Feuille d'exercice n° 19 : **Applications linéaires et familles de vecteurs - correction**

Exercice 1 1, 2, 3, 6 et 7 : non. Par exemple, $f(1+1) \neq f(1)+f(1)$, $g(0) \neq 0$ et $\theta((1,0)+(0,1)) \neq \theta(1,0)+\theta(0,1)$.
4, 5 et 8 : oui.

Exercice 2 Calcul du noyau : il s'agit de résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & & & = & 0 \\ -x & - & 4y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 5y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$. On trouve $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f &= \operatorname{Vect}\left(f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}\right) \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

Exercice 3 Nous verrons le théorème du rang dans le chapitre sur la dimension des ev, mais nous pouvons d'ores et déjà l'énoncer dans le cas d'une fonction linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$: $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = 2$. Ainsi, il y a une contrainte forte sur la dimenion du noyau et de l'image : pour avoir $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} f$, nécessairement $\dim \operatorname{Ker} f = 0$ et $\dim \operatorname{Im} f = 2$ (et donc f est un isomorphisme), ou $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f = 1$.

1) comme nous l'avons vu, les endomorphismes vérifiant cela sont les isomorphismes. Par exemple : Id.

2) à l'inverse, les endomorphismes vérifiant cela sont ceux tels que $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ et $\dim \operatorname{Im} f = 0$, donc il n'y a que l'application nulle : 0.

3) cherchons par exemple un endomorphisme tel que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Alors f est nécessairement de la forme $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax+by\\0\end{pmatrix}$, où a et b sont deux réels. Mais si $f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0$, alors $a = 0$. Ainsi un exemple d'un tel endomorphisme est $f : \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}y\\0\end{pmatrix}$.

4) Les exemples des deux premières questions conviennent. Pour trouver un exemple différent, cherchons par exemple f tel que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Alors f est de la forme $f : \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\ax+by\end{pmatrix}$, et on doit avoir $a = 0$, donc un exemple est $f : \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$.

Exercice 5

1) Élémentaire.

2) Dans cette question, nous allons rencontrer des objets de la forme $\operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})$ où $\lambda \in \mathbb{K}$. Il est indispensable de retenir cela :

$$x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}) \Leftrightarrow f(x) = \lambda x.$$

C'est un fait immédiat à vérifier, mais il faut toujours l'avoir en tête lorsque l'on rencontre des noyaux de cette forme, comme nous allons le voir ici.

a) Développer.

b) Direct en utilisant la première question.

c) Par analyse-synthèse :
• Analyse : soit $x \in E$ et $y \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, $z \in \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id})$ tels que $x = y + z$ (1).
Alors, important : $f(y) = y$ et $f(z) = -2z$. Donc $f(x) = y - 2z$ (2).
Les points (1) et (2) constituent donc un système 2x2 en y et z. Sa résolution donne $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}f(x)$ et $z = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}f(x)$, d'où l'unicité de y et z s'ils existent.
• Synthèse : soit $x \in E$. Posons $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}f(x)$ et $z = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}f(x)$. Il faut alors vérifier que $x = y + z$, $y \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ (i.e. $f(y) = y$) et $z \in \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id})$ (i.e. $f(z) - 2z$). Le premier point ne pose pas de problème.
Pour le second :

$$\begin{aligned} f(y) &= f\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}f(x)\right) \\ &= \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{3}f^2(x) \\ &= \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{3}(-f + 2\mathrm{Id})(x) \\ &= \frac{1}{3}f(x) + \frac{2}{3}x \\ &= y. \end{aligned}$$

Le troisième se démontre de la même manière.
Par analyse-synthèse, $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id})$.
Une autre démonstration est possible : en remarquant que $\mathrm{Id} = \frac{1}{3}(f+2\mathrm{Id}) - \frac{1}{3}(f - \mathrm{Id})$, alors pour tout $x \in E$, $x = \frac{1}{3}(f+2\mathrm{Id})(x) - \frac{1}{3}(f-\mathrm{Id})(x)$. Si nous posons $y = \frac{1}{3}(f+2\mathrm{Id})(x) = (f+2\mathrm{Id})(\frac{1}{3}x)$ et $z = (f - \mathrm{Id})(-\frac{1}{3}x)$, alors $x = y + z$, $y \in \mathrm{Im}(f + 2\mathrm{Id})$ et $z \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$, donc avec la question précédente, $y \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $z \in \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id})$. Ainsi $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) + \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E)$
De plus, si $x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E)$, alors $x = \frac{1}{3}(f+2\mathrm{Id})(x) - \frac{1}{3}(f - \mathrm{Id})(x) = 0 + 0 = 0$, donc ces deux noyaux sont en somme directe.

Exercice 6 Pour tout x, notons $\lambda(x)$ un scalaire tel que $f(x) = \lambda(x)x$. Si $x = 0$, $\lambda(0)$ peut prendre n'importe quelle valeur. Sinon $\lambda(x)$ est unique.
Montrons que λ est constante.

Fixons x un vecteur non nul. Soit y un second vecteur.
Si (x, y) est libre, alors $f(x + y) = \lambda(x + y).(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda(x)x + \lambda(y)y$, donc par liberté $\lambda(x + y) = \lambda(x) = \lambda(y)$.
Sinon, comme $x \neq 0$, il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $y = \mu x$, et alors $f(y) = f(\mu x) = \lambda(\mu x)\mu x = \mu f(x) = \mu\lambda(x)x = \lambda(x)y$, donc $\lambda(y) = \lambda(x)$.

