

**EL5 : DIPOLES LINEAIRES EN REGIME SINUSOIDAL FORCE
IMPEDANCES COMPLEXES**

Hypothèses valables dans tout le chapitre :

- On considère un circuit ne contenant que des dipôles linéaires au sens du régime variable, donc modélisables par l'association de dipôles R, L, C, de générateurs de courant ou de tension idéaux.
- On se place dans le cadre de l'A.R.Q.S.

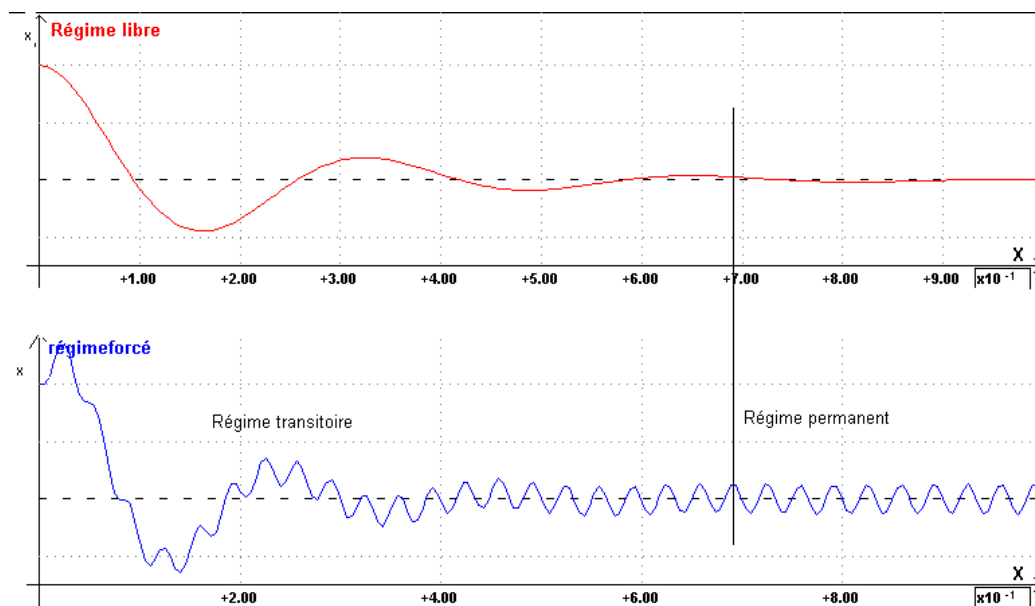
I. Régime sinusoïdal permanent

• La mise en équation d'un réseau linéaire aboutit à des équations différentielles linéaires à coefficients constants dont le second membre est lié au générateur de commande.

La solution de l'équation différentielle est du type :

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

<p>Solution d'équation homogène. $x_1(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ <u>Régime transitoire.</u></p>	<p>Solution particulière de l'équation totale <u>Régime forcé.</u></p>
---	---



Lorsque le régime transitoire a disparu la solution s'identifie à $y_2(t)$ le régime forcé.

Ainsi

- Deux phases dans l'évolution de la grandeur électrique :
- Le régime transitoire : C'est le régime obtenu tant que y_1 n'est pas négligeable devant y_2 . Sa durée est limitée et caractérisée par la constante de temps du circuit (ou temps de relaxation, noté τ)
- Le régime forcé ou permanent : C'est le régime obtenu quand y_1 est négligeable devant y_2 . Il est obtenu au bout d'un temps $t_0 \gg \tau$ (en pratique t_0 est de l'ordre de quelques τ).

En régime permanent : $y(t) \approx y_2(t)$.

- Dans ce chapitre le terme source sera une fonction sinusoïdale de pulsation ω .

D'après la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants :

en régime sinusoïdal permanent, toutes les grandeurs électriques du réseau (courants ou tensions) sont des fonctions sinusoïdales de même pulsation ω , celle imposée par le générateur de commande.

Exemple :

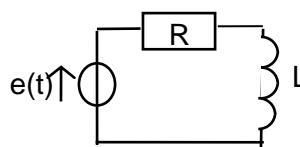
$$t < 0 \quad e(t) = 0$$

$$t > 0 \quad e(t) = E \cos(2\pi\nu t)$$

$$\text{Mise en équation pour } t > 0 : L \frac{di}{dt} + Ri = E \cos(2\pi\nu t)$$

$$\text{Régime transitoire : } i(t) = A \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) + B \cos(2\pi\nu t + \varphi)$$

$$\text{Régime permanent : } i(t) = B \cos(2\pi\nu t + \varphi)$$



II. Représentations d'une grandeur sinusoïdale

II.1. Valeurs instantanées

On exprime la fonction : $u(t) = U_{\max} \cos(\omega t + \varphi)$.

→ U_{\max} : amplitude

→ ω : pulsation

→ $\omega t + \varphi$: phase instantanée

→ φ : phase à l'origine

Relations : $\omega = 2\pi / T = 2\pi\nu$ où ν est la fréquence et T la période.

On utilise souvent **la valeur efficace** :

$$U_{\text{eff}} = U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} = \sqrt{u_{\text{moy}}^2} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U_{\max}^2 \frac{\cos^2(2\omega t + 2\varphi)}{2} dt} = \sqrt{\frac{U_{\max}^2}{2T} T}$$

$$\Rightarrow \boxed{U = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}}$$

$$u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$$

II.2. Représentation vectorielle : méthode de Fresnel

II.2.1. Définition du vecteur de Fresnel:

Soit Ox l'axe de référence des phases, d'origine O .

Il s'agit d'associer à la grandeur sinusoïdale un vecteur \overrightarrow{OM} tournant dans le sens trigonométrique à la vitesse angulaire ω autour du point origine O .

