XX Analyse asymptotique

30 juillet 2021

1. Comparaison asymptotique de suites.

Une première manière de comparer deux suites est de regarder si elles ont ou pas une limite, et si ces limites sont égales. Si deux suites n'ont pas la même limite, on peut dire que ces deux suites n'ont pas le même comportement. Mais si elles ont la même limite, on ne peut rien dire : exemple : $u_n = n$ et $v_n = \mathrm{e}^n$, 0, $1/n$ et $(-1)^n/n$. Même limite, mais pas du tout le même comportement. Pour une analyse plus fine, on utilise des outils de comparaison.

Dans tout cette section, (u_n), (v_n), (u'_n), (v'_n) et (w_n) sont des suites réelles.

1.1. Définitions : notations de Landau.

Définition 1.1.1.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites. Les définitions suivantes vont être données dans le cas particulier où (v_n) **ne s'annule pas**. Il existe des définitions plus générales des relations de comparaison, dans le cas où (v_n) s'annule, mais elles ne sont pas au programme.

(i) On dit que (u_n) est *dominée* par (v_n), ce qui se note $u_n = O(v_n)$, et se lit « (u_n) est un grand O de (v_n) », si la suite (u_n/v_n) est bornée.

(ii) On dit que (u_n) est *négligeable* devant (v_n), ce qui se note $u_n = o(v_n)$, et se lit « (u_n) est un petit o de (v_n) », si $u_n/v_n \to 0$.

Remarque 1.1.2.
• Petit o implique évidemment grand O.
• Une suite est un $O(1)$ si et seulement si elle est bornée, et est un $o(1)$ si et seulement si elle tend vers 0.
• À l'écrit, prenez soin de bien différentier les tailles de o et O.

Remarque 1.1.3.
On traduira souvent la relation $u_n = o(v_n)$ par : il existe une suite (ε_n) telle que

— $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$;
— $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \varepsilon_n v_n$.

Exemple 1.1.4.
1. $n = o(\mathrm{e}^n)$.
2. $0 = o(1/n)$.
3. $1/n = O((-1)^n/n)$.
4. $\sin n = O(1)$ et $1/n = o(1)$.
5. $v_n = \dfrac{n^4+n^2}{n+1}$ et $u_n = \dfrac{n^2+n}{n+2}$. On calcule u_n/v_n, ça tend vers 0.

Exemple 1.1.5.
Les croissances comparées vues lors du chapitre sur les suites peuvent se réécrire grâce au symbole o :

1. pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si $\alpha < \beta$ alors $n^\alpha = o(n^\beta)$.
2. pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln^\beta(n) = o(n^\alpha)$ et $n^\alpha = o(\mathrm{e}^{\gamma n})$.

En accord avec l'hypothèse essentielle de la définition 1.1.1, écrire $u_n = o(0)$ ou $u_n = O(0)$ n'a aucun sens.

Remarque 1.1.6.
Une utilisation fondamentale des relations de comparaison repose sur l'écriture suivante : $u_n = v_n + o(w_n)$, qui signifie $u_n - v_n = o(w_n)$. L'égalité $u_n = v_n + o(w_n)$ exprime que v_n est une approximation de u_n, et que l'erreur de cette approximation est une quantité négligeable devant w_n. Cette égalité est intéressante si u_n est une suite « compliquée », que v_n est une suite « plus simple », et que w_n est elle-même « petite devant u_n et v_n ». Approcher une suite par une autre qui a un comportement plus difficile à étudier n'a en effet aucun intérêt, même si cela peut être tout à fait correct. De même que dire qu'un objet mesure environ 10 cm, au mètre près.

Exemple 1.1.7.
$\mathrm{e}^{1/n} = 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n^2} + o(1/n^2)$. Si on veut être plus précis, on écrit $\mathrm{e}^{1/n} = 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{6n^3} + o(1/n^3)$, et on a bien $\dfrac{1}{6n^3} + o(1/n^3) = o(1/n^2)$. Attention,

écrire $e^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + o(1/n^2)$ est juste mais n'apporte rien de plus que $e^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o(1/n^2)$. Pire : $e^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{40000}{n^3} + o(1/n^2)$ est juste aussi !

Définition 1.1.8.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites. Là encore la définition donnée n'est valable que dans le cas particulier où (v_n) **ne s'annule pas**.
On dit que (u_n) est *équivalente* à (v_n), ce qui se note $u_n \sim v_n$, si $u_n/v_n \to 1$.

Là encore, $u_n \sim 0$ n'a aucun sens.

Remarque 1.1.9.
On traduira souvent la relation $u_n \sim v_n$ par : il existe une suite (ε_n) telle que
— $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$;
— $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \varepsilon_n v_n$.

Proposition 1.1.10.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $u_n \sim v_n$
(ii) $u_n - v_n = o(v_n)$
(iii) $u_n = v_n + o(v_n)$
(iv) $v_n = u_n + o(u_n)$

Démonstration.
(i) implique (ii) : $u_n/v_n \to 1$ et $v_n/v_n \to 1$, donc $(u_n - v_n)/v_n \to 0$.
(ii) implique (i) : même raisonnement.
(iii) et (iv) ne sont que des reformulations des points précédents. □

Exemple 1.1.11.
- $1/n \sim 1/n + 1/n^2$.
- $n \not\sim e^n$.
- On traduit la limite usuelle

$$\frac{e^{1/n} - 1}{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

par

$$\left[e^{1/n} - 1\right] \sim \frac{1}{n}$$

ou, mieux, par

$$e^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1.2. Opérations.

a. o et O.

Théorème 1.2.1.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, φ une extractrice.

(i) Multiplication par un réel <u>non nul</u> : si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = o(\lambda v_n)$ et $\lambda u_n = o(v_n)$.
(ii) Somme : si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(v_n)$ alors $u_n + w_n = o(v_n)$.
Ce sont des petits o de la même suite.
(iii) Transitivité : si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
(iv) Produit 1 : si $u_n = o(v_n)$, alors $w_n u_n = o(w_n v_n)$.
(v) Produit 2 : si $u_n = o(v_n)$ et $u'_n = o(v'_n)$ alors $u_n u'_n = o(v_n v'_n)$.
(vi) Suites extraites : si $u_n = o(v_n)$ alors $u_{\varphi(n)} = o(v_{\varphi(n)})$.
(vii) Tout reste vrai en remplaçant les o par des grands O.

