Ex. 1.4.5 : • $\dim \mathbb{K}^n = n$

car base canonique a n vect.

• ⚠ piège : $\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}(1, X, \dots X^n)$

$= \mathrm{Vect}(X^0, X^1, \dots X^n)$

$$\dim \mathbb{K}_n[X] = \underline{\underline{n+1}}.$$

• $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$ ($\dim_{\mathbb{C}}$ = dim en tant que $\mathbb{C}$-ev)

• $\mathbb{C}^3 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\i\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix}\right)$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^3 = 6$; $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

base can : $(E_{ij})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$

rappel : E_{ij} = tous les coeffs sont nuls sauf celui de la i^e ligne et j^e col qui vaut $\underline{1}$.

$\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p$.

1.6 :

- On a vu que l'ens. des sol° d'1 éq. lin. homogène d'ordre 1 était de la forme :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \lambda f(t) \end{array}, \lambda \in \mathbb{K} \right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\, f$$

où $f : \left(t \mapsto e^{-A(t)} \right)$. $f \neq 0$

donc : $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{S} = 1$

- éq. homogène d'ordre 2 :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{K} \\ t \mapsto \lambda f_1(t) + \mu f_2(t) \end{array} , \lambda, \mu \in \mathbb{K} \right\}$$

avec f_1 et f_2 de la forme :

$$(t \mapsto e^{\alpha t}) \text{ ou } (t \mapsto t e^{\alpha t})$$

$$(t \mapsto \cos at) \text{ ou } (t \mapsto \sin at)$$

dans tous les cas, (f_1, f_2) est libre.

3 cas : $(t \mapsto e^{\alpha_1 t}, t \mapsto e^{\alpha_2 t}) \quad \alpha_1 \neq \alpha_2$

$$(t \mapsto e^{\alpha_1 t}, t \mapsto t e^{\alpha_1 t})$$

$(t \mapsto \cos \alpha t, t \mapsto \sin \alpha t)$.

dc $\mathcal{S}$ est de dim 2.

[exo : suites récurrentes]

Ex. 1.4.10 : $a, b, c, d \in \mathbb{K}$, 2 à 2 distincts

$$A = (X-b)(X-c)(X-d)$$
$$B = (X-a)(X-c)(X-d)$$
$$C = (X-a)(X-b)(X-d)$$
$$D = (X-a)(X-b)(X-c)$$

$\dim \mathbb{K}_3(X) = 4$, et $\#(A, B, C, D) = 4$

dc il suffit que (A, B, C, D) est libre,
ou gén, mais pas besoin de faire les 2.

<u>libre</u> : Soit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$

$$\text{tq} \quad \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = 0$$

dc, si on évalue en a : $\alpha (a-b)(a-c)(a-d)$
$$+ 0 = 0$$

$a-b \neq 0$, $a-c \neq 0$, $a-d \neq 0$ dc $\alpha = 0$.

On évalue en b, c, d et on a : $\beta = \gamma = \delta = 0$.

Génératrice : il faut utiliser les poly de Lagrange.

c'est le cours : $\forall P \in \mathbb{K}_3[X]$, il existe des uniques coeff $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{K}$.

$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D$$

$$\left(\text{avec } \alpha = \frac{P(a)}{(a-b)(a-c)(a-d)} \text{ etc} \ldots \right)$$

donc (A, B, C, D) est 1 base de $\mathbb{K}_3[X]$.

Prop. 1.6.2 : Si E et F st 2 ev, $E \times F$ aussi.

Dem : si E et F st de dim finie, $\mathcal{B} = (e_1 .. e_n)$ base de E, $\mathcal{C} = (f_1 .. f_p)$ base de F,

alors $\big((e_1, 0), (e_2, 0), (e_3, 0) \dots (e_n, 0), (0, f_1), (0, f_2) \dots, (0, f_p)\big) = \mathcal{J}$

est 1 base de $E \times F$, donc $E \times F$ est de dim finie, et $\dim E \times F = n + p$

⚠ Si E et F sont des ens de card fini,

$$\# E \times F = \# E \times \# F$$

Si E et F sont des ev de dim finie,

$$\dim (E \times F) = \dim E + \dim F.$$

Démo : $E \times F = \{ (e,f),\ e \in E,\ f \in F \}$

F génératrice : Soit $x \in E \times F$.

il s'écrit $x = (e,f)$ avec $e \in E$, $f \in F$.

et $e = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ car $E = \mathrm{Vect}(e_i)$

et $f = \sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j$ car $F = \text{Vect}(f_j)$

donc $u = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j\right)$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, 0\right) + \left(0, \sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (e_i, 0) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j (0, f_j)$$

qui est 1 c.l. de $\tilde{F}$.