Par convention :

$$\rightarrow \|\overrightarrow{OM}\| = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} = U \text{ valeur efficace}$$

$$\rightarrow (\widehat{Ox, OM}) = \omega t + \varphi$$

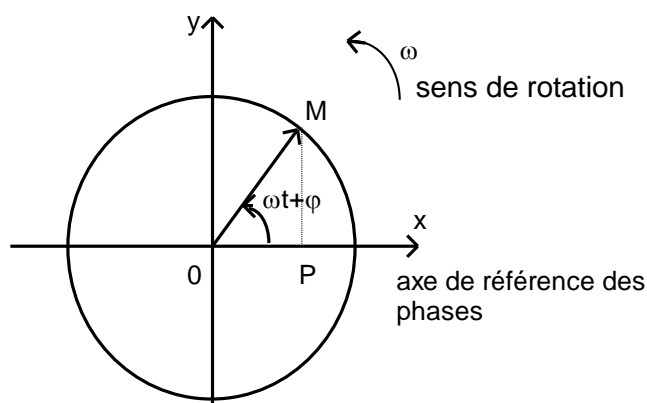
\overrightarrow{OM} : **vecteur de Fresnel** associé à

$$u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$$

Projection de \overrightarrow{OM} sur l'axe de référence :

$$\overline{OP} = U \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{d'où : } \forall t, u(t) = \sqrt{2} \overline{OP}$$

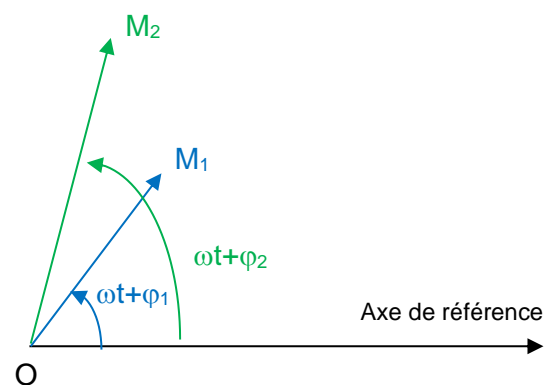


On appelle **diagramme de Fresnel** la figure représentant dans le même système d'axes plusieurs grandeurs sinusoïdales **de même pulsation**.

II.2.2. Somme de deux grandeurs sinusoïdales de même pulsation.

Soit $u_1(t) = U_1\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_1)$ associé au vecteur de Fresnel: $\overrightarrow{OM_1}$,
 et $u_2(t) = U_2\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_2)$ associé au vecteur de Fresnel: $\overrightarrow{OM_2}$,

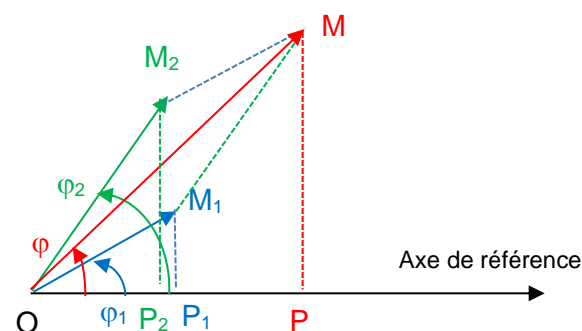
- Le triangle OM_1M_2 est indéformable au cours du temps et l'angle $\theta = (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = \varphi_2 - \varphi_1$ représente le déphasage de u_2 par rapport à u_1 .
 Ainsi on a pour coutume de représenter les vecteurs à l'instant $t = 0$, puisque tous les vecteurs tournent à la même vitesse.



- $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ est le vecteur de Fresnel associé à $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$.

En effet $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$ est la projection de $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$

Si on pose $u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$, U et φ peuvent être déterminés géométriquement.



II.2.3. Intérêt.

- $\frac{du(t)}{dt} = U\sqrt{2}\omega \cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$ est représenté par un vecteur de norme $U\omega$ faisant un angle $+\pi/2$ avec le vecteur représentant $u(t)$.
- $\int u(t)dt = \frac{U}{\omega} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi - \pi/2)$ est représenté par un vecteur de norme U/ω faisant un angle $-\pi/2$ avec le vecteur représentant $u(t)$.
- Une loi des nœuds (pour un diagramme en courant) ou une loi des mailles (pour un diagramme en tension) se traduira par une somme vectorielle.

La représentation de Fresnel est très commode dans les cas simples, en effet il suffit d'une lecture graphique et donc de calculs plus simples. Un dessin suffisamment grand et très soigné donne une précision suffisante.

II.3. Représentation complexe

II.3.1. Définitions

C'est la représentation la plus utilisée.

On utilise le complexe j tel que $j^2 = -1$ pour qu'il n'y ait pas de confusion avec i l'intensité.

Grandeur sinusoïdale instantanée

$$u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$$

\Rightarrow

Grandeur complexe instantanée

$$\underline{u}(t) = U\sqrt{2} \exp(j\varphi) \exp(j\omega t)$$

Passage d'une représentation à l'autre: $u(t) = \text{Re}(\underline{u}(t))$

On appelle : Grandeur efficace complexe : $\underline{U} = U \exp(j\varphi)$

Amplitude complexe : $\underline{U}\sqrt{2} = U\sqrt{2} \exp(j\varphi)$

$$\Rightarrow \underline{u}(t) = \underline{U}\sqrt{2} \exp(j\omega t)$$

II.3.2. Intérêt

- $\frac{du(t)}{dt} = U\sqrt{2}\omega \cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$ associé à : $j\omega \underline{U}$
 - $\int u(t)dt = \frac{U}{\omega}\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi - \pi/2)$ associé à : $\underline{U} / j\omega$
- Rq: $\frac{d^2u}{dt^2} \leftrightarrow (j\omega)^2 u(t) = -\omega^2 \underline{U}$

II.3.2. Lois de Kirchhoff

• Loi des mailles :

En régime sinusoïdal forcé toutes les ddp sont à la même pulsation.

ddp aux bornes de la branche k : $u_k(t) = U_k\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_k) \Rightarrow \underline{u_k(t)} = U_k\sqrt{2} \exp(j\omega t) \exp(j\varphi_k)$.

