3.1 : Expression d'1 applic. lin. en dim finie :

Ex : $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x + 2y - z \end{pmatrix} \qquad \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$$

base de $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

base de $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$: $\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} x a_{11} + y a_{12} + z a_{13} \\ x a_{21} + y a_{22} + z a_{23} \end{pmatrix} \qquad (\star)$$

ccl : si 1 vect a pr coord (x, y, z) ds $\mathcal{B}$, alors $\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ a pour coord :

$(xa_{11} + ya_{12} + za_{13}, xa_{21} + ya_{22} + za_{23})$ ds $\mathcal{C}$.

Et si on change les bases ?

base de $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$; base de $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{C}' = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$

$= (e_1, e_2, e_3)$ $\qquad = (f_1, f_2)$

$\varphi(e_1) = f_1 + f_2$; $\varphi(e_2) = 3f_1$; $\varphi(e_3) = -2f_1 + 3f_2$

dc ds la base $\mathcal{C}'$: $\varphi(e_1) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix}$

$\varphi(e_2) = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix}$

$\varphi(e_3) = \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\end{pmatrix}$

Soit V un vect de $\mathbb{R}^3$ de coord. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ds $\mathcal{B}'$,

alors : $V = x e_1 + y e_2 + z e_3$ donc :

$\varphi(V) = x\varphi(e_1) + y\varphi(e_2) + z\varphi(e_3)$

$$= \begin{pmatrix} x a_{11} + y a_{12} + z a_{13} \\ x a_{21} + y a_{22} + z a_{23} \end{pmatrix} \text{ ds } \mathcal{C}'. \quad (\#)$$

(A) et (#) : m̃ formule.

<u>Prop. 3.1.1</u> : E et F 2 ev, $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$

si $\mathcal{E} = (e_1 \dots e_p)$ base de E

$\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ base de F

Décomposons $\varphi(e_1) \dots \varphi(e_p)$ ds F :

$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \dots \varphi(e_p) = \begin{pmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix}$$

ie : $\forall j \in [\![1, p]\!]$,

on note $(a_{ij})_{i \in [\![1, n]\!]}$ les coord de $\varphi(e_j)$ ds $\mathcal{C}$:

ie : $\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$.

donc si $V = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j \in E$, on a :

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j \varphi(e_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} x_j a_{ij} f_i .$$

ie : la coord sur f_i de $\varphi(v)$

est : $\sum_{j=1}^{p} x_j a_{ij}$.

Rq : si, ds la base $\mathcal{E}$: $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$

On a : $$\varphi(V) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & & \vdots \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

$$= AV \quad (\text{ds la base } \tilde{F})$$

avec A que l'on appelle

"la matrice de φ de $\mathcal{E}$ ds $\tilde{F}$"