des calculs si simples !

5.a) L'une des rares questions dans lesquelles il y a eu une **HORREUR** : on note A_i l'événement « tirer une boule blanche au i-ème tirage ». Alors $P(B_k = 1) = P(\bigcap_{i=1} kA_i) = \prod_{i=1} kP(A_i)$. Et pourquoi donc ? Soit vous ne le justfiez pas, soit vous dites que les A_i sont indépendants. Argh ...

5.d) On vous demande de montrer : $A = a$, $B = b \Rightarrow (b_k)$ est géométrique.
La plupart du temps, vous montrez que si (b_k) est géométrique, alors $A = 1$ et $B = 2$: c'est la réciproque de ce que l'on veut, donc on s'en fiche totalement. Vous faites une analyse sans le dire, pourquoi pas, ça vous donne les valeurs qui conviennent, mais vous ne faites pas la seule chose qui nous intéresse : la **synthèse** !

9.b) Le piège classique, la deuxième grosse horreur du devoir : B_0 et B_1 ont une covariance nulle, donc elles sont indépendantes. Argh ...

II. Version 2

Les formules des probabilités totales et conditionnelles étaient très souvent utilisées dans ce devoir. Il fallait à chaque fois justifier clairement leur emploi, sinon les points s'envolaient (2/4 pour une utilisation correcte mais mal justifiée, 0/4 pour une mauvaise utilisation, même si à la fin le résultat était bon).
Les rédactions en français du style « on fait ci, on fait ça, il reste tant de boules, on voit bien que ..., on a telle situation ou telle autre ... etc ... » ne rapportaient en général aucun point : il faut introduire les bons événements, signaler les systèmes complets, utiliser les bonnes probabilités conditionnelles et ainsi de suite.

2) Il fallait utiliser les probabilités conditionnelles, et faire une récurrence.
Dans cette question, comme dans la question **6**, il y a eu très souvent cette horreur : si B_i est l'événement « tirer une boule blanche au i-ème tirage », alors si l'on a $B_1 \cap \cdots \cap B_k$, la situation à la fin du k-ème tirage est la même qu'au début, donc les B_i sont mutuellement independants ». Vous croyez vraiment que la couleur de la boule tirée n'a aucune influence sur les tirages suivants ? ? ? ? Ici, ce que l'on avait, c'est : $P(B_k | \bigcap_{i=1}^{k-1} B_i) = B_1$, mais c'est une probabilité conditionnelle, $P(B_k) = P(B_1)$ est totalement faux. Le résultat final, $P(\bigcap_{i=1}^{k} B_i) = \prod_{i=1}^{k} P(B_i)$ est correct, mais il ne vient pas du tout du fait que les B_i sont indépendants, mais de la formule des probabilités conditionnelles itérée.

8.b) Il fallait remarquer que la suite $(E[X_n])$ était arithmético-géométrique, plutôt que de faire une récurrence (ce qui était tout de même correct, mais montrait au correcteur que vous ne maîtrisiez pas forcément votre cours).
Ne parlez pas de « point fixe d'une suite », cela ne veut rien dire. Il s'agissait du point fixe de la **fonction** $x \mapsto \left(1 - \frac{1}{N}\right)x + \frac{b}{N}$.