

## **VII Notion d'application**

17 novembre 2019

## 1 Vocabulaire.

- En toute rigueur, une *application* est un objet différent d'une *fonction*, mais la différence est hors programme. On emploiera donc les deux termes indifféremment.
- Une application d'un ensemble  $E$  dans un ensemble  $F$  est une relation qui, à tout élément de  $E$  associe un unique élément de  $F$ . Attention : on a forcément unicité de l'image et les ensembles de départ et d'arrivée sont une donnée de l'application.

### Exemple 1.0.1.

Les applications qui à  $x$  associe  $x^2$ , partant respectivement de  $\mathbb{R}$  et de  $\mathbb{R}_+$ , sont différentes : la seconde permet de définir la fonction  $\sqrt{\cdot}$ , pas la première. Dans les deux cas, on pourra considérer comme ensemble d'arrivée  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}_+$ . Une formule ne définit donc pas à elle seule une application.

### Définition 1.0.2.

On appelle *fonction* (ou *application*) tout triplet  $f = (E, F, \Gamma)$  où  $E$  est un ensemble appelé *ensemble de départ* ou *domaine de définition*,  $F$  est un ensemble appelé *ensemble d'arrivée*, et  $\Gamma$  est une partie de  $E \times F$  appelée *graphe de  $f$*  telle que  $\forall x \in E, \exists ! y \in F, (x, y) \in \Gamma$ . Si  $(x, y) \in \Gamma$ , on note plus simplement  $y = f(x)$ . On dit que  $x$  est alors un antécédent de  $y$ , et  $y$  l'image de  $x$ .

### Remarque 1.0.3.

Il peut y avoir plusieurs antécédents d'un élément dans l'espace d'arrivée, mais une seule image d'un élément de l'espace de départ : cela se voit sur le graphe, que l'on représente comme suit.

- On note une application  $f$  allant d'un ensemble  $E$  dans un ensemble  $F$  de la manière suivante :  $f : E \rightarrow F$ .
- Si l'application est de plus définie par une formule, on écrit alors :

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow F, \\ x &\mapsto \text{Formule dépendant de } x. \end{aligned}$$

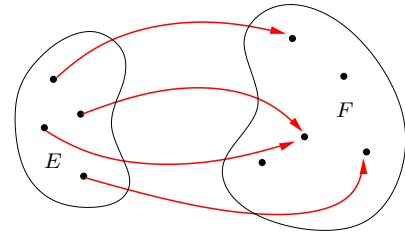


FIGURE 1 – Exemple d'application – on remarque qu'une image a deux antécédents.

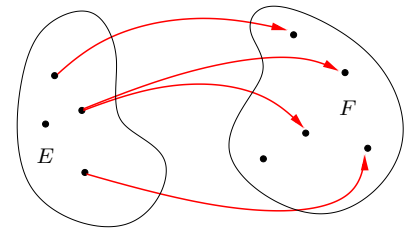


FIGURE 2 – Cette relation n'est pas une application.

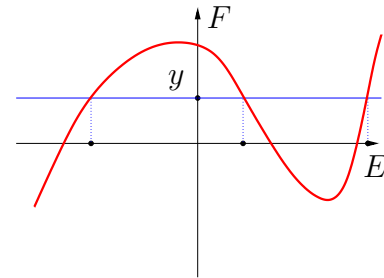


FIGURE 3 –  $y$  a ici trois antécédents représentés.

### Remarque 1.0.4.

La notation

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow F, \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

n'est pas informative.

### Remarque 1.0.5.

Si  $f, g : E \rightarrow F$ , alors  $f = g$  équivaut à  $\forall x \in E, f(x) = g(x)$ .

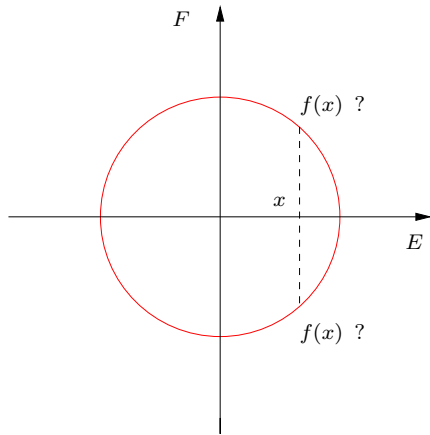


FIGURE 4 – Cette courbe ne représente pas une application.

