Ex. 2.6.3 : X = somme des 2 résultats.

X est à valeurs dans $[\![2, 12]\!]$.

donc : $$E(X) = \sum_{k=2}^{12} P(X=k) \times k.$$

$2 = 1 + 1$, $8 = 2+6 = 3+5 = 4+4$
$= 5+3 = 6+2$.

$$X \not\hookrightarrow \mathcal{U}([\![2, 12]\!]).$$

Soit $k \in [\![2, 12]\!]$.

X_1 la v.a. qui donne le résultat du 1er dé
X_2 — — 2 — .

X_1 et X_2 sont iid. : $X_i \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,6]\!])$.

$$P(X=k) \underset{\text{totales}}{=} \sum_{i=1}^{6} P(X_2 = k-i \mid X_1 = i) \times \underbrace{P(X_1=i)}_{=1/6}$$

car $(X_1=i)_{i\in[\![1,6]\!]}$ forme 1 syst. cplet d'év, de proba. tés non nulles.

$$P(X=k) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} P(X_2 = k-i \mid X_1 = i)$$

Si $i \in [\![1,6]\!]$ et $X_1 = i$,

alors : $P(X_2 = k - i \mid X_1 = i)$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } k-i \notin [\![1,6]\!] \\ \frac{1}{6} & \text{si } k-i \in [\![1,6]\!] \end{cases}$$

ex : $k = 12$, $X_1 = 3$:

$$P(X_2 = 9 \mid X_1 = 3) = 0$$

$k = 6$, $X_1 = 3$:

$$P(X_2 = 3 \mid X_1 = 3) \underset{ind}{=} P(X_2 = 3)$$

$$= \frac{1}{6}.$$

faisons 1 tableau :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$i \in [\![1,6]\!]$ tq. $k - i \in [\![1,6]\!]$	1	1, 2	1, 2, 3	1, 2, 3, 4	1, 2, 3, 4, 5	1, 2, 3, 4, 5, 6	2, 3, 4, 5, 6	3, 4, 5, 6	4, 5, 6	5, 6	6

quels sont les résultats du 1er dé pour lesquels il est possible d'obtenir 1 somme $= k$ avec le 2nd dé.

2c.

$$E(X) = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{6}\times 2 + \frac{2}{6}\times 3 + \frac{3}{6}\times 4 + \frac{4}{6}\times 5 + \frac{5}{6}\times 6 + \frac{6}{6}\times 7 + \frac{5}{6}\times 8 + \frac{4}{6}\times 9 + \frac{3}{6}\times 10 + \frac{2}{6}\times 11 + \frac{1}{6}\times 12\right]$$

$$= \frac{1}{36}\left(2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 40 + 36 + 30 + 22 + 12\right) = 7$$

Prop. 26.5 :

- l'espérance est linéaire : si X et Y sont 2 v.a. réelles et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

  alors : $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$.

- l'espérance est positive ($\cancel{\triangle \ \forall X, E(X) \geq 0}$)

  si X est v.a. réelle positive p.s.

  presque sûrement.

  alors $E(X) \geq 0$.

  [analogie : positivité de l'intégrale : si $f \geq 0$, et $a \leq b$, $\int_a^b f \geq 0$]

- E est $\nearrow$: si X, Y 2 v.a. réelles
  $\hookrightarrow$. $X \leq Y$ $\underline{\underline{p.s}}$
  alors $E(X) \leq E(Y)$.

<u>Dém</u> : • $E(\alpha X + \beta Y) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) \cdot (\alpha X + \beta Y)(\omega)$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) \left(\alpha X(\omega) + \beta Y(\omega) \right)$$

$$= \alpha \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X(\omega) + \beta \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) Y(\omega)$$

$$= \alpha E(X) + \beta E(Y).$$

- Soit $X \geq 0$ p.s.

[ie, $P(X \geq 0) = 1$

et donc : $P(X < 0) = 1 - P(X \geq 0)$

$= 0$]

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} P(X=k) \cdot k$$

$$= \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k \geq 0}} P(X=k) \cdot k + \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k < 0}} \overbrace{P(X=k)}^{=0} \cdot k$$

$$= \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k \geq 0}} \underbrace{P(X=k)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{k}_{\geq 0}$$

$$\geq 0.$$

$\forall \omega \in \Omega, \; X(\omega) \leq Y(\omega)$

• S: $X \leq Y$ p.s. : $P(X \leq Y) = 1$

i.e. $P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega)\}) = 1$

$$E(X) - E(Y) \underset{\text{lin}}{=} E(X-Y)$$

$$\underset{\text{pos.}}{\leq} 0 \quad \text{car } X - Y \leq 0 \text{ p.s.}$$

$$\text{d'où} \quad E(X) \leq E(Y).$$

Rq : par réc. on peut m.q :

si $X_1 \dots X_n$ sont n v.a. réelles

et $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$

alors :
$$E\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E(X_i).$$

Rq 2.6.7 :
$$E\left[X - E(X)\right]$$
$$= E(X) - E(\underbrace{E(X)}_{C^{te}})$$
$$= E(X) - E(X) = 0$$

$X - E(X)$ est 1 v.a. centrée.

