BS5 : CIRCUIT MOBILE DANS UN CHAMP MAGNETIQUE STATIONNAIRE

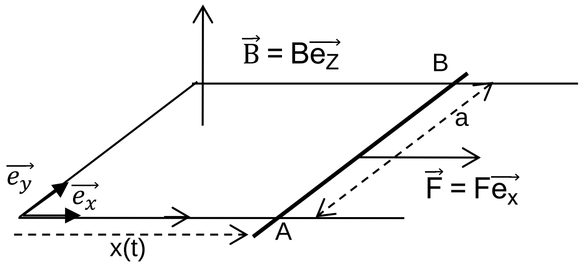
I . Conversion de puissance mécanique en puissance électrique

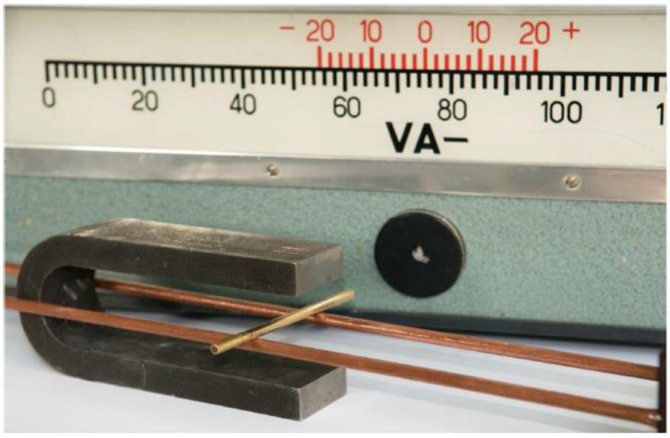
I.1. Les rails de Laplace

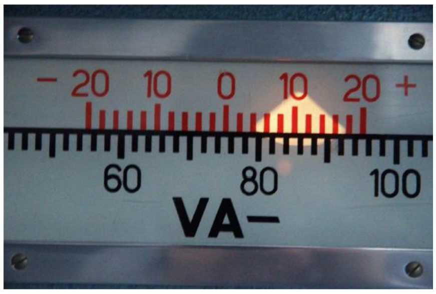
L'étude qui va suivre doit servir de modèle lorsqu'on aborde un système faisant intervenir à la fois le phénomène d'induction et un déplacement mécanique. On a déjà observé que l'application d'un courant dans un tel circuit permettait de mettre en mouvement la barre.
On va maintenant présenter le phénomène inverse.

I.1.1. Description

La barre AB, de longueur a et de masse m, de centre de masse d'abscisse x(t) sur des rails métalliques sur lesquels elle glisse sans frottement. La barre est tirée par une force constante : $\vec{F} = F\vec{e_x}$.
Elle constitue avec les rails de résistance négligeable un circuit rectangulaire (C) de résistance constante R et d'inductance négligeable.
Ce circuit est placé dans un champ magnétique uniforme et permanent $\vec{B} = B\vec{e_z}$ d'origine extérieure à (C).







I.1.2. Principe de fonctionnement

Lorsque la barre se déplace, il y a augmentation de la surface traversée par le champ magnétique, donc le flux du champ magnétique à travers le cadre (C) évolue au cours du temps. D'après la loi de Faraday, il apparaît une force électromotrice et par la suite un courant induit.
Ainsi le courant induit et le champ magnétique créent une force de Laplace qui va s'opposer au mouvement qui est à l'origine des perturbations : loi de Lenz

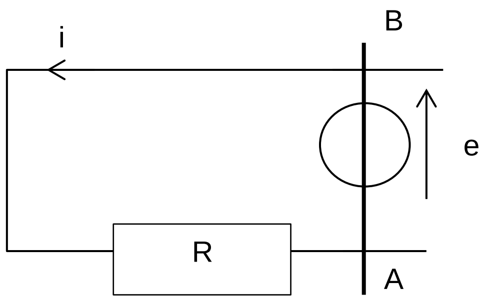
I.1.3. Equation électrique

Calculons d'abord le flux du champ magnétique.
D'après l'orientation de la surface, le vecteur surface est orienté selon $\vec{e_z}$
On a alors $\Phi = \vec{B}.\vec{S} = B.S = Bax(t)$

On peut alors appliquer la loi de Faraday, comme le déplacement de la tige coupe des lignes de champ durant son déplacement :
$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Ba\frac{dx}{dt} = -Bav(t)$

Le circuit peut être modélisé électriquement en tenant compte de la résistance des fils et du générateur de tension e (attention à l'orientation de e, qui doit être dans le sens du courant).
On peut alors écrire la loi des mailles :

$$0 = Ri - e(t) = Ri(t) + Bav(t)$$



Remarque
Nous avons négligé le phénomène d'auto-induction. En théorie il faudrait ajouter dans le circuit électrique une bobine, et donc ajouter $L\frac{di}{dt}$ dans l'équation précédente.
Néanmoins il parait légitime ici de négliger son effet, dans la mesure où l'on a une seule spire de courant. Cependant ce ne sera pas toujours le cas (confère la deuxième partie).

