XXVIII Séries numériques

26 novembre 2021

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1 Prolégomènes

Définition 1.1.
À toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ on associe la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

- Cette suite (S_n) est appelée *série de terme général* u_n. On la note $\sum u_n$ ou $\sum_{n\geqslant 0} u_n$. L'indice n est bien entendu muet.
- Lorsque la suite (u_n) n'est définie qu'à partir d'un certain rang n_0, la série de terme général u_n est définie par la suite $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$, pour tout $n \geqslant n_0$. Elle est notée $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$.
- Le terme d'indice n de la suite (S_n) s'appelle la *somme partielle d'indice (ou d'ordre)* n, ou n^e *somme partielle* de la série $\sum u_n$.
- On dit que la série $\sum u_n$ *converge* si la suite (S_n) converge. Dans ce cas la limite de (S_n) est appelée *somme de la série* $\sum u_n$ et notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
  Dans le cas contraire on dit que la série *diverge*.
- La *nature* d'une série est sa convergence ou sa divergence. Deux séries sont dites *de même nature* si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

Remarque 1.2.
Une série n'est donc qu'une suite, et on peut donc lui appliquer tous les résultats connus sur les suites. Réciproquement, toute suite est une série (*cf.* 1.9).

Remarque 1.3.
Si (u_n) est complexe, notons (a_n) sa partie réelle et (b_n) sa partie imaginaire. Alors, en vertu du cours sur les suites, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent, et dans le cas de convergence, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Exemple 1.4 (Séries arithmétiques)**.**
Les séries de la forme $\sum na$, avec $a \in \mathbb{C}$, ne sont convergentes que si $a = 0$.

Dans tous les cas la somme partielle S_n vaut $a\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Définition 1.5.
Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série convergente, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{k\geqslant n} u_k$ converge également. Sa somme $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appelée *reste d'ordre (ou d'indice)* n de la série $\sum u_n$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k,$$

soit, en notant S_n la somme partielle d'ordre n et R_n le reste d'ordre n,

$$S_n + R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $N \geqslant n$. Alors,

$$\sum_{k=n+1}^{N} u_k = \sum_{k=0}^{N} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = S_N - S_n.$$

Comme (S_N) converge vers $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, alors $\sum_{k\geqslant n+1} u_k$ converge et sa somme est donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n.$$

□

Exemple 1.6 (Séries géométriques)**.**
Les séries de la forme $\sum z^n$, avec $z \in \mathbb{C}$, sont convergentes si et seulement si $|z| < 1$. Dans tous les cas la somme partielle S_n vaut $\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$ si $z \neq 1$, et $n+1$ si $z = 1$.

Si $|z| < 1$, alors la somme de la série est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Le reste de la série est

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} z^k = \frac{z^{n+1}}{1-z}.$$

Remarque 1.7.
Soit $\sum u_n$ une série convergente, dont on note S_n et R_n les restes à l'ordre n.

Alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S_n + R_n$ et $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

En particulier, si $|R_n| < \varepsilon$, on peut dire que S_n est une approximation de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ à ε près.

Proposition 1.8.
Deux séries dont les termes généraux sont égaux à partir d'un certain rang ont même nature.

Démonstration.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites égales à partir du rang N. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.

Alors pour tout $n \geqslant N$, $S_n = S'_n + (S_N - S'_N)$. □

Proposition 1.9 (Lien suite-série)**.**
L'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ u & \longmapsto & S = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$$

est un automorphisme d'espaces vectoriels.

Sa réciproque est l'application $\varphi^{-1} : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, où pour tout $S \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $u = \varphi^{-1}(S)$ est la suite définie par

$$u_0 = S_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Démonstration.
La linéarité de φ est facile à vérifier. Il est également aisé de montrer que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \mathrm{Id}$. □

Remarque 1.10.
En posant $S_{-1} = 0$, on peut écrire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} S_k - S_{k-1}.$$

Toute série peut donc être vue comme une série télescopique.

Proposition 1.11 (Séries télescopiques)**.**
La suite (u_n) et la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ ont même nature.

Dans le cas de convergence,

$$u_n - u_0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} - u_n.$$

Démonstration.
Nous savons déjà que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ont même nature.

De plus la somme partielle d'indice n de la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ vaut $u_{n+1} - u_0$ par sommation télescopique. Elle est donc égale au terme u_{n+1}, à une constante près, et a donc la même nature que la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Dans le cas de convergence, il reste à passer à la limite dans la relation $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}(u_{n+1} - u_n) = u_{N+1} - u_0$. □

Exemple 1.12.
La série $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{1}{n(n+1)}$ converge. En effet pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, et la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n>0}$ converge.

Nous pouvons même aller plus loin : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

On voit aussi que le reste d'ordre n vaut $\dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 1.13.
En simplifiant $\dfrac{(n+1)-n}{1+n(n+1)}$, montrer que $\sum \arctan \dfrac{1}{1+n+n^2}$ converge et calculer sa somme.

Proposition 1.14 (Linéarité de la somme)**.**
L'ensemble des suites dont la série est convergente, muni des lois $+$ et $\cdot$, forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application qui à une telle suite associe la somme de sa série est linéaire.

Démonstration.
Élémentaire, d'après les résultats sur les suites. □

Finissons par le résultat principal de cette première partie :

Théorème 1.15 (Divergence grossière)**.**
(i) Si la série $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
(ii) Si la suite (u_n) ne tend pas vers 0, on dit que la série $\sum u_n$ *diverge grossièrement.*

Démonstration.
(i) Supposons que la série $\sum u_n$ converge. Puisque pour tout $n > 0$, $u_n = S_n - S_{n-1}$, alors u_n est la différence des termes généraux de deux suites convergeant vers la même limite. La suite (u_n) tend donc vers 0.
(ii) C'est la contraposée du premier point.

□

Exemple 1.16.
La série $\sum \cos n$ diverge grossièrement. En effet, en supposant que $\cos n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, la relation $\cos(2n) = 2\cos^2 n - 1$ donne une contradiction.

Remarque 1.17 ( )**.**
La réciproque du premier point du théorème 1.15 est fausse. On peut citer en exemple la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$, qui sera revue plus tard.

Donnons également l'exemple de la suite $u_n = \ln(n+2) - \ln(n+1) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)$. Évidemment, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Mais $\sum_{k=0}^{n} u_k = \ln(n+2)$, par sommation télescopique. La série $\sum u_n$ diverge donc.

Concluons sur un dernier exemple, fondamental.

