DS n°4 : Fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom : | Note :

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

Ensembles, applications

Soit x un objet, on considère la proposition $\{x\} \heartsuit \{\varnothing, x, \{x\}\}$. Donner tous les symboles dans la liste $=$, $\neq$, $\subset$, $\subsetneq$, $\supset$, $\supsetneq$, $\in$, $\notin$ par lesquels on peut remplacer $\heartsuit$ afin que la proposition soit vraie.

$$\boxed{} \tag{1}$$

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \end{array}$. Cette fonction est-elle injective (répondre «**Oui**» ou «**Non**») ?

$$\boxed{} \tag{2}$$

$$\text{Déterminer l'image de } f : \ \mathrm{Im}(f) = \boxed{}. \tag{3}$$

Déterminer un intervalle I de $\mathbb{R}$ sur lequel f réalise une bijection sur son image (*i.e.* f réalise une bijection de I sur $\mathrm{Im}(f)$).

$$I = \boxed{}. \tag{4}$$

Relations

On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation d'ordre $\ll$ définie de la manière suivante :

$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \ll (x',y') \iff |x'-x| \leq y'-y.$$

Alors, deux éléments non comparables de $(\mathbb{R}^2, \ll)$ sont

$$\boxed{} \tag{5}$$

On considère $A = \left\{ \dfrac{3n^2-2}{n^2+n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$. Alors, dans $\overline{\mathbb{R}}$,

$\sup A =$ $\boxed{}$ (6) $\inf A =$ $\boxed{}$ (7)

De plus (on répondra aux questions suivantes par **OUI** ou **NON**) :

$\sup A = \max A$: $\boxed{}$ (8) $\inf A = \min A$: $\boxed{}$ (9)

On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1 \end{array}$. Dans chaque cadre, donnez deux informations :

Indiquez si f a un maximum ou une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ **et** donnez sa valeur :

$\boxed{}$ (10)

Indiquez si f a un minimum ou une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ **et** donnez sa valeur :

$\boxed{}$ (11)

Matrices

Inverser les matrices suivantes :

$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$ $\boxed{}$ (12) $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$ $\boxed{}$ (13)

On considère la matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, quelque soit la matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, effectuer le produit MA revienne à effectuer successivement sur A, et dans cet ordre, les opérations : $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$, $L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2$ et enfin $L_1 \leftrightarrow L_2$. Alors,

$M =$ $\boxed{}$ (14) $M^{-1} =$ $\boxed{}$ (15)

Avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$A^n =$ $\boxed{}$ (16)

— FIN —