#### Définition 1.0.6.

Soit  $E, F$  deux ensembles et  $f : E \rightarrow F$  une application. On appelle *image* de  $f$  le sous-ensemble de  $F$ , noté  $f(E)$  ou  $\text{Im}(f)$ , égal à  $\{f(x), x \in E\}$ .

#### Remarque 1.0.7.

La notation  $f(E)$  indique bien l'ensemble de départ, contrairement à la notation  $\text{Im } f$ . Cet ensemble peut aussi s'écrire  $\{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}$ .

#### Remarque 1.0.8.

Les ensembles de départ et d'arrivée peuvent être n'importe quoi, pas forcément de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

- On note  $\mathcal{F}(E, F)$ , ou  $F^E$ , l'ensemble des applications de  $E$  dans  $F$ . Comment s'en souvenir ? Penser que  $\text{Card } F^E = \text{Card } F^{\text{Card } E}$ .

#### Exemple 1.0.9.

L'ensemble des suites réelles est noté  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .  $\{1\}^{\mathbb{N}}$  : une seule suite possible.

#### Définition 1.0.10 (Familles).

Soit  $I$  un ensemble. On appelle *famille* d'éléments de  $E$  indexée par  $I$  toute application de  $I$  dans  $E$ . Les familles sont notées  $(x_i)_{i \in I}$ , et rarement, voire jamais, comme des applications.

L'ensemble des familles de  $E$  indexées par  $I$  est noté  $E^I$ .

#### Exemple 1.0.11.

$\mathbb{R}^{\{1,2\}}$  : on peut l'identifier à  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , que l'on note opportunément  $\mathbb{R}^2$ .

#### Définition 1.0.12.

Soit  $E$  un ensemble et  $A$  une partie de  $E$ . On appelle *fonction indicatrice* de  $A$  la fonction notée  $\mathbb{1}_A$  telle que pour tout  $x \in A$ ,  $\mathbb{1}_A(x) = 1$ , et pour tout  $x \in E \setminus A$ ,  $\mathbb{1}_A(x) = 0$ .

#### Exercice 1.0.13.

Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles. Calculer  $\mathbb{1}_{A \cap B}$ ,  $\mathbb{1}_{\bar{A}}$  et  $\mathbb{1}_{A \cup B}$  en fonction de  $\mathbb{1}_A$  et de  $\mathbb{1}_B$ .

## 2 Restriction, prolongement

#### Définition 2.0.1.

Soit  $E, E', F, F'$  quatre ensembles,  $f : E \rightarrow F$  et  $f' : E' \rightarrow F'$  deux applications.

- Pour toute partie  $G$  de  $E$ , la restriction de  $f$  à  $G$  est l'application

$$\begin{aligned} f|_G : G &\rightarrow F, \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

- On dit que  $f'$  est un prolongement de  $f$  si  $E \subset E'$ ,  $F \subset F'$  et  $\forall x \in E, f(x) = f'(x)$ .



Il y a toujours une infinité de prolongements possibles à une application.

- Une fonction est toujours le prolongement d'une de ses restrictions.

#### Exemple 2.0.2.

Tout réel strictement positif a deux antécédents par la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$  ; mais il n'a qu'un antécédent par la restriction de  $f$  à  $\mathbb{R}_+$ .

### 3 Composition d'applications

#### Définition 3.0.1.

Soit  $E, F, G$  trois ensembles,  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications. On définit alors la composée de  $f$  par  $g$  comme l'application

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\rightarrow G, \\ x &\mapsto g(f(x)). \end{aligned}$$

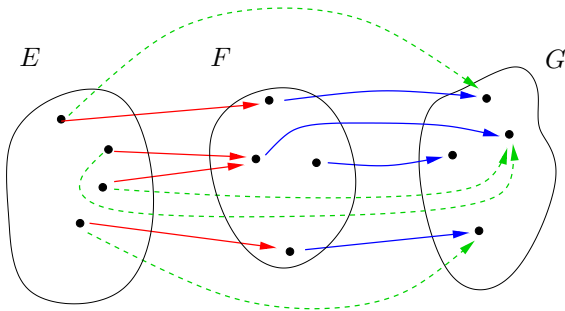


FIGURE 5 – Exemple de composée.



