Feuille d'exercice n° 21 : **Dénombrement - correction**

Exercice 1

1) **a)** Si $m \in \mathbb{R}$ est tel que $\mathscr{D}_{m,p} \cap \mathscr{M}$ est de cardinal $\geqslant 2$, alors m est la pente d'une droite passant par 2 points de $\mathscr{M}$, il y en a au plus 999×1000.

b) Au minimum : 0 si tous les points sont alignés verticalement. Il n'y a bien qu'une droite qui passe par au moins deux de ces points, et cette droite n'a pas de pente.
Maximum : prendre les (k, e^k), si une droite $\mathscr{D}_{m,p}$ contient trois points de $\mathscr{M}$: (a, e^a), (b, e^b) et (c, e^c) avec $a < b < c$, alors $\dfrac{\mathrm{e}^c - \mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a} = \dfrac{c-a}{b-a}$ ce qui donne une équation polynomiale à coefficients entiers annulant e : c'est absurde.

2) Il suffit de prendre un m_0 qui n'est pas dans l'ensemble de 1)a), ce qui est possible car cet ensemble est fini et $\mathbb{R}$ ne l'est pas.

3) Il y a donc exactement $p_1 < \cdots < p_{1000}$ pentes telles que $\mathrm{Card}(\mathscr{D}_{m_0,p} \cap \mathscr{M}) = 1$. Il suffit de prendre $p = \dfrac{p_{500} + p_{501}}{2}$. Notons M_k le point sur la droite de pente p_k. Alors $M_1, \dots, M_{500}$ sont en dessous de la droite $\mathscr{D}_{m_0,p}$ et $M_{501}, \dots, M_{1000}$ sont au dessus.

Exercice 2 Avec V l'ensemble des voyelles et C celui des consonnes, c'est

$$\mathrm{Card}\left([V \times C \times V \times C \times V] \sqcup [C \times V \times C \times V \times C]\right) = 6^3 \times 20^2 + 6^2 \times 20^3 = 374\ 400.$$

Exercice 3 On le montre par récurrence sur n.

Pour $n = 1$, on écrit juste $\mathrm{Card}(A_1) = \mathrm{Card}(A_1)$. Pour $n = 2$, c'est la formule vue en cours.

Soit $n \geqslant 3$, supposons que la formule est vraie pour n ensembles. Notons $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ et $B = A = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap A)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \mathrm{Card}(A \cup A_{n+1}) \\
&= \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(A_{n+1}) - \mathrm{Card}(A \cap A_{n+1}) \\
&= \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(A_{n+1}) - \mathrm{Card}(B)
\end{aligned}$$

Or, par récurrence,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Card}(A) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \subset [\![1,n]\!],\ \mathrm{Card}(I)=k} \mathrm{Card}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{I \subset [\![1,n+1]\!],\ \mathrm{Card}(I)=k,\ n+1 \notin I} \mathrm{Card}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)
\end{aligned}$$

La somme porte bien sur toutes les parties de $[\![1, n+1]\!]$ ne contenant pas $n+1$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Card}(B) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \subset [\![1,n]\!],\ \mathrm{Card}(I)=k} \mathrm{Card}\left(\bigcap_{i\in I} A_i \cap A_{n+1}\right) \\
\mathrm{Card}(B) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \subset [\![1,n]\!],\ \mathrm{Card}(I)=k} \mathrm{Card}\left(A_{n+1} \cap \bigcap_{i\in I} A_i\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+2-1} \sum_{I \subset [\![1,n+1]\!],\ \mathrm{Card}(I)=k+1,\ n+1\in I} \mathrm{Card}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \\
&= -\sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{I \subset [\![1,n+1]\!],\ \mathrm{Card}(I)=k,\ n+1\in I} \mathrm{Card}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right).
\end{aligned}$$

La somme porte bien sur toutes les parties de $[\![1, n+1]\!]$ contenant $n+1$, sauf $\{n+1\}$.

Enfin, on peut écrire observer que le terme $\mathrm{Card}(A_{n+1})$ correspond au cas où $I = \{n+1\}$, qui est le seul qui n'apparaît pas dans les sommes précédentes.

On obtient donc bien

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{I \subset [\![1,n+1]\!],\ \mathrm{Card}(I)=k} \mathrm{Card}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right).$$

On a donc bien établi la formule du crible pour $n+1$ ensembles, d'où le résultat par récurrence.

Exercice 4 $\mathbb{Z}$ est infini, S_E non, donc l'application $k \mapsto \sigma^k$ n'est pas injective. Il existe $k \neq \ell$ tels que $\sigma^k = \sigma^\ell$. On peut supposer que $k < \ell$, donc $\sigma^{\ell-k} = \mathrm{Id}_E$.

Exercice 5 Il y a correspondance bijective entre ces applications strictements croissantes et le nombre de parties à n éléments dans $[\![1;p]\!]$.

En effet, si $\varphi : [\![1;n]\!] \to [\![1;p]\!]$ est strictement croissante, alors φ est injective donc $\mathrm{Im}\,\varphi$ est une partie à n éléments de $[\![1;p]\!]$. Remarquons de plus que si deux applications strictement croissantes φ et ψ de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;p]\!]$ ont la même image A, alors elles sont égales. En effet, $\varphi(1) = \psi(1) = \min(A)$, *etc.*.

Réciproquement, si A une partie à n éléments de $[\![1;p]\!]$, alors on peut ordonner A par ordre croissant : $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Il suffit alors de poser, pour chaque $1 \leqslant i \leqslant n$, $\varphi(i) = x_i$. Alors, on a $\varphi : [\![1;n]\!] \to [\![1;p]\!]$ et φ est strictement croissante, par construction.

$\boxed{\text{Il y a donc } \binom{p}{n} \text{ applications strictements croissantes de } [\![1;n]\!] \text{ dans } [\![1;p]\!].}$

Exercice 6 En triant E par ordre croissant, il y a une correspondance bijective entre les relations d'ordre totales sur E et les permutations de E.

Il y en a donc $\mathrm{Card}\, E!$.

Exercice 7 Un triangle est caractérisé par la donnée de trois droites non parallèles. Donc il y en a $\binom{n}{3}$.

Exercice 8

1) Il y en a autant que de parties de $E \backslash X$, or $\mathrm{Card}(E \setminus X) = n - p$. Il y en a donc $\boxed{2^{n-p}.}$

2) Soit $0 \leqslant p \leqslant n$ fixé, il y a $\binom{n}{p}$ parties X de cardinal p, donc il y a $2^{n-p}\binom{n}{p}$ couples de parties (X, Y) disjointes donc X est de cardinal p. Puis on fait varier p. Il y en a donc

$$\boxed{\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^{n-p} = (1+2)^n = 3^n.}$$