Devoir surveillé n° 9
– Version 1 –
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit au hasard un nombre X dans $[\![1, n]\!]$. On choisit ensuite un nombre Y au hasard dans $[\![1, X]\!]$.

1) Déterminer la loi conjointe de X et Y.

2) En déduire la loi (marginale) de Y.

II. Existence d'un supplémentaire commun dans la somme.

Soit E un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
On se donne A et B deux sous-espaces vectoriels de E et on se pose le problème suivant :

À quelle(s) condition(s) existe-t-il un sous-espace vectoriel C tel que
$A + B = A \oplus C = B \oplus C$?

1) Dans cette question on suppose que le sous-espace vectoriel C existe.
Montrer que $\dim A = \dim B$ et déterminer $\dim C$.

Dans la suite de notre étude, nous allons supposer $\dim A = \dim B$ et montrer que le sous-espace vectoriel C existe.

2) On étudie pour commencer le cas où A et B seraient deux hyperplans de E distincts.

a) Justifier l'existence de vecteurs $u \in A$ et $v \in B$ tels que $u \notin B$ et $v \notin A$.

b) Établir que $w = u + v \notin A \cup B$ et que $w \neq 0$.

c) Observer que $C = \text{Vect}(w)$ est solution du problème posé.

3) On revient au cas général et on suppose seulement $\dim A = \dim B$.

a) Résoudre le problème posé lorsque $A = B$.

Dans la suite, on suppose $A \neq B$.

b) Justifier qu'il existe un sous-espace vectoriel A' tel que $(A \cap B) \oplus A' = A$. De manière symétrique, on introduit B' sous-espace vectoriel tel que $(A \cap B) \oplus B' = B$.

c) Montrer que $A' \cap B' = \{0_E\}$ et $\dim A' = \dim B' \in \mathbb{N}^*$.

Dans la suite, on pose $p = \dim A' = \dim B'$.

d) Justifier l'existence de bases $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_p)$ aux sous-espaces vectoriels A' et B'.

4) On reprend les objets introduits ci-dessus afin de construire un sous-espace vectoriel C solution.
On forme $\mathscr{D} = (g_1, \ldots, g_p)$ en posant, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $g_i = e_i + f_i$.

a) Montrer que la famille $\mathscr{D}$ est libre.

b) On pose $C = \mathrm{Vect}(g_1, \ldots, g_p)$. Déterminer $\dim C$.

c) Montrer que $A \cap C = \{0_E\}$.

d) Conclure que $A + B = A \oplus C = B \oplus C$.

III. Lectures aléatoires dans un baladeur.

Dans tout le problème, n sera un entier naturel supérieur ou égal à 2. Un baladeur contient n pistes (numérotées de 1 à n) et fonctionne en mode aléatoire selon le protocole suivant :

— La première piste lue est choisie de façon aléatoire et uniforme parmi les n pistes.

— A la fin de la lecture d'une piste, la suivante est choisie de façon aléatoire et uniforme parmi les n pistes.

(Il est donc possible que la même piste soit lue plusieurs fois de suite...)
Ce problème étudie différents aspects de cette lecture aléatoire.

On fixe un entier naturel k supérieur ou égal à 1 et on s'intéresse aux k premières lectures effectuées. On suppose qu'un espace probabilisé fini (Ω, P) modélise cette expérience.

Les différentes parties de ce problème sont dans une grande mesure indépendantes les unes des autres.

Partie 1 – Nombre de lectures d'une piste.

Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on note X_i le nombre de fois où la piste numéro i est lue au cours des k premières lectures.

1) Déterminer la loi de X_i et donner son espérance ainsi que sa variance.

2) Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont-elles indépendantes ?

3) **a)** Que vaut $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$?

b) En déduire que la covariance de X_i et X_j pour $i \neq j$ vaut $-\dfrac{k}{n^2}$.

4) **a)** Déterminer la loi conjointe de X_i et X_j pour $i \neq j$.

b) Retrouver alors le résultat de la question **3)b)**.

5) Commenter le signe de la covariance de X_i et X_j pour $i \neq j$.

6) Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n entiers naturels.

a) On suppose que $a_1 + \cdots + a_n \neq k$. Que vaut la probabilité

$$P(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \cdots, X_n = a_n) = P(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = a_i]) \ ?$$

b) On suppose à présent que $a_1 + \cdots + a_n = k$. Montrer que :

$$P(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \cdots, X_n = a_n) = \frac{k!}{a_1! a_2! \ldots a_n!} \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

Partie 2 – Nombre de pistes lues.

On note Z le nombre de pistes distinctes ayant été lues au cours des k premières lectures.
Si $1 \leqslant \ell \leqslant k$, on note C_ℓ le numéro de la ℓ^{e} piste jouée.
Si $1 \leqslant i \leqslant n$, on note B_i la variable alétoire valant 1 si la i^{e} piste a été jouée, 0 sinon.

7) Décrire avec soin l'ensemble des valeurs que prend Z en fonction de n et k.

8) Déterminer $P(Z = 1)$.

9) Exprimer Z en fonction des variables aléatoires $B_1, \ldots, B_n$.

10) Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

a) Exprimer l'événement $[B_i = 0]$ en fonction d'événements construits sur les variables aléatoires $C_1, \ldots, C_k$.

b) En déduire la valeur de $P(B_i = 0)$.

c) En déduire la loi de B_i, son expérience et sa variance.

11) Déduire des questions précédentes que $\mathrm{E}(Z) = n\left(1 - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^k\right)$.

12) Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$ vérifiant $i \neq j$.

a) De même que dans la question **10)**, déterminer la valeur de

$$P(B_i = 0, B_j = 0).$$

b) Déduire de cela et de la question **10)b)** la valeur de $P(B_iB_j = 0)$.

c) En déduire $\mathrm{Cov}(B_i, B_j)$.

13) Déduire des questions précédentes que la variance de Z est

$$V(Z) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k + n(n-1)\left(1 - \frac{2}{n}\right)^k - n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2k}.$$

14) Dans cette dernière partie, on suppose que $k = n \geqslant 2$ et l'on note $Z_n = Z$.

a) Montrer que

$$V(Z_n) \leqslant n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

b) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{Z_n}{n} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{n\varepsilon^2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

c) En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{Z_n}{n} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Interpréter ce résultat.

— FIN —