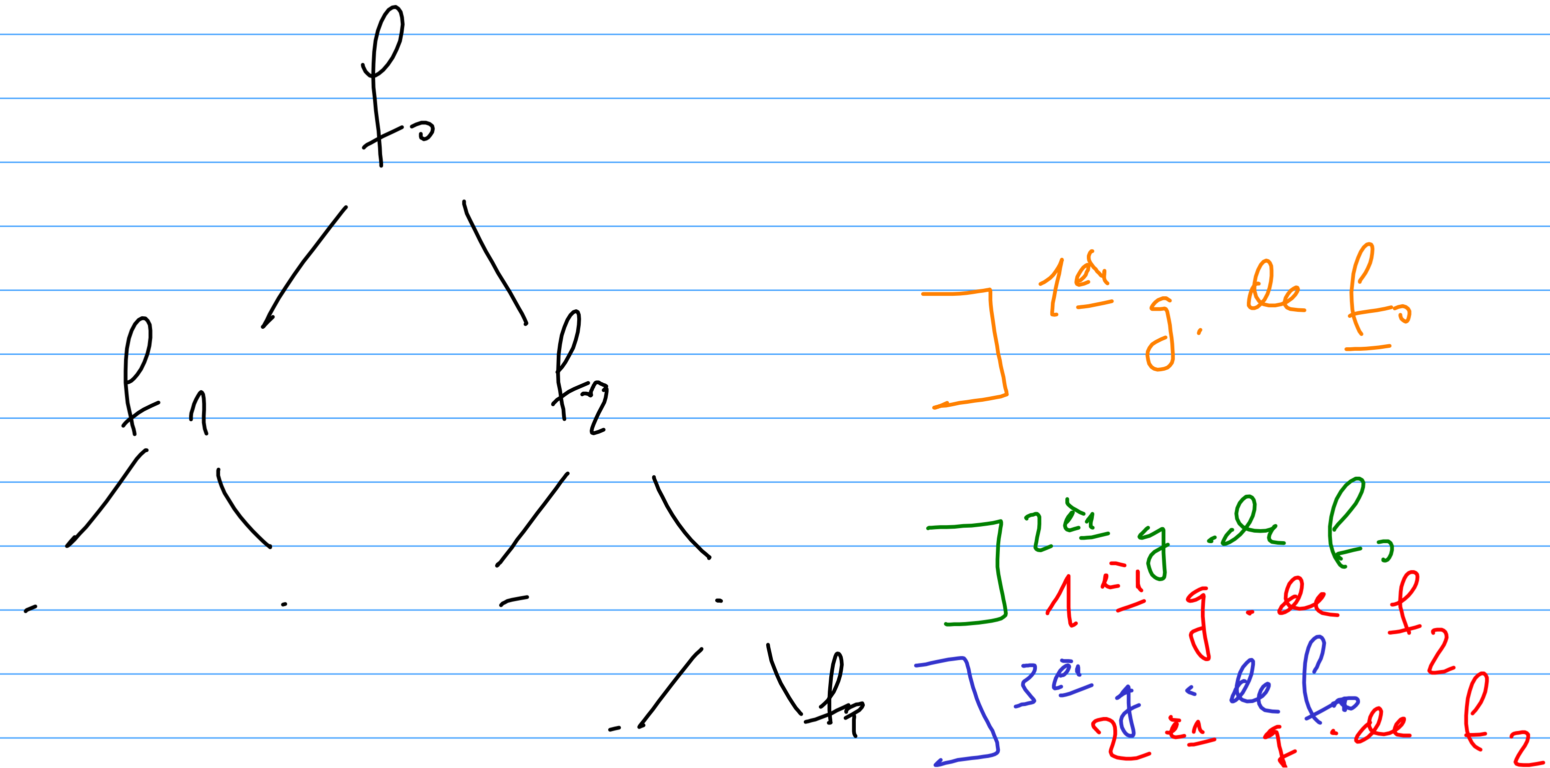
Ex. 8 : f_0 : la fleur originelle.

