Feuille d'exercice n° 05 : **Équations différentielles - correction**

Exercice 4

1) **a)** On appelle f cette fonction. Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\frac{x}{2} \in\in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ et donc $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ est défini et strictment positif, et ainsi $f(x)$ est bien défini. Comme composée de fonctions dérivables, f est dérivable sur cet intervalle, et on a : $f'(x) = \frac{1}{2}.\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}.\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2}.\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}.\frac{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$
$= \frac{1}{2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos x}$.

b) Une primitive de $x \mapsto -\tan x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est $x \mapsto \ln\cos x$, ainsi l'ensemble des solutions de l'équation homogène est $\left\{ \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{K}{\cos x} \end{array}, K \in \mathbb{R} \right\}$.
On cherche une solution particulière y_0 de l'équation avec second membre de la forme $y_0(x) = \frac{K(x)}{\cos x}$, avec $K \in \mathscr{D}\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \mathbb{R}\right)$. y_0 est solution ssi $\frac{K'(x)}{\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ ssi $K'(x) = \frac{1}{\cos x}$. Donc, en utilisant la question précédente, une solution particulière est $y_0(x) = \frac{\ln\ \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x}$.
L'ensemble des solutions de l'équation avec second membre est ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{K + \ln\ \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x} \end{array}, K \in \mathbb{R} \right\}.$$

Et la solution y du problème de Cauchy considéré est donc de la forme $y(x) = \frac{K + \ln\ \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x}$, pour un certain $K \in \mathbb{R}$, avec $y(0) = 1$ c'est-à-dire $K = 1$.
Finalement la solution recherchée est la fonction

$$y\ :\ \left\{ \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1 + \ln\ \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x} \end{array} \right. .$$

2) $y\,(x) = \left(\frac{26}{27} - \frac{8}{9}\,x + \frac{1}{3}\,x^2\right)\mathrm{e}^{\,2\,x} - \frac{26}{27}\mathrm{e}^{\,-x}$

4) $y\left(x\right)=\left(\frac{3}{2}\,x^2+K\right)\ln\left(x\right),\ \ K\in\mathbb{R}$

7) $y\left(x\right)=-1+K\mathrm{e}^{\,\arcsin(x)},\ \ K\in\mathbb{R}$

8) $y\left(x\right)=\left(-\frac{1}{2}\,x^2-\frac{1}{2}\,x-\frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{\,x}+\left(\frac{1}{2}\,x^2+\frac{5}{4}\right)\mathrm{e}^{\,3\,x}$

Exercice 7

1) $y(x)=-\frac{12\sin x+4\cos x}{5}-$
$\mathrm{e}^{\,x-\pi}+\frac{\mathrm{e}^{\,2\pi-2x}}{5}.$

2) $y(x)=\left(2x^2-6x+7\right)$
$\mathrm{e}^{\,x}+$
$\mathrm{e}^{\,-x}+\mathrm{e}\ -8.$

3) $y\left(x\right)=\sin\left(2\,x\right)\mu+\cos\left(2\,x\right)\lambda+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\,x+\frac{1}{4}\,x^2,\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$

4) $y\left(x\right)=\mathrm{e}^{\,-\frac{1}{2}\,x}\sin\left(\frac{1}{2}\,\sqrt{7}x\right)\mu+\mathrm{e}^{\,-\frac{1}{2}\,x}\cos\left(\frac{1}{2}\,\sqrt{7}x\right)\lambda-\frac{5}{4}\,\mathrm{e}^{\,x}$
$+\,2\,\mathrm{e}^{\,x}x,\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$

5) $y\left(x\right)=\frac{1}{30}\,\mathrm{e}^{\,\frac{1}{2}\,\left(\sqrt{5}+3\right)(x-\pi)}\left(5+\sqrt{5}\right)-\frac{1}{30}\,\mathrm{e}^{\,-\frac{1}{2}\,\left(\sqrt{5}-3\right)(x-\pi)}\left(-5+\sqrt{5}\right)$
$+\,\frac{1}{3}\,\cos\left(x\right)-\frac{1}{3}\,\sin\left(x\right)$

6) $y\left(x\right)=\frac{1}{2}x\,\mathrm{ch}\,x+\lambda$
$\mathrm{e}^{\,x}+\mu$
$\mathrm{e}^{\,-x},\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$