Devoir surveillé n° 9 - Remarques

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 36 points, ramené sur 5 points.
- Problèmes :chaque question sur 4 points, total v1 sur 92, total v2 sur 96, ramené sur 15 points.

Statistiques descriptives.

	Calculs	v1	v2	Note finale
Note maximale	30	47	81	20
Note minimale	10	10	17	4
Moyenne	$\approx 22,16$	$\approx 29,43$	$\approx 34,24$	$\approx 10,88$
Écart-type	$\approx 5,31$	$\approx 10,51$	$\approx 14,48$	$\approx 3,42$

Étude d'une suite double récurrente (v1).

1. Quantifier vos n, nom d'une pipe ! ! ! ! Je dois encore le dire en mai ? ? ? ?

2. Les suites géométriques matricielles ne sont pas au programme. Je pense que, éventuellement sans aller jusqu'à rédiger la récurrence intégralement, il faut au minimum expliquer que le résultat se démontre par récurrence.

3. Là encore, des erreurs de rédaction que je ne devrais plus voir en mai.
Je suis EFFRAYÉ par le nombre d'élèves qui pensent que $(1, 2)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $x + 2y = 0$: ce n'est même pas une solution ! C'est une erreur de lycéen, vous confondez vecteur directeur et vecteur normal. VÉRIFIEZ TOUJOURS VOS SOLUTIONS ! ! ! !
Pour calculer le noyau, vous ne devez pas commencer par « soit X tel que $AX = 0$ ». Ceci est le début d'une analyse, donc si vous commencez comme ça, vous devez faire une synthèse après. Dans le même ordre d'idée, il ne faut pas résoudre le système par implication avec des « donc », ce qui montre uniquement que $\operatorname{Ker} A$ est inclus dans $\operatorname{Vect} \mathscr{B}_1$, mais pas l'égalité. Il faut introduire X quelconque (« soit X », tout simplement) et ensuite rédiger par équivalences : $AX = 0$ ssi blablabla.
Ensuite, moins grave mais agaçant tout de même, vous ne savez pas rédiger correctement les réponses aux questions de la forme « montrer qu'il existe $\mathscr{B}_1$ telle que ... ». L'énoncé n'introduit pas $\mathscr{B}_1$, au contraire, il vous demande de montrer qu'elle existe ! Il est donc totalement incohérent de répondre « on a donc $\mathscr{B}_1 = \cdots$ ». Vous devez rédiger : « posons $\mathscr{B}_1 = \cdots$, alors $\mathscr{B}_1$ est une base de $\operatorname{Ker} A$ ».
Enfin, pour le rang, ne refaites pas un calcul, utilisez le théorème du rang, ça va plus vite.

4. Il est totalement inutile de commencer par montrer que cet ensemble est un sev. On vous demande une base, donc commencez par montrer que cet ensemble est égal à $\operatorname{Vect} \mathscr{B}_2$, et vous aurez répondu aux deux questions en une seule fois : Vect(bidule) est toujours un sev, c'est du cours.

7. À la fin on attend l'expression précise de A^n dans une matrice 2×2 et pas seulement la relation $A^n = PD^nP^{-1}$.

Étude d'une suite de tirages (v1).

La plupart des résultats de ce problème étaient donnés dans l'énoncé. On attendait donc un minimum d'explications et de justifications : il est trop facile de balancer un ou deux arguments très vagues et un peu blabla et de dire oh miracle, j'ai le résultat ! De manière générale, vous ne justifiez pas assez vos raisonnements en probas : il y a des formules, des théorèmes : il faut les citer. Et il faut vérifier les hypothèses.

2. C'est la formule des probabilités composées, il faut le dire et préciser le produit. Il faut aussi expliquer à quoi sont égaux tous les termes de ce produit, en expliquant, et pas seulement en sortant des fractions de sa manche. À la fin, il fallait simplifier l'expression, si possible en utilisant des factorielles.

4. Que d'arnaques dans cette question ! Des b qui se transforment en $b + 1$, des signes - qui se transforment en + ...

La fin a été moins abordée, mais plutôt bien quand elle l'a été.

