



LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON
SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR
CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I.
ANNÉE 2017 - 2018

C4 : MODÉLISATION DES PERFORMANCES CINÉMATIQUES DES SYSTÈMES

TD 8 - Performances cinématiques des systèmes : outils de la cinématique du point(C4-3)

Compétences

- **Analyser** : Apprécier la pertinence et la validité des résultats :
 - unités du système international;
 - homogénéité des grandeurs.
- **Modéliser** : Proposer un modèle de connaissance et de comportement :
 - Solide indéformable;
 - référentiel, repère;
 - équivalence solide/référentiel;
 - vecteur-vitesse angulaire de deux référentiels en mouvement l'un par rapport à l'autre";
- **Résoudre** : Procéder à la mise en oeuvre d'une démarche de résolution analytique
 - dérivée temporelle d'un vecteur par rapport à un référentiel;
 - relation entre les dérivées temporelles d'un vecteur par rapport à deux référentiels distincts;
 - composition des vitesses angulaires;
 - composition des vitesses;

1 Véhicule à trois roues Clever

a) Présentation

Le Clever (Compact Low Emission VEHiclefor uRban tRansportation) est un démonstrateur technologique développé par un tissu d'industriels européens dont BMW, l'Institut Français du Pétrole (IFP) et de nombreux équipementiers. Sa conception a pour objectif de développer des solutions de transport à faible consommation énergétique.

L'objectif de cette étude se concentre sur les exigences "**Permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol**" et "**S'insérer facilement dans le trafic**" détaillées dans le diagramme d'exigence sur la figure 1.

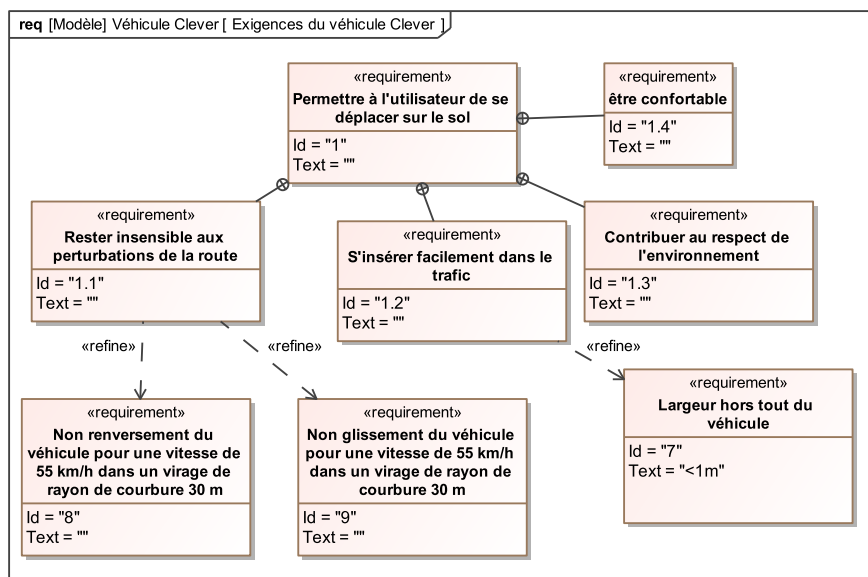


FIGURE 1 – Diagramme des exigences partiel du véhicule à trois roues Clever

b) Condition de non renversement et d'adhérence

Le mécanisme d'inclinaison peut être décrit globalement par la figure 2. Le groupe motopropulseur, comportant entre autres le moteur et les roues arrière, reste en permanence perpendiculaire au sol. La partie avant, constituée de l'habitacle et de la roue avant, peut au contraire s'incliner dans les virages grâce à un mécanisme hydraulique qui sera étudié ultérieurement dans le sujet. Les deux parties du Clever sont reliées par une liaison pivot d'axe parallèle au sol, schématisée sur la figure 4.