Loi des mailles : $\forall t, \sum u_k(t) = 0 \Rightarrow \forall t, \sum \text{Re}(\underline{u_k(t)}) = 0 \Rightarrow \forall t, \text{Re}(\sum \underline{u_k(t)}) = 0$

Cette relation étant valable à chaque instant : $\sum \underline{u_k(t)} = 0$.

On en déduit : $\sum \underline{U_k} = 0$ (relation entre valeurs efficaces complexes)

La loi des mailles est valable pour un régime sinusoïdal forcé avec les grandeurs efficaces complexes.

• Loi des nœuds

De même $\sum \underline{I_k} = 0$.

Ainsi l'ensemble des résultats établis dans la théorie des réseaux linéaires en régime continu s'étend au régime sinusoïdal forcé en utilisant les grandeurs efficaces complexes, si l'ARQS est valable.

III. Dipôles idéaux R, L, C


III.1. Résistance R

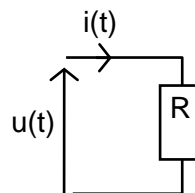
• Valeurs instantanées

$$u(t) = Ri(t)$$

$$\text{Si } i(t) = I\sqrt{2}\cos\omega t \Rightarrow u(t) = R I\sqrt{2} \cos\omega t$$

Le courant et la tension sont en phase.

• Diagramme de Fresnel : $\underline{I} = \underline{U}/R$ 



• Représentation complexe : $\underline{I_R} = \underline{I} \rightarrow u_R(t) = R i_R(t)$

On pose $\underline{u(t)} = \underline{U}\sqrt{2}\exp(j\omega t)$ et on en déduit $\underline{U} = R \underline{I}$

En régime sinusoïdal et en notation complexe on se ramène à une écriture de la forme $\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}$ où \underline{Z} est l'impédance complexe du dipôle.

Impédance d'un résistor parfait : $\underline{Z_R} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R$

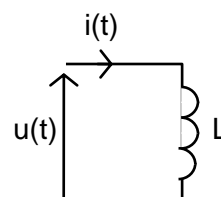
III.2. Inductance L

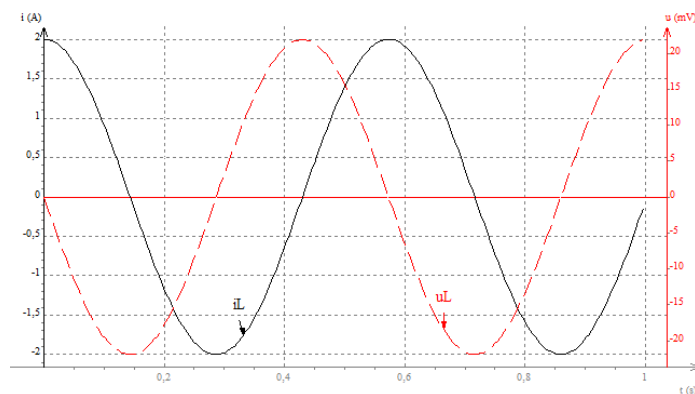
• Valeurs instantanées

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

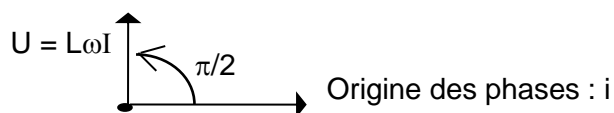
$$\text{Si } i(t) = I\sqrt{2}\cos\omega t \Rightarrow u(t) = L\omega I \sqrt{2}\cos(\omega t + \pi/2)$$

La tension aux bornes de L est en avance de $\pi/2$ sur le courant ;
on dit aussi que la tension est en quadrature avance sur le courant.





- Diagramme de Fresnel :



- Représentation complexe :

$$\underline{I} = I$$

$$\Rightarrow u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \underline{U} = jL\omega \underline{I}$$

Impédance complexe d'une inductance L : $\underline{Z}_L = jL\omega$

Remarque : Quand ω augmente, $|\underline{Z}_L| = L\omega$ augmente ; or $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}$, donc L limite d'autant plus le courant que la pulsation est grande.

quand $\omega \rightarrow \infty$, $Z_L \rightarrow \infty$ la bobine se comporte comme un coupe circuit.

quand $\omega \rightarrow 0$, $Z_L \rightarrow 0$ la bobine se comporte comme un court-circuit.

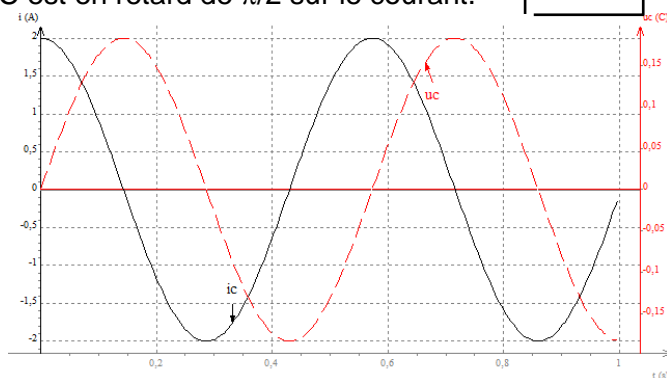
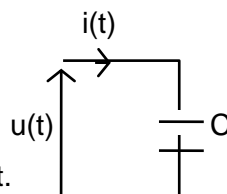
III.3. Capacité C

- Valeurs instantanées

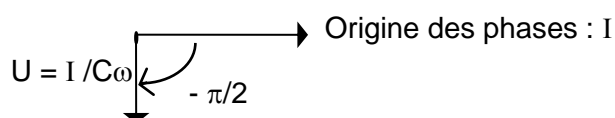
$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

$$\text{Si } i(t) = I\sqrt{2}\cos\omega t \Rightarrow u(t) = I/C\omega \sqrt{2}\cos(\omega t - \pi/2)$$

La tension aux bornes de C est en retard de $\pi/2$ sur le courant.