On ne peut pas toujours composer deux applications. Par exemple : les fonctions  $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$  et  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ .

• Ce n'est pas une opération commutative. Par exemple :  $\exists x \in \mathbb{R}_+, \ln(x^2) \neq (\ln x)^2$ .

#### Définition 3.0.2.

Soit  $E$  un ensemble, on définit dessus l'application identité sur  $E$  comme  $\text{Id}_E : E \rightarrow E, x \mapsto x$ .

#### Proposition 3.0.3.

Soit  $E$  un ensemble, alors  $(E^E, \circ)$  est un monoïde de neutre  $\text{Id}_E$ .

#### Démonstration.

Soit  $x \in E, f, g$  et  $h$  trois applications de  $E$  dans  $E$ . On a alors  $h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = h \circ (g \circ f)(x)$  et  $h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g) \circ f(x)$ , d'où l'associativité.

On a aussi pour tout  $x \in E, (\text{Id}_E \circ f)(x) = \text{Id}_E(f(x)) = f(x)$  et  $(f \circ \text{Id}_E)(x) = f(\text{Id}_E(x)) = f(x)$ , ce qui montre que  $f \circ \text{Id}_E = \text{Id}_E \circ f = f$ .  $\square$

#### Remarque 3.0.4.

Nous avons vu (et nous reverrons en TD) que certaines fonctions (dans ce cas,  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ) ne sont pas inversibles (au sens de la structure  $(E^E, \circ)$ ).

### 4 Injectivité, surjectivité, bijectivité

On comprend vite, en considérant quelques exemples, quelles sont les propriétés qui peuvent empêcher une fonction  $f : E \rightarrow E$  d'être inversible pour  $\circ$ .

- Si deux éléments de  $E$  ont même image par  $f$ , on ne pourra pas « revenir en arrière » et construire  $g$  vérifiant  $g \circ f = \text{Id}_E$ .
- Si un élément de  $E$  n'a pas d'antécédent par  $f$ , on ne pourra pas construire  $g$  vérifiant  $f \circ g = \text{Id}_E$ .

#### 4.1 Injectivité

##### Définition 4.1.1.

Soit  $E, F$  deux ensembles,  $f : E \rightarrow F$  une application. On dit que  $f$  est *injective* (ou est une *injection*) si  $\forall (x, y) \in E^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ .

##### Remarque 4.1.2.

On utilise également la contraposée de cette proposition :  $\forall (x, y) \in E^2, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ .

##### Remarque 4.1.3.

La donnée de l'ensemble de départ est primordiale. Exemple : l'application  $[-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$  est injective alors que  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$  ne l'est pas (le montrer et tracer les courbes représentatives de ces deux applications). On peut aussi se demander ce qu'il adviendrait de la figure 8 si l'on ne précise pas que l'espace de départ est le segment  $I$  ici représenté.

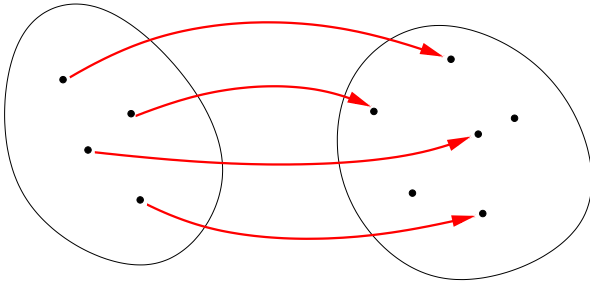


FIGURE 6 – Exemple d'application injective.

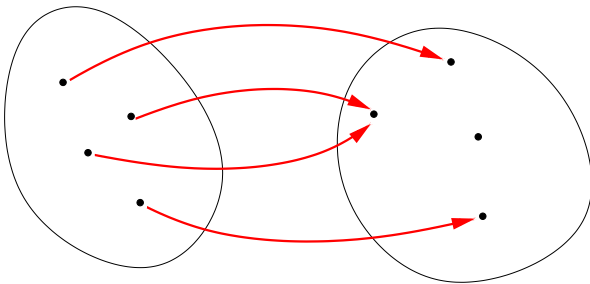


FIGURE 7 – Exemple d'application non injective : une image a deux antécédents ou plus.