<u>libre</u> : soit $\lambda_1 \dots \lambda_n, \mu_1 \dots \mu_p \in \mathbb{K}$

tq : $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (e_i, 0) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j (0, f_j) = 0$$

donc $$\underset{(0,0)}{0} = \left(\sum \lambda_i e_i, 0\right) + \left(0, \sum \mu_j f_j\right)$$

$$= \left(\sum \lambda_i e_i, \sum \mu_j f_j\right)$$

par unicité des coord d'1 couple :

$$\sum \lambda_i e_i = 0_E, \quad \sum \mu_j f_j = 0_F$$

$(e_1 \dots e_n)$ est libre donc $\forall i, \lambda_i = 0$

$(f_1 \dots f_p)$ est libre ssi $\forall j,\ \mu_j = 0$

ssi F est libre.

<u>Ex</u> : $\mathbb{R} = \mathrm{Vect}(1)$, (1) est 1 base de $\mathbb{R}$.

Donc $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_2$ a pour base :

$$((1_1, 0_2), (0_1, 1_2))$$

<u>Ex</u> : $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{K}_1[X]$

Alors $E \times F$ a pour base :

$$\Big(\underbrace{((1,0),0),((0,1),0)}_{(e_i,0)},\underbrace{(0,1),(0,X)}_{(0,f_j)} \Big).$$

<u>Prop</u> : <u>16.7</u> : Si E et F sont des ev, on sait déjà que $\mathcal{L}(E,F)$ est 1 ev.

Si $\mathcal{B} = (e_1 .. e_n)$ base de E

$\mathcal{C} = (f_1 .. f_p)$ base de F

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall j \in [\![1,p]\!]$, on pose :

$\varphi_{i,j} : E \to F$

la seule applic. lin. tq.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\varphi_i(e_k) = \delta_{ik} \times f_j$

ie : $\varphi_i(e_i) = f_j$, si $i \neq k$, $\varphi_i(e_k) = 0$

[rappel : φ_{ij} existe et est unique grâce à 2.T.14, chap $\overline{\underline{XIX}}$].

Alors : $(\varphi_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est 1 base de $\mathcal{L}(E,F)$

Donc $\mathcal{L}(E,F)$ est de dim finie, et $\dim \mathcal{L}(E,F) = n \times p$

[Rq : on verra que $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) \simeq \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$]

<u>Dém</u> : Posons :

$$\varphi : \mathcal{L}(E,F) \longrightarrow F^n$$
$$f \longmapsto (f(e_1), \dots, f(e_n))$$

[Rq : ressemble bcp à la dém de :

$$\# F^E = \# F^{\# E}$$].

Mq. φ est 1 isomorphisme.

Si $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\varphi(f+\lambda g) = \big((f+\lambda g)(e_1), \ldots, (f+\lambda g)(e_n)\big)$$
$$= \big(f(e_1)+\lambda g(e_1), \ldots, f(e_n)+\lambda g(e_n)\big)$$
$$= \big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big) + \lambda\big(g(e_1), \ldots, g(e_n)\big)$$
$$= \varphi(f) + \lambda \varphi(g),$$ donc φ est linéaire.

Avec 2.1.11 du chap $\underline{\overline{XIX}}$:

Si $(y_1 \ldots y_n)$ est 1 famille quelconque de F^n,

il existe 1 unique applic. lin. f tq. $\forall i, f(e_i) = y_i$

i.e : $\varphi(f) = (y_1, \dots, y_n)$

donc φ est bijective :

car $\forall (y_1, \dots, y_n) \in F^n$, $\exists !$ antécédent.

Cela suffit, avec 1.5, à prouver

que $\mathcal{L}(E,F)$ est de dim finie et

$\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim F^n = n \times \dim F$

$= \dim E \times \dim F$.

Bonus : comment trouver 1 base de $\mathcal{L}(E,F)$?

