Barème.

- Calculs : chaque question sur 2 point, total sur 28 points, ramené sur 5 points, +60%.
- Problème et exercice de TD : exercice de TD sur 8 points, chaque question du problème sur 4 points, total sur 80 points, ramené sur 15 points, +70%.

Statistiques descriptives.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \min\left(\frac{1}{10}\lceil 10x \rceil ; 20\right)$.

	Calculs	Problème	Note finale
Transformation	c	p	$\varphi\left(1,6\frac{5c}{28} + 1,7\frac{15p}{80}\right)$
Note maximale	$18,5$	56	$20+$
Note minimale	4	0	$1,8$
Moyenne	$\approx 9,31$	$\approx 23,90$	$\approx 10,27$
Écart-type	$\approx 3,23$	$\approx 10,53$	$\approx 3,60$
Premier quartile	$7,5$	18	$8,1$
Médiane	$8,75$	$22,75$	$9,7$
Troisième quartile	$10,25$	$30,75$	$12,4$

Remarques générales.

• Veillez à rédiger proprement vos récurrences. Notamment, pour montrer l'hérédité, on commence toujours par « Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons [...] ». Écrire l'hypothèse de récurrence comme P_m : « $\forall m \in \mathbb{N}$, [...] » est une erreur classique à essayer de ne pas commettre (notamment, j'ai insisté dessus en cours ...).
• Un des points délicats du problèmes était que les objets manipulés sont des fonctions. Vous ne pouvez par exemple pas écrire « si $x \in \mathbb{N}$, $\Delta(g) = g(x+1) - g(x)$ » : le membre de gauche est une fonction, celui de droite est un nombre. De même, vous ne pouvez pas écrire « la fonction $f_0(x)$ est constante » : $f_0(x)$ est un nombre (d'ailleurs : qu'est-ce que x ?), et non une fonction.
• Vous devez encadrer la réponse à la question. Si vous encadrez $\boxed{= 0}$ à la fin d'un calcul, votre réponse est « $= 0$ ». Mais qu'est-ce qui est égal à 0 ?
• Certains commettent de lourdes erreurs qui invalident complètement leurs (longues) réponses, et donnent parfois le sentiment de vouloir « arnaquer » le correcteur. Je pense que cela vient d'une mauvaise gestion du brouillon. Vous devez commencer à chercher au brouillon les questions qui vous semblent délicates (ou qui utilisent des notations sur lesquelles vous ne vous sentez pas à l'aise). Une fois une solution trouvée (ou suffisamment débroussaillée), vous pouvez la rédiger sur votre copie, en la synthétisant le plus possible. Vous devez être convaincus qu'écrire quelque chose de faux ne vous fera gagner aucun point sur la question, mais vous en fera en revanche perdre dans la suite du sujet : le correcteur n'aura plus confiance en vous et ne vous laissera plus le bénéfice du doute en cas d'imprécision. Donner au correcteur l'impression que vous essayez de l'arnaquer est la pire des choses possibles : s'il n'arrête pas de corriger votre copie, il vous pénalisera sévèrement au *moindre* doute.
• Vous devez respecter les notations de l'énoncé. Par exemple, traiter la partie **I** en remplaçant les puissances factorielles descendantes ($x^{\underline{m}}$) par les puissances usuelles (x^m) n'apporte aucun point, au contraire (*cf.* le point précédent).
• Si les notations introduites vous déstabilisent, pratiquez les d'abord sur un petit exemple (par exemple, calculez $5^{\underline{0}}$, $5^{\underline{1}}$, $5^{\underline{2}}$, $5^{\underline{3}}$ *etc.*). C'est d'autant plus important que ces notations sont utilisées dans tout l'énoncé, et que ne pas les comprendre risque d'invalider *tout* votre travail.
• Pour introduire des variables, évitez d'utiliser « avec » (ex : « on a $n = 3p + 5q + 7r$ avec $p, q, r \in \mathbb{N}$ »), au profit de « il existe », écrit avant l'introduction de l'objet. La deuxième manière d'introduire un objet est certes parfois un peu plus lourde, mais vous évitera souvent de faire des erreurs.
• Je vous rappelle que vous devez justifier toutes vos affirmations. C'est simple : pas de justification, pas de point.
• Merci de retenir l'orthographe du mot récurrence. Commencer une copie par « Montrons par réccurence que [...] » n'est pas du plus bel effet ...

I - Un exercice vu en TD.

Dire que l'ensemble des scores possibles est $\{ 3n + 5p + 7q \mid n, p, q \in \mathbb{N} \}$ n'est pas une réponse acceptable, mais juste une étape de modélisation de l'énoncé, dont vous pouviez vous passer (*cf.* le corrigé distribué).

II - Calcul des $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k^m$.