I.1.4. Equation mécanique

Comme nous l'avons signalé, l'apparition d'un courant a fait apparaître une force de Laplace.
Pour une tige rectiligne, la force de Laplace s'exprime $\overrightarrow{F_L}=i(t)\,\vec{L}\wedge\vec{B}$
Ici on a donc : $\overrightarrow{F_L}=i(t)aB\,\overrightarrow{e_y}\wedge\overrightarrow{e_z} = i(t)aB\overrightarrow{e_x}$
Cette force s'oppose bien au mouvement, comme le courant est négatif.

Nous pouvons faire à présent une étude mécanique de la barre :
Référentiel : $\mathfrak{R}$ galiléen
Système : La barre
Forces :
- son poids : $\vec{p} = -mg\overrightarrow{e_z}$
- la réaction des deux barres parallèles normale au déplacement $\overrightarrow{R_N} = R_N\overrightarrow{e_z}$
- la force de Laplace $\overrightarrow{F_L} = i(t)aB\overrightarrow{e_x}$
- la force exercée par l'opérateur $\vec{F} = F\overrightarrow{e_x}$

Loi : principe fondamental de la dynamique $m\vec{a} = \vec{p} + \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{F_L} + \vec{F}$
Projection sur $\overrightarrow{e_x}$
$m\frac{dv}{dt} = i(t)aB + F$

I.1.5. Etablissement de la vitesse

On a alors un système d'équations couplées :

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = i(t)aB + F \\ e(t) = -Bav(t) = Ri(t) \end{cases}$$

En remplaçant i(t) dans la première équation on obtient : $m\frac{dv}{dt} = -\frac{(Ba)^2}{R}v(t) + F$
On obtient l'équation sous la forme canonique : $\frac{dv}{dt} + \frac{(Ba)^2}{mR}v(t) = \frac{F}{m}$
Ainsi le temps caractéristique est $\tau = \frac{mR}{(Ba)^2}$

Solution
Si initialement la barre est au repos v(0)=0 on obtient l'expression de la vitesse au cours du temps :
$v(t) = \frac{RF}{(Ba)^2}(1 - \exp(-t/\tau))$
Grace à l'équation électrique on trouve
$i(t) = -\frac{Ba}{R}v(t) = -\frac{F}{Ba}(1 - \exp(-t/\tau))$

Remarques

- La force de Laplace $\overrightarrow{F_L} = i(t)aB\overrightarrow{e_x} = -\frac{(Ba)^2}{R} v(t)\,\overrightarrow{e_x} = -\lambda\vec{v}$.

Elle est ici équivalente à une force de frottements fluides, s'opposant ainsi au déplacement de la tige, conformément à notre analyse initiale.

- On aboutit à une équation différentielle du premier ordre, où la vitesse tend vers une vitesse limite constante caractérisée, comme pour la chute libre, par l'exacte compensation entre la force de frottements et la force exercée ici par l'opérateur.

I.1.6. Bilan en puissance

• Méthode

Une méthode qui s'applique toujours pour obtenir un bilan de puissance d'un système électromécanique consiste à multiplier par i l'équation électrique, et par v l'équation mécanique

• Application

$$\begin{cases} m\frac{dv}{dt} = i(t)aB + F \\ e(t) = -Bav(t) = Ri(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\frac{dv}{dt}v = iaBv + Fv \\ ei = -Bavi = Ri^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2) = iaBv + Fv \\ -Bavi = Ri^2 \end{cases}$$

Un terme de couplage Baiv apparaît dans les deux équations, en l'éliminant on obtient :

$$Fv = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2) + Ri^2 = \frac{d}{dt}(E_c) + Ri^2$$

Cette équation traduit explicitement les échanges de puissance : la puissance fournie par la force motrice exercée par l'opérateur permet d'une part de mettre la tige en mouvement (puissance cinétique) et d'autre part génère un courant qui, si le système n'est pas relié à un dipôle l'utilisant à bon escient, est simplement dissipé par effet Joule.

En outre, on constate que la puissance de la fem vaut $P_{fem} = ei = -Bavi$ et que la puissance des forces de Laplace vaut l'opposé : $P_L = iaBv$

• Conclusion

Ainsi, et c'est général, pour un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire, la somme de la puissance de Laplace et de la fem induite est nulle :

$$P_{fem} + P_L = 0$$

I.2. Freinage par induction

• Observation

Dans l'exemple précédent, la force magnétique qui peut apparaitre, la force de Laplace se met sous la forme :

$$\overrightarrow{F_L} = -\frac{(Ba)^2}{R} v(t)\,\overrightarrow{e_x} = -\lambda\vec{v} .$$

Elle est de direction opposée à la vitesse

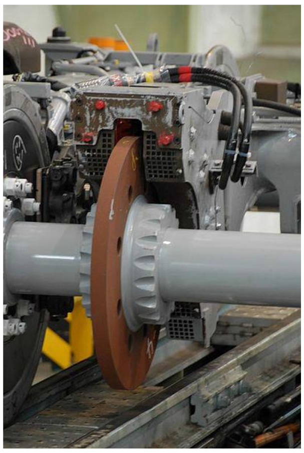
Ainsi la force magnétique qui peut apparaitre à cause du phénomène d'induction s'oppose au mouvement du conducteur qui a été la cause du phénomène d'induction. Dès qu'il y a conversion de puissance mécanique en puissance électrique, l'action mécanique de Laplace est une action de freinage, conformément à la loi de Lenz.

