Devoir à la maison n° 13

À rendre le 14 février

I. Règle de l'Hôpital

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

1) Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a, b]$.

2) Montrer qu'il existe un nombre réel $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Indication : on pourra considérer l'application $h : x \mapsto f(x) - pg(x)$, où $p = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

3) De la même manière, montrer que pour tout $y \in]a, b[$, il existe un élément $c(y) \in]y, b[$ tel que

$$\frac{f(y) - f(b)}{g(y) - g(b)} = \frac{f'(c(y))}{g'(c(y))}.$$

4) On suppose que $\frac{f'(x)}{g'(x)} \underset{\substack{x \to b \\ x < b}}{\longrightarrow} \ell$, où ℓ est un nombre réel. Montrer que

$$\frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} \underset{\substack{x \to b \\ x < b}}{\longrightarrow} \ell.$$

Ce résultat est connu sous le nom de « Règle de l'Hôpital ».

5) *Application :* Calculer la limite à gauche en 1 de $x \mapsto \dfrac{\text{Arccos} x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

II. Limite d'un taux d'accroissement et dérivabilité

Soit f définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0, telle que $\dfrac{f(2x) - f(x)}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que f est dérivable en 0. Que vaut alors $f'(0)$?

— **FIN** —