

DS N°9 du 10 Avril 2020

MECANIQUE

- Les questions doivent être clairement séparées.
- Toute réponse doit être introduite par le numéro de la question et un titre, elle doit être justifiée.
- La rédaction doit être claire et concise.
- Les résultats doivent être encadrés.
- Les différents exercices sont à démarrer sur une nouvelle page.
- Vérifiez l'homogénéité des résultats.

Problème n°1**MOUVEMENT DANS E ET B**

Données :

La charge électrique élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

La vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-2}$

La permittivité et la perméabilité du vide : $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ F.m}^{-1}$ et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

A. Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

On considère un référentiel \mathcal{R} galiléen muni d'un repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Une particule chargée de charge q positive et de masse m pénètre avec un vecteur vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ au point O de coordonnées $(0,0,0)$ dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme

$\vec{B} = B \vec{e}_z$ perpendiculaire à \vec{v}_0 (figure 1). Montrer que cette particule décrit une trajectoire circulaire uniforme de rayon $R = \frac{mv_0}{qB}$.

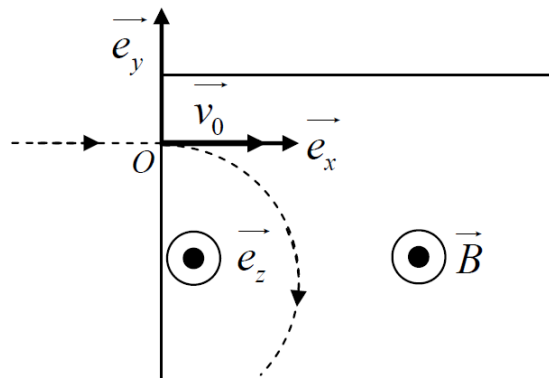


Figure 1 : trajectoire d'une particule de charge q positive dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme

B. Le cyclotron

Le cyclotron est formé de deux demi-cylindres conducteurs creux D_1 et D_2 dénommés *dees* et séparés par un intervalle étroit. Un champ magnétique uniforme \vec{B} ($B = 1,0 \text{ T}$) règne à l'intérieur des *dees*, sa direction est parallèle à l'axe de ces demi-cylindres. Un champ électrique variable \vec{E} peut être établi dans l'intervalle étroit qui sépare les *dees* en appliquant entre les *dees* une tension alternative sinusoïdale $u(t)$ qui atteint sa valeur maximale $U_m = 10^5 \text{ V}$ lorsque le proton traverse cet espace. Les protons, de masse $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ et de charge $q_p = e$, sont injectés au centre du cyclotron avec une énergie cinétique négligeable. Dans chaque *dee*, ils décrivent des trajectoires demi-circulaires de rayon croissant. Le rayon de la trajectoire des protons à la sortie du cyclotron est $R_s = 50 \text{ cm}$.

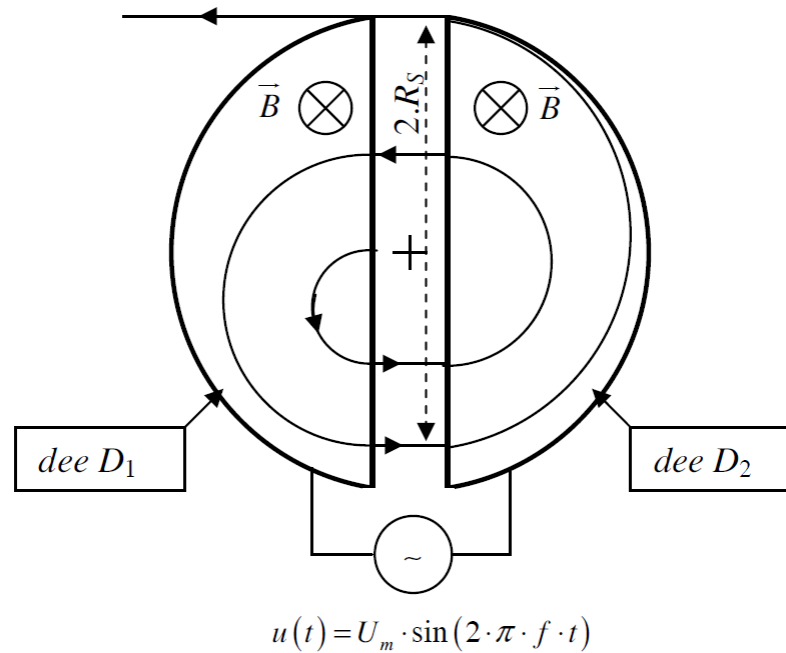


Figure 2: schéma de principe du cyclotron

B.1. Donner l'expression littérale de la durée $T_{1/2}$ mise par un proton pour effectuer un demi-tour en fonction de m_p , e et B . Qu'en déduisez-vous ?