• Conclusion

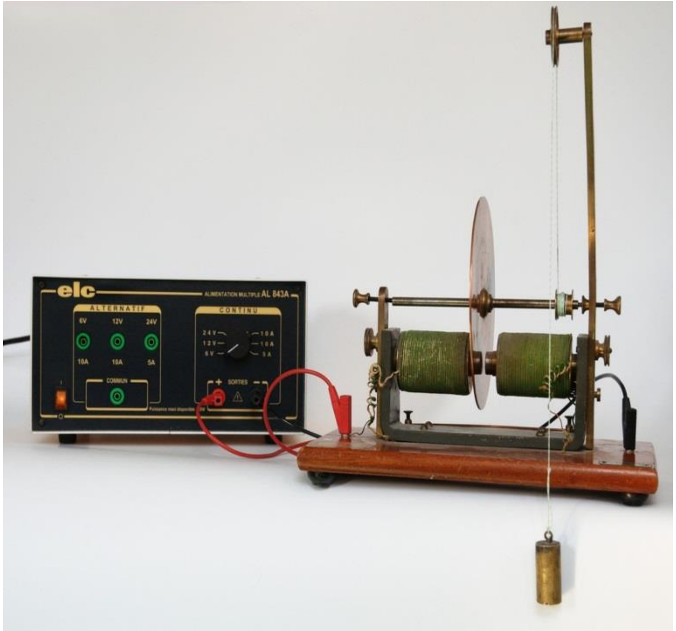
Dans tous les dispositifs où il y a conversion de puissance mécanique en puissance électrique, l'action mécanique de Laplace est une action de freinage.

• Applications

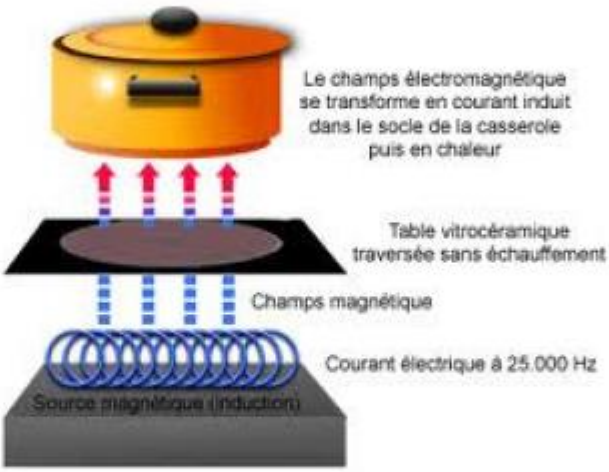
Cela a plusieurs applications intéressantes :
• Freinage par induction sur les TGV ou les camions
• Récupération d'énergie lors de ce freinage, afin de convertir l'énergie cinétique du véhicule en énergie électrique (voitures hybrides)



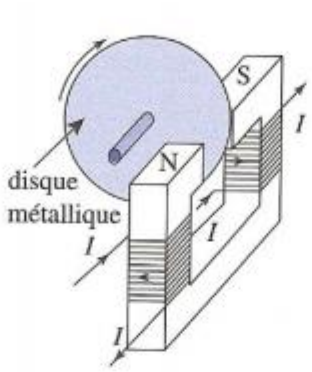
• <u>Courants de Foucault</u>
A noter que lorsque le conducteur en mouvement n'est plus filiforme, la modélisation développée jusqu'à présent n'est plus valable, mais les phénomènes restent qualitativement les mêmes. Il y a apparition de courants induits à l'intérieur du conducteur, répartis dans tout le volume, et sont appelés **courants de Foucault**.
Ces derniers provoquent, du fait du champ magnétique, des efforts de Laplace qui vont s'opposer au mouvement.



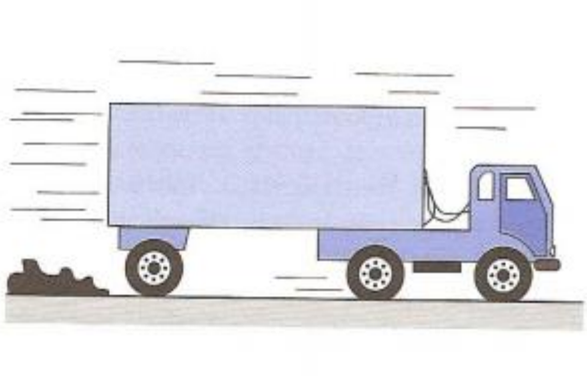
On retrouve également les courants de Foucault lorsque le conducteur est fixe mais le champ magnétique instationnaire, l'exemple le plus simple étant la plaque à induction, où le courant induit provoque l'échauffement de la casserole.