Proposition 1.18 (série exponentielle)**.**
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{z^n}{n!}$ converge et

$$\mathrm{e}^{\,z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Démonstration.
Soit $z \in \mathbb{C}$, soit $f : t \mapsto \mathrm{e}^{\,tz}$, que l'on définit sur $\mathbb{R}$. Alors, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n)} : t \mapsto z^n \mathrm{e}^{\,tz}.$$

Alors, par l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et 1, pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\left|\mathrm{e}^{\,z} - \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}\right| \leqslant \frac{1^{N+1}}{(N+1)!} \sup\left\{ \left|z^{N+1}\mathrm{e}^{\,tz}\right| \;\middle|\; t \in [0,1] \right\}.$$

Or, si $0 \leqslant t \leqslant 1$, en écrivant sous forme algébrique $z = a + ib$, on a

$$\left|z^{N+1}\mathrm{e}^{\,tz}\right| = |z|^{N+1}\left|\mathrm{e}^{\,ta}\mathrm{e}^{\,itb}\right| = |z|^{N+1}\mathrm{e}^{\,ta} \leqslant |z|^{N+1}\max(1, \mathrm{e}^{\,a}).$$

Ainsi,

$$\left|\mathrm{e}^{\,z} - \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}\right| \leqslant \frac{(t|z|)^{N+1}}{(N+1)!}\max(1, \mathrm{e}^{\,a})$$

Par croissances comparées, $\dfrac{(t|z|)^{N+1}}{(N+1)!} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$, ce qui permet de conclure. □

2 Séries à termes réels positifs

Étudions maintenant le cas particulier où tous les termes d'une série sont des réels positifs ou nuls. La propriété fondamentale est dans ce cas la suivante.

Proposition 2.1.
Soit (u_n) une suite à valeurs positives et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Alors la suite (S_n) est croissante.

Démonstration.
Tout simplement, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$. □

Remarque 2.2.
Attention, une série peut ne pas être à terme positifs mais avoir toutes ses sommes partielles positives, comme la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n$.

Proposition 2.3.
Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Démonstration.
La suite des sommes partielles est croissante. Elle est donc convergente si et seulement si elle est majorée, comme conséquence directe du théorème de la limite monotone. □

Proposition 2.4.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

(i) Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ également et $0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

(ii) Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ également.

Démonstration.
Il suffit de remarquer que si (S_n) est la suite des sommes partielles de $\sum u_n$ et (S'_n) celle de $\sum v_n$, alors $0 \leqslant S_n \leqslant S'_n$.

(i) (S'_n) converge, donc est majorée, donc (S_n) est également majorée, et comme elle est croissante, elle converge également. Il reste alors à passer à la limite dans la relation $0 \leqslant S_n \leqslant S'_n$.

(ii) c'est le théorème de minoration.

□

Remarque 2.5.
Si la relation $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ n'est vérifiée qu'à partir d'un certain rang, le résultat du théorème 2.4 est valable, à ceci près que dans le point (i) on ne peut pas conclure que $0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$, mais seulement $0 \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} v_n$.

Exemple 2.6.
$\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ converge et

$$1 < \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < 2.$$

En effet, pour tout $n > 0$, $0 < \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$, donc $0 < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < 1$ car $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. Puisque pour $n = 0$, $\frac{1}{(n+1)^2} = 1$, il vient le résultat.

Corollaire 2.7.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives, (v_n) ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

(i) Si $u_n = O(v_n)$, alors la convergence de $\sum v_n$ entraîne celle de $\sum u_n$.

(ii) Si $u_n = o(v_n)$, alors la convergence de $\sum v_n$ entraîne celle de $\sum u_n$.

(iii) Si $u_n \sim v_n$ (donc (u_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang), alors $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature.

Démonstration. (i) $\frac{u_n}{v_n}$ est bornée par un certain réel $M > 0$, donc à partir d'un certain rang, $0 \leqslant u_n \leqslant M v_n$ car (u_n) et (v_n) sont positives. On conclut donc avec 2.4.

(ii) si $u_n = o(v_n)$, alors en particulier $u_n = O(v_n)$.

(iii) si $u_n \sim v_n$, alors $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.

□

Exemple 2.8.
Puisque $\sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \sim \frac{1}{2^n}$, d'après le résultat sur les séries géométriques, $\sum \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$ converge.

Pour pouvoir utiliser le dernier corollaire, nous avons besoin de « séries étalon », dont la nature est bien connue, et auxquelles on compare les séries à étudier. Les quelques exemples déjà étudiés font partie de ces séries de référence standard, mais la famille de séries la plus utilisée est celle des *séries de Riemann*, dont font partie la série harmonique et la série $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$.

Théorème 2.9.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration.
Si $\alpha = 1$, remarquons que $\frac{1}{n} \sim \ln(n+1) - \ln n$. Donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est de même nature que $\sum_{n\geqslant 1}(\ln(n+1) - \ln n)$, qui elle-même est de même nature que la suite $(\ln n)$ d'après 1.11, d'où la divergence.

Si $\alpha \neq 1$, $\frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right)$ (effectuer un développement asymptotique de $\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$ ou appliquer l'inégalité des accroissements finis à $x \mapsto x^{1-\alpha}$). La série de terme général $\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$ est de même nature que la suite $\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$, d'où le résultat.

On peut aussi remarquer que si $\alpha \leqslant 0$, la divergence est grossière, et si $0 < \alpha < 1$, la série diverge car $\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n}$. □

Le résultat classique suivant est une application directe de 2.7 et 2.9 :

Corollaire 2.10 (Règle $n^\alpha u_n$)**.**
Soient (u_n) une suite réelle positive et $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) S'il existe $\alpha > 1$ telle que $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $\sum u_n$ converge.

(ii) S'il existe $\alpha \leqslant 1$ telle que $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.

(iii) Si la suite $(n^\alpha u_n)$ converge vers une limite non nulle, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. (i) si $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

(ii) si $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors $\frac{1}{n^\alpha} = o\left(u_n\right)$, et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

(iii) si la suite $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ ont même nature.

□

Exemple 2.11 (Séries de Bertrand)**.**
Soient α, $\beta \in \mathbb{R}$. On considère la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(\ln n)^\beta n^\alpha}$.

• Si $\alpha > 1$: il existe $\gamma \in]1, \alpha[$ et $n^\gamma \frac{1}{(\ln n)^\beta n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées, car $\alpha - \gamma > 0$. Ainsi la série converge.

• Si $\alpha < 1$: il existe $\gamma \in]\alpha, 1[$ et $n^\gamma \frac{1}{(\ln n)^\beta n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par croissances comparées, car $\alpha - \gamma < 0$. Ainsi la série diverge.

• Si $\alpha = 1$: si $\beta \leqslant 0$, le terme général est plus grand que $\frac{1}{n}$, donc la série diverge. Nous traiterons le cas $\beta > 0$ en 3.3.

3 Comparaison série-intégrale

Proposition 3.1.
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue par morceaux et décroissante.
Alors la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ est convergente.
De plus la suite définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} f(k) -$

$\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Par décroissance de f, on a :

$$\forall t \in [k, k+1],\ 0 \leqslant f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k).$$

Puis, par intégration de cet encadrement sur $[k, k+1]$:

$$0 \leqslant f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \qquad (1)$$

et par sommation, pour $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \leqslant \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

ou encore

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) - f(0) \leqslant \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) - f(n). \quad (2)$$

Les suites $\sum_{k=0}^{n} f(k)$ et $\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ ont donc la même nature.

