Devoir à la maison n° 04

À rendre le 12 octobre

1) Montrer le principe de récurrence descendante, qui s'énonce comme suit.
« Soit P un prédicat défini sur les entiers naturels, n_0 un entier naturel vérifiant
— $P(n_0)$;
— $\forall k \in [\![1, n_0]\!], P(k) \Rightarrow P(k-1)$.
Alors, $\forall k \in [\![0, n_0]\!],\ P(k)$. »

2) On introduit un nouveau schéma de récurrence. Soit P un prédicat défini sur les entiers naturels supérieurs à 2, vérifiant :
— $P(2)$;
— $\forall n \geqslant 2,\ P(n) \Rightarrow P(n-1)$;
— $\forall n \geqslant 2,\ (P(2) \wedge P(n)) \Rightarrow P(2n)$.
Montrer alors que $\forall n \geqslant 2,\ P(n)$.

On se propose maintenant de montrer l'inégalité arithmético-géométrique, qui relie les moyennes harmonique (à gauche dans (**IAG**)), arithmétique (à droite dans (**IAG**)) et géométrique (au centre dans (**IAG**)) d'un échantillon de nombres réels strictement positifs.

$$\forall n \geqslant 2, \forall (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n,\ \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i. \qquad \textbf{(IAG)}$$

Nous proposons pour cela de suivre une démonstration attibuée à Cauchy.

3) On note P le prédicat défini, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, par

$$P(n) = « \ \forall (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n,\ \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \ »,$$

- **a)** Montrer $P(2)$.
- **b)** Montrer que $\forall n \geqslant 2,\ P(n) \Rightarrow P(n-1)$.
- **c)** Montrer que $\forall n \geqslant 2,\ (P(2) \wedge P(n)) \Rightarrow P(2n)$.
- **d)** Conclure quant à la validité de l'inégalité arithmético-géométrique énoncée dans l'équation (**IAG**).

4) Montrer l'inégalité de concavité du logarithme : pour tout $n \geqslant 2$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i).$$

— FIN —