- Diagramme de Fresnel :



• Représentation complexe :

$$i(t) = I\sqrt{2}\exp(j\omega t)$$

$$\Rightarrow u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

$$\Rightarrow \underline{U} = \frac{1}{jC\omega}$$

Impédance d'une capacité $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$

Remarque: Quand ω augmente, $|\underline{Z}_C| = 1/C\omega$ diminue; or $U = Z_C I$ donc C limite d'autant plus la tension à ses bornes que la pulsation est grande.

quand $\omega \rightarrow \infty$, $Z_C \rightarrow 0$ le condensateur se comporte comme un court-circuit.

quand $\omega \rightarrow 0$, $Z_C \rightarrow \infty$ le condensateur se comporte comme un coupe-circuit.

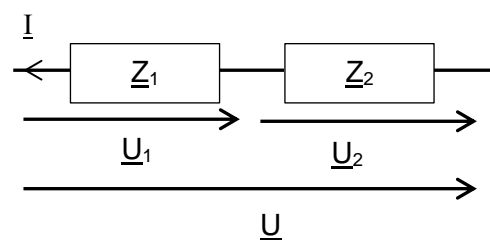
IV. Utilisation des impédances des admittances complexes

IV.1. Association de deux impédances

IV.1.1. Association en série

Dans le cas de 2 impédances \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 associées en série, avec les notations complexes

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_1 + \underline{U}_2 \\ \text{or } \underline{U}_1 &= \underline{Z}_1 \underline{I} \text{ et } \underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I} \\ \text{d'où } \underline{U} &= (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \underline{I} \end{aligned}$$



Dans le cas de 2 impédances \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 associées en série l'impédance équivalente est la somme des impédances :

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$

Ce résultat établi pour deux impédances peut être généralisé à N impédances

Exemples :

$$\underline{Z} = \underline{Z}_L + \underline{Z}_R = R + jL\omega$$

$$\underline{Z} = \underline{Z}_C + \underline{Z}_R = R + 1/jC\omega$$

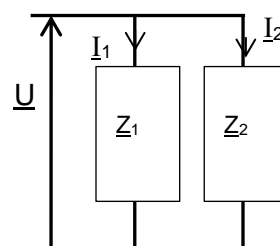
IV.2.2. Association parallèle

Dans le cas de 2 Impédances \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 associées en parallèle avec les notations complexes :

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \\ \text{or } \underline{I}_1 &= \underline{U} / \underline{Z}_1 \text{ et } \underline{I}_2 = \underline{U} / \underline{Z}_2 \end{aligned}$$

On introduit alors l'admittance complexe définie par $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$

$$\text{Ainsi } \underline{I} = (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2) \underline{U}$$



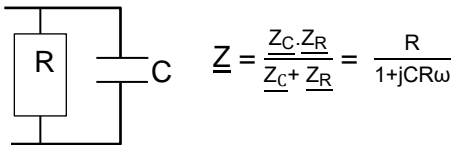
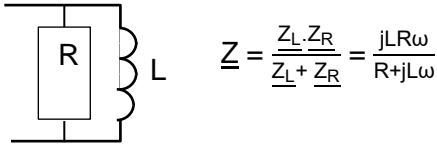
Dans le cas de 2 impédances \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 associées en parallèle l'impédance équivalente est telle que

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$$

En terme d'admittances : $\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$

Ce résultat établi pour deux impédances peut être généralisé à N impédances.

Exemples :



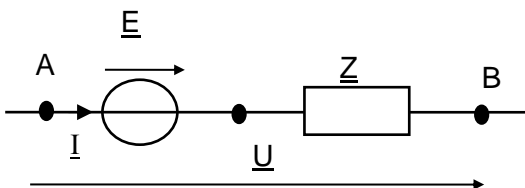
IV.2. Modèle générateur

IV.2.1. Générateur de tension

- Il s'agit de dipôles dont la relation tension courant s'écrit en notations complexes : $\underline{U} = \underline{E} - \underline{Z} \underline{I}$.

Il en résulte qu'un dipôle linéaire peut être représenté par l'association série d'un générateur de tension idéal de fem \underline{E} et d'une impédance \underline{Z} dite impédance interne du générateur de tension équivalent au dipôle.

Représentation de Thévenin du dipôle linéaire

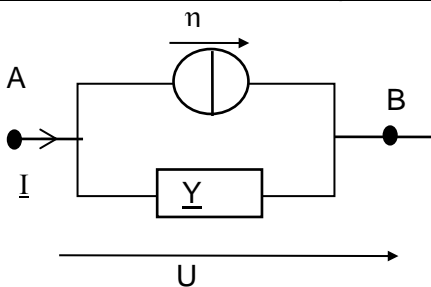


IV.2.2. Générateur de courant

- Il s'agit de dipôles dont la relation courant tension s'écrit : $\underline{I} = \underline{\eta} - \underline{Y} \underline{U}$.

Il en résulte qu'un dipôle linéaire peut être représenté par l'association parallèle d'un générateur de courant idéal de cem $\underline{\eta}$ et d'une admittance \underline{Y} dite admittance interne du générateur de courant équivalent au dipôle

Représentation de Norton du dipôle linéaire



- Remarque

Dans la pratique on utilise peu les conductances, on préfère utiliser les impédances. La relation s'écrit alors : $\underline{I} = \underline{\eta} \cdot \underline{U} / \underline{Z}$.

IV.2.3. Passage d'un modèle à l'autre

Comme tout modèle, ces représentations traduisent des phénomènes extérieurs au dipôle. Ces deux modèles traduisent la même réalité physique, ils sont donc strictement équivalents.

Le passage d'un modèle à l'autre lorsque les conventions générateurs ont été choisies :

$$\underline{Y} = 1 / \underline{Z} \text{ et } \underline{\eta} = \underline{E} / \underline{Z}$$

IV.3. Les diviseurs en régime sinusoïdal

IV.3.1. Diviseur de tension

- Le schéma d'un diviseur de tension correspond à l'association de deux impédances en série.

