Devoir à la maison n° 21

À rendre le 15 juin

Soit $(E, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ un espace vectoriel euclidien, et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E. Soit u un endomorphisme de E. On définit l'application u^* de E dans E par :

$$\forall x \in E, \quad u^*(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid u(e_i)\rangle\, e_i.$$

1) Montrer que u^* est un endomorphisme de E. On l'appelle l'*adjoint* de u.

2) **a)** Soit $x \in E$. Montrer que :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\},\ \langle u^*(x) \mid e_j\rangle = \langle x \mid u(e_j)\rangle\,.$$

b) En déduire que pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$\langle u^*(x) \mid y\rangle = \langle x \mid u(y)\rangle\,.$$

c) Montrer que si une application v de E dans E satisfait :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle v(x) \mid y\rangle = \langle x \mid u(y)\rangle\,,$$

alors $v = u^*$.

Quel est l'adjoint de u^* ?

3) Montrer que la définition de u^* ne dépend pas de la base orthonormale choisie.

4) Montrer que, dans toute base orthonormale, la matrice de u^* est la transposée de celle de u.

5) Montrer que :

$$\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^{\perp} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^{\perp}$$

6) L'endomorphisme u est dit *symétrique* si et seulement si $u^* = u$.

a) Caractériser matriciellement un endomorphisme symétrique.

b) Que peut-on dire de l'image et du noyau d'un endomorphisme symétrique ?

c) Montrer qu'une symétrie est un endomorphisme symétrique si et seulement si c'est une symétrie orthogonale.

d) Montrer qu'un projecteur est un endomorphisme symétrique si et seulement si c'est un projecteur orthogonal.

7) L'endomorphisme u est dit *antisymétrique* si et seulement si $u^* = -u$.

a) Caractériser matriciellement un endomorphisme antisymétrique.

b) Que peut-on dire de l'image et du noyau d'un endomorphisme antisymétrique ?

c) Montrer que u est antisymétrique si et seulement si :

$$\forall x \in E,\ \langle u(x) \mid x \rangle = 0$$

8) Soit u un endomorphisme antisymétrique.

a) Montrer que :

$$\forall x \in \operatorname{Im} u,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ u(x) = \lambda x \Longrightarrow x = 0$$

b) Soit u' l'endomorphisme de $\operatorname{Im} u$ induit par u. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(u' - \lambda \mathrm{Id}_{\operatorname{Im} u}) \neq 0$.

c) En déduire que le rang de u est pair.

— FIN —