B.2. Justifier le choix de $u(t)$.

B.3. En déduire l'expression, puis la valeur numérique de la fréquence f de la tension alternative sinusoïdale $u(t) = U_m \sin(2\pi f \cdot t)$ pour que les protons subissent une accélération maximale à chaque traversée. On négligera le temps de parcours d'un dee à l'autre.

B.4. Déterminer l'expression, puis la valeur de l'énergie cinétique E_{CS} , en joule puis en électron volt, des protons à la sortie du cyclotron.

B.5. Déterminer l'expression du nombre de tours N effectués par les protons dans le cyclotron jusqu'à leur sortie en fonction de : e , R_s , B , m_p et U_m . Effectuer une application numérique.

B.6. Puissance rayonnée.

Une particule non relativiste de charge q et d'accélération a rayonne une puissance P_r , donnée par la formule de Larmor : $P_r = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} a^2$. On rappelle que c est la célérité de la lumière dans le vide.

B.6.1. Montrer qu'une particule chargée de charge q , de vitesse v , qui décrit une trajectoire circulaire de rayon R , rayonne une puissance P_r , de la forme : $P_r = \alpha v^4$. Exprimer le coefficient α en fonction de q , c , μ_0 et R .

B.6.2. Calculer l'énergie rayonnée par le proton dans le cyclotron lors de sa dernière trajectoire demi-circulaire de rayon $R_s = 50$ cm. Conclure.

B.7. Calculer la longueur d'onde du proton à la sortie des dees.

On donne la constante e Planck $h = 6,64 \cdot 10^{-34}$ J·s

Problème 2

Chute d'un arbre mort

Un bûcheron assimilé à un point matériel B de masse m souhaite abattre un arbre mort assimilé à un cylindre homogène de masse M avec $M > m$, de hauteur H et de section droite carrée de côté $2a$ représenté sur la figure 1.

Il tire pour cela sur un câble fixé en C à l'arbre, de longueur $BC = \ell$ et de masse négligeable, afin de faire tourner l'arbre autour l'axe (O, \vec{u}_y) dirigé par le vecteur $\vec{u}_y = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x$.

L'arbre étant mort, on néglige l'action de ses racines, de telle sorte qu'au moment où l'arbre commence à tourner, les actions de contact qu'il subit se limitent à une force $\vec{R}_1 = T_1 \vec{u}_x + N_1 \vec{u}_z$ appliquée au point O et satisfaisant aux lois de Coulomb avec le coefficient de frottement f .

De même les actions du sol sur le bûcheron sont décrites par une force $\vec{R}_2 = T_2 \vec{u}_x + N_2 \vec{u}_z$ appliquée au point B et satisfaisant aux lois de Coulomb avec le même coefficient de frottement f . Les composantes T_1, N_1, T_2 et N_2 ont des valeurs algébriques. Le câble est supposé tendu. On note \vec{F} la force exercée par le câble sur l'arbre au point C , supposée parallèle au câble et F sa norme.

Les angles sont orientés positivement dans le sens direct autour de (O, \vec{u}_y) et on note α l'angle positif entre \vec{BO} et \vec{BC} .

