



---

C6 : ANALYSE FRÉQUENTIELLE DES SYSTÈMES ASSERVIS

## C6-1 - Introduction à l'analyse fréquentielle des systèmes asservis

31 Mars 2020

---

### Table des matières

---

I Définition de l'analyse fréquentielle	2
II Intérêts de l'étude fréquentielle	2
III Définition du support du cours	4
IV Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique	5

### Compétences

- **Analyser**; Apprécier la pertinence et la validité des résultats : Grandeurs utilisées : - unités du système international - homogénéité des grandeurs
- **Modéliser**; Identifier et caractériser les grandeurs physiques : Caractéristiques des grandeurs physiques : - nature physique - caractéristiques fréquentielles - caractéristiques temporelles
- **Modéliser**; Proposer un modèle de connaissance et de comportement : Systèmes linéaires continus et invariants : - Modélisation par équations différentielles - Calcul symbolique - fonction de transfert; gain, ordre, classe, pôles, zéros
- **Résoudre**; Procéder à la mise en oeuvre d'une démarche de résolution numérique : Signaux canoniques d'entrée : - signaux sinusoïdaux

### Compétences

- **Modéliser** :
  - Identifier et caractériser les grandeurs physiques : caractéristiques fréquentielles
  - Systèmes linéaires continus et invariants
  - Signaux canoniques d'entrée : signaux sinusoïdaux
  - Schémas blocs, fonctions de transferts
- **Résoudre** : Procéder à la mise en oeuvre d'une démarche de résolution analytique
  - Réponse fréquentielle;

## I. Définition de l'analyse fréquentielle



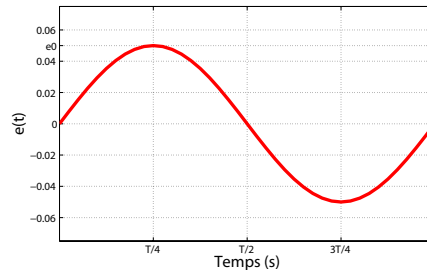
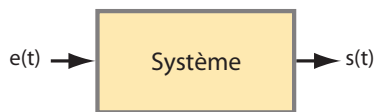
### Définition 1 : Analyse fréquentielle ou harmonique

L'analyse fréquentielle d'un système linéaire, continu et invariant consiste à étudier la réponse ( $s(t)$ ) vis à vis d'une entrée ( $e(t)$ ) de type harmonique ou sinusoïdale :

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t) = e_0 \sin(2\pi f t) \quad (1)$$

Ce signal est caractérisé par :

- sa **fréquence**  $f$ ,
- ou sa **pulsation**  $\omega = 2\pi f$ ,
- son **amplitude**  $e_0$ .



## II. Intérêts de l'étude fréquentielle



### Définition 2 : Décomposition en série de Fourier

Tout signal **périodique** se décompose en une **somme de signaux harmoniques** (e.g. sinusoïdale). Par exemple un signal périodique et impaire de fréquence  $f$  peut se décomposer de la façon suivante :

$$e(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cdot \sin(2\pi k f t) \quad (2)$$

où les coefficients  $a_k$  représente les différentes amplitudes des fonctions harmonique constituant la décomposition.



### Remarque 1 :

Dans la pratique, pour reconstituer un signal, on peut effectuer une **décomposition finie** en série de Fourier ( $\tilde{e}(t)$ ) en prenant  $n$  termes :

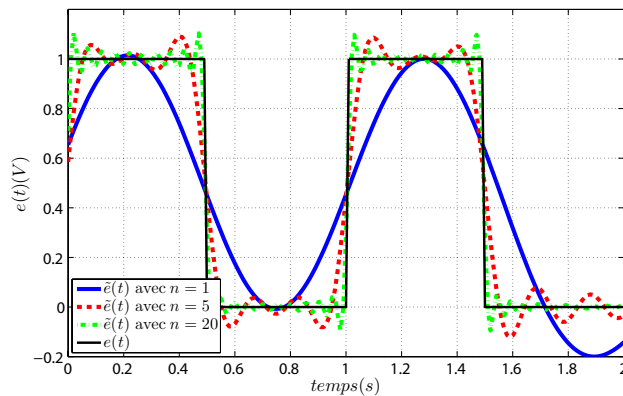
$$\tilde{e}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cdot \sin(2\pi k f t) \quad (3)$$

La précision de la décomposition sera alors d'autant plus fidèle au signal de départ que le nombre de termes ( $n$ ) sera grand.