Pour simplifier l'étude, on ne s'intéresse pas dans un premier temps à la roue avant, ce qui permet de se ramener au système schématisé sur la figure 4. On donne les caractéristiques géométriques et cinématiques suivantes :

- La route R est munie du repère $R_g = (O, \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$. Le référentiel associé est supposé galiléen.
- Le groupe motopropulseur 0 est animé d'un mouvement de rotation par rapport au sol dont le centre instantané de rotation est O. Le rayon de courbure de la trajectoire du point C dans R_g est R_C . Le repère lié à 0 est $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ tel que $\vec{z}_0 = \vec{z}_g$ et on note $\theta = (\vec{x}_g, \vec{x}_0) = (\vec{y}_g, \vec{y}_0)$. On a donc $\vec{OC} = R_C \cdot \vec{x}_0$. On remarquera bien que R_0 est mobile par rapport à R_g .
- L'habitacle 1 est liée au groupe 0 par une liaison pivot d'axe (C, \vec{y}_0) . Le repère lié à 1 ($R_1 = (C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$) est tel que $\vec{y}_1 = \vec{y}_0$. On note $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ l'angle d'inclinaison du système pendulaire. Le centre de gravité de 1 est G tel que $\vec{CG} = e \cdot \vec{z}_1$.
- Les roues arrière 2 et 3 sont liées au groupe 0 par des liaisons pivots d'axe (C, \vec{x}_0) .

