XXIV Déterminants

9 juin 2017

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les lettres n, p, q et r désignent des entiers naturels non nuls.

1. Groupe symétrique

Dans toute cette section, E désigne un ensemble.

1.1. Permutations

Définition 1.1.1.
On appelle ***permutation de*** E toute bijection de E dans E. On note S_E l'ensemble des permutations de E. Alors $(S_E, \circ)$ est un groupe appelé ***groupe des permutations de*** E.

Définition 1.1.2.
Si $E = [\![1, n]\!]$, on note S_n le groupe des pemutations de E, qui est un groupe fini de cardinal $n!$. Ce groupe s'appelle le ***groupe symétrique*** d'ordre n (ou de degré n). Une permutation σ de S_n se note $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Exemple 1.1.3.
• La permutation σ de $[\![1, 5]\!]$ vérifiant $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 5$, $\sigma(3) = 1$, $\sigma(4) = 4$ et $\sigma(5) = 3$ se note $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. On vérifie bien que 1, 2, 3, 4 et 5 apparaissent une et une seule fois par ligne.
• Cette écriture permet de composer facilement des permutations :
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,
et de facilement calculer les antécédents.

1.2. Permutations particulières

Définition 1.2.1.
Soient $\sigma \in S_E$, et $x \in E$. On appelle ***orbite*** de x l'ensemble $\mathfrak{O}(x) = \{\sigma^k(x),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exemple 1.2.2.
Si $E = [\![1, 6]\!]$ et $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, alors $\mathfrak{O}(1) = \mathfrak{O}(2) = \{1, 2\}$ et $\mathfrak{O}(3) = \mathfrak{O}(4) = \mathfrak{O}(5) = \mathfrak{O}(6) = \{3, 4, 5, 6\}$.

Définition 1.2.3.
On appelle ***permutation circulaire*** toute permutation $\sigma \in S_E$ telle qu'il existe $x \in E$ vérifiant $\mathfrak{O}(x) = E$.

Exemple 1.2.4.
$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est une permutation circulaire.

Si une permutation a un point fixe et si card $(E) > 1$, alors la permutation n'est pas circulaire, mais la non existence de point fixe n'implique pas que la permutation est circulaire. Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas circulaire.

Définition 1.2.5.
On dit qu'une permutation est un ***cycle*** s'il y a au plus une orbite non réduite à un élément. Cette orbite s'appelle alors le ***support*** de ce cycle, et son cardinal s'appelle la ***longueur*** du cycle.

Remarque 1.2.6.
Les éléments qui sont hors du support d'un cycle sont des points fixes de cette permutation.

Exemple 1.2.7.
$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ est un cycle de longueur 3 dont le support est $\{2, 3, 5\}$.

Remarque 1.2.8.
On note généralement les cycles de la manière suivante : $(x_1, x_2, \dots, x_p)$, où p est la longueur du cycle et $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ son support, dans l'ordre, c'est-à-dire que x_1 est envoyé sur x_2, x_2 sur x_3,

..., x_{p-1} sur x_p et enfin x_p sur x_1. Les éléments de $[\![1,n]\!]$ autres que $x_1,\dots,x_p$ sont les points fixes du permutation. Le cycle de l'exemple 1.2.7 est ainsi tout simplement noté $(2,5,3)$. Remarquons qu'on peut aussi l'écrire $(5,3,2)$ ou $(3,2,5)$, car un cycle est une « boucle ».

Définition 1.2.9.
On appelle ***transposition*** tout cycle de longueur 2. Une transposition échange ainsi deux éléments de E. Si a et b sont deux éléments de E, la transposition qui échange a et b est notée τ_{ab}.

Exemple 1.2.10.
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ est une transposition, notée τ_{24}.

Remarque 1.2.11.
Toute transposition est une involution, *i.e.* est sa propre inverse.

1.3. Décomposition d'une permutation

Dans toute la suite de la section 1, $E = [\![1,n]\!]$. On se place donc dans S_n.

Lemme 1.3.1.
Deux cycles de supports disjoints commutent.

Démonstration.
Ceci est dû au fait que deux cycles de supports disjoints agissent sur des éléments distincts. Soient σ_1 et σ_2 deux cycles de supports respectifs I et J inclus dans $[\![1,n]\!]$ et tels que $I \cap J = \varnothing$. Soit $x \in I$, $y \in J$ et $z \in (I \cup J)^C$.

Alors $\sigma_1(x) \neq x$ et $\sigma_1(x) \in I$ donc $\sigma_1(x) \notin J$. Ainsi $\sigma_2(x) = x$ et $\sigma_2(\sigma_1(x)) = \sigma_1(x)$. On en tire $\sigma_1 \circ \sigma_2(x) = \sigma_1(x) = \sigma_2 \circ \sigma_1(x)$.

De même, $\sigma_1(y) = y$ et $\sigma_2(y) \notin J$ donc $\sigma_1(\sigma_2(y)) = \sigma_2(y)$, et il vient $\sigma_2 \circ \sigma_1(y) = \sigma_2(y) = \sigma_1 \circ \sigma_2(y)$.

Enfin, $\sigma_1(z) = z = \sigma_2(z)$ et donc $\sigma_1 \circ \sigma_2(z) = z = \sigma_2 \circ \sigma(1)(z)$.

Ainsi $\sigma_1 \circ \sigma_2$ et $\sigma_2 \circ \sigma_1$ coïncident en tous les éléments de $[\![1,n]\!]$, et sont bien égales. $\square$

Exemple 1.3.2.
Pour vous en assurer, calculez pour $n = 7$, $(1\ 4\ 3) \circ (2\ 5)$ et $(2\ 5) \circ (1\ 4\ 3)$.

Lemme 1.3.3.
Soit $\sigma \in S_n$. Tout point de $[\![1,n]\!]$ est dans une et une seule orbite de σ. L'ensemble des orbites de σ forme donc une partition de E (c'est-à-dire que la réunion de ces orbites est $[\![1,n]\!]$ mais ces orbites sont deux à deux disjointes).

Démonstration.
Tout point est dans au moins une orbite : la sienne. Si x est dans deux orbites distinctes, *i.e.* $x \in \mathfrak{O}(y)$ et $x \in \mathfrak{O}(z)$ avec $\mathfrak{O}(y) \neq \mathfrak{O}(z)$, alors il existe $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tels que $x = \sigma^k(y) = \sigma^\ell(z)$. D'où $y = \sigma^{\ell-k}(z)$, et ainsi $y \in \mathfrak{O}(z)$. Il est alors facile de vérifier que $\mathfrak{O}(y) = \mathfrak{O}(z)$, ce qui est une contradiction. $\square$

Théorème 1.3.4.
Toute permutation se décompose en produit de cycles de supports disjoints. À l'ordre près des facteurs, cette décomposition est unique.

Démonstration.
D'après le lemme 1.3.1, si cette décomposition existe on peut permuter l'ordre des facteurs.
Notons $\mathfrak{O}_1,\dots,\mathfrak{O}p$ les orbites de σ de cardinal au moins 2. Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ on définit la permutation C_i de la manière suivante :

(i) $\forall x \in \mathfrak{O}_i$, $C_i(x) = \sigma(x)$;
(ii) $\forall x \in [\![1,n]\!] \backslash \mathfrak{O}_i$, $C_i(x) = x$.

On vérifie que les C_i sont des cycles, que leurs supports sont deux à deux disjoints, et que $C_1 \circ C_2 \circ \dots \circ C_p = \sigma$.

