Devoir surveillé n°7
Version n°1
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Soit $f : x \mapsto (\cos x)^{\frac{1}{x}}$, définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$.
Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et étudier la dérivabilité du prolongement de f.

II. Résolution d'une équation différentielle.

On cherche dans ce problème à résoudre l'équation différentielle linéaire réelle

$$y''' + y'' + y' + y = 0. \qquad (\mathscr{E})$$

On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$:

$$\mathscr{S} = \{\, y \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid\ y''' + y'' + y' + y = 0 \,\}.$$

1) *Question préliminaire :* Factoriser dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ le polynôme X^3+X^2+X+1.

2) Montrer que $(\mathscr{S}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel stable par dérivation.

3) On considère $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.

- **a)** Montrer que $g \in \mathscr{S}$.
- **b)** En déduire que $\mathrm{Vect}(g) \subset \mathscr{S}$.
- **c)** Déterminer une équation différentielle dont $\mathrm{Vect}(g)$ est exactement l'ensemble des solutions.

4) On pose $\mathscr{T} = \{\, y \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid\ y'' + y = 0 \,\}$.

- **a)** Montrer que $\mathscr{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{S}$.
- **b)** Déterminer deux fonctions c et s telles que $\mathscr{T} = \mathrm{Vect}(c, s)$.

5) Montrer que pour toute fonction $f \in \mathscr{S}$, on a $f'' + f \in \mathrm{Vect}(g)$.

6) Montrer de même que pour toute $f \in \mathscr{S}$, on a $f' + f \in \mathscr{T}$.

7) Montrer que $\mathscr{S} = \mathrm{Vect}(g) \oplus \mathscr{T}$.

8) En déduire une expression explicite de $\mathscr{S}$, par exemple en fonction de g, c et s.

III. Étude asymptotique d'une suite définie implicitement.

1) Soit $n \geqslant 3$. Montrer que l'équation $x = n \ln x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ possède exactement deux solutions.
Indication : On pourra étudier les variations de la fonction $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - n \ln x$.

On notera dorénavant x_n la plus petite de ces deux solutions et y_n la plus grande.

2) **a)** Montrer que pour tout $n \geqslant 3$ on a $1 \leqslant x_n \leqslant \mathrm{e}$.

b) Soit $n \geqslant 3$. Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$ et en déduire que $f_n(x_n) \leqslant f_n(x_{n+1})$,

c) En déduire le sens de variations de la suite $(x_n)_{n \geqslant 3}$.

d) En déduire l'existence de $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$. On appellera ℓ cette limite.

e) On suppose $\ell > 1$. Montrer que l'on obtient alors une contradiction.

f) Quelle est donc la valeur de ℓ ?

g) Donner un équivalent le plus simple possible de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

h) En écrivant que $x_n = n \ln(1 + (x_n - 1))$, déterminer un équivalent simple de $x_n - 1$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3) **a)** Montrer l'existence de $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$ et calculer cette limite.

b) En remarquant que $\ln y_n = \ln n + \ln(\ln y_n)$, montrer que $\ln y_n \sim \ln n$.

c) En revenant à la définition de y_n, en déduire un équivalent simple de y_n lorsque n tend vers $+\infty$.

d) Montrer enfin que $y_n = n \ln n + n \ln(\ln n) + o(n)$.

— **FIN** —