On a les relations suivantes :

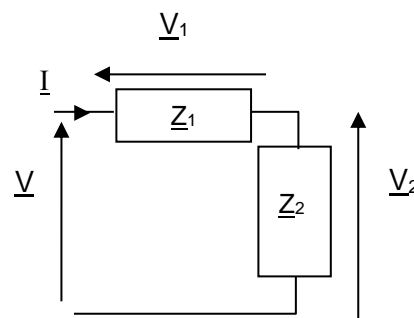
$$\underline{V} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \underline{I}$$

$$\underline{V}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}$$

$$\underline{V}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}$$

Ainsi on obtient :

$$\underline{V}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1} \underline{V} \text{ et } \underline{V}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1} \underline{V}$$



On peut bien sur généraliser ce résultat dans le cas de N impédances. Attention aux sens d'orientation des tensions

IV.3.2. Diviseur de courant

- Le schéma d'un diviseur de courant correspond à l'association de deux impédances en parallèle.

On a les relations suivantes :

$$\underline{I} = (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2) \underline{V}$$

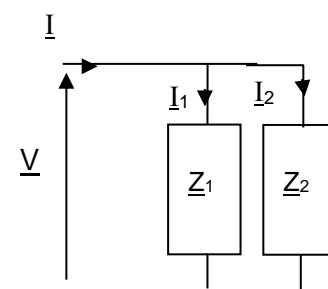
$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_1 \underline{V}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{Y}_2 \underline{V}$$

Ainsi on obtient :

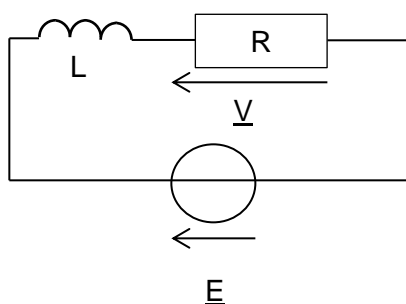
$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_2 + \underline{Y}_1} \underline{I} \text{ et } \underline{I}_2 = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_2 + \underline{Y}_1} \underline{I}$$

$$\text{soit encore } \underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1} \underline{I} \text{ et } \underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1} \underline{I}$$



Attention au sens d'orientation des intensités.

IV.3.3. Exemples



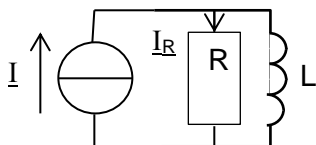
$$\underline{V} = \frac{R}{R + jL\omega} \underline{E}$$

$$\text{Si } e(t) = E\sqrt{2} \cos(\omega t)$$

$$\text{Alors } v(t) = V\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{Avec } V = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

$$\text{Et } \tan \varphi = -\frac{L\omega}{R}$$



$$I_R = \frac{jL\omega}{R+jL\omega} I$$

$$\text{Si } i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t)$$

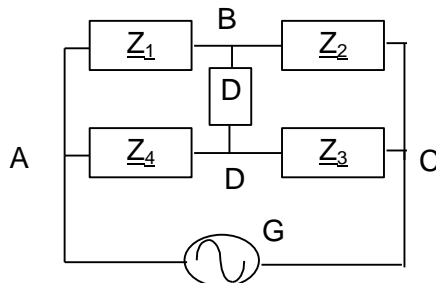
$$\text{Alors } i_R(t) = I_R\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{Avec } I_R = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

$$\text{Et } \varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad \text{avec } \tan \alpha = \frac{L\omega}{R}$$

Equilibrer un pont

Cela revient à chercher la condition qui rend l'intensité traversant la branche BD nulle.



$$\text{Ainsi } V_B - V_D = 0$$

On applique alors deux diviseurs de tensions :

$$V_A - V_D = \frac{Z_4}{Z_4 + Z_3} G$$

$$V_B - V_A = -\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} G$$

$$V_B - V_D = V_B - V_A + V_A - V_D = \frac{Z_4}{Z_4 + Z_3} G - \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} G$$

$$\text{Ainsi } V_B - V_D = 0 \Leftrightarrow Z_2 \cdot Z_4 = Z_1 \cdot Z_3$$

Exemple d'application : Le pont de maxwell

Z_1 : L série r ; Z_2 résistance P réglable ; Z_3 : C parallèle R ; Z_4 résistance Q réglable

L'équilibre du pont est réalisé si : $PQ = (r+jL\omega)\left(\frac{R}{1+jRC\omega}\right) \Leftrightarrow PQ + jRCPQ\omega = rR + jLR\omega$

Soit $r = \frac{PQ}{R}$ et $L = CPQ$

V. La résonance

V.1. Définition

Nous allons étudier un circuit linéaire comprenant :

- des dipôles R, L et C de valeurs constantes
- un générateur sinusoïdal d'amplitude fixe mais dont on peut faire varier la pulsation.

Par définition on appelle **résonance** l'obtention **d'un maximum** de la grandeur étudiée (intensité ou tension) en **régime sinusoïdal forcé**. La pulsation correspondante s'appelle **pulsation de résonance**. On la note ω_R .

La bande passante : c'est le domaine de fréquences (ou de pulsations) pour lesquelles la grandeur étudiée est au moins égale à la valeur maximale divisée par $\sqrt{2}$

V.2. Résonance en courant dans un circuit RCL série

V.2.1. Expression du courant

On a $\underline{U} = (R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega}))\underline{I}$

D'où $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})}$

On se place alors en variable réduite :

$x = \frac{\omega}{\omega_0}$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

On introduit le facteur de qualité $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$

On a alors :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R \left[1 + j \left(\frac{L\omega_0}{R} \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{RC\omega_0} \frac{\omega}{\omega_0} \right) \right]} \Leftrightarrow \underline{I} = \frac{\underline{U}}{R \left[1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right) \right]}$$

On peut ainsi déterminer le module I de l'intensité ainsi que son déphasage θ par rapport à la tension.

$$I = \frac{U}{R \sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}}$$

On a alors résonance en intensité si $I = I_{\max} \Leftrightarrow x = 1$.

Ainsi à la résonance $\omega_R = \omega_0$, $\theta = 0$ et $I = U/R$.

A la résonance tout se passe comme si l'inductance et le condensateur étaient absents : le générateur se comporte alors comme s'il était branché directement sur la résistance.