Démonstration.
Simple : revenir à la définition. □

Deux opérations sur les o sont formellement <u>INTERDITES</u> :
- Sommer deux égalités en o si les suites dans les o ne sont pas les mêmes. Ex : $1/n = o(1)$ et $1/n = o(-1)$, mais $2/n \neq o(0)$.
- Composer une égalité en o par une fonction : $u_n = o(v_n) \not\Rightarrow f(u_n) = o(f(v_n))$. Ex : $f(x) = 1/x$, $1/n = o(1)$ mais $n \neq o(1)$. De même, $1/n^2 = o(1/n)$ mais $e^{1/n^2} \neq o(e^{1/n})$.

b. Équivalents.

Théorème 1.2.2.
Soit φ une extractrice.

(i) La relation $\sim$ est une relation d'équivalence (a : réflexive, b : symétrique, c : transitive).

(ii) Dans un petit o, on peut remplacer la suite par toute suite équivalente : si $u_n = o(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$, alors $u_n = o(w_n)$.

(iii) Deux suites équivalentes ont le même signe à partir d'un certain rang.

(iv) Produit : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $u'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v'_n$ alors $u_n u'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n v'_n$.

(v) Passage à l'inverse : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $1/u_n \sim 1/v_n$.

(vi) Puissances : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, $u_n^a \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^a$.

(vii) Suites extraites : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} v_{\varphi(n)}$.

Démonstration.
Simple : revenir aux définitions. □

Trois opérations sur les équivalents sont <u>INTERDITES</u> :

• Sommer des équivalents. Ex : $n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, $-n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -n$ mais $-1 \not\sim 0$.

• Composer par une fonction. Ex : $n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2+n$ mais $\mathrm{e}^{n^2} \not\sim \mathrm{e}^{n+n^2}$.

• Élever un équivalent à une puissance dépendant de n : $1+\dfrac{1}{n} \sim 1$ mais $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \sim \mathrm{e}$. Remarquons que c'est un cas particulier de composition.

Théorème 1.2.3.
Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

(i) $u_n \to \ell \in \mathbb{R}^*$ si et seulement si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$.

(ii) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors (u_n) a une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ ssi (v_n) en a une aussi. Dans le cas d'existence de la limite, ces deux limites sont égales. La réciproque est fausse, sauf si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}^*$.

Démonstration.
Simple : revenir aux définitions. □

La réciproque de (ii) est fausse. Ex : $n \to +\infty$, $n^2 \to +\infty$, $1/n \to 0$, $1/n^2 \to 0$. Pire : $u_n \not\sim u_{n+1}$ si $u_n = (1/2)^n$.

Il est tentant d'utiliser les symboles $\sim$ et o à tort et à travers, ce qui mène souvent à de graves erreurs.
• Il est interdit de les utiliser simultanément.
• On s'interdira le plus souvent d'écrire une équivalence à une somme, on préfèrera dans ce cas l'écriture en o.

1.3. Exemples classiques (formulaire).

• Les exemples donnés dans le formulaire sont à connaître par cœur.
• Ne pas oublier l'hypothèse $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
• Les formules en $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ ne sont pas des doublons de celles en o. Il est faux d'écrire $(1+u_n)^a \underset{n\to+\infty}{\sim} 1+au_n+o(u_n)$ et idiot d'écrire $(1+u_n)^a \underset{n\to+\infty}{\sim} 1+au_n$ (pourquoi ?).

Démonstration.
Démontrons les formules du formulaire.
La technique générale est la suivante : on part d'une fonction f définie et dérivable au voisinage de 0, et on utilise $f'(0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t)-f(0)}{t}$, ce qui, en composant avec u_n donne $\dfrac{f(u_n)-f(0)}{u_n} = f'(0)+o(1)$, et finalement, $f(u_n) = f(0)+f'(0)u_n+o(u_n)$.
Pour cos et ch, une autre méthode est nécessaire : pour cos on utilise $\cos(2x) = 1-2\sin^2(x)$, et on l'applique à $x = \dfrac{u_n}{2}$.
Idem avec ch avec $\mathrm{ch}(2x) = 1+2\,\mathrm{sh}^2(x)$. □

Exemple 1.3.1.
Voici des exemples d'utilisation des relations d'équivalence :
• Donner un équivalent de $\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n - 1$.
• Calculer la limite de la suite $u_n = \left(2 - \cos\frac{1}{n}\right)^n$.
• Calculer la limite de $u_n = \mathrm{e}^{-n} \operatorname{ch} \sqrt[4]{n^4+1}$.

1.4. Formule de Stirling.

Voici un équivalent célèbre, qui sera démontré en DM.

Proposition 1.4.1 (Formule de Stirling)**.**

$$n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

Corollaire 1.4.2.
On a le développement asymptotique

$$\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + o(1).$$

Démonstration.
Il suffit de voir par la formule de Stirling que

$$\ln\left(\frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln\sqrt{2\pi},$$

ce qui s'écrit exactement

$$\ln(n!) - n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}\ln(2\pi) + o(1).$$

□

2. Comparaison de fonctions.

Nous allons maintenant adapter les outils de la section précédente aux fonctions.

Dans toute cette section, I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$, $f, g, h, k : I \to \mathbb{R}$ sont quatre applications, et $a \in \bar{I}$.

2.1. Définitions.

a. o et O.

Définition 2.1.1.
Nous supposons que la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf éventuellement en a.

(i) On dit que f est *dominée par g au voisinage de a*, ce qui se note $f =_a O(g)$ ou $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$, et se lit « f est un grand O de g au voisinage de a », si f/g est bornée au voisinage de a.
Cette définition se généralise au cas où f et g ne sont pas définies en a : il suffit de remplacer tous les I par des $I\backslash\{a\}$.

(ii) On dit que f est *négligeable devant g au voisinage de a*, ce qui se note $f =_a o(g)$ ou $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, et se lit « f est un petit o de g au voisinage de a », si $\lim_a f/g = 0$.
Cette définition se généralise au cas où f et g ne sont pas définies en a : il suffit de remplacer tous les I par des $I\backslash\{a\}$.

Remarque 2.1.2.
Ces définitions sont les mêmes que pour les suites, à ceci près que pour des fonctions il faut spécifier un point au voisinage duquel ces relations sont valables. Pour les suites, il s'agissait toujours de $+\infty$.

Remarque 2.1.3.
Comme pour les suites, on traduira souvent $f \underset{x\to a}{=} o(g)$ par : il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ vérifiant
— $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$;
— $\forall x \in I,\ f(x) = \varepsilon(x)g(x)$.

Remarque 2.1.4.
• Comme pour les suites, $f =_a o(0)$ ou $f =_a O(0)$ n'ont pas de sens.
• Comme pour les suites, petit o implique O.
• $f =_a O(1)$ signifie que f est bornée au voisinage de a, et $f =_a o(1)$ signifie que $f \underset{a}{\to} 0$.

Exemple 2.1.5.
Fondamental : les croissances comparées s'ex-

priment ainsi.

