Devoir à la maison n° 6

À rendre le 12 novembre

I. Un exercice

Soit $u \in \mathbb{C}$, considérons l'équation

$$z^2 + 3iz + u(i-u) = 2. \qquad (\mathscr{E})$$

1) Déterminer les solutions de $(\mathscr{E})$. On notera z_1 et z_2 ces solutions.
On vérifiera la correction des calculs en simplifiant les quantités $z_1 z_2$ et $z_1 + z_2$.

Attention : les questions suivantes sont largement indépendantes.
On note M_1, M_2 et U les points d'affixes respectives z_1, z_2 et u, considérés dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

2) Déterminer le lieu des points U pour lesquels :

- **a)** M_1, M_2 et U sont alignés.
- **b)** M_1, M_2 et U forment un triangle rectangle en U.

3) Déterminer les valeurs de u pour lesquelles $z_1 z_2 = 10i$.

4)
- **a)** Déterminer le lieu des points U pour lesquels $z_1 z_2$ est réel.
On trouvera la réunion de deux ensembles simples.
- **b)** Discuter en fonction de la valeur de $z_1 z_2$ l'appartenance de U à l'un ou l'autre des deux ensembles trouvés précédemment.

5) Déterminer le lieu des points U pour lesquels $z_1 \bar{z}_2$ est imaginaire pur.

II. Expression intégrale de la longueur d'une courbe

Pour toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, on note :

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\,\mathrm{d}t\ ,$$

que l'on admet être une expression intégrale de la longueur de la courbe représentative de f.

1) Vérifier la formule donnant $L(f)$ pour f définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = t$.

2) Calculer $L(f)$ pour f définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = \mathrm{ch}(t)$.

3) Un exemple de calcul de longueur d'un arc de courbe.

- **a)** Calculer $L(f)$ pour f définie sur $\left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ par $f(t) = \sqrt{1-t^2}$.
- **b)** Retrouver le résultat de la question précédente sans calcul, par des considérations géométriques.

4)
- **a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{sh}(x) = 2$.
- **b)** Si $x \in \mathbb{R}$, donner $\mathrm{ch}(2x)$ et $\mathrm{sh}(2x)$ en fonction de $\mathrm{ch}(x)$ et de $\mathrm{sh}(x)$ (formules de duplication hyperboliques).
- **c)** Soit f définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = t^2$. Calculer $L(f)$, en s'inspirant de la question **2)**.

— **FIN** —