Principe du chauffage par induction.



Si aucun courant ne passe dans l'électro-aimant, le disque tourne librement ; dès que l'électro-aimant est excité, le disque est freiné

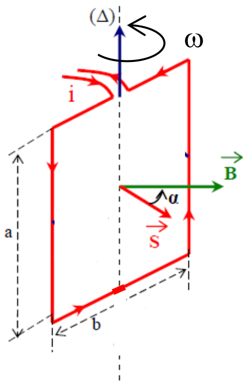


Freinage par induction pour certains poids lourds : des courants de Foucault apparaissent dans une pièce (solidaire des roues) en mouvement dans un champ magnétique

I.3. Spire en rotation autour d'un axe fixe

I.3.1. Description

• C'est le principe d'un alternateur. Ce dispositif sert à transformer une puissance mécanique en en puissance électrique. Par exemple ce système est utilisé sur un vélo, la roue entraîne en rotation l'alternateur qui alimente une ampoule. Citons encore les centrales électriques où l'alternateur est entraîné par de la vapeur (centrale thermique) ou par la pression de l'eau (centrale nucléaire) ou encore un écoulement d'eau (centrale hydraulique).

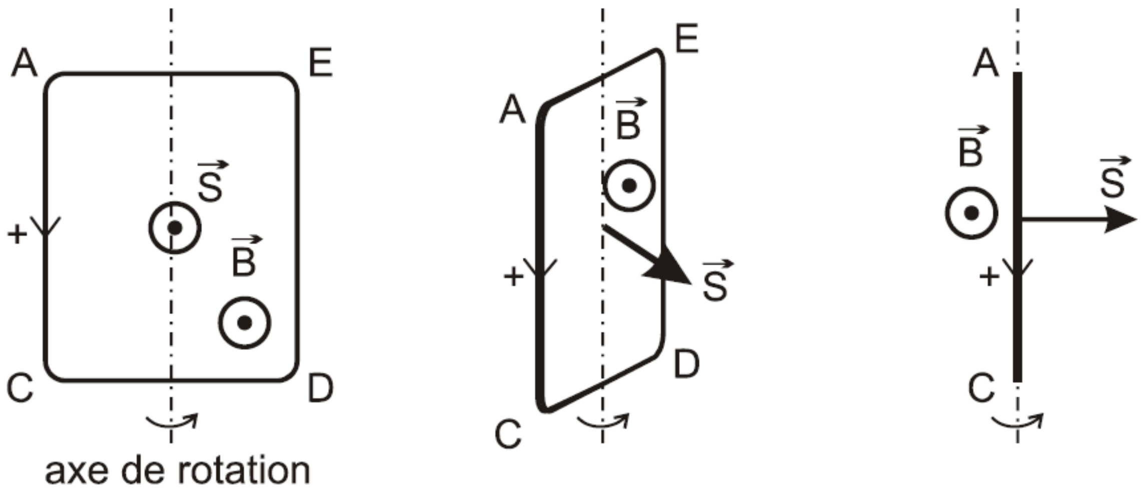


• Modèle

On modélise un alternateur par une spire rectangulaire de surface axb, conductrice de résistance R.

Cette spire (le rotor) est en mouvement de rotation autour d'un axe à la vitesse angulaire ω.

Elle est plongée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B}$ perpendiculaire à l'axe de rotation.



I.3.2. Principe de fonctionnement

La spire tourne, elle forme un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire. D'après la loi de Faraday, il apparaît une force électromotrice et par la suite un courant induit.
Ainsi le courant induit et le champ magnétique créent un moment de force de Laplace qui va s'opposer au mouvement qui est à l'origine des perturbations : loi de Lenz

I.3.3. Equation électrique

- Orientations : On choisit les orientations indiquées sur la figure plus haut.

- Le flux

$\Phi = \int \vec{B}.\vec{dS} = abB\cos\alpha = abB\cos(\omega t)$

- La fem

$e = -\frac{d\Phi}{dt} = abB\omega \sin(\omega t)$

Cette fem fait circuler un courant d'intensité i qui va créer son propre champ et donc son propre flux
$\Phi_P = Li$

- Equation électrique

Elle s'écrit alors $e = Ri + L\frac{di}{dt}$

Soit $abB\omega\sin(\omega t) = Ri + L\frac{di}{dt}$

I.3.4. Equation mécanique

On va se baser sur les résultats obtenus dans le chapitre BS2 : un cadre mobile (le rotor) alimenté par un courant continu, subit un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme (créé par la pièce fixe, le stator), et est soumis à des forces de Laplace sur chacune de ses arêtes, dont la résultante est nulle, mais le moment de forces est non nul

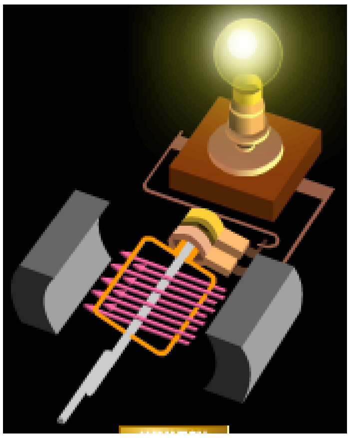
$$\vec{\Gamma} = \overrightarrow{\Gamma_{Laplace}} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

où $\vec{m} = I\vec{S}$ est le moment magnétique associé à la spire de courant orientée.

