

## Devoir à la maison n° 2

À rendre le 15 septembre

Ce devoir étant long, la question 7 est facultative !

Dans cet exercice, on identifie le plan, muni d'un repère orthonormal, à l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$ . Ainsi, on confondra tout point  $M$  avec son affixe  $z$ . On désigne par  $\mathcal{H}$  l'ensemble des nombres complexes  $z = x + iy$  dont la partie imaginaire est strictement positive (i.e  $\text{Im}(z) = y > 0$ ). On dit que  $\mathcal{H}$  est le *demi-plan de Poincaré*.

- 1) Pour tout réel  $\theta$  et pour tout complexe  $z$  dans  $\mathcal{H}$ , justifier l'existence puis l'appartenance à  $\mathcal{H}$  du complexe  $\frac{z \cos \theta - \sin \theta}{z \sin \theta + \cos \theta}$ .

On précisera sa partie imaginaire.

Dans toute la suite de l'exercice,  $\theta$  étant un réel fixé, on note  $A_\theta$  l'application de  $\mathcal{H}$  vers  $\mathcal{H}$  définie par :

$$\forall z \in \mathcal{H}, A_\theta(z) = \frac{z \cos \theta - \sin \theta}{z \sin \theta + \cos \theta}.$$

- 2) Rechercher les *points fixes* de  $A_\theta$ , c'est-à-dire les solutions de  $A_\theta(z) = z$ .  
3) Soient deux réels  $\theta$  et  $\theta'$ . Vérifier que pour tout  $z \in \mathcal{H}$  on a

$$A_{\theta'}(A_\theta(z)) = A_{\theta'+\theta}(z).$$

De même, calculer  $A_{-\theta}(z)$  puis  $A_{-\theta}(A_\theta(z))$ .

- 4) Montrer que pour tout  $a \in \mathcal{H}$  il existe un unique  $b \in \mathcal{H}$  tel que  $A_\theta(b) = a$ . On dit que  $A_\theta$  est une *bijection* de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}$ .  
5) On définit une fonction de  $\mathcal{H}$  vers  $\mathbb{R}$  en posant

$$\forall z \in \mathcal{H}, c(z) = \frac{|z|^2 + 1}{2 \text{Im}(z)}.$$

Montrer que pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et tout  $z \in \mathcal{H}$ ,  $c(A_\theta(z)) = c(z)$ .

- 6) Soient deux réels  $\theta$  et  $\theta'$  et  $z \in \mathcal{H} \setminus \{i\}$ . On note  $\pi\mathbb{Z}$  l'ensemble  $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . Montrer l'équivalence :

$$(A_\theta(z) = A_{\theta'}(z)) \Leftrightarrow ((\theta' - \theta) \in \pi\mathbb{Z}).$$

- 7) Soit  $z_0 \in \mathcal{H} \setminus \{i\}$ .

a) Montrer que  $c(z_0) \in \mathbb{R}_+^*$ , puis que  $c(z_0) > 1$ .

b) On appelle  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $ic(z_0)$  et de rayon  $\sqrt{c(z_0)^2 - 1}$ .

i) Vérifier que ce cercle  $\mathcal{C}$  existe et qu'il est inclus dans  $\mathcal{H}$ .

ii) Vérifier que  $z_0 \in \mathcal{C}$  et que  $i \notin \mathcal{C}$ .

iii) Montrer que pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $A_\theta(z_0)$  est sur le cercle  $\mathcal{C}$ .

— FIN —