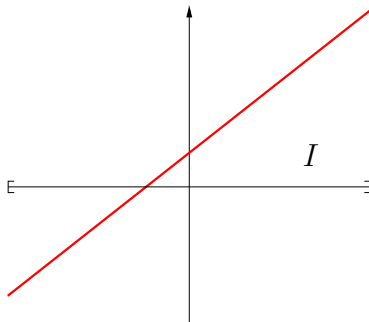


FIGURE 8 – Graphe d'application injective sur un segment  $I$ .

**Remarque 4.1.4.**

Une application  $f : E \rightarrow F$  est injective si et seulement si, pour tout  $y \in F$ , l'équation  $y = f(x)$  admet au plus une solution dans  $E$ .

**Remarque 4.1.5.**

Une restriction d'une fonction injective est tou-

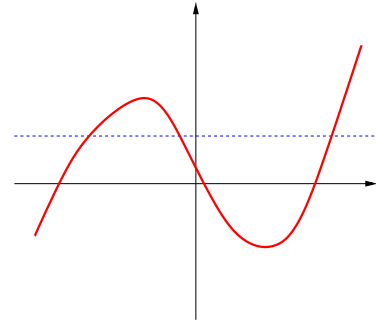


FIGURE 9 – Graphe d'application non injective : une image a deux antécédents ou plus.

jours injective.

**Remarque 4.1.6.**

On a montré dans le premier chapitre que toute fonction réelle strictement monotone est injective.

**Théorème 4.1.7** (Composée d'injections.).

Soit  $E, F$  et  $G$  trois ensembles,  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications injectives. Alors  $g \circ f$  est injective.

**Démonstration.**

Soit  $(x, y) \in E^2$ , supposons que  $g \circ f(x) = g \circ f(y)$ . Alors, par injectivité de  $g$  puis de  $f$ ,  $f(x) = f(y)$  puis  $x = y$ .  $\square$

**Exercice 4.1.8.**

Soit  $E, F$  deux ensembles, soit  $f : E \rightarrow F$ . Montrer que  $f$  est injective si et seulement s'il existe  $g : F \rightarrow E$  vérifiant  $g \circ f = \text{Id}_E$ .

## 4.2 Surjectivité

**Définition 4.2.1.**

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles,  $f : E \rightarrow F$  une application. On dit que  $f$  est *surjective* (ou est/réalise une *surjection*) si  $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$ .

- La donnée de l'espace de départ *et* de l'espace d'arrivée est, là encore, primordiale.

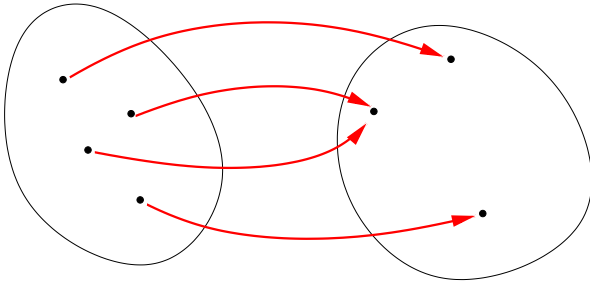


FIGURE 10 – Exemple d'application surjective.

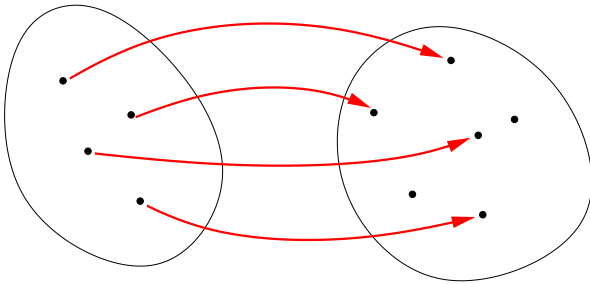
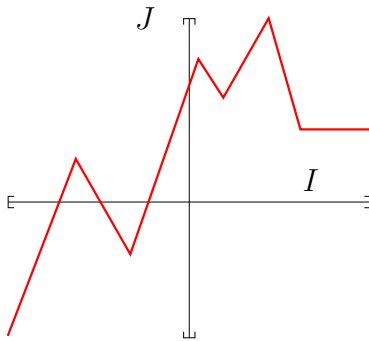


FIGURE 11 – Exemple d'application non surjective.