Ainsi $\vec{\Gamma} = -\,iabB\sin(\omega t)\overrightarrow{u_\Delta}$.

Nous pouvons faire à présent une étude mécanique de la barre :
Référentiel : $\mathfrak{R}$ galiléen
Système : La spire
Moments :
- Moment de Laplace $\vec{\Gamma} = -\,iabB\sin(\omega t)\overrightarrow{u_\Delta}$
- Moment exercée par l'opérateur (ou la roue de vélo qui entraîne l'alternateur) $\overrightarrow{\Gamma_{ext}} = \Gamma_{ext}\overrightarrow{u_\Delta}$
- On suppose une liaison de pivot parfaite

Loi : Théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Δ
En notant J le moment d'inertie de la spire : $J\frac{d\omega}{dt} = \Gamma + \Gamma_{ext}$



I.3.5. Cas du régime permanent sinusoïdal

• On a alors un système d'équations couplées :

$$\begin{cases} J\dfrac{d\omega}{dt} = -\,iabB\sin(\omega t) + \Gamma_{ext} = 0 \\ e = Ri + L\dfrac{di}{dt} = abB\omega\sin(\omega t) \end{cases}$$

On calcule i(t) en régime permanent avec la deuxième équation en utilisant les notations complexes
On obtient par la suite l'expression du couple extérieur.

I.3.6. Couplage électromécanique

• Méthode
Une méthode qui s'applique toujours pour obtenir un bilan de puissance d'un système électromécanique consiste à multiplier par i l'équation électrique, et par v l'équation mécanique

• Application
La puissance débitée par la fem induite :
$P_e = i.e = abB\omega\sin(\omega t).i$
La puissance mécanique développée par la force de Laplace
$P_L = \Gamma.\omega = -\,iabB\sin(\omega t).\omega$

Nous retrouvons donc sur cette géomètrie de rotation : la somme de la puissance débitée par la fem induite et de la puissance des forces de laplace est nulle :

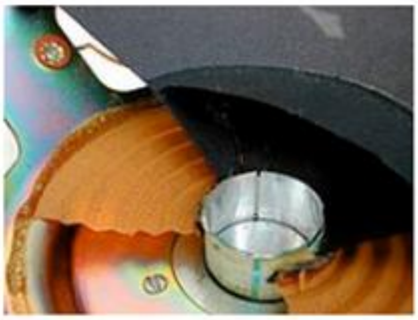
$$P_L + P_e = 0$$

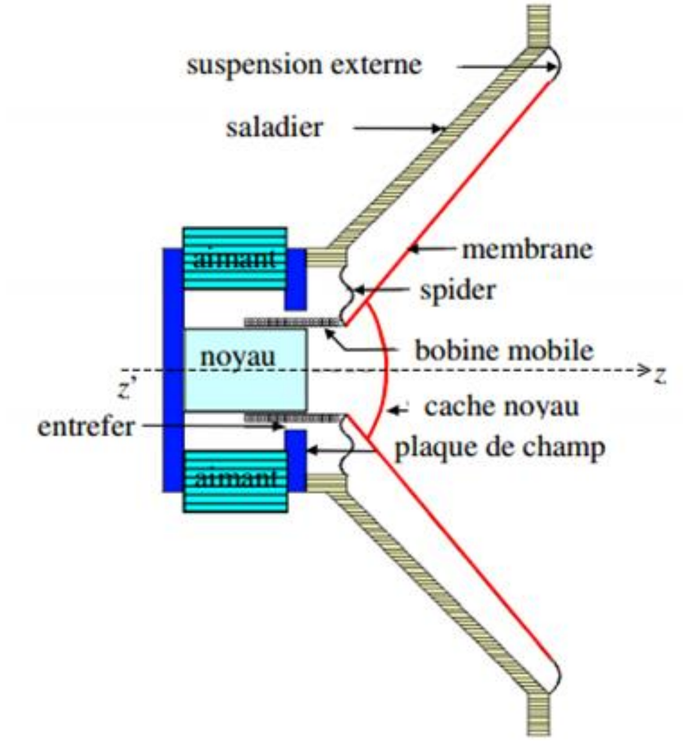
II. Conversion de puissance électrique en puissance mécanique

Nous allons étudier un exemple qui se rapproche du rail de Laplace, et qui fait partie du quotidien de tout un chacun : le haut-parleur.