Prop. 2.6.8 : Soit $X \geq 0$ p.s.

On suppose que $E(X) = 0$.

Alors $X = 0$ p.s.

Dém : $0 = E(X) = \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k < 0}} \underbrace{P(X = k)}_{= 0} . k$

$+ \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k > 0}} P(X = k) . k$

$+ \underbrace{P(X = 0)}_{= 0} . 0$

[illegible]:

$$0 = \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k > 0}} \underbrace{P(X=k)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{k}_{> 0}$$

[illegible]: $\forall k \in X(\Omega)$ s.t. $k > 0$,

[illegible]: $P(X=k) \cdot k = 0$

[illegible] $P(X=k) = 0$

[illegible]: $P(X>0) = 0$

[illegible]: $P(X<0) = 0$

Ici : $P(X=0) = 1 - P(X \neq 0)$

$= 1 - P(X>0) - P(X<0)$

$= 1$.

$\square$

Lemme : Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Soit $p \in [0,1]$.

il existe n v.a. $X_1 \dots X_n$

mut ind. et qui suivent ttes la loi de

Bernoulli de paramètre p.

Démo : je vous laisse la lire.

pt délicat : $\sum \prod = \prod \sum$??

regardez sur 1 ex avec $n = 3$.

1) l'espérance d'1 v.a. c^te^ est égale à la c^te^ en question.

2) Soit $p \in [0,1]$ et X 1 v.a.r.

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

X est à valeurs $\{0,1\}$.

Dc $E(X) = \underbrace{P(X=1)}_{=p} \times 1 + \underbrace{P(X=0) \cdot 0}_{=0}$

$= p.$

3) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $p \in [0,1]$

et X v.a. qui suit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

$E(X)$ ne dépend que de la loi de X.

Dc si Y est 1 v.a. quelque Y.

$Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors $E(X) = E(Y)$.

On utilise le lemme : soit $X_1 \dots X_n$ n v.a.

mut ind. i.d. tq. $\forall i$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

On a vu : si $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

alors $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Ici : $E(X) = E(Y)$.

$$= E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$\underset{\text{lin.}}{=} \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$\underset{2)}{=} \sum_{i=1}^{n} p = np.$$

1) Soit X v.a. tq. $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!])$

avec $a, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$.

$$E(X) = \sum_{k=a}^{b} P(X=k) \cdot k$$

$$= \sum_{k=a}^{b} \frac{1}{b-a+1} \cdot k$$

$$= \frac{1}{b-a+1} \sum_{k=a}^{b} k$$

$$= \frac{1}{b-a+1} \sum_{k=0}^{b-a} (k+a)$$

$$= \frac{1}{b-a+1} \left(\sum_{k=0}^{b-a} a + \sum_{k=0}^{b-a} k \right)$$

$$= \frac{1}{b\cancel{-a+1}} \left((b \cancel{-a+1}) \times a + \frac{(b-a)(b\cancel{-a+}1)}{2} \right)$$

$$= a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} .$$

Ex : je joue au loto. X est la v.a. qui donne mon gain. (normalement, $E(X) < 0$).
quelle est l'espérance de X^2 ?
Faut-il calculer la loi de X^2 ?

Prop. 2.6.10 : formule de transfert.

Si : $X : \Omega \to E$, $f : E$ ou $X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$

alors :

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x) \cdot f(x)$$

Pas besoin de connaître la loi de $f(X)$!

