

## Lycée La Martinière Monplaisir Lyon

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I.

Année 2021 - 2022

C8: Analyse des performances des systèmes asservis

# C8-2 - Précision et rapidité des systèmes asservis

3 Mai 2022

## Table des matières

I	Qua	antification de la précision	2
	1	Définition de la précision	2
	2	Erreur indicielle	2
	3	Erreur de trainage	3
	4	Erreur d'accélération	4
	5	Récapitulatif	4
	6	Application aux systèmes du premier et du deuxième ordre	5
	7	Cas d'une perturbation	6
		a) Perturbation de type indicielle	7
		b) Perturbation de type rampe	8
		c) Récapitulatif	8
II	Rap	pidité des SLCI	8
	1	Définition	8
	2	Influence de l'ordre	9
		a) Système du premier ordre	9
		b) Système du deuxième ordre	9
	3	Influence du bouclage	9
		a) Système du premier ordre	10
		b) Système du deuxième ordre	
	4	Influence de la bande passante	

## **Compétences**

- Modéslier
  - o Établir un modèle de comportement à partir d'une réponse temporelle ou fréquentielle.
- Résoudre
  - o Proposer une démarche permettant d'évaluer les performances des systèmes asservis.
  - o Déterminer la réponse fréquentielle.
  - o Déterminer les performances d'un système asservi.

## I. Quantification de la précision

## 1 Définition de la précision

#### Définition 1 : Erreur ou écart

En régime permanent, on appelle l'erreur ou l'écart, la différence entre la sortie théorique  $(s_{th})$  souhaitée et celle obtenue (s(t)) lorsque t tend vers  $+\infty$ . HELLO

$$\varepsilon = \lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{t \to +\infty} (s(t) - s_{th}) = s_{\infty} - s_{th}$$
 (1)

En pratique, on calcule directement l'erreur à la sortie du comparateur d'un système asservi.

$$\varepsilon(p) = \mathcal{L}(\varepsilon(t)) = E(p) - G(p) \; S(p) = E(p) - G(p) \; H(p) \; \varepsilon(p).$$

D'où,

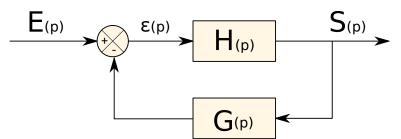
$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + G(p)H(p)} = \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)}.$$
 (2)

• l'erreur statique  $\varepsilon_S$  (ou de position) se mesure sur la réponse à un échelon.

$$e(t) = Au(t)$$
.

- l'erreur de traı̂nage (ou de vitesse)  $\varepsilon_V$  se mesure sur la réponse à une rampe.

$$e(t) = A t u(t)$$
.



## Remarque 1 :

• Avec le théorème de la valeur finale

$$\varepsilon = \lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \to 0} p \, \varepsilon(p). \tag{3}$$

• Dans le cas d'un retour unitaire :

$$\varepsilon = \lim_{t \to +\infty} (e(t) - s(t)) = \lim_{p \to 0} p(E(p) - S(p))$$
(4)

#### 2 Erreur indicielle

Ici l'entrée e(t) est un échelon d'amplitude  $E_0$ , donc sa transformée de Laplace est  $E(p) = \frac{E_0}{p}$ .

Soit la fonction de transfert en boucle ouverte définie par :

$$FTBO(p) = \frac{K}{p^{\alpha}} \frac{1 + c_1 \ p + \ldots + c_m \ p^m}{1 + d_1 \ p + \ldots + d_n \ p^n}.$$

On peut alors calculer  $\varepsilon_S$ :

$$\varepsilon_{S} = \lim_{p \to 0} p \,\varepsilon(p) = \lim_{p \to 0} p \,\frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} = \lim_{p \to 0} \frac{p \,E_{0}}{p \left(1 + \frac{K}{p^{\alpha}} \frac{1 + c_{1} \,p + \dots + c_{m} \,p^{m}}{1 + d_{1} \,p + \dots + d_{n} \,p^{n}}\right)} = \lim_{p \to 0} \frac{E_{0}}{1 + \frac{K}{p^{\alpha}} \frac{1 + c_{1} \,p + \dots + c_{m} \,p^{m}}{1 + d_{1} \,p + \dots + d_{n} \,p^{n}}}$$

Deux cas se présentent alors :

- Cas où  $\alpha = 0$ :
- Cas où  $\alpha \ge 1$ :