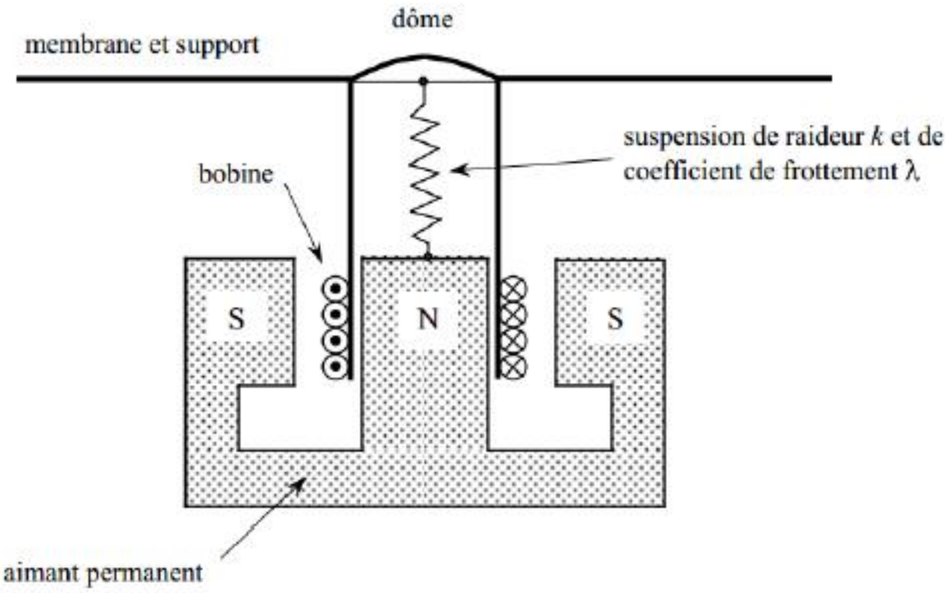
II.1. Présentation

Le 10 décembre 1877 fut accordé à C.H. Siemens le premier brevet concernant un haut-parleur (H.P.) à bobine mobile.
En 1876 ; Alexander Graham Bell brevette le microphone magnétique destiné à la téléphonie.
En 1924, Chester W. Rice et Edward W. Kellog, de la Général Electric fabriquent un haut-parleur selon un principe quasiment inchangé jusqu'à aujourd'hui.





Un haut-parleur est un appareil électromécanique qui transforme un signal électrique en signal sonore. Il est composé d'un aimant permanent et fixe, permettant de créer du fait de sa géométrie un champ magnétique radial d'intensité constante B. Une membrane de masse m est reliée mécaniquement à cet aimant par une suspension modélisée par un ressort de constante de raideur k. Un cylindre portant un circuit bobiné de longueur l_b peut se déplacer librement dans l'entrefer de l'aimant. Lorsqu'un courant circule dans la bobine, la membrane est mise en mouvement par des forces de Laplace, et crée une onde de pression, à l'origine du son.

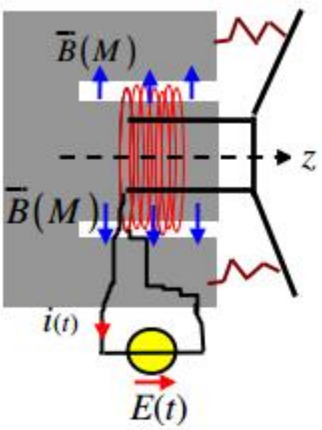


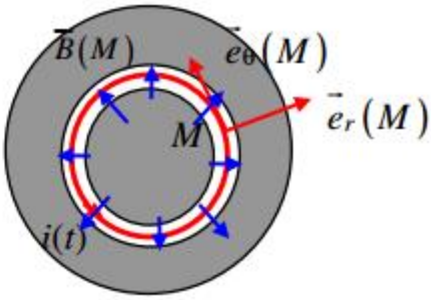
A noter que, si une onde de pression vient rencontrer et mettre en mouvement la membrane, une fém induite pourra être récupérée : c'est le principe du microphone ! Bien souvent les systèmes électromécaniques sont réversibles.

II.2. Mise en équation

II.2.1. Equation mécanique

• Il faut déterminer la force de Laplace qui se crée par la présence du champ magnétique et le courant qui circule. On négligera l'hélicité de la bobine.
On utilise un repère cylindrique.



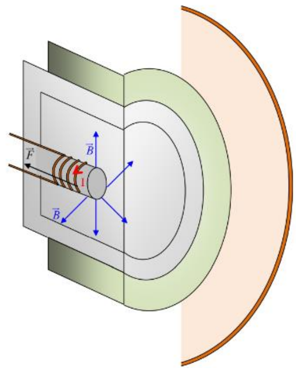


Le champ magnétique est dirigé du pôle Nord de l'aimant vers le pôle sud, ainsi :

$$\vec{B} = B\vec{e_r}$$

La bobine est modélisable par plusieurs spires, et pour chacune d'entre elles l'élément de courant est :

$$i\vec{dl} = idl\vec{e_\theta}$$



On a donc la force de Laplace élémentaire :
$\vec{dF_L} = i\vec{dl} \wedge \vec{B} = idlB\vec{e_\theta} \wedge \vec{e_r} = -idlB\vec{e_z}$.

