Devoir à la maison n° 14

À rendre le 10 février

La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ est définie par la donnée de $P_0 = X$ ainsi que par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R} \qquad P_{n+1}(x) = (n+1)\int_0^x P_n(t)\ \mathrm{d}t + x\left[1-(n+1)\int_0^1 P_n(t)\ \mathrm{d}t\right].$$

1) Calculer P_1, P_2, P_3 et P_4.

2) Montrer que l'on définit bien ainsi une suite de polynômes.

3) On veut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant les deux conditions

$$P_n(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad P_n(X) - P_n(X-1) = X^n. \quad (\star)$$

a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(0) = 0$ et $P_n(X) - P_n(X-1) = X^n$.

Indication : on pourra montrer que $P_{n+1}(X) - P_{n+1}(X-1)$ et X^{n+1} ont le même polynôme dérivé.

b) Soient P et Q deux polynômes vérifiant les deux conditions $(\star)$, pour un certain n donné et fixé. Comparer $P(k)$ et $Q(k)$, pour chaque entier $k \in \mathbb{N}$, et conclure.

4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme P_n est divisible par X^2+X. Factoriser les polynômes P_1, P_2 et P_3. Écrire P_4 sous la forme $X(X+1)Q_4$.

5) Montrer que le polynôme P_n est de degré $n+1$, calculer son coefficient dominant, ainsi que le coefficient de X^n.

6) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $P_n(p) = \sum_{k=1}^{p} k^n$.

7) Retrouver ainsi les valeurs de $\sum_{k=1}^{p} k^n$ pour $n = 1, 2, 3, 4$.

— **FIN** —