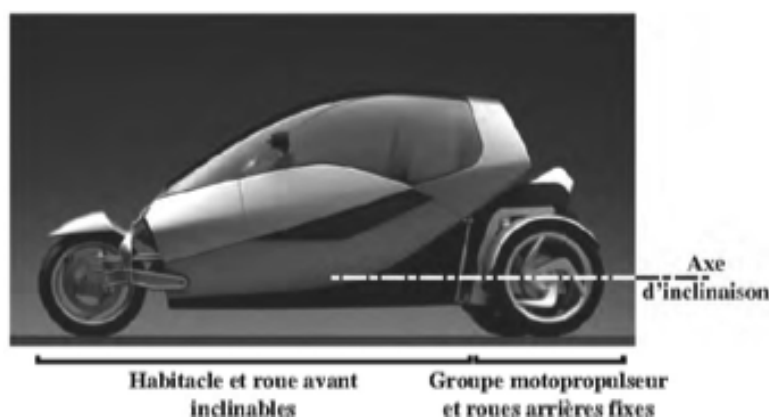


FIGURE 2 – Présentation du mécanisme d'inclinaison

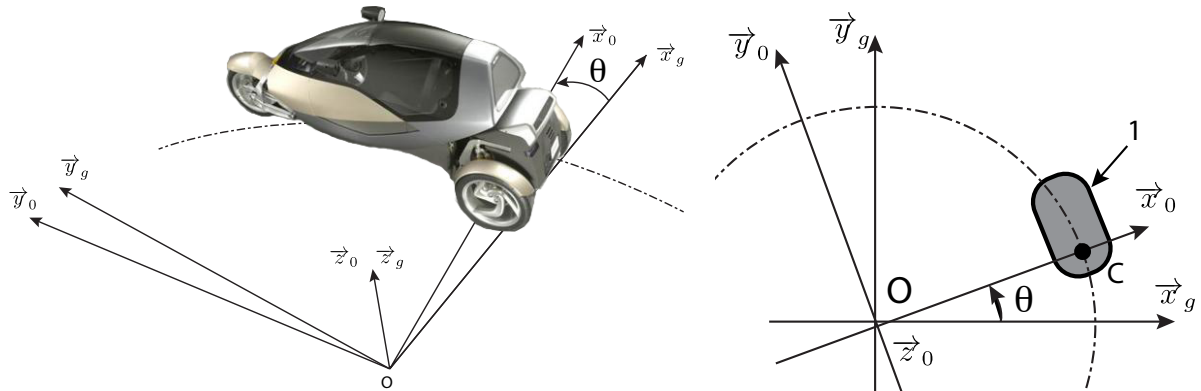


FIGURE 3 – Paramétrage du virage

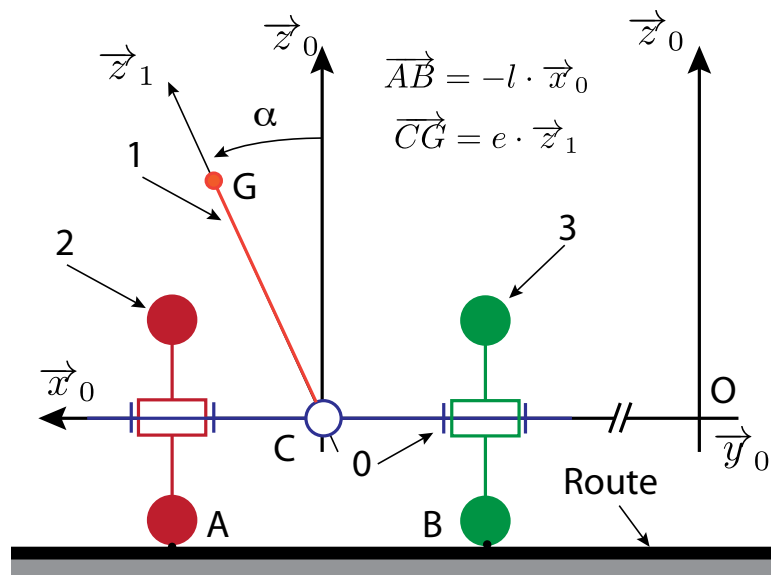


FIGURE 4 – Paramétrage du véhicule dans le virage

- On pose $V = \vec{V}(C/R_g) \cdot \vec{y}_0$.

On se place dans un cas où le rayon de courbure R_C de la trajectoire du point C et l'angle d'inclinaison α restent constants.

Q 1 : Faire les figures planes de projection permettant de paramétrer les différentes rotations du problème.

Q 2 : Exprimer la vitesse, notée $\vec{V}(G/R_g)$, du point G dans son mouvement par rapport à R_g en fonction de V , e , R_C et α .

Q 3 : Exprimer l'accélération, notée $\vec{a}(G/R_g)$, du point G dans son mouvement par rapport à R_g en fonction de V , e , R_C et α .

L'écriture d'une condition de non glissement en s'appuyant de la traduction de l'équilibre dynamique du Clever permet d'écrire :

$$-\vec{a}(G/R_g) \cdot \vec{x}_0 < f \cdot g \cdot \vec{x}_0$$

Q 4 : Donner l'expression de la vitesse maximale de non glissement V en fonction de e , R_C , α , f et g .

On se propose d'étudier la configuration suivante :

- $\alpha = 0$ (habitable à la vertical);
- position du centre de gravité, $e = 50\text{ cm}$;
- accélération de la pesanteur, $g = 9,81\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;
- coefficient d'adhérence pneu-route, $f = 0,8$.

Q 5 : Donner la vitesse maximale V permettant de vérifier la condition de non-glissement donnée par le cahier des charges. Que pouvons-nous en conclure ?

2 Robot ramasseur de fruit

La modélisation du bras d'un robot ramasseur de fruit est donné par la figure 5.

- Le bras tourne autour de l'axe (O_0, \vec{z}_0) par rapport au bâti 0.
- Le bras 2 tourne autour de l'axe (O_1, \vec{z}_0) par rapport à 1.
- Le bras 3 tourne autour de l'axe (O_2, \vec{z}_0) par rapport à 2.

On pose :

- $\vec{O_0O_1} = R \vec{x}_1$;
- $\vec{O_1O_2} = R \vec{x}_2$;
- $\vec{O_2M} = L \vec{x}_3$;

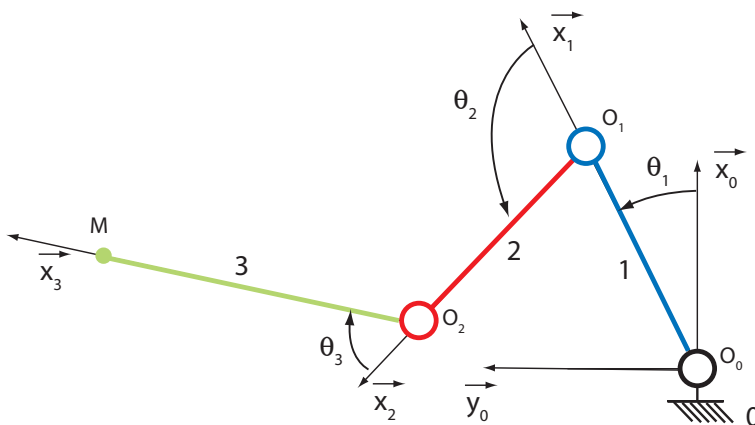


FIGURE 5 – Modélisation du bras du robot ramasseur de fruit

Q 6 : Construire les figures planes de projection pour paramétrer le modèle.

Q 7 : Exprimer les vecteurs vitesse instantanée de rotation : $\vec{\Omega}_{(1/0)}$, $\vec{\Omega}_{(2/1)}$ et $\vec{\Omega}_{(3/1)}$.

