

# **V Nombres complexes**

28 août 2021

## 1. L'inégalité triangulaire

Commençons par démontrer l'inégalité triangulaire, déjà évoquée en début d'année :

### Théorème 1.0.1 (Inégalité triangulaire).

Soit  $z, z' \in \mathbb{C}$ , on a

$$||z| - |z'||| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|.$$

De plus,  $|z + z'| = |z| + |z'|$  si et seulement si il existe  $(\lambda, \lambda') \in (\mathbb{R}^+)^2$  tel que  $(\lambda, \lambda') \neq (0, 0)$  et  $\lambda z = \lambda' z'$ .

### Démonstration.

On montre l'encadrement pour  $|z + z'|$ . Pour  $|z - z'|$  il suffit de remplacer  $z'$  par  $-z'$ .

Pour montrer  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ , il suffit de montrer  $|z + z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2$ . Posons  $d = (|z| + |z'|)^2 - |z + z'|^2$  et calculons  $d$ . On obtient successivement

$$\begin{aligned} d &= |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'| - (z + z')(\bar{z} + \bar{z}') \\ &= 2|z||z'| - z\bar{z}' - z'\bar{z} \\ &= 2\left(|z||z'| - \frac{z\bar{z}' + z'\bar{z}}{2}\right) \\ &= 2\left(|z||z'| - \frac{z\bar{z}' + \overline{z\bar{z}'}}{2}\right) \\ &= 2(|z\bar{z}'| - \operatorname{Re}(z\bar{z}')) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

On a donc  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ .

Pour la seconde inégalité :  $|z| = |(z + z') + (-z')| \leq |z + z'| + |-z'|$ , d'où  $|z| - |z'| \leq |z + z'|$ . On permute les rôles de  $z$  et  $z'$  et on a  $|z'| - |z| \leq |z + z'|$ , ce qui permet de conclure, car

$$||z| - |z'|| = \max(|z| - |z'|; |z'| - |z|).$$

Montrons maintenant le cas d'égalité. Dans le cas où  $z = z' = 0$ , le résultat est immédiat.

Sinon, d'après la démonstration de l'inégalité triangulaire, l'égalité est vérifiée si et seulement si  $|z\bar{z}'| = \operatorname{Re}(z\bar{z}')$ , i.e. si et seulement si  $z\bar{z}'$  est un réel positif.

Dans le cas où  $z' \neq 0$ , on remarque que  $\frac{z}{z'} = \frac{z\bar{z}'}{|z'|^2}$ , donc l'égalité est vérifiée si et seulement si  $\frac{z}{z'} \in \mathbb{R}_+$  si et seulement si il existe  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  tel que  $z = \lambda z'$ .

En inversant les rôles de  $z$  et  $z'$  dans le cas où  $z' = 0$  on obtient le résultat voulu.  $\square$

### Remarque 1.0.2.

• Géométriquement, il y a égalité dans l'inégalité triangulaire lorsque les images de  $z$  et  $z'$  sont sur une même demi-droite d'origine  $O$ .

• Le bloc « il existe  $(\lambda, \lambda') \in (\mathbb{R}^+)^2$  tel que  $(\lambda, \lambda') \neq (0, 0)$  » s'écrit aussi «  $\exists (\lambda, \lambda') \in (\mathbb{R}^+)^2 \setminus \{(0, 0)\}$  » et se lit « il existe deux complexes  $\lambda$  et  $\lambda'$  non tous nuls ».

## 2. Propriétés supplémentaires de l'exponentielle complexe et des arguments

### Théorème 2.0.1 (Formules d'Euler).

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ , alors

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \\ \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \end{aligned}$$

### Démonstration.

Direct.  $\square$

### Proposition 2.0.2.

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  :

1.  $e^{i\theta} \times e^{-i\theta} = e^{i0} = 1$  ;
2.  $e^{i\theta} \neq 0$  ;
3.  $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$ .

### Démonstration.

Direct.  $\square$

### Proposition 2.0.3 (Formule de De Moivre).

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . On a

$$\begin{aligned} e^{in\theta} &= (e^{i\theta})^n, \\ \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) &= (\cos \theta + i \sin \theta)^n. \end{aligned}$$

**Démonstration.**

Se démontre par une récurrence immédiate sur  $n$ .  $\square$

**Proposition 2.0.4.**

Soient  $z, z' \in \mathbb{C}^*$ . On a :

$$\begin{aligned}\arg \bar{z} &= -\arg z[2\pi] \\ \arg zz' &= \arg z + \arg z'[2\pi] \\ \text{et } \arg(1/z) &= -\arg z[2\pi].\end{aligned}$$

**Démonstration.**

Utiliser l'écriture trigonométrique.  $\square$

**Remarque 2.0.5.**

L'écriture  $a = b[2\pi]$  signifie que  $a$  et  $b$  sont égaux à un multiple de  $2\pi$  près, *i.e.*  $\exists k \in \mathbb{Z}, a = b + 2k\pi$ .