La démonstration de l'unicité n'est pas exigible, nous la donnons à but d'information. Soit $(C_1,\dots,C_p)$ des cycles à supports disjoints, vérifiant $\prod_{i=1}^{p} C_i = \sigma$. Soit $1 \leqslant i \leqslant p$, soit x appartenant au support de C_i ($C_i(x) \neq x$ et si $j \neq i$, $C_j(x) = x$). Alors, comme les cycles C_j commutent, on a

$$\sigma(x) = \left(\prod_{j=1}^{p} C_j\right)(x) = C_i\left[\left(\prod_{j\neq i} C_j\right)(x)\right] = C_i(x).$$

Ainsi, l'orbite de x par C_i et par σ coïncident : l'orbite de x (par σ) est donc le support de C_i. Réciproquement, si $\sigma(x) \neq x$, alors il existe forcément un i tel que $C_i(x) \neq x$. Il y a donc exactement autant de cycles que d'orbites de σ non réduites à un élément, donc p est unique. De plus, chaque cycle a un support correspondant à une orbite de σ, non réduite à un point. Il suffit maintenant de voir que pour chaque orbite de σ de longueur $\ell > 1$, il existe un unique cycle dont le support est exactement cette orbite : c'est, avec un élément x de cette orbite, $(x, \sigma(x), \dots, \sigma^{\ell-1}(x))$. $\square$

Il faut savoir décomposer une permutation en produit de cycles de supports disjoints. Dans la pratique, voici comment l'on procède (le procédé est celui de la démonstration précédente). Soit $\sigma \in S_n$.
L'idée est la suivante : on part d'un élément de $[\![1, n]\!]$, et on regarde ses images successives par σ. On parcourt alors son orbite. Au bout d'un nombre fini d'étapes, on revient au point de départ. On a alors parcouru une boucle, ce qui correspond à un cycle C_1. Pour autant, tous les éléments de $[\![1, n]\!]$ n'ont pas forcément été rencontrés lors de cette boucle. On peut donc recommencer une autre promenade en partant d'un élément que nous n'avons pas encore rencontré. On fait alors une nouvelle boucle qui est une deuxième orbite, ce qui correspond à un second cycle C_2. En faisant cela pour toutes les orbites, on a construit autant de cycles que d'orbites. Ils ont tous des supports disjoints et leur composition donne σ. On remarque pour finir que puisque leurs supports sont disjoints, ils commutent. On peut donc composer ces cycles dans l'ordre que l'on veut. Un exemple pour illustrer tout cela :

Exemple 1.3.5.
Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminons l'orbite de 1, par le schéma suivant, où une flèche va d'un élément à son image par σ : $1 \mapsto 5 \mapsto 4 \mapsto 1$, et la boucle est bouclée. L'orbite de 1 est donc, dans l'ordre, $\{1, 5, 4\}$. Prenons ensuite un élément qui n'est pas dans cette orbite, par exemple 2. On a alors : $2 \mapsto 2$, et la boucle est déjà bouclée, 2 est un point fixe de σ. Prenons un autre élément qui n'est dans aucune des deux orbites précédentes, par exemple 3 : $3 \mapsto 6 \mapsto 3$. L'orbite de 3 est donc $\{3, 6\}$. On s'arrête là car tous les éléments de $[\![1, 6]\!]$ ont été rencontrés. On peut donc écrire $\sigma = (1, 5, 4) \circ (2) \circ (3, 6)$. Comme (2) n'est en fait pas un cycle (c'est l'identité), on ne l'écrit pas. On n'écrit pas non plus les symboles $\circ$. On a donc $\sigma = (1, 5, 4)(3, 6)$, et on remarque que c'est aussi égal à $(3, 6)(1, 5, 4)$.

Cette écriture comme produit de cycles de supports disjoints est plus pratique que l'écriture sous forme de deux lignes : elle est plus courte et permet de repérer immédiatement les orbites. L'écriture à deux lignes s'en déduit très simplement.

De la décomposition précédente découle une autre, primordiale pour la suite du chapitre :

Théorème 1.3.6.
Toute permutation se décompose en produit de transpositions (on dit que S_n est engendré par ses transpositions).

Démonstration.
D'après le théorème précédent, il suffit de savoir décomposer un cycle en produit de transpositions. Soit $C = (x_1, \dots, x_p)$ un cycle. On montre alors que $C = (x_1, x_2)(x_2, x_3) \dots (x_{p-1}, x_p)$, et c'est fini.

Notons $T = (x_1, x_2)(x_2, x_3) \dots (x_{p-1}, x_p)$. Si $x \in [\![1, n]\!] \setminus \{x_1, \dots, x_p\}$, alors x est invariant par toutes les transpositions ainsi que par le cycle, donc $T(x) = C(x) = x$. Si $1 \leqslant i < p$, on a

$$\begin{aligned} T(x_i) &= \left(\prod_{j=1}^{p-1} (x_j, x_{j+1}) \right) (x_i) \\ &= \left(\prod_{j=1}^{i-1} (x_j, x_{j+1}) \right) (x_i, x_{i+1})(x_i) \\ &= \left(\prod_{j=1}^{i-1} (x_j, x_{j+1}) \right) (x_{i+1}) \\ &= x_{i+1} \\ &= C(x_i). \end{aligned}$$

On conclut simplement en montrant que $T(x_p) = x_1 = C(x_p)$ par récurrence sur p.

$\square$

Cette décomposition n'est pas unique. Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \tau_{12} \circ \tau_{23} \circ \tau_{34} = \tau_{41} \circ \tau_{12} \circ \tau_{23}$.
De plus, deux transpositions ne commutent en général pas : $\tau_{12} \circ \tau_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \tau_{23} \circ \tau_{12}$.

1.4. Signature d'une permutation

Définition 1.4.1.
Soit $\sigma \in S_n$. On dit qu'un couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ est une ***inversion*** de σ si $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. On note alors $I(\sigma)$ le nombre d'inversions de σ, et on définit la ***signature*** de σ, notée $\varepsilon(\sigma)$, comme étant l'entier $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$, qui vaut donc ± 1. Une permutation de signature 1 est dite ***paire***, ***impaire*** sinon.

Exemple 1.4.2.
Si $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, alors $I(\sigma) = 10$ et donc $\varepsilon(\sigma) = 1$.

Proposition 1.4.3.
Toute transposition est impaire.

Démonstration.
Il suffit de voir que, si $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $\tau i, j$ a pour inversions :
- le couple (i,j) ;
- les couples (i,x) et (x,j) pour $i < x < j$.

Il y a donc bien un nombre impair d'inversions pour une transposition. □

Lemme 1.4.4.
Si $\sigma \in S_n$, on a

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}.$$

Démonstration.
En effet, $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = \frac{\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \sigma(i) - \sigma(j)}{\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} i - j}$. Or σ est une bijection, donc tout couple (i,j) tel que $i < j$ est égal à un unique couple de la forme $(\sigma(k), \sigma(\ell))$, avec nécessairement $k \neq \ell$. Cependant, si $i < j$ on ne sait pas si $k < \ell$ ou $k > \ell$. Réciproquement, pour tout couple (i,j) tel que $i < j$, $(\sigma(i), \sigma(j))$ est égal à un unique couple de la forme (k, ℓ), avec nécessairement $k \neq \ell$. Dans tous les cas, le numérateur et le dénominateur de la dernière fraction sont égaux <u>au signe près</u>. Donc $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = \pm 1$.

Remarquons que si $i < j$, alors $\dfrac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$ est négatif si et seulement si (i,j) est une inversion. Comme il y a $I(\sigma)$ inversions, ce produit vaut $(-1)^{I(\sigma)}$. □

Théorème 1.4.5.
L'application signature

$$\varepsilon : \begin{cases} (S_n, \circ) & \to & (\{-1, 1\}, \times) \\ \sigma & \mapsto & \varepsilon(\sigma) \end{cases}$$

est un morphisme de groupes. Son noyau, noté $\mathfrak{A}_n = \{\sigma \in S_n |\ \varepsilon(\sigma) = +1\}$ est un sous-groupe de S_n appelé ***groupe alterné*** d'ordre n.

Démonstration (non exigible)**.**
On utilise directement le lemme 1.4.4 (qui n'est pas exigible lui non plus) : si $\sigma, \sigma' \in S_n$, on a :

$$\begin{aligned} &\varepsilon(\sigma \circ \sigma') \\ &= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(\sigma'(i)) - \sigma(\sigma'(j))}{i - j} \\ &= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(\sigma'(i)) - \sigma(\sigma'(j))}{\sigma'(i) - \sigma'(j)} \times \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma'(i) - \sigma'(j)}{i - j} \\ &= \prod_{1 \leqslant I < J \leqslant n} \frac{\sigma(I) - \sigma(J)}{I - J} \times \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma'(i) - \sigma'(j)}{i - j} \\ &= \varepsilon(\sigma) \times \varepsilon(\sigma'). \end{aligned}$$

□

Corollaire 1.4.6.
Si σ est le produit de p transpositions, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$.

Exemple 1.4.7.
Un cycle de longueur p est donc de signature $(-1)^{p+1}$.

Exemple 1.4.8.
Avec

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1, 5, 4)(3, 6),$$

on a $\varepsilon(\sigma) = 1 \times (-1) = -1$.

Remarque 1.4.9.
La signature d'une permutation est très souvent définie comme ceci, et il faut donc connaître cette caractérisation, qui est de plus très pratique pour le calcul de la signature. Si cette définition est choisie, il faut dans ce cas montrer que le nombre de transpositions de n'importe quelle décomposition en produit de transpositions a toujours la même parité.