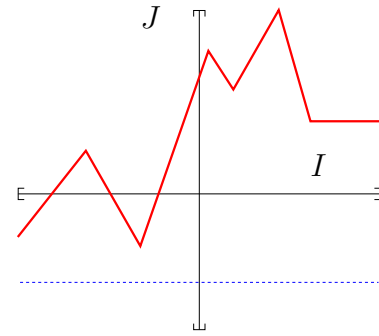

 FIGURE 12 – Graphe d'une application surjective d'un segment  $I$  dans un segment  $J$ .

**Exemple 4.2.2.**

La fonction définie par  $x \mapsto \sin x$  est surjective de  $[0, 2\pi]$  sur  $[-1, 1]$ , mais pas de  $[0, 2\pi]$  sur  $\mathbb{R}$  ni de  $[0, \pi]$  sur  $[-1, 1]$ . Revenir aussi sur les figures 12 et 13.

**Exercice 4.2.3.**

Dans chaque cas, dire si cette application est sur-


 FIGURE 13 – Graphe d'une application non surjective d'un segment  $I$  dans un segment  $J$ .

jective ou non :  $(\mathbb{R}^* \text{ ou } \mathbb{R}_+^*) \rightarrow (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{R}^*)$ ,  $x \mapsto \frac{1}{x}$

**Remarque 4.2.4.**

Une fonction est toujours surjective sur son image (formellement : la *corestriction* d'une application à son image est toujours surjective).



Une fonction non surjective n'est pas nécessairement injective, et vice-versa.

**Remarque 4.2.5.**

Une application  $f : E \rightarrow F$  est surjective si et seulement si, pour tout  $y \in F$ , l'équation  $y = f(x)$  admet au moins une solution dans  $E$ .

**Exercice 4.2.6.**

Étudier la surjectivité de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{i\} & \rightarrow & \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ z & \mapsto & \frac{z+i}{z-i} \end{array}$$

**Théorème 4.2.7** (Composée de surjections.).

Soit  $E$ ,  $F$  et  $G$  trois ensembles,  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications surjectives. Alors  $g \circ f$  est surjective.

**Démonstration.**

Soit  $z \in G$ ,  $g$  est surjective : il existe  $y \in F$  vérifiant  $z = g(y)$ . Comme  $f$  est surjective, il existe  $x \in E$  vérifiant  $y = f(x)$  et on a donc  $z = g \circ f(x)$ .  $\square$

**Exercice 4.2.8.**

Soit  $E, F$  deux ensembles, soit  $f : E \rightarrow F$ . Montrer que  $f$  est surjective si et seulement s'il existe  $g : F \rightarrow E$  vérifiant  $f \circ g = \text{Id}_F$ .

**4.3 Bijectivité****Définition 4.3.1.**

Une application *bijective* (ou qui réalise une *bijection*) est une application injective et surjective.

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles. Une application  $f : E \rightarrow F$  est donc bijective si et seulement si  $\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$ .

**Exemple 4.3.2.**

Application identité, fonctions affines de la forme  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$ , avec  $a \neq 0$ , les similitudes ...

**Théorème 4.3.3 (Fonction réciproque).**

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application.

1.  $f$  est bijective si et seulement s'il existe  $g : F \rightarrow E$  telle que  $g \circ f = \text{Id}_E$  et  $f \circ g = \text{Id}_F$ .
2. Dans ce cas,  $g$  est unique et notée  $f^{-1}$ , appelée *fonction réciproque de  $f$* , et on a, pour tout  $(x, y) \in E \times F$ ,  $f(x) = y$  si et seulement si  $x = f^{-1}(y)$ .
3.  $f^{-1}$  est bijective et  $(f^{-1})^{-1} = f$ .

**Démonstration.** 1. Si  $f$  bijective, on construit  $g$ . Soit  $y \in F$ . On note  $g(y)$  l'unique antécédent de  $y$  par  $f$  : donc  $g$  est une fonction bien définie (tout point a une et une seule image). On vérifie bien que  $f \circ g = \text{Id}_F$  et que  $g \circ f = \text{Id}_E$ .

Si  $g$  existe, on montre que  $f$  est injective et que  $f$  est surjective.

2. Unicité : on utilise l'injectivité de  $f$ .  
Équivalence : facile par double implication.
3. On utilise le point (i) pour la bijectivité et le point (ii) pour l'unicité.

