LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I.

ANNÉE 2018 - 2019

C4 : MODÉLISATION CINÉMATIQUES DES SYSTÈMES COMPOSÉS DE CHAINES DE SOLIDES

TD 8 - Introduction à la modélisation des systèmes mécaniques(C4-1)

27 Novembre 2018

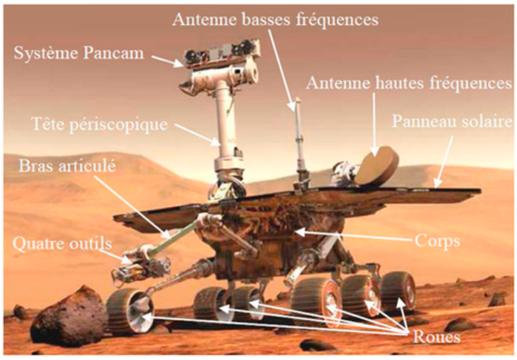
Compétences

- **Analyser :** Apprécier la pertinence et la validité des résultats :
  - unités du système international;
  - homogénéité des grandeurs.
- **Modéliser :** Proposer un modèle de connaissance et de comportement :
  - Solide indéformable;
  - référentiel, repère
  - équivalence solide/référentiel

1 Bras articulé du robot Spirit

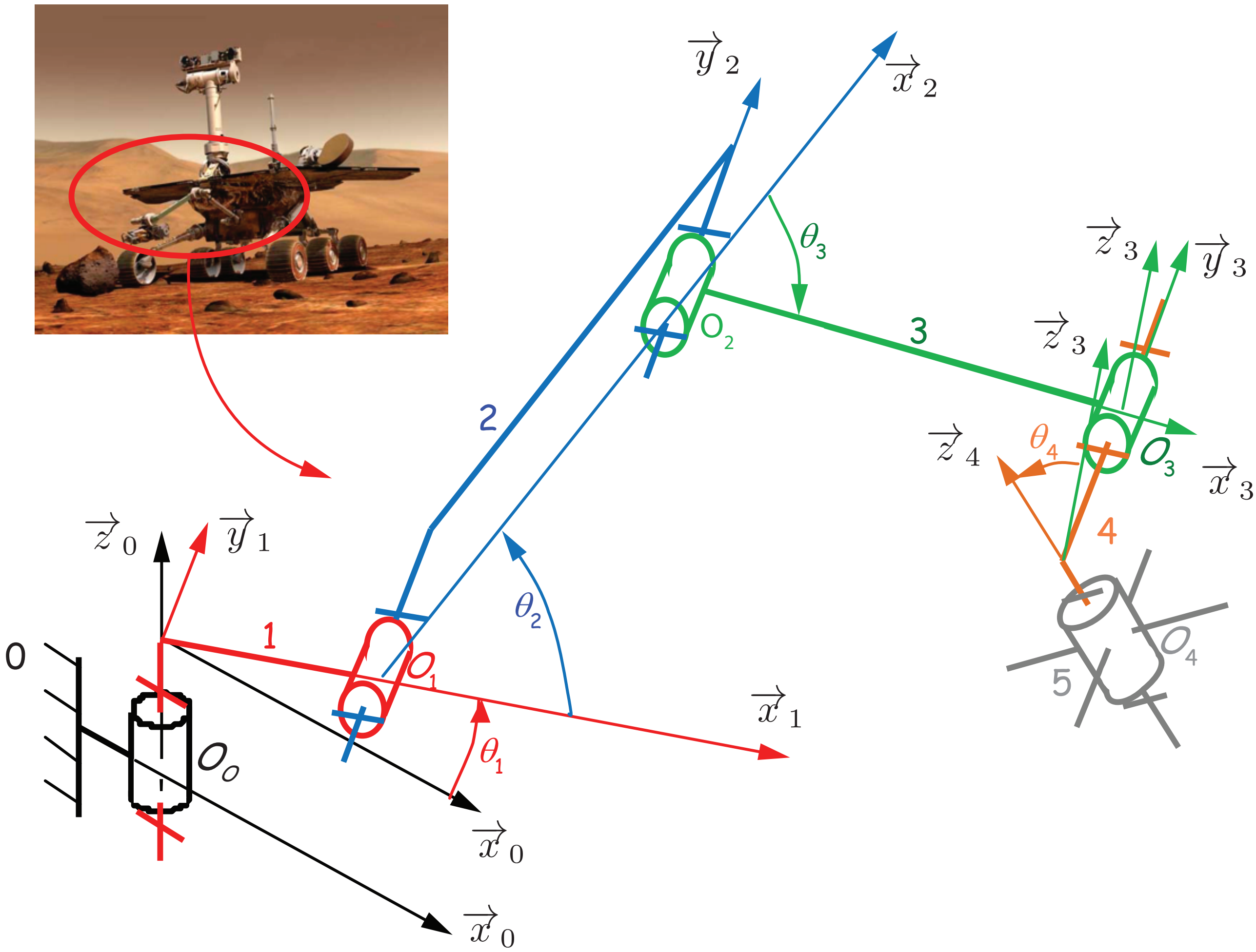
a) Présentation

La mission Mars Exploration Rover (MER) est une mission spatiale confiée à la NASA. Elle a pour but d'explorer les sols de la planète Mars pour y rechercher la présence ancienne et prolongée d'eau. Cette exploration a été possible notamment grâce au robot Spirit.



2 Modélisation cinématique et paramétrage du bras articulé

Le robot Spirit comporte un bras articulé, dont la fonction est d'amener quatre outils (une foreuse, un microscope et deux spectromètres) à proximité d'une roche à étudier.



a) Paramétrage

- Le corps du robot est repéré 0. On lui attache un repère $R_0\left(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0\right)$ et le point O_0 est à la hauteur h_0 du sol, supposé constante.
- La liaison entre le solide 1 et le corps du robot 0 est modélisée par une liaison pivot parfaite d'axe $\left(O_0,\vec{z}_0\right)$. On attache au solide 1 le repère $R_1\left(O_0,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1\right)$, on pose $\overrightarrow{O_0O_1}=a\cdot\vec{x}_1+c\cdot\vec{z}_1$ et $\theta_1=\left(\vec{x}_0,\vec{x}_1\right)$ avec $-\frac{\pi}{2}\leq\theta_1\leq\frac{\pi}{2}$.