## 3 Erreur de trainage

Ici l'entrée e(t) est une rampe d'amplitude a. Sa fonction de transfert est  $E(p) = \frac{a}{p^2}$ . On reprend la même forme de la fonction de transfert en boucle ouverte. On peut alors calculer  $\varepsilon_V$ :

$$\varepsilon_{V} = \lim_{p \to 0} p \,\varepsilon(p) = \lim_{p \to 0} p \,\frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} = \lim_{p \to 0} \frac{p \,a}{p^{2} \left(1 + \frac{K}{p^{\alpha}} \frac{1 + c_{1} \,p + \ldots + c_{m} \,p^{m}}{1 + d_{1} \,p + \ldots + d_{n} \,p^{n}}\right)} = \lim_{p \to 0} \frac{a}{p \left(1 + \frac{K}{p^{\alpha}} \frac{1 + c_{1} \,p + \ldots + c_{m} \,p^{m}}{1 + d_{1} \,p + \ldots + d_{n} \,p^{n}}\right)}$$

On alors trois cas:

- Cas où  $\alpha = 0$ :
- Cas où  $\alpha = 1$ :
- Cas où  $\alpha \ge 2$ :

## 4 Erreur d'accélération

Ici l'entrée e(t) est une accélération d'amplitude b. Sa fonction de transfert est  $E(p) = \frac{b}{p^3}$ . On reprend la même forme de la fonction de transfert en boucle ouverte définie précédemment. On peut alors calculer  $\varepsilon_a$  (erreur en accélération) :

On alors trois cas:

- Cas où  $\alpha \le 1$ :
- Cas où  $\alpha = 2$ :
- Cas où  $\alpha \ge 3$ :

## 5 Récapitulatif

Entrée $E(p)$	Classe 0	Classe 1	Classe 2	Classe 3
Échelon : $E(p) = \frac{E_0}{p}$	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0	0
Rampe : $E(p) = \frac{a}{p^2}$	$\infty$	$\frac{a}{K}$	0	0
Accélération : $E(p) = \frac{b}{p^3}$	$\infty$	$\infty$	$\frac{b}{K}$	0

TABLE 1 – Quantification de l'erreur en boucle fermée en fonction de l'entrée et de la classe de la FTBO d'un système.

## Propriété 1 : Quantification de la précision en boucle fermée

- La précision en boucle fermée d'un système vis-à-vis d'une entrée dépend donc de la classe et du gain de la FTBO.
- Pour améliorer la précision, il faut donc augmenter la classe, c'est-à-dire le nombre d'intégrations dans la FTBO, ou augmenter le gain de la FTBO.
- Avec au moins 1 intégration en boucle ouverte on annule l'erreur statique.
- Avec au moins 2 intégrations en boucle ouverte on annule l'erreur de trainage.
- On verra plus tard qu'augmenter la classe ou le gain de la FTBO peut rendre le système instable.

## 6 Application aux systèmes du premier et du deuxième ordre

Considérons un système avec un retour unitaire dont la FTBO(p) est du premier ou du deuxième ordre :

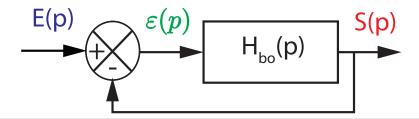
$$\begin{cases} H_{BO1}(p) = \frac{K}{1+\tau p}. \\ H_{BO2}(p) = \frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}. \end{cases}$$

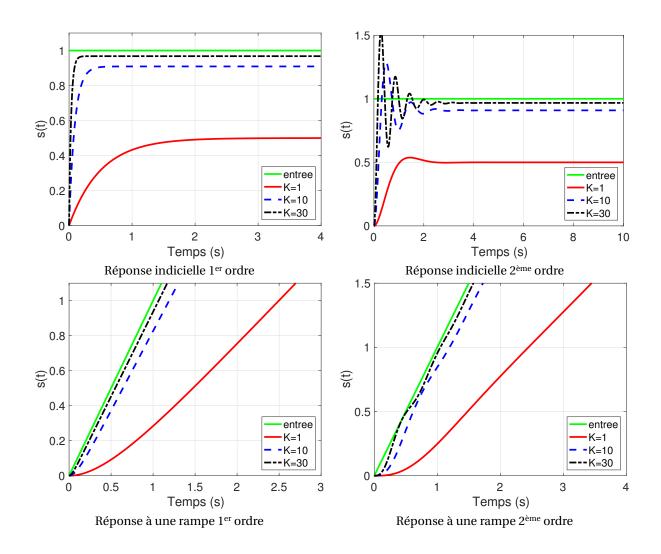


## Propriété 2 : Précision d'un premier ordre et du second ordre

La FTBO pour les systèmes des premier et deuxième ordre est de classe 0. On en déduit que :