□



Ne JAMAIS parler de  $f^{-1}$  avant d'avoir montré qu'elle existe.



Dans le cas d'une fonction réelle, il ne faut

pas confondre  $f^{-1}$  et  $1/f$ . Ex :  $f = 1$  ( $1/f$  existe, pas  $f^{-1}$ ),  $f : x \mapsto x$  ( $f^{-1}$  existe, pas  $1/f$ ).

• Le graphe de la réciproque d'une fonction est la symétrique par rapport à la première bissectrice du plan du graphe de cette fonction. En effet, si on note  $\Gamma$  le graphe de  $f$  et  $\Gamma'$  celui de sa réciproque, on a par définition, pour tous  $x$  et  $y$ ,  $(x, y) \in \Gamma$  si et seulement si  $(y, x) \in \Gamma'$ .

**Exemple 4.3.4.**

$x \mapsto x^2$  et  $x \mapsto \sqrt{x}$ ,  $x \mapsto \ln x$  et  $x \mapsto e^x$ , tan et arctan (sur leurs espaces de départ et d'arrivée usuels).

**Remarque 4.3.5.**

Une application  $f : E \rightarrow F$  est bijective si et seulement si, pour tout  $y \in F$ , l'équation  $y = f(x)$  admet exactement une solution dans  $E$ .

• En pratique, pour montrer que  $f$  est bijective, on peut au choix :

1. montrer que  $f$  est injective et surjective ;
2. montrer que  $f$  a une réciproque en raisonnant par équivalence :  $y = f(x)$  ssi  $x = f^{-1}(y)$ , où  $f^{-1}$  est alors à donner (on résout donc  $y = f(x)$ ) ;
3. donner  $f^{-1}$  et vérifier que  $f \circ f^{-1} = \text{Id}$  et  $f^{-1} \circ f = \text{Id}$ .

**Exemple 4.3.6.**

Reprendre l'exercice 4.2.6 et déterminer l'inverse de cette application.

**Remarque 4.3.7.**

Une injection réalise toujours une bijection sur son image.

**Remarque 4.3.8.**

Si  $E$  est un ensemble et  $f : E \rightarrow E$  une application bijective, alors  $f$  est un élément inversible dans le monoïde  $(E^E, \circ)$ , d'inverse (au sens algébrique) sa réciproque :  $f^{-1}$ .

**Théorème 4.3.9 (Composée de bijections).**

Soit  $E, F$  et  $G$  trois ensembles,  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux bijections. Alors  $g \circ f$  est une bijection et  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .

**Démonstration.**

Utilise les résultats analogues sur injectivité et surjectivité.  
Ou encore : on donne l'inverse (formule à connaître !)  
 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ , et surtout ne pas inverser les membres !  $\square$

**Exercice 4.3.10.**

Trouver deux applications  $f$  et  $g$  toutes les deux non bijectives, telles que  $g \circ f$  est bijective.

## 4.4 Un peu de vocabulaire anglais ...

- Application : *mapping* ou *map*.
- Injection : *injection* ou *one-to-one mapping*.
- Surjection : *surjection* ou *onto mapping*.
- « non injection » : *many-to-one mapping*.
- Bijection : *bijection* ou *one-to-one correspondence*.

## 5 Image directe, tiré en arrière.

### 5.1 Image directe

**Définition 5.1.1.**

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles,  $f : E \rightarrow F$  une application et  $A$  une partie de  $E$ . On appelle *image directe* de  $A$  par  $f$  l'ensemble des images des éléments de  $A$  (voir figure 14), *i.e.* la partie de  $F$  :

$$\begin{aligned} f(A) &= \{ f(x) \mid x \in A \} \\ &= \{ y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x) \}. \end{aligned}$$

**Remarque 5.1.2.**

La seconde forme de  $f(A)$  est la plus pratique à utiliser et est à retenir en priorité.

**Remarque 5.1.3.**

La notation  $f(E)$  utilisée pour l'image de  $f$  est bien cohérente.

**Remarque 5.1.4.**

On a toujours  $f(A) \subset \text{Im}(f)$ .

- Cela se lit aisément sur un graphe.