1) Si $x < m$, ce n'est pas parce que $(x - m)!$ n'existe pas que $x^{\underline{m}} = 0$ ...

Si vous effectuez un renversement d'indice, vous devez le signaler. De plus, écrire le produit avec des « ... » ne constitue pas une preuve. Cette écriture ne vous est donnée dans l'énoncé que pour vous faire comprendre la définition, afin que vous puissiez la manipuler sur des exemple simples en cas de difficultés, par exemple.

2) Cette question est simple mais très importante, car vous l'utilisez souvent par la suite. Heureusement, vous pouviez vérifier la propriété obtenue (par exemple sur le calcul *à la main* des $5^{\underline{k}}$).

3) Attention, dans la démonstration de l'hérédité, vous devez utiliser le résultat de la question **2)** : $(a+b)^{\underline{m+1}} = (a+b-m)(a+b)^{\underline{m}}$, et de même pour faire apparaître les $a^{\underline{k+1}}$ et $b^{\underline{m+1-k}}$.

La relation $a^{\underline{k+1}} = a \cdot a^{\underline{k}}$ est grossièrement fausse, comme devait vous le montrer clairement la question **2)**.

Il est dommage de commencer cette question par une telle erreur : ce long calcul est intégralement faux et ne rapporte aucun point ...

Cette propriété doit s'initialiser au rang $m = 0$!

4) Attention, $\Delta(f_0)(x)$ ne vaut pas $x^{\underline{1}} - x^{\underline{0}}$! Revenez précisément à la définition : $\Delta(f_0)(x) = f_0(x+1) - f_0(x)$ ou, mieux, remarquez que f_0 est constante.

5) Si vous avez choisi de développer $(x+1)^{\underline{m}}$ par la formule du binôme montrée en **3)** (c'était une bonne idée), n'oubliez pas que $1^{\underline{k}}$ ne vaut pas toujours 1, comme vu en **1)** !

6) Certains n'ont pas vu qu'ils redémontraient la formule du triangle de Pascal. Et d'autres l'ont utilisée sans la nommer. Je vous rappelle la règle générale : chaque fois que l'on utilise un résultat, on l'annonce.

Attention, la formule $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ est fausse pour $n < k$: vous divisez par zéro !

7) La fonction g est réintroduite dans cette question et est donc quelconque. Ce n'est donc pas une fonction constante, comme supposé (uniquement) dans la question **4)**.

8) Avec deux fonctions e, e' solutions, j'ai lu : « $e(1) = e'(1)$ donc $e = e'$ ». C'est une erreur préoccupante (et si vous avez tenté d'arnaquer le correcteur c'est encore plus préoccupant) ...

Après avoir trouvé la forme nécessaire de e (phase d'analyse ou unicité), n'oubliez pas de vérifier que la fonction trouvée est bien solution (phase de synthèse ou existence)

Parler ici de la fonction exponentielle et de la dérivation usuelle sur $\mathbb{R}$ est strictement hors-sujet.

9) Revenez précisément (et tranquillement) à la définition : $\Delta(I(f))$ est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Si $x \in \mathbb{R}$, $\Delta(I(f))(x) = I(f)(x+1) - I(f)(x)$. Il ne vous reste plus qu'à traduire ce que vaut $\Delta(f)(k)$. Si les choses ne sont pas claires pour vous, n'hésitez pas à poser au brouillon $i = I(f)$, vous calculez ensuite $\Delta(i)$ ...

10) Revenez précisément (et tranquillement) à la définition : $I(\Delta(f))$ est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Si $x \in \mathbb{R}$, $I(\Delta(f))(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{x-1} \Delta(f)(x)$. Il ne vous reste plus qu'à traduire ce que vaut $\Delta(f)(k)$. Si les choses ne sont pas claires pour vous, n'hésitez pas à poser au brouillon $d = \Delta(f)$, vous calculez ensuite $I(d)$ ...

11) J'ai lu : « $I(f)$ est une primitive de f s'annulant en 0 (d'où l'existence) et $I(f)$ est unique, d'où l'unicité » : cela n'a pas de sens !

14) Écrire $\begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n-1 \\ 0 \end{Bmatrix} + 1 \times \begin{Bmatrix} n-1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ est illicite pour $n = 1$: $\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$ n'est pas défini par l'énoncé. Vous pouviez (à la limite) écrire que vous étendiez ces symboles au cas $k > n$ en justifiant que cette relation de récurrence est alors toujours vérifié.

Certains ont procédé ainsi et ont écrit (en substance) : « si $n \geqslant 2$, [...], alors $\begin{Bmatrix} n-1 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$, donc $\begin{Bmatrix} n \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$ ». C'est franchement maladroit.

15) Que d'erreurs sur cette petite question qui ne demandait que d'additionner quelques entiers !