Les manipulations d'arguments doivent toujours s'effectuer en indiquant à quel angle près cela s'entend ( $[\pi]$ ,  $[2\pi]$  le plus souvent).

**Exercice 2.0.6.**

Si  $a = b[2\pi]$ , a-t-on  $\frac{a}{2} = \frac{b}{2}[2\pi]$  ? A-t-on  $2a = 2b[2\pi]$  ?

### 3. Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

**Définition 3.0.1.**

On note  $\mathbb{U}$  l'ensemble des nombres complexes de module 1 :  $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ .

**Remarque 3.0.2.**

$\mathbb{U}$  est l'ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique

**Proposition 3.0.3.**

Soit  $z, z' \in \mathbb{U}$ . Alors :

1.  $1 \in \mathbb{U}$  ;
2.  $zz' \in \mathbb{U}$  ;
3.  $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$ .

**Remarque 3.0.4.**

Grâce aux propriétés précédentes, on dit que  $\mathbb{U}$  est un *groupe*.

Le groupe  $\mathbb{U}$ , qui est l'ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique, est intimement lié à l'exponentielle complexe, comme nous l'avons déjà vu :

**Théorème 3.0.5** (Paramétrisation de  $\mathbb{U}$ ).

L'application

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ \theta &\mapsto e^{i\theta}\end{aligned}$$

est un *paramétrage* de  $\mathbb{U}$ , autrement dit, pour tout nombre complexe  $z$  on a

$$z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} \quad z = e^{i\theta} \quad (1)$$

De plus, pour tout complexe  $z \in \mathbb{U}$  donné, le paramètre correspondant est *unique* à  $2\pi$  près, autrement dit, on a

$$\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2 \quad e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta = \theta'[2\pi] \quad (2)$$

**Remarque 3.0.6.**

Ce résultat a une interprétation géométrique intuitive.

**Démonstration.**

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Montrons l'équivalence (1). L'implication de droite à gauche est évidente : s'il existe  $\theta$  tel que  $z$  s'écrive  $\cos \theta + i \sin \theta$ , alors  $|z|^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ , donc  $z \in \mathbb{U}$ . Réciproquement, soit  $z \in \mathbb{U}$ , alors  $(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 = 1$  donc il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  vérifiant  $\operatorname{Re} z = \cos \theta$  et  $\operatorname{Im} z = \sin \theta$ .

Pour l'équivalence (2), il suffit de remarquer que pour tout couple  $(\theta, \theta')$  de réels, l'égalité  $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$  implique l'égalité des cosinus ainsi que des sinus de  $\theta$  et  $\theta'$ , donc l'égalité de  $\theta$  et  $\theta'$  à  $2\pi$  près. L'autre sens est immédiat par  $2\pi$ -périodicité des fonctions sinus et cosinus.  $\square$

### 4. Équations du second degré

#### 4.1. Calcul des racines carrées d'un complexe sous forme algébrique

Soit  $z$  et  $t$  deux complexes. On veut résoudre explicitement l'équation  $t^2 = z$ , d'inconnue  $z$ ,

que nous noterons  $(E)$ , en n'utilisant que des complexes écrits sous forme algébrique.

On peut écrire  $z$  sous la forme  $x + iy$  avec  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et  $t$  sous la forme  $a + ib$ , où  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

Pour résoudre  $(E)$ , il y a une astuce très utile.

**Astuce.**

Soit  $t$  et  $z$  deux complexes. Alors

$$t^2 = z \iff \begin{cases} t^2 = z \\ |t|^2 = |z| \end{cases}$$

On en déduit successivement :

$$\begin{aligned} (E) &\iff \begin{cases} a^2 - b^2 + i2ab = x + iy \\ a^2 + b^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \\ (E) &\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ 2ab = y \\ a^2 + b^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \\ (E) &\iff \begin{cases} a^2 = \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2} \\ b^2 = \frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2} \\ 2ab = y \end{cases} \end{aligned}$$

**Exercice 4.1.1.**

Trouver les racines carrées de  $z = 3 - 4i$ .

**4.2. Résolution des équations du second degré**

**Proposition 4.2.1.**

Soit  $A$  un polynôme en  $z$  à coefficients complexes, admettant un complexe  $\lambda$  comme racine. Alors il existe un polynôme  $B$  en  $z$  à coefficients complexes tel que  $A(z) = (z - \lambda)B(z)$ .

**Remarque 4.2.2.**

Nous admettons pour l'instant ce résultat, il sera démontré dans le chapitre sur les polynômes.

**Exercice 4.2.3.**

Soit  $A(z) = z^3 - iz^2 - (3 + i)z + 2 + 2i$ .

1. Trouver un polynôme  $B$  tel que  $A(z) = (z - 1)B(z)$ .
2. Trouver un polynôme  $C$  tel que  $A(z) = (z - 1)(z - 1 - i)C(z)$ .