D'un point de vue pratique la résonance peut poser problème dans un circuit car l'intensité qui y circule est très élevée.

V.2.2. La bande passante

C'est le domaine de fréquences (ou de pulsations) pour lesquelles la grandeur étudiée est au moins égale à la valeur maximale divisée par $\sqrt{2}$.

Pour notre étude :

$$I = I_{\max} \Leftrightarrow 1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 = 2$$

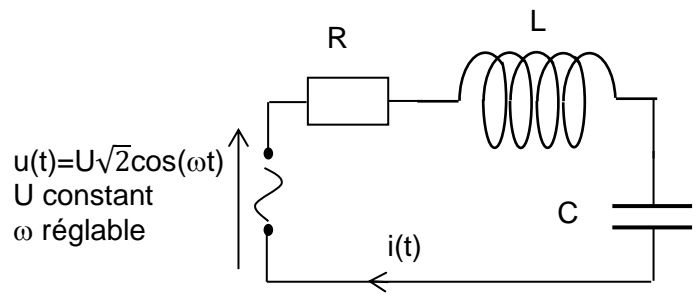
$$\Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = \pm \frac{1}{Q}$$

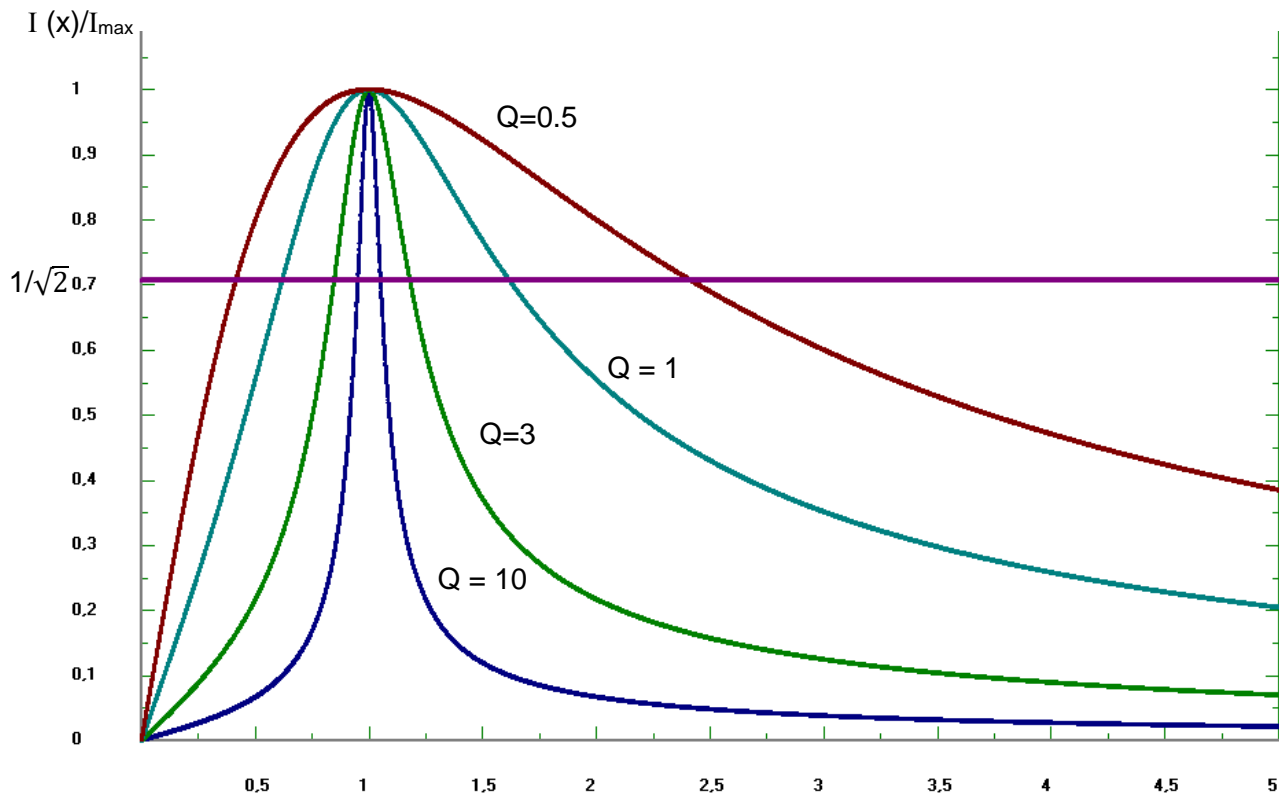
$$\Leftrightarrow x^2 \pm \frac{x}{Q} - 1 = 0$$

On ne garde que les racines positives $\Rightarrow x = \pm \frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}$

D'où $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$

La résonance est d'autant plus aigüe que le facteur de qualité est élevé.





Ce résultat fondamental renseigne très clairement sur le sens du facteur de qualité Q .

Un oscillateur de facteur de qualité élevé ne réagit notablement qu'à des excitations de fréquences très proches de la fréquence de résonance ν_0 : $\Delta\nu = \nu_0/Q$

Pour fixer les idées, un résonateur à quartz (à la base du fonctionnement des montres à quartz) possède un facteur de qualité de l'ordre de 10^4 , la résonance très aigüe en fait un circuit très sélectif.

A l'inverse si le facteur de qualité est faible, la bande passante est très importante. Le circuit laisse passer un plus grand domaine de fréquences.

V.2.3. Etude de la phase

$$\text{D'après les résultats } \underline{I} = \frac{\underline{U}}{R \left[1 + j \left(\frac{L\omega_0}{R} \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{RC\omega_0} \frac{\omega}{\omega_0} \right) \right]} \Leftrightarrow \underline{I} = \frac{\underline{U}}{R \left[1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right) \right]}$$

On a alors $\underline{I} = I \exp(j\theta)$

Si on prend l'origine des phases en $u(t)$, θ représente la phase de $i(t)$.