Corollaire 1.4.10.
La signature est l'unique application ε de S_n dans $\{-1, 1\}$ telle que $\varepsilon(\tau) = -1$ pour toute transposition τ et $\varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$ pour toutes permutations σ et σ'.

Démonstration.
Soit ε une telle application. Alors ε correspond avec la signature sur l'ensemble des transpositions, et puisque $\varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$ pour toutes permutations σ et σ', alors si σ est le produit de p transpositions, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$, qui vaut donc la signature de σ. $\square$

2. Applications multilinéaires

Désormais, E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

2.1. Définition et exemples

Définition 2.1.1.
Soient $E_1, \ldots, E_n$ et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application de $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans F. On dit que f est ***n-linéaire*** si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, tout $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_{k-1} \times E_{k+1} \times \ldots E_n$ l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccl} E_k & \to & F \\ x & \mapsto & f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_n) \end{array} \right.$$

est linéaire.

Si $n = 2$, on dit que f est ***bilinéaire*** et, si $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une ***forme n-linéaire***.

L'ensemble des applications n-linéaires de $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans F est noté $\mathscr{L}(E_1, E_2, \ldots, E_n; F)$. Si tous les E_i sont égaux et notés E, on utilise alors la notation $\mathscr{L}_n(E; F)$. Enfin l'ensemble des formes n-linéaires sur E^n est noté $\mathscr{L}_n(E)$ (c'est-à-dire si $F = \mathbb{K}$).

Remarque 2.1.2.
• On remarque facilement que tous ces ensembles d'applications multilinéaires sont des $\mathbb{K}$-ev.
• Une application linéaire est une application 1-linéaire.
• Toute application multilinéaire s'annule sur un vecteur dont une coordonnée est nulle, par linéarité par rapport à cette coordonnée.

Exemple 2.1.3.
Les applications suivantes sont bilinéaires :
• $\mathbb{K} \times E \to E$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$, où E est un $\mathbb{K}$-ev.
• $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto u \cdot v$.
• $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto u \wedge v$.
• $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, $(A, B) \mapsto AB$.
• $\mathscr{L}(E, E') \times \mathscr{L}(E', E'') \to \mathscr{L}(E, E'')$, $(f, g) \mapsto g \circ f$, où E, E', E'' sont trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (la linéarité par rapport à g est vraie sans supposer que f et g sont linéaires ; pour la linéarité par rapport à f, g doit être linéaire).
• $\mathscr{C}^0([0, 1])^2 \to \mathbb{R}$, $(f, g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
• $(\mathbb{R}^2)^2 \to \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto \det(u, v)$.

2.2. Applications multilinéaires symétriques, antisymétriques et alternées

Définition 2.2.1.
Soit $f \in \mathscr{L}_n(E; F)$, et soit $\sigma \in S_n$. On définit l'application :

$$\sigma \star f \ : \left\{ \begin{array}{ccl} E^n & \to & F \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \end{array} \right. .$$

On vérifie que $\sigma \star f$ est aussi une application n-linéaire.

Exemple 2.2.2.
Soit $f \in \mathscr{L}_3(\mathbb{R}; F)$, et $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$.

Alors $(\sigma \star f)(x_1, x_2, x_3) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}) = f(x_3, x_1, x_2)$.

Proposition 2.2.3.
Soit $f \in \mathscr{L}_n(E; F)$ et soit $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$. Alors $\sigma_1 \star (\sigma_2 \star f) = (\sigma_1 \circ \sigma_2) \star f$.

Démonstration.
Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Alors, avec $(x_{\sigma_1(1)}, \dots, x_{\sigma_1(n)}) = (x'_1, \dots, x'_n)$,

$$\begin{aligned}
[\sigma_1 \star (\sigma_2 \star f)](x_1, \dots, x_n) &= [\sigma_2 \star f](x_{\sigma_1(1)}, \dots, x_{\sigma_1(n)}) \\
&= [\sigma_2 \star f](x'_1, \dots, x'_n) \\
&= f(x'_{\sigma_2(1)}, \dots, x'_{\sigma_2(n)}) \\
&= f(x_{\sigma_1(\sigma_2(1))}, \dots, x_{\sigma_1(\sigma_2(n))}) \\
&= [(\sigma_1 \circ \sigma_2) \star f](x_1, \dots, x_n).
\end{aligned}$$

□

Définition 2.2.4.
Une application n-linéaire f est dite ***symétrique*** si pour tout $\sigma \in S_n$, $\sigma \star f = f$. Elle est dite ***antisymétrique*** si pour tout $\sigma \in S_n$, $\sigma \star f = \varepsilon(\sigma) f$.

Remarque 2.2.5.
On remarque facilement que l'ensemble des applications symétriques est un $\mathbb{K}$-ev, et qu'il en est de même pour celui des applications antisymétriques.

⚠ Les caractères « symétrique » et « antisymétrique » d'une application multilinéaire n'ont de sens que si les espaces vectoriels de départ sont tous égaux. Sinon, permuter des variables qui ne sont pas de même nature n'a pas de sens.

Exemple 2.2.6.
- Le produit de deux fonctions $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})^2 \to \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$, $(f, g) \mapsto fg$ est une application bilinéaire symétrique.
- Le produit vectoriel de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ est une application bilinéaire antisymétrique.
- Le déterminant de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est bilinéaire, antisymétrique. En effet, il suffit de voir que $\det(v, u) = -\det(u, v)$.
- Le déterminant de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ est une application trilinéaire antisymétrique. En effet, remarquons que si $\sigma \in S_3$, alors il existe p transpositions $\tau_1, \dots, \tau_p$ telles que $\sigma = \tau_p \circ \ldots \circ \tau_1$. Dans ce cas $\sigma \star \det = \tau_p \star (\tau_{p-1} \star (\ldots \tau_2 \star (\tau_1 \star \det)))$. Mais pour toute transposition τ, $\tau \star \det = -\det$, car échanger deux vecteurs dans un déterminant change le signe de ce déterminant. Ainsi $\sigma \star \det = (-1)^p \det = \varepsilon(\sigma) \det$.

Remarquons d'abord que l'on peut caractériser le caractère symétrique ou antisymétrique d'une application multilinéaire par l'action des transpositions sur cette dernière.

Proposition 2.2.7.
Soit f une application n linéaire. Si pour toute transposition τ, on a $\tau \star f = f$ alors f est symétrique. De même si, pour toute transposition τ, on a $\tau \star f = -f$ alors f est antisymétrique.

Démonstration.
Facile, une fois que l'on sait décomposer une permutation en produit de transpositions, avec la propriété de morphisme de la signature ainsi que la proposition 2.2.3. □

Proposition 2.2.8.
Soit $f \in \mathscr{L}_n(E; F)$ une application n-linéaire antisymétrique. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

(i) Si τ est une transposition de S_n, alors $\tau \star f = -f$, *i.e.* f est changée en son opposé si l'on échange deux variables ;

(ii) S'il existe $i \neq j$ dans $[\![1, n]\!]$ tels que $x_i = x_j$, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$;

(iii) On ne change pas la valeur de f si l'on ajoute à une variable une combinaison linéaire des autres ;

(iv) Si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Démonstration. (i) Direct car $\varepsilon(\tau) = -1$;

(ii) On note $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $\widetilde{X} = \tau_{x_i x_j}(X)$, c'est-à-dire le vecteur obtenu à partir de X en échangeant les i^e et j^e coordonnées. Si $x_i = x_j$, on a $X = \widetilde{X}$, d'où $\tau_{x_ix_j} \star f(X) = f(\widetilde{X}) = f(X)$. Or d'après (i), $\tau_{x_ix_j} \star f(X) = -f(X)$, d'où $f(X) = 0$;

(iii) Considérons par exemple que l'on rajoute à x_n la combinaison linéaire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i$, avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Les autres cas se traitent de la même manière. Alors, par linéarité par rapport à la dernière variable, on a :

$$f\left(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i\right) =$$

$$f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_i).$$

Or d'après le point (ii), pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a $f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_i) = 0$, d'où

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i) = f(x_1, \dots, x_n).$$

(iv) Si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, alors on peut exprimer un des vecteurs de $x_1, \dots, x_n$ en fonction des autres. Par exemple (de même dans les autres cas), $x_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i$.