**Théorème 4.2.4.**

Soient  $a, b, c \in \mathbb{C}$  avec  $a \neq 0$ . Les solutions de l'équation  $az^2 + bz + c = 0$  d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$  sont  $\frac{-b \pm \delta}{2a}$ , où  $\delta$  est l'une quelconque des deux racines carrées du discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

La somme de ces solutions vaut  $-\frac{b}{a}$  et leur produit  $\frac{c}{a}$ .

**Démonstration.**

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on a

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left[z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right]\left[z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right] \\ &= a\left(z - \frac{-b - \delta}{2a}\right)\left(z - \frac{-b + \delta}{2a}\right) \end{aligned}$$

On calcule finalement :

$$\begin{aligned} \frac{-b - \delta}{2a} + \frac{-b + \delta}{2a} &= -\frac{b}{a}, \\ \frac{-b - \delta}{2a} \times \frac{-b + \delta}{2a} &= \frac{b^2 - \delta^2}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

□

**Remarque 4.2.5.**

- N'importe quelle racine carrée du discriminant convient, puisqu'elles sont égales au signe près.
- Si le discriminant est nul, il n'y a qu'une racine, qui est alors dite *double*.
- Si  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , alors le discriminant est réel. S'il est strictement positif, il y a deux racines réelles distinctes ; s'il est nul, il y a une racine réelle

double ; s'il est strictement négatif, il y a deux racines complexes non réelles conjuguées.

- Avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , on a la relation suivante :

$$(X - \alpha)(X - \beta) = X^2 - (\alpha + \beta)X + \alpha\beta.$$

- On peut donc connaître la somme et le produit des deux racines sans connaître les racines. Réciproquement, si l'on connaît la somme et le produit de deux nombres complexes, alors on connaît une équation polynomiale du second degré dont ils sont exactement les racines.

#### Exercice 4.2.6.

Trouver  $a$  et  $b$  tels que  $ab = 2$  et  $a + b = i$ .

## 5. Racines énièmes.

### Définition 5.0.1.

Soient  $z \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . On appelle *racine  $n^e$  de  $z$*  tout complexe  $t$  tel que  $t^n = z$ .

Les racines de 1 sont appelées *racines  $n^es$  de l'unité*.

L'ensemble des racines  $n^es$  de l'unité est noté  $\mathbb{U}_n$ .

### Remarque 5.0.2.

La notation  $\sqrt[n]{\cdot}$  est **interdite** sur les complexes quelconques. En effet, elle désigne l'application réciproque de la fonction  $x \mapsto x^n$  qui n'est bijective que considérée comme application de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^+$  si  $n$  est pair et de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  si  $n$  est impair.

**Théorème 5.0.3.** 1. La seule racine  $n^e$  de zéro est zéro.

2. Soit  $z \in \mathbb{C}$  non nul, donné sous une forme trigonométrique  $z = re^{i\theta}$ , avec  $r > 0$ . Alors  $z$  possède exactement  $n$  racines  $n^es$ , qui sont les nombres complexes

$$\sqrt[n]{r} \times e^{\left(\frac{i\theta}{n} + \frac{2ik\pi}{n}\right)}$$

pour  $k$  décrivant l'ensemble  $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$  (ou  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ).

### 3. En particulier

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}.$$

**Démonstration.** 1. Soit  $t \in \mathbb{C}$ . Alors  $t \neq 0 \Rightarrow t^n \neq 0$  donc  $t^n = 0 \Rightarrow t = 0$ . On vérifie enfin que  $t = 0 \Rightarrow t^n = 0$ , pour  $n > 0$ .

2. Soit  $(z, t) \in \mathbb{C}^2$ ,  $z \neq 0$ .

- 1er cas :  $z = 1$  : on note  $\rho = |t|$  et  $\varphi \in \mathbb{R}$  un argument de  $t$ . On a :  $t^n = 1$  si et seulement si  $\rho^n \cdot e^{in\varphi} = 1 \cdot e^{i0}$  si et seulement si  $\rho^n = 1$  et  $n\varphi = 0[2\pi]$  si et seulement si  $\rho = 1$  et  $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$ .
- 2nd cas :  $z$  est quelconque non nul donc s'écrit sous la forme  $re^{i\theta}$  où  $r > 0$ . On pose  $\alpha = \sqrt[n]{r} \times e^{i\theta/n}$ , donc  $\alpha^n = z$ . Alors, si  $t = \rho \cdot e^{i\varphi}$ ,  $t^n = z$  si et seulement si  $\left(\frac{t}{\alpha}\right)^n = 1$  et on utilise le premier cas.