De plus, il vient $0 \leqslant f(n) \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$, soit $0 \leqslant u_n$. Ainsi (u_n) est minorée. Enfin, on a

$$u_{n+1} - u_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0.$$

La suite (u_n) est donc décroissante et minorée et converge donc. □

Remarque 3.2.
L'encadrement 1 est à rapprocher de la méthode des rectangles, vue dans le chapitre sur l'intégration.

Exemple 3.3.
Achevons l'étude des séries de Bertrand commencée en 2.11.

Si $\beta > 0$, considérons l'application $f : t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^\beta}$. Elle est continue et décroissante sur $[2, +\infty[$.

Si $\beta = 1$, une primitive de f est $F : t \mapsto \ln(\ln t)$ et $\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t = F(n) - F(2)$. Or $F(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la série diverge.

Par comparaison, la série diverge également si $0 \leqslant \beta < 1$.

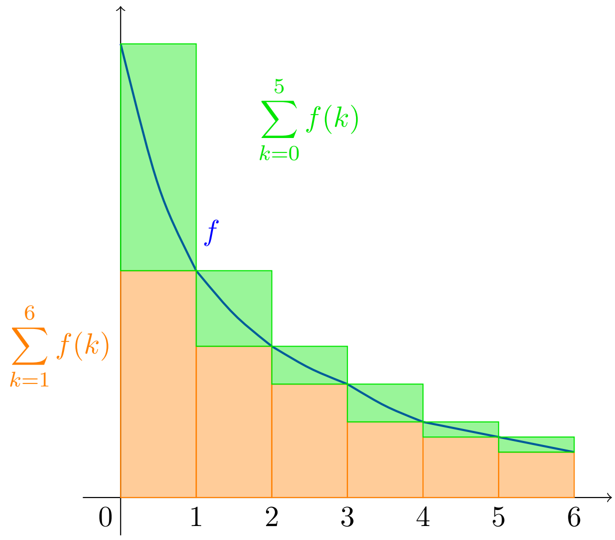

FIGURE 1 – Exemple de comparaison série-intégrale pour une fonction f décroissante, positive.

Si $\beta > 1$, une primitive de f est $F : t \mapsto \frac{(\ln t)^{1-\beta}}{1-\beta}$ et $\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t = F(n) - F(2)$. Or $F(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $1 - \beta < 0$, donc la série converge.

Exercice 3.4.
Redémontrer le résultat 2.9 en utilisant 3.1.

Exemple 3.5.
On pose $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$. On sait alors que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) - \int_0^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ converge, vers une limite notée γ et nommée *constante d'Euler*.

Exemple 3.6.
L'encadrement (2) permet d'avoir une estimation du reste d'une série convergente de la forme $\sum f(n)$ avec f décroissante.

Par exemple, soit $f \ : \ x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$. Alors

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N} = \int_{n+1}^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \sum_{n+1}^{N} \frac{1}{n^2} \leqslant \int_{n}^{N-1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{N-1}$$

et en passant à la limite quand $N \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$,

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \sum_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Si l'on veut une approximation de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ à 10^{-3} près, il suffit donc de choisir $n = 1000$ et de calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 3.7.
On peut obtenir une approximation de cette somme en calculant seulement la somme d'une trentaine de termes. Comment ?

4 Séries absolument convergentes

Revenons à des séries à termes quelconques dans $\mathbb{K}$. Nous allons étudier une convergence plus restreinte que la convergence définie en 1.1 : la *convergence absolue*.

Définition 4.1.
On dit que la série $\sum u_n$ est *absolument convergente* si la série à termes positifs $\sum |u_n|$ converge.

Exemple 4.2.
Si $z \in \mathbb{C}$, alors $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument.

Proposition 4.3.
Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration.
Commençons par établir le résultat pour des suites à valeurs réelles. Pour cela, définissons pour une suite (u_n) les deux suites (u_n^-) et (u_n^+) définies par : $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$. Nous avons alors :

$$u_n^+ = \begin{cases} 0 & \text{si } u_n < 0 \\ |u_n| & \text{si } u_n \geqslant 0 \end{cases}$$

$$u_n^- = \begin{cases} 0 & \text{si } u_n > 0 \\ |u_n| & \text{si } u_n \leqslant 0 \end{cases}$$

$$0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n| \tag{3}$$

$$0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n| \tag{4}$$

$$u_n = u_n^+ - u_n^- \tag{5}$$

$$|u_n| = u_n^+ + u_n^-.$$

De (3) et (4) on tire que $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont convergentes car $\sum |u_n|$ est convergente.
De (5) on tire que $\sum u_n$ est convergente.

Étendons maintenant ce résultat au cas d'une suite (u_n) à valeurs complexes absolument convergente. Pour tout n, on a $0 \leqslant |\mathrm{Re}\, u_n| \leqslant |u_n|$, or la série $\sum |u_n|$ converge, donc la série $\sum |\mathrm{Re}\, u_n|$ est convergente, donc $\sum \mathrm{Re}\, u_n$ est absolument convergente, donc convergente d'après le premier point. De même $\sum \mathrm{Im}\, u_n$ converge. Donc $\sum u_n$ converge. $\square$

La réciproque est fausse. Soit par exemple la suite de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} - \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1} = v_n - v_{n+1}$, avec $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. La série $\sum u_n$ est donc de même nature que la suite (v_n), elle converge donc.
Mais $|u_n| = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} \sim \dfrac{2}{n}$, donc $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente. On dit qu'une telle suite, convergente mais pas absolument, est *semi-convergente*. L'étude de telles suites est souvent délicate !

Corollaire 4.4.
Soit (u_n) une suite complexe et (v_n) une suite à termes positifs telles que $|u_n| = O(v_n)$. Alors si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ également.

Démonstration.
Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge absolument, donc converge. □

Remarque 4.5.
Une série à termes de signe constant converge absolument si et seulement si elle converge.

Proposition 4.6.
L'ensemble des séries absolument convergentes est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des séries convergentes.

Démonstration.
Élémentaire par l'inégalité triangulaire. □

Proposition 4.7.
Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Alors

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Démonstration.
Soit $N \in \mathbb{N}$, alors, par l'inégalité triangulaire,

$$\left|\sum_{n=0}^{N} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |u_n| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

On conclut par passage à la limite en N. □

Un exemple important est celui de la série exponentielle.

Théorème 4.8.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument.

Démonstration.
$\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left|\frac{z^n}{n!}\right| = \sum_{n\geqslant 0} \frac{|z|^n}{n!}$, qui est une série exponentielle, donc converge. □

Les séries convergeant mais ne convergeant pas absolument sont appelées *séries semi-convergentes*. Leur étude est délicate, deux outils principaux étant souvent utilisés : le critère spécial des séries alternées (*cf. infra*) et la transformation d'Abel (voir la feuille de TD).

Théorème 4.9 (critère spécial des séries alternées, ou CSSA)**.**
Soit (u_n) une suite de réels positifs, décroissante et convergeant vers 0.

Alors, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$ converge.

