Devoir facultatif n° 2

Dans tout le problème, le plan est muni d'un repère orthonormé direct, et n est un entier fixé supérieur ou égal à 3.
Dans le plan un polygone régulier de centre Ω est un polygone inscrit dans un cercle de centre Ω et dont les côtés sont de même longueur. On numérotera les sommets $(M_k)_{k=0}^{n-1}$ et on posera $M_n = M_0$, de sorte que pour tout $t \in [\![0, n-1]\!]$, l'angle $(\overrightarrow{\Omega M_k}, \overrightarrow{\Omega M_{k+1}})$ soit égal à $\dfrac{2\pi}{n}$.
Les coordonnées d'un point M_k sont notées (x_k, y_k) et on cherche les polygones réguliers tels que pour tout k, les coordonnées x_k et y_k sont rationnelles.
On rappelle qu'on appelle rationnel tout réel s'écrivant comme quotient de deux entiers relatifs et que tout rationnel peut s'écrire de façon unique sous forme irréductible, c'est-à-dire sous la forme p/q où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ et p et q n'ont aucun facteur commun.
On admettra que si n est entier, alors $\sqrt{n}$ est rationnel si et seulement si n est le carré d'un entier.

Partie 1

On note E l'ensemble des nombres complexes dont les parties réelles et imaginaires sont entières.
On note F l'ensemble des nombres complexes dont les parties réelles et imaginaires sont rationnelles.

1) **a)** Montrer que la somme de deux éléments de E est élément de E, et que la somme de deux éléments de F est élément de F.

b) Montrer que le produit de deux éléments de E est élément de E, et que le produit de deux éléments de F est élément de F.

c) Montrer que l'inverse d'un élément non nul de F est un élément de F.

2) Déterminer les éléments de E ayant un inverse dans E (on pourra remarquer que si $z \in E$, $|z|^2$ est un entier).

3) Notons E_n l'ensemble des nombres complexes z non nuls tels que toutes leurs racines $n^{\text{ièmes}}$ sont dans E, et F_n ceux ayant toutes leurs racines $n^{\text{ièmes}}$ dans F.

a) Montrer que si E_n est non vide alors F_n est non vide.

b) Suposons F_n non vide. Soit $z \in F_n$ et $(z_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ ses n racines $n^{\text{ièmes}}$.
Notons d le produit des dénominateurs entiers de toutes les parties réelles et imaginaires des z_k (chacune étant écrite sous forme irréductible).
Montrer que $d^n z$ est dans E_n.

c) Montrer que si $\mathrm{e}^{2i\pi/n}$ est élément de F alors $1 \in F_n$.

d) Montrer que si F_n est non vide, alors $\mathrm{e}^{2i\pi/n} \in F$ (on pourra prendre un élément z de F_n, et considérer deux racines $n^{\text{ièmes}}$ successives de z).

e) En déduire que $E_n \neq \varnothing \iff F_n \neq \varnothing \iff \mathrm{e}^{2i\pi/n} \in F$.

4) Pour $n = 3,\ 4,\ 6$, F_n est-il vide ?

5) **a)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4+z^3+z^2+z+1=0$.

b) En déduire que $\cos(2\pi/5)$ est racine d'une équation du second degré à coefficients entiers et donner la valeur de $\cos(2\pi/5)$.

c) Montrer que E_5 est vide.

Partie 2

On appelle *isobarycentre* de n complexes $z_1, z_2, \dots, z_n$ le complexe $g = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k$.

6) Montrer que si F_n est non vide, il existe un polygone régulier ayant tous ses sommets à coordonnées rationnelles.

7) Soit un polygone régulier à n sommets, dont le centre est noté Ω et un sommet est noté s_0. Donner l'expression des autres sommets du polygone en fonction de Ω, s_0 et n.

8) Montrer que le centre d'un polygone régulier est l'isobarycentre de ses sommets.

9) Montrer qu'il existe un polygone régulier ayant tous ses sommets à coordonnées rationnelles si et seulement si F_n est non vide.

10) Existe-t-il de tels polygones pour $n = 3,\ 4,\ 5,\ 6$?

11) Montrer que si un carré a deux sommets consécutifs à coordonnées rationnelles, alors les quatre sommets ont des coordonnées rationnelles.

Partie 3

On suppose désormais $n > 6$. On veut montrer par l'absurde que E_n est vide.
Soient alors a un élément de E_n, a_0 une racine $n^{\text{ième}}$ de a, et pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $a_k = a_0 e^{2ik\pi/n}$ et A_k le point d'affixe a_k.
On pose enfin pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $b_k = (2\cos(2\pi/n) - 1)a_k$ et on appelle B_k le point d'affixe b_k.

12) Montrer que les A_k forment un polygone régulier et que les coordonnées des A_k sont entières.

13) Montrer que le quadrilatère $A_{k-1}A_kA_{k+1}B_k$ est un parallélogramme, en utilisant ses diagonales.

14) Montrer que le quadrilatère $A_{k-1}A_kA_{k+1}B_k$ est un losange *(cette question est inutile dans la suite du problème).*

15) On pose $b = (b_0)^n$. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $b = (b_k)^n$, et que b est élément de E_n. Montrer également que $|b| < |a|$.
Donc, si $a \in E_n$, on construit un élément $b \in E_n$ tel que $|b| < |a|$. Notons $\alpha_0 = a$ et $\alpha_1 = b$. En itérant cette contruction à partir de α_1, on obtient un élément α_2 de E_n, et ainsi, une suite d'éléments de E_n.

16) À l'aide des carrés des modules des termes de cette suite, montrer qu'on aboutit à une impossibilité. En déduire que E_n est vide.

17) Montrer que les seuls polygones réguliers ayant des sommets à coordonnées rationnelles sont des carrés.

— FIN —