Le courant ainsi que le champ sont uniformes, on intègre sur tout le fil de ℓ_b :

$$\vec{F_L} = -i\ell_b B\vec{e_z}$$

• Bilan des forces
On rend compte du couplage de la membrane avec l'air par des frottements visqueux (sans frottements, pas d'air déplacé et donc pas de son) de la forme $\vec{F_f} = -\gamma v_z\vec{e_z}$
Le ressort exerce une force de rappel de la forme $\vec{F_r} = -kz\vec{e_z}$ où la membrane est repérée par rapport à sa position au repos.

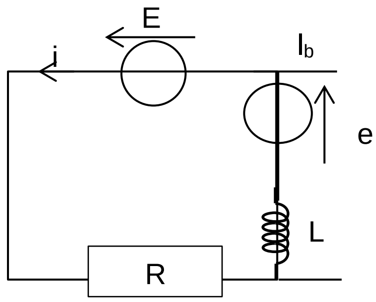
• Principe fondamental de la dynamique : $m\vec{a} = \vec{F_L} + \vec{F_f} + \vec{F_r}$
Projection sur l'axe Oz : $m\frac{d^2z}{dt^2} = -kz - \gamma\frac{dz}{dt} - i\ell_b B$

II.2.2. Equation électrique

Le calcul de la fem et la justification de la validité de la loi de Faraday ne sont pas modifiés par rapport à l'étude du début du chapitre, on obtient encore :

$$e(t) = B\ell_b v_z$$

En orientant la fem induite dans le même sens que le courant on obtient un schéma électrique équivalent :



La loi des mailles mène à l'équation électrique du circuit :

$$L\frac{di}{dt} + Ri = e(t) + E(t) = E(t) + B\ell_b v_z$$

II.2.3. Bilan de puissance

• Méthode

Une méthode qui s'applique toujours pour obtenir un bilan de puissance d'un système électromécanique consiste à multiplier par i l'équation électrique, et par v l'équation mécanique

• Application

$$\begin{cases} m\ddot{z} = -kz - \gamma\dot{z} - i\ell_b B \\ E(t) = L\frac{di}{dt} + Ri - B\ell_b\dot{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_z^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kz^2\right) - i\ell_b Bv_z - \gamma v_z^2 \\ E(t).i = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) + Ri^2 - i\ell_b Bv_z \end{cases}$$

La puissance fourni par la membrane à l'air sous forme de force de frottement fluide correspond à la puissance sonore émise par le haut-parleur : $-\gamma v_z^2 = -f_{z,air}.v_z = -P_{son}$.

On a ainsi : $\begin{cases} P_L = \frac{d}{dt}(E_c + E_p) + P_{son} \\ P_{elec} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) + P_{joule} - ei \end{cases}$

• Interprétation :

- La puissance des forces de Laplace doit compenser les variations d'énergie mécanique
- La puissance électrique doit compenser les pertes par effet Joule, les variations d'énergie magnétique (inductance) et la puissance opposée par la fem

Eliminons P_L entre les deux équations :

$$P_{elec} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) + P_{joule} + \frac{d}{dt}(E_c + E_p) + P_{son}$$

La puissance instantanée E(t)i(t) fournie par le générateur sert :

- à faire varier l'énergie totale du système (stockée sous forme magnétique, cinétique et élastique) ;
- à compenser les pertes dues aux phénomènes dissipatifs (effet Joule) ;
- à fournir de la puissance sonore.

• Rendement énergétique

On peut montrer qu'en régime périodique les termes $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2 + E_c + E_p\right)$ ne contribuent pas en moyenne dans le temps.

On a alors : $\langle P_{elec}\rangle = \langle P_{joule}\rangle + \langle P_{son}\rangle$

Conclusion : En valeur moyenne, la puissance fournie par le générateur sert à produire du son et à compenser la dissipation par effet Joule.

Le rendement énergétique du haut-parleur concernant les puissances moyennes s'écrit :

$$\eta = \frac{\text{Puissance utile :traduite en onde sonore}}{\text{Puissance consommée sous forme électrique}} = \frac{\langle P_{son}\rangle}{\langle P_{elec}\rangle}$$

Le rendement est en le plus souvent de l'ordre de 0,3% à 1%, ce qui est très faible. (L'essentiel de la puissance électrique fournie est dissipée par effet Joule, ce qui peut entraîner des problèmes d'échauffement de la bobine).

Commercialement, on n'indique pas le rendement mais la sensibilité (ou efficacité) d'un haut-parleur. Par définition, c'est la puissance acoustique (exprimée en dB) mesurée à un mètre devant le haut-parleur recevant une puissance électrique de un watt. Sachant qu'une augmentation de 3dB correspond à une multiplication de la puissance acoustique par 2, on a le tableau :

Rendement	Sensibilité (en dB/W/m)
Faible	78 à 83
Moyen	83 à 88
Bon	88 à 93
Elevé	$\geq$93

III. Conversion électromécanique

III.1. Transducteur électromécanique

Un transducteur électromécanique est un dispositif pouvant réaliser soit la conversion d'une énergie mécanique (aux pertes par frottements près) en énergie électrique (aux pertes Joule près), soit la conversion inverse.