Alors d'après le point (iii), on a :

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f(x_1, \dots, x_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i) \\ &= f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0 + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i) \\ &= f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0). \end{aligned}$$

Or, d'après la remarque 2.1.2, on a $f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = 0$.

□

Définition 2.2.9.
Une application n-linéaire est dite ***alternée*** si elle s'annule sur tout n-uplet dont deux éléments au moins sont égaux.

Remarque 2.2.10.
Le point (ii) de la proposition 2.2.8 montre exactement que toute application antisymétrique est alternée. En fait, ces deux notions sont équivalentes, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 2.2.11.
Si f est une application multilinéaire, f est antisymétrique si et seulement si elle est alternée.

Démonstration.
Il reste à montrer que si f est alternée, elle est antisymétrique. f va de E^n dans F. Soit τ_{ij} une transposition de S_n, avec $i, j \in [\![1, n]\!]$, $i < j$. Soit $X = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$. On appelle X' le vecteur dont les i^{e} et j^{e} coordonnées valent toutes les deux $x_i + x_j$, et dont les autres coordonnées sont les mêmes que celles de X. Ou encore, $X' = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i + x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$. On en déduit que $f(X') = 0$. Or, par multilinéarité,

$$\begin{aligned} & f(X') \\ =& f(x_1, \dots, x_{i-1}, \underline{\mathbf{x_i} + \mathbf{x_j}}, x_{i+1}, \\ & \qquad \dots, x_{j-1}, \underline{\mathbf{x_i} + \mathbf{x_j}}, x_{j+1}, \dots, x_n) \\ =& f(x_1, \dots, x_{i-1}, \underline{\mathbf{x_i}}, x_{i+1}, \\ & \qquad \dots, x_{j-1}, \underline{\mathbf{x_i} + \mathbf{x_j}}, x_{j+1}, \dots, x_n) \\ & + f(x_1, \dots, x_{i-1}, \underline{\mathbf{x_j}}, x_{i+1}, \\ & \qquad \dots, x_{j-1}, \underline{\mathbf{x_i} + \mathbf{x_j}}, x_{j+1}, \dots, x_n) \\ =& \underbrace{f(x_1, \dots, x_{i-1}, \underline{\mathbf{x_i}}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \underline{\mathbf{x_i}}, x_{j+1}, \dots, x_n)}_{=0} \\ & + \underbrace{f(x_1, \dots, x_{i-1}, \underline{\mathbf{x_i}}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \underline{\mathbf{x_j}}, x_{j+1}, \dots, x_n)}_{=f(X)} \\ & + \underbrace{f(x_1, \dots, x_{i-1}, \underline{\mathbf{x_j}}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \underline{\mathbf{x_i}}, x_{j+1}, \dots, x_n)}_{=f(\tau_{ij}(X))} \\ & + \underbrace{f(x_1, \dots, x_{i-1}, \underline{\mathbf{x_j}}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \underline{\mathbf{x_j}}, x_{j+1}, \dots, x_n)}_{=0} \\ =& f(X) + f(\tau_{ij}(X)) \\ =& f(X) + \tau_{ij} \star f(X), \end{aligned}$$

d'où $\tau_{ij} \star f = -f$. On en déduit que pour toute transposition τ, et toute application multilinéaire f, $\tau \star f = -f$. Soit $\sigma \in S_n$. σ s'écrit comme le produit de p transpositions, $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_p$. D'après le point précédent on a $\sigma \star f = \tau_1 \star (\dots \star (\tau_p \star f) \dots) = -\tau_2 \star (\dots \star (\tau_p \star f) \dots) = (-1)^p f = \varepsilon(\sigma) f$, ce qui prouve bien le résultat voulu. □

En général on utilise plutôt le mot « alternée » qu'« antisymétrique ».

Exemple 2.2.12.
— Le produit vectoriel entre deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est une application alternée.
— L'application qui, à une famille de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, associe son déterminant est une forme bilinéaire alternée. Il en est de

même pour le déterminant d'une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ (forme trilinéaire alternée).

3. Déterminant d'une famille de vecteurs

3.1. Définition en dimension finie.

Désormais, E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. Notons $\mathscr{A}_n(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E^n.

Exercice 3.1.1.
Si $n = 2$, soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base de E, soit $f \in \mathscr{A}_2(E)$ et soit les vecteurs $x = x_1e_1 + x_2e_2$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2$.

Développer par linéarité $f(x, y)$ par rapport à sa première coordonnée, puis sa deuxième.

Faire de même en dimension 3.

Théorème 3.1.2.
Soit $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. Pour $(X_1, \ldots, X_n) \in E^n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, on note $(x_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les coordonnées de X_j dans $\mathscr{B}$.

(i) $\mathscr{A}_n(E)$ est une droite vectorielle, *i.e.* est de dimension 1.

(ii) Considérons l'application

$$\det_{\mathscr{B}} : E^n \to \mathbb{K},$$

telle que pour tout $(X_1, \ldots, X_n) \in E^n$,

$$\det_{\mathscr{B}}(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{i\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)i}.$$

C'est une forme n-linéaire alternée non nulle sur E^n, et c'est la seule vérifiant

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = \det_{\mathscr{B}}(e_1, \ldots, e_n) = 1.$$

(iii) Si $f \in \mathscr{A}_n(E)$, on a $f = f(\mathscr{B}) \det_{\mathscr{B}}$ (avec $f(\mathscr{B}) = f(e_1, \ldots, e_n)$) et donc $\mathscr{A}_n(E) = \mathrm{Vect}(\det_{\mathscr{B}})$.

Ici la dimension de E doit être égale à la puissance de E.

Démonstration (non exigible).
Montrons déjà l'égalité des deux formes de la définition du déterminant. Soit $\sigma \in S_n$, comme σ est une permutation, on a

$$\prod_{i=1}^{n} x_{i,\sigma(i)} = \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma^{-1}(i),i}.$$

On conclut en remarquant que comme $\sigma \circ \sigma^{-1} = \mathrm{Id}$, alors $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$ et que $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ est une permutation de S_n.

(i) Ce point découlera directement du point (iii).

(ii) À vous de montrer que $\det_{\mathscr{B}}$ est n-linéaire.
Montrons déjà qu'elle est non nulle. Pour tout i, on peut écrire $e_i = \sum_{j=1}^{n} \delta_{i,j} e_j$ (δ étant le symbole de Kronecker), donc $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = \det_{\mathscr{B}}(e_1, \ldots, e_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \delta_{i,\sigma(i)}$.
Mais si $\sigma \neq \mathrm{Id}$, il existe i tel que $i \neq \sigma(i)$, et ainsi $\delta_{i,\sigma(i)} = 0$. Par conséquent, $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = \varepsilon(\mathrm{Id}) \prod_{i=1}^{n} \delta_{i,\mathrm{Id}(i)} = 1$, ce qui montre d'ailleurs un autre point de (ii).
Montrons enfin qu'elle est alternée. Soit $(X_1, \ldots, X_n) \in E^n$ tel qu'il existe $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i < j$ et $X_i = X_j$. Alors :

$$\det_{\mathscr{B}}(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} x_{k\sigma(k)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{A}_n} \prod_{k=1}^{n} x_{k\sigma(k)} - \sum_{\sigma \in S_n \setminus \mathfrak{A}_n} \prod_{k=1}^{n} x_{k\sigma(k)}.$$

On utilise alors l'idée suivante : si l'on note $\tau = \tau_{i,j}$, l'application $\mathfrak{A}_n \to S_n \setminus \mathfrak{A}_n$, $\sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ est une bijection.
Ainsi,

$$\sum_{\sigma \in S_n \setminus \mathfrak{A}_n} \prod_{k=1}^{n} x_{k\sigma(k)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{A}_n} \prod_{k=1}^{n} x_{k\tau\sigma(k)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{A}_n} \prod_{k=1}^{n} x_{k\sigma(k)},$$

car $X_i = X_j$ et si $\sigma(k) \neq i$ et $\sigma(k) \neq j$, $\tau(\sigma(k)) = \sigma(k)$. On obtient donc bien $\det_{\mathscr{B}}(X_1, \ldots, X_n) = 0$.
Le fait que $\det_{\mathscr{B}}$ soit la seule à vérifier $\det_{\mathscr{B}}(e_1, \ldots, e_n) = 1$ découlera du point (iii).

