Devoir surveillé n° 03

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Montrer que pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$, il existe $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = m^2 + n^2.$$

II. Études des racines d'un trinôme.

1) Résultats préliminaires :

a) Soit Z, un complexe non nul. Prouver l'équivalence

$$\left(Z + \frac{1}{Z} \text{ est un réel } \right) \Leftrightarrow (Z \text{ est un réel ou } |Z| = 1)\,.$$

b) On considère la fonction (réelle) f définie par $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$. Préciser son domaine de définition et y étudier ses variations. En conclure que la quantité $\left|x + \dfrac{1}{x}\right|$ possède, pour $x \in \mathbb{R}^*$, un minimum que l'on calculera.

Dans la suite de l'exercice, a et b désignent deux nombres complexes non-nuls et (E) désigne l'équation

$$z^2 - 2az + b = 0.$$

On note z_1 et z_2 les racines complexes (éventuellement égales) de (E).

2) Une condition nécessaire et suffisante pour que $|z_1| = |z_2|$:

a) Rappeler et démontrer les liens existants entre les quantités $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$, et les coefficients a et b.

b) On suppose que $|z_1| = |z_2|$. Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle puis en déduire la forme exponentielle de $\dfrac{a^2}{b}$.

c) Conclure que, si $|z_1| = |z_2|$, alors la quantité $\dfrac{a^2}{b}$ est réelle et appartient à l'intervalle $]0, 1]$.

d) Montrer que, si la quantité $\dfrac{a^2}{b}$ est réelle, alors avec $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$, la quantité $Z + \dfrac{1}{Z}$ existe et est réelle.

e) En conclure que, si $\dfrac{a^2}{b} \in]0, 1]$, alors $|z_1| = |z_2|$.

3) Une condition nécessaire et suffisante pour que $\arg(z_1) = \arg(z_2)\ [2\pi]$ **:**

a) Démontrer l'inégalité suivante, appelée inégalité arithmético-géométrique

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ \sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}.$$

b) On suppose que $\arg(z_1) = \arg(z_2)\ [2\pi]$. Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle puis en déduire la forme exponentielle de $\dfrac{b}{a^2}$.

c) Montrer que, si $\arg(z_1) = \arg(z_2)\ [2\pi]$, alors la quantité $\dfrac{b}{a^2}$ est réelle et appartient à l'intervalle $]0, 1]$.

d) Montrer réciproquement que si $\dfrac{b}{a^2} \in]0, 1]$, alors $\arg(z_1) = \arg(z_2)\ [2\pi]$.

III. Systèmes d'équations différentielles.

L'objet de ce problème est l'étude de quelques systèmes d'équations differentielles. Les deux parties sont indépendantes.

1) On cherche à déterminer dans cette question quelles sont les fonctions réelles f_1 et g_1, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, qui vérifient pour tout $t \in \mathbb{R}$ le système suivant :

$$(\mathcal{S}_1) \qquad \begin{cases} f_1'(t) &= 2g_1(t) \\ g_1'(t) &= -f_1(t) + t\mathrm{e}^{\,t} \end{cases}$$

Considérons deux fonctions f_1 et g_1 qui conviennent.

a) Montrer que f_1 est deux fois dérivable et calculer f_1''.

b) En déduire que f_1 est solution de l'équation différentielle $y'' + 2y = 2t\mathrm{e}^{\,t}$ et résoudre cette équation différentielle.

c) En déduire g_1 puis les solutions du système $(\mathcal{S}_1)$.

d) Montrer qu'il existe une unique solution (que l'on déterminera) de ce système telle que $f_1(0) = g_1(0) = 0$.

2) On cherche à déterminer dans cette question quelles sont les fonctions réelles f_2 et g_2, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, qui vérifient pour tout $t \in \mathbb{R}$ le système suivant :

$$(\mathcal{S}_2) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} f_2'(t) & = & 7f_2(t) - 5g_2(t) + \mathrm{sh}(t) \\ g_2'(t) & = & 10f_2(t) - 8g_2(t) + \mathrm{ch}(t) \end{array} \right.$$

Considérons deux fonctions f_2 et g_2 qui conviennent.

a) On pose $u = 2f_2 - g_2$. Montrer que u est solution d'une équation différentielle du premier ordre que l'on résoudra.

b) On pose $v = -f_2 + g_2$. Montrer que v est solution d'une équation différentielle du premier ordre que l'on résoudra.

c) En déduire f_2 et g_2 puis les solutions du système $(\mathcal{S}_2)$.

d) Montrer qu'il existe une unique solution (que l'on déterminera) de ce système telle que $f_2(0) = g_2(0) = 0$.

IV. Différence symétrique.

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On appelle *différence symétrique* de A et B l'ensemble

$$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

1) Représenter $A \Delta B$ schématiquement, et en toute généralité.

2) Montrer que

$$A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

3) Montrer que, pour toute partie C de E,

$$A \Delta B = A \Delta C \iff B = C.$$

4) En déduire que

$$A \backslash B = A \iff A \cap B = \varnothing.$$

5) Montrer que

$$A \Delta B = A \cap B \iff A = B = \varnothing.$$

— **FIN** —