De plus, en notant R_n le reste d'ordre n de la série et S_n sa somme partielle d'ordre n, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. $\displaystyle S_{2n+1} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n \leqslant S_{2n}$,
2. $R_n \leqslant 0$ si n est pair,
3. $R_n \geqslant 0$ si n est impair,
4. $|R_n| \leqslant u_{n+1}$

Démonstration.
Notons S_n la somme partielle d'ordre n de cette série. Il suffit de montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, pour obtenir qu'elles convergent vers une même limite et donc que (S_n) converge, c'est-à-dire que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$ converge.

Tout ceci est élémentaire. Considérons $n \in \mathbb{N}$.
— $S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
— $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0$ par décroissance de (u_n), donc (S_{2n}) est décroissante.
— $S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+3} \geqslant 0$ par décroissance de (u_n), donc (S_{2n+1}) est décroissante.

Ainsi, (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

Par adjacence de ces suites, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_{2n+1} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n \leqslant S_{2n}.$$

On obtient donc immédiatement que

$$R_{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n - S_{2n} \geqslant 0$$
$$R_{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n - S_{2n+1} \leqslant 0$$

On a aussi immédiatement

$$0 \leqslant R_{2n} = S_{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n \leqslant S_{2n} - S_{2n+1} = u_{n+1}$$

et de même, par l'encadrement,

$$S_{2n+1} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n \leqslant S_{2n+2},$$

on a

$$0 \geqslant R_{2n+1} = S_{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n \geqslant S_{2n+1} - S_{2n+2} = -u_{n+2}.$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, par disjonction de cas sur la parité de n :

$$|R_n| \leqslant u_{n+1}.$$

□

Remarque 4.10.
Comme $S_1 = u_0 - u_1 \leqslant 0$, on a alors $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n \geqslant 0$.

Remarque 4.11.
Le critère spécial des séries alternées est parfois formulé de la manière suivante : si $(|u_n|)$ est décroissante, si $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et si (u_n) est à signes alternées (*i.e.* pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n u_{n+1} \leqslant 0$), alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge. On a alors la majoration $|R_n| \leqslant |u_n|$, et l'on sait aussi que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est du même signe que u_0.

Exercice 4.12.
Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, et donner une valeur approchée rationnelle à 10^{-2} près de la somme de cette série.

5 Familles sommables

Nous allons maintenant nous intéresser à des situations où l'on somme des familles de nombres qui ne sont pas indicées par $\mathbb{N}$ (par exemple, on peut vouloir sommer des familles de nombres indicées par $\mathbb{Z}$, par $\mathbb{Q}$ ou par $\mathbb{N}^2$).

En pratique, l'ensemble d'indices ne peut pas être trop gros (on peut supposer qu'il est au plus *dénombrable*), vous étudierez cela plus en détail l'année prochaine.

Dans toute cette partie, I désigne un ensemble quelconque, non vide.

5.1 Familles sommables de réels positifs

Commençons par étudier les processus sommatoires de nombres positifs (en se permettant de sommer aussi $+\infty$). La positivité de ces nombres permet de s'affranchir de bon nombres de précautions, et de donner un sens très large à la notion de somme.

Notation 5.1.1.
On note $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, que l'on pourra aussi noter $[0, +\infty]$.

On se placera dans cette partie dans la droite numérique achevée $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, avec son ordre usuel les conventions de calcul habituelles.

Exemple 5.2.
Si $A \subset \mathbb{R}$ est une partie non vide et non majorée, on se permettra de plus d'écrire $\sup(A) = +\infty$.

Dans toute cette sous-partie, est une famille d'éléments de $\bar{\mathbb{R}}_+$, indicée par I.

Remarque 5.3.
On se permet donc d'avoir un $i \in I$ vérifiant $u_i = +\infty$.

Définition 5.4 (somme)**.**
La somme $(u_i)_{i\in I} \in (\overline{\mathbb{R}}_+)^I$ définie par

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup \left\{ \sum_{i\in F} u_i \;\middle|\; F \subset I \text{ t.q. } F \text{ est fini} \right\}.$$

Exemple 5.5.
On a $\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{ij} = +\infty$.

En effet, si pour $n \in \mathbb{N}^*$, si l'on considère $F_n = \{ (i, 1) \mid 1 \leqslant i \leqslant n \}$, qui est bien une partie finie de $(\mathbb{N}^*)^2$, alors

$$\sum_{(i,j)\in F_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Ainsi,

$$\sup\left\{ \sum_{i\in F} u_i \;\middle|\; F \subset (\mathbb{N}^*)^2 \text{ t.q. } F \text{ est fini} \right\} = +\infty.$$

Remarque 5.6.
On a donc toujours, pour toute $F \subset I$ finie,

$$\sum_{i\in F} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i.$$

Définition 5.7 (famille sommable)**.**
Une famille $(u_i)_{i\in I} \in (\overline{\mathbb{R}}_+)^I$ est dite sommable si l'ensemble des $\sum_{i\in F} u_i$, pour F parcourant les parties finies de I, est majoré.

La *nature* d'une famille est son caractère sommable ou non.

Remarque 5.8.
Pour une famille de réels positifs, la famille $(u_i)_{i\in I} \in (\overline{\mathbb{R}}_+)^I$ est sommable si et seulement si $\sum_{i\in I} u_i < +\infty$.

Exemple 5.9 (sommes finies)**.**
Dans le cas où $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ est un ensemble fini, alors

$$\sum_{i\in I} u_i = u_{i_1} + \cdots + u_{i_p},$$

et la famille $(u_i)_{i\in I} \in (\overline{\mathbb{R}}_+)^I$ est sommable si et seulement si tous les u_i sont réels.

Exemple 5.10 (séries numériques)**.**
Si $I = \mathbb{N}$ et si $(u_i) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$, alors la famille $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum_{i\geqslant 0} u_i$ converge. On a alors

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} u_i = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i.$$

En cas de divergence de la série, on a toujours l'écriture

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} u_i = +\infty.$$

On se permet donc d'écrire

$$\sum_{i=0}^{+\infty} u_i = +\infty.$$

Théorème 5.11 (invariance de la somme par permutation)**.**
Soit $(u_i)_{i\in I} \in (\overline{\mathbb{R}}_+)^I$, soit $\sigma \in S_I$ une permutation de I. Alors,

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(I)}.$$

Notamment, les familles $(u_i)_{i\in I}$ et $(u_{\sigma(i)})_{i\in I}$ ont même nature.

Démonstration.
Il suffit de voir que si F parcourt toutes les parties finies de I, alors $\sigma(F)$ parcourt aussi toutes les parties finies de I. Ainsi,

$$\begin{aligned}&\left\{ \sum_{i\in F} u_i \;\middle|\; F \subset (\mathbb{N}^*)^2 \text{ t.q. } F \text{ est fini} \right\}\\ &= \left\{ \sum_{i\in\sigma(F)} u_i \;\middle|\; F \subset (\mathbb{N}^*)^2 \text{ t.q. } F \text{ est fini} \right\}\\ &= \left\{ \sum_{i\in F} u_{\sigma(i)} \;\middle|\; F \subset (\mathbb{N}^*)^2 \text{ t.q. } F \text{ est fini} \right\}\end{aligned}$$

□

Bien entendu, les opérations usuelles sont toujours valides sur cette notion de somme.

