

## Devoir à la maison n° 8

À rendre le 07 décembre

Soit  $d_1, d_2, \dots, d_9$ , neuf entiers relatifs distincts.

On note  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$n \mapsto (n + d_1) \times \dots \times (n + d_9)$$

L'objectif de ce problème est de montrer qu'il existe  $N \in \mathbb{Z}$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $f(n)$  est divisible par un nombre premier supérieur ou égal à 20.

On se place pour commencer dans le cas où  $d_1, \dots, d_9$  sont des entiers strictement positifs.

On note  $H$  le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à 20 et  $p_1, \dots, p_H$  ces entiers.

- 1) Déterminer  $H$ .
- 2) On pose  $d = \max(d_1, \dots, d_9)$  et  $N = d^8$ . On suppose par l'absurde qu'il existe  $n \geq N$  tel que tous les diviseurs premiers de  $f(n)$  soient inférieurs ou égaux à 20.  
Montrer alors que pour tout  $i \in \{1, \dots, 9\}$ , il existe un nombre premier  $q_i$  avec  $q_i \leq 20$  et un entier  $\alpha_i$  tels que  $q_i^{\alpha_i} \mid n + d_i$  et  $q_i^{\alpha_i} > d$ .
- 3) En déduire qu'il existe  $i$  et  $j$  avec  $i \neq j$  tels que  $q_i = q_j$ .
- 4) Montrer qu'alors  $q_i^{\min(\alpha_i, \alpha_j)}$  divise  $d_i - d_j$ .
- 5) En déduire une absurdité.
- 6) Conclure.
- 7) On se place maintenant dans le cas général, c'est-à-dire qu'on ne suppose plus que  $d_1, \dots, d_9$  sont strictement positifs. Montrer que le résultat est encore vrai et donner, en fonction de  $d_1, \dots, d_9$ , une valeur de  $N$  convenant.

— FIN —