(iii) Soient $f \in \mathscr{A}_n(E)$ et $(X_1, \ldots, X_n) \in E^n$. On a :

$$\begin{aligned}
&f(X_1,\dots,X_n)\\
= \ & f\left(\sum_{i_1=1}^n x_{i_1 1}e_{i_1},\dots,\sum_{i_n=1}^n x_{i_n n}e_{i_n}\right)\\
= \ & \sum_{i_1=1}^n x_{i_1 1} f\left(e_{i_1},\sum_{i_2=1}^n x_{i_2 2}e_{i_2},\dots,\sum_{i_n=1}^n x_{i_n n}e_{i_n}\right)\\
= \ & \sum_{i_1=1}^n\sum_{i_2=1}^n\dots\sum_{i_n=1}^n x_{i_1 1}x_{i_2 2}\dots x_{i_n n} f(e_{i_1},\dots,e_{i_n})\\
= \ & \sum_{i_1,\dots,i_n\in[\![1,n]\!]} x_{i_1 1}\dots x_{i_n n} f(e_{i_1},\dots,e_{i_n})\\
= \ & \sum_{\substack{i_1,\dots,i_n\in[\![1,n]\!]\\ \text{tq. si } k\neq\ell \text{ alors } i_k\neq i_\ell}} x_{i_1 1}\dots x_{i_n n} f(e_{i_1},\dots,e_{i_n})\\
= \ & \sum_{\sigma\in S_n} x_{\sigma(1)1}\dots x_{\sigma(n)n} f(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n)})\\
= \ & \sum_{\sigma\in S_n}\left(\left(\prod_{i=1}^n x_{\sigma(i)i}\right)\varepsilon(\sigma) f(e_1,\dots,e_n)\right)\\
= \ & f(e_1,\dots,e_n)\sum_{\sigma\in S_n}\left(\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n x_{\sigma(i)i}\right)\\
= \ & f(\mathscr{B})\det_{\mathscr{B}}(X_1,\dots,X_n).
\end{aligned}$$

□

Définition 3.1.3.
Cette fonction $\det_{\mathscr{B}}$ est appelée ***déterminant dans la base*** $\mathscr{B}$.

Exemple 3.1.4.
Si $n=2$, remarquons que $S_n=\{\mathrm{Id},\tau_{12}\}$. Si $\mathscr{B}=\{e_1,e_2\}$ est une base de E, et si $x,y\in E$ ont pour coordonnées (x_1,x_2) et (y_1,y_2) dans $\mathscr{B}$, on a : $\det_{\mathscr{B}}(x,y)=\varepsilon(Id)x_1y_2+\varepsilon(\tau_{12})x_2y_1=x_1y_2-x_2y_1$, ce qui est la formule habituelle du déterminant en dimension 2.

De même, si $n=3$, on remarque que $S_n=\{\mathrm{Id},(1,2),(1,3),(2,3),(1,2,3),(1,3,2)\}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\det_{\mathscr{B}}(x,y,z)=&\underbrace{x_1y_2z_3}_{Id}+\underbrace{x_2y_3z_1}_{(1,2,3)}+\underbrace{x_3y_1z_2}_{(1,3,2)}-\underbrace{x_3y_2z_1}_{(1,3)}\\ &-\underbrace{x_2y_1z_3}_{(1,2)}-\underbrace{x_1y_3z_2}_{(2,3)}.\end{aligned}$$

Remarque 3.1.5.
Dans l'exemple ci-dessus et $\mathscr{B}$ étant la base canonique, on peut remarquer que $\det_{\mathscr{B}}(x,y,z)=x\cdot(y\wedge z)$. Pouvez-vous former d'autres relations de ce type ?

Attention, la valeur du déterminant varie suivant la base, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 3.1.6.
On pose $E=\mathbb{R}^2$, et $\mathscr{B}=\{(1,0),(0,1)\}=\{e_1,e_2\}$ et $\mathscr{B}'=\{(1,1),(2,0)\}=\{f_1,f_2\}$ deux bases de E. On pose $v=e_1+e_2$ et $w=e_1-e_2$. Alors $v=f_1$ et $w=-f_1+f_2$. Alors $\det_{\mathscr{B}}(v,w)=-2$ et $\det_{\mathscr{B}'}(v,w)=1$.

Théorème 3.1.7.
Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et $\mathscr{F}$ une famille de n vecteurs de E. On a alors :

(i) **Formule de changement de base :** $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})=\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{F})$.

(ii) $\mathscr{F}$ est une base ssi $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})\neq 0$. Dans ce cas $\det_{\mathscr{F}}(\mathscr{B})=\dfrac{1}{\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})}$.

Démonstration.
Ces résultats découlent de résultats précédents :

(i) On utilise le point (iii) du théorème 3.1.2. Si on appelle f l'application $\det_{\mathscr{B}}$, f est n-linéaire alternée et donc $f=f(\mathscr{B}')\det_{\mathscr{B}'}$, ce qui exactement le résultat voulu.

(ii) On utilise le point (iv) de la proposition 2.2.8 : D'une part, si $\mathscr{F}$ est liée, on a $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})=0$, d'autre part, si $\mathscr{F}$ n'est pas liée, comme $\mathrm{card}(\mathscr{F})=n$, $\mathscr{F}$ est alors une base, donc $\det_{\mathscr{F}}(\mathscr{F})=1$, et le point i précédent assure que $\det_{\mathscr{F}}(\mathscr{F})=\det_{\mathscr{F}}(\mathscr{B})\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$.

□

Exemple 3.1.8.
En reprenant les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de l'exemple précédent, on trouve bien $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')=-2$ et $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})=-\dfrac{1}{2}$.

3.2. Interprétation en géométrie réelle.

On considère ici le cas où le corps de base est $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

a. Orientation d'un ev réel de dimension finie

Définition 3.2.1.
On dit que deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E ont *la même orientation* si $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') > 0$. La relation « avoir la même orientation » est une relation d'équivalence, et il y a exactement deux orientations possibles.

Démonstration.
Le fait qu'il s'agisse d'une relation d'équivalence ne pose aucune difficulté :

— *réflexivité* : $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$.

— *symétrie* : $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) = \dfrac{1}{\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')}$, donc ces deux déterminants ont le même signe.

— *transitivité* : $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}'') = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}').\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}'')$.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E : elle définit une orientation. Soit $\mathscr{B}' = (-e_1, \dots, e_n)$ une seconde base. Puisque $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = -1$, $\mathscr{B}'$ définit une seconde orientation. Montrons qu'il n'y en pas d'autre : soit $\mathscr{B}''$ une troisième base. Puisque $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}'') = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}').\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}'')$, et $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') < 0$, alors $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}'')$ et $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}'')$ sont de signes opposés, donc l'un des deux est strictement positif, donc $\mathscr{B}''$ a la même orientation que $\mathscr{B}$ ou que $\mathscr{B}'$. □

Orienter E, c'est dire que l'une de ces deux orientations est *directe*. Les bases représentant l'autre orientation seront alors dites *indirectes*.

Exemple 3.2.2.
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, les bases $(\overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{v}_\theta)$ ont la même orientation que la base canonique dans $\mathbb{R}^2$.

b. Déterminant et aire dans le plan.

On considère ici que $E = \mathbb{R}^2$, que l'on munit du produit scalaire usuel ainsi que de la norme euclidienne induite. Notons (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

On condidère que $\mathbb{R}^2$ est orienté par sa base canonique.

Proposition 3.2.3.
Soit (u, v) deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Alors $\det_{(e_1,e_2)}(u, v)$ est l'aire algébrique du parallélogramme engendré par (u, v) (voir la figure 1). Elle est donc nulle si u et v sont colinéaires, strictement positive si (u, v) est orientée directement et strictement négative sinon.

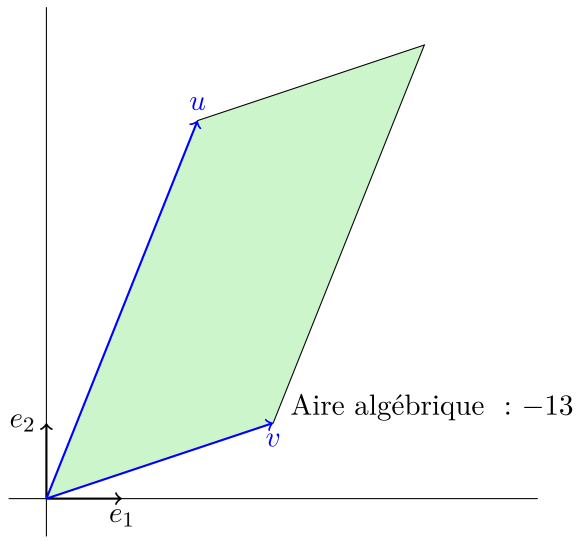

FIGURE 1 – Aire du parallélogramme engendré par (u, v), avec $u = (2, 5)$ et $v = (3, 1)$.

