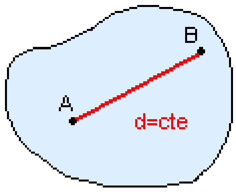
M2 INTRODUCTION A LA CINEMATIQUE DU SOLIDE

I. Caractérisation d'un solide

I.1. Définition d'un solide

Dans le chapitre précédent nous nous sommes intéressés à des objets dont on pouvait négliger les dimensions, ils étaient alors assimilés à des points matériels. Nous allons maintenant considérer des systèmes pour lesquels ce n'est plus possible.

• Définition

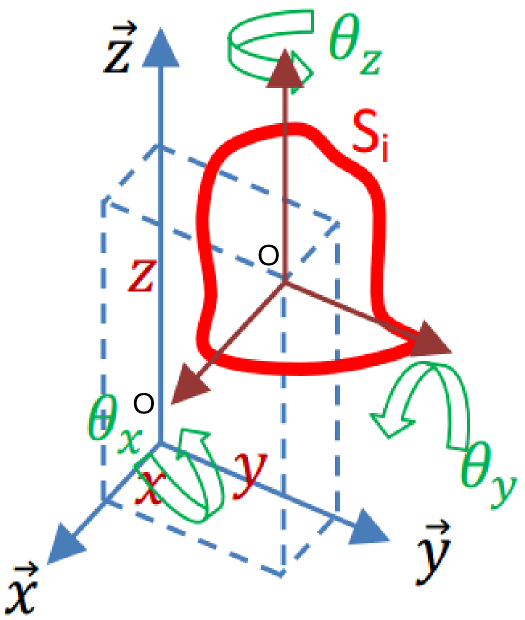


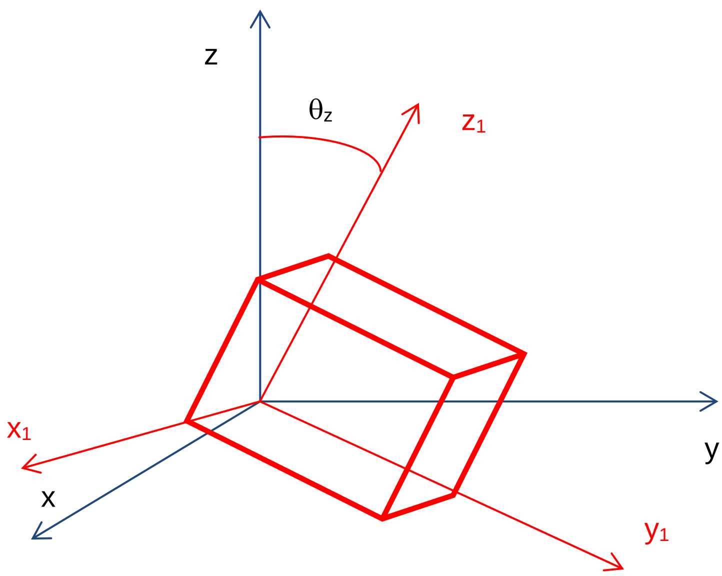
On appelle solide indéformable un objet matériel dont la distance entre deux points quelconques ne varie pas au cours du temps.

I.2. Repérage d'un solide dans l'espace

Référentiel : $\Re$
Système : S_i
Repère : associé à $\Re$ $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$
On peut associer à S_i un repère $(O_1, \vec{e_{x1}}, \vec{e_{y1}}, \vec{e_{z1}})$.
Comme le solide est indéformable alors les coordonnées de n'importe quel point de S_i restent constantes dans le repère $(O_1, \vec{e_{x1}}, \vec{e_{y1}}, \vec{e_{z1}})$.
Si on veut donc repérer le solide dans l'espace il suffit alors de repérer le repère $(O_1, \vec{e_{x1}}, \vec{e_{y1}}, \vec{e_{z1}})$ par rapport à celui associé à $\Re$ soit $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$

Pour cela on a besoin de six paramètres :
- Les trois coordonnées d'un point du solide, par exemple celles de O_1.
- Les trois angles qui définissent l'orientation de ses axes par rapport au référentiel d'étude