□

**Remarque 5.0.4** (Interprétation géométrique). Soit  $n \geq 3$ . Posons  $z_i = \frac{2ik\pi}{n}$  et notons  $A_i$  le point d'affixe  $z_i$  pour  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Alors  $A_0 A_1 \dots A_n$  est un polygone régulier à  $n$  côtés, inscrit dans le cercle unité.

Les racines deuxièmes de 1 sont  $-1$  et  $1$  (racines carrées de 1).

En posant  $j = e^{2i\pi/3}$ , les racines troisièmes de l'unité sont  $1, j$  et  $j^2$  (et on a  $j^2 = \bar{j}$ ). Ce sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrits dans le cercle unité.

Les racines quatrièmes de l'unité sont  $1, i, -1$  et  $-i$  : ce sont les sommets d'un carré inscrit dans le cercle unité.

Les racines cinquièmes de l'unité sont  $1, e^{2i\pi/5}, e^{4i\pi/5}, e^{-4i\pi/5}$  et  $e^{-2i\pi/5}$  : ce sont les sommets d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle unité.

Les racines sixièmes de l'unité sont  $1, e^{i\pi/3}, j, -1, j^2$  et  $e^{-i\pi/3}$  : ce sont les sommets d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle unité.

Tout cela est représenté dans la figure 1.

### Proposition 5.0.5.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  on a les

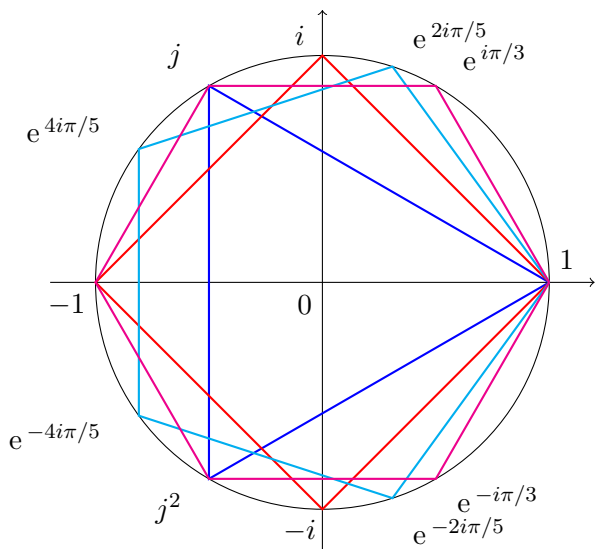


FIGURE 1 – Racines  $n^{\text{es}}$  de l'unité pour  $1 \leq n \leq 6$ .

égalités suivantes :

$$\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (z - \omega) = \prod_{k=0}^{n-1} (z - e^{\frac{2ik\pi}{n}}) = z^n - 1$$

$$\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} (z - \omega) = \prod_{k=1}^{n-1} (z - e^{\frac{2ik\pi}{n}}) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

La somme des racines  $n^{\text{e}}$  de l'unité est nulle, i.e. :

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0.$$

En particulier  $1 + j + \bar{j} = 1 + j + j^2 = 0$ .

#### Démonstration.

Pour démontrer ce résultat, on utilisera une version généralisée de la proposition 4.2.1 : pour tout entier  $n$  et tout polynôme  $P$  un polynôme de degré  $n$  admettant  $n$  racines distinctes  $z_1, \dots, z_n$ , de coefficient dominant  $\alpha$ , on a

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad P(z) = \alpha(z - z_1) \dots (z - z_n).$$

On rappelle aussi la formule de sommation géométrique : pour tout  $z \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$z^n - 1 = (z - 1)(1 + z + \dots + z^{n-1}).$$

La première égalité est une application directe du résultat admis, en posant  $P : z \mapsto z^n - 1$ ;  $P$  est alors un polynôme de degré  $n$  et de coefficient dominant 1.

La seconde est une application directe du même résultat en considérant  $P : z \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} z^k$ . De plus  $n \neq 1$  donc  $e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1$  donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left( e^{\frac{2i\pi}{n}} \right)^k = \frac{1 - \left( e^{\frac{2i\pi}{n}} \right)^n}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} = 0.$$

□

## 6. Techniques de calcul

### 6.1. Formules trigonométriques

Nous avons utilisé les formules de trigonométrie (cf. formulaire de trigonométrie) dans la démonstration de ??.

Néanmoins, les propriétés de l'exponentielle « de  $i\theta$  » permettent de retrouver ces formules, dans le cas inenvisageable où vous les auriez oubliées.

Par exemple : développer  $e^{i(a+b)}$  de deux manières différentes, identifier les expressions obtenues et retrouver les formules donnant  $\sin(a+b)$  et  $\cos(a+b)$ .

### 6.2. Technique de l'angle moitié

Déjà vu. Elles permettent aussi de retrouver les formules de factorisation du type  $\cos(a) + \cos(b)$ .

### 6.3. Factorisation

Utilise la technique de l'angle moitié, souvent après avoir identifié la somme en question comme la partie réelle ou imaginaire d'un type de somme bien connue. On utilise très souvent les formules suivantes.