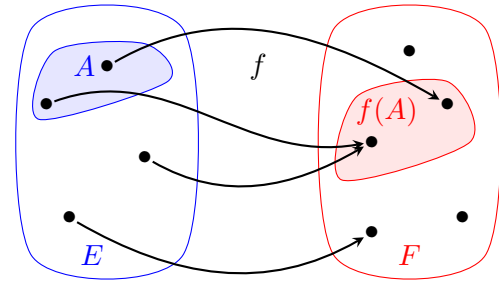


FIGURE 14 – Image directe d'une partie  $A$  par une application  $f$ .

**Exercice 5.1.5.**

Soit  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , déterminer  $c([2, 4])$  et  $x \mapsto x^2$

$c([-1, 3])$ .

**Exercice 5.1.6.**

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles,  $f : E \rightarrow F$  une application,  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ .

- Si  $A \subset B$ , est-ce que  $f(A) \subset f(B)$  ?
- Comparer  $f(A \cup B)$  et  $f(A) \cup f(B)$ , puis  $f(A \cap B)$  et  $f(A) \cap f(B)$ .

**Proposition 5.1.7.**

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles,  $f : E \rightarrow F$  une application. Alors  $f$  est surjective si et seulement si  $f(E) = F$ .

### 5.2 Tiré en arrière

**Définition 5.2.1.**

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles,  $f : E \rightarrow F$  une application et  $B$  une partie de  $F$ . On appelle *tiré en arrière* de  $B$  par  $f$  l'ensemble des antécédents des éléments de  $B$  (voir figure 15), *i.e.* la partie de  $E$  :

$$f^{\leftarrow}(B) = \{ x \in E \mid f(x) \in B \}.$$

**Remarque 5.2.2.**

Le vocabulaire officiel est plutôt « *image réci-*



proque de  $B$  par  $f$  » et la notation officielle est :  $f^{-1}(B)$ .

D'expérience, cette terminologie et cette notation sont une source de confusions désastreuses. Ne l'utilisez qu'une fois cette notion solidement acquise.

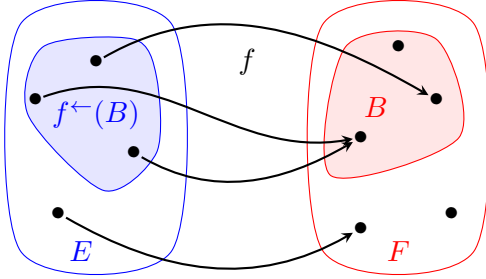


FIGURE 15 – Tiré en arrière d'une partie  $B$  par une application  $f$ .

- On lit aussi le tiré en arrière d'une partie sur le graphe d'une fonction.



Ne pas confondre avec la réciproque d'une fonction, qui n'existe pas si  $f$  n'est pas bijective.

- Notamment, les notations  $f^{\leftarrow}(\{x\})$  et  $f^{-1}(x)$  ne font formellement pas référence au même type d'objet.

### Exercice 5.2.3.

Soit  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , déterminer  $c^{\leftarrow}([1, 4])$  et  $c^{\leftarrow}([-3, 1])$ .

### Théorème 5.2.4.

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles. Si  $f : E \rightarrow F$  est une application bijective et si  $B \subset F$ , alors on a  $f^{\leftarrow}(B) = f^{-1}(B)$ , où la deuxième écriture désigne l'image directe par  $f^{-1}$ .

### Démonstration.

Soit  $x \in E$ , alors

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B) &\Leftrightarrow \exists y \in B, x = f^{-1}(y) \\ &\Leftrightarrow \exists y \in B, f(x) = y \\ &\Leftrightarrow f(x) \in B \\ &\Leftrightarrow x \in f^{\leftarrow}(B) \end{aligned}$$

□

### Exercice 5.2.5.

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles,  $f : E \rightarrow F$  une application,  $A$  et  $B$  deux parties de  $F$ .

- Si  $A \subset B$ , est-ce que  $f^{\leftarrow}(A) \subset f^{\leftarrow}(B)$  ?
- Comparer  $f^{\leftarrow}(A \cup B)$  et  $f^{\leftarrow}(A) \cup f^{\leftarrow}(B)$ , puis  $f^{\leftarrow}(A \cap B)$  et  $f^{\leftarrow}(A) \cap f^{\leftarrow}(B)$ .