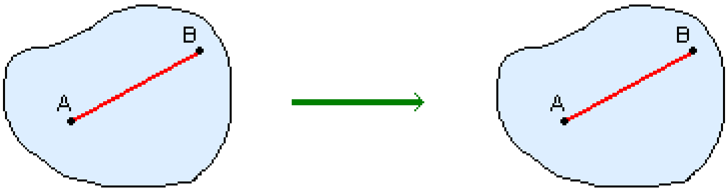
I.3. Trajectoires

On appelle trajectoire d'un mobile l'ensemble des positions successives de ce mobile au cours du temps.
Le mouvement d'un objet est dit curviligne si sa trajectoire est une courbe.
Le mouvement d'un objet est dit rectiligne si sa trajectoire est une droite.
Le mouvement d'un objet est dit circulaire si sa trajectoire est un cercle.

II. Mouvement de translation

II.1. Définition

Un solide possède un mouvement de translation si tout segment du solide reste parallèle à lui-même au cours du mouvement.



Conséquence les directions du repère associé au solide sont fixes par rapport à $\Re$.

II.2. Mouvement d'un point d'un solide en translation

Soit A un point du solide en translation.
On a donc : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1A}$
On peut exprimer le vecteur $\overrightarrow{O_1A}$ à l'aide de la base $(O_1, \overrightarrow{e_{x1}}, \overrightarrow{e_{y1}}, \overrightarrow{e_{z1}})$:
Ainsi $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO_1} + x_A\,\overrightarrow{e_{x1}} + y_A\,\overrightarrow{e_{y1}} + z_A\,\overrightarrow{e_{z1}}$
Pour connaitre la vitesse du point A par rapport à $\Re$ il suffit de dériver l'expression si dessus.
Sachant que le point A est fixe par rapport au solide, et que le solide est en translation par rapport à $\Re$, on a donc :

- x_A, y_A et z_A sont constants
- $\overrightarrow{e_{x1}}$, $\overrightarrow{e_{y1}}$ et $\overrightarrow{e_{z1}}$ sont constants

D'où $\overrightarrow{V_A} = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} = \overrightarrow{V_{O1}}$

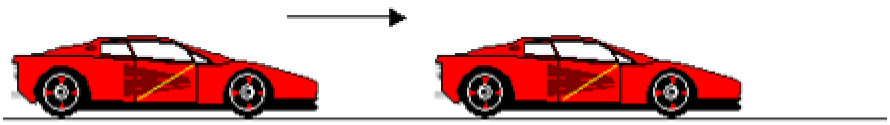
- Conclusion

Tous les points d'un solide en translation ont le même mouvement. Le mouvement d'un solide en translation est complétement décrit par le mouvement d'un de ses points (par exemple O_1)

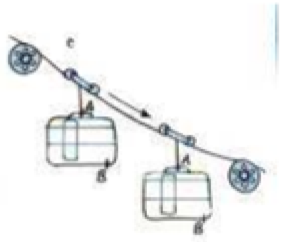
On est ramené au cas de la cinématique du point.

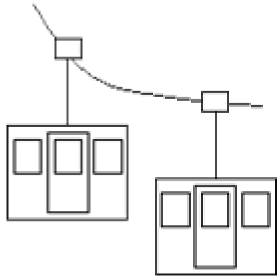
II.3. Mouvements de translation remarquables

Translation rectiligne: Tout segment du solide se déplace en restant parallèle à lui-même et le mouvement de chaque point est rectiligne.

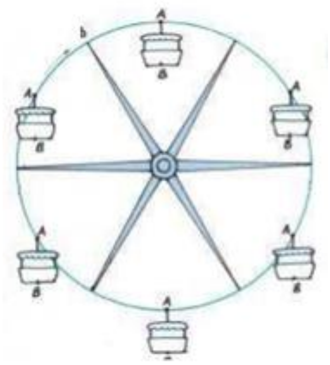


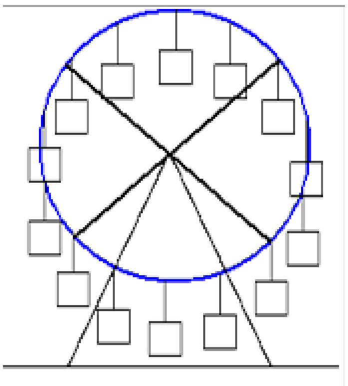
Translation curviligne: Tout segment du solide se déplace en restant parallèle à lui-même et le mouvement de chaque point est curviligne.





