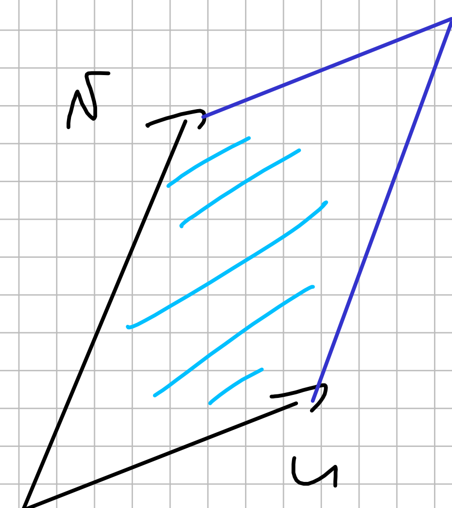
3.2 (fin) - Déterminant, aire, volume

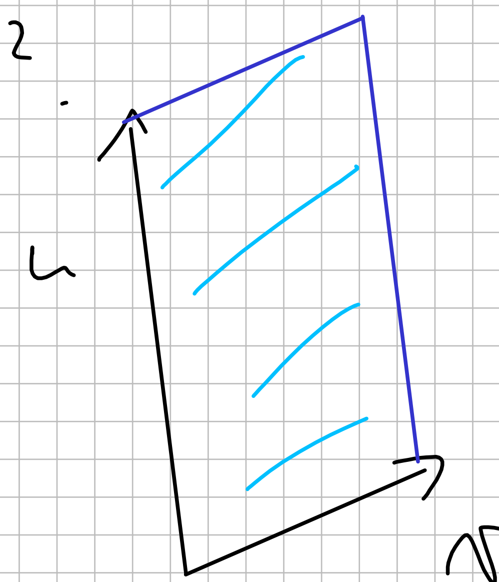
$\mathbb{R}^2$:

$\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, produit scalaire (usuel).

u, v 2 vecteurs de $\mathbb{R}^2$.



aire > 0



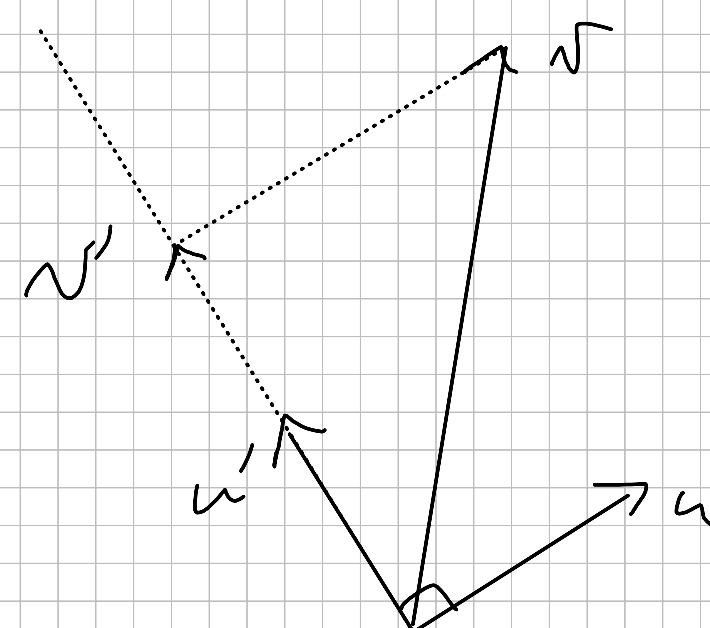
aire < 0.

aire $= 0$

Th : $\det_{\mathcal{B}}(u, v)$ = aire algébrique du parallélogramme défini par u et v.

Dém : cas (u, v) est une base directe.

$$u\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad v\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \quad u'\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$



