Devoir à la maison n° 05

À rendre le 26 octobre

I. Construction du pentagone régulier à la règle et au compas.

Dans tout ce problème, on pose $z_0 = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}$.

Partie I

1) Que vaut $S = 1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4$?

2) On pose $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$.

- **a)** Montrer que α et β sont des réels.
- **b)** Déduire de la question **1)** que α et β sont les deux racines de l'équation $Z^2 + Z - 1 = 0$.

3) Donner la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

Partie II

Le plan complexe est muni d'un repère orthonomé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On désigne par A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 les points du plan d'affixes respectives 1, z_0, z_0^2, z_0^3 et z_0^4.

1)

- **a)** Par quelle transformation simple passe-t-on de A_0 à A_1 ? Puis de A_1 à A_2 ? Généraliser ce résultat.
- **b)** Quelle est l'abscisse du point H intersection de la droite (A_1A_4) avec l'axe des abscisses ?

2) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre Ω d'affixe $-\dfrac{1}{2}$ et passant par le point B d'affixe i.
On désigne par M et N les points où $\mathscr{C}$ rencontre l'axe des abscisses, M ayant une abscisse positive.

- **a)** Prouver que M a pour abscisse α et que N a pour abscisse β.
- **b)** Montrer que H est le milieu du segment $[OM]$.
- **c)** Déduire de ce qui précéde la description d'une construction à la règle et au compas d'un pentagone dont on connaît le centre O et un sommet A_0.
- **d)** Effectuer cette construction à la règle et au compas sur une feuille blanche.

II. Une inéquation.

On désire prouver que pour tout nombre complexe z de module 1 on a :

$$\sqrt{3} \leqslant |1+z| + \left|1-z+z^2\right| \leqslant \frac{13}{4}.$$

Dans tout l'exercice z désigne donc un nombre complexe de module 1.

1) On pose $t = |1+z|$, dans quel intervalle se trouve le réel t ?

2) Exprimer $\mathrm{Re}(z)$ à l'aide de t.

3) Montrer que

$$\left|1-z+z^2\right|^2 = 3 - 4\,\mathrm{Re}(z) + 2\,\mathrm{Re}\left(z^2\right).$$

4) Exprimer $\mathrm{Re}(z^2)$ en fonction de $\mathrm{Re}(z)$ (indication : utiliser l'écriture trigonométrique). En déduire que

$$|1+z| + \left|1-z+z^2\right| = t + \left|3-t^2\right|.$$

5) En déduire l'inégalité demandée. Trouver un complexe z qui réalise le minimum.

— **FIN** —