**Sommation géométrique** : Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=0}^n z^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } z = 1, \\ \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} & \text{si } z \neq 1. \end{cases}$$

**Binôme de Newton** : Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

On peut calculer les coefficients binomiaux  $\binom{n}{k}$  avec le triangle de Pascal.

**Exemple 6.3.1.**

$$\sum_{k=0}^n \cos(4kx) = \begin{cases} \frac{\sin(2(n+1)x) \cos(2nx)}{\sin(2x)} & \text{si } x \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \\ n + 1 & \text{si } x \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \end{cases}$$

## 6.4. Linéarisation

Méthode pour supprimer les produits et puissances dans une expression en cosinus et sinus :

- 1- Utiliser la formule d'Euler et développer par la formule du binôme.
- 2- Regrouper les puissances pour réutiliser les formules d'Euler, mais dans l'autre sens.

**Exemple 6.4.1.**

$$\begin{aligned} \cos^3 x &= \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos x \\ \sin^3(x) \cos^2(x) &= -\frac{1}{16} \sin(5x) + \frac{1}{8} \sin(x) \\ &\quad + \frac{1}{16} \sin(3x) \end{aligned}$$

## 7. L'exponentielle complexe

**Définition 7.0.1.**

Soit  $z \in \mathbb{C}$ , donné sous forme algébrique  $z = x + iy$ . On appelle *exponentielle de  $z$*  notée  $e^z$  le nombre complexe  $e^z = e^x e^{iy}$ .

**Remarque 7.0.2.**

$e^z$  n'est toujours pas une puissance : ce n'est qu'une notation.

**Exemple 7.0.3.**

$$e^{2+i\pi/2} = ie^2.$$

**Théorème 7.0.4.** 1. L'exponentielle complexe est  $2i\pi$ -périodique.

2. Pour tout  $z, z' \in \mathbb{C}$ ,  $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$  : on dit que l'exponentielle transforme les sommes en produits.

3. L'exponentielle complexe ne s'annule pas.

4. Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  et  $t \in \mathbb{C}^*$ , on a

$$e^z = t \iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = \ln |t| + i \arg t + 2ik\pi.$$

5. Pour tout  $z, z' \in \mathbb{C}$ ,  $e^z = e^{z'}$  ssi  $(z - z') \in 2i\pi\mathbb{Z}$ .

**Démonstration.** 1. Immédiat.

2. Séparer parties réelle et imaginaire.

3. L'exponentielle ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ , et  $e^{i\theta}$  non plus (déjà vu).

4.  $e^z = t$  si et seulement si  $e^{\operatorname{Re} z} = |t|$  et  $\operatorname{Im} z = \arg t[2\pi]$ .

5.  $e^z = e^{z'}$  ssi  $e^{z-z'} = 1$ , et on utilise le point précédent.

□

**Remarque 7.0.5.**

L'exponentielle n'est ni surjective, ni injective, et il n'existe pas de « logarithme complexe ».

## 8. Nombres complexes et géométrie plane

Dans toute cette partie, on considère un plan, muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### 8.1. Colinéarité et orthogonalité

#### a. Interprétation géométrique du rapport

**Théorème 8.1.1.**

Soit  $z$  et  $z'$  deux complexes non nuls. On note  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  les vecteurs d'affixes respectives  $z$  et  $z'$ .

Alors

$$\left| \frac{z'}{z} \right| = \frac{\|\vec{u}'\|}{\|\vec{u}\|}$$

$$\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = (\vec{u}, \vec{u}') \quad [2\pi]$$

### Démonstration.

Le premier point est immédiat, le second découle de l'interprétation géométrique de l'argument. En notant  $\vec{i}$  le vecteur d'affixe 1, et en posant  $\theta = \arg z$ , on a  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ , donc  $(\vec{i}, \vec{u}) = \arg z \quad [2\pi]$ . De même  $(\vec{i}, \vec{u}') = \arg z' \quad [2\pi]$ . D'où

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \vec{u}') &= (\vec{i}, \vec{u}') - (\vec{i}, \vec{u}) & [2\pi] \\ &= \arg z' - \arg z & [2\pi] \\ &= \arg\left(\frac{z'}{z}\right) & [2\pi] \end{aligned}$$

□

### Corollaire 8.1.2.

Soit  $A, B$  et  $M$  trois points deux à deux distincts d'affixes respectives  $a, b$  et  $z$ . Alors

- (i)  $A, B$  et  $M$  sont alignés si et seulement si  $\frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R}$ ;
- (ii)  $(AM) \perp (BM)$  si et seulement si  $\frac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R}$ .

### Exemple 8.1.3.

$i, 1$  et  $2-i$  sont alignés, et  $1+i, 2$  et  $-2i$  forment un angle droit en 2.

### Exercice 8.1.4.

Soit  $A(a), B(b)$  et  $C(c)$  trois points du plan.

