2.4 : Matrices de passage et changement de bases

E, F 2 $\mathbb{K}$ev, $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ 2 bases de E.

$\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ 2 bases de F.

Y a-t-il un lien entre $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\, u$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}\, u$?

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
E,\mathcal{B} \arrow[r, "u", "\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)"'] & F,\mathcal{C} \arrow[d, "id_F"', "\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(id_F)"] \\
E,\mathcal{B}' \arrow[u, "id_E", "\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_E)"'] \arrow[r, "u", "\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)"'] & F,\mathcal{C}'
\end{tikzcd}$$

$$u = id_F \circ u \circ id_E$$

donc :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}\, u = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}\, id_F \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\, u \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\, id_E}$$

<u>Rq</u> : $\mathcal{B}' = (e'_1 \dots e'_p)$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\big(id(e'_1) \dots id(e'_p)\big)$$

$$= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1 \dots e'_p).$$

$$= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$

cette matrice est appelée "matrice de passage de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$", notée $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

<u>Ex</u> :

$$u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x-y \\ 2x+y \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{C} = (e_1, e_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{B} = (f_1, f_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{D} = (g_1, g_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{D},\mathcal{C}}(u)$?

Nous devons avoir:

$$\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u)}_{A} = \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\, id}_{C} \times \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{D},\mathcal{C}}\, u}_{B} \times \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}\, id}_{D}$$

<u>Calculons A</u> : $u(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -f_1 + 2f_2$

$u(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2f_1 + f_2$

donc : $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x-y \\ 2x+y \end{pmatrix}$

$\mathcal{C} = (e_1, e_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$\mathcal{B} = (f_1, f_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$\mathcal{D} = (g_1, g_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Calculons B : $u(g_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2e_1 + e_2$

$u(g_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -e_1 + e_2$

donc : $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculons C : $e_1 = f_1$; $e_2 = -f_1 + f_2$

donc : $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x-y \\ 2x+y \end{pmatrix}$$

$\mathcal{C} = (e_1, e_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$\mathcal{B} = (f_1, f_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$\mathcal{D} = (g_1, g_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Calculons D : $e_1 = g_1 + g_2$; $e_2 = g_2$

donc : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$CBD = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= A.$$

Théorème 2.4.3 : Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ 3 bases de E, $\dim E = p$

1) $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, \mathcal{B} = I_p.$

2) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}\, id = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\, id \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\, id$

dc : $I_p = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \times P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$

dc : $\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$

3) $\underset{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}\ \mathrm{id} = \underset{\mathcal{B}',\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}\ \mathrm{id} \times \underset{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}{\mathrm{Mat}}\ \mathrm{id}$

dc : $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}$ (transitivité).

<u>Rq</u> : 2) permet d'inverser 1 matrice :

<u>Ex</u> : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\ \mathcal{B} = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$

avec $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right)$

Or : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(-\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

dc : $A^{-1} = \left(P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}\right)^{-1} = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\, \mathscr{C}$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème 2.4.7 : Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ 2 bases de E et $x \in E$.

Alors : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\, x = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\, \mathrm{id} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\, x$

$$\text{d'c : } \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'} x = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \times \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} x .$$

<u>Rq</u> : Si l'on connaît x dans $\underline{\underline{\mathcal{B}}}$

On a : $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} x$

On veut x dans $\underline{\underline{\mathcal{B}'}}$ (ie $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'} x$) .

Est-ce la matrice de passage de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$ qu'il faut utiliser ? <u>NON</u> il faut utiliser $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$!