Translation circulaire: Tout segment du solide se déplace en restant parallèle à lui-même et le mouvement de chaque point est un cercle.





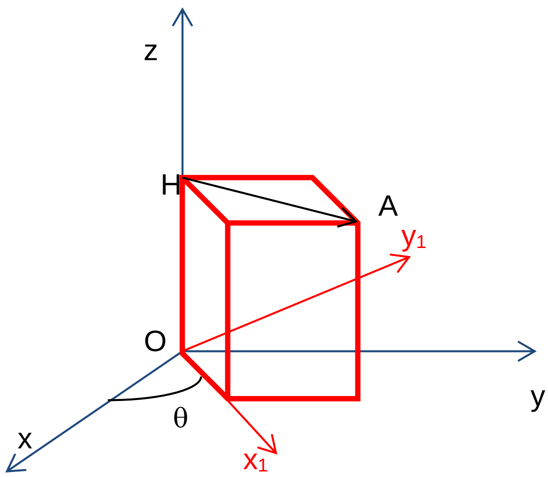
III. Solide en rotation autour d'un axe fixe

III.1. Définition

Un solide possède un mouvement de rotation autour d'un axe fixe si le mouvement de chacun de ses points est un cercle centré sur l'axe de rotation Δ.

III.2. Mouvement d'un point d'un solide en rotation

On fait coïncider les deux origines $O = O_1$
On fait coïncider les axe O_1z_1 et Oz avec l'axe de rotation Δ.
Ainsi la position du solide est entièrement déterminer par l'angle θ entre les axes Ox et O_1x_1



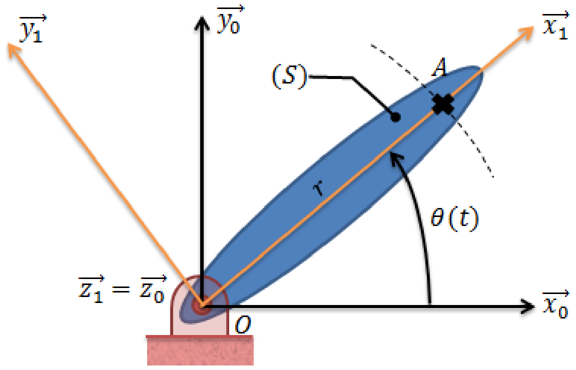
Soit A un point du solide en rotation.
Soit H le projeté de A sur l'axe Δ
On a donc : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA}$

Pour connaitre la vitesse du point A par rapport à $\Re$ il suffit de dériver l'expression si dessus.
Sachant que le point A et H sont fixes par rapport au solide, et que le vecteur $\overrightarrow{OH}$ est sur l'axe de rotation :
- $\overrightarrow{HA}$ a une norme constante et garde une direction fixe par rapport à $\overrightarrow{e_{x1}}$
- $\overrightarrow{OH}$ est constant

Ainsi le mouvement de A dans $\Re$ est un mouvement circulaire de centre H dans le plan (Hxy) perpendiculaire à $\overrightarrow{e_z}$.
Le choix des coordonnées polaires s'impose donc.

On définit la vitesse angulaire : On appelle vitesse angulaire le quotient de l'angle dont a tourné le solide par le temps mis pour effectuer cette rotation : $\omega = \dot{\theta}$ (en rad/s, ou parfois donnée en tour.min^{-1} soit $\omega = 2\pi N/60$)

On obtient alors
$\overrightarrow{HA} = r\overrightarrow{e_r}$
$\overrightarrow{v_{A/\Re}} = r\,\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} = r\omega\overrightarrow{e_\theta}$



M2 INTRODUCTION A LA CINEMATIQUE DU SOLIDE