Démonstration.
Posons $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$ (voir la figure 2). Quitte à échanger u et v, on peut supposer que (u, v) est directe, l'aire algébrique du parallélogramme est donc positive.

On peut aussi supposer que $u \neq (0, 0)$. Rappelons que l'aire d'un parallélogramme est le produit de la longueur d'un de ses côtés par la hauteur correpondante. Avec $u' = (-u_2, u_1)$, on remarque que $u \cdot u' = 0$ donc que u et u' sont orthogonaux, ainsi que $\|u\| = \|u'\|$,. La hauteur correspondant à u est donc $h = \left|\dfrac{u'}{\|u'\|} \cdot v\right|$ et l'aire du parallélogramme est donc $h\,\|u\| = |u' \cdot v| = |u_1v_2 - u_2v_1|$. □

Remarque 3.2.4.
Ce résultat est vrai en considérant le déterminant pris dans une base orthonormée directe quelconque, et non juste dans la base canonique.

Exemple 3.2.5.
Si u est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on obtient directement une représentation cartésienne de la droite engendrée

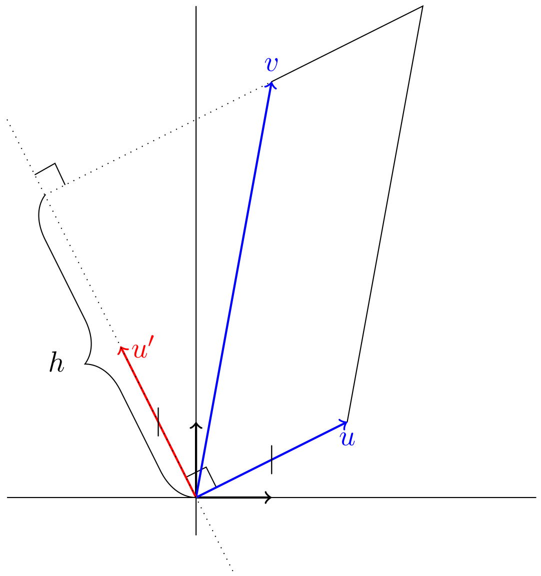

FIGURE 2 – Illustration du lien entre l'aire d'un parallélogramme et le déterminant.

par u par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ x \in \operatorname{Vect} u \Leftrightarrow \det_{\mathscr{B}}(x, u) = 0.$$

c. Déterminant et volume dans l'espace.

On considère ici que $E = \mathbb{R}^3$, que l'on munit du produit scalaire usuel ainsi que de la norme euclidienne induite. Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère que $\mathbb{R}^3$ est orienté par sa base canonique.

Proposition 3.2.6.
Soit (u, v, w) trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Alors $\det_{(e_1,e_2,e_3)}(u, v, w)$ est le volume algébrique du pavé engendré par (u, v, w) (voir la figure 3). Elle est donc nulle si (u, v, w) sont coplanaires, strictement positive si (u, v, w) est orientée directement et strictement négative sinon.

Démonstration.
Cette preuve est laissée aux soins du lecteur : pensez à utiliser le produit vectoriel ! □

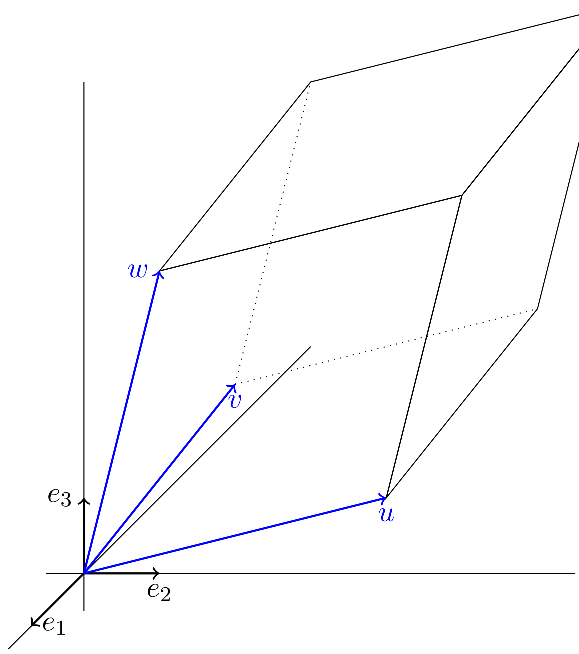

FIGURE 3 – Représentation du pavé engendré par (u, v, w).

Remarque 3.2.7.
Ce résultat est vrai en considérant le déterminant pris dans une base orthonormée directe quelconque, et non juste dans la base canonique.

Exemple 3.2.8.
Si u et v sont des vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on obtient directement une représentation cartésienne du plan engendré par u et v par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ x \in \operatorname{Vect}(u, v) \Leftrightarrow \det_{\mathscr{B}}(x, u, v) = 0.$$

4. Déterminant d'un endomorphisme

E est un $\mathbb{K}$-ev- de dimension n, dont une base est $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Remarque 4.0.9.
Pour $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, on commettra le (léger) abus de notation suivant :

$$f(\mathscr{F}) = (f(x_1), \dots, f(x_n)).$$

Définition 4.0.10.
On appelle *déterminant* de f le scalaire noté $\det f$ tel que

$$\det f = \det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B})) = \det_{\mathscr{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Ce scalaire ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie.

Remarque 4.0.11.
Pour pouvoir calculer ce déterminant, il faut que pour tout i, $f(e_i) \in E$, donc que f soit un endomorphisme.

Démonstration.
On introduit l'application
$\varphi : \begin{cases} E^n & \to \mathbb{K} \\ (v_1, \dots, v_n) & \mapsto \det_{\mathscr{B}}(f(v_1), \dots, f(v_n)) \end{cases}$.
On montre que φ est n-linéaire (à vous de le faire) et alternée :
supposons qu'il existe $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$ et $v_i = v_j$. Il faut montrer que $\varphi(v_1, \dots, v_n) = 0$. On a $\varphi(v_1, \dots, v_n) = \det_{\mathscr{B}}(f(v_1), \dots, f(v_n))$. Mais $f(v_i) = f(v_j)$ donc $\det_{\mathscr{B}}(f(v_1), \dots, f(v_n)) = 0$, car $\det_{\mathscr{B}}$ est alterné.
Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \det_{\mathscr{B}}$, et on a vu que $\lambda = \varphi(\mathscr{B})$.
Soit $\mathscr{B}'$ une seconde base de E.
Alors :

$$\begin{aligned}
\det_{\mathscr{B}'}(f(\mathscr{B}')) &= \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}).\det_{\mathscr{B}} f(\mathscr{B}') \\
&= \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}).\varphi(\mathscr{B}') \\
&= \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}).\varphi(\mathscr{B}).\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \\
&= \varphi(\mathscr{B}) \\
&= \det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B})).
\end{aligned}$$

□

Exemple 4.0.12.
Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire tel que $g(e_1) = e_1$ et $g(e_2) = 0$. Alors $\det g = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$.
Et d'autre part $\det(g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$.

Si l'on prend la base $\mathscr{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = (f_1, f_2)$, alors on trouve $g(f_1) = e_1 = \dfrac{1}{2}(f_1 + f_2)$ et $g(f_2) = e_1 = \dfrac{1}{2}(f_1 + f_2)$, d'où en effet $\det g = \det_{\mathscr{B}'}(g(\mathscr{B}')) = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = 0$ et $\det(g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{vmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{vmatrix} = 9/4 - 1/4 = 2$.

Proposition 4.0.13.
Soit $\mathscr{F}$ une famille de n vecteurs de E.

1. $\det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{F})) = \det f \times \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$;
2. si $g \in \mathscr{L}(E)$, $\det(g \circ f) = \det f \times \det g$;
3. $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$;
4. f est un automorphisme de E ssi $\det f \neq 0$;
5. Si $\det f \neq 0$, alors $\det\left(f^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det f}$.
6. $\det(\lambda f) = \lambda^n \det f$.