Proposition 5.12 (opérations)**.**
Soit $(u_i)_{i\in I}, (v_i)_{i\in I} \in (\overline{\mathbb{R}}_+)^I$, soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors

1. $\sum_{i\in I}(u_i + v_i) = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$.
2. $\sum_{i\in I} \lambda u_i = \lambda \sum_{i\in I} u_i$.

Démonstration.
Remarquons d'abord que toutes ces familles sont bien à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. De plus, s'il existe $i \in I$ tel que $u_i = +\infty$ ou $v_i = +\infty$, alors les résultats sont immédiats. On peut donc supposer que pour tout $i \in I$, $u_i, v_i \in \mathbb{R}_+$.

Soit F une partie finie de I, alors

$$\begin{aligned}\sum_{i\in F}(u_i + v_i) &= \sum_{i\in F} u_i + \sum_{i\in F} v_i\\ &\leqslant \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i.\end{aligned}$$

Ainsi, par passage à la borne supérieure,

$$\sum_{i\in I}(u_i+v_i) \leqslant \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i.$$

Supposons que $\sum_{i\in I} u_i = +\infty$. Pour tout $A \in \mathbb{R}_+$, il existe donc $F \subset I$ finie telle que

$$\sum_{i\in F} u_i \geqslant A.$$

Comme tous les v_i sont positifs, on a donc

$$\sum_{i\in F} u_i + v_i \geqslant \sum_{i\in F} u_i \geqslant A.$$

Ainsi, $\sum_{i\in I}(u_i+v_i) = +\infty$. On a le même résultat si $\sum_{i\in I} v_i = +\infty$.

Si $\sum_{i\in I} u_i < +\infty$ et $\sum_{i\in I} v_i < +\infty$, considérons $\varepsilon > 0$. Il existe donc $F, G \subset I$ finies telles que

$$\sum_{i\in F} u_i \geqslant \sum_{i\in I} u_i - \varepsilon$$
$$\sum_{i\in G} v_i \geqslant \sum_{i\in I} v_i - \varepsilon.$$

Ainsi, par positivité des u_i et des v_i, en remarquant que $F \cup G$ est une partie finie de I.

$$\begin{aligned}\sum_{i\in F\cup G}(u_i+v_i) &= \sum_{i\in F\cup G} u_i + \sum_{i\in F\cup G} v_i \\ &\geqslant \sum_{i\in F} u_i + \sum_{i\in G} v_i \\ &\geqslant \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i - 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Par la caractérisation de la borne supérieure,

$$\sum_{i\in I}(u_i+v_i) = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$$

Soit F une partie finie de I, alors

$$\sum_{i\in F} \lambda u_i = \lambda \sum_{i\in F} u_i \leqslant \lambda \sum_{i\in I} u_i.$$

Ainsi, par passage à la borne supérieure,

$$\sum_{i\in I} \lambda u_i \leqslant \lambda \sum_{i\in I} u_i.$$

Il suffit d'appliquer ce qui précède à la famille des $(\lambda u_i)_{i\in I}$ et au scalaire λ^{-1}, ce qui donne

$$\sum_{i\in I} u_i \leqslant \lambda^{-1} \sum_{i\in I} \lambda u_i,$$

soit

$$\lambda \sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{i\in I} \lambda u_i$$

Ainsi, $\sum_{i\in I} \lambda u_i = \lambda \sum_{i\in I} u_i$. □

Exemple 5.13.
On sait que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Alors,

$$\sum_{n\in 2\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24}.$$

Proposition 5.14 (comparaison)**.**
Soit $(u_i)_{i\in I}, (v_i)_{i\in I} \in (\overline{\mathbb{R}}_+)^I$.
Si pour tout $i \in I$, $u_i \leqslant v_i$, alors

$$\sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{i\in I} v_i.$$

Démonstration.
Soit $F \subset I$ finie, alors

$$\sum_{i\in F} u_i \leqslant \sum_{i\in F} v_i \leqslant \sum_{i\in I} v_i.$$

Par passage à la borne supérieure,

$$\sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{i\in I} v_i.$$

□

Remarque 5.15.
Si on a $\forall i \in I$, $u_i \leqslant v_i$, et si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i\in I}$ est aussi sommable.

Proposition 5.16 (sous-famille)**.**
Soit $(u_i)_{i\in I} \in (\overline{\mathbb{R}}_+)^I$, soit $J \subset I$. Alors,

$$\sum_{j\in J} u_j \leqslant \sum_{i\in I} u_i.$$

Notamment, si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(u_j)_{j\in J}$ l'est aussi.

Démonstration.
Soit $F \subset J$ finie, alors F est une partie finie de I, donc

$$\sum_{j\in F} u_j \leqslant \sum_{i\in I} u_i.$$

Par passage à la borne supérieure, on obtient le résultat. □

L'outil principal de calcul de somme est le théorème de sommation par paquets. En pratique, il conviendra de procéder à un regroupement par paquets judicieux pour calculer les sommes en jeu.

Théorème 5.17 (sommation par paquets)**.**
Soit J un ensemble. Pour chaque $j \in J$, on considère $I_j \subset I$ et l'on suppose que I est la réunion disjointe des I_j :

$$I = \bigsqcup_{j \in J} I_j.$$

Soit $(u_i)_{i\in I} \in (\overline{\mathbb{R}}_+)^I$.
Alors,

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right).$$

Lemme 5.1.18.
Soit A, B deux parties disjointes de I, soit $(u_i)_{i\in I} \in (\overline{\mathbb{R}}_+)^I$. Alors,

$$\sum_{i \in A \sqcup B} u_i = \sum_{i \in A} u_i + \sum_{i \in B} u_i.$$

Démonstration.
Soit $F \subset A \sqcup B$ finie. Posons $G = F \cap A$ et $H = F \cap B$, de sorte que G et H soient finies, $F = G \sqcup H$, $G \subset A$ et $H \subset B$. Alors

$$\sum_{i \in F} u_i = \sum_{i \in G} u_i + \sum_{i \in H} u_i \leqslant \sum_{i \in A} u_i + \sum_{i \in B} u_i.$$

Par passage à la borne supérieure,

$$\sum_{i \in A \sqcup B} u_i \leqslant \sum_{i \in A} u_i + \sum_{i \in B} u_i$$

S'il existe $i \in A \sqcup B$ tel que $u_i = +\infty$, le résultat est immédiat. Supposons donc que pour tout $i \in A \sqcup B$, $u_i < +\infty$.

Si $\sum_{i \in A} u_i = +\infty$, soit $M \in \mathbb{R}_+$. Il existe donc $F \subset A$ finie telle que $\sum_{i \in F} u_i \geqslant M$. Comme F est une partie finie de $A \sqcup B$, on a immédiatement $\sum_{i \in A \sqcup B} u_i = +\infty$. On a le même résultat si $\sum_{i \in B} u_i = +\infty$.

