XIII Continuité

25 février 2018

Dans tout ce chapitre, I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$, $f\ :\ I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$, sauf mention expresse du contraire.

1 Définitions et premières propriétés.

1.1 Définitions.

Définition 1.1.1.
On dit que f est *continue en a* si f admet une limite ***finie*** en a. Puisque $a \in I$, on sait que dans ce cas $f \underset{a}{\to} f(a)$, et donc f est continue en a s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon$$

On dit que f est *continue sur I* si f est continue en tout point de I.

On note $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

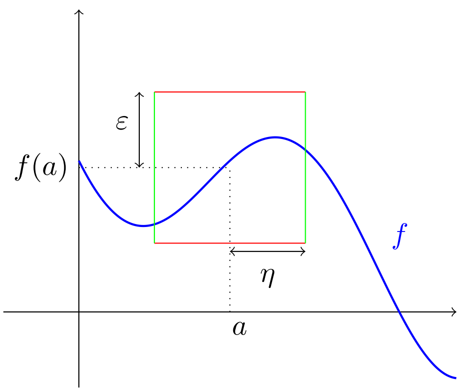

FIGURE 1 – Illustration de la définition d'une fonction continue en a, ε et η étant fixés.

Remarque 1.1.2. — On verra que cette définition est cohérente avec l'idée qu'une fonction est continue si et seulement si on peut en tracer le graphe sans lever le crayon.
— Attention à l'ordre des quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

Exemple 1.1.3.
Quasiment toutes les fonctions usuelles sont continues.

— La fonction cos : pour tous réels x et x_0, on a en effet

$$\begin{aligned} |\cos x - \cos x_0| &= \left|-2 \sin \frac{x+x_0}{2} \sin \frac{x-x_0}{2}\right| \\ &\leqslant 2 \left|\sin \frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant |x-x_0|. \end{aligned}$$

— La fonction $\sqrt{\cdot}$: En effet, d'une part elle est continue en 0, car on a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in \left[0, \varepsilon^2\right] \quad \sqrt{x} \leqslant \varepsilon.$$

D'autre part, soit $x_0 > 0$. Alors soit $x \in \mathbb{R}^+$, on a $\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| = \dfrac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} \leqslant \dfrac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}$. Donc si $|x-x_0| \leqslant \dfrac{x_0}{2}$, alors $x \geqslant \dfrac{x_0}{2}$, d'où $\sqrt{x}+\sqrt{x_0} \geqslant \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+1\right)\sqrt{x_0}$. En notant C cette valeur (qui ne dépend pas de x), on a donc

$$\forall x \in \left[\frac{x_0}{2}, \frac{3x_0}{2}\right] \quad \left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right| \leqslant \frac{1}{C}\left|x-x_0\right|.$$

On a donc

$$\sqrt{x} \xrightarrow[x \to x_0]{} \sqrt{x_0}.$$

Définition 1.1.4 (Continuité à gauche et à droite)**.**
On dit que f est *continue à gauche* (resp à droite) si $f_{|I \cap]-\infty, a]}$ (resp. $f_{|I \cap [a, +\infty[}$) est continue en a, c'est-à-dire admet une limite en a, qui est alors nécessairement $f(a)$.

Remarque 1.1.5.
Cette fois, on ferme les intervalles en a dans les restrictions de f, à l'inverse de ce que l'on faisait pour les limites à gauche et à droite.

Théorème 1.1.6.
f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche et à droite en a.

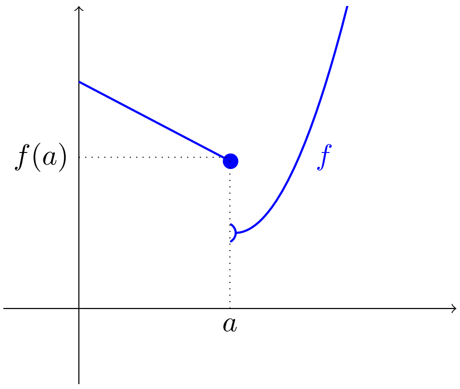

FIGURE 2 – Illustration d'une fonction continue à gauche en a, mais pas à droite.