Démo :

$$(X=x) = \bigsqcup_{\substack{\omega\in\Omega \\ X(\omega)=x}} \{\omega\}$$

$$\sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)\cdot f(x)$$

$$= \sum_{x\in X(\Omega)} \left[\left(\sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ X(\omega)=x}} P(\{\omega\})\right) f(x)\right]$$

$$= \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ X(\omega)=x}} \left(P(\{\omega\})\cdot f(X(\omega))\right)$$

(*)

$$= \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})\cdot f(X(\omega)) = E(f(X)).$$

$\square$

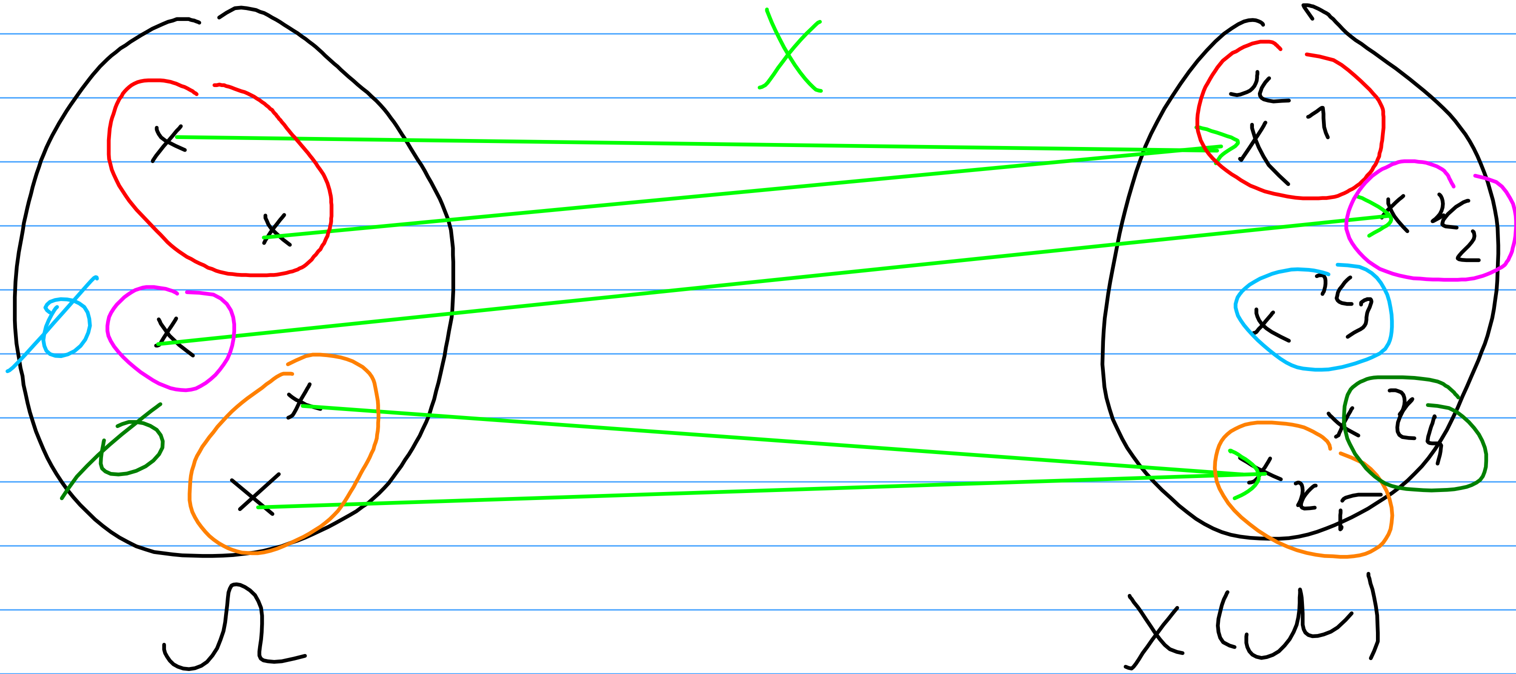
(*) pourquoi est-ce que

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega)=x}} \varphi(\omega)$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} \varphi(\omega) \quad ??$$

$$X : \Omega \to X(\Omega)$$

Rappel : $\Omega = \bigsqcup_{x \in X(\Omega)} X^{\leftarrow}(\{x\})$.



$$= X^{\leftarrow}(\{x_1\}) \sqcup X^{\leftarrow}(\{x_2\}) \sqcup X^{\leftarrow}(\{x_5\}) \sqcup \varnothing \sqcup \varnothing$$

ici : si on note $\{x_1 \dots x_n\} = X(\Omega)$

et $A_i = X^{\leftarrow}(\{x_i\})$

$$\sum_{\omega \in \Omega} \varphi(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\omega \in A_i} \varphi(\omega) \right)$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \text{tq. } X(\omega) = x}} \varphi(\omega).$$

Ex. 2.6.12 : Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0,n]\!])$.