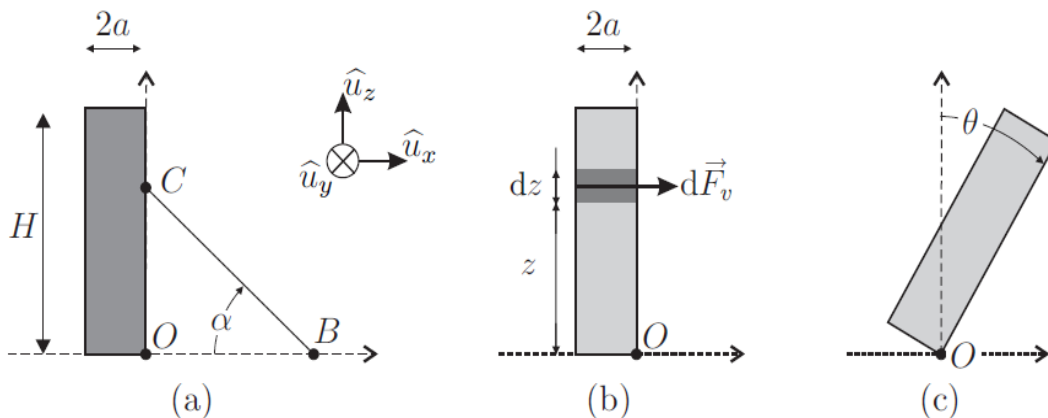


Figure 1 : Chute d'un arbre

1. Le bûcheron est supposé ne pas glisser dans la position initiale décrite par la figure 1(a). Exprimer N_2 et T_2 en fonction de F , α , m et g . En déduire l'expression de la valeur maximale F_{\max} de F en fonction de f , m , g et α .
2. L'arbre est supposé au repos dans la situation initiale décrite par la figure 1(a). Exprimer N_1 et T_1 en fonction de F , α , M et g . En déduire que pour $0 \leq F \leq F_{\max}$ le glissement n'est pas possible en O .
3. Exprimer le moment Γ_g du poids de l'arbre par rapport à l'axe (O, \vec{u}_y) dans la situation initiale décrite par la figure 1 (a).
4. Soit Γ_B le moment par rapport à l'axe (O, \vec{u}_y) exercé par le bûcheron sur l'arbre via le câble. Quelle est la valeur minimale de Γ_B permettant à l'arbre de pivoter autour de l'axe (O, \vec{u}_y) ?
5. En supposant F constant, justifier qu'il existe une valeur optimale α_m de l'angle α .

On suppose que, quelque soit l'angle α , l'action du bûcheron est elle que l'on est à la limite du glissement : F prend la valeur F_{\max} .

6. Montrer que le moment Γ_B par rapport à l'axe (O, \vec{u}_y) exercé par le bûcheron via le câble s'écrit

$$\Gamma_B = \frac{mg\ell}{\phi(\alpha)} \text{ avec } \phi(\alpha) = \frac{1}{f \sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}. \text{ En déduire l'expression de } \alpha_m \text{ en fonction de } f. \text{ Vérifier que}$$

$$\alpha_m = \pi/4 \text{ pour } f=1.$$

7. On donne $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$, $M = 10^3 \text{ kg}$, $H = 20 \text{ m}$, $a = 0,5 \text{ m}$, $m = 10^2 \text{ kg}$ et $f=1$. Calculer la force F_{\max} et la longueur de corde ℓ nécessaire pour initier la rotation de l'arbre.

Problème n°3

Étude d'un mouvement du satellite

La télédétection par satellite est utilisée en météorologie, climatologie et en cartographie. Nous étudions dans ce sujet un satellite de télédétection en orbite autour de la Terre.

On étudie dans cette partie le mouvement du satellite, assimilé à un point matériel M, autour de la Terre de rayon $R_T = 6,4 \cdot 10^3$ km et de centre O.

L'étude est réalisée dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ supposé galiléen au cours du temps noté t . L'ensemble des grandeurs vectorielles seront exprimées dans la base cylindro-polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$

On suppose que la trajectoire du satellite de masse $m = 4,0 \cdot 10^3$ kg est plane et se fait dans le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) représenté sur la figure 2.



Figure 1 - Principe d'un satellite de télédétection (source : opticsvalley)

1. Préliminaires

1) La position du satellite est repérée par le point M de coordonnées $(r(t), \theta(t), z = 0)$. Déterminer l'expression du vecteur position \vec{OM} et du vecteur vitesse \vec{v}_M dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ en fonction de r , θ et de leurs dérivées éventuelles.