Démonstration.
1. En utilisant la démonstration précédente, on a : $\det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{F})) = \varphi(\mathscr{F}) = \varphi(\mathscr{B}) \times \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$, et on a montré que $\varphi(\mathscr{B}) = \det f$.
2.
$$\begin{aligned}
\det(g \circ f) &= \det_{\mathscr{B}}(g(f(e_1)), \dots, g(f(e_n))) \\
&= \det_{\mathscr{B}} g(\underbrace{f(e_1), \dots, f(e_n))}_{=\mathscr{F}} \\
&= \det_{\mathscr{B}} g(\mathscr{F}) = \det g \times \det_{\mathscr{B}} \mathscr{F} \\
&= \det g \times \det f.
\end{aligned}$$
3. $\det(\mathrm{Id}_E) = \det_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E(\mathscr{B})) = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$.
4. $(\Rightarrow)$: f^{-1} existe et donc $\det(f \circ f^{-1}) = \det \mathrm{Id}_E = 1$. Or d'après le point 2, $\det(f \circ f^{-1}) = \det f \times \det(f^{-1})$, donc on obtient $\det f \neq 0$, et aussi $\det f^{-1} = \dfrac{1}{\det f}$ (ce qui par ailleurs prouve le point 4).
$(\Leftarrow)$: On suppose que $\det f \neq 0$. Donc $\det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B})) \neq 0$, d'où $f(\mathscr{B})$ est une base de E, et ainsi f est un automorphisme.
5. Par multilinéarité du déterminant, $\det(\lambda f) = \det_{\mathscr{B}}(\lambda f(e_1), \dots, \lambda f(e_n)) = \lambda^n \det_{\mathscr{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \lambda^n \det f$.

□

Exemple 4.0.14.
$\det(2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = 2^2 \det \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} = 4$, mais $\det(2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = 2^3 \det \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} = 8$.

⚠ De manière générale, $\det(f + g) \neq \det(f) + \det(g)$.

5. Déterminant d'une matrice carrée

5.1. Définitions et propriétés

Définition 5.1.1.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{C} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Alors, il existe une unique $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f)$. On définit alors le déterminant de A comme étant le scalaire $\det f$.

Ainsi, si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, en notant $(C_1, \dots, C_n)$ les colonnes de A, on a

$$\det A = \det_{\mathscr{C}}(C_1, \dots, C_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

On retrouve les mêmes propriétés que pour le déterminant d'une application linéaire :

Théorème 5.1.2.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(E)$, et soit $\mathscr{B}$ une base quelconque de E. Alors,

$$\det(f) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)).$$

De même, si $\mathscr{F}$ est une famille de n vecteurs de E, $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}))$.

Démonstration.
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Avec $A = (a_{i,j}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, on a, d'une part,

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}.$$

De plus,

$$\begin{aligned}\det(f) = \det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B})) = \det_{\mathscr{B}} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i \right)_{j=1}^{n} \\ = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \\ = \det A\end{aligned}$$

On procède de même pour une famille de vecteurs. $\square$

Proposition 5.1.3.
Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $\det(A \times B) = \det A \times \det B$.
2. $\det \mathrm{I}_n = 1$.
3. A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. Si $\det A \neq 0$, on a $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.
4. $\det\ {}^tA = \det A$.
5. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Démonstration. 1. , 2., 3. et 5. immédiats d'après les propriétés du déterminant d'une application linéaire.

5. si $A = (a_{ij})$, on note ${}^tA = (b_{ij})$ avec $b_{ij} = a_{ji}$. Alors :

$$\begin{aligned}\det\ {}^tA &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} b_{i,\sigma(i)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \\ &\underset{\text{déjà vu}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \\ &= \det A.\end{aligned}$$

$\square$

Exercice 5.1.4.
Montrer de deux manières différentes que deux matrices semblables ont même déterminant.

5.2. Matrices triangulaires et triangulaires par blocs

Lemme 5.2.1.
Soit $\sigma \in S_n$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $i \leqslant \sigma(i)$. Alors $\sigma = \mathrm{Id}$.

Démonstration.
Posons l'hypothèse de récurrence (H_i) : pour tout k de $n - i$ à n, $\sigma(k) = k$.

→ Initialisation : par hypothèse on a $\sigma(n) \geqslant n$. Mais $\sigma(n) \in [\![1, n]\!]$, donc nécessairement $\sigma(n) = n$. (H_0) est donc vraie.

→ Hérédité : supposons (H_i) vraie pour $i \in [\![0, n-1]\!]$. Alors pour tout $k \geqslant n - i$, $\sigma(k) = k$. Par injectivité de σ il vient donc : pour tout $k < n - i$, $\sigma(k) < n - i$. En particulier $\leqslant n - i - 1 \leqslant \sigma(n - i - 1) < n - i$, et donc forcément $\sigma(n - i - 1) = n - i - 1$, et (H_{i+1}) est vérifiée.

On a donc bien $\sigma = \mathrm{Id}$. $\square$

Théorème 5.2.2 (Déterminant d'une matrice triangulaire)**.**
Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice triangulaire. Alors,

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Démonstration.
Supposons A triangulaire supérieure. Alors pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$. On sait que

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

Soit $\sigma \in S_n$ tel que $\sigma \neq \mathrm{Id}$. Alors d'après le lemme 5.2.1, il existe i_0 tel que $\sigma(i_0) < i_0$. Alors $a_{i_0\sigma(i_0)} = 0$ donc $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = 0$. Ainsi, dans la somme $\displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$, seule le terme pour $\sigma = \mathrm{Id}$ est non nul, et donc

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{i,\mathrm{Id}(i)} = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

On a évidemment le même résultat pour les matrices triangulaires inférieures. $\square$

Exemple 5.2.3.
Une matrice A dont les coefficients sont écrits entre barres verticales signifie $\det A$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -51 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -16 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

Remarque 5.2.4.
Avec ce résultat on retrouve facilement qu'une matrice triangulaire est inversible si et seulement si elle n'a pas de zéro sur la diagonale.

Proposition 5.2.5.
Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix}$ une matrice par blocs de $\mathscr{M}_{n+p}(\mathbb{K})$, avec $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors

$$\det M = \det A.$$

Démonstration.
Considérons l'application $f : (\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))^n \to \mathbb{K}$ telle que $f(x_1, \dots, x_n) = \det M$, avec $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & \mathrm{Id}_p \end{pmatrix}$ et B fixée, où A est la matrice de $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base canonique. Avec un léger abus de notation, on notera ceci $f(A)$. Cette application est n-linéaire alternée, donc il existe $k \in \mathbb{K}$ telle que pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $f(A) = k \det A$. Or pour $A = \mathrm{I}_p$, M est une matrice triangulaire de déterminant 1, donc $k = 1$, et le résultat est démontré. $\square$

Remarque 5.2.6.
Nous avons bien sûr de la même manière $\det \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det C$.

Théorème 5.2.7.
[Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs]
Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire par blocs. Alors,

$$\det M = \det A \times \det C.$$

Démonstration.
Il suffit d'écrire

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix}.$$

$\square$

Remarque 5.2.8.
Le résultat s'adapte évidemment dans le cas des matrices triangulaire inférieures par blocs, ainsi que dans le cas de matrices triangulaires par blocs avec plus de deux blocs sur la diagonale.

La formule ne se généralise pas aux matrices par blocs non triangulaires. Ainsi,

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

5.3. Opérations élémentaires et pivot de Gauss

La méthode présentée ci-après est la méthode de base : elle fonctionne toujours, et est la plus rapide dans la grande majorité des cas.

On fixe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 5.3.1.
1. Ajouter à une ligne ou une colonne de A une combinaison linéaire des autres lignes ou colonnes ne change pas le déterminant de A.
2. Multiplier une ligne ou une colonne de A par une constante $\lambda \in \mathbb{K}$, change le déterminant de A en $\lambda \det A$.
3. Échanger deux lignes ou deux colonnes de A change le déterminant de A en $-\det A$.

Démonstration.
C'est direct, car le déterminant est une fonction n-linéaire alternée de ses lignes, ainsi que de ses colonnes.

On peut aussi en donner une preuve matricielle. Effectuer chacune de ces opérations élémentaires revient à multiplier A par une certaine matrice inversible M, déjà vue dans le chapitre XXII. Ainsi le déterminant de A est changé en $\det M \times \det A$. Il suffit donc de calculer le déterminant de M, ce qui ne pose aucun problème dans les deux premiers cas, car alors M est triangulaire. Dans le cas 3, remarquons (par exemple pour les lignes) que $L_i \leftrightarrow L_j$ est équivalente à la suite d'opérations suivantes :

Ligne n° i	Ligne n° j	Opération effectuée
L_i	L_j	
$L_i + L_j$	L_j	$L_i \leftarrow L_i + L_j$
$L_i + L_j$	$-L_i$	$L_j \leftarrow L_j - L_i$
L_j	$-L_i$	$L_i \leftarrow L_i + L_j$
L_j	L_i	$L_i \leftarrow -L_i$

Il suffit donc de multiplier $\det A$ par le produit des déterminants de ces opérations successives, qui sont tous 1, sauf le dernier qui vaut -1 : ce produit vaut bien -1. ☐

Remarque 5.3.2.
À l'instar d'un calcul de rang, il est possible de mélanger des opérations sur les lignes et sur les colonnes pour calculer un déterminant de matrice.