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{P(X=k)}_{=\frac{1}{n+1}} \cdot k^2$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} k^2$$

$$= \frac{1}{n+1} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{n(2n+1)}{6}.$$

Prop : Si : X et Y sont 2 v.a. <u>ind</u>,

alors : $E(X.Y) = E(X).E(Y)$.

Dém : On utilise la formule de transfert :

$$f : \begin{array}{ccc} X(\Omega) \times Y(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x.y \end{array}.$$

(X, Y) est 1 v.a., et $f(X, Y)$

est la v.a. XY.

Ici : $E(XY) = E(f(X,Y))$

$$= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} P(X=x, Y=y)\cdot x\cdot y$$

$$\underset{\text{ind.}}{=} \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} P(X=x)\cdot P(Y=y)\cdot x\cdot y$$

$$= \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} \big(P(X=x)\,x\big)\big(P(Y=y)\,y\big)$$

$$= \Big(\sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)\cdot x\Big)\cdot\Big(\sum_{y\in Y(\Omega)} P(Y=y)\cdot y\Big)$$

$= E(X) \cdot E(Y).$ $\square$

__Rq. 2.6.14 :__ ⚠ $E(X)\cdot E(Y) = E(XY)$

$\not\Rightarrow$ X et Y ind.

__ex :__ $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1, 0, 1\})$

$P(X=-1) = P(X=0) = P(X=1) = \frac{1}{3}$

on pose $Y = X^2$.

donc : $P(Y=0) = P(X=0) = \frac{1}{3}$

$$P(Y=1) = P(X=1) + P(X=-1)$$
$$= \frac{2}{3}.$$

$$E(X) = 0, \quad E(Y) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 1$$
$$= \frac{2}{3}.$$

Or: $XY = X \cdot X^2 = X^3 = X$

$$((-1)^3 = -1, \quad 0^3 = 0, \quad 1^3 = 1)$$

d'o $E(XY) = E(X) = 0$

$$= 0 \times \frac{2}{3} = E(X) \cdot E(Y).$$

X et Y ne sont pas ind. car ($X^2 = Y$.)

$$P(X = 1, Y = 0) = P(X = 1, X^2 = 0)$$
$$= 0$$

Mais $P(X = 1) = \frac{1}{2}$ et $P(Y = 0) = \frac{1}{2}$

donc $P(X = 1, Y = 0) \neq P(X = 1) \cdot P(Y = 0)$.

Rq. 2.6.15 : par réc. et grâce au lemme des coalitions : si $X_1 \ldots X_n$ sont des v.a.

mut. ind., alors :

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i).$$

Inégalité de Markov :

Ex. 2.6.18 : n étudiants ont travaillé au mois de juillet. En moyenne, ils ont gagné 750 € chacun.

Quelle proportion d'élèves a gagné plus que N euros ? (i.e. $P(X \geq N)$ où X est la v.a. qui donne le gain de chaque étudiant)

- Si $N = 0$: cette proportion vaut 1
- n étudiants, 750 € en moyenne,
  donc le gain cumulé de tous les étudiants
  est $n \times 750$.
  donc si $N > n.750$,
  $$P(X \geq N) = 0.$$

Si $N = 750.n$: si 1 étudiant a tout gagné, et les autres 0 : $P(X \geq N) = \frac{1}{n}$. Sinon, $P(X \geq N) = 0$.

et si $N \in [0, n.750]$?

Prop. 2.6.16 : X v.a. réelle, p.s. elle est à valeurs ≥ 0. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$P(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t}.$$

Dém :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X(\omega)$$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ t > X(\omega) \geq 0}} \overbrace{P(\{\omega\})}^{\geq 0} \underbrace{X(\omega)}_{\geq 0}}_{\geq 0} + \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) \geq t}} \cdots + \underbrace{\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) < 0}} \overbrace{P(\{\omega\})}^{= 0} X(\omega)}_{= 0}$$

$$\geq \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) \geq t}} \underbrace{P(\{\omega\})}_{\geq 0} \cdot \underbrace{X(\omega)}_{\geq t}$$

$$\geq t \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) \geq t}} P(\{\omega\})$$

$$\geq t \, P\Big(\bigsqcup_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) \geq t}} \{\omega\} \Big)$$

$$\geq t \, P(X \geq t)$$

$t > 0$ donc : $\dfrac{E(X)}{t} \geq P(X \geq t)$.

$\square$

<u>ex</u> : n ét. , 750 € / ét. en moyenne.

$$P(X \geq 1000) \leq \frac{750}{1000}$$

75% au plus des étu. ont gagné + de 1000 euros.

[cas extrême : 75% des ét. ont gagné

1000 euros, et les autres rien du tout].