En $+\infty$:

1. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < \beta$.
   Alors $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta)$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$.
   Alors $a^x \underset{x\to+\infty}{=} o(b^x)$.
3. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha > 0$.
   Alors $(\ln x)^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\alpha)$.
4. Soient $a, \alpha \in \mathbb{R}$ avec $a > 1$.
   Alors $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(a^x)$.

En 0 :

1. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < \beta$.
   Alors $x^\beta \underset{x\to 0}{=} o(x^\alpha)$.
2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha > 0$.
   Alors $|\ln x|^\beta \underset{x\to 0}{=} o(x^{-\alpha})$.
3. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha > 0$.
   Alors $x^\alpha \underset{x\to 0}{=} o\left(|\ln x|^\beta\right)$.

Exemple 2.1.6. 1. $x^2 \underset{x\to+\infty}{=} o(x^4)$, et $x^4 \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$.
2. $1/x^4 \underset{x\to+\infty}{=} o(1/x^2)$, et $1/x^2 \underset{x\to 0}{=} o(1/x^4)$.

b. Équivalents.

Définition 2.1.7.
Nous supposons que la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf éventuellement en a.
On dit que f est *équivalente à g au voisinage de a* , ce qui se note $f \sim_a g$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, et se lit « f est équivalente à g au voisinage de a », si $f/g \underset{a}{\to} 1$.
Cette définition se généralise au cas où f et g ne sont pas définies en a : il suffit de remplacer tous les I par des $I\backslash\{a\}$.

$f \sim_a 0$ n'a pas de sens.

Remarque 2.1.8.
Comme pour les suites, on traduira souvent $f \underset{x\to a}{\sim} (g)$ par : il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ vérifiant

— $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$;
— $\forall x \in I,\ f(x) = \varepsilon(x)g(x)$.

Remarque 2.1.9.
Comme pour les suites, $\sim$ implique O.

Théorème 2.1.10.
$f \sim_a g$ si et seulement si $f - g =_a o(g)$ si et seulement si $f - g =_a o(f)$.

Les propositions « $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ » et « $(f(x) - g(x)) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ » ne sont en aucun cas équivalentes : aucune n'implique l'autre ! Avec le théorème précédent, on voit en effet que $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$ signifie $f - g \underset{x\to a}{=} o(g)$ tandis que $(f(x) - g(x)) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ signifie $f - g \underset{x\to a}{=} o(1)$.
Par exemple, $x + 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, mais $(x+1) - x \underset{x\to+\infty}{\not\to} 0$.

Exemple 2.1.11. 1. $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$.

2. $x \underset{x\to+\infty}{\not\sim} \mathrm{e}^x$.

Théorème 2.1.12. (i) Si $f \sim_a g$, alors soit f et g ont toutes les deux une même limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ en a, soit aucune des deux n'a de limite en a.
(ii) $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R}^*$ si et seulement si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell$.

2.2. Opérations.

a. o et O.

Théorème 2.2.1.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

(i) Multiplication par un réel non nul : si $f =_a o(g)$, alors $f =_a o(\lambda g)$ et $\lambda f =_a o(g)$.

(ii) Somme : si $f =_a o(g)$ et $h =_a o(g)$, alors $f + h =_a o(g)$.

Ce sont des o de la même fonction.

(iii) Transitivité : si $f =_a o(g)$ et $g =_a o(h)$, alors $f =_a o(h)$.

(iv) Produit 1 : si $f =_a o(g)$, alors $fh =_a o(gh)$.

(v) Produit 2 : si $f =_a o(g)$ et $h =_a o(k)$, alors $fh =_a o(gk)$.

(vi) Composition **à droite** : si $b \in \bar{\mathbb{R}}$, et si φ est une fonction définie au voisinage de b à valeurs dans I et telle que $\varphi \underset{b}{\to} a$, alors si $f =_a o(g)$, on a aussi $f \circ \varphi =_b o(g \circ \varphi)$.

(vii) Tout ceci reste vrai en remplaçant les o par des grands O.

Démonstration.
Simple : revenir aux définitions. □

Deux opérations sont formellement INTERDITES :

1. Les sommes des deux côtés : $f =_a o(g)$ et $h =_a o(k) \not\Rightarrow f + h =_a o(g + k)$.
2. La composition à gauche : si ψ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ $f =_a o(g) \not\Rightarrow \psi \circ f =_{\psi(a)} o(\psi \circ g)$. Par exemple $x^2 \underset{x\to 0}{=} o(x)$, mais $e^{x^2} \underset{x\to 0}{\neq} o(e^x)$.

Remarque 2.2.2.
Le point (vi) permet de faire des translations : par exemple, $x^4 \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$ donc $(x-1)^4 \underset{x\to 1}{=} o((x-1)^2)$.
Il permet aussi de passer d'une relation au voisinage de 0 à une relation au voisinage de $\pm\infty$, et vice-versa. Par exemple, $x^5 \underset{x\to 0}{=} o(x)$ implique $\dfrac{1}{x^5} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Remarque 2.2.3.
Comme avec les suites, écrire $f = g + o(h)$ signifie que $f - g = o(h)$. Cela permet de faire des développements, comme avec les suites.

b. Équivalents.

Théorème 2.2.4.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) La relation $\sim$ est une relation d'équivalence (a : réflexive, b : symétrique, c : transitive).

(ii) Dans un petit o, on peut remplacer la fonction par toute fonction équivalente : si $f =_a o(g)$ et $g \sim_a h$, alors $f =_a o(h)$.

(iii) Deux fonctions équivalentes au voisinage de a ont le même signe sur un voisinage de a.

(iv) Produit : si $f \sim_a g$ et $h \sim_a k$, alors $fh \sim_a gk$.

(v) Inverse : si $f \sim_a g$, alors $\dfrac{1}{f} \sim_a \dfrac{1}{g}$.

(vi) Puissances : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, si $f \sim_a g$ et si $f > 0$ au voisinage de a, alors $f^\alpha \sim_a g^\alpha$.

(vii) Composition **à droite** : si $b \in \bar{\mathbb{R}}$, et si φ est une fonction définie au voisinage de b à valeurs dans I et telle que $\varphi \underset{b}{\to} a$, alors si $f \sim_a g$, on a aussi $f \circ \varphi \sim_b g \circ \varphi$.