Démonstration.
D'une part f continue en a si et seulement si la limite de f en a existe, ce qui est vrai si et seulement si les limites de f en à, gauche et à droite, existent et valent $f(a)$.

D'autre part, f est continue à gauche (resp. à droite) si et seulement si la limite de f en a, à gauche (resp. à droite) existe et vaut $f(a)$. □

Exemple 1.1.7. — On reprend l'exemple du chapitre précédent :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} e^x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 1-x & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Alors f est continue en 0.

— Posons

$$g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\ln(1+|x|)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Alors g a pour limite à droite 1 en 0, mais $g(0) \neq 1$, donc g n'est pas continue en 0.

Remarque 1.1.8.
On n'utilisera cette caractérisation de la continuité par les continuités à gauche et à droite que lorsque la fonction que l'on étudie est définie différemment à gauche et à droite du point considéré. Sinon, on reviendra à la définition générale.

1.2 Prolongement par continuité en un point.

Définition 1.2.1.
Soit $a \in I$ et $f : I \setminus \{ a \} \to \mathbb{R}$. On dit que f est *prolongeable par continuité en a* s'il existe une application $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ qui coïncide avec f sur $I \setminus \{ a \}$ (c'est-à-dire vérifiant $\tilde{f}_{|I\setminus\{ a \}} = f$), et qui est continue en a.

Remarque 1.2.2.
Quand on prolonge en v une application f définie sur un intervalle $[u, v[$ ou $]u, v[$ (resp. $]v, u]$ et $]v, u[$) et qu'on prolonge f en v par continuité, on parle de prolongement par continuité à droite (resp à gauche).

Exercice 1.2.3.
Quels sont les prolongements par continuité en 0 de

1. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$?
2. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin(x)}{x} \end{array}$?
3. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin\dfrac{1}{x} \end{array}$?

Théorème 1.2.4.
Avec les mêmes hypothèses que dans la définition 1.2.1 : f est prolongeable par continuité en a si et seulement si la limite de f en a existe ***et est finie***. Dans ce cas le prolongement est unique, noté $\tilde{f}$ et défini par

$$\tilde{f}: \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a, \\ \ell & \text{si } x = a, \end{cases} \end{array}$$

où ℓ est la limite de f en a.

Très souvent, par abus de notation, on notera f la fonction $\tilde{f}$.

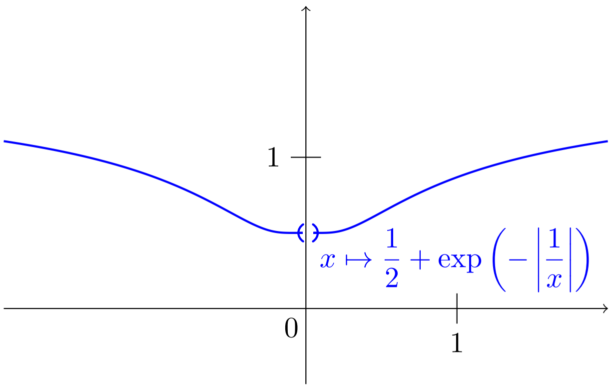

FIGURE 3 – Illustration d'une fonction prolongeable par continuité en 0.

Démonstration.
Démontrons implication et réciproque :

— Soit $\tilde{f}$ un prolongement par continuité de f en a. $\tilde{f}$ est définie et continue en a, on a donc

$$\tilde{f}(x) \xrightarrow[x \neq a]{x \to a} \tilde{f}(a)$$

Or, pour tout $x \in I \setminus \{ a \}$, on a $\tilde{f}(x) = f(x)$, donc

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \tilde{f}(a)$$

Donc $\tilde{f}(a)$ est nécessairement la limite de f en a. Cette limite est donc finie. Donc $\tilde{f}$ est nécessairement l'application

$$\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \end{array}$$

Donc si f admet un prolongement par continuité alors la limite de f en a existe et est finie ; le prolongement par continuité est alors bien celui donné dans l'énoncé.

