DS n°10 : Fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom : Note :

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

Algèbre linéaire.

Soit $A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -7 & 8 & -4 \\ 1 & 6 & 2 \\ 8 & -2 & 11 \end{pmatrix}$. Déterminer les trois noyaux suivants :

$\mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_3) =$ (1)

$\mathrm{Ker}(A - 2\mathrm{I}_3) =$ (2)

$\mathrm{Ker}(A + \mathrm{I}_3) =$ (3)

Alors $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$, où P et P^{-1} valent respectivement

$P =$ (4) $P^{-1} =$ (5)

Déterminer les rangs des matrices suivantes.

$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -2 & -8 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} =$ (6) $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 6 \\ 3 & 7 & 1 & 9 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} =$ (7)

Permutations.

On considère la permutation de $[\![1,9]\!]$: $\sigma = (1\ 2\ 9)(3\ 2\ 9\ 8)(1\ 2)(4\ 5\ 8\ 7)^2(1\ 2)(6\ 4\ 3)$.
Écrire les permutations suivantes comme produit de cycles à supports disjoints.

$\sigma = \boxed{}$ (8) $\sigma^{-1} = \boxed{}$ (9)

Calculer $\varepsilon(\sigma) = \boxed{}$ (10)

Déterminants.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$ définie par $f : M \mapsto AM$.

Déterminer en fonction de A : $\det(f) = \boxed{}$ (11)

Calculer les déterminants suivants.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 6 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{} \quad (12) \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 6 & 5 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \boxed{} \quad (13)$$

Déterminer l'ensemble des paramètres $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquels $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2\lambda \\ -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

$\boxed{}$ (14)

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $\varphi : P \mapsto P(1)X^2 + XP'(X+1)$.

$\operatorname{tr}(\varphi) = \boxed{}$ (15) $\det(\varphi) = \boxed{}$ (16)

Divers.

Donner le développement limité suivant ($\mathrm{DL}_n(a)$ pour DL à l'ordre n au voisinage de a).

$$\mathrm{DL}_3(0)\ :\ \ln(1+\mathrm{e}^{x}) \underset{x\to 0}{=} \boxed{} \quad (17)$$

— FIN —