2.1 Matrice d'une famille de vecteurs :

E : un ev. de dimension $n \in \mathbb{N}$.

$\mathcal{B}$: une base de E. $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$.

Soit $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de E.

Soit $j \in [\![1, p]\!]$, v_j a pr coord ds $\mathcal{B}$:

$$(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$$

ie : $$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i .$$

La matrice $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est appelée la matrice de $(v_1, \dots, v_p)$ dans $\mathcal{B}$.

On la note : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_p)$ ou $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots v_p)$.

$$
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & & a_{1p} \\
a_{21} & a_{22} & & a_{2p} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & & a_{np}
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\leftarrow e_1 \\
\leftarrow e_2 \\
\vdots \\
\leftarrow e_n
\end{array}
\\
\begin{array}{cccc}
\uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow \\
v_1 & v_2 & & v_p
\end{array}
\end{array}
$$

Ex : $\quad E = \mathbb{R}^2.$

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (e_1, e_2)$$

$$\mathcal{D} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (f_1, f_2).$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e_1 + 2e_2 \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 4e_1 + e_2.$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -e_1 + 3e_2$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = 1 \times f_1 + 3 \times f_2 \qquad v_3 = 4 \times f_1 + 5 f_2$$

$$v_2 = -1 \times f_1 + 2 \times f_2$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, v_3) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

<u>Th</u> : On fixe E de dim n et $\mathcal{B}$ base de E.

Alors : φ :
$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x &\longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Démo : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$

($\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$).

$$\varphi(x+\lambda y) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda y_i) e_i\right)$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + \lambda y_1 \\ x_2 + \lambda y_2 \\ \vdots \\ x_n + \lambda y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) + \lambda\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right)$$

$$= \varphi(x) + \lambda \varphi(y).$$

φ est linéaire.

$$\dim E = n = n \times 1 = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

il suffit de mq. φ est surjective.

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $M = (m_i)_{1 \leq i \leq n}$

alors, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i e_i\right)$.

$$= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} m_i e_i\right).$$

φ est bien surjective, et c'est 1 isomorphisme.