On a donc $\theta = \text{Arg}(\underline{U}) - \text{Arg}(1 + jQ(x - \frac{1}{x})) = -\text{Arg}(1 + jQ(x - \frac{1}{x}))$

Soit $\theta = -\arctan(Q(x - \frac{1}{x}))$

• Etude de θ

→ Si $\omega = \omega_0 \Rightarrow \theta = -\text{Arg}(1) = 0$

A la résonance la tension et l'intensité sont en phase. En effet on a déjà signalé que tout se passe comme si la bobine et le condensateur étaient absents.

→ Si $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow \theta = -\text{Arg}(jQx) = -\pi/2$

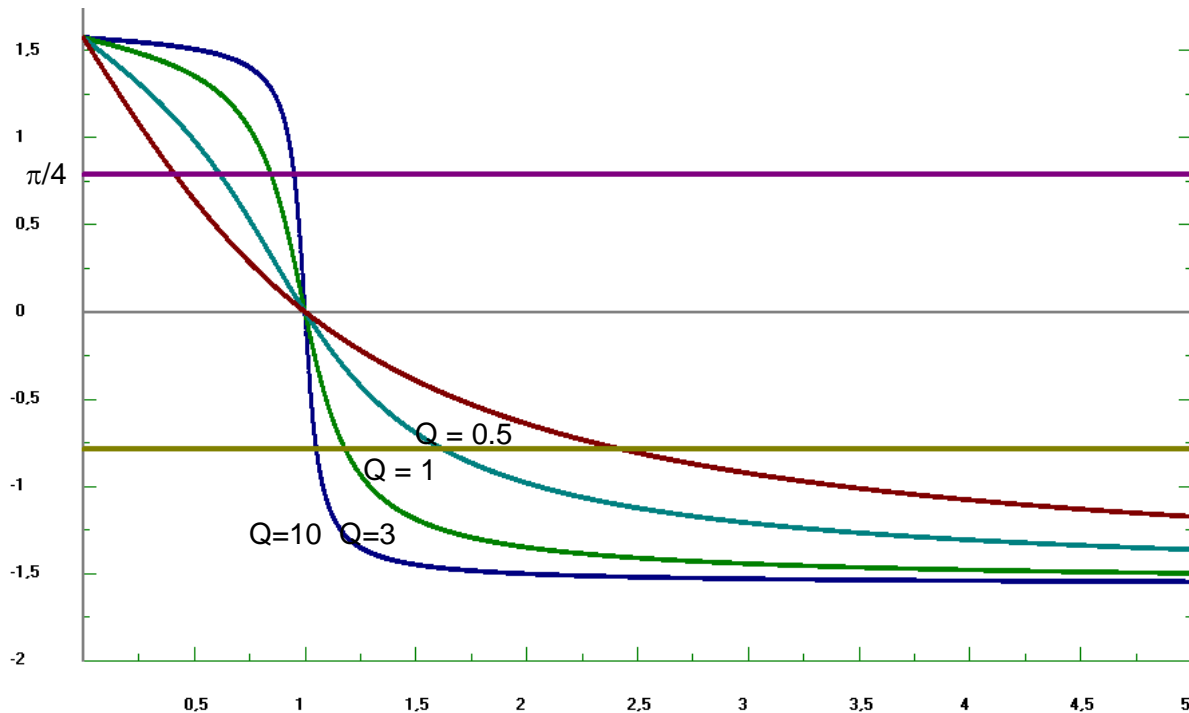
L'intensité est en quadrature retard par rapport à la tension.

→ Si $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow \theta = -\text{Arg}(-jQ/x) = +\pi/2$

L'intensité est en quadrature avance par rapport à la tension.

→ Si $\omega = \omega_c$ alors $Q(x - \frac{1}{x}) = \pm 1 \Rightarrow \theta = -\text{Arg}(1 \pm j) = \pm\pi/4$

On obtient alors les courbes suivantes en fonction du facteur de qualité.



Pour un facteur de qualité élevé, la phase varie très rapidement au voisinage de ω_0 . En revanche pour un facteur de qualité faible, les variations sont plus lentes et réparties sur un domaine de pulsation étendu.

V.3. Résonance en tension aux bornes du condensateur

V.3.1. Mise en équation

Le diviseur de tension en utilisant les grandeurs complexes :

$$\underline{U}_C = \frac{\underline{U}}{jC\omega \left[R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right]} = \frac{\underline{U}}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

On se place alors en variable réduite : $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

On introduit le facteur de qualité $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$

$$\underline{U}_C = \frac{\underline{U}}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}$$

On peut ainsi déterminer le module U_C de la tension aux bornes de la capacité ainsi que son déphasage φ par rapport à la tension.

$$\begin{cases} U_C = \frac{U}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}} \\ \varphi = \text{Arctg} \left[-\frac{x}{Q(1-x^2)} \right] \text{ si } x < 1 \text{ et } \pm \pi \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

V.3.2. Etude de la résonance

Selon les valeurs de Q il y a ou non une résonance en tension.

On remarque que pour tout Q :

- quand $x \rightarrow 0$ $U_C \rightarrow U$ et $\varphi \rightarrow 0$.
En effet $\frac{1}{C\omega} \rightarrow \infty$ donc $i \rightarrow 0$
- quand $x \rightarrow \infty$ $U_C \rightarrow 0$
En effet $\frac{1}{C\omega} \rightarrow 0$
- $x = 1$ $\underline{U}_C = -jQ\underline{U}$ il y a quadrature.

Déterminons la pulsation de résonance

$$U_C = U_{\text{cmax}} \Rightarrow y = (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} = y_{\text{min}}$$

$$\text{D'où } \frac{dy}{dx} = -2(1-x^2)2x + 2x/Q^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ non valable ici} \\ 1-x^2 = \frac{1}{2Q^2} \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

$\rightarrow Q < 1/\sqrt{2}$ système très amorti, régime critique et une partie des régimes apériodiques.
Il n'y a pas de phénomène de résonance.

$\rightarrow Q > 1/\sqrt{2}$ Il existe ω_R .