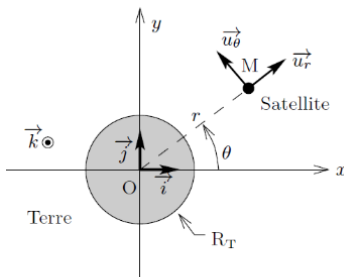


Figure 2

2) On note $g_0 = 10 \text{ m.s}^{-2}$ la norme de l'accélération de pesanteur à la surface de la Terre. L'énergie potentielle $E_p(r)$ associée à l'interaction gravitationnelle \vec{F} s'exprime sous la forme $E_p(r) = -g_0 m \frac{R_T^2}{r}$. En déduire l'expression de l'interaction \vec{F} exercée par la Terre sur le satellite en fonction de g_0 , m , R_T et r . L'interaction gravitationnelle est-elle attractive ou répulsive ? Dans la suite, on supposera que le satellite est soumis uniquement à \vec{F} .

3) Soit $\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m \vec{v}_M$. Comment s'appelle cette grandeur mécanique associée au satellite ? Déterminer son expression dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$, puis sa norme L_0 en fonction de r , $\dot{\theta}$ et m . Montrer que le vecteur est constant au cours du mouvement.

2. Mise en orbite circulaire du satellite

La mise en orbite terrestre d'un satellite se fait en deux étapes :

- * phase balistique : le satellite s'éloigne de la Terre sur une ellipse de foyer le centre de la Terre jusqu'à l'apogée ;
- * phase de satellisation : le satellite accélère pour obtenir une trajectoire circulaire autour de la Terre.

On considère que le satellite est placé en orbite circulaire de rayon r constant autour de la Terre.

4) Exprimer pour cette trajectoire circulaire le vecteur vitesse \vec{v}_M et le vecteur accélération \vec{a}_M du satellite uniquement en fonction de la quantité $v = r\dot{\theta}$, de sa dérivée temporelle \dot{v} et de r .

5) À l'aide du principe fondamental de la dynamique, montrer que le mouvement est uniforme et exprimer v^2 en fonction de g_0 , R_T et r .

6) En déduire l'expression des énergies cinétique E_c et mécanique E_m du satellite en fonction de m , g_0 , R_T et r . Justifier le signe de E_m .

7) Application numérique : calculer l'énergie mécanique du satellite pour une trajectoire circulaire de rayon $r_b = 8,0 \cdot 10^3$ km, puis pour un rayon $r_h = 40 \cdot 10^3$ km.

3. Étude énergétique du satellite

On suppose ici que la trajectoire du satellite n'est pas nécessairement circulaire.

8) Montrer que l'énergie mécanique du satellite est constante au cours du mouvement et qu'elle se met sous la

$$\text{forme : } E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L_O^2}{2mr^2} - g_0 m \frac{R_T^2}{r}$$

9) On appelle énergie potentielle effective

$$E_{p\text{Eff}} = E_m - \frac{1}{2} m \dot{r}^2$$

Au cours du mouvement, les valeurs du rayon r sont données par l'inégalité $E_{p\text{Eff}}(r) \leq E_m$. Expliquer ce résultat.

10) Le graphe de $E_{p\text{Eff}}(r)$ pour une valeur donnée de L_O est représenté figure 3. On montre que la trajectoire du satellite est nécessairement: circulaire, elliptique ou un état de diffusion.

- À quelle énergie E_{m1} ou E_{m2} peut correspondre une trajectoire elliptique ? une trajectoire de diffusion ?
- Pour quelle valeur particulière de E_m la trajectoire est-elle circulaire ?

4. Mise en orbite haute du satellite

Pour atteindre des trajectoires de très hautes altitudes, le satellite est dans un premier temps placé sur une trajectoire circulaire basse ($r_b = 8,0 \cdot 10^3$ km) puis, dans un deuxième temps, sur une trajectoire circulaire haute ($r_h = 40 \cdot 10^3$ km) comme illustré sur la figure 4.

Pour passer de la trajectoire basse à la trajectoire haute, on utilise une trajectoire de transfert elliptique dont l'un des foyers est le centre de la Terre O : son périégée P est situé sur l'orbite basse et son apogée A sur l'orbite haute.

Le changement d'orbite s'effectue en réalisant des variations brutales de vitesse du satellite à l'aide des moteurs qui correspondent à des variations d'énergie mécanique que l'on cherche à déterminer.