- La liaison entre le bras 2 et le solide 1 est modélisée par une liaison pivot parfaite d'axe $\left(O_1,\vec{y}_1\right)$. On attache au solide 2 le repère $R_2\left(O_1,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2\right)$, on pose $\overrightarrow{O_1O_2}=a_2\cdot\vec{x}_2$ et $\theta_2=\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2\right)$ avec $-\frac{\pi}{4}\leq\theta_2\leq\frac{\pi}{4}$.
- La liaison entre l'avant bras 3 et le bras 2 est modélisée par une liaison pivot parfaite d'axe $\left(O_2,\vec{y}_2\right)$. On attache au solide 3 le repère $R_3\left(O_2,\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3\right)$, on pose $\overrightarrow{O_2O_3}=a_3\cdot\vec{x}_3$ et $\theta_3=\left(\vec{x}_2,\vec{x}_3\right)$ avec $0\leq\theta_3\leq\pi$.
- La liaison entre le solide 4 et l'avant bras 3 est modélisée par une liaison pivot parfaite d'axe $\left(O_3,\vec{y}_3\right)$. On attache au solide 4 le repère $R_4\left(O_3,\vec{x}_4,\vec{y}_4,\vec{z}_4\right)$, on pose $\overrightarrow{O_3O_4}=-b_4\cdot\vec{y}_4-c_4\cdot\vec{z}_4$ et $\theta_4=\left(\vec{x}_3,\vec{x}_4\right)$ avec $-\pi\leq\theta_4\leq\pi$.
- La liaison entre le solide 5 (sur lequel se trouvent les quatre outils d'étude de la roche) et le solide 4 est modélisée par une liaison pivot parfaite d'axe $\left(O_4,\vec{z}_4\right)$.

Données : $h_0=0{,}5m$; $a_1=0{,}1m$; $c=0{,}1m$; $a_2=0{,}5m$; $a_3=0{,}8m$; $b_4=0{,}1m$ et $c_4=0{,}15m$

b) Modélisation

Q 1 : Représenter les figures planes de changement de repère R0-R1, R1-R2, R2-R3 et R3-R4.