Démonstration.
Simple : revenir aux définitions. □

Trois opérations sont formellement INTERDITES :

1. Les sommes d'équivalents : $f \sim_a g$ et $h \sim_a k$ $\not\Rightarrow f + h \sim_a g + k$.
2. La composition à gauche : si ψ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ $f =\sim_a g \not\Rightarrow \psi \circ f \sim \psi(a) \psi \circ g$. Par exemple $x \underset{x\to+\infty}{\sim} x + 1$, mais $e^x \underset{x\to+\infty}{\not\sim} e^{x+1}$.
3. Élever un équivalent à une puissance dépendant de x (cas particulier de la composition à gauche) : $1 + x \underset{x\to 0}{\sim} 1$ mais $(1+x)^{1/x} \underset{x\to 0}{\sim} e$

Exemple 2.2.5.
Donner la limite en 0 de $x \mapsto \dfrac{\ln(1 + \tan(2x))}{\sin(4x)}$.

3. Développements limités.

Nous allons maintenant utiliser les relations de comparaison dans un cas particulier : celui du développement limité, qui est une approximation d'une fonction en un point par un polynôme.

Dans tout ce chapitre, n est un entier naturel, I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, f est une fonction de I dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point de I.

3.1. Définition et premières propriétés.

Définition 3.1.1.
On dit que f admet un ***développement limité d'ordre*** n ***au voisinage d'un point*** $x_0 \in I$ s'il existe des réels $a_0 \dots a_n$ tels que

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n).$$

On dit que le polynôme

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$$

est la ***partie principale*** ou ***régulière*** du DL, et que le terme $o((x-x_0)^n)$ est son ***reste***.
L'écriture

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} (x-x_0)^p\Big(a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)\Big)$$

avec $a_0 \neq 0$ est appelée *forme normalisée* du DL, c'est aussi

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} a_0(x-x_0)^p + a_1(x-x_0)^{p+1} + a_2(x-x_0)^{p+2} + \dots + a_n(x-x_0)^{p+n} + o((x-x_0)^{p+n}).$$

L'entier p est alors la *valuation* du DL : c'est le degré du premier terme non nul du DL.

Remarque 3.1.2.
Dans la suite on utilisera la notation « f admet un $\mathrm{DL}(x_0, n)$ » (ou $\mathrm{DL}_n(x_0)$) pour dire que f admet un DL d'ordre n en x_0.

Cette notation n'a **rien** d'officiel et ne devra **en aucun cas** être utilisée ailleurs qu'en cours et en TD.

Exemple 3.1.3.
La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ admet un $\mathrm{DL}(0, n)$ pour tout n, et l'on en connaît explicitement le reste, à savoir : $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+x^3+\dots+x^n+\dfrac{x^{n+1}}{1-x}$, et en 0 on a bien $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$.

Remarque 3.1.4.
f admet un $\mathrm{DL}(x_0, n)$ si et seulement si $h \mapsto f(x_0+h)$ admet un $\mathrm{DL}(0, n)$. Autrement dit, en posant $h = x - x_0$, on peut toujours se ramener à un DL en zéro.

Remarque 3.1.5.
Si f admet un DL d'ordre n en x_0, et si $m \in \mathbb{N}$ est inférieur à n, alors f admet un DL d'ordre m en x_0. En effet, il suffit de ne garder que les termes de degré inférieur à m : on réalise ainsi une *troncature* du DL. En particulier, le premier terme non nul d'un DL fournit un équivalent de f.
Par exemple, si
$f(x) \underset{x\to x_0}{=} 2(x-x_0)^2 - (x-x_0)^3 + o((x-x_0)^3)$,
alors $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} 2(x-x_0)^2$.

Théorème 3.1.6 (unicité du DL)**.**
La partie principale d'un $\mathrm{DL}(x_0, n)$ de f est unique, c'est-à-dire : si $a_0 \dots a_n$ et $b_0 \dots b_n$ sont tels que

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$
$$\text{et } f(x) \underset{x\to x_0}{=} b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \dots + b_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

alors $\forall i \in \{0,\dots,n\}\,,\ a_i = b_i$.

Démonstration.
En effet, en faisant la différence des deux développements, on a

$$(a_0-b_0)+(a_1-b_1)(x-x_0)+\dots+(a_n-b_n)(x-x_0)^n$$
$$=o((x-x_0)^n).$$

Si on considère le plus petit entier $k \in \{0,\dots,n\}$ tel que $a_k \neq b_k$ alors, en divisant par $(x-x_0)^k$, on a

$$(a_k-b_k)+\sum_{i=k+1}^{n}(a_i-b_i)(x-x_0)^{i-k}=o(x-x_0)^{n-k}.$$

Par passage à la limite en x_0, $a_k=b_k$. □

Corollaire 3.1.7.
Si f est paire (resp. impaire) et admet un $\mathrm{DL}(0,n)$, alors la partie principale de ce DL est un polynôme pair (resp. impair).

Démonstration.
Traitons le cas où f est paire, le cas où f est impaire se traitant de la même manière. On a $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+o(x^n)$.
En écrivant que $f(x)=f(-x)$, on obtient que $a_0-a_1x+a_2x^2-a_3x^3+\dots+(-1)^na_nx^n+o(x^n)$ est aussi un $\mathrm{DL}(0,n)$ de f. Par unicité de ce DL, on peut identifier tous les coefficients, ce qui assure que les coefficients des termes de degré impair sont nuls. □

Théorème 3.1.8.
(i) f est continue en x_0 ssi f admet un $\mathrm{DL}(x_0,0)$. En effet, on a alors $f(x) \underset{x\to x_0}{=} f(x_0)+o(1)$. Le coefficient constant d'un $\mathrm{DL}(x_0,n)$ de f donne toujours la valeur de f en x_0.

(ii) f est dérivable en x_0 ssi f admet un $\mathrm{DL}(x_0,1)$. En effet, si

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$$

alors le coefficient du terme de degré 1 d'un $\mathrm{DL}(x_0,n)$ de f donne toujours la valeur de f' en x_0.

⚠ **Attention !** Les termes de degrés supérieurs ne donnent pas les dérivées suivantes de f. Et même pire : une fonction peut admettre un $\mathrm{DL}(x_0,2)$ et ne pas être deux fois dérivable en x_0.

Exemple 3.1.9.

$$x \mapsto x^3\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$$

Exemple 3.1.10.

$$x \mapsto \begin{cases} x^3\sin\frac{1}{x^3} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Exemple 3.1.11.
Notons $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\sin\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}\end{array}$.

