Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 point, total sur 30 points, ramené sur 5 points.
- Problème et exercice de TD : chaque question sur 4 points, total sur 104 points, ramené sur 15 points, +55%.

Statistiques descriptives.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \min\left(\frac{1}{10}\lceil 10x\rceil\,;20\right)$.

	Calculs	Problème	Note finale
Transformation	c	p	$\varphi\left(\frac{5c}{30}+1,55\frac{15p}{104}\right)$
Note maximale	27	76	20+
Note minimale	9	14	$5,2$
Moyenne	$\approx 17,44$	$\approx 39,27$	$\approx 11,70$
Écart-type	$\approx 4,26$	$\approx 12,50$	$\approx 3,10$
Premier quartile	14	31	$9,4$
Médiane	18	39	$11,5$
Troisième quartile	20	45	$13,9$

Remarques générales.

• Démontrez toutes vos affirmations, surtout quand celles-ci donnent directement la solution.
• Lorsque l'on vous demande de montrer un résultat calculatoire, vous devez détailler vos calculs, sans quoi votre réponse sera considérée comme du bluff.
• L'écriture $\sin(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas licite. Encore une fois, $\sin(x)$ n'est pas une fonction.
• Dire «une fonction est définie» n'a pas de sens. Dites sur quel ensemble cette fonction est définie.
• N'écrivez pas de fraction de fraction, c'est illisible et cela amène des erreurs.
• Pour simplifier $\sqrt{x^2}$, vous devez toujours discuter du signe de x.
• Pas de zig-zag : présentez vos calculs dans un seul sens de lecture.
• Encadrez tous vos résultats et conclusions, n'écrivez pas dans les marges. Je pénaliserai de telles copies par la suite (-50% par question au DS n°2, 0 pour les DS suivants).
Je vous demande bien d'encadrer les conclusions aux réponses posées, pas des étapes intermédiaires. Par exemple, dans la première question, encadre un «$f(x)+g(x) \leqslant f(y)+g(y)$» n'a pas de sens. Ici, vous devez encadrer la conclusion : «une somme de fonctions croissantes est croissante».
• Au rayon des satisfactions, la plupart des étudiants ont fait l'effort de bien présenter, d'encadrer les conclusions, de rendre les questions dans l'ordre et de numéroter les feuilles. Je les en remercie. Aux autres de s'y mettre.

I – Un exercice vu en TD.

1) Il était un peu réducteur de considérer des fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Comme cela ne change pas la nature de l'exercice, je ne l'ai pas pénalisé.

Vous ne pouvez pas confondre croissance (au sens large) et croissance stricte.

Certains parlent de continuité. Je ne comprends pas pourquoi.

2) Deux applications monotones ne sont pas forcément de même monotonie.

2-3) Une application décroissante n'est pas forcément non croissante ! Pensez aux fonctions constantes.

Il convenait de justifier les contre-exemples.

Une fonction constante est bien monotone.

II – Argument sinus hyperbolique.

2) Dans le théorème de la bijection, certains parlent d'«intervalle image» avant d'avoir explicité les limites de sh à ses bornes. C'est franchement maladroit : le fait que l'image est un intervalle découle du théorème des valeurs intermédiaires et utilise les valeurs de ces limites. Le théorème de la bijection vous assure que l'image est un intervalle, cela n'entre pas dans les hypothèses.

Il convenait de ne pas oublier les limites de sh en $+\infty$ et $-\infty$.

L'argument «continue car dérivable» est très rarement utilisé : la continuité est bien plus simple à établir que la dérivabilité. Il suffisait de dire que sh était continue, tout simplement (le cours l'assure).

3) On vous donne la dérivée de Argsh à la question suivante et son signe est évident. Dire que Argsh est strictement décroissante est donc absurde.

4) Une dérivée qui n'est pas nulle peut pourtant s'annuler.

Vous ne pouvez écrire sans démonstration «$\mathrm{ch}(\mathrm{Argsh}\, x) = \mathrm{sh}(\mathrm{Argch}\, x) = \sqrt{1+x^2}$». Surtout quand vous ne connaissez pas la fonction Argch ! Le point central de la question était bien de justifier que $\mathrm{ch}(\mathrm{Argsh}\, x) = \sqrt{1+x^2}$.

6a) Beaucoup n'ont pas vu l'identité remarquable présente.

La formule d'addition donnant $\mathrm{sh}(a+b)$ n'a pas été vue et n'est pas au programme. Vous ne pouvez pas l'utiliser sans preuve.

7a) La fonction racine carrée n'est pas dérivable. Vous ne pouvez donc pas utiliser l'argument de composition de fonctions dérivables directement.

7c) $f'(x)$ n'est pas $\mathrm{Argsh}'\left(2x\sqrt{1+x^2}\right)$.

III – Une étude de fonction.

1a) Une réponse sans démonstration n'apportait pas de points.

1b) La fonction cosinus n'est pas nulle en un seul endroit. Après avoir calculé tant de fois Arccos(cos(...)), il est déprimant de lire tant de $\cos(\mathrm{Arccos}\, x + \mathrm{Arcsin}\, x) = 0$, donc $\mathrm{Arccos}\, x + \mathrm{Arcsin}\, x = \dfrac{\pi}{2}$.

6) Vous ne pouvez pas commencer par dériver $x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+\sin(x)}{2}}$, puis dire que cette formule n'est pas vraie en $x = -\dfrac{\pi}{2}$, pour conclure à la dérivabilité sur $\left[-\dfrac{3\pi}{4}; -\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{4}\right]$ et à la non dérivabilité en $-\dfrac{\pi}{2}$. C'est absurde : si la fonction n'est pas dérivable, vous n'avez pas le droit de dériver et la formule n'est pas valide.

8) Arccos et Arcsin ne sont pas dérivables. Vous ne pouvez donc pas utiliser l'argument de composition de fonctions dérivables directement.