Il en existe une très grande variété, d'une importance pratique considérable : moteurs, dynamos, alternateurs, haut-parleurs, microphones, etc…

Il y a réversibilité des échanges électromécaniques ou mécanoélectriques.

Pour un conducteur C en mouvement dans le référentiel du laboratoire $\Re_{labo}$ où règne un champ magnétique $\vec{B}$.
On montre que, quelle que soit la géométrie du conducteur et en l'absence de phénomènes dissipatifs, les puissances mécanique et électrique reçues par le conducteur vérifient :

$$\boxed{P_e + P_m = 0}$$

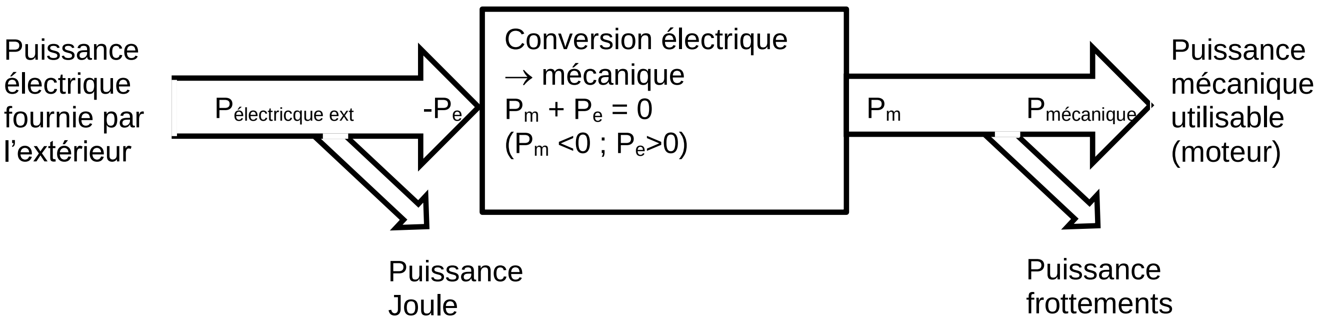
Puissance électrique fournie par la fém induite

Puissance mécanique des forces de Laplace

III.2. Différents types de fonctionnement

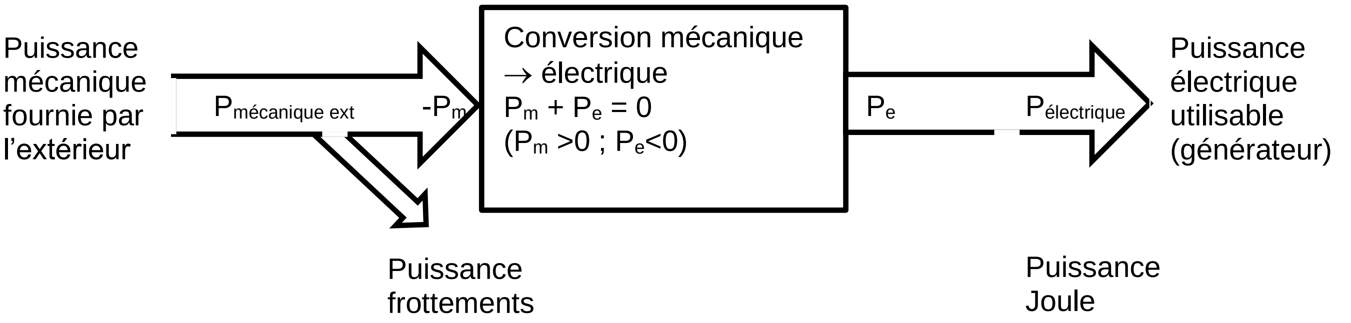
• Fonctionnement moteur
Un générateur impose un courant i dans le circuit électrique. Une force de Laplace apparaît qui peut mettre en mouvement le conducteur, qui peut lui-même entraîner une charge mécanique.
La puissance P_e cédée sous forme électrique par le générateur va être convertie pour partie en puissance thermique (perdue par Joule) et pour partie en puissance mécanique qui pourra :
→ accroître l'énergie cinétique du système (phase de démarrage, d'accélération mobile) ;
→ être dissipée sous forme de chaleur dans les frottements mécaniques ;
→ être cédée à la charge mécanique (ex : puissance acoustique dans un haut-parleur).

Schéma de principe de la conversion d'une puissance électrique en puissance mécanique



• <u>Fonctionnement générateur</u>
Un dispositif mécanique extérieur met en mouvement le conducteur, il apparaît alors un champ électromoteur d'induction qui peut créer un courant, si le circuit est fermé. Le dispositif d'entraînement fournit une puissance mécanique P_m qui sera convertie en puissance électrique, une partie étant perdue par effet Joule.

Schéma de principe de la conversion d'une puissance mécanique en puissance électrique



Le rendement global réel est inférieur à 100 %, du fait des deux phénomènes dissipatifs irréversibles (frottements mécaniques et pertes par effet Joule), mais il est tout de même très bon : 98 %.

BS5 : CIRCUIT MOBILE DANS UN CHAMP MAGNETIQUE STATIONNAIRE