• Montrons que f admet un $\mathrm{DL}(0,n)$ pour tout n : on a $\left|\dfrac{f(x)}{x^n}\right| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = \left(\dfrac{2}{nx^2}\mathrm{e}^{-\frac{2}{nx^2}}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\dfrac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$.
Or $u\mathrm{e}^{-u} \xrightarrow[u\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{f(x)}{x^n} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, ce qui montre bien que $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$. f admet donc bien un DL en 0 à tout ordre, de partie principale nulle.
• Ceci implique donc que $f(0)=0$ et $f'(0)=0$. f est donc dérivable en 0, mais montrons que f' n'est pas continue en 0. Ainsi f n'est pas deux fois dérivable en 0. On calcule pour $x\neq 0$:

$$f'(x)=\frac{2f(x)}{x^3}-\frac{2}{x^3}\cos\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\right)$$

D'après ce qui précède, $\dfrac{2f(x)}{x^3} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Montrons que

$$\frac{2}{x^3}\cos\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\right)$$

n'a pas 0 pour limite en 0 : ainsi on aura bien $f'(x) \underset{x\to 0}{\not\to} f'(0)$. Si l'on pose $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{\ln(2n\pi)}}$, on a : $\dfrac{2}{u_n^3}\cos\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{u_n^2}}\right)=\dfrac{2}{u_n^3}=\Big(\ln(2n\pi)\Big)^{\frac{3}{2}}$, qui a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. On conclut avec l'argument de composition de limites.

3.2. Opérations sur les DL.

Nous allons maintenant voir comment effectuer des opérations sur les DL. Le point délicat n'est pas tant d'effectuer les calculs, mais d'anticiper le degré du DL obtenu, connaissant les degrés des DL initiaux intervenant dans les calculs.
Au cours des calculs, plusieurs restes vont apparaître, mais à chaque étape, les restes les plus petits, ou les plus précis, s'effacent devant le reste dominant. C'est le degré de ce reste dominant qu'il faut savoir déterminer a fortiori.

a. Somme.

Proposition 3.2.1.
Si f et g admettent un DL en x_0, respectivement d'ordre n et m, alors $f+g$ admet un DL en x_0, d'ordre $\min(n,m)$, obtenu en faisant la somme des DL de f et g.

Démonstration.
Les parties principales des deux DL donnent un polynôme. À ce polynôme s'ajoutent deux restes : l'un d'ordre n et l'autre d'ordre m. C'est le plus petit exposant, *i.e.* $\min(n,m)$ qui désigne le reste dominant. ☐

L'ordre du DL d'une somme est le min des ordres des deux DL. En additionnant un DL d'ordre 3 à un DL d'ordre 2, on n'a aucune chance de récupérer un DL d'ordre 3 !

Exemple 3.2.2.
On a les DL suivants,

$$\begin{aligned}
\cos(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 \qquad - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\\
\exp(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \quad + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

donc on obtient de DL à l'ordre 2 :

$$\cos(x) + \exp(x) = 2 + x + o(x^2).$$

Remarque 3.2.3.
On prendra soin, en additionnant deux DL, d'aligner verticalement les termes de mêmes degrés.

b. Produit.

Étudions d'abord un cas particulier :

Proposition 3.2.4.
Soient f et g admettant chacune un DL en x_0, respectivement d'ordre n et m. Supposons que les termes constants de ces deux DL sont non nuls. Alors fg admet un DL en x_0, d'ordre exactement $\min(n,m)$, obtenu en faisant le produit des DL de f et g, dont on ne garde que les termes de degré inférieur à $\min(n,m)$.

Démonstration.
Lorsque l'on développe le produit de ces deux DL, il apparaît plusieurs restes. Parmi ces restes il y a le terme constant du DL de f fois le reste du DL de g, et le terme constant du DL de g fois le reste du DL de f. L'un de ces deux restes est forcément le terme dominant du DL du produit. ☐

Exemple 3.2.5.
Avec

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0}{=} 2 - \quad x + 3x^2 + o(x^2)\\
g(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 + 2x - 3x^2 + \quad x^3 \quad + o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + 2x - 3x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &\underset{x\to 0}{=} 2 + 4x - 6x^2 + o(x^2)\\
&\qquad - \quad x - 2x^2 + o(x^2)\\
&\qquad\qquad + 3x^2 + o(x^2)\\
&\underset{x\to 0}{=} 2 + 3x - 5x^2 + o(x^2).
\end{aligned}$$

Traitons maintenant le cas général :

Proposition 3.2.6.
Soient f et g admettant chacune un DL en x_0, respectivement d'ordre n et m, et de valuation p et q. Alors fg admet un DL en x_0, d'ordre exactement $\min(n-p, m-q)+p+q$ ($> \min(n,m)$ si p et q sont non nuls).

Démonstration.
Écrivons les formes normalisées des deux DL :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} (x-x_0)^p \Big(a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_{n-p}(x-x_0)^{n-p} + o((x-x_0)^{n-p}) \Big)$$

et

$$g(x) \underset{x\to x_0}{=} (x-x_0)^q \Big(b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \dots + b_{m-q}(x-x_0)^{m-q} + o((x-x_0)^{m-q}) \Big)$$

Le produit de ces deux DL est donc

$$(x-x_0)^{p+q}\Big((a_0 + \dots + o((x-x_0)^{n-p}) (b_0 + \dots + o((x-x_0)^{m-q}) \Big)$$

Le DL entre les grandes parenthèses est le produit de deux DL dont les termes constants sont non nuls. Son degré est donc $\min(n-p, m-q)$ d'après 3.2.4. □

Exemple 3.2.7.
Avec $f(x) \underset{x\to 0}{=} x - 2x^2 + o(x^2)$ et $g(x) \underset{x\to 0}{=} x + x^2 + o(x^2)$, on a

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &\underset{x\to 0}{=} x^2(1-2x+o(x))(1+x+o(x)) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^2(1-x+o(x)) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^2 - x^3 + o(x^3), \end{aligned}$$

qui est bien un DL d'ordre 3.

c. Composition.

Proposition 3.2.8.
Soit f admettant un $\mathrm{DL}(0,n)$, de partie principale F, dont le terme constant est nul, c'est-à-dire vérifiant $f(0)=0$, et soit g admettant un $\mathrm{DL}(0,n)$, de partie principale G. Alors $g\circ f$ admet un $\mathrm{DL}(0,n)$ dont la partie principale est $G\circ F$ dont on a retiré les termes de degré supérieur à n.

Démonstration.
On a $f(x) \underset{x\to 0}{=} F(x) + o(x^n)$ et $g(x) \underset{x\to 0}{=} G(x) + o(x^n)$.