Exercice 7 On cherche à déterminer si $(-1, -1, 1, -1)$ appartient à F ou non. Pour cela on cherche à résoudre l'équation $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ d'inconnues a, b, c, ce qui conduit à la résolution d'un système à trois inconnues et quatre équations. Après un pivot de Gauss on trouve comme solutions l'ensemble d'équations $\left\{ \begin{array}{rcl} a - b - 5c &=& -1 \\ -2b - 3c &=& -1 \end{array} \right.$, donc et donc par exemple une solution

est $a=3, b=-1, c=1$, donc $(-1,-1,1,-1)$ appartient à F.
De même, on cherche à déterminer si $(4,1,2,4)$ appartient à F ou non. Pour cela on cherche à résoudre l'équation $\begin{pmatrix}4\\1\\2\\4\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\\-1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}-5\\-3\\1\\-5\end{pmatrix}$ d'inconnues a, b, c, ce qui conduit à la résolution d'un système à trois inconnues et quatre équations. Après un pivot de Gauss on trouve comme solution l'ensemble d'équations $\left\{\begin{array}{rcl} a-b-5c & = & 4 \\ -2b-3c & = & 1 \end{array}\right.$, donc et donc par exemple une solution est $a=0, b=1, c=-1$, donc $(4,1,2,4)$ appartient à F.
Puisque les deux vecteurs d'une famille génératrice de G appartiennent à F, alors tout vecteur de G,qui est combinaison linéaire de ces deux vecteurs, appartient forcément à F. Ainsi on obtient $G \subset F$.
En raisonnant de la même manière en inversant les rôles de F et G, on voit que tout vecteur de la famille génératrice de F est dans G, et donc $F \subset G$.
Finalement, $\boxed{\text{F=G}}$.

Exercice 10 Montrons que $\operatorname{Vect}(A \cap B) \subsetneq \operatorname{Vect}(A) \cap \operatorname{Vect}(B)$.
Puisque $A \subset \operatorname{Vect} A$ et $B \subset \operatorname{Vect} B$, alors $(A \cap B) \subset (\operatorname{Vect}(A) \cap \operatorname{Vect}(B))$. De plus $\operatorname{Vect}(A) \cap \operatorname{Vect}(B)$ est unsev. Comme $\operatorname{Vect}(A \cap B)$ est le plus petit sev contenant $A \cap B$, alors $\operatorname{Vect}(A \cap B) \subset \operatorname{Vect}(A) \cap \operatorname{Vect}(B)$.
Montrons que l'inclusion réciproque est fausse. Pour cela donnons un contre-exemple et posons $E = \mathbb{R}$, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$. Alors $\operatorname{Vect}[A \cap B) = \operatorname{Vect} \varnothing = \{0\}$. Mais $\operatorname{Vect}(A) \cap \operatorname{Vect}(B) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

Exercice 11
Soit $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille à support fini telle que $\sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k f_k = 0$. Puisque cette famille est à support fini, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k > N$, $\lambda_k = 0$. Ainsi $0 = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k f_k = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k f_k$. Or cette dernière fonction est polynômiale, donc le polynôme $\sum_{k=0}^{N} \lambda_k X^k$ est nul : tous ces coefficients sont nuls, ce qui montre le résultat attendu.

Exercice 12 On vérifie que f est linéaire et que $f \circ f = \operatorname{Id}$: $f(f(x,y,z)) = f(-5x+2y, -12x+5y, -4x+2y-z) = (-5(-5x+2y)+2(-12x+5y), -12(-5x+2y)+5(-12x+5y), -4(-5x+2y)+2(-12x+5y)-(-4x+2y-z)) = (x,y,z)$. $\boxed{f \text{ est donc une symétrie}}$. Or on sait qu'une symétrie f est une symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}(f-\operatorname{Id})$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(f+\operatorname{Id})$. Il s'agit donc de déterminer ces deux noyaux, et on trouve $\boxed{\operatorname{Ker}(f-\operatorname{Id}) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} \text{ et } \operatorname{Ker}(f+\operatorname{Id}) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right).}$

Exercice 13 Si $i)$, alors $p \circ p = (p \circ q) \circ p = p \circ (q \circ p) = p \circ q = p$ et symétriquement pour q : ce sont des projecteurs. $i)$ donne directement l'égalité des noyaux.
Réciproquement, si $ii)$, soit $x \in E$, on écrit $x = k + i$ avec $p(k) = 0$ et $p(i) = i$, alors $q(k) = 0$, donc $q(x) = q(i) = q(p(i)) = q(p(x))$, donc $q \circ p = q$, de même pour l'autre.

Exercice 15 Sens direct :
$(p-q)^2 = p^2 - pq - qp + q^2 = p - pq + qp + q = p - q$ donc $p \circ q + q \circ p = 2q$.
Si $x \in \operatorname{Ker} p$, alors $p(q(x)) = 2q(x)$ donc $q(x) \in \operatorname{Im} p$ donc $p(q(x)) = q(x)$ donc $q(x) = 0$, d'où q et $q \circ p$ coïncident sur $\operatorname{Ker} p$.
Si $x \in \operatorname{Im} p$, on a $p(x) = x$ donc $q(p(x)) = q(x)$, d'où q et $q \circ p$ coïncident sur $\operatorname{Im} p$.

Réciproquement, $(p-q)^2 = p^2 - pq - qp - q^2 = p - q - q + q = p - q$.