- l'erreur indicielle vaut  $\frac{\vec{E_0}}{1+K}$ ;
- l'erreur de trainage vaut ∞.
- ici l'ordre de la fonction de transfert n'a pas d'influence sur la précision.





## 7 Cas d'une perturbation

On considère désormais un système avec une consigne (entrée maitrisée) E(p), une entrée non-maitrisée due à une perturbation (P(p)) et une réponse ou sortie (S(p)) (figure 1). On cherche à quantifier la précision du système en fonction de l'état de la perturbation P(p).

Par le théorème de superposition (car système linéaire), on peut donner une relation entre S(p), E(p) et P(p) en introduisant les deux fonctions de transfert  $H_E(p)$  et  $H_P(p)$ :

$$S(p) = H_E(p) \cdot E(p) + H_P(p) \cdot P(p).$$

- Calcul de  $H_E(p)$  et  $H_P(p)$ :
  - Pour calculer  $H_P(p)$ , on prend E(p) = 0:
  - Pour calculer  $H_E(p)$ , on prend P(p) = 0:
- Calculons  $\varepsilon(p) = E(p) G(p) S(p)$

• On note alors

$$\varepsilon(p) = \varepsilon_E(p) - \varepsilon_P(p).$$

Avec  $\varepsilon_E(p)$  l'écart du à l'entrée et  $\varepsilon_P(p)$  l'écart du à la perturbation.

 $\circ$  Avec  $\varepsilon_E(p) =$ 

 $\circ$  Avec  $\varepsilon_P(p) =$ 

• On pose également :

0

$$H_1(p) = \frac{K_1 N_1(p)}{p^{\alpha_1} D_1(p)};$$

0

$$G(p) H_2(p) = \frac{K_2 N_2(p)}{p^{\alpha_2} D_2(p)};$$

• avec  $N_1(0) = D_1(0) = N_2(0) = D_2(0) = 1$  car les fonctions de transfert  $H_1(p)$  et G(p)  $H_2(p)$  sont exprimées sous formes canoniques.

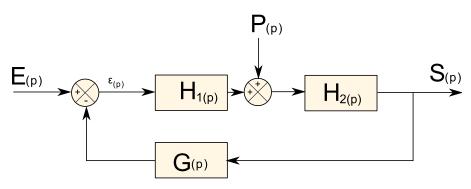


FIGURE 1 - Schéma bloc avec perturbation

## a) Perturbation de type indicielle

On calcule  $\lim_{t\to\infty} \varepsilon_P(t) = \lim_{p\to 0} p \, \varepsilon_P(p)$  avec  $P(p) = \frac{P_0}{p}$ .

#### b) Perturbation de type rampe

On calcule  $\lim_{t\to\infty} \varepsilon_P(t) = \lim_{p\to 0} p \, \varepsilon_P(p)$  avec  $P(p) = \frac{P_0}{p^2}$ .

#### c) Récapitulatif

Le tableau ci-dessous donne l'écart en perturbation en fonction des valeurs de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  suivant le type de perturbation.

Perturbation $P(p)$	$\alpha_1 = 0$		$\alpha_1 = 1$	$\alpha_1 \ge 2$
	$\alpha_2 = 0$	$\alpha_2 \ge 1$	$\alpha_2 \in [0; +\infty]$	
Échelon : $P(p) = \frac{P_0}{p}$	$\frac{P_0 K_2}{1 + K_1 K_2}$	$\frac{P_0}{K_1}$	0	
	$\alpha_2 \in [0; +\infty]$			
Rampe: $P(p) = \frac{P_0}{p^2}$	+∞		$\frac{P_0}{K_1}$	0

Table 2 – Précision  $\varepsilon_P$  en boucle fermée vis-à-vis du type de perturbation

## OConclusion: Précision en fonction de la perturbation

- En réponse à une **perturbation de type échelon**, un système comportant **au moins une in- tégration en amont du point d'entrée de la perturbation** présentera **une erreur nulle**.
- En réponse à une **perturbation de type rampe**, un système comportant **au moins deux in- tégrations en amont du point d'entrée de la perturbation** présentera **une erreur nulle**.
- Ainsi pour rendre un système **plus précis**, on cherchera à **augmenter le gain statique** de la fonction de transfert en boucle ouverte et d'en **augmenter le nombre d'intégrateurs purs**.