Q 8 : Déterminer $\vec{V}(O_1 \in 1/0)$.

Q 9 : Déterminer $\vec{V}(O_2 \in 2/0)$.

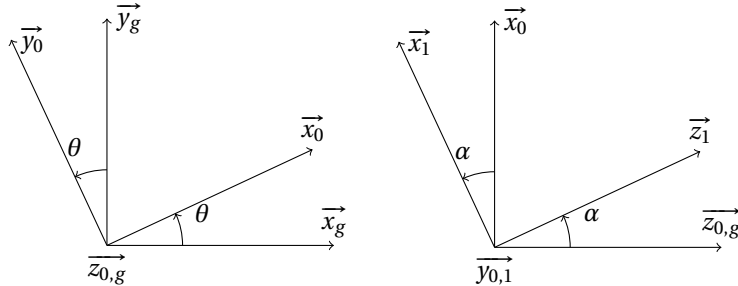
Q 10 : Déterminer $\vec{V}(M \in 3/0)$.

Q 11 : Déterminer $\vec{a}(M \in 3/0)$.

Corrigé

1 Véhicule à trois roues Clever

Q 1 : Faire les figures planes de projection permettant de paramétrer les différentes rotations du problème.



Q 2 : Exprimer la vitesse, notée $\vec{V}(G/R_g)$, du point G dans son mouvement par rapport à R_g en fonction de V , e , R_c et α .

$$\begin{aligned}\vec{V}(G/R_g) &= \left[\frac{d\vec{CG}}{dt} \right]_{R_g} = \left[\frac{d(R_c \cdot \vec{x}_0 + e \cdot \vec{z}_1)}{dt} \right]_{R_g} \\ &= \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0 \wedge R_c \cdot \vec{x}_0 + \dot{\theta} \vec{z}_0 \wedge e \cdot \vec{z}_1 = (R_c + e \cdot \sin \alpha) \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_0\end{aligned}$$

Avec $V = R_c \cdot \dot{\theta}$

$$\boxed{\vec{V}(G/R_g) = (R_c + e \cdot \sin \alpha) \cdot \frac{V}{R_c} \cdot \vec{y}_0}$$

Q 3 : Exprimer l'accélération, notée $\vec{a}(G/R_g)$, du point G dans son mouvement par rapport à R_g en fonction de V , e , R_c et α .

$$\vec{a}(G/R_g) = \left[\frac{d\vec{V}(G/R_g)}{dt} \right]_{R_g} = \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0 \wedge (R_c + e \sin \alpha) \dot{\theta} \cdot \vec{y}_0 = -\dot{\theta}^2 (R_c + e \sin \alpha) \vec{x}_0$$

Avec $V = R_c \cdot \dot{\theta}$

$$\boxed{\vec{a}(G/R_g) = -(R_c + e \cdot \sin \alpha) \cdot \frac{V^2}{R_c^2} \cdot \vec{x}_0}$$

Q 4 : Donner l'expression de la vitesse maximale de non glissement V en fonction de e , R_c , α , f et g .

La condition de non glissement s'écrit :

$$(R_c + e \cdot \sin \alpha) \cdot \frac{V^2}{R_c^2} < f \cdot g$$

On peut alors déterminer V :

$$V < R_c \sqrt{\frac{f \cdot g}{R_c + e \cdot \sin \alpha}}$$

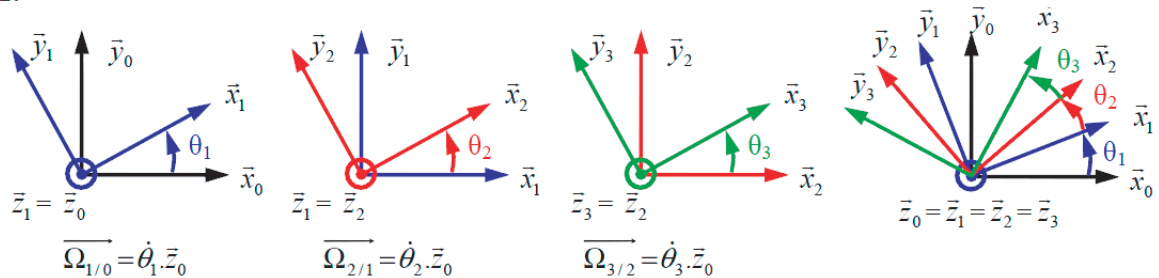
Q 5 : Donner la vitesse maximale V permettant de vérifier la condition de non-glissement donnée par la cahier des charges.