On définit les positions particulières du bras articulé suivantes :

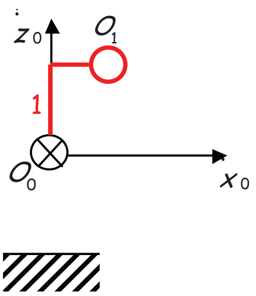
- La position de repos, notée $P_r\left(\theta_1=-\frac{\pi}{2},\theta_2=0,\theta_3=\pi\right)$, est la position du bras articulé lorsqu'il n'est pas en fonctionnement.
- La position initiale de déploiement, notée $P_i\left(\theta_1=0,\theta_2=-\frac{\pi}{4},\theta_3=\frac{\pi}{2}\right)$, est la position adoptée par le bras avant de se déployer complètement vers la roche.

- La position horizontale, notée $P_h\,(\theta_1 = 0, \theta_2 = 0, \theta_3 = 0)$.
- La position verticale, notée $P_v\left(\theta_1 = 0, \theta_2 = -\frac{\pi}{4}, \theta_3 = 0\right)$

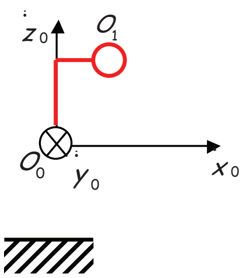
On considère par la suite que 4 et 5 restent toujours immobiles l'un par rapport à l'autre et que l'ensemble (4+5) reste toujours horizontal par rapport au sol ($\overrightarrow{z}_0 = \overrightarrow{z}_4$)

Q 2 : Compléter les deux schémas cinématiques permettant de visualiser dans le plan $\left(O_0, \overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{y}_0\right)$ les solides 2, 3 et 45 dans les positions particulières P_h et P_v.

Remarque : *On fera attention au sens positif des angles dans le plan proposé, par exemple $\theta_2 - \frac{\pi}{4}$ correspond à une orientation du bras vers le haut.*



Position $P_h\,(\theta_1 = 0, \theta_2 = 0, \theta_3 = 0)$



Position $P_v\left(\theta_1 = 0, \theta_2 = -\frac{\pi}{4}, \theta_3 = 0\right)$

Q 3 : Déterminer $\overrightarrow{O_0O_3}$.

Q 4 : Exprimer $\overrightarrow{O_0O_3}$ dans R_0.

Q 5 : Calculer la hauteur maximale d'étude de la roche par rapport au sol dans la position $P_v\left(\theta_1 = 0, \theta_2 = -\frac{\pi}{4}, \theta_3 = 0\right)$.

Q 6 : Le cahier des charges demande une hauteur maximale d'étude de la roche par rapport au sol de $1,35 \pm 0,05m$, conclure quand aux performances obtenues.

3 Calculs vectoriels

Soient $R_1 = (O_1, \overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1})$, $R_2 = (O_2, \overrightarrow{i_2}, \overrightarrow{j_2}, \overrightarrow{k_2})$ et $R_3 = (0_3, \overrightarrow{i_3}, \overrightarrow{j_3}, \overrightarrow{k_3})$ avec $\overrightarrow{i_m}$, $\overrightarrow{j_m}$, $\overrightarrow{k_m}$ des vecteurs unitaire formant les bases orthonormées R_m .

On passe de R_1 à R_2 par un rotation α autour de $\overrightarrow{i_1}$.

On passe de R_2 à R_3 par un rotation θ autour de $\overrightarrow{j_2}$.

Q 7 : Faire les figures de changement de base.

Q 8 : Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{i_3}$ et $\overrightarrow{j_3}$ dans R_1 .

Q 9 : Donner le résultat des opérations suivantes :

$\overrightarrow{k_1} \cdot \overrightarrow{i_2}$, $\quad \overrightarrow{j_3} \cdot \overrightarrow{k_1}$, $\quad \overrightarrow{i_1} \cdot \overrightarrow{i_3}$, $\quad \overrightarrow{k_1} \wedge \overrightarrow{i_2}$, $\quad \overrightarrow{j_3} \wedge \overrightarrow{k_1}$, $\quad \overrightarrow{i_1} \wedge \overrightarrow{i_3}$.

On définit les vecteurs :

$$\overrightarrow{V}_1 = a\,\overrightarrow{i_1} + b\overrightarrow{k_1}$$
$$\overrightarrow{V}_2 = c\,\overrightarrow{i_3}$$
$$\overrightarrow{V}_3 = d\,\overrightarrow{i_3} + e\,\overrightarrow{j_3}.$$

Q 10 : Donner l'expression de la projection du vecteur $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{V}_1 \wedge \overrightarrow{V}_2$ sur $\overrightarrow{i_1}$.