Rappel : $S : \mathcal{F}$ est 1 base de F^n, puisque φ^{-1}

est 1 isomorphisme de F^n ds $\mathcal{L}(E,F)$,

donc $\varphi^{-1}(\tilde{F})$ est 1 base de $\mathcal{L}(E,F)$.

ici : $\tilde{F} = \Big((f_1, 0 - - 0), \ldots, (f_p, 0 - - - 0),$

$(0, f_1, 0 - - - 0), \ldots (0, f_p, 0, - - 0),$

$(0, 0, f_1) - - - $ ——

$\ldots (0, 0 - -, f_1), - - -, (0, 0, \ldots 0, f_p) \Big).$

On note g_{ij} le vect dt ttes les coord sont

nulles sauf la $i^{\text{ème}}$, qui vaut f_j.

ie : $\tilde{F} = (g_{11}, g_{12} - - g_{1p}, \ldots, g_{n1}, \ldots, g_{np})$

alors 1 base de $\mathcal{L}(E,F)$ est :

$$\left(\varphi^{-1}(g_{11}), \varphi^{-1}(g_{12}), \ldots, \varphi^{-1}(g_{np})\right)$$

or $\forall i, j$, $\varphi^{-1}(g_{ij}) = \varphi_{ij}$,

l'unique applic. lin. t.q. $\varphi_{ij}(e_k) = \begin{cases} f_j & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

<u>Ex</u> : donner 1 base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_1[X])$:

$\mathbb{R}^2$: $\mathcal{B} = ((1,0), (0,1))$

$\mathbb{R}_1[X]$: $\mathcal{C} = (1, X)$

$\varphi_{11} : (1,0) \mapsto 1$ $\quad\quad$ $\varphi_{12} : (1,0) \mapsto X$

$\quad\quad (0,1) \mapsto 0$ $\quad\quad\quad\quad (0,1) \mapsto 0$

$\varphi_{21} : (1,0) \mapsto 0$ $\quad\quad$ $\varphi_{22} : (1,0) \mapsto 0$

$\quad\quad (0,1) \mapsto 1$ $\quad\quad\quad\quad (0,1) \mapsto X$

[cf : analogie avec les matrices E_{ij}].

$(\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{21}, \varphi_{22})$ c'est 1 base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_1[X])$. En effet :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_1[X]$

$\quad\quad (a,b) \longmapsto (\alpha a + \beta b) + (\gamma a + \delta b) X$

alors $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_1[X])$

et $\forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$:

$$f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (\alpha a + \beta b) + (\gamma a + \delta b)X$$
$$= a(\alpha + \gamma X)$$
$$+ b(\beta + \delta X)$$

On a : $\varphi_{11}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\varphi_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\varphi_{11}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$$= a$$
$$\varphi_{12}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\varphi_{12}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\varphi_{12}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= aX$$

$$\varphi_{21}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = b \quad \text{et} \quad \varphi_{22}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = bX$$

$$d_c f\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \alpha\,\varphi_{11}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} + \gamma\,\varphi_{12}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} + \beta\,\varphi_{21}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} + \delta\,\varphi_{22}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$d_c f = \alpha\varphi_{11} + \gamma\varphi_{12} + \beta\varphi_{21} + \delta\varphi_{22}.$$

2 - sev et dim :

__Prop__ : Si E est 1 ev de dim finie et F est 1 sev de E, alors F est de dim finie, $\dim F \leq \dim E$, et si $\dim F = \dim E$, alors $E = F$.

(et évidemment si $E = F$, $\dim E = \dim F$).

<u>Démo</u>: Si F est 1 sev de E,

Si $\mathcal{F}$ est 1 famille libre de F, c'est 1 famille libre de E, donc $\# \mathcal{F} \leq \dim E$.

On utilise l.r.h. : F est de dim finie.

Maintenant que l'on sait cela, soit $\mathcal{B}$ 1 base de F. $\mathcal{B}$ est donc 1 famille libre de E.

Donc on peut la compléter en 1 base de E :

il existe $x_1 \dots x_p \in E$ tq. $\mathcal{B} \uplus (x_1 \dots x_p)$ est 1 base de E.

dc : $\dim E = \#\left(\mathcal{B} \uplus (x_1 \dots x_p)\right)$

$$= \#\mathcal{B} + p$$

$$= \dim F + p$$

$p \geq 0$ dc : $\dim E \geq \dim F$.

Mais si $\dim E = \dim F$, alors $p = 0$, dc on a ajouté 0 vect à $\mathcal{B}$ pour avoir 1 base de E : $\mathcal{B}$ est 1 base de E.

dc $E = \operatorname{Vect} \mathcal{B} = F$: $E = F$. $\square$

Rq : cela donne 1 méthode supplémentaire pr montrer l'égalité de 2 ev E et F :

(1) $x \in E \iff \dots \iff x \in F$

(2) $E \subset F$ et $F \subset E$

(3) $E \subset F$ et $\dim E = \dim F$.

en gal, montrer $\dim E = \dim F$ est simplissime, donc (3) est souvent la + rapide.

Déf : Si E est 1 ev, et $(x_1 \dots x_n)$ 1 famille de vecteurs de E.