Le cahier des charges donne : $R_c = 30 \text{ m}$ On peut donc calculer V :

$$V = 30 \cdot \sqrt{\frac{0,8 \times 9,81}{30}} = 12,52 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 15,34 \times 3,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 55,24 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

2 Corrigé : robot ramasseur de fruit

Q.1.



Q.2. $\overrightarrow{V_{O_1/0}} = \overrightarrow{V_{O_1/0}} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{O_0 O_1} \Big|_0 = \frac{d}{dt} R \cdot \vec{x}_1 \Big|_0 = R \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{y}_1 \rightarrow \boxed{\overrightarrow{V_{O_1/0}} = R \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{y}_1}$

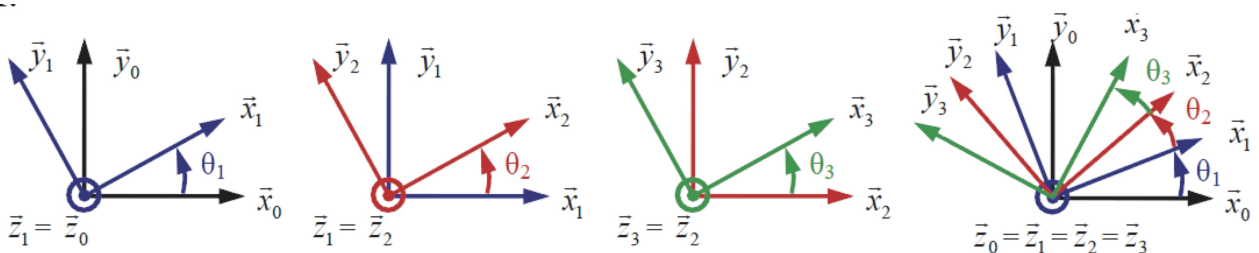
Rappel : $\frac{d}{dt} \vec{x}_1 \Big|_0 = \frac{d}{dt} \vec{x}_1 \Big|_1 + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \vec{x}_1 = (\dot{\theta}_1 \cdot \vec{z}_0) \wedge \vec{x}_1 = \dot{\theta}_1 \cdot \vec{y}_1$ (ici, il est cependant préférable de trouver ce résultat par les figures 2D de repérage paramétrage)

Q.3. $\overrightarrow{V_{O_2/0}} = \overrightarrow{V_{O_2/0}} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{O_0 O_2} \Big|_0 = \frac{d}{dt} (R \cdot \vec{x}_1 + R \cdot \vec{x}_2) \Big|_0 = R \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{y}_1 + R \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cdot \vec{y}_2$
 $\rightarrow \boxed{\overrightarrow{V_{O_2/0}} = R \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{y}_1 + R \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cdot \vec{y}_2}$

Rappel : $\frac{d}{dt} \vec{x}_2 \Big|_0 = \frac{d}{dt} \vec{x}_2 \Big|_2 + \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \vec{x}_2 = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cdot \vec{z}_0 \wedge \vec{x}_2 = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cdot \vec{y}_2$ (ici, il est cependant préférable de trouver ce résultat par les figures 2D de repérage paramétrage)

Q.4. $\overrightarrow{V_{M/0}} = \overrightarrow{V_{M/0}} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{O_0 M} \Big|_0 = \frac{d}{dt} (R \cdot \vec{x}_1 + R \cdot \vec{x}_2 + L \cdot \vec{x}_3) \Big|_0 = R \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{y}_1 + R \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cdot \vec{y}_2 + L \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cdot \vec{y}_3$
 $\rightarrow \boxed{\overrightarrow{V_{M/0}} = R \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{y}_1 + R \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cdot \vec{y}_2 + L \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cdot \vec{y}_3}$

Q 6 : Construire les figures planes de projection pour paramétrer le modèle.



