Devoir surveillé n°6
Version n°1
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples, de degré supérieur ou égal à 2.

1) Montrer qu'il en est de même de P'.

2) Montrer que le polynôme $P^2 + 1$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

II. Polynômes et nombres de Bernoulli.

Dans tout ce problème, on identifiera un polynôme et la fonction polynomiale qui lui est associée.

1) *Question de cours :* Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un polynôme $Q_0 \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ vérifiant $Q_0' = P$. Déterminer en fonction de Q_0 tous les polynômes Q vérifiant $Q' = P$.

On considère une suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (suite de Bernoulli) par les relations suivantes :

(a) $B_0 = 1$;

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $B'_{n+1} = (n+1)B_n$;

(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

2) Montrer l'existence et l'unicité d'une telle suite (B_n).

3) Expliciter les polynômes B_1, B_2 et montrer que $B_3 = X^3 - \dfrac{3}{2}X^2 + \dfrac{1}{2}X$.

4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est un polynôme unitaire de degré n.

5) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geqslant 2$, $B_n(0) = B_n(1)$.

6) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n vérifie l'équation :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x).$$

Indication : on pensera à utiliser l'unicité obtenue à la question **2)**.

Dans toute la suite, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\beta_n = B_n(0)$ (n^{e} nombre de Bernoulli).

7) Expliciter les valeurs de β_1, β_2 et β_3.

8) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$ impair, $\beta_n = 0$.

9) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta_k X^{n-k}.$$

Indication : on pourra commencer par exprimer $B_n^{(k)}$ en fonction de B_{n-k}.

10) En déduire que, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \beta_k = 0.$$

En déduire enfin pour tout $n \geqslant 1$ une expression de β_n en fonction de $\beta_0, \ldots, \beta_{n-1}$.

11) Écrire dans le langage Python une fonction `Bernoulli(n)` prenant en argument un entier naturel `n` et renvoyant la valeur de $\beta_{\mathtt{n}}$.

III. Autour de la constante d'Euler.

> Le théorème des accroissements finis intervient à plusieurs reprises dans ce problème. Vous devrez préciser chaque fois clairement pour quelle fonction et entre quelles bornes vous l'utilisez.

Ce problème a pour objet l'étude de la constante d'Euler notée γ.

Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n.$$

Partie I

1) Prouver pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ l'encadrement : $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln \dfrac{k+1}{k} \leqslant \dfrac{1}{k}$.

2) **a)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 1$.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

On note dorénavant γ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (*constante d'Euler*).

3) Montrer que $\gamma \leqslant 1$.

4) **a)** Étudier, sur l'intervalle $[k, k+1]$ ($k \in \mathbb{N}^*$), le signe de la fonction f_k définie par

$$f_k(x) = \frac{1}{k} + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)(x-k) - \frac{1}{x}.$$

b) En déduire le signe de $\displaystyle\int_k^{k+1} f_k(t)\,\mathrm{d}t$.

c) Prouver l'inégalité : $\ln \dfrac{k+1}{k} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k+1}\right) \qquad (\star)$.

5) **a)** Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - 1$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$.

b) En déduire, en sommant $(\star)$, que $\dfrac{1}{2} \leqslant \gamma$.

Partie II

6) On définit les fonctions g_1 et g_2 sur $]0, +\infty[$ par :

$$\begin{aligned} g_1(x) &= -\frac{1}{x+1} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2x^2} \\ g_2(x) &= g_1(x) + \frac{2}{3x^3} \end{aligned}$$

Étudier les variations de g_1 et g_2 sur $]0, +\infty[$ et en déduire leur signe.

7) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $u_n - u_{n+1}$ en fonction de $g_1(n)$ et de n.

8) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$: $\dfrac{1}{2n^2} - \dfrac{2}{3n^3} \leqslant u_n - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2n^2}$.

9) Dans cette question $n \geqslant 2$ et $p \geqslant n$.

a) En utilisant le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ entre k et $k+1$ (k entier), former un encadrement de $\displaystyle\sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^2}$.

b) Former par une méthode analogue à celle de la question précédente un encadrement de $\displaystyle\sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^3}$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$,

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n-1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} \leqslant \frac{1}{(n-1)^2}.$$

d) En déduire $\dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{3(n-1)^2} \leqslant u_n - \gamma \leqslant \dfrac{1}{2(n-1)}$.

10) Un calcul numérique donne $u_{100} \in [0,582207; 0,582208]$. Donner une valeur approchée de γ à 10^{-4} près.

— **FIN** —