Alors on appelle <u>rang</u> de $(x_1 \dots x_n)$ la dimension de $\mathrm{Vect}(x_1 \dots x_n)$.

$$\mathrm{rg}(x_1 \dots x_n) = \dim \mathrm{Vect}(x_1, \dots x_n).$$

Rq : • rg existe car $\mathrm{Vect}(x_1 \dots x_n)$ a 1 fam. gén. finie, dc il est de dim finie.

• Si $(x_1 \dots x_n)$ est libre, elle est 1 base de $\mathrm{Vect}(x_1 \dots x_n)$ dc $\mathrm{rg}(x_1 \dots x_n) = n$

- si elle est liée, ce n'est pas 1 base, c'est 1 famille génératrice, et on sait que toute base a au + n vect,
  donc : $rg(x_1, \dots, x_n) = \dim \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$
  $$\leq n$$
  $$\text{et } \neq : < n$$
  car $(x_1, \dots, x_n)$ est génératrice mais pas 1 base.

- ds ts les cas : $rg(x_1, \dots, x_n) \leq n$

• Si : de plus E est de dim finie p,

alors $\text{Vect}(x_1 \dots x_n) \subset E$

donc $\text{rg}(x_1 \dots x_n) \leq p$

donc : $\text{rg}(x_1 \dots x_n) \leq \min(n, p)$

<u>Ex</u> : Si : $E = \mathbb{R}^{18}$ et $(x_1 \dots x_7)$ est 1 famille de vect de E,

$$\text{rg}(x_1 \dots x_7) \leq \min(7, 18)$$
$$\leq 7$$

• si : $E = \mathbb{K}^p$:

Ute famille de n vect. de p coord a 1 rang majoré par (n, p).

2.2 : Existence de supplémentaires :

Th : Tt sev d'1 ev de dim finie admet 1 supplémentaire (ds E).

Démo : importante, car elle sera mise en pratique concrèt^{t}.

Soit $(b_1, \dots, b_p)$ 1 base de F, $n = \dim E$.

On complète cette base en 1 base de E, ie :

il existe $v_1 \dots v_r$ des vect de E tq :

$(b_1 \dots b_p, v_1 \dots v_r)$ est 1 base de E.

1^er^ point : on pose $S = \mathrm{Vect}(v_1 \dots v_r)$.

alors : $(b_1 \dots b_p) \uplus (v_1, \dots, v_r)$ est 1

base de E donc : (base de F) $\uplus$ (base de S) = base de E

donc avec le th 2.5.17 du chap $\overline{\underline{XIX}}$:

$$F \oplus S = E.$$

$\left(\underline{2^{e} \text{ point}} : \quad p + r = n \right.$

$\left. \quad d. : \dim F + \dim S = \dim E . \right)_D$

__Ex :__ $\quad E = \mathbb{R}_3[X]$

$$F = \text{Vect}\left(1 + X + X^2, -2 + 3X - X^2\right).$$

Donner 1 supplémentaire de F.

$$F = \text{Vect}\left(1 + X + X^2, -2 + 3X - X^2\right)$$

$$= \text{Vect}\left(\underbrace{1 + X + X^2, -1 + 4X}_{D}\right)$$

$\mathcal{B}$ est 1 famille gén. de F ; or elle est échelonnée

dc elle est libre : c'est 1 base F.

Complétons-la à 1 base de E :

Soit $\mathcal{F} = \left(X^3, 1+X+X^2, -1+4X, 1 \right)$

$\mathcal{F}$ est échelonnée, dc libre.

Or elle a 4 vect, et dim $\mathbb{R}_3[X] = 4$,

dc c'est 1 base de $\mathbb{R}_3[X]$.

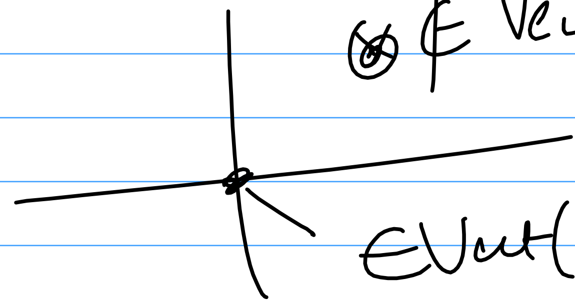
Si on pose $S = \text{Vect}(X^3, 1)$,

alors S est 1 supplémentaire de F.

⚠ • ne pas confondre <u>supplémentaire</u> et <u>complémentaire</u> (<u>RIEN</u> à voir)

<u>ex</u> : $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \oplus \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

clairement, $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ n'est pas le complémentaire de $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$



• Il n'y a jamais unicité d'1 supplémentaire (sauf pour E et $\{0\}$)

~~Ct~~ supplémentaire : HORREUR !!

