

Systèmes et complexes - exercices supplémentaires

Exercice 1 Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels λ et a :

$$(S) \begin{cases} 3x + 2y - z + t = \lambda \\ 2x + y - z = \lambda - 1 \\ 5x + 4y - 2z = 2\lambda \\ (\lambda + 2)x + (\lambda + 2)y - z = 3\lambda + a \\ 3x - z + 3t = -\lambda^2 \end{cases}$$

Exercice 2 Montrer que $\frac{3+4i}{5}$ n'est pas une racine n^{ieme} de l'unité.

On pourra :

- Montrer : $\exists \theta \in \mathbb{R}, \frac{3+4i}{5} = \exp(i\theta)$
- Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \theta \in \mathbb{R}, \exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n,$
 $\cos(n\theta) = 2^{n-1} \cos^n \theta + \alpha_1 \cos^{n-1} \theta + \dots + \alpha_{n-1} \cos \theta + \alpha_n.$
- Calculer $\cos n\theta$ et $\cos \theta$.
- Conclure

Exercice 3 Sur une horloge à aiguilles, combien y a-t-il de configurations possibles telles que, lorsque l'on échange les aiguilles des heures et des minutes, cela donne aussi une heure valide ?

Exercice 4 Résoudre le système d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{C}^2$: $\begin{cases} x^3 = 3x + 7y \\ y^3 = 7x + 3y \end{cases}$ (on résoudra un système où les inconnues sont $x + y$ et xy)