— Réciproquement, supposons que la limite de f en a existe et est finie, notons la ℓ. Alors, définissons $\tilde{f}$ comme donné dans l'énoncé. $\tilde{f}$ coïncide alors avec f sur $I \setminus \{ a \}$ et on a donc

$$\tilde{f}(x) \xrightarrow[x \neq a]{x \to a} \ell$$

Donc

$$\tilde{f}(x) \xrightarrow[x \neq a]{x \to a} \tilde{f}(a)$$

$\tilde{f}$ est donc continue en a.

□

Ce théorème est parfois utilisé sous la forme :

Corollaire 1.2.5.
Soient $a \in \mathring{I}$ et $g : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ une application. Si les limites de g en a, à gauche et à droite, existent, sont égales et ***sont finies***, alors, en notant ℓ cette limite, il existe un unique prolongement par continuité $\widetilde{g}$ de g obtenu en posant $\widetilde{g}(a) = \ell$.

Démonstration.
C'est immédiat, puisqu'on sait que la limite de g en a existe si et seulement si les limites de g en a, à gauche et à droite, existent et sont égales. □

Exemple 1.2.6.
Peut-on prolonger par continuité en 0 l'application

$$\begin{array}{cccc} f: &]-1, +\infty[\setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

Même question en -1.

1.3 Caractérisation séquentielle de la continuité.

Théorème 1.3.1.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue en a ;

(ii) pour toute suite (u_n) à valeurs dans I vérifiant $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$, on a $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(a)$.

Démonstration.
C'est une conséquence immédiate de la caractérisation séquentielle de la limite. □

1.4 Opérations sur la continuité.

Lemme 1.4.1.
Soit $g : I \to \mathbb{R}$ continue en $a \in I$ et telle que $g(a) > 0$. Alors g est strictement positive dans un voisinage de a (idem avec < 0).

Démonstration.
Il suffit de remarquer que la limite de g en a est strictement positive et d'utiliser les résultats connus sur les limites. □

Théorème 1.4.2.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$.

(i) Si f est continue en a alors $|f|$ et λf aussi.

(ii) Si f et g continues en a alors $f+g$, fg, $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ aussi et si $g(a) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ aussi.

Démonstration.
Le théorème est une conséquence immédiate des résultats sur les limites et des remarques suivantes :

1. Pour tout $x \in I$,
$$\max(f(x), g(x)) = \frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$$
$$\min(f(x), g(x)) = \frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$$

2. Si $g(a) \neq 0$ et g continue en a, alors au voisinage de a, g ne s'annule pas, donc $\dfrac{f}{g}$ est bien définie.

□

Remarque 1.4.3.
Un corollaire immédiat de ce théorème est obtenu en remplaçant dans son énoncé «continue en a» par «continue sur I» et «$g(a) \neq 0$» par «g ne s'annule pas sur I».

Théorème 1.4.4.
Soient $g : I \to \mathbb{R}$ et $h : J \to \mathbb{R}$ deux applications, avec $g(I) \subset J$. Si g est continue en a et h est continue en $g(a)$, alors $h \circ g$ est continue en a.

Démonstration.
Immédiat avec les résultats avec les limites. □

Remarque 1.4.5.
On obtient un corollaire immédiat en remplaçant «continue en a» et «continue en $h(a)$» respectivement par «continue sur I» et «continue sur J».