On rappelle que le centre de gravité du triangle  $ABC$  est le point d'affixe  $\frac{1}{3}(a+b+c)$ .

Montrer que ce centre de gravité est le point d'intersection des médianes de  $ABC$ .

### Exercice 8.1.5.

Soit  $A(a), B(b)$  et  $C(c)$  trois points du plan. On suppose que le cercle circonscrit au triangle  $ABC$  a pour centre  $O(0)$ .

Montrer que l'orthocentre de  $ABC$  a pour affixe  $a+b+c$ .

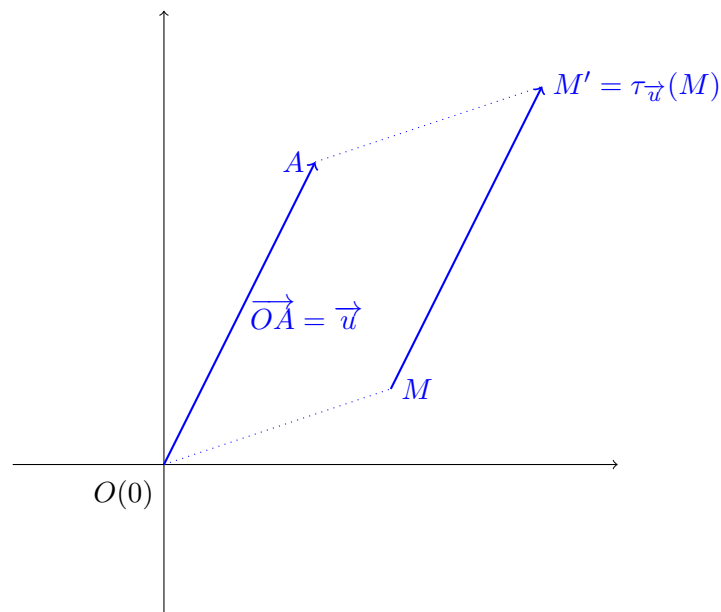


FIGURE 2 – Translation de vecteur  $\vec{u}$ ,  $OMM'A$  est un parallélogramme.

## 8.2. Transformations usuelles

### Définition 8.2.1 (Translation).

Soit  $\vec{u}$  un vecteur

La translation de vecteur  $\vec{u}$  est l'application qui envoie un point  $M$  sur le point  $M'$  vérifiant  $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$  (voir figure 2). On la note souvent  $\tau_{\vec{u}}$ .

### Remarque 8.2.2.

La translation de vecteur nul est l'identité. Si  $\vec{u}$  n'est pas nul, la translation de vecteur  $\vec{u}$  n'a pas de point fixe.

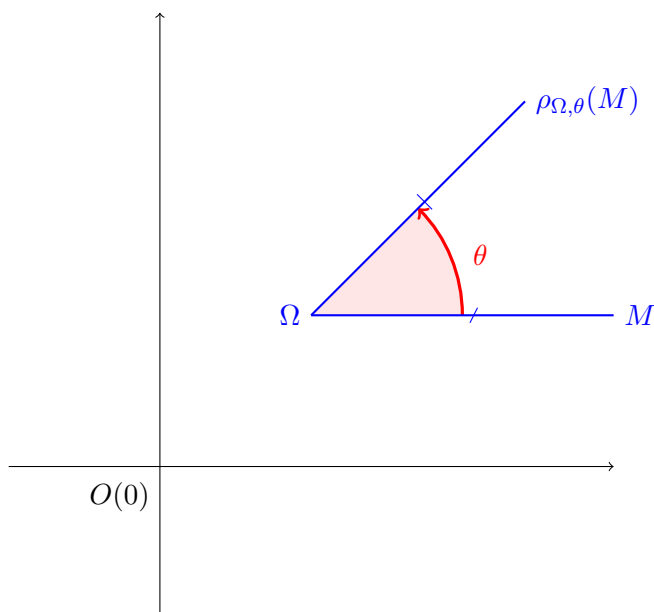
### Définition 8.2.3 (Rotation).

Soit  $\Omega$  un point du plan,  $\theta \in \mathbb{R}$ .

La rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\theta$  est l'application qui et

- fixe  $\Omega$  ;
- envoie tout point  $M$  différent de  $\Omega$  sur le point  $M'$  vérifiant  $\Omega M = \Omega M'$  et  $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta[2\pi]$ .




 FIGURE 3 – Rotation de centre  $\Omega$ , d'angle  $\theta$ .

On la note souvent  $\rho_{\Omega, \theta}$  (voir figure 3).

#### Remarque 8.2.4.

Si  $\theta$  est un multiple de  $2\pi$ , toute rotation d'angle  $\theta$  est l'identité.

Sinon, une rotation d'angle  $\theta$  n'a qu'un point fixe : son centre.

