



C3-1 - Analyse temporelle des systèmes asservis du 1er ordre

16 Octobre 2018

Table des matières

I Définitions	1
1 Système du premier ordre	1
2 Exemple du cours	2
II Caractérisations de la réponse d'un système du premier ordre	3
1 Réponse à un échelon	3
a) Équation de la réponse	3
b) Comportement asymptotique	4
c) Propriétés	4
2 Réponse à une rampe :	5
a) Équation de la réponse	5
b) Comportement asymptotique	6
c) Propriétés	6

Compétences

- **Modéliser :**
 - Proposer un modèle de connaissance et de comportement
- **Résoudre :** Proposer une démarche de résolution et mettre en oeuvre la résolution analytique :
 - Réponse temporelle des systèmes du 1er ordre
- **Expérimenter :** proposer, justifier et mettre en oeuvre un protocole expérimental
 - Prévoir les allures des réponses attendues;

I. Définitions

1 Système du premier ordre



Définition 1 : Système du premier ordre

On appelle **système du premier ordre** tout système linéaire, continu et invariant régi par une équation différentielle du premier degré de la forme :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t). \quad (1)$$

**Remarque 1 :**

Pour la suite du cours, on considérera que les **conditions initiales de $s(t)$ sont toujours nulles** :

- pour une équation différentielle du premier ordre : $s(t=0) = 0$;
- pour une équation différentielle du deuxième ordre : $s'(t=0) = 0$

**Propriété 1 :**

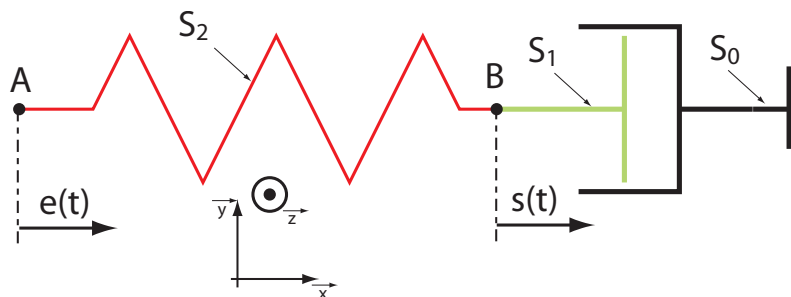
La fonction de transfert de ces systèmes peut s'écrire sous la **forme canonique suivante** :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \quad (2)$$

où :

- τ : **constante de temps** (en s) ;
- K : **gain statique** (unité selon l'application).

2 Exemple du cours

**Exemple 1 : Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c** 

On déplace l'extrémité A d'une longueur $e(t)$. Le point B répond à ce déplacement en se déplaçant d'une longueur $s(t)$. En isolant le solide S_1 de masse (m), on obtient le bilan des actions mécaniques extérieures suivant \vec{x} :

- Le ressort S_2 de raideur k exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant \vec{x} ,

$$F_r = -k(s(t) - e(t)).$$

- L'amortisseur S_0 de coefficient de viscosité c exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant \vec{x} ,

$$F_c = -c \cdot \frac{ds(t)}{dt}.$$

- On néglige le poids du solide S_1 .

En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique suivant la direction \vec{x} , on obtient :

$$F_r + F_c = m \frac{d^2 s(t)}{dt^2}.$$

En négligeant la masse m (ce qui revient à négliger l'inertie), on obtient alors,

$$c \frac{ds(t)}{dt} + ks(t) = ke(t). \quad (3)$$

Cette équation différentielle de degré 1 caractérise **un système du premier ordre**. On considère que les conditions initiales sont nulles ($s(t=0) = 0$).



Exemple 2 : Détermination dans le domaine de Laplace de la fonction de transfert associée

II. Caractérisations de la réponse d'un système du premier ordre

1 Réponse à un échelon

a) Équation de la réponse

On cherche à calculer la réponse temporelle $s(t)$ à un échelon $e(t)$ d'amplitude e_0 :

$$e(t) = e_0 \cdot u(t).$$



Remarque 2 :

Si $e_0 = 1$, la réponse $e(t)$ est appelée **réponse indicielle**.

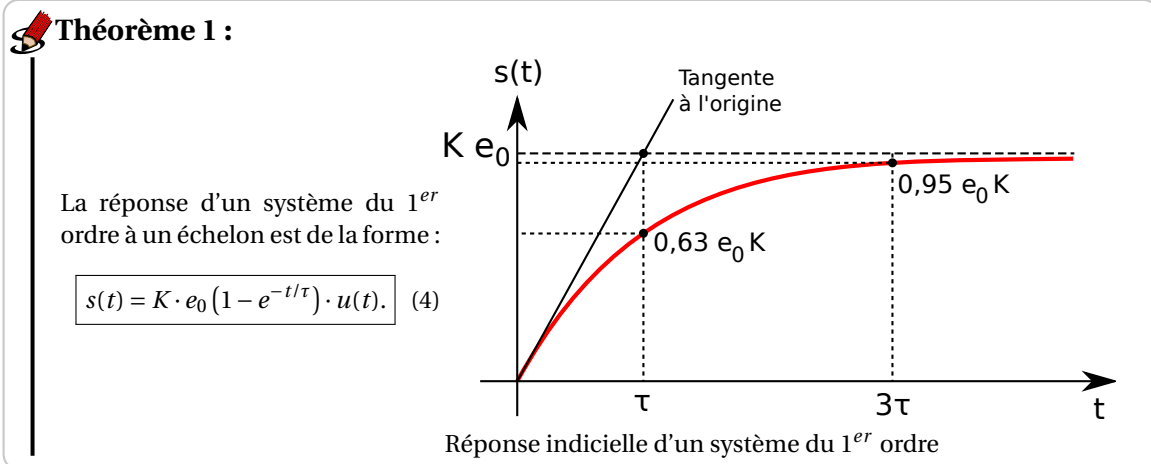
On cherche à calculer $s(t)$ à partir de $H(p)$ et $E(p)$:

$$\begin{aligned} E(p) &= \frac{e_0}{p} \\ S(p) &= H(p) \cdot E(p) \\ &= \left(\frac{K}{1 + \tau p} \right) \frac{e_0}{p} \end{aligned}$$