$$|u' \cdot v| = \|u'\| \cdot \|v'\|$$

ici : $u' \cdot v = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ad - bc$

$$= \det_{\mathcal{C}}(u, v) > 0$$

de : $\det_{\mathcal{C}}(u,v) = u' \cdot v = \|u'\| \cdot \|v'\|$

$$= \|u\| \cdot \|v'\|$$

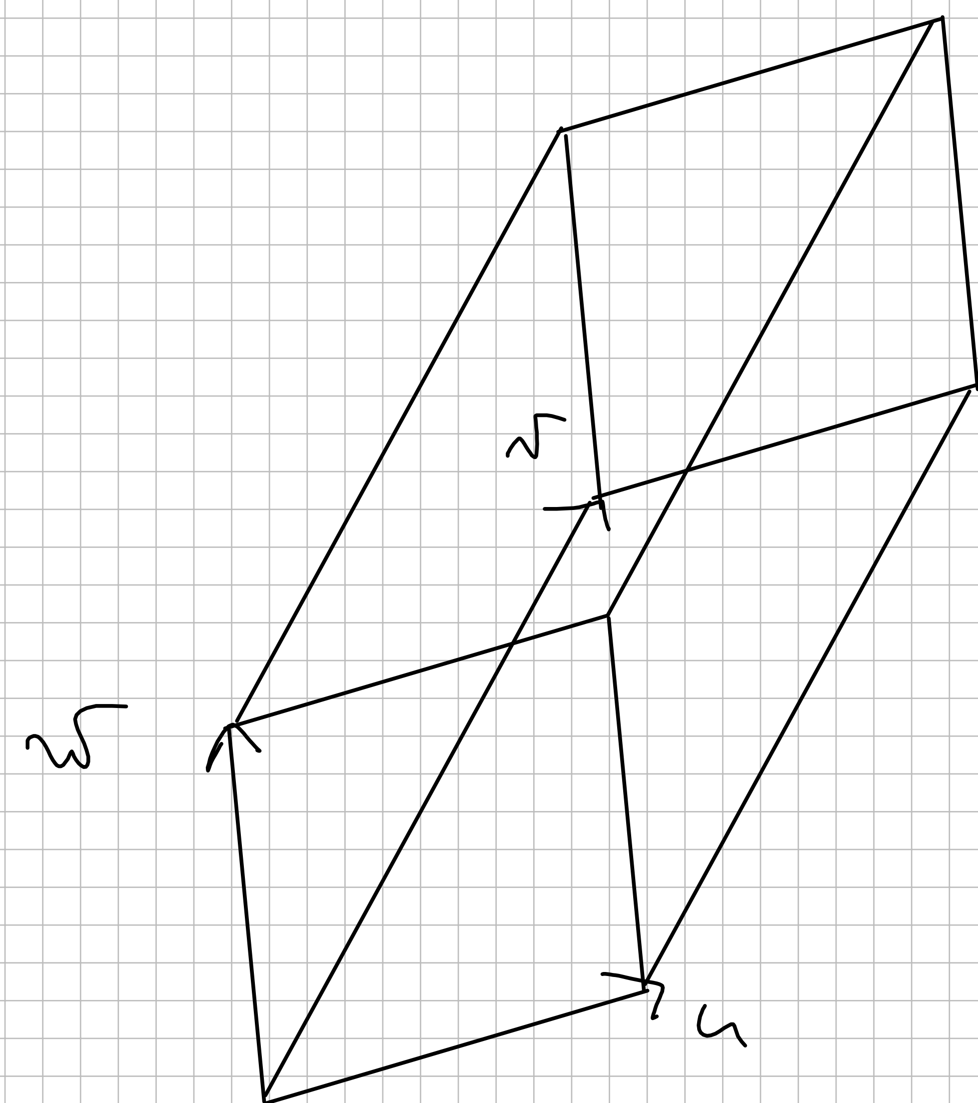
= base x hauteur

= aire du parallélogramme.

<u>Rq</u> : si $\mathcal{B}$ est 1 bon.d.,

$$\det_{\mathcal{B}}(u, v) = \det_{\mathcal{C}}(u, v)$$

$\mathbb{R}^3$:



$\mathcal{C}$: base canonique de $\mathbb{R}^3$

$\det_{\mathcal{C}}(u, v, w)$ = volume algébrique du parallélépipède.

Rq : $v \wedge w$: produit vectoriel.

$$\det_{\mathcal{C}}(u, v, w) = u \cdot (v \wedge w)$$

Rq : le déterminant est utile pour donner des équations de droites et de plans.

- dans $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{D} = \mathrm{Vect}(u)$

$$v \in \mathcal{D} \iff (u, v) \text{ liée}$$

$$\iff \det_{\mathcal{C}}(u, v) = 0$$

- ds $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}(u, v)$

$$w \in \mathcal{P} \iff \det_{\mathcal{C}}(u, v, w) = 0.$$

<u>Ex</u> : $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$w \in \mathcal{P} \iff \det_{\mathcal{C}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\iff 1 \times 1 \times z + \cancel{0 \times y \times 0} + x \times 1 \times (-2)$$

$$- \cancel{0 \times 1 \times x} - (-2) \times y \times 1 - \cancel{z \times 1 \times 0} = 0$$

$$\iff z - 2x + 2y = 0$$: c'est l'éq. de $\mathcal{P}$.