Exemple 5.3.3.
Avec l'opération $C_2 \leftarrow 2C_2 - 3C_1$, on a

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{triang.}}{=} -1.$$

Exemple 5.3.4.
Avec les opérations $C_2 \leftarrow 2C_2 - 3C_1$ et $C_3 \leftarrow 2C_3 - 5C_1$, on a

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} &= \frac{1}{2^2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & -22 \\ 3 & -11 & -13 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \times 2 \times \begin{vmatrix} -6 & -22 \\ -11 & -11 \end{vmatrix} \\ &= -88. \end{aligned}$$

5.4. Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Définition 5.4.1.
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
1. On appelle *mineur d'ordre* (i,j) de A le scalaire $\Delta_{i,j} = \det A_{i,j}$ où $A_{i,j}$ est la matrice de $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue à partir de A en supprimant la i^{e} ligne et la j^{e} colonne.
2. On appelle *cofacteur d'ordre* (i,j) de A le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.
3. On appelle *comatrice de* A notée $\mathrm{com}\,(A)$ la matrice des cofacteurs *i.e.* $\mathrm{com}\,(A) = ((-1)^{i+j}\Delta_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 5.4.2.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. On a alors $\mathrm{com}\, A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Théorème 5.4.3 (Développement par rapport à une ligne ou une colonne)**.**
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})$, soit $i, j \in [\![1, n]\!]$.
1. Développement par rapport à la i^{e} ligne :

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{i,k} \Delta_{i,k}.$$

2. Développement par rapport à la j^{e} colonne :

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} \Delta_{k,j}.$$

Démonstration.
On ne démontre que le développement par rapport à la première ligne :

$$\begin{aligned}
&\det A\\
&= |a_{ij}| = \begin{vmatrix} L_1 \\ M \end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ & M & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ & & M & & \end{vmatrix}\\
&\quad + \dots + \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ & & M & \end{vmatrix}\\
&= a_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ & M & & \end{vmatrix}}_{=\delta_1} + a_{12} \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & M & & \end{vmatrix}}_{=\delta_2}\\
&\quad + \dots + a_{1n} \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ & & M & \end{vmatrix}}_{=\delta_n}\\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \delta_j.
\end{aligned}$$

Calculons δ_j. Pour cela on note $C_1, \dots, C_n$ les n colonnes de la matrice $M = \begin{pmatrix} a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}
\delta_j &= \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ C_1 & \dots & C_{j-1} & C_j & C_{j+1} & \dots & C_n \end{vmatrix}\\
&= (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_j & C_1 & \dots & C_{j-1} & C_{j+1} & \dots & C_n \end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} C_1 & \dots & C_{j-1} & C_{j+1} & \dots & C_n \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

car c'est une matrice triangulaire par blocs.
Or $\begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_{j-1} & C_{j+1} & \dots & C_n \end{pmatrix} = A_{1j}$, d'où $\delta_j = (-1)^{j+1} \Delta_{1j}$ et on a le résultat voulu.

On peut aussi observer ce résultat directement dans la définition du déterminant :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{k,\sigma(k)}\\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\sigma \in S_n,\ \sigma(i)=j} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{k,\sigma(k)}\\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \sum_{\sigma \in S_n,\ \sigma(i)=j} \varepsilon(\sigma) \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} a_{k,\sigma(k)}
\end{aligned}$$

Il suffit ensuite de remarquer que, pour chaque $1 \leqslant j \leqslant n$, il y a bien $(n-1)!$ permutations σ vérifiant $\sigma(i) = j$ puis que le terme

$$\sum_{\sigma \in S_n,\ \sigma(i)=j} \varepsilon(\sigma) \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} a_{k,\sigma(k)}$$

correspond bien au cofacteur d'ordre i, j de A. Nous laissons le lecteur intéressé montrer cela. □

Remarque 5.4.4.
Dans $\mathbb{R}^3$ et la base canonique $\mathscr{B}$, on retrouve les relations observées en début de chapitre : $\det_{\mathscr{B}}(x, y, z) = x \cdot (y \wedge z)$ *etc.*

Remarque 5.4.5.
• Cette méthode n'est à utiliser que lorsqu'il y a une ligne ou une colonne contenant un ou deux coefficients non nuls seulement, sinon elle beaucoup plus longue que la méthode du pivot de Gauss.
N'oubliez pas non plus que si l'on veut développer par rapport à une ligne ou une colonne, il existe d'autres lignes ou colonnes que les premières !
• Pour démontrer le théorème 5.4.3, nous avons utilisé le résultat 5.2.7. Il est possible de démontrer ces deux résultats dans l'autre sens, mais attention à ne pas utiliser un résultat dans sa propre démonstration.

Exemple 5.4.6.
Comparer le calcul de $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 7 \end{vmatrix}$ avec les deux méthodes (développement ou pivot de Gauss).

Corollaire 5.4.7.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $A \times {}^t\mathrm{com}\, A = {}^t\mathrm{com}\, A \times$

$A = (\det A) \cdot \mathrm{I}_n$. En particulier, si A est inversible, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot {}^t\mathrm{com}\, A$.

Remarque 5.4.8.
Ce résultat est inutilisable en pratique pour calculer des inverses de matrices. Si $n = 2$, ça va (on retrouve la formule de l'inverse d'une matrice 2×2), pour $n = 3$, c'est trop long, et pour $n \geqslant 4$ c'est un cauchemar. Essayez !

Démonstration.
On note $A = (a_{ij})$ et ${}^t\mathrm{com}\, A = (b_{ij})$ avec $b_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ji}$. On note également $A.\ {}^t\mathrm{com}\, A = (C_{ij})_{i,j}$, donc

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{ik} \Delta_{jk}.$$

→ si $i = j$: grâce à la formule de développement par rapport à la j^{e} ligne, on trouve $C_{ij} = \det A$.
→ si $i \neq j$: on note Δ la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la j^{e} ligne par la i^{e} ligne : cette matrice à deux lignes égales, donc $\det \Delta = 0$. On développe $\det \Delta$ par rapport à la j^{e} ligne, et on a :

$$0 = \det \Delta = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{ik} \Delta_{jk} = C_{ij},$$

d'où le résultat.

On procède de la même manière pour calculer ${}^t\mathrm{com}\, A \times A$. □

Proposition 5.4.9 (Déterminant de Vandermonde)**.**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \dots, x_n$ $n+1$ scalaires. On définit le *déterminant de Vandermonde* par :

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Alors,

$$V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

Démonstration.
Ce déterminant est un classique parmi les classiques. Il est possible de le calculer directement par pivot de Gauss. Ici, on le démontre par récurrence.

Les cas $n = 0$ ou $n = 1$ sont évidents : $V(x_0) = 1$ et $V(x_0, x_1) = x_1 - x_0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que le résultat soit vrai au rang n. Considérons le polynôme $V(x_0, \dots, x_n, X)$. En le développant par rapport à la dernière ligne, on voit qu'il est de degré au plus $n+1$, et que le terme en X^{n+1} a pour coefficient $V(x_0, \dots, x_n)$. Or il est aisé de voir qu'il a pour racines $x_0, \dots, x_n$. Il existe donc un scalaire $k \in \mathbb{K}$ tel que

$$V(x_0, \dots, x_n, X) = k \prod_{i=0}^{n} (X - x_i).$$

Ce scalaire k est le coefficient dominant de $V(x_0, \dots, x_n, X)$, c'est donc en développant sur la dernière ligne : $V(x_0, \dots, x_n)$. Ainsi, en évaluant ce polynôme en x_{n+1}, il vient :

$$V(x_0, \dots, x_n, x_{n+1}) = V(x_0, \dots, x_n) \prod_{i=0}^{n} (x_{n+1} - x_i)$$

ce qui, en utilisant l'hypothèse de récurrence, est bien le résultat recherché. □

Remarque 5.4.10.
On peut utiliser le déterminant de Vandermonde pour montrer que la famille des polynômes d'interpolation de Lagrange est libre.