On considère désormais le satellite parcourant la trajectoire elliptique de transfert.

11) Que peut-on dire des valeurs de \dot{r} lorsque le satellite est en A ($r = r_h$) ou en P ($r = r_b$) ? Comment s'exprime le demi-grand axe a de l'ellipse de transfert en fonction de r_b et r_h ?

12) Rappeler l'expression de l'énergie mécanique sur une orbite elliptique $E_{m,t}$ en fonction de g_0 , m , R_T et le demi-grand axe

13) Relever sur la figure 5 la valeur de l'énergie mécanique $E_{m,t}$ du satellite sur la trajectoire de transfert elliptique. Justifier.

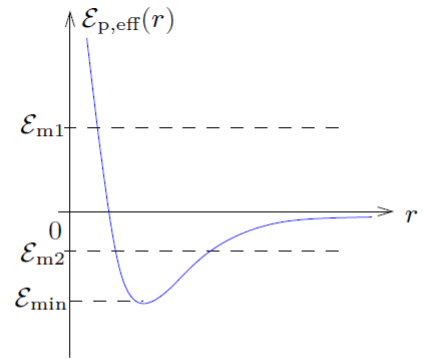


Figure 3 - Allure de l'énergie potentielle effective en fonction de r

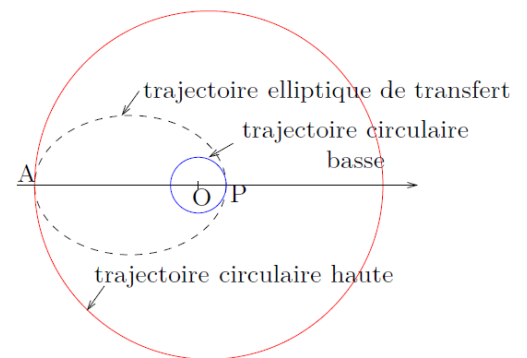


Figure 4

Pour changer de trajectoire le satellite, il faut modifier la valeur de son énergie mécanique. Durant cette phase le principe de conservation de l'énergie n'est plus vérifié. Ce sont les moteurs du satellite qui vont permettre d'accélérer ou de ralentir le satellite.

14) Relever sur la figure 5 la valeur de l'énergie mécanique $E_{m,b}$ du satellite sur l'orbite circulaire basse de rayon $r_b = 8,0 \cdot 10^3$ km. De même relever la valeur de l'énergie mécanique $E_{m,h}$ du satellite sur l'orbite circulaire haute de rayon $r_h = 40 \cdot 10^3$ km.

15) En déduire la variation d'énergie mécanique ΔE_{mP} à communiquer au satellite pour passer en P de l'orbite circulaire basse à l'orbite elliptique de transfert. Sachant que le pouvoir calorifique du carburant est d'environ $50 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, déterminer la masse m_c de carburant nécessaire.

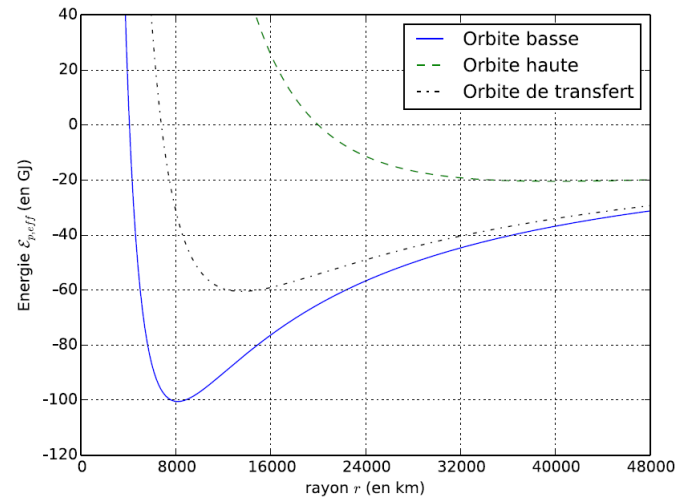


Figure 5 - $E_{p,eff}(r)$ pour les 3 orbites

La rhubarbe (Le retour !)

