Devoir surveillé n° 6 - Remarques

Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 points, total sur 30 points, ramené sur 5 points.
- Problèmes : chaque question sur 4 points, total v1 sur 72, exercice v2 sur 12 points, total sur 8 points, ramené sur 15 points.

Statistiques descriptives.

	Calculs	v1	v2	Note finale
Note maximale	21	38	55	20
Note minimale	74	10	13	4
Moyenne	$\approx 11,07$	$\approx 22,17$	$\approx 30,07$	$\approx 9,69$
Écart-type	$\approx 5,10$	$\approx 8,25$	$\approx 10,25$	$\approx 3,32$

Remarques générales.

La première version était facile : les deux problèmes étaient très guidés. Pourtant, que d'erreurs et d'horreurs ! Faites attention à ce que vous écrivez. Il n'y a rien d'anormal ou de honteux à ne pas savoir répondre à une question, même facile, mais il est très préjudiciable d'écrire des ligne d'énormités. Vous devez avoir un minimum de recul et vous rendre compte quand vous déraillez. Quelques exemples de mémoire au hasard : « f est continue sur un segment donc $f^{(n)}$ a un maximum », « K^{n+1} ne dépend pas de n », « $f(c) = 0$ donc $f'(c) = 0$ », « $(n+1)! \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\dfrac{K^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ », et d'autres ... Cela ne devrait pas apparaître sur une copie. Relisez-vous, analysez ce que vous écrivez, et dites-vous que la fin ne justifie pas les moyens : il n'est pas défendable de tout accepter et d'être prêt à vendre père et mère juste pour arriver à la conclusion demandée.

Un exercice vu en TD (v1).

Comme souvent, les exercices sur les suites récurrentes sont mal traités, alors qu'on y utilise toujours les 3 ou 4 mêmes arguments.
Pour la millième fois : si vous ne dites pas que f est continue, il n'y a aucune raison que si (u_n) converge, ce soit vers un point fixe. Encore pire : ce n'est pas parce qu'il y a un point fixe que (u_n) converge.
Ici on trouvait deux solutions à l'équation du second degré obtenue : $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Comme cela les arrangeait bien, beaucoup ont dit que $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < -1$. Pas de chance, c'est faux car $-3 < -\sqrt{5}$. Ici on ne gardait que la solution positive car un point fixe ne pouvait être que positif. Ou encore parce que tous les (u_n) étaient positifs pour $n \geqslant 1$. Mais il fallait le prouver en montrant que $u_1 \geqslant 0$ et que $\mathbb{R}_+$ était stable.
Dans l'étude de $x \mapsto \sqrt{1+x}$, attention : cette fonction n'est pas dérivable en -1. Le majorant voulu, $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, n'était un majorant de $|f'|$ que sur $[1, +\infty[$. Il fallait donc montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n \geqslant 1$, encore une fois en parlant d'intervalle stable, sinon il était impossible d'utiliser l'IAF. Certains, parce que ça les arrangeait bien, ont raconté que sur $]-1, +\infty[$, $|f'(x)| = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Sérieusement ! Enfin, dans l'utilisation de l'IAF, ne parlez pas de $\dfrac{u_{n+1}-\alpha}{u_n-\alpha}$ car, comme toujours, le dénominateur peut s'annuler.
La partie finale, avec la récurrence et la majoration de $u_n - \alpha$ n'a jamais été bien faite, c'est pourtant une question de cours.

Tout cela fait vraiment beaucoup de problèmes sur un exo hyper classique, qui plus est vu en TD. Je vous rappelle que vous avez le droit de poser des questions en cours sur les exos de TD que vous n'avez pas bien compris, et on peut les refaire (avec plaisir) ! ! ! !

Un exercice sur les polynômes (v1).

Archi-facile, plutôt pas mal traité.