Q 7 : Exprimer les vecteurs vitesse instantanée de rotation : $\overrightarrow{\Omega_{(1/0)}}$, $\overrightarrow{\Omega_{(2/1)}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{(3/1)}}$.

$$\overrightarrow{\Omega_{(1/0)}} = \dot{\theta}_1 \vec{z}_0$$

$$\overrightarrow{\Omega_{(2/1)}} = \dot{\theta}_2 \vec{z}_0$$

$$\overrightarrow{\Omega_{(3/1)}} = \overrightarrow{\Omega_{(3/2)}} + \overrightarrow{\Omega_{(2/1)}} = (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2) \vec{z}_0$$

Q 8 : Déterminer $\overrightarrow{V}(O_1 \in 1/0)$.

$$\vec{V}(O_1 \in 1/0) = \vec{V}(O_1/0)$$

Car $O_1 \in 1$.

$$\vec{V}(O_1 \in 1/0) = \vec{V}(O_1/0) = \left[\frac{d\vec{O_0O_1}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{dR\vec{x}_1}{dt} \right]_{R_0}$$

Or,

$$\left[\frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{x}_1 = \dot{\theta}_1 \vec{z}_0 \wedge \vec{x}_1 = \dot{\theta}_1 \vec{y}_1$$

Donc,

$$\boxed{\vec{V}(O_1 \in 1/0) = R\dot{\theta}_1 \vec{y}_1}$$

Q 9 : Déterminer $\vec{V}(O_2 \in 2/0)$.

$$\vec{V}(O_2 \in 2/0) = \vec{V}(O_2/0)$$

Car $O_2 \in 2$.

$$\vec{V}(O_2 \in 2/0) = \vec{V}(O_2/0) = \left[\frac{d\vec{O_0O_2}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{dR\vec{x}_1 + R\vec{x}_2}{dt} \right]_{R_0}$$

Or,

$$\left[\frac{d\vec{x}_2}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{x}_2}{dt} \right]_{R_2} + \vec{\Omega}(2/0) \wedge \vec{x}_2 = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{z}_0 \wedge \vec{x}_2 = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{y}_2$$

Donc,

$$\boxed{\vec{V}(O_2 \in 2/0) = R\dot{\theta}_1 \vec{y}_1 + R(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{y}_2}$$

Q 10 : Déterminer $\vec{V}(M \in 3/0)$.

$$\vec{V}(M \in 3/0) = \vec{V}(M/0)$$

Car $M \in 3$.

$$\vec{V}(M \in 3/0) = \vec{V}(M/0) = \left[\frac{d\vec{O_0M}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{dR\vec{x}_1 + R\vec{x}_2 + L\vec{x}_3}{dt} \right]_{R_0}$$

Or,

$$\left[\frac{d\vec{x}_3}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{x}_3}{dt} \right]_{R_3} + \vec{\Omega}(3/0) \wedge \vec{x}_3 = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \vec{z}_0 \wedge \vec{x}_3 = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \vec{y}_3$$

Donc,

$$\boxed{\vec{V}(M \in 3/0) = R\dot{\theta}_1 \vec{y}_1 + R(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{y}_2 + L(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \vec{y}_3}$$

Q 11 : Déterminer $\vec{a}(M \in 3/0)$.

$$\vec{a}(M \in 3/0) = \vec{a}(M/0)$$

Car $M \in 3$.

$$\vec{a}(M \in 3/0) = \vec{a}(M/0) = \left[\frac{d\vec{V}(M \in 3/0)}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d(R\dot{\theta}_1 \vec{y}_1 + R(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{y}_2 + L(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \vec{y}_3)}{dt} \right]_{R_0}$$

Or,

$$\begin{aligned}\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_{R_0} &= \left[\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right]_{R_1} + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{y}_1 = \dot{\theta}_1 \vec{z}_0 \wedge \vec{y}_1 = -\dot{\theta}_1 \vec{x}_1 \\ \left[\frac{d\vec{y}_2}{dt}\right]_{R_0} &= \left[\frac{d\vec{y}_2}{dt}\right]_{R_2} + \vec{\Omega}(2/0) \wedge \vec{y}_2 = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{z}_0 \wedge \vec{y}_2 = -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{x}_2 \\ \left[\frac{d\vec{y}_3}{dt}\right]_{R_0} &= \left[\frac{d\vec{y}_3}{dt}\right]_{R_3} + \vec{\Omega}(3/0) \wedge \vec{y}_3 = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \vec{z}_0 \wedge \vec{y}_3 = -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \vec{x}_3\end{aligned}$$

Donc,

$$\vec{a}(M \in 3/0) = R\ddot{\theta}_1 \vec{y}_1 + R(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \vec{y}_2 + L(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) \vec{y}_3 - R\dot{\theta}_1^2 \vec{x}_1 - R(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \vec{x}_2 - L(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 \vec{x}_3$$