Comme f est continue en 0 et comme $f(0)=0$, on a $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, donc

$$g(f(x)) \underset{x\to 0}{=} G(f(x)) + o(f^n(x)).$$

Comme f admet un développement limité à l'ordre 1 de la forme $f(x) \underset{x\to 0}{=} ax + o(x)$, on peut écrire $f(x) \underset{x\to 0}{=} O(x)$, donc $f^n(x) \underset{x\to 0}{=} O(x^n)$, donc

$$g(f(x)) \underset{x\to 0}{=} G(f(x)) + o(x^n).$$

Un calcul simple (par exemple avec le binôme de Newton, ou une récurrence sur k en utilisant la propriété de produit de deux DL) assure que, si $k \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} f^k(x) &\underset{x\to 0}{=} (F(x) + o(x^n))^k \\ &\underset{x\to 0}{=} F^k(x) + o(x^n). \end{aligned}$$

En écrivant sous forme développée-réduite $G = b_0 + b_1 X + \dots + b_n X^n$, on a donc

$$\begin{aligned} g(f(x)) &\underset{x\to 0}{=} b_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k f^k(x) + o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} b_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k F^k(x) + o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} G(F(x)) + o(x^n). \end{aligned}$$

□

Remarque 3.2.9.
Ce résultat s'étend tout à fait au cas où f admet un $\mathrm{DL}(x_0,n)$ avec $f(x_0) = a_0$, et où g admet un $\mathrm{DL}(a_0,n)$: il suffit alors de composer les DL en ne gardant que les termes de degré inférieur à n.

Exemple 3.2.10.
Trouver un $\mathrm{DL}(0,4)$ de $\mathrm{e}^{\cos x}$: on a

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^4) = 1 + X.$$

D'où

$$\mathrm{e}^{\cos x} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^{1+X} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}\,.\mathrm{e}^{X} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}\,(1+X+X^2/2+o(X^2)).$$

Il suffit en effet de s'arrêter au terme de degré 2 dans le DL de l'exponentielle, car $X \sim \dfrac{-1}{2}x^2$, donc les termes négligeables devant X^2 (le $o(X^2)$) seront négligeables devant x^4. On calcule alors, avec

$$X \underset{x\to 0}{=} \frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4),$$

et on obtient

$$\mathrm{e}^{\cos x} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}\,(1 - x^2/2 + x^4/6) + o(x^4).$$

d. Quotient.

Traitons un premier cas :

Proposition 3.2.11.
Si g admet un DL(x_0, n) de valuation $p = 0$ (ainsi le terme constant de g n'est pas nul), alors $1/g$ admet aussi un DL(x_0, n).

Démonstration.
On écrit $g(x) \underset{x\to x_0}{=} b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \ldots + b_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \underset{x\to x_0}{=} b_0(1 - u)$ avec $u = -\dfrac{b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \ldots + b_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)}{b_0}$.
Il suffit de composer ce DL avec celui de $\dfrac{1}{1-u}$. ☐

Proposition 3.2.12.
Si f et g admettent un DL(x_0, n) et si le terme constant de g n'est pas nul, alors f/g admet aussi un DL(x_0, n).

Démonstration.
Il suffit de multiplier le DL(x_0, n) de f avec celui de $1/g$. ☐

Exemple 3.2.13.

$$\begin{aligned}
\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x}\\
&= \frac{x - x^3/6 + x^5/120 + o(x^5)}{1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^5)}\\
&= \Big(x - x^3/6 + x^5/120 + o(x^5)\Big)\\
&\quad \times \Big(1 + u(x) + u(x)^2 + o\Big(u(x)^3\Big)\Big)\\
&\quad \text{où } u(x) = x^2/2 - x^4/24 + o(x^5)
\end{aligned}$$

Il est inutile de calculer u^3 qui donnera des termes en x^6. En effet, $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$, donc $o\big(u(x)^3\big) \subset o(x^5)$. Donc

$$\begin{aligned}
\tan x &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\\
&\quad \times \left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^5)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right)\\
&\quad \times \left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)
\end{aligned}$$

Et le cas général :

Proposition 3.2.14.
Soit f admettant un DL en x_0 d'ordre n et de valuation p. Alors $1/f$ admet en x_0 un développement de la forme $\dfrac{P(x - x_0) + o((x - x_0)^{n-p})}{(x - x_0)^p}$, où P est un polynôme de terme constant non nul. Si $p > 0$, ce développement est dit *asymptotique*.

Démonstration.
Il suffit d'écrire le DL de f sous forme normalisée : $f(x) = (x - x_0)^p.(F(x - x_0) + o((x - x_0)^{n-p})$, où F est un polynôme de terme constant non nul. Alors $1/f = \dfrac{1}{(x - x_0)^p}.\dfrac{1}{F(x - x_0) + o((x - x_0)^{n-p})}$, et d'après 3.2.12, $\dfrac{1}{F(x - x_0) + o((x - x_0)^{n-p})}$ admet un DL à l'ordre $n - p$, d'où l'existence du polynôme P de l'énoncé. Mais comme le terme constant de P n'est pas nul, si $p > 0$, $\dfrac{P(x - x_0)}{(x - x_0)^p}$ n'est pas un polynôme mais une fraction rationnelle qui tend vers l'infini (en valeur absolue) en x_0, et le développement est dit asymptotique. ☐

Exemple 3.2.15.
Donner un développement de $\dfrac{1}{x^2 + 2x^3 - x^4 + o(x^5)}$ en 0.

3.3. Intégration et dérivation.

Proposition 3.3.1.
Si f est continue et dérivable au voisinage de x_0 et si f' admet un $\mathrm{DL}(x_0, n)$, alors f admet un $\mathrm{DL}(x_0, n+1)$ dont la partie principale est la primitive de la partie principale du DL de f' qui vaut $f(x_0)$ en x_0.

Démonstration.
Donnons la démonstration dans le cas $x_0 = 0$. On a

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$$

Posons

$$\begin{array}{llll} F: & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) - f(0) - a_0 x - \dfrac{a_1}{2}x^2 - \ldots - \dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1} \end{array}$$

Alors $F(0) = 0$ et

$$\forall x \in I \quad F'(x) = f'(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \ldots - a_n x^n$$

On a donc $F'(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$. En appliquant le TAF entre 0 et x on obtient : il existe $\theta_x \in]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned} F(x) - F(0) &= xF'(\theta_x x) \\ \text{d'où } F(x) &\underset{x\to 0}{=} xo(\theta_x^n x^n) \\ \text{donc } F(x) &\underset{x\to 0}{=} o(x^{n+1}) \end{aligned}$$

On a donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1})$$

□

Exemple 3.3.2.
Cette proposition permet de déterminer les DL de $\ln(1-x)$, $\ln(1+x)$ et $\operatorname{Arctan} x$, en primitivant les DL de $-1/(1-x)$, $1/(1+x)$ et $1/(1+x^2)$.

Proposition 3.3.3.
Si f admet un $\mathrm{DL}(x_0, n)$ **et si l'on sait que f' admet un $\mathrm{DL}(x_0, n-1)$** (par exemple parce que f est de classe $\mathscr{C}^n$), alors le DL de f' s'obtient en dérivant celui de f.