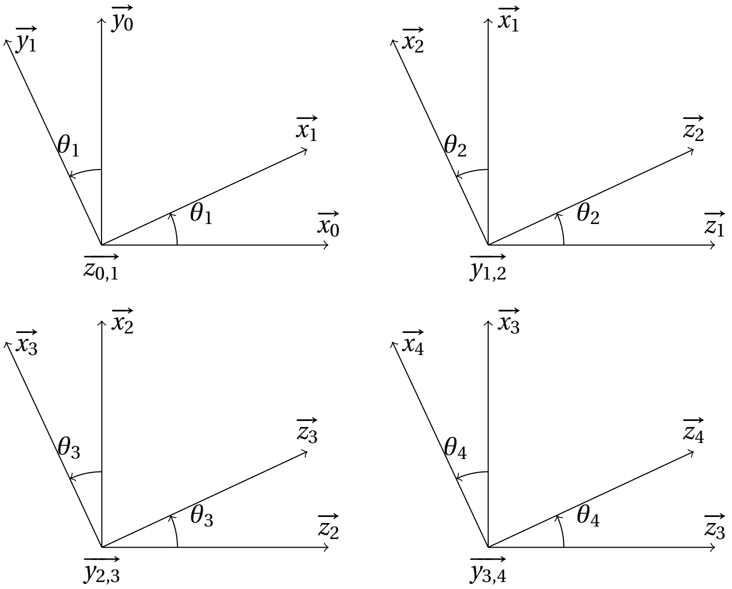
Q 11 : Calculer le produit mixte $\left(\overrightarrow{V}_1 \wedge \overrightarrow{V}_2\right) \cdot \overrightarrow{V}_3$

.

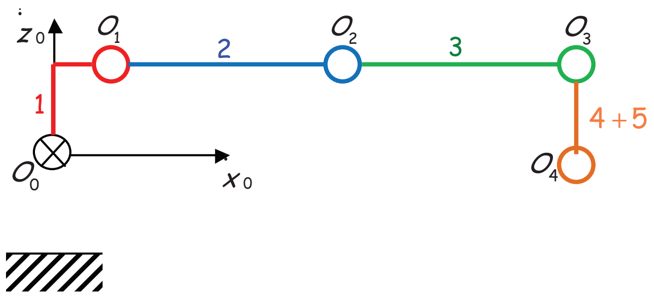
Corrigé

1 Bras articulé du robot Spirit

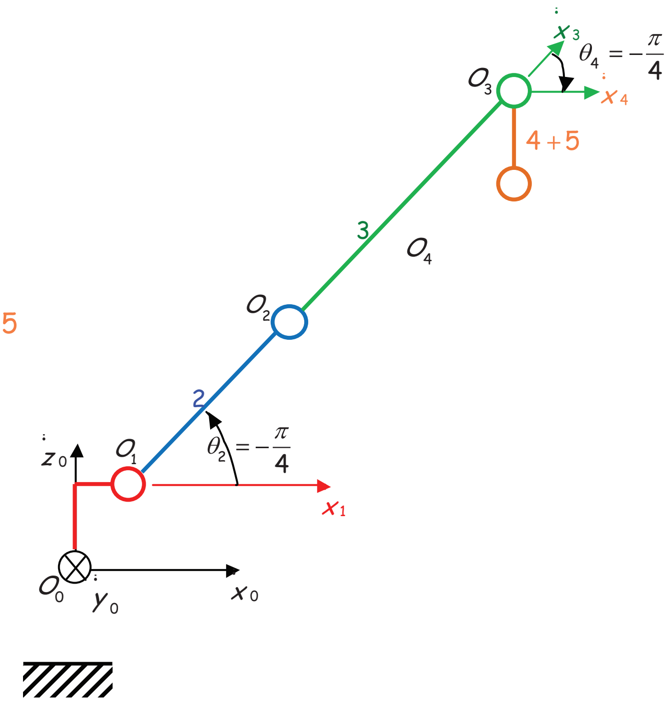
Q 1 : Représenter les figures planes de changement de repère R0-R1, R1-R2, R2-R3 et R3-R4.



Q 2 : Compléter les deux schémas cinématiques permettant de visualiser dans le plan $\left(O_0, \overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{y}_0\right)$ les solides 2, 3 et 45 dans les positions particulières P_h et P_v.