La rhubarbe (ci-contre) est une plante comestible au goût acidulé, utilisée notamment pour réaliser des tartes et des confitures. On en consomme les tiges, appelées pétioles : de couleur rouge, celles-ci sont riches en fibres. En revanche, ses feuilles sont toxiques et peuvent provoquer des nausées, des crampes, des diarrhées, et des calculs rénaux.

L'objet de ce problème est de comprendre certaines propriétés de la rhubarbe à partir des espèces chimiques présentes dans cette plante.



Partie 2 : toxicité des feuilles

Les feuilles de la rhubarbe présentent des risques pour la santé en raison de leur fort taux d'acide oxalique. L'acide oxalique $\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4$ est un diacide de pK_a 1,27 et 4,27. Sa forme la plus basique $\text{C}_2\text{O}_4^{2-}$ est appelée oxalate. Une importante ingestion d'acide oxalique conduit à la formation de calculs rénaux dans les voies urinaires, sous la forme de cristaux d'oxalate de calcium $\text{CaC}_2\text{O}_4(\text{s})$, qui provoquent l'obstruction de ces voies si ces derniers sont de trop grande taille.

1. Tracer le diagramme de prédominance de l'acide oxalique.
2. Le pH de l'urine est compris entre 4,5 et 7,5. Sous quelle forme rencontre-t-on majoritairement l'acide oxalique dans l'urine ? La concentration typique de calcium Ca^{2+} dans l'urine est de $10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$. Sachant que $\text{pK}_s(\text{CaC}_2\text{O}_4) = 8,2$, tracer le diagramme d'existence de CaC_2O_4 dans l'urine en fonction de pC_2O_4 .

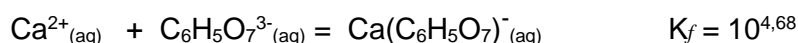
Pour modéliser de façon très simplifiée le processus de formation des calculs rénaux, on assimile l'urine à une solution aqueuse de pH constant égal à 6, contenant des ions Ca^{2+} à la concentration $10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$ (on néglige la présence des autres ions). L'apport d'acide oxalique suite à consommation des feuilles de rhubarbe est modélisé par une introduction d'acide oxalique à la concentration de $10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$ dans l'urine.

3. En raisonnant sur un volume de 1 L d'urine, calculer la concentration des ions à l'état final, ainsi que la quantité d'oxalate de calcium formée.

Pour diminuer le risque de formation d'oxalate de calcium dans les urines, on recommande d'ingérer du citrate de sodium $\text{Na}_3\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7$. Il s'agit d'un solide très soluble dans l'eau qui forme des ions sodium Na^+ et des ions citrate $\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7^{3-}$. Les ions citrate sont la forme la plus basique de l'acide citrique $\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_7$, triacide de pK_a successifs 3,1 ; 4,8 ; 6,4.

4. Écrire la réaction de dissolution du citrate de sodium dans l'eau.
5. On considère une solution de citrate de sodium à $1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$. Calculer le pH d'une telle solution. Quel sera qualitativement l'effet de l'ingestion de citrate de sodium sur le pH de l'urine lorsque les ions citrate auront rejoint l'urine ?

Les ions citrate peuvent réagir avec les ions calcium selon la réaction :



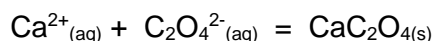
Pour modéliser l'action du citrate dans l'urine, on considère 100 mL d'une solution aqueuse contenant des ions Ca^{2+} à la concentration de $1,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$, auquel on ajoute 100 mL d'une solution de citrate à $1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$. Le milieu est tamponné à $\text{pH} = 7$.

- Calculer les concentrations de Ca^{2+} et de $\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7^{3-}$ au moment du mélange.
- Déterminer les concentrations de toutes les espèces à l'état final.
- Y a-t-il précipitation de l'oxalate de calcium si l'acide oxalique est introduit à la concentration de $10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$ dans cette solution aqueuse ? Conclure sur l'efficacité du traitement.

