2.7 : Variance : $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a.

Def : $V(X) = E\left((X - E(X))^2 \right)$.

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Prop : Formule de König - Huygens :

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2 \right)$$

$$= E\left(X^2 + (E(X))^2 - 2X \cdot E(X) \right)$$

$$= E(X^2) + E\big(\underbrace{(E(X))^2}_{cte}\big) - 2E\big(X \cdot \underbrace{E(X)}_{cte}\big)$$

$$= E(X^2) + (E(X))^2 - 2E(X) \cdot E(X)$$

$$= E(X^2) - (E(X))^2 \,.$$

Prop. 2.7.4 : X 1 v.a. réelle, $a, b \in \mathbb{R}$.

- $E(aX+b) = aE(X) + b$.
- $V(aX+b) = E\big((aX+b)^2\big) - \big(E(aX+b)\big)^2$

$$= E(a^2X^2 + 2abX + b^2) - (aE(X)+b)^2$$

$$= a^2E(X^2) + 2ab\,E(X) + b^2$$

$$- \left(a^2E(X)^2 + 2ab\,E(X) + b^2\right)$$

$$= a^2\left(E(X^2) - E(X)^2\right)$$

$$= a^2 V(X).$$

$$\underline{V(aX+b) = a^2V(X)}$$

$\underline{B}$: $X : \Omega \to \mathbb{R}$ | $X^2 : \Omega \to \mathbb{R}$

$\omega \mapsto X(\omega)$ | $\omega \mapsto (X(\omega))^2$.

- $\sigma(aX+b) = \sqrt{V(aX+b)}$
$= |a|\sqrt{V(X)}$
$= |a|\,\sigma(X).$

- $Y = \dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}$

alors: $V(Y) = \dfrac{1}{\sigma(X)^2} V(X) = 1.$

Prop. : 1) Si X est c^{te} : $E(X) = X$

donc $X - E(X) = 0$

donc $E((X-E(X))^2) = 0$

donc $V(X) = 0.$

2) $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$X^2 = X$: $[X=0] = [X^2=0]$

$[X=1] = [X^2=1]$

$$E(X^2) = E(X) = p$$

d'où $V(X) = p - p^2 = p(1-p)$.

3) Admis : Si $X_1 \dots X_n$ sont mut ind,

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i).$$

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

On pose : $X_1 \dots X_n$ des v.a. mut. ind

tq. $\forall i$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

On pose $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$. donc $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

X et Y suivent la même loi, donc X^2 et Y^2 aussi, Les X et Y ont la même espérance et la même variance.

$$V(Y) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \underset{\text{admis}}{=} \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p).$$

4) $X \hookrightarrow \mathcal{U}(⟦a,b⟧)$. $a,b \in \mathbb{Z}, a<b$.

On pose $Y = X-a$.

alors : $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(⟦0,b-a⟧)$.

$$V(Y) = V(X-a) = V(X).$$

$$E(Y) = \frac{b-a}{2} = \frac{n}{2} \quad (n = b-a).$$

$$E(Y^2) \underset{\text{transfert}}{=} \sum_{k=0}^{n} P(Y=k) \times k^2$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{n+1} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{n(2n+1)}{6}.$$

$$V(Y) = \frac{n(2n+1)}{6} - \frac{n^2}{4}$$

$$= \frac{n(n+2)}{12}$$

$$= \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}.$$

$X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0,n]\!])$

$V(X_1) = \frac{n(n+2)}{12}$

$X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$

$V(X_2) = \frac{(n-1)(n+1)}{12}$

$= \frac{n^2-1}{12}.$

Prop. : inégalité de Bienaymé - Tchebychev :

X v.a. réelle. Soit $\varepsilon > 0$:

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Dém : $Y = (X - E(X))^2$:

Y v.a. réelle positive.

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) = P((X - E(X))^2 \geq \varepsilon^2)$$

$$= P(Y \geq \varepsilon^2)$$

$$\underset{\text{Markov}}{\leq} \frac{E(Y)}{\varepsilon^2}$$

$$\leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}. \qquad \square$$

Rappel : $V(X) = E(X.X) - E(X).E(X)$

$= E\big((X-E(X)).(X-E(X))\big)$.

Déf : X, Y 2 v.a. réelles.

$\mathrm{cov}(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$

$= E\big((X-E(X)).(Y-E(Y))\big)$.

Rq : $V(X) = \mathrm{cov}(X,X)$.

<u>Rq</u> : 2.7.11 est pure^t culturelle et pas au programme.

<u>Cor. 2.7.15</u> : Soit X et Y i.i.d.

alors : $E(X.Y) = E(X).E(Y)$

dc : $\mathrm{cov}(X,Y) = E(X\cdot Y) - E(X).E(Y)$
$= 0$

⚠ X et Y i.i.d $\Longrightarrow E(XY) = E(X).E(Y)$

$\not\Longleftarrow$ <u>FAUX</u>

Prop. 2.7.17 : Si $X_1 \dots X_n$ v.a réelles,

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{cov}(X_i, X_j)$$

(analogue : si $x_1 \dots x_n \in \mathbb{R}$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \quad)$$

Dém : $\forall i$, on pose $Y_i = X_i - E(X_i)$

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right)^2\right)$$

$$= E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right)^2\right)$$

$$= E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \underbrace{X_i - E(X_i)}_{= Y_i}\right)^2\right)$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} Y_i Y_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E(Y_i^2) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} E(Y_i Y_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \operatorname{cov}(X_i, X_j). \qquad \square$$

<u>Cor:</u> If $X_1 \, \ldots \, X_n$ mut. ind.

$$\operatorname{cov}(X_i, X_j) = 0$$

so: $$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i).$$