### Exemple 1 : Reconstitution d'un signal carré périodique

Prenons l'exemple d'un signal de tension ( $e(t)$ ) de type créneau d'une période  $T = 1/f$  égale à 1 s et d'amplitude égale à 1 V. On peut effectuer une décomposition finie  $\tilde{e}(t)$  (équation 3) avec différentes valeurs de  $n$  (e.g. {1, 5, 20}). La figure suivante compare la "richesse" des différentes décompositions finies en série de Fourier de  $e(t)$ . On remarque bien que plus  $n$  est grand plus le signal reconstitué ( $\tilde{e}(t)$ ) se rapproche du signal initial ( $e(t)$ ).



### Propriété 1 : Étude d'un signal quelconque

Pour étudier la réponse d'un système vis-à-vis d'un signal quelconque, il faudra alors être capable de caractériser **la réponse fréquentielle** sur une plage de fréquence ( $f$ ) ou de pulsation ( $\omega$ ) étendue. On peut également choisir cette méthode d'analyse pour vérifier le comportement d'un système vis à vis d'une entrée harmonique caractérisée par différentes valeurs de fréquence ( $f$ ) ou de pulsation ( $\omega$ ).

### III. Définition du support du cours



#### Exemple 2 : Suspension de véhicule

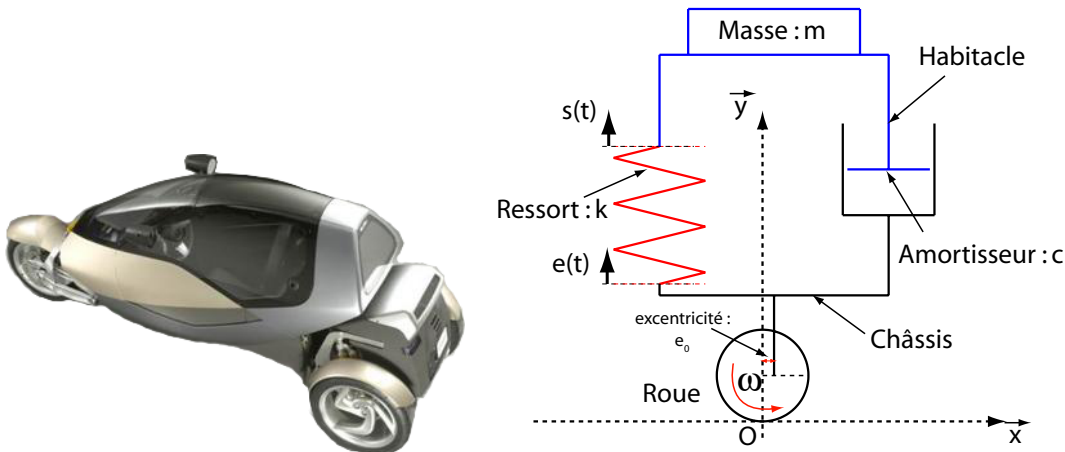
On modélise une suspension d'un véhicule par un ressort de raideur  $k$  et un amortisseur de coefficient d'amortissement  $c$ , montés en parallèles. On ramène le poids du véhicule à une masse globale  $m$ . Dans un premier temps, nous prendrons comme valeurs numériques des différents paramètres :

- $m = 100 \text{ kg}$ ,
- $c = 1,13 \text{ kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ ,
- $k = 80 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$ .

On note respectivement  $e(t)$  et  $s(t)$  les déplacements verticaux (suivant  $\vec{y}$ ) du châssis et de l'habitacle par rapport à la position d'équilibre du système. La rotation constante de la roue avec une vitesse angulaire  $\omega$  entraîne un déplacement horizontal du véhicule à vitesse constante selon la direction  $-\vec{x}$ . Ainsi le repère  $R_0(O, \vec{x}, \vec{y})$  peut être supposé comme galiléen. L'axe de la roue est légèrement excentrée par rapport à son centre. Ceci provoque donc un déplacement du châssis en fonction de la vitesse de rotation de la roue  $\omega$ .