Exemple 3.3.4.
Le DL de $\sqrt{1+x}$ redonne celui de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Le DL de $\dfrac{1}{1+x}$ donne celui de $\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

3.4. Formule de Taylor-Young.

Théorème 3.4.1 (Formule de Taylor-Young)**.**
Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors f possède un $\mathrm{DL}(x_0, n)$ donné par la formule de Taylor-Young :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n),$$

soit

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x\to x_0}{=}\ & f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 \\ & + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n). \end{aligned}$$

Démonstration.
Démontrons le résultat par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ l'assertion «$\forall f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})\ f(x) \underset{x\to x_0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$».

$P(0)$ est vrai d'après les résultats sur les fonctions continues.

Montrons $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$. Montrons $P(n+1)$. Soit f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Alors f' est de classe $\mathscr{C}^n$, et on puisqu'on a $P(n)$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &\underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \\ &\underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \end{aligned}$$

D'après la proposition 3.3.3, on a donc :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to x_0}{=} f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)k!}(x-x_0)^{k+1} \\ &\qquad + o((x-x_0)^{n+1}) \\ &\underset{x\to x_0}{=} f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1} \\ &\qquad + o((x-x_0)^{n+1}) \\ &\underset{x\to x_0}{=} f(x_0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{k} \\ &\qquad + o((x-x_0)^{n+1}) \\ &\underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{k} \\ &\qquad + o((x-x_0)^{n+1}). \end{aligned}$$

□

Exemple 3.4.2.
La formule de Taylor-Young permet d'obtenir les DL des fonctions exp, sin, cos, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, sh et ch.

Ils sont à savoir par cœur : vous les trouverez dans le formulaire déjà distribué.

3.5. Étude locale d'une fonction.

a. Allure d'une courbe au voisinage d'un point.

Proposition 3.5.1.
Si f admet en x_0 un DL de la forme $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_k(x-x_0)^k + o\Big((x-x_0)^k\Big)$, où $k \geqslant 2$ et a_k est *non nul*, alors f est dérivable en x_0, de dérivée a_1.

La tangente à sa courbe en $(x_0, f(x_0))$ a pour équation $y = a_1(x-x_0) + a_0$ et la position de sa courbe par rapport à cette tangente est donnée par le signe du terme $a_k(x-x_0)^k$.

Les quatres positions possibles au voisinage de x_0 sont illustrées dans les figures 1, 2, 3 et 4.

En particulier, la courbe traverse la tangente (on dit qu'on a un point d'inflexion) si et seulement si k est impair.

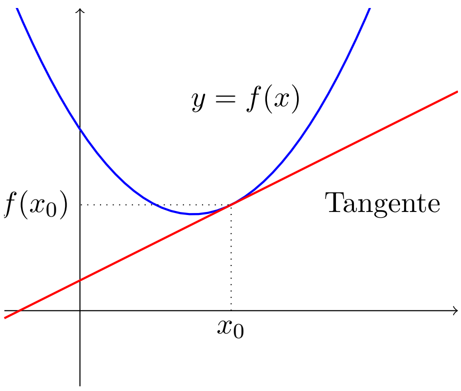

FIGURE 1 – Cas k pair, $a_k > 0$

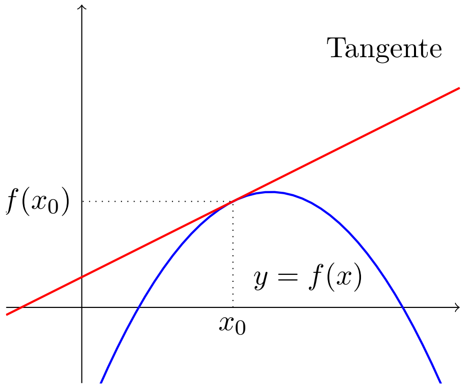

FIGURE 2 – Cas k pair, $a_k < 0$

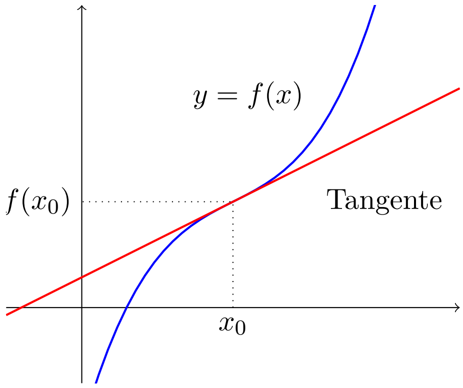

FIGURE 3 – Cas k impair, $a_k > 0$

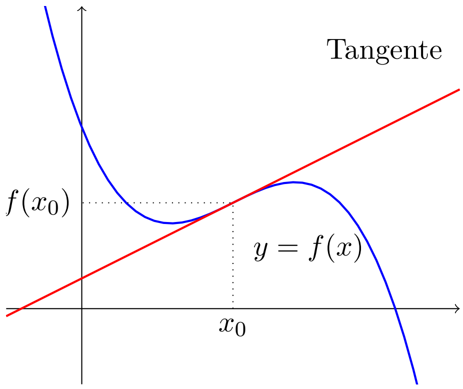

FIGURE 4 – Cas k impair, $a_k < 0$

Exemple 3.5.2.
Considérer les applications $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto$

x^4, sin, $x \mapsto x\cos x$ et $x \mapsto x(1+\sin^3 x)$ en 0

Corollaire 3.5.3.
Si f, de classe $\mathscr{C}^2$ admet un point d'inflexion en x_0, on a nécessairement $f''(x_0) = 0$.

Remarque 3.5.4.
On pourra regarder ce que donne cette condition sur les exemples précédents. En particulier, on verra clairement que la réciproque est fausse.

Nous savons déjà que si f a un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$, mais la réciproque est fausse. Allons plus loin, en utilisant la proposition 3.5.1 :

Corollaire 3.5.5.
Soit f telle que $f'(a) = 0$. Si $f''(a) \neq 0$, f a un extremum local en a.

Démonstration.
$f'(a) = 0$, donc la tangente de f en a est horizontale. De plus la première dérivée non nulle en a est d'ordre 2, donc le graphe de f, dans un certain voisinage de a, est en-dessous ou au -dessus de la tangente en a. Ceci s'écrit : (pour tout t dans ce voisinage, $f(t) \geqslant f(a)$) ou (pour tout t dans ce voisinage, $f(t) \leqslant f(a)$). Donc f a un extremum local en a. □

b. Prolongement de fonction.

On considère une fonction f non définie en a mais définie au voisinage épointée de a.

Proposition 3.5.6.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f admet un développement limité d'ordre n en a, alors elle est prolongeable par continuité en a en une fonction $\hat{f}$ et la valeur de $\hat{f}$ en a est le terme constant du développement limité de f. De plus, $\hat{f}$ admet en a le même développement limité que f.