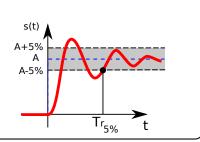
## II. Rapidité des SLCI

## 1 Définition



## Définition 2 : Rapidité des SLCI

- On peut définir la **rapidité** d'un système comme la durée qu'il faut pour un système à se stabiliser lorsqu'il est soumis à une variation brusque de la grandeur d'entrée (échelon par exemple).
- On peut la définir à partir du temps de réponse à n% (généralement 5%).
- Cela nécessite que le système soit stable.



## 2 Influence de l'ordre

## a) Système du premier ordre

## Propriété 3 : Rapidité des systèmes du premier ordre

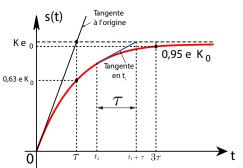
Pour un système du **premier ordre** de fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

soumis à un échelon le temps de réponse à 5% ( $t_{r5\%}$ ) est donné par :

$$t_{r5\%} = 3 \cdot \tau$$

Plus la constante de temps est petite plus le système est rapide.



#### Système du deuxième ordre



## Propriété 4 : Rapidité des systèmes du deuxième ordre

Pour un système du deuxième ordre de fonction de transfert

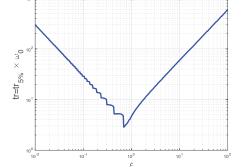
$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

soumis à un échelon, le temps de réponse à 5% est donné selon des valeurs de  $\xi$  et dépend de  $\omega_0$ .

On peut retenir:

- $\xi = 0.7$  (Optimum de rapidité) :  $t_{r5\%} =$
- $\stackrel{\scriptscriptstyle{0}}{=} 1$  (Optimum de rapidité) :  $t_{r5\%}$  =

Pour le reste, on peut utiliser l'abaque cicontre.

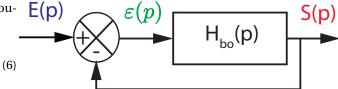


Pour un même coefficient d'amortissement  $\xi$ , plus  $\omega_0$  augmente et plus le temps de réponse à 5% diminue et donc le système sera plus rapide.

## 3 Influence du bouclage

Si considère un système en boucle ouverte que l'on souhaite boucler (on prendra ici un retour unitaire).

$$H_{BF} = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)}$$



## Système du premier ordre

## Propriété 5 : Système bouclé du 1er ordre

Dans le cas d'une FTBO du  $1^{\rm er}$  ordre :

$$H_{BO}(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

On peut alors calculer  $H_{BF}(p) = \frac{K_{BF}}{1 + \tau_{BF} \cdot p}$ :

- $K_{BF}$ :
- $\tau_{BF}$ :

Ainsi le bouclage ayant une FTBO du  $1^{\rm er}$  ordre permet :

- de conserver une fonction de transfert du 1er ordre;
- de diminuer la valeur de la constante de temps.

## Système du deuxième ordre

## Propriété 6 : Système bouclé du 2ème ordre

Dans le cas d'une FTBO du 2ème ordre :

$$H_{BO}(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

On peut alors calculer  $H_{BF}(p) = \frac{K_{BF}}{1 + \frac{2\zeta_{BF}}{\omega_{0BF}} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}}$ :

- $K_{BF}$ :
- $\omega_{0BF}$ :
- ξ<sub>BF</sub>:

Ainsi le bouclage ayant une FTBO du 2ème ordre permet :

- de conserver une fonction de transfert du 2ème ordre;
- de diminuer la valeur du coefficient d'amortissement  $\xi_{BF}$  lorsque l'on augmente le gain Kde la FTBO. Par conséquent si  $\xi_{BF}$  diminue et :
  - $\circ$  si  $\xi_{BF}$  reste supérieur à 0,7, le système sera plus rapide,
  - o si  $\xi_{BF}$  reste inférieur à 0,7, le système sera plus lent.

## 4 Influence de la bande passante