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t).$$

On se propose de modéliser la réponse en déplacement vertical (suivant  $\vec{y}$ ) de l'habitacle ( $s(t)$ ) en fonction de la pulsation  $\omega$ .



Le Principe Fondamental de la Dynamique en résultante suivant la direction  $\vec{y}$  appliqué à l'habitacle par rapport au repère  $R_0$  donne l'équation différentielle suivante :

$$-c \left( \frac{d(s(t) - e(t))}{dt} \right) - k(s(t) - e(t)) = m \frac{d^2 s(t)}{dt^2}.$$

La fonction de transfert du système  $H(p) = S(p)/E(p)$  est égale à (forme canonique) :

Avec  $\tau = 2\xi/\omega_0$ .

## IV. Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

La transformée de Laplace de l'entrée harmonique ( $e(t)$  équation 1) est donnée par :

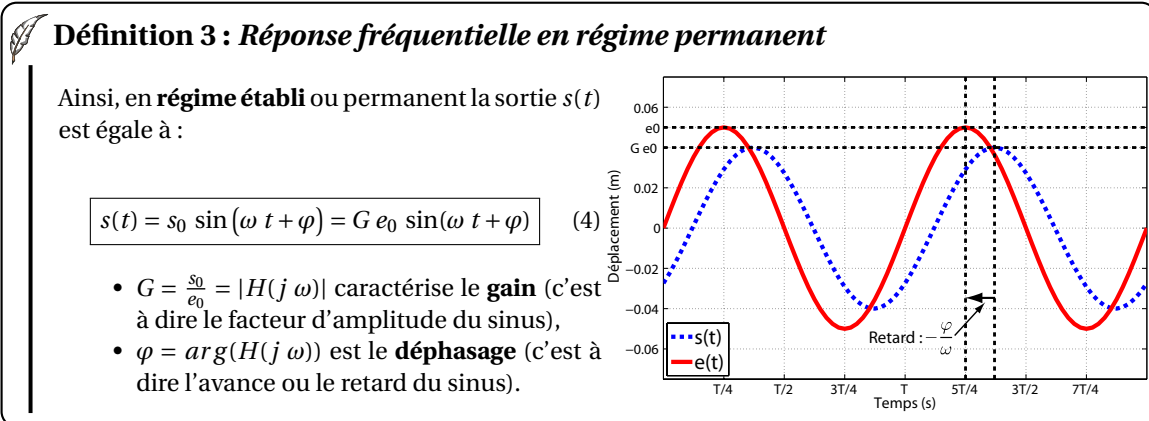
$$E(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2}$$

Dans le domaine de Laplace la sortie  $S(p)$  du système soumis à une entrée harmonique s'écrit :

On obtient alors avec une transformée de Laplace inverse : ,

$$S(t) = e_0 \left[ \frac{G}{2j} \left( -e^{-j(\varphi+\omega t)} + e^{j(\varphi+\omega t)} \right) + e^{at} Q(t) \right] = e_0 [G \sin(\omega t + \varphi) + e^{at} Q(t)]$$

Or, on rappelle que  $a < 0$  (ici  $a = -\frac{c}{2m}$ ) et donc  $e^{at} Q(t)$  tend vers 0 en  $+\infty$ . Cette partie s'annule donc une fois que le régime est permanent ou établi et représente le **régime transitoire**.



### **Remarque 2 : Cas général**

Dans le cas général d'un système linéaire continu invariant, sous les hypothèses de **stabilité** et avec des **conditions initiales nulles** le résultat précédent est encore valable.

### **Conclusion :**

L'étude fréquentielle d'un système linéaire continu et invariant revient à étudier le gain fréquentielle  $G$ , ainsi que la phase  $\varphi$  de la fonction de transfert  $H(p)$  en fonction de la pulsation  $\omega$  ou de la fréquence  $f$ .

On utilisera pour cela des outils des outils graphiques appelés "**lieux de transfert**".