2 Les grands théorèmes.

2.1 Théorème des valeurs intermédiaires.

Proposition 2.1.1 (Rappel)**.**
Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties convexes de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire les parties I de $\mathbb{R}$ telles que tout réel compris entre deux élément de I appartient à I. Autrement dit, une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si
$$\forall (x,y) \in I^2 \quad \forall t \in [0,1] \qquad x + t(y-x) \in I$$

Théorème 2.1.2 (TVI)**.**
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Remarque 2.1.3.
1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, une application telle que $f(I)$ soit un intervalle Alors pour tout $(a,b) \in I^2$, vérifiant $a < b$, $f(a)$ et $f(b)$ sont dans cet intervalle, donc tout élément compris entre $f(a)$ et $f(b)$ s'écrit sous la forme $f(c)$ avec $c \in [a,b]$.
2. Attention : le TVI assure l'existence de ce c mais absolument pas son unicité.
3. Réciproquement, le fait que pour tout a et tout b vérifiant $a < b$ et tout m compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in [a,b]$ vérifiant $f(c) = m$ implique que $f(I)$ est un intervalle.

Démonstration.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. D'après les remarques précédentes, il suffit de montrer que pour tout $(a,b) \in I^2$, vérifiant $a < b$, tout élément compris entre $f(a)$ et $f(b)$ s'écrit sous la forme $f(c)$ avec $c \in [a,b]$.

Soit donc $(a,b) \in I^2$ vérifiant $a < b$, et soit m compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Supposons, sans perte de généralité, que $f(a) \leqslant f(b)$ (si $f(b) \leqslant f(a)$, il suffit de considérer $-f$). Soit $m \in]f(a), f(b)[$ (si $m = f(a)$ ou $m = f(b)$, c'est immédiat).

Notons alors $\mathscr{E} = \{\, x \in [a,b] \mid f(x) \leqslant m \,\}$. On a évidemment $a \in \mathscr{E}$ et $\mathscr{E}$ est majoré par b. Donc $\mathscr{E}$ admet une borne supérieure.

Notons $c = \sup \mathscr{E}$. Comme b majore $\mathscr{E}$, $c \leqslant b$ et comme $a \in \mathscr{E}$, $a \leqslant c$, donc $c \in [a,b]$.

Montrons d'abord que $c \neq b$. Comme $f(b) > m$ et par continuité de f en b, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout

$x \in I \cap [b-\varepsilon, b+\varepsilon]$, $f(x) > m$. On a donc, pour tout $x \in \mathscr{E}$, $x \leqslant b - \varepsilon$, donc par passage à la borne supérieure (ou comme $b-\varepsilon$ majore $\mathscr{E}$) : $c \leqslant b - \varepsilon$, donc $c \neq b$.

De même, montrons que $c \neq a$. Comme $f(a) < m$ et par continuité de f en a, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in I \cap [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, $f(x) < m$. On a donc $a+\varepsilon \in \mathscr{E}$, donc $a + \varepsilon \leqslant c$, donc $c \neq a$.

Ensuite, il existe une suite u à valeurs dans $\mathscr{E}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $f(u_n) \leqslant m$. Par continuité et par passage à la limite, $f(c) \leqslant m$.

De plus, comme $c < b$, il existe une suite u_n à valeurs dans $]c, b[$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $f(u_n) > m$. Par continuité et par passage à la limite, $f(c) \geqslant m$.

On a donc bien $f(c) = m$. $\square$

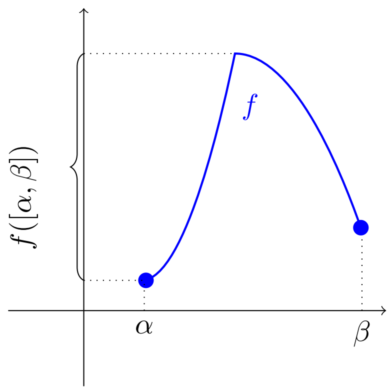

FIGURE 4 – Illustration du TVI pour une fonction continue, sur un intervalle.