1. On ne demandait ici que la synthèse : si $a = \ldots$ et $b = \ldots$, alors 1 est racine multiple. Quasiment tout le monde a dit « pour avoir une racine multiple, il faut $a = \ldots$ et $b = \ldots$ », ce qui est exactement l'implication inverse de celle voulue.
Enfin, quand vous dites que vous utilisez l'algo d'Horner, ne balancez pas des lignes de nombres sans explication : dites au moins à quoi correspondent les résultats des calculs.

3. On demandait de vérifier le résultat précédent : factoriser P sous la forme $(X-1)^3 Q$ ne suffisait pas, il fallait aussi justifier que $Q(1) \neq 0$.

Qualité de l'interpolation de Lagrange (v1).

1. Comme souvent, et de manière totalement incompréhensible pour moi, la question de cours est l'une des plus mal traitées.

2. Cette question a donné lieu à beaucoup de n'importe quoi. Apprenez l'énoncé correct des théorèmes de Rolle et des accroissements finis.

3. Hallucinant, j'ai lu un nombre important de réponses du genre « avec la question 2., ça marche ». Et les hypothèses ? Depuis quand on utilise un résultat sans vérifier les hypothèses ? Qui ici n'étaient pas du tout du tout du tout satisfaites ! Il s'agissait d'une nouvelle question : l'hypothèse forte « $x \in \sigma$ » n'était plus faite ici, on quittait ce cas particulier pour passer au cas général.

4. Il s'agissait de résoudre une (incroyablement compliquée) équation du premier degré.

6. Simple question de cours : $f^{(n)}$ est continue sur un segment donc est bornée et atteint ses bornes, fin de la question. Comment faites-vous pour disserter pendant des lignes sur f sans parler de $f^{(n)}$ et finir par conclure sur $f^{(n)}$?

8. Il fallait démontrer que $\dfrac{K^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. C'est une limite classique. Pour 99% des candidats, le dénominateur tend vers $+\infty$ donc même pas la peine de parler du numérateur. Triste ...

9.a. Question de cours visiblement compliquée. Certains dérivent pour prouver que la fonction est dérivable. J'adore :)

9.b. Je vous rappelle qu'écrire $(1+x^2)^{(k)}$ est une horreur.

Un exercice (v2).

Très mal traité. En général vos raisonnements ont reposé sur une idée fausse : si f s'annule n fois, elle change n fois de signe. C'est faux, considérez par exemple $x \mapsto 1 + \sin(x)$, qui s'annule une infinité de fois mais ne change jamais de signe.
Vu de temps en temps aussi : si f a un maximum local, elle est croissante à gauche et décroissante à droite (contre-exemple vu en cours).
Lisez le corrigé.

Le théorème de Mason (v2).

1. Il était question de « nombre de racines » d'un polynôme. Mais il fallait être précis sur les deux significations possibles de ce nombre : compte-t-on les racines avec multiplicité, ou parle-t-on de racines deux à deux distinctes ? Sans préciser cela, on ne pouvait pas vraiment considérer que les réponses étaient valables. Par exemple, très souvent lu : « P a autant de racines que son degré ». Donc $(X-1)^2$ a 2 racines ?
Vos réponses à cette première question ont trop souvent manqué de cette précision. Et encore une fois, tartiner des phrases et des phrases ne sert à rien s'il n'y a pas le bon argument. Le matheux aime les phrases claires et concises : allez droit au but, ici quelques lignes suffisaient.

2. et 3. Là encore, sans écrire que λ racine de $PQ \Leftrightarrow \lambda$ racine de P ou Q, i.e. $\rho(PQ) = \rho(P) \cup \rho(Q)$, impossible de répondre correctement à cette question. Ce simple argument remplace des lignes de raisonnement en français vasouilleux. La formule $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$ suffisait alors pour conclure.

13. La plupart du temps vous n'avez lu l'énoncé que partiellement : on voulait remplacer P, Q et R par des polynômes premiers entre eux (ça, tout le monde l'a bien vu), mais à coefficient rationnels (et ça, la plupart l'ont zappé).

Les autres question ont été diversement abordées, mais sans erreur particulièrement récurrente.