# Devoir à la maison n° 17

À rendre le 29 avril

Soit $E$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
On se donne $A$ et $B$ deux sous-espaces vectoriels de $E$ et on se pose le problème suivant :

À quelle(s) condition(s) existe-t-il un sous-espace vectoriel $C$ tel que
$$A + B = A \oplus C = B \oplus C\,?$$

**1)** Dans cette question on suppose que le sous-espace vectoriel $C$ existe.
Montrer que $\dim A = \dim B$ et déterminer $\dim C$.

Dans la suite de notre étude, nous allons supposer $\dim A = \dim B$ et montrer que le sous-espace vectoriel C existe.

**2)** On étudie pour commencer le cas où $A$ et $B$ seraient deux hyperplans de $E$ distincts.

- **a)** Justifier l'existence de vecteurs $u \in A$ et $v \in B$ tels que $u \notin B$ et $v \notin A$.
- **b)** Établir que $w = u + v \notin A \cup B$ et que $w \neq 0$.
- **c)** Observer que $C = \text{Vect}(w)$ est solution du problème posé.

**3)** On revient au cas général et on suppose seulement $\dim A = \dim B$.

- **a)** Résoudre le problème posé lorsque $A = B$.

Dans la suite, on suppose $A \neq B$.

- **b)** Justifier qu'il existe un sous-espace vectoriel $A'$ tel que $(A \cap B) \oplus A' = A$.
De manière symétrique, on introduit $B'$ sous-espace vectoriel tel que $(A \cap B) \oplus B' = B$.
- **c)** Montrer que $A' \cap B' = \{0_E\}$ et $\dim A' = \dim B' \in \mathbb{N}^*$.

Dans la suite, on pose $p = \dim A' = \dim B'$.

- **d)** Justifier l'existence de bases $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_p)$ aux sous-espaces vectoriels $A'$ et $B'$.

**4)** On reprend les objets introduits ci-dessus afin de construire un sous-espace vectoriel $C$ solution.
On forme $\mathscr{D} = (g_1, \ldots, g_p)$ en posant, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $g_i = e_i + f_i$.

- **a)** Montrer que la famille $\mathscr{D}$ est libre.
- **b)** On pose $C = \text{Vect}(g_1, \ldots, g_p)$. Déterminer $\dim C$.
- **c)** Montrer que $A \cap C = \{0_E\}$.
- **d)** Conclure que $A + B = A \oplus C = B \oplus C$.

— **FIN** —