Devoir à la maison n° 5

À rendre le 08 novembre

Une équation différentielle.

On considère l'équation différentielle

$$y'' + \frac{2y'}{\operatorname{th}(x)} + y = 0. \tag{$\mathscr{E}$}$$

1) *Question préliminaire.* Justifier que $\dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

2) Sur quel ensemble E peut-on chercher à résoudre $(\mathscr{E})$? Écrire cet ensemble comme une union d'intervalles ouverts.

3) Soit $y : E \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation $(\mathscr{E})$. On pose alors

$$z : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y'(x) + \dfrac{y(x)}{\operatorname{th}(x)} \end{array}.$$

a) Montrer que z est solution de l'équation différentielle linéaire :

$$z' + \frac{z}{\operatorname{th}(x)} = 0. \tag{$\mathscr{F}$}$$

b) Résoudre l'équation $(\mathscr{F})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Résoudre l'équation $(\mathscr{F})$ sur $\mathbb{R}_-^*$.
Indication : on essaiera de chercher un argument rigoureux évitant de dupliquer les arguments donnés pour résoudre la question précédente.

d) En déduire qu'il existe $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in E$,

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{ax+b}{\operatorname{sh}(x)} & \text{si} \quad x > 0 \\ \dfrac{a'x+b'}{\operatorname{sh}(x)} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}.$$

e) Réciproquement, montrer que toutes les fonctions de cette forme sont bien solution de $(\mathscr{E})$.

4) Parmi les solutions de $(\mathscr{E})$, lesquelles admettent-elles une limite finie en 0 ? Le cas échéant, laquelle ?

— **FIN** —