Enfin, si  $\theta = \pi$  [ $2\pi$ ], la rotation d'angle  $\theta$  et de centre  $\Omega$  est la symétrie (centrale) par rapport à  $\Omega$ .

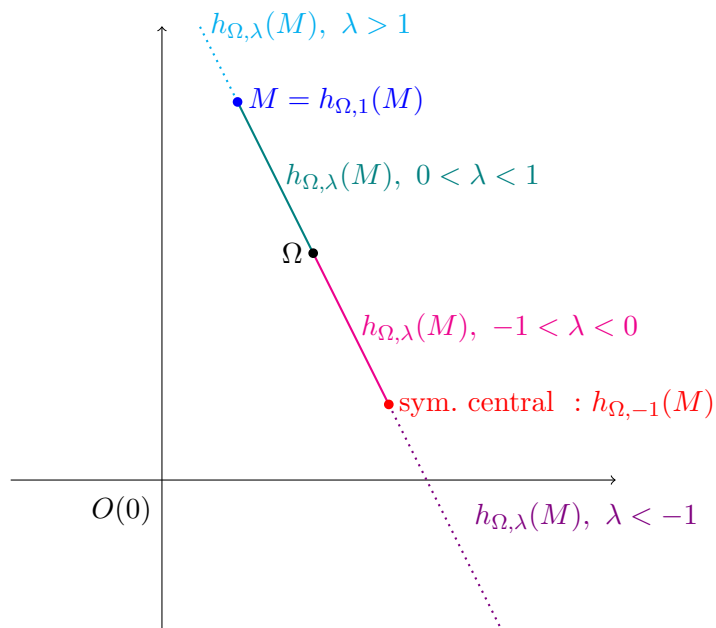
#### Définition 8.2.5 (Homothétie).

Soit  $\Omega$  un point du plan,  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ .

L'homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $\lambda$  est l'application qui envoie tout point  $M$  sur la point  $M'$  vérifiant  $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$  (voir figure 4). On la note souvent  $h_{\Omega, \lambda}$ .

#### Remarque 8.2.6.

Si  $\lambda = 1$ , toute homothétie de rapport  $\lambda$  est l'identité.


 FIGURE 4 – Quelques homothéties de centre  $\Omega$ .

Sinon, une homothétie de rapport  $\lambda$  n'a qu'un point fixe : son centre.

Si  $\lambda = 0$ , l'homothétie de rapport  $\lambda$  et de centre  $\Omega$  envoie tout point sur  $\Omega$ . Enfin, l'homothétie de rapport  $-1$  et de centre  $\Omega$  est la symétrie (centrale) par rapport à  $\Omega$ .

#### Théorème 8.2.7.

Soit  $M$  un point d'affixe  $z$ , et  $\Omega$  un point d'affixe  $\omega$ .

1. Soit  $\vec{u}$  un vecteur d'affixe  $u$ . L'image de  $M$  par la translation de vecteur  $\vec{u}$  a pour affixe le nombre complexe  $z + u$  ;
2. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . L'image de  $M$  par l'homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $\lambda$  a pour affixe le nombre complexe  $\omega + \lambda(z - \omega)$  ;
3. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . L'image de  $M$  par la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle de mesure  $\theta$  a pour affixe le nombre complexe  $\omega + e^{i\theta}(z - \omega)$ . En particulier,  $iz$  est l'affixe de l'image de  $M$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle de mesure  $\frac{\pi}{2}$  ;

4. L'image de  $M$  par la symétrie centrale de centre  $O$  a pour affixe le nombre complexe  $-z$  ;
5. L'image de  $M$  par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses ( $Ox$ ) a pour affixe le nombre complexe  $\bar{z}$  ;
6. L'image de  $M$  par la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées ( $Oy$ ) a pour affixe le nombre complexe  $-\bar{z}$ .

**Démonstration.** 1. L'image  $M'$  de  $M$  est telle que  $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{u}$ . On traduit cela en termes d'affixes.

2.  $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$ , donc  $z' - \omega = \lambda(z - \omega)$ .
3.  $\Omega M' = \Omega M$  et  $(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}) = \theta[2\pi]$ , donc  $|z' - \omega| = |z - \omega|$  et  $\arg(z' - \omega) - \arg(z - \omega) = \theta[2\pi]$ , d'où  $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ .
4. C'est une homothétie de centre  $O$  et de rapport  $-1$ .
5. Déjà vu.
6. On compose.

□

**Exemple 8.2.8.** 1. L'homothétie de centre  $(2 - i)$  et de rapport 3 s'écrit :  $z \mapsto 3(z - 2 + i) + 2 - i = 3z - 4 + 2i$ .

2. La rotation de centre 0 et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  s'écrit  $z \mapsto iz$ .
3. La rotation de centre  $(1 + i)$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  s'écrit  $z \mapsto j(z - 1 - i) + 1 - i$ .