O : f_0 a 2 descendantes : $P(O) = p$

$$P(\bar{O}) = q = 1 - p$$

Dans ce cas, nommons f_1 et f_2 les 2 descendantes de f_0.



F_1^n : f_1 n'a pas de descendance à la génération $(n+1)$ de f_0 [ie : pas de descendance à la gén. n de f_1].

F_2^n : idem avec f_2.

E_n : f_0 n'a pas de descendance à la gén. $(n+1)$ (de f_0)

Modélisation : $P(F_1^n \mid O) = u_{n-1}$

car f_1 se reproduit indépendamment de et suivant les m règles que f_0.

et aussi : $P(F_2^n \mid O) = u_{n-1}$.

1) $u_0 = P(E_0) = P(\bar{O}) = 1 - p$.

2) $u_n = P(E_n)$

$\underset{(O,\bar{O})\ s.c.c}{=} P(E_n \mid \bar{O}) \times P(\bar{O})$

$+ P(E_n \mid O) \times P(O)$

$P(E_n \mid \bar{O}) = 1$

$P(E_n \mid O) = P(F_1^n \cap F_2^n \mid O)$

$= P(F_1^n \mid O) \times P(F_2^n \mid O)$ par ind. de F_1^n et F_2^n

$$= u_{n-1}^2 .$$

Dc : $u_n = 1 - p + p\, u_{n-1}^2 .$

3) Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto 1 - p + p x^2 .$$

(sur $[0,1]$, car $\forall n$, $u_n = p(E_n) \in [0,1]$)

$\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = u_{n+1}$.

f est $\nearrow$, dc $f([0,1]) = [f(0), f(1)]$

$$= [1-p, 1] \subset [0,1]$$

donc $\forall n$, $u_n \in [0,1]$ et (u_n) est <u>monotone</u> car f est $\uparrow$.

(u_n) est monotone et bornée, donc elle cv.
Puisque f est continue, la lim de (u_n) est 1 pt fixe de f, sur $[0,1]$.

Soit $x \in [0,1]$.

$$f(x) = x \iff p x^2 - x + 1 - p = 0$$

$$\iff (x-1)(px + p - 1) = 0$$

donc f a 2 pts fixes: 1 et $\dfrac{1-p}{p}$.

Rq : $p \in \,]0,1[$ donc :

$$0 < \underbrace{1-p}_{=u_0} < \frac{1-p}{p}$$

A-t-on $\dfrac{1-p}{p} \leq 1$?

$$\frac{1-p}{p} \leq 1 \iff 1-p \leq p \quad \text{car } p>0$$

$$\iff p \geq \frac{1}{2}.$$

Si $\underline{p \leq \frac{1}{2}}$: alors f n'a qu'1 pt fixe ds $[0,1]$: 1.

$\left(\text{si } p = \frac{1}{2} : \frac{1-p}{p} = 1\right)$.

dc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

Si $\underline{p > \frac{1}{2}}$: f a 2 pts fixes ds $[0,1]$.

$$f\left(\left[0, \frac{1-p}{p}\right]\right) = \left[f(0), f\left(\frac{1-p}{p}\right)\right]$$

$$= \left[u_0, \frac{1-p}{p}\right] \subset \left[0, \frac{1-p}{p}\right]$$

$[0, \frac{1-p}{p}]$ est stable par f et contient

u_0, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, \frac{1-p}{p}]$.

Or : $\frac{1-p}{p} < 1$

le seul pt fixe de f sur $[0, \frac{1-p}{p}]$

est $\frac{1-p}{p}$, donc :

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1-p}{p}$$

Ccl : si $p \leq \frac{1}{2}$: $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

l'extinction de la fleur est quasi-certaine.

si $p > \frac{1}{2}$: $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1-p}{p} < 1$

donc il y a 1 probabilité non nulle que la fleur ne s'éteigne pas.