Devoir surveillé n° 7 - Remarques

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 30 points, ramené sur 5 points.
- Problèmes : exercice de TD sur 8 points, chaque question sur 4 points, total sur 88 points (v1) et 84 points (v2), ramené sur 15 points.

Statistiques descriptives.

	Calculs	v1	v2	Note finale
Note maximale	21	74	37	19.5
Note minimale	3	10	6	5
Moyenne	$\approx 10,79$	$\approx 36,75$	$\approx 24,67$	$\approx 10,42$
Écart-type	$\approx 4,11$	$\approx 10,02$	$\approx 8,37$	$\approx 4,31$

Remarques générales.

La qualité de votre rédaction s'est bien améliorée : bravo !

Un exercice vu en TD (v1).

La permière partie (F et$G$ sont des sev) a été très bien traitée. La seconde (ils sont supplémentaires), beaucoup moins. À revoir, c'est un exercice important dans sa méthode.

Polynômes réciproques (v1).

Ce problème était rempli de questions faciles. Les questions 1 à 4 ont d'ailleurs été globalement bien traitées.

1.a. Vous avez presque tous oublié que le ponyôme nul n'est pas de degré 0. Il faut y penser, dans les exercices sur les polynômes, le cas du polynôme nul est très souvent à distinguer.

3. Quand vous faites un renversement d'indice, mentionnez-le.

4.a. Ce n'est pas parce que $P\left(\frac{1}{X}\right)$ n'est pas défini en 0 que $X^nP\left(\frac{1}{X}\right)$ ne l'est pas : par exemple, si $P = X$ et donc $n = 1$, $X^nP\left(\frac{1}{X}\right) = 1$, qui est bien défini en 0.

4.b. N'oubliez de préciser que $\alpha^n \neq 0$ pour passer de $\alpha^n P(1/\alpha) = 0$ à $P(1/\alpha) = 0$.

4.c. Que d'erreurs dans la dérivation de $X^nP\left(\frac{1}{X}\right)$! ! Il est anormal et problématique que beaucoup ne sachent toujours pas dériver une composition de fonctions.

Règle de l'Hôpital (v1).

Beaucoup moins bien réussi.

1.a. Quand vous utilisez le théorème de Rolle ou des accroissements finis, vous devez rappeler les hypothèses, impérativement !
On ne pouvait pas affirmer que g était strictement monotone : que g' ne s'annule pas ne signifie pas directement qu'elle est de signe constant, car on ne sait pas si elle est continue.

1.b. Beaucoup ont affirmé qu'il existait c tel que $f'(c) = \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$, et qu'il existait c (le même !) tel que $g'(c) = \dfrac{g(a)-g(b)}{a-b}$, et ensuite fait le quotient. Mais c'est faux, le réel c qui convient pour g n'a aucune raison d'être le même que celui qui convient pour f.

4. Énormément d'erreurs, essentiellement quand vous remplacez $f'(x)$ par $\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$. Une dérivée n'est pas un taux d'accroissement, c'est la LIMITE d'un taux d'accroissement !

5. Vous avez presque tous allégrement fait les calculs et utilisé la règle de l'Hôpital, mais sans vérifier les hypothèses ! Je ne comprends vraiment pas pourquoi vous n'avez toujours pas le réflexe de vérifier les hypothèses avant d'utiliser un résultat.

Points stables et instables (v2).

Les questions préliminaires étaient difficiles. Il y avait par contre un certain nombre de questions faciles dans la suite.
Globalement ce problème n'a pas été très réussi.

1. Il était impossible de faire une récurrence sans savoir si les x_n étaient dans J. De manière générale, dans ces premières questions, il fallait faire très attention à la stabilité ou non de J. Et se rendre compte que le tableau de signe donné n'était valable que sur J, pas ailleurs.
Vous vous êtes souvent focalisés sur l'aspect « il existe un $x_n \notin J$ », mais avez oublié la minimalité : on voulait un premier indice n tel que $x_n \notin J$.

2. Là aussi, l'énoncé a été mal lu : vous avez été attirés par $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, et avez complétement passé sous silence l'aspect « intervalle stable », pourtant indispensable et exigé dans la définition.
La monotonie de la suite a été plutôt bien observée et justifiée. En revanche il y a eu pas mal d'arnaques sur le fait que cette suite était bornée.

3. et 4. Vos utilisations du TAF ou de l'IAF ont été abominables. Presque tout le temps j'ai lu : $f'(a) > 1$ donc $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} > 1$. C'est affreux ! Pour avoir $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} > 1$ avec l'IAF, il faut avoir $f' > 1$ sur tout un intervalle contenant x et a. La valeur de f' en a ne suffit absolument pas. On vous donnait une hypothèse supplémentaire : $f \in \mathscr{C}^1(I)$, ça n'était pas pour décorer.

5. Donnez des exemples pour justifier.

6.a. L'unicité du point fixe n'a rien à voir avec l'injectivité de f (étudier la fonction $x \mapsto x + \sin(x)$ par exemple), mais avec l'injectivité de $x \mapsto f(x) - x$.
Pour les sous-suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}), on pouvait juste dire qu'elles étaient de monotonie opposée, rien d'autre.

7.a. Des erreurs dans les manipulations d'inégalités : attention au signe si vous multipliez !

9.b. Il ne suffisait pas de vérifier $h'(x) = 0$ ssi $x = b$: il fallait justifier que ce point b était bien défini, et surtout qu'il était dans $\mathbb{R}_+$. Là encore, on vous donne l'hypothèse $a \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, mais vous ne l'utilisez pas : cela devrait vous mettre la puce à l'oreille.