Enfin, supposons que $\sum_{i \in A} u_i < +\infty$ et $\sum_{i \in B} u_i < +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $F \subset A$ et $G \subset B$ finies telles que

$$\sum_{i \in F} u_i \geqslant \sum_{i \in A} u_i - \varepsilon$$
$$\sum_{i \in G} u_i \geqslant \sum_{i \in B} u_i - \varepsilon$$

Alors, F et G sont disjointes et $F \sqcup G$ est une partie finie de $A \sqcup B$. De plus,

$$\sum_{i \in F \sqcup G} u_i = \sum_{i \in F} u_i + \sum_{i \in G} u_i \geqslant \sum_{i \in A} u_i + \sum_{i \in B} u_i - 2\varepsilon.$$

Par la caractérisation de la borne supérieure,

$$\sum_{i \in A \sqcup B} u_i = \sum_{i \in A} u_i + \sum_{i \in B} u_i.$$

□

Remarque 5.19.
Par récurrence, on généralise le lemme à une somme finie sur des parties disjointes deux à deux.

Démonstration (théorème de sommation par paquets, hors programme)**.**
S'il existe $i \in I$ vérifiant $u_i = +\infty$, le résultat est immédiat. Supposons donc que pour tout $i \in I$, $u_i \in \mathbb{R}_+$.

Soit F une partie finie de I. Si $j \in J$, notons $F_j = F \cap I_j$. Remarquons :

— que F_j est une partie finie de I_j ;
— qu'il existe un nombre fini de $j \in J$ pour lesquels $F_j \neq \varnothing$.

Notons $K = \{ j \in J \mid F_j \neq \varnothing \}$. Ainsi, K est une partie finie de J et

$$F = \bigsqcup_{j \in K} F_j.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{i \in F} u_i &= \sum_{j \in K} \sum_{i \in F_j} u_i \\ &\leqslant \sum_{j \in K} \sum_{i \in I_j} u_i \\ &\leqslant \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} u_i.\end{aligned}$$

Ainsi, par passage à la borne supérieure,

$$\sum_{i \in I} u_i \leqslant \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} u_i.$$

Réciproquement, soit $K \subset J$ finie. Comme $I' = \bigsqcup_{j \in K} I_j$ est une union finie de parties de I, on a par le lemme 5.1.18,

$$\sum_{j \in K} \sum_{i \in I_j} u_i = \sum_{i \in I'} u_i \leqslant \sum_{i \in I} u_i.$$

Ainsi, par passage à la borne supérieure,

$$\sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} u_i \leqslant \sum_{i \in I} u_i.$$

On a donc bien l'égalité. □

Remarque 5.20.
Ce théorème, fondamental, a deux usages principaux : montrer qu'une famille est sommable, et calculer la somme d'une famille.

Exercice 5.21.
On sait que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2}$.

Corollaire 5.22 (théorème de Fubini positif)**.**
Soit I, J deux ensembles, soit $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J} \in (\overline{\mathbb{R}}_+)^{I \times J}$. Alors,

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} u_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} u_{i,j} \right).$$

Démonstration.
Il suffit de considérer les paquets $I_j = \{ (i,j) \mid i \in I \}$ et $J_i = \{ (i,j) \mid j \in I \}$, puis d'appliquer le théorème de sommation par paquets. □

Remarque 5.23.
Bien entendu, ce résultat s'étend à tous les produits cartésiens finis.

Exercice 5.24.
On sait que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\sum_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{i^2 2^j}$.

5.2 Familles sommables de nombres complexes

L'extension de la notion de somme à un ensemble quelconque est bien plus délicate, dès lors que l'on abandonne l'hypothèse de positivité des nombres sommés.

Prenons l'exemple de la somme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n$. Le découpage

$$0 + \underbrace{1 - 1} + \underbrace{2 - 2} + \underbrace{3 - 3} + \dots$$

donne un regroupement par paquets de somme nulle, tandis que le regroupement

$$0 + 1 + \underbrace{2 - 1} + \underbrace{3 - 2} + \underbrace{4 - 3} + \dots$$

donne un regroupement par paquets de somme $+\infty$. Pire, le regroupement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} k + \sum_{n=1}^{+\infty} (-k)$$

donne un regroupement par paquets n'ayant aucun sens.

Ainsi, les procédés sommatoires généraux font apparaître des hypothèses que ne connaissent pas les procédés sommatoires positifs.

Définition 5.1 (famille sommable)**.**
Une famille $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$ est sommable si $\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$, *i.e.* si la famille positive $(|u_i|)_{i \in I}$ est sommable.

Notation 5.2.2.
On note $\ell^1(I)$ l'ensemble des familles sommables de nombres complexes indicées par I.

Définition 5.3 (somme d'une famille réelle)**.**
Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ sommable. Si $i \in I$, on définit

$$u_i^+ = \max(0, u_i),$$
$$u_i^- = \max(0, -u_i).$$

Alors, $(u_i^+)_{i \in I}$ et $(u_i^-)_{i \in I}$ sont sommables et l'on définit la somme de la famille $(u_i)_{i \in I}$ comme

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-.$$

Démonstration.
On a pour tout $i \in I$, $0 \leqslant u_i^+ \leqslant |u_i|$ et $0 \leqslant u_i^- \leqslant |u_i|$, ce qui justifie la sommabilité des familles $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ ainsi que la validité de la différence dans la définition de $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$. □

Définition 5.4 (somme d'une famille complexe)**.**
Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ sommable. Alors, $(\mathrm{Re}(u_i))_{i\in I}$ et $(\mathrm{Im}(u_i))_{i\in I}$ sont sommables et l'on définit la somme de la famille $(u_i)_{i\in I}$ comme

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} \mathrm{Re}(u_i) + i \sum_{i\in I} \mathrm{Im}(u_i).$$

Démonstration.
On a pour tout $i \in I$, $0 \leqslant |\mathrm{Re}(u_i)| \leqslant |u_i|$ et $0 \leqslant |\mathrm{Im}(u_i)| \leqslant |u_i|$, ce qui justifie la sommabilité des familles $(\mathrm{Re}(u_i))_{i\in I}$ et $(\mathrm{Im}(u_i))_{i\in I}$, et donc la validité de la définition de $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$. □

Remarque 5.5.
Sous réserve de sommabilité, on a donc par définition

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{i\in I} u_i\right) = \sum_{i\in I} \mathrm{Re}(u_i)$$

et

$$\mathrm{Im}\left(\sum_{i\in I} u_i\right) = \sum_{i\in I} \mathrm{Im}(u_i)$$

Remarque 5.6 (séries et convergence absolues)**.**
Dans le cas d'une suite $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument. En cas de convergence absolue, on a alors

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Remarque 5.7 (sommes finies)**.**
Une famille finie de nombres complexes est toujours sommable.

