Devoir surveillé n° 5 - Remarques

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 34 points, ramené sur 5 points.
- Problèmes : chaque question sur 4 points, total sur 124 points (v1) et 104 points (v2), ramené sur 15 points.

Statistiques descriptives.

	Calculs	v1	v2	Note finale
Note maximale	26	86	61	18.5
Note minimale	6	23	15	5
Moyenne	$\approx 17,30$	$\approx 47,85$	$\approx 31,91$	$\approx 10,74$
Écart-type	$\approx 5,39$	$\approx 17,81$	$\approx 13,82$	$\approx 3,58$

Remarques générales.

Les résultats non encadrés n'ont pas été pris en compte, mais cela n'est arrivé qu'à un élève : bravo.
Par contre maintenant il va falloir d'attaquer à l'usage du blanc correcteur : ce dernier est interdit aux concours !
La rédaction est tout à fait bonne dans l'ensemble, même si certains oublient encore parfois d'introduire leurs variables.

I. Un exercice vu en TD (v1).

Il est incroyable de lire autant d'erreurs d'homogénéité : $\tau_a = axa^{-1}$ n'a aucun sens ! ! ! ! J'ai beaucoup sanctionné ce genre d'erreurs : ça suffit !
Vous avez trop souvent voulu montrer que $\mathscr{T}$ était un groupe en revenant à la définition, et sans montrer que c'était un sous-groupe de S_G : c'est plus long.

II. Étude d'une suite implicite (v1).

Résumé de ce qui va suivre : le TVI est probablement le théorème le plus important du monde en prépa, ça sert dans tous les devoirs d'analyse, et après 5 mois à le côtoyer de très près en prépa, vous l'utilisez encore affreusement mal.

2. « nx^{n+1} est dérivable » : ça suffit !
« $\varphi_n' = n(n+1)x^{n-1}(x-1)$ » : ras-le bol !
« φ_n est continue donc dérivable » : mais vous voulez ma mort ? ?
Il y a énormément d'erreurs sur le signe de $x^n - x^{n-1}$. Cela n'arriverait pas si vous aviez le réflexe de FACTORISER ! $x^n - x^{n-1} = x^{n-1}(x-1)$, comment se tromper sur le signe après ça ?

3. Vous devez être irréprochable sur ce genre de question : dans tous les DS d'analyse il y en a une de ce style ! Et je suis excédé de lire encore « d'après le TVI il y a une unique solution », ou de voir qu'il manque encore des hypothèses, ou qu'il manque « strictement ». J'ai été sévère quant aux points,

mais maintenant ça suffit.
« $\varphi_n(x)$ est continue » : je suis à bout.

7. On pouvait utiliser la croissance de ψ sur $\mathbb{R}_+$: $1, \alpha, 2 \in \mathbb{R}_+$ et $\psi(1) < \psi(\alpha) < \psi(2)$ donc $1 < \alpha < 2$. Mais pour faire cela, il fallait bien justifier que $1, \alpha, 2 \in \mathbb{R}_+$!
On pouvait aussi utiliser le TVI comme dans le corrigé. Mais utiliser les deux en même temps était un aveu d'incompréhension : le TVI n' a rien à voir du tout avec la monotonie.

8. Les limites qui dépendent de n : je n'en peux plus !

9. La fonction φ_n^{-1} n'existe pas.

9.a. Il suffisait d'utiliser la croissance de ψ sur $\mathbb{R}_+$, et il était indispensable pour cela de s'assurer que $\alpha - \varepsilon, \alpha, \alpha + \varepsilon \in \mathbb{R}_+$.

9.b. Pour montrer que $\varphi_n\left(1 + \dfrac{\alpha - \varepsilon}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \psi(\alpha - \varepsilon)$, on utilise la question 8, mais pour cela il faut vérifier son hypothèse : $\alpha - \varepsilon > 0$.

9.c. Là encore, pour passer de 9.b. à 9.c., on utilisait que φ_n est croissante sur $[1 + \infty[$, et là encore il fallait bien préciser que $1 + \dfrac{\alpha - \varepsilon}{n}, x_n, 1 + \dfrac{\alpha + \varepsilon}{n} \in [1, +\infty[$.

III. Une équation de Mordell (v1).

1.a. De gros problèmes de logique dans vos raisonnements, c'est désespérant. La notion d'équivalence pose toujours problème.
« Soit $k, y \in \mathbb{N}$. y est pair donc $y = 2k$ » : inadmissible à ce stade de l'année.
Si vous supposez que a^2 est pair, vous pouvez alors affirmer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a^2 = 2k$. Mais écrire qu'il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $a^2 = (2l)^2$ est une escroquerie.

2.a. Je ne comprends pas que vous soyez aussi nombreux à redémontrer que y impair implique y^2 impair : cela a été fait deux questions avant, en 1.a., et très souvent cela figure sur la page précédente de votre copie, et vous ne vous en souvenez même pas ! Incroyable ...

2f) 8 a deux diviseurs impairs : 1 et -1 ! Il fallait déterminer le signe de $a - b$.

I. Étude d'une suite récurrente (v2).

Pas de remarque particulière, ce problème a été plutôt bien traité. La question la plus difficile pour vous était la question 2.b, résolue une fois et demi.

II. La formule d'inversion de Möbius (v2).

5. L'énoncé a souvent été mal compris : on demandait d'étudier l'implication f non inversible $\Rightarrow f(1) = 0$, i.e. $f(1) \neq 0 \Rightarrow f$ inversible.
Vous avez souvent été un peu « naïfs » sur cette question, trouver l'inverse n'était pas direct.

6 Le fait que $(\mathscr{A}, +)$ est un groupe abélien fait partie du cours, car $\mathscr{A}$ n'est rien d'autre que l'ensemble des suites complexes. Inutile donc de le redémontrer. Avec les questions précédentes, il ne restait que la distributivité de $*$ sur $+$ à démontrer.

8. Vous avez souvent confondu « ensemble de cardinal pair » et « diviseur pair ».