Devoir surveillé n°6
Version 2
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Polynômes laissant stables quelques ensembles.

Si A est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$, on note $A[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans A.

L'objectif de ce problème est d'étudier sur différents exemples les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant pour un tel sous-anneau A : $\forall x \in A,\ P(x) \in A$.

1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, on suppose que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \in \mathbb{R}$. Nous allons montrer que $P \in \mathbb{R}[X]$ de deux manières différentes.

- **a)** Démontrer ce résultat en considérant $\overline{P}$.
- **b)** On propose une deuxième démonstration.
  - **i)** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P^{(n)}(x) \in \mathbb{R}$.
  - **ii)** En déduire que $P \in \mathbb{R}[X]$.

2) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, on suppose que $\forall x \in \mathbb{Q},\ P(x) \in \mathbb{Q}$. Démontrer que $P \in \mathbb{Q}[X]$.
Indication : on pourra utiliser l'interpolation de Lagrange.

3) On s'intéresse maintenant au cas des entiers.

- **a)** Pour un entier $n \in \mathbb{Z}$, quelle est la parité de $n(n-1)$?
- **b)** Proposer (en le justifiant) un polynôme P à coefficients non tous entiers et vérifiant $\forall x \in \mathbb{Z},\ P(x) \in \mathbb{Z}$.

Nous allons maintenant déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{Z},\ P(x) \in \mathbb{Z}. \tag{$\star$}$$

Si $k \in \mathbb{N}^*$, on considère le k^{e} polynôme de Hilbert :

$$H_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}.$$

On définit $H_0 = 1$.

4) Lemme : montrer que pour tout $k \geqslant 0$ et tout $n \geqslant k$:

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

5) Exprimer $H_k(n)$ pour chaque $k \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{Z}$ et en déduire que H_k vérifie la propriété $(\star)$.
Indication : on pourra distinguer les cas $n \geqslant k$, $0 \leqslant n < k$ et $n < 0$.

6) Montrer que pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, alors

$$H_k(0) + \cdots + H_k(n) = H_{k+1}(n+1).$$

7) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul vérifiant $(\star)$, notons d son degré. On pose $Q = P(X+1) - P(X)$.

a) Quel est le degré de Q ?

b) Soit un entier $n \geqslant 0$. Exprimer $P(n) - P(0)$ en fonction de $Q(0), \ldots, Q(n-1)$.

c) En déduire qu'il existe $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{Z}$ vérifiant

$$P = a_0 H_0 + a_1 H_1 + \cdots + a_d H_d.$$

Indication : on pourra raisonner par récurrence et utiliser tous les résultats précédents.

8) Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $(\star)$.

II. Monotonie et discontinuité.

Le but de ce problème est de présenter quelques résultats sur les liens entre continuité et monotonie. On rappelle qu'un ensemble est dit dénombrable s'il peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$; que ni $\mathbb{R}$, ni aucun intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ n'est dénombrable. On dit qu'un ensemble est au plus dénombrable s'il est dénombrable ou fini. Toute union au plus dénombrable d'ensembles finis est au plus dénombrable. Enfin, on rappelle le théorème de Cantor-Bernstein : si E et F sont deux ensembles tels qu'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E, alors il existe une bijection de E sur F.

1) Dénombrabilité de l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone.

Soit a et b deux réels avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application monotone. L'objectif de cette partie est de montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

On commencera par supposer f croissante.

On appelle E l'ensemble des points de discontinuité de f sur $[a, b]$. Soit $x_0 \in E \setminus \{ a, b \}$ et $h \in \mathbb{R}$. On dit que x_0 est un saut pour f de hauteur $\lim_{x_0^+} f - \lim_{x_0^-} f$.

a) Montrer que tout point de discontinuité de f autre que a et b est un saut de hauteur strictement positive pour f.

b) Pour $\varepsilon > 0$, on note E_ε l'ensemble des sauts pour f de hauteur h vérifiant $h \geqslant \varepsilon$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que E_ε est fini et possède au plus $\dfrac{f(b) - f(a)}{\varepsilon}$ éléments.

c) Montrer

$$E \setminus \{ a, b \} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} E_{\frac{1}{k}}$$

En déduire que E est au plus dénombrable. Conclure dans le cas où f est croissante.

d) En déduire le cas où f est décroissante (on évitera de refaire l'ensemble du raisonnement).

2) Construction d'une application monotone dont l'ensemble des points de discontinuité est dense dans $[0,1]$.

Le but de cette partie est de construire une application monotone de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de discontinuité est non seulement infini mais de plus dense dans $[0,1]$: l'ensemble des rationnels de $[0,1]$.

Pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{N}$, on note $u(A)$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u(A)_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_A(k) 2^{-k}$$

où $\mathbf{1}_A$ est l'application indicatrice de A, c'est-à-dire l'application de valeur 1 sur tout élément de A et de valeur 0 sur tout élément de $\mathbb{N} \setminus A$.

a) Montrer que pour tout $A \subset \mathbb{N}$, $u(A)$ est convergente. On note $s(A)$ sa limite.

b) Soit A et B deux parties de $\mathbb{N}$ vérifiant $A \subset B$. Montrer $s(A) \leqslant s(B)$. Montrer que si de plus $A \neq B$, alors $s(A) < s(B)$. Plus précisément, montrer que si $A \subset B$ et si n est un entier appartenant à $B \setminus A$, alors $s(A) + 2^{-n} \leqslant s(B)$.

c) Montrer que $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ est dénombrable. Dans la suite, on choisit une bijection de $\mathbb{N}$ sur $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ qu'on notera φ. On pose alors, pour $x \in [0,1]$, $A_x = \{ n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n) \leqslant x \}$. Enfin, on note

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & s(A_x) \end{array}$$

Montrer que f est strictement croissante sur $[0,1]$.

d) Soit x et r deux éléments de $[0,1]$ vérifiant $x < r$ et tels que r soit rationnel. Montrer $\lim_{x \to r^-} f(x) \leqslant f(r) - 2^{-\varphi^{-1}(r)}$.

e) En déduire le résultat.

f) L'application f ci-dessus est discontinue à gauche en tout point rationnel de $]0,1]$ (on peut montrer par ailleurs qu'elle est continue à droite en tout point de $[0,1[$ et continue en tout point irrationnel de $[0,1]$). Peut-on construire une application g de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ croissante et discontinue à droite en tout point rationnel de $[0,1[$?

g) Peut-on construire une application h de $[0,1]$ croissante et discontinue à gauche et à droite en tout point rationnel de $]0,1[$?

— **FIN** —