Proposition 5.8.
Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ une famille sommable. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $F \subset I$ finie telle que

$$\left|\sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in F} u_i\right| \leqslant \varepsilon.$$

Démonstration.
On traite d'abord le cas où $\forall i \in I$, $u_i \in \mathbb{R}$. Il existe $F_+, F_- \subset I$ finies telles que

$$\begin{aligned} \sum_{i\in I} u_i^+ \geqslant \sum_{i\in F_+} u_i^+ &\geqslant \sum_{i\in I} u_i^+ - \varepsilon, \\ \sum_{i\in I} u_i^- \geqslant \sum_{i\in F_-} u_i^- &\geqslant \sum_{i\in I} u_i^- - \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, avec $F = F_+ \cup F_-$, qui est bien une partie finie de I, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i\in I} u_i^+ \geqslant \sum_{i\in F} u_i^+ &\geqslant \sum_{i\in I} u_i^+ - \varepsilon, \\ \sum_{i\in I} u_i^- \geqslant \sum_{i\in F} u_i^- &\geqslant \sum_{i\in I} u_i^- - \varepsilon, \end{aligned}$$

donc notamment

$$-\sum_{i\in I} u_i^- + \varepsilon \geqslant -\sum_{i\in F} u_i^- \geqslant -\sum_{i\in I} u_i^-.$$

Comme pour tout $i \in F$, $u_i = u_i^+ - u_i^-$, on a

$$\sum_{i\in F} u_i = \sum_{i\in F} u_i^+ - \sum_{i\in F} u_i^-,$$

comme par définition on a

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-,$$

on a en sommant les encadrements précédents :

$$\sum_{i\in I} u_i + \varepsilon \geqslant \sum_{i\in F} u_i \geqslant \sum_{i\in I} u_i - \varepsilon,$$

ce qui est l'encadrement demandé.

Remarquons que, par construction, pour toute $G \subset I$ finie vérifiant $F \subset G$, alors

$$\left|\sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in G} u_i\right| \leqslant \varepsilon.$$

Pour le cas général, il existe $F_r, F_i \subset I$ finies telles que,

$$\left|\sum_{i\in I} \mathrm{Re}(u_i) - \sum_{i\in F_r} \mathrm{Re}(u_i)\right| \leqslant \varepsilon,$$

$$\left|\sum_{i\in I} \mathrm{Im}(u_i) - \sum_{i\in F_i} \mathrm{Im}(u_i)\right| \leqslant \varepsilon,$$

Par la remarque précédente, on peut considérer $F = F_r \cup F_i$ (qui est une partie finie de I) et supposer que

$$\left|\sum_{i\in I} \operatorname{Re}(u_i) - \sum_{i\in F} \operatorname{Re}(u_i)\right| \leqslant \varepsilon,$$
$$\left|\sum_{i\in I} \operatorname{Im}(u_i) - \sum_{i\in F} \operatorname{Im}(u_i)\right| \leqslant \varepsilon,$$

Alors, par l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in F} u_i\right| &\leqslant \left|\sum_{i\in I} \operatorname{Re}(u_i) - \sum_{i\in F} \operatorname{Re}(u_i)\right| \\ &\quad + \left|\sum_{i\in I} \operatorname{Im}(u_i) - \sum_{i\in F} \operatorname{Im}(u_i)\right| \\ &\leqslant 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Quitte à changer ε et $\dfrac{\varepsilon}{2}$, on a donc le résultat demandé. □

Théorème 5.9 (invariance de la somme par permutation)**.**
Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ sommable, soit $\sigma \in S_I$ une permutation de I. Alors,

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(I)}.$$

Notamment, les familles $(u_i)_{i\in I}$ et $(u_{\sigma(i)})_{i\in I}$ ont même nature.

Démonstration.
Il suffit d'appliquer le résultat analogue de la question précédentes :
- aux parties positives et négatives des u_i, en supposant que pour tout $i \in I$, $u_i \in \mathbb{R}$;
- aux parties réelles et imaginaires des u_i, dans le cas général.

□

Théorème 5.10 (argument de comparaison)**.**
Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ et $(v_i)_{i\in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$ vérifiant

$$\forall i \in I,\ |u_i| \leqslant v_i.$$

Alors, si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est sommable, la famille $(u_i)_{i\in I}$ l'est aussi.

Démonstration.
Immédiat par les résultats de la partie précédente. □

Proposition 5.11 (linéarité de la somme)**.**
Soit $(u_i)_{i\in I}, (v_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ deux familles sommables, soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors, la famille $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I}(\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i.$$

Démonstration (fastidieuse et peu intéressante)**.**
Traiter d'abord le cas réel, en décomposant λ, μ, u_i, v_i en parties positives, puis traiter le cas complexe en écrivant tout ceci sous forme algébrique. □

Lemme 5.2.12 (sous-famille)**.**
Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ une famille sommable, soit $J \subset I$. Alors, $(u_j)_{j\in J}$ est une famille sommable.

Démonstration.
Immédiat d'après les résultats de la partie précédente. □

Un résultat important est le théorème de sommation par paquets. Remarquons toutefois que, contrairement au cas des réels positifs, ce théorème ne peut s'appliquer qu'après avoir démontré que la famille étudiée est sommable.

Théorème 5.13 (sommation par paquets)**.**
Soit J un ensemble. Pour chaque $j \in J$, on considère $I_j \subset I$ et l'on suppose que I est la réunion disjointe des I_j :

$$I = \bigsqcup_{j\in J} I_j.$$

Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ une famille sommable.
Alors,

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right).$$

Démonstration (hors programme)**.**
Admis
Remarquons toutefois que le lemme 5.2.12 assure que les familles $(u_i)_{i\in I_j}$ sont sommables, les sommes $\sum_{i\in I_j} u_i$ ont donc bien un sens. □

Corollaire 5.14 (théorème de Fubini)**.**
Soit I, J deux ensembles, soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J} \in \mathbb{C}^{I\times J}$ une famille sommable. Alors,

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u_{i,j}.$$

Démonstration.
Il suffit de considérer les paquets $I_j = \{ (i,j) \mid i \in I \}$ et $J_i = \{ (i,j) \mid j \in I \}$, puis d'appliquer le théorème de sommation par paquets. □

Le théorème de regroupement par paquets, et donc le théorème de Fubini, ne s'appliquent qu'une fois la sommabilité démontrée. Cette sommabilité s'obtient en étudiant une famille de réels positifs, étude pour laquelle nous disposons d'outils puissants (voir la partie précédente).

Dans le cas particulier (et courant) d'une somme double factorisée, on a toutefois une réciproque, qui permet d'appliquer le théorème de Fubini automatiquement.

Théorème 5.15.
Soit I, J deux ensembles, soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ et $(v_j)_{j\in J} \in \mathbb{C}^J$ deux familles sommables.

Alors, la famille $(u_i v_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_i v_j = \left(\sum_{i\in I} u_i\right)\left(\sum_{j\in J} v_j\right).$$

Démonstration.
Il suffit de démontrer la sommabilité, l'égalité venant ensuite directement du théorème de Fubini. Soit $F \subset I \times J$ finie, il existe $G \subset I$ et $H \subset J$ finies telles que $F \subset G \times H$ (prendre $G = \{ i \in I \mid \exists j \in J,\ (i,j) \in F \}$). Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in F} |u_i v_j| &\leqslant \sum_{(i,j)\in G\times H} |u_i v_j| \\ &\leqslant \left(\sum_{i\in G} |u_i|\right)\left(\sum_{j\in H} |v_j|\right) \\ &\leqslant \left(\sum_{i\in I} |u_i|\right)\left(\sum_{j\in J} |v_j|\right).\end{aligned}$$

Par majoration, $\sum_{(i,j)\in I\times J} u_i v_j$ est sommable. □

Remarque 5.16.
Cela se généralise par récurrence des sommes doubles aux sommes multiples.