Partie 3 : titrage de l'acide oxalique dans la rhubarbe

On cherche à connaître la quantité d'acide oxalique $\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4$ présente dans la rhubarbe. Pour cela, on récupère de la rhubarbe (feuilles et tiges) qu'on dessèche afin d'enlever l'eau qu'elle contient. On récupère une masse $m_0 = 280 \text{ g}$ de cette matière sèche qu'on soumet à une série de traitements (broyage, acidification, filtrage...) afin d'obtenir un volume $V_{\text{filtrat}} = 1,00 \text{ L}$ d'une solution S_0 d'acide chlorhydrique contenant l'acide oxalique initialement présent dans la rhubarbe (on négligera toutes les autres espèces en solution encore présentes à l'issue de ce traitement).

On ajoute quelques gouttes de soude concentrée (volume négligeable) dans la solution S_0 de manière à ajuster le pH aux alentours de 7. On obtient ainsi la solution S_1 , dans laquelle l'acide oxalique a été intégralement converti en ions oxalate $\text{C}_2\text{O}_4^{2-}$. On effectue le titrage de $V_1 = 10,0 \text{ mL}$ de la solution S_1 par une solution de chlorure de calcium $\text{Ca}^{2+}_{(\text{aq})} + 2 \text{Cl}^{-}_{(\text{aq})}$ de concentration $C_B = 5,00 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$. La réaction de titrage est :



- Déterminer la constante d'équilibre de ce titrage.

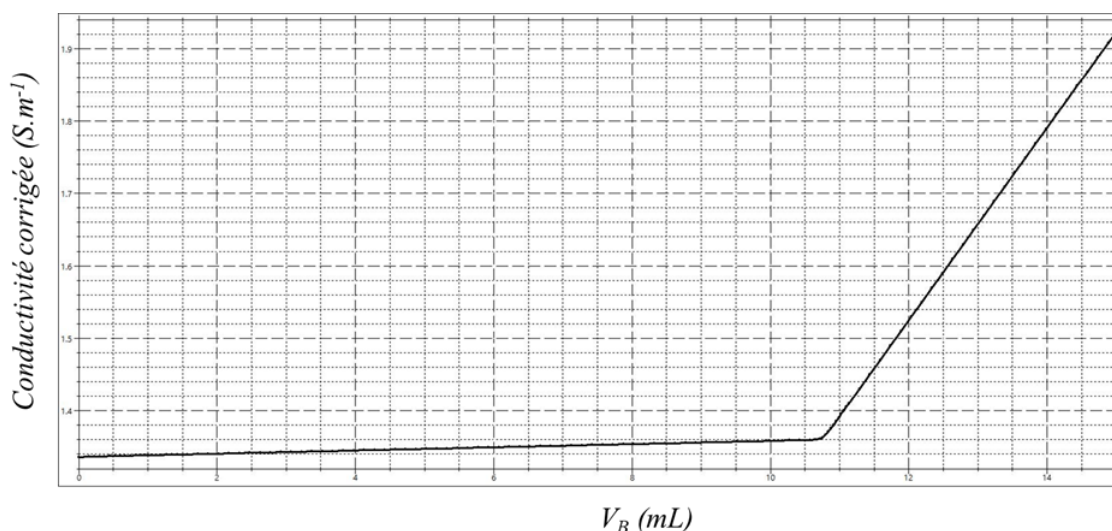


Figure 1 : courbe de titrage conductimétrique de $V_1 = 10,0 \text{ mL}$ de solution S_1 par le chlorure de calcium à $5,00 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$

On effectue un suivi conductimétrique de ce titrage. Pour cela, on relève la conductivité σ de la solution en fonction du volume V_B de solution de chlorure de calcium versé, puis on trace la conductivité corrigée de l'effet de la dilution $\sigma' = \sigma \frac{V_1 + V_B}{V_1}$ en fonction de V_B . La courbe de titrage est représentée figure 1.

- Déterminer le volume équivalent du titrage. En déduire la concentration d'oxalate dans la solution.
- Interpréter qualitativement la forme de la courbe de titrage.

Ion	Ca^{2+}	Cl^{-}	$\text{C}_2\text{O}_4^{2-}$
$\lambda^0_i (\text{mS.m}^2.\text{mol}^{-1})$	11,9	7,6	14,8

- Calculer la masse, en mg, d'acide oxalique présent dans la rhubarbe pour 100 g de matière sèche sachant que $M(\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4) = 90,0 \text{ g.mol}^{-1}$. Cette masse est normalement comprise entre 500 et 2400 mg/100g. Le résultat obtenu est-il cohérent ?