Devoir à la maison n° 6

À rendre le 10 novembre

On considère le modèle d'évolution de population (dit de Verhulst) suivant : avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+$, on cherche à déterminer les fonctions p solutions de l'équation différentielle suivante.

$$p' = (a - bp)p \tag{$\mathscr{V}$}$$

On s'intéresse plus particulièrement aux solutions p de $(\mathscr{V})$ définies en 0 et vérifiant $p(0) \geqslant 0$.

La détermination du plus grand intervalle de définition d'une solution de $(\mathscr{V})$ (on parle alors de solution *maximale*) n'est pas possible *a priori*. Il convient d'abord de résoudre l'équation sur un intervalle I, puis après résolution de préciser quel peut-être I.

1) Résoudre $(\mathscr{V})$ dans le cas où $b = 0$ (modèle de Malthus).

Dans le reste du problème, on considère que $b > 0$, et l'on pose $K = \dfrac{a}{b}$.

2) Déterminer deux solutions évidentes de $(\mathscr{V})$.

3) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $p : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur I, posons $y = \dfrac{1}{p}$. Montrer que p est solution de $(\mathscr{V})$ si et seulement si y est solution d'une équation différentielle $(\mathscr{E})$, que l'on déterminera.

4) Déterminer l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$.

On cherche maintenant les intervalles les plus grands sur lesquels les solutions de $(\mathscr{V})$ sont définies. On procède par analyse-synthèse.

5) Soit p une solution de $(\mathscr{V})$ définie et ne s'annulant pas sur un intervalle I. Déterminer la forme de p ainsi que le plus grand intervalle sur lequel p peut-être définie.

6) Vérifier réciproquement que toutes ces fonctions sont solution de $(\mathscr{V})$.

7) En déduire l'ensemble des solutions maximales de $(\mathscr{V})$.

On s'intéresse maintenant aux conditions initiales pertinentes pour le problème considéré.

8) Soit p une solution de $(\mathscr{V})$ trouvée précédemment et vérifiant $0 \leqslant p(0) \leqslant K$. Vérifier que p est bien définie sur $\mathbb{R}$.

9) Soit p une solution de $(\mathscr{V})$ trouvée précédemment et vérifiant $K < p(0)$. Vérifier que p est bien définie au moins sur $\mathbb{R}_+$.

10) Soit p une solution de $(\mathscr{V})$ définie en 0 et vérifiant $p(0) \geqslant 0$. Expliciter le sens de variations de p et la limite de p en $+\infty$, en fonction de K.

— FIN —