Une utilisation importante de tous ces résultats concerne le produit de Cauchy de deux séries.

Corollaire 5.17 (produit de Cauchy)**.**
Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n$, $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ deux séries absolument convergentes. On définit pour $n \geqslant 0$:

$$c_n = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}.$$

Alors, $\sum_{n\geqslant 0} c_n$ converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

Démonstration.
Il suffit d'appliquer le théorème 5.15 aux deux familles sommables $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour obtenir que la famille $(a_n b_m)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, puis de procéder par regroupement par paquets avec les paquets

$$I_n = \{ (p, n-p) \mid 0 \leqslant p \leqslant n \}.$$

□

Annexe 1 : représentation décimale illimitée des réels

Notons $\mathbb{D}$ l'ensembles des *décimaux*, c'est-à-dire l'ensemble

$$\begin{aligned}&\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N},\ 10^n x \in \mathbb{Z} \} \\ &= \left\{ \frac{k}{10^n} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}.\end{aligned}$$

Rappelons le résultat suivant, démontré dans le chapitre sur les réels : si $x \in \mathbb{R}$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ appelé *approximation*

décimale par défaut de x à 10^{-n} près. La suite (r_n) est alors une suite de décimaux inférieurs à x, et elle a x pour limite.
Nous pouvons alors donner le théorème suivant :

Théorème 5.18.
Pour tout $y \in [0,1[$:
• Si $y \notin \mathbb{D}$, il existe une unique suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $[\![0,9]\!]$ telle que $y = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n 10^{-n}$.
• Si $y \in \mathbb{D}$, il y a existence de deux telles suites : l'une finissant par une infinité de 0, l'autre par une infinité de 9. Ainsi, $0,1 = 1.10^{-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} 0.10^{-n} = 0.10^{-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} 9.10^{-n}$.

Dans tous les cas, il existe une unique suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $[\![0,9]\!]$ telle que $y = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n 10^{-n}$, et tel que pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant n_0$ tel que $y_n \neq 9$: la série $\sum_{n\geqslant 1} y_n 10^{-n}$ est alors appelée le *développement décimal propre* de y.

Démonstration.
Prouvons l'existence. Considérons la suite de terme général $r_n = \dfrac{\lfloor 10^n y\rfloor}{10^n}$ (approximation décimale par défaut de y), et posons $y_0 = \lfloor y \rfloor = 0$, et pour tout $n \geqslant 1$: $y_n = 10^n(r_n - r_{n-1}) = \lfloor 10^n y\rfloor - 10\left\lfloor 10^{n-1} y\right\rfloor$.
Les y_n sont donc bien des entiers de $[\![0,9]\!]$.
De plus, : $\sum_{n=1}^{N} y_n 10^{-n} = \sum_{n=1}^{N}(r_n - r_{n-1}) = r_N - r_0 = r_N$.
Puisque (r_n) a pour limite y, alors $y = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n 10^{-n}$.
Si la suite (y_n) ne converge pas vers 9, il s'agit bien du développement propre.
Sinon, la suite est stationnaire. Il existe un rang n_0 qui est le maximum de l'ensemble $\{n \in \mathbb{N},\ y_n \neq 9\}$. Le développement propre est alors obtenu en changeant y_{n_0} en $y_{n_0} + 1$, et en changeant tous les termes suivants en 0.
Nous avons toujours $y = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n 10^{-n}$ car $\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} 9.10^{-n} = 9.10^{-n_0-1}.\dfrac{1}{1-\frac{1}{10}} = 10^{-n_0}$.
Prouvons enfin l'unicité du développement propre. Supposons que y admette deux développements propres distincts : $y = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n 10^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n 10^{-n}$. Notons N le plus petit indice tel que $y_N \neq z_N$, et N' le plus petit indice strictement supérieur à N tel que $y_{N'} \neq 9$. Pour fixer les idées, supposons que $y_N < z_N$.
Alors :

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{n=1}^{N-1} y_n 10^{-n} + y_N 10^{-N} + \sum_{n=N+1}^{N'-1} y_n 10^{-n} \\
&\quad + y_{N'} 10^{-N'} + \sum_{n=N'+1}^{+\infty} y_n 10^{-n} \\
&< \sum_{n=1}^{N-1} y_n 10^{-n} + y_N 10^{-N} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} 9.10^{-n} \\
&< \sum_{n=1}^{N-1} z_n 10^{-n} + y_N 10^{-N} + 10^{-N} \\
&< \sum_{n=1}^{N-1} z_n 10^{-n} + (y_N + 1) 10^{-N} \\
&< \sum_{n=1}^{N-1} z_n 10^{-n} + z_N 10^{-N} \\
&< y
\end{aligned}$$

ce qui est bien sûr absurde. □

Annexe 2 : compléments

Voici deux critères de convergence qui peuvent être utiles.

Proposition 5.19 (Test de comparaison logarithmique)**.**
Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes réels strictement positifs telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.
Alors :
(i) si $\sum v_n$ converge, il en est de même de $\sum u_n$;
(ii) si $\sum u_n$ diverge, il en est de même de $\sum v_n$.

Démonstration.
Nous avons pour tout n, $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n}$, et donc par récurrence : $\dfrac{u_n}{v_n} \leqslant \dfrac{u_0}{v_0}$. En posant $\mu = \dfrac{u_0}{v_0}$, il vient donc : $u_n \leqslant \mu v_n$. Le résultat découle alors directement de 2.4. □

Proposition 5.20 (Règle de d'Alembert)**.**
Soit (u_n) une suite à termes réels strictement positifs.

(i) S'il existe $q \in]0,1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q$, alors la série $\sum u_n$ est convergente.

(ii) S'il existe $q \in [1,+\infty[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant q$, alors la série $\sum u_n$ est divergente.

(iii) en particulier, si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$:

- si $\ell \in [0,1[$, la série $\sum u_n$ est convergente ;
- si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ est divergente ;
- si $\ell = 1$, on ne peut rien dire, sauf dans le cas $u_n \leqslant u_{n+1}$ à partir d'un certain rang, où il y a divergence grossière.

Démonstration. (i) Posons $v_n = q^n$. Alors $\sum v_n$ converge, et pour tout n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Le critère de comparaison logarithmique 5.19 permet alors de conclure.

(ii) Même démonstration (ou même divergence grossière).

(iii) Découle des deux points précédents.

□

Exemple 5.21.
• Soient $x \in \mathbb{R}^*$ et $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$. Alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $\sum u_n$ converge, et de plus on en tire que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
• Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_n = n^\alpha$. Alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, et pourtant, suivant la valeur de α, $\sum u_n$ peut aussi bien diverger que converger.