Problème (v2).

De manière générale, vous prenez encore les probas pour une science un peu blabla. Mais c'est comme tout le reste : il y a des formules et des théorèmes, il faut citer leur nom et vérifier les hypothèses. Les résultats proviennent de calculs, il faut les justifier et les détailler. Trop souvent vous faites des tartines de blabla en français du style « ça marche comme-ci, comme-ça » : ce n'est pas des probas.

1. Non : $\deg(X-1)P' \neq \deg P$ en général ... comme je l'ai souvent dit, pas besoin d'égalité pour le degré, $\deg P' \leqslant (\deg P) - 1$ suffit largement. Vous avez dans la majorité favorisé l'expression $(X-1)P' + P$ pour manipuler $g(P)$, mais l'expression $[(X-1)P]'$ est beaucoup plus pratique, en particulier pour le degré, mais surtout pour intégrer (cf. qu. 2)

2. Il faut absolument penser à distinguer les cas $x \neq 1$ (pour pouvoir divisier par $(x-1)$) et $x = 1$, et ne pas oublier de traiter ce dernier.
Et surtout, qu'est-ce qui vous passe par la tête pour intégrer $g(P)$? ? L'énoncé vous donne $g(P) = [(X-1)P]'$, donc si on intègre on obtient $(X-1)P$ et basta ! ! Au lieu de ça, vous êtes pleins à développer $g(P) = XP' - P' + P$, et après vous trouvez ça un peu casse-pied à intégrer (tu m'étonnes), et donc vous faites une IPP ! ! Défaire et refaire, c'est toujours travailler, comme disait l'autre.

3. Ici, dire que g est inversible à gauche n'est pas correct. Un inverse à gauche de g est un élément du même ensemble que g. Mais on ne savait pas si f était un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Et donc il était aussi impossible de calculer $g(f(P))$, sauf en montrant avant que $f(P)$ était bien un polynôme (donc dans l'ensemble de définition de g). Mais cela était délicat, donc la subtilité de cette question était de contourner le problème, et de montrer que f était l'inverse de g sans parler d'inverse à gauche ni de $g \circ f$, et ensuite d'en déduire que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$ sans montrer que $f(P)$ était un polynôme.
Pour peut-être mieux comprendre le problème soulevé ici, regardez cet exemple : soit $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto 2n$. Et soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{2}$. Alors $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$. Pourtant g n'est pas une fonction inversible de $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$.

5.a. Il faut expliquer d'où viennent vos expressions : trop souvent il y a un $\dfrac{1}{n+1}$ qui apparaît sans justification. Il faut impérativement parler de probabilité uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

5.b. Expliquer qu'il existe une configuration non quasi-impossible de tirer la boule numéro r fait partie de ce que j'appelle du blabla. Il faut donner l'expression mathématique de $P(Z_k = r)$ et montrer par le calcul qu'elle est strictement positive.

6. Les probas totales, c'est plus qu'une formule qu'on balance comme ça. Il y a des hypothèses (quelle surprise), et on attend de vous que vous les donniez (quel étonnement) : il faut donner le sce qui va bien, et si vous utilisez des probas conditionnelles, il faut vérifier que ces événements sont de probabilités non nulles.

8.a. Je ne comprends pas comment beaucoup d'entre vous font pour balancer le résultat sans détailler la somme, et surtout sans jamais parler du passage à la limite ... les points s'envolent.

9. Là aussi, ne pas oublier le cas $x = 1$. Ne pas oublier non plus que l'expression $F_k'(x) = \sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)x^{r-1}$ est fausse !
Car pour $r = 0$, vous vous retrouvez avec un x^{-1}, qui n'est pas un polynôme et ne fait pas partie du tout de F_k'. La somme doit commencer à 1 ! Et pour F_k'', elle doit commencer à 2.

10.a. Même remarque concernant les indices. Mais après avoir évalué en 1, il faut à nouveau faire commencer les sommes à 0 (c'est compliqué les maths). Et n'oubliez pas de citer la formule de transfert.