### Exercice 8.2.9.

Soit quatre points du plan  $A(a)$ ,  $B(b)$ ,  $C(c)$  et  $D(d)$ .

1. On suppose que  $ABCD$  est un carré et que  $a$  et  $b$  ont des parties imaginaires et réelles entières. Montrer qu'il en est de même pour  $c$  et  $d$ .
2. On suppose que  $ABC$  est un triangle équilatéral et que  $a$  et  $b$  ont des parties imaginaires et réelles entières. Peut-il en être de même pour  $c$  ?

## 8.3. Similitudes et isométries

### Définition 8.3.1.

Soit  $\lambda > 0$ . On appelle *similitude (plane) de rapport  $\lambda$*  toute application  $f$  du plan dans lui-même telle que pour tous points  $M, N$  on ait :

$$f(M)f(N) = \lambda MN.$$

On appelle *isométrie (plane)* toute application  $f$  du plan dans lui-même telle que pour tous points  $M, N$  on ait :

$$f(M)f(N) = MN.$$

**Remarque 8.3.2.** 1. Comme le nom l'indique (racines grecques), les isométries préservent les distances.

2. Les isométries sont les similitudes de rapport 1.
3. La composée de deux isométries est une isométrie.
4. La composée de deux similitudes est une similitude de rapport le produit des rapports de celles-ci.
5. Il est clair que toute similitude est injective. On pourrait montrer que toute similitude est en fait bijective.

### Exemple 8.3.3.

Les translations, les rotations, les symétries et les homothéties sont des similitudes.

**Théorème 8.3.4.** 1. Les applications de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  de la forme  $z \mapsto az + b$ , où  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$  avec  $a \neq 0$ , sont des similitudes de rapport  $|a|$ .

2. De plus, une telle application préserve les angles orientés : on dit que c'est une similitude *directe*.

**Démonstration.** 1. Soit  $f$  une application de la forme  $z \mapsto az + b$ , où  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$  avec  $a$  non nul. Alors, soit  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ . On a  $|f(z') - f(z)| = |a||z' - z|$ . Donc  $f$  est une similitude de rapport  $|a|$ .

2. Soient  $a, b \in \mathbb{C}$  tels que  $a \neq 0$  et soit  $f$  la similitude  $z \mapsto az + b$ . Soient en outre  $u, v$  et  $w$  trois points distincts. Leurs images respectives par  $f$  sont notées  $u', v'$  et  $w'$ . Alors

$$\frac{u' - w'}{u' - v'} = \frac{(au + b) - (aw + b)}{(au + b) - (av + b)} = \frac{a(u - w)}{a(u - v)} = \frac{u - w}{u - v}$$

d'où égalité des arguments de ces expressions, et l'égalité des angles recherchée.  $\square$

### Remarque 8.3.5.

On pourrait montrer que réciproquement toutes les similitudes planes directes sont de cette forme.

### Exemple 8.3.6.

Translations, rotations et homothéties vs. symétries axiales.

### Théorème 8.3.7 (Caractérisation géométrique).

Soit  $a, b \in \mathbb{C}$  tel que  $a \neq 0$  et  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto az + b$ .

1. Si  $a = 1$ ,  $f$  est la translation de vecteur  $b$ .
2. Si  $a \neq 1$ , notons  $\theta = \arg(a)$  et  $\omega = \frac{b}{1-a}$ . Alors  $f$  est la composée de l'homothétie de rapport  $|a|$  et de la rotation d'angle  $\theta$ , toutes deux de centre  $\omega$ . De plus cette homothétie et cette rotation commutent. On dit que  $f$  est la *similitude directe de centre  $\omega$ , de rapport  $|a|$  et d'angle  $\theta$* .

**Démonstration.** 1. Direct.

2. Supposons donc que  $a \neq 1$ . L'équation  $f(z) = z$  n'a qu'une solution :  $\omega = \frac{b}{1-a}$ . On a alors :

$$\begin{aligned} f(z) - \omega &= f(z) - f(\omega) \\ &= (az + b) - (a\omega + b) \\ &= a(z - \omega) \\ &= |a| \times \underbrace{\left( e^{i \arg a} (z - \omega) \right)}_{\substack{\text{rotation de centre } \omega \text{ et d'angle de mesure } \arg a \\ \text{homothétie de centre } \omega \text{ et de rapport } |a| > 0}} \\ &= e^{i \arg a} \times \underbrace{\left( |a| (z - \omega) \right)}_{\substack{\text{homothétie de centre } \omega \text{ et de rapport } |a| > 0 \\ \text{rotation de centre } \omega \text{ et d'angle de mesure } \arg a}} \end{aligned}$$

$\square$

### Exemple 8.3.8.

L'application  $f : z \mapsto (1+i)z + 2$  est la similitude directe de centre  $2i$ , de rapport  $\sqrt{2}$  et d'angle de mesure  $\frac{\pi}{4}$ .