Position $P_h\,(\theta_1 = 0, \theta_2 = 0, \theta_3 = 0)$



Position $P_v\left(\theta_1 = 0, \theta_2 = -\frac{\pi}{4}, \theta_3 = 0\right)$

Q 3 : Déterminer $\overrightarrow{O_0O_3}$.

$$\overrightarrow{O_0O_3} = \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O_3} = a_1.\overrightarrow{x_1} + c_1.\overrightarrow{z_1} + a_2.\overrightarrow{x_2} + a_3.\overrightarrow{x_3}$$

Q 4 : Exprimer $\overrightarrow{O_0O_3}$ dans R_0.

$$\overrightarrow{x_2} = \cos(\theta_2).\overrightarrow{x_0} - \sin(\theta_2).\overrightarrow{z_0}$$

$$\overrightarrow{x_3} = \cos(\theta_2+\theta_3).\overrightarrow{x_0} - \sin(\theta_2+\theta_3).\overrightarrow{z_0}$$

$$\overrightarrow{O_0O_3} = a_1.\overrightarrow{x_0} + c_1.\overrightarrow{z_0} + a_2.\left[\cos(\theta_2).\overrightarrow{x_0} - \sin(\theta_2).\overrightarrow{z_0}\right] + a_3.\left[\cos(\theta_2+\theta_3).\overrightarrow{x_0} - \sin(\theta_2+\theta_3).\overrightarrow{z_0}\right]$$

$$\overrightarrow{O_0O_3} = \left[a_1 + a_2.\cos(\theta_2) + a_3.\cos(\theta_2+\theta_3)\right].\overrightarrow{x_0} + \left[c_1 - a_2.\sin(\theta_2) - a_3.\sin(\theta_2+\theta_3)\right].\overrightarrow{z_0}$$

Q 5 : Calculer la hauteur maximale d'étude de la roche par rapport au sol dans la position $P_v\left(\theta_1=0,\theta_2=-\frac{\pi}{4},\theta_3=0\right)$.

$$h_{\max} = h_0 + \overrightarrow{O_0O_4}.\overrightarrow{z_0} = h_0 + \left[\overrightarrow{O_0O_3} + \overrightarrow{O_3O_4}\right].\overrightarrow{z_0} = h_0 + \left[c_1 - a_2.\sin(\theta_2) - a_3.\sin(\theta_2+\theta_3)\right] - c_4$$
$$h_{\max} = h_0 + c_1 - a_2.\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) - a_3.\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) - c_4$$

$$h_{\max} = h_0 + c_1 + (a_2+a_3).\frac{\sqrt{2}}{2} - c_4$$

$$h_{\max} = 0,5 + 0,1 + (0,5+0,8).\frac{\sqrt{2}}{2} - 0,15 = 1,37\,m$$

Q 6 : Le cahier des charges demande une hauteur maximale d'étude de la roche par rapport au sol de $1,35 \pm 0,05m$, conclure quand aux performances obtenues.

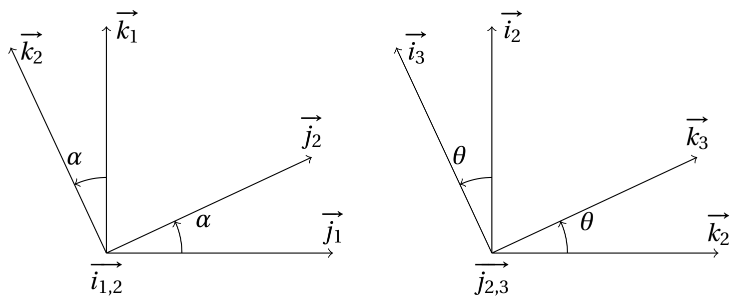
CDCF vérifié

2 Calculs vectoriels

Soient $R_1 = (O_1, \overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1})$, $R_2 = (O_2, \overrightarrow{i_2}, \overrightarrow{j_2}, \overrightarrow{k_2})$ et $R_3 = (0_3, \overrightarrow{i_3}, \overrightarrow{j_3}, \overrightarrow{k_3})$ avec $\overrightarrow{i_m}$, $\overrightarrow{j_m}$, $\overrightarrow{k_m}$ des vecteurs unitaire formant les bases orthonormées R_m .

On passe de R_1 à R_2 par un rotation α autour de $\overrightarrow{i_1}$.
On passe de R_2 à R_3 par un rotation θ autour de $\overrightarrow{j_2}$.

