Devoir à la maison n° 10

À rendre le 21 janvier

I. Un comportement asymptotique

I – Fonctions continues vérifiant une limite.

Dans cette partie, on considère une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$f(x+1) - f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

L'objectif est de montrer que

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Soit $\varepsilon_n \in \left]0, \frac{1}{n}\right[$. Montrer qu'il existe $p_n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall x \in [p_n, +\infty[, \quad f(x) - \varepsilon_n \leqslant f(x+1) \leqslant f(x) + \varepsilon_n.$$

2) On considère l'intervalle $I_n = [p_n, p_n + 1]$. Montrer que f est bornée sur I_n et en déduire qu'il existe $M_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x \in I_n,\ -M_n \leqslant f(x) - \frac{x}{n} \leqslant M_n.$$

3) Montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I_n$:

$$f(x+k) - \frac{x+k}{n} \leqslant M_n + k\left(\varepsilon_n - \frac{1}{n}\right).$$

4) Montrer qu'il existe $K_n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $k \geqslant K_n$:

$$M_n + k\left(\varepsilon_n - \frac{1}{n}\right) \leqslant 0.$$

5) En déduire que pour tout $x \in I_n$ et pour tout entier $k \geqslant K_n$:

$$f(x+k) \leqslant \frac{x+k}{n}.$$

6) En déduire que pour tout $x \in [p_n + K_n, +\infty[$:

$$\frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{1}{n}.$$

On montrerait de même à partir des questions **1)** et **2)** que :

$$\forall x \in [p_n + K_n, +\infty[,\ -\frac{1}{n} \leqslant \frac{f(x)}{x}.$$

7) Conclure en montrant que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

II – Application : morphismes continus de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ f(xy) = f(x) + f(y).$$

8) Montrer que $f(1) = 0$, puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x).$$

9) Montrer enfin que :

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad xf(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Remarque : ceci montre que, pour savoir que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$, il suffit de savoir que ln est continue et transforme les produits en sommes.

II. Un exercice

Soit $a > 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et vérifiant : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \geq a|x-y|$.
Montrer que f est bijective.

— FIN —