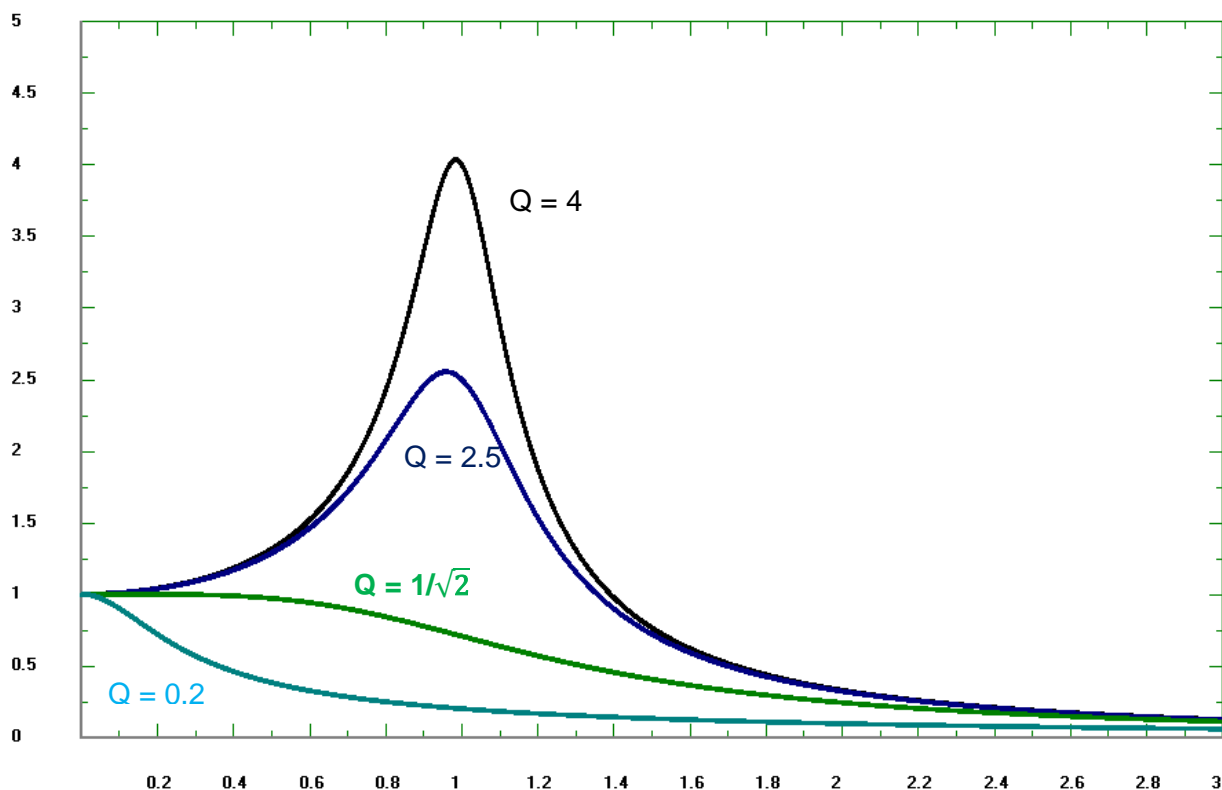
$$\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad \text{et} \quad U_{\text{cmax}} = \frac{QU}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

On appelle coefficient de surtension, le rapport de la valeur maximale de l'amplitude de la grandeur considérée à la valeur qu'elle aurait en régime statique.

$$\frac{U_{\text{cmax}}}{U} = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

Cas particulier des très faibles amortissements : $Q \gg 1 \Rightarrow \omega_R \approx \omega_0$ et $U_{\text{cmax}} \approx QU$

Si $U = 220\text{V}$ pour $Q = 20 \Rightarrow U_{\text{cmax}} = 4\,400\text{ V}$!



**EL5 : DIPOLES LINEAIRES EN REGIME SINUSOIDAL FORCE
IMPEDANCES COMPLEXES**

<u>I. Régime sinusoïdal permanent</u>	<u>1</u>
<u>II. Représentations d'une grandeur sinusoïdale</u>	<u>2</u>
<u>II.1. Valeurs instantanées</u>	<u>2</u>
<u>II.2. Représentation vectorielle : méthode de Fresnel</u>	<u>2</u>
II.2.1. Définition du vecteur de Fresnel:	2
II.2.2. Somme de deux grandeurs sinusoïdales de même pulsation.	3
II.2.3. Intérêt.....	3
<u>II.3. Représentation complexe</u>	<u>3</u>
II.3.1. Définitions	3
II.3.2. Intérêt.....	4
II.3.2. Lois de Kirchhoff	4
<u>III. Dipôles idéaux R, L, C</u>	<u>4</u>
<u>III.1. Résistance R</u>	<u>4</u>
<u>III.2. Inductance L</u>	<u>4</u>
<u>III.3. Capacité C</u>	<u>5</u>
<u>IV. Utilisation des impédances des admittances complexes</u>	<u>6</u>
<u>IV.1. Association de deux impédances</u>	<u>6</u>
IV.1.1. Association en série	6
IV.2.2. Association parallèle	6
<u>IV.2. Modèle générateur</u>	<u>7</u>
IV.2.1. Générateur de tension	7
IV.2.2. Générateur de courant	7
IV.2.3. Passage d'un modèle à l'autre	8
<u>IV.3. Les diviseurs en régime sinusoïdal</u>	<u>8</u>
IV.3.1. Diviseur de tension.....	8
IV.3.2. Diviseur de courant	8
IV.3.3. Exemples	8
<u>V. La résonance</u>	<u>9</u>
<u>V.1. Définition</u>	<u>9</u>
<u>V.2. Résonance en courant dans un circuit RCL série</u>	<u>10</u>
V.2.1. Expression du courant.....	10
V.2.2. La bande passante.....	10
V.2.3. Etude de la phase	11
<u>V.3. Résonance en tension aux bornes du condensateur</u>	<u>12</u>
V.3.1. Mise en équation.....	12
V.3.2. Etude de la résonance	13