Devoir à la maison n° 02

À rendre le 15 septembre

On se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, et l'on associe à un point $M = (x, y)$ son affixe $m = x + iy$. On note $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$.

Partie 1 : $(p : q)$ point

Soit A et B deux points du plan, d'affixes respectives a et b. Soit p et q deux nombres réels strictement positifs.

1) Montrer qu'il existe un unique point d'affixe z vérifiant $\dfrac{z-a}{b-z} = \dfrac{p}{q}$. Ce point est appelé le $(p : q)$ point de A à B. Expliciter son affixe.
Question bonus : Connaissez-vous une autre dénomination pour ce point ?

2) Justifier que le $(p : q)$ point de A à B appartient au segment $[AB]$.

3) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que le $(p : q)$ point de A à B et le $(\alpha p : \alpha q)$ point de A à B sont identiques.

4) Caractériser le $(1 : 1)$ point de A à B.

Partie 2 : triangle et $(p : q)$ sous-triangle

Soit A, B et C trois points du plan, distincts deux à deux, d'affixes respectives a, b et c.

5) Soit X le $(p : q)$ point de A à B et Y le $(p : q)$ point de A à C. Montrer que la droite (XY) est parallèle à la droite (BC).
Question bonus : Quel résultat bien connu cela prouve-t-il ?

On appelle $(p : q)$ sous-triangle du triangle ABC le triangle $A'B'C'$ où :

- A' est le $(p : q)$ point de A à B, d'affixe a' ;
- B' est le $(p : q)$ point de B à C, d'affixe b' ;
- C' est le $(p : q)$ point de C à A, d'affixe c'.

L'isobarycentre (ou centre de gravité) G du triangle ABC est le point d'affixe $g = \dfrac{a+b+c}{3}$.

6) Montrer que le $(p : q)$ sous-triangle du triangle ABC a le même isobarycentre que ABC.

Partie 3 : suite de $(p : q)$ sous-triangles

On considère une suite de triangles $(\Delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ construite de la manière suivante.

- Trois points du plan A_0, B_0 et C_0, distincts deux à deux, sont fixés et $\Delta_0 = A_0B_0C_0$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $\Delta_k = A_kB_kC_k$ est construit, alors $\Delta_{k+1} = A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}$ est le $(p : q)$ sous-triangle de Δ_k.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note a_k, b_k et c_k les affixes respectives de A_k, B_k et C_k.

7) Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, a_{k+1}, b_{k+1} et c_{k+1} en fonction de a_k, b_k et c_k.

On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_k = a_k + b_k + c_k$, $\beta_k = a_k + jb_k + j^2c_k$ et $\gamma_k = a_k + j^2b_k + jc_k$.

8) Montrer que les suites $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont des suites géométriques et préciser leurs raisons.

9) Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, une expression de a_k, de b_k et de c_k en fonction de α_k, β_k et γ_k.

10) Montrer que les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent. Préciser leurs limites.

— FIN —