- en anglais, en g^{al}, on n'utilise JAMAIS d'$\cup$ de sev, ni de complémentaire de sev. (par contre des "réunions" de famille, on a fait plein).

Ex. 2.2.4 : $E = \mathbb{R}^4$,

$$F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-3\end{pmatrix}\right)$$

cette famille est 1 base de F (elle est échelonnée) et : $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-3\end{pmatrix}\right)$ est échelonnée donc libre, et elle a 4 vect, donc c'est 1 base de $\mathbb{R}^4$, et donc 1 supp. de F est :

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$

⚠ On peut aussi m.q. :

$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\3\\-3\end{pmatrix}\right)$ est libre, donc c'est 1 base, donc $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est aussi 1 supplémentaire

de F : il y a autant de supp. de F que

de manières de compléter $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}\right)$ en 1

base de $\mathbb{R}^4$, ie 1 ∞té (en particulier).

<u>Ex. 22.3</u> : E 1 ev normé

F, G 2 ev. normés tq. $E = F \oplus G$.

Soit $(y_1 \dots y_p)$ 1 base de G.

Si $x \in F$, $x \neq 0$, on pose $\mathcal{G}_x = (y_1 + x, y_2 + x, \dots, y_p + x)$

On pose $G_x = \text{Vect}\, g_x = \text{Vect}(y_1+x, y_2+x, \dots, y_p+x)$

1) Mq. $G_x \oplus F = E$

2) Mq. si $x \neq x'$ ($x \neq 0$, $x' \neq 0$)

alors $G_x \neq G_{x'}$.

Comme il y a une infinité de vect. $\neq 0$ ds F,

alors F a 1 infinité de supp.

1) Soit $v \in E$.

$G \oplus F = E$ donc il existe $g = \sum_{i=1}^{n} g_i y_i \in G$

et $z \in F$ tq. $v = g + z$

donc : $v = \sum_{i=1}^{n} g_i y_i + z$ $\in F$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} g_i (y_i + x)}_{\in \mathrm{Vect}\, g_x \in G_x} \underbrace{- \sum_{i=1}^{n} g_i x + z}_{\in F}$$

$\in F$ $\in F$

d'où : $F + G_x = E$.

Mq. ils sont supplémentaires :

Soit $v \in F \cap G_x$. alors :

il existe $g_1 \dots g_p$ tq. $v = \sum g_i (y_i + x)$

dc : $\underbrace{v - \sum g_i x}_{\in F} = \underbrace{\sum g_i y_i}_{\in G}$

dc $\sum g_i y_i = 0$ car $F \cap G = \{0\}$

dc $\forall i, g_i = 0$ car $(y_1 \dots y_p)$ est libre

dc $v = 0$: $F \cap G_x = \{0\}$

dc $F \oplus G_x = E$.

2) Soit $x, x' \in F$, non nuls, $x \neq x'$.

Soit $v \in G_x \cap G_{x'}$

$v \in G_x$: il existe $g_1 \dots g_p \in K$

$$t_q \cdot v = \sum_i g_i (y_i + x)$$

$v \in G_{x'}$: il existe $h_1 \dots h_p \in K$

$$t_q \cdot v = \sum_i h_i (y_i + x')$$

d'où : $\sum_i g_i (y_i + x) = \sum_i h_i (y_i + x')$

d'où : $\underbrace{\sum_i (g_i - h_i) \underbrace{y_i}_{\in G}}_{\in G} = \underbrace{-\sum_i g_i \underbrace{x}_{\in F} + \sum_i h_i \underbrace{x'}_{\in F}}_{\in F} = 0$

mais $F \cap G = \{0\}$, donc :

$$\sum_i (g_i - h_i) y_i = 0$$

Mais $(y_1, \dots, y_p)$ est libre donc :

$$\forall i, \quad g_i - h_i = 0$$

donc $\quad g_i = h_i$

On a aussi : $\sum g_i x = \sum_i h_i x'$

$$= \sum_i g_i x'$$

Donc réciproquement, $(\sum g_i) = 0$
car $x \neq x'$.

Si je choisis $g_1 \cdots g_p$ tq. $\sum g_i \neq 0$,
alors $v \notin G_x \cap G_{x'}$.

par ex : je pose $v = g_1 + x \in G_x$
$(g_1 = 1,\ g_i = 0,\ \text{donc}\ \sum g_i = 1)$
alors le calcul précédent assure que $v \notin G_{x'}$
donc $\exists y \in G_x \setminus G_{x'}$, donc $G_x \neq G_{x'}$.