Devoir à la maison n° 13

À rendre le 4 mars

I. Un exercice

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $E_1, \dots, E_n, F$ des sous-espaces vectoriels de E vérifiant $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$.

Si $1 \leqslant i \leqslant n$, on pose $F_i = F \cap E_i$.

1) Justifier que $F_1, \dots, F_n$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

2) Montrer que la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe.

3) Comparer F et $F_1 + \cdots + F_n$.

II. Passage « à la limite » d'une suite de sev supplémentaires

On note E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de sa structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel usuelle. On identifiera un polynôme à sa fonction polynomiale associée, et l'on considérera donc que $\mathbb{R}[X]$ est un sous-espace vectoriel de E.

Soit $(a_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels distincts deux à deux. Si $i \in \mathbb{N}^*$, on note

$$F_i = \{ f \in E \mid f(a_1) = \cdots = f(a_i) = 0 \}$$

et

$$G_i = \mathbb{R}_{i-1}[X].$$

1) Montrer que chaque F_i est un sous-espace vectoriel de E.

2) Comparer pour chaque $i \geqslant 1$: F_i et F_{i+1} ; G_i et G_{i+1}.

3) Montrer que, pour chaque $i \geqslant 1$, F_i et G_i sont supplémentaires dans E.

On pose maintenant

$$F = \bigcap_{i \geqslant 1} F_i$$

et

$$G = \bigcup_{i \geqslant 1} G_i$$

4) Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

5) Est-ce que F et G sont en somme directe ? supplémentaires dans E ?

— **FIN** —