La décomposition en élément simple donne :

La transformée inverse donne :

On en déduit :



b) Comportement asymptotique

On cherche à déterminer le comportement asymptotique (valeur et dérivée) de la réponse $s(t)$ au voisinage de 0 et $+\infty$. Pour cela, on peut utiliser les théorèmes des valeurs limites :

Au voisinage de $+\infty$:

Au voisinage de 0 :

c) Propriétés

Propriété 2 :

- La réponse indicielle à un système du 1^{er} ordre possède :
 - une **asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$** d'ordonnée à l'origine $K \cdot e_0$,
 - une **tangente à l'origine de coefficient directeur $\frac{K \cdot e_0}{\tau}$** .
- La **rapidité** d'une réponse à un échelon pour un premier ordre est quantifiée par le **temps de réponse à 5%** (noté t_r) :

$$t_r \approx 3 \tau. \quad (5)$$
- La **Précision** de la réponse à un échelon peut être indiquée par l'**erreur statique**, noté ε_s . Elle s'obtient en recherchant l'écart au voisinage de $+\infty$:

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e(t) - s(t)) \quad (6)$$
- L'erreur statique ε_s d'un système du 1^{er} ordre de **gain unitaire** soumis à un échelon est nulle :

$$\varepsilon_s = 0. \quad (7)$$



Démonstration 1 : *Rapidité*

Calculons le temps de réponse à 5% pour un premier ordre



Démonstration 2 : *Précision*

Pour illustrer cela, prenons un gain $K = 1$. D'après le raisonnement suivant :



Attention : *Précision*

Pour estimer la précision, il convient d'abord de vérifier que $e(t)$ et $s(t)$ soient **homogènes** pour être comparables! Cela prend en compte aussi bien la nature des entrées-sorties, mais également l'amplification de la sortie par rapport à l'entrée. On prendra donc soit un gain unitaire ($K = 1$), soit l'équation 6 légèrement modifiée :

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} (K e(t) - s(t)) \quad (8)$$

2 Réponse à une rampe :

a) Équation de la réponse

Dans ce cas, l'entrée est une rampe :

$$e(t) = a t u(t)$$

On cherche à calculer $s(t)$ à partir de $H(p)$ et $E(p)$:

$$\begin{aligned} E(p) &= \frac{a}{p^2} \\ S(p) &= H(p)E(p) \\ &= \left(\frac{K}{1 + \tau p} \right) \frac{a}{p^2} \\ &= K a \left(\frac{1}{p^2} - \frac{\tau}{p} + \frac{\tau^2}{1 + \tau p} \right) \end{aligned}$$

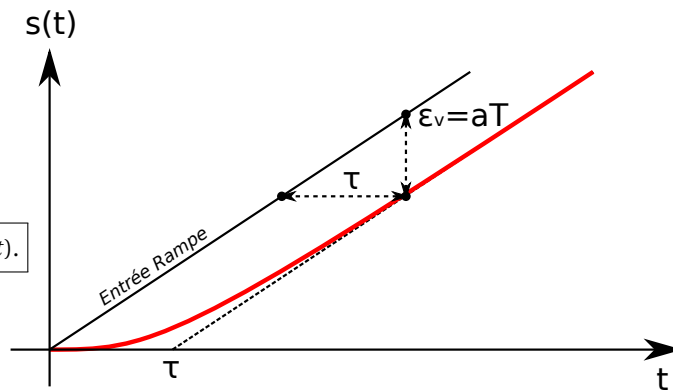
Après transformée inverse, on obtient :

Théorème 2 :

La réponse d'un système du 1^{er} ordre soumis à une rampe est de la forme :

$$s(t) = K a (t + \tau (e^{-t/\tau} - 1)) u(t).$$

(9)



Réponse à une rampe d'un système du 1^{er} ordre (ici $K = 1$)

b) Comportement asymptotique

On cherche à déterminer le comportement asymptotique (valeur et dérivée) de la réponse $s(t)$ au voisinage de 0 et $+\infty$. Pour cela, on utilise les théorèmes des valeurs limites.

Au voisinage de $+\infty$:

Au voisinage de 0 :

c) Propriétés

Propriété 3 :

- La réponse d'un système du 1^{er} ordre à une rampe possède :
 - une tangente horizontale au voisinage de 0,
 - une asymptote oblique, de coefficient directeur $K a$ car une asymptote oblique d'équation $y(t) = a (t - \tau)$ au voisinage de $+\infty$.
- Précision :** Pour $K = 1$, on trouve :

$$\epsilon_v = a \tau. \quad (10)$$

- Rapidité :** La rapidité d'une réponse à une rampe d'un système du 1^{er} ordre peut se caractériser par un **retard de traînage** r_t :

$$r_t = \tau. \quad (11)$$