Q 7 : Faire les figures de changement de base.



Q 8 : Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{i_3}$ et $\overrightarrow{j_3}$ dans R_1 .

$$\overrightarrow{i}_3 = \cos\theta\,\overrightarrow{i}_{1,2} - \sin\theta\,\overrightarrow{k}_2$$
$$= \cos\theta\,\overrightarrow{i}_{1,2} - \sin\theta\left(\cos\alpha\,\overrightarrow{k}_1 - \sin\alpha\,\overrightarrow{j}_1\right)$$

$$\overrightarrow{j}_3 = \overrightarrow{j}_2 = \cos\theta\,\overrightarrow{j}_1 + \sin\theta\,\overrightarrow{k}_1$$

Q 9 : Donner le résultat des opérations suivantes :

$$\overrightarrow{k_1} \cdot \overrightarrow{i_2} = 0$$

,

$$\overrightarrow{j_3} \cdot \overrightarrow{k_1} = \overrightarrow{j}_2 \cdot \overrightarrow{k_1} = \sin\alpha$$

,

$$\overrightarrow{i_1} \cdot \overrightarrow{i_3} = \overrightarrow{i_2} \cdot \overrightarrow{i_3} = \cos\theta$$

,

$$\overrightarrow{k_1} \wedge \overrightarrow{i_2} = \overrightarrow{k_1} \wedge \overrightarrow{i_1} = \overrightarrow{j_1}$$

,

$$\overrightarrow{j_3} \wedge \overrightarrow{k_1} = \overrightarrow{j_2} \wedge \overrightarrow{k_1} = \cos\alpha\,\overrightarrow{i_1}$$

,

$$\overrightarrow{i_1} \wedge \overrightarrow{i_3} = \overrightarrow{i_2} \wedge \overrightarrow{i_3} = \sin\theta\,\overrightarrow{j_2}$$

.

Q 10 : Donner l'expression de la projection du vecteur $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{V}_1 \wedge \overrightarrow{V}_2$ sur $\overrightarrow{i_1}$.

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{V}_1 \wedge \overrightarrow{V}_2\right) \cdot \overrightarrow{i_1} = \left(\left(a\,\overrightarrow{i_1} + b\overrightarrow{k_1}\right) \wedge c\,\overrightarrow{i_3}\right) \cdot \overrightarrow{i_1} &= \left(\overrightarrow{i_1} \wedge \left(a\,\overrightarrow{i_1} + b\overrightarrow{k_1}\right)\right) \cdot c\,\overrightarrow{i_3} \\ &= -b \cdot c \cdot \overrightarrow{j_1} \wedge \overrightarrow{i_3} = -b \cdot c \cdot \overrightarrow{j_1} \wedge \left(\cos\theta\,\overrightarrow{i_2} - \sin\theta\,\overrightarrow{k_2}\right) \\ &= b \cdot c \cdot \sin\theta \sin\alpha\end{aligned}$$

Q 11 : Calculer le produit mixte $\left(\overrightarrow{V}_1 \wedge \overrightarrow{V}_2\right) \cdot \overrightarrow{V}_3$

.

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{V}_1 \wedge \overrightarrow{V}_2\right) \cdot \overrightarrow{V}_3 &= \left(\left(a\ \overrightarrow{i_1} + b\overrightarrow{k_1}\right) \wedge c\ \overrightarrow{i_3}\right) \cdot \left(d\ \overrightarrow{i_3} + e\ \overrightarrow{j_3}\right) \\ &\left(c\ \overrightarrow{i_3} \wedge \left(d\ \overrightarrow{i_3} + e\ \overrightarrow{j_3}\right)\right) \cdot \left(a\ \overrightarrow{i_1} + b\overrightarrow{k_1}\right) \\ = c \cdot e \cdot \overrightarrow{k_3} \cdot \left(a\ \overrightarrow{i_1} + b\overrightarrow{k_1}\right) &= c \cdot e \cdot \left(\cos\theta\,\overrightarrow{k_2} + \sin\theta\,\overrightarrow{i_2}\right) \cdot \left(a\ \overrightarrow{i_1} + b\overrightarrow{k_1}\right) \\ &= c \cdot e \cdot [b \cdot \cos\theta \cos\alpha + a \sin\theta \cos\alpha]\end{aligned}$$