Corollaire 3.5.7.
En particulier si f admet un DL d'ordre au moins 1 en a, alors $\hat{f}$ est dérivable en a.

Exercice 3.5.8.
Étudier la fonction f en 0 (continuité, dérivabilité, position) :

$$f(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$$

c. Développements asymptotiques.

Nous avons déjà vu dans la Proposition 3.2.14 de la Partie 3.2.11 un exemple de développement asymptotique.

Plus généralement, un développement asymptotique a ceci en commun avec un DL d'être une approximation d'une fonction, que l'on présente également comme une somme de fonctions, allant de la plus « grosse » à la plus « petite », et d'un reste, négligeable devant tous les autres termes de la somme. C'est ce que l'on appelle une *échelle de comparaison*. Ces fonctions sont de nature quelconque, alors qu'un DL ne contient que des termes polynomiaux (on travaille avec des échelles de comparaisons polynomiales).

Exemple 3.5.9.
Dans l'échelle de comparaison $\left\{x \mapsto x^k, k \in \mathbb{Z}\right\}$, ordonnée par l'ordre usuel au voisinage de $+\infty$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\frac{3x^2+2}{x-1} &\underset{x\to+\infty}{=} 3x + \frac{3x+2}{x-1} = 3x + o(x)\\ &\underset{x\to+\infty}{=} 3x+3+\frac{5}{x-1} = 3x+3+o(1)\\ &\underset{x\to+\infty}{=} 3x+3+\frac{5}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

Notamment,

$$\frac{5}{x-1} = \frac{5}{x}\times\frac{1}{1-\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{5}{x}(1+o(1)) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{5}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exemple 3.5.10.
Dans l'échelle de comparaison $\left\{x \mapsto x^\alpha \ln^\beta x,\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\}$ au voisinage de $+\infty$, ordonnée par l'ordre lexicographique sur

(α, β), on peut écrire en développant le carré :

$$\begin{aligned}
&\left(x+\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)^2 \\
&\underset{x\to+\infty}{=} x^2+o\left(x^2\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} x^2+2x\ln x+o(x\ln(x)) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} x^2+2x\ln x+2\frac{x}{\ln x}+o\left(\frac{x}{\ln x}\right).
\end{aligned}$$

d. Branche infinie d'une courbe d'équation $y = f(x)$.

Principe : écrire un développement asymptotique de f au voisinage de l'infini, en général en exprimant $f(x)$ en fonction de $1/x$:

Exercice 3.5.11.
Étudier les branches infinies de

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\backslash\{0,-1\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x^2-x+2}{x+1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \end{array}.$$

4. Théorèmes de comparaison pour les séries.

Proposition 4.0.1.
Soit (u_n) une suite à valeurs positives et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Alors la suite (S_n) est croissante et converge donc si et seulement si elle est majorée.

Démonstration.
Tout simplement, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$. □

Proposition 4.0.2.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

(i) Si $\left(\sum_{n=0}^{N} v_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge, alors $\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ également et

$$0 \leqslant \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n \leqslant \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} v_n.$$

(ii) Si $\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ diverge, alors $\left(\sum_{n=0}^{N} v_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ également.

Démonstration.
Il suffit de remarquer que si $(S_n) = \left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ et $(S'_n) = \left(\sum_{n=0}^{N} v_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant S_n \leqslant S'_n$.

(i) (S'_n) converge, donc est majorée, donc (S_n) est également majorée, et comme elle est croissante, elle converge également. Il reste alors à passer à la limite dans la relation $0 \leqslant S_n \leqslant S'_n$.

(ii) c'est le théorème de minoration.

□

Remarque 4.0.3.
La condition de positivité des suites est **PRIMORDIALE**. Considérer par exemple les suites constantes $u_n = -1$ et $v_n = 0$.

Remarque 4.0.4.
Si la comparaison n'est valide qu'à partir d'un certain rang, le résultat de convergence est toujours vrai, mais pas la comparaison des limites.

Exercice 4.0.5.
En considérant $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ et $v_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$, montrer que $\left(\sum_{n=0}^{N} \dfrac{1}{(n+1)^2}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge et majorer sa limite.

Corollaire 4.0.6.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles **positives**, (v_n) ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

(i) Si $u_n = O(v_n)$, alors la convergence de $\left(\sum_{n=0}^{N} v_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ entraîne celle de $\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$.

(ii) Si $u_n = o(v_n)$, alors la convergence de $\left(\sum_{n=0}^{N} v_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ entraîne celle de $\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$.

(iii) Si $u_n \sim v_n$ (donc (u_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang), alors $\left(\sum_{n=0}^{N} v_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ sont de même nature.

Démonstration. (i) $\dfrac{u_n}{v_n}$ est bornée par un certain réel $M > 0$, donc à partir d'un certain rang, $0 \leqslant u_n \leqslant Mv_n$ car (u_n) et (v_n) sont positives. On conclut donc avec 4.0.2.

(ii) si $u_n = o(v_n)$, alors en particulier $u_n = O(v_n)$.

(iii) si $u_n \sim v_n$, alors $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.

□

Exemple 4.0.7.
Puisque $\sin\left(\dfrac{1}{2^n}\right) \sim \dfrac{1}{2^n}$, d'après le résultat sur les séries géométriques, $\left(\sum_{n=0}^{N} \sin\left(\dfrac{1}{2^n}\right)\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge.

Théorème 4.0.8.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La suite $\left(\sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n^\alpha}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Pour pouvoir utiliser le dernier corollaire, nous avons besoin de « séries étalon » dont la nature est bien connue, et auxquelles on compare les séries à étudier. Les quelques exemples déjà étudiés font partie de ces séries de référence standard, mais la famille de séries la plus utilisée est celle des *séries de Riemann*, dont font partie la *série harmonique* et la série $\left(\sum_{n=0}^{N} \dfrac{1}{(n+1)^2}\right)_{N\in\mathbb{N}}$.

Démonstration.
Si $\alpha = 1$, remarquons que $\dfrac{1}{n} \sim \ln(n+1) - \ln n$. Donc $\left(\sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n^\alpha}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est de même nature que $\left(\sum_{n=1}^{N} (\ln(n+1) - \ln n)\right)_{N\in\mathbb{N}}$, qui elle-même est de même nature que la suite $(\ln n)$ par sommation télescopique, d'où la divergence.

Si $\alpha \neq 1$, $\dfrac{1}{n^\alpha} \sim \dfrac{1}{\alpha - 1}\left(\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right)$ (effectuer un développement asymptotique de $\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$ ou appliquer l'inégalité des accroissements finis à $x \mapsto x^{1-\alpha}$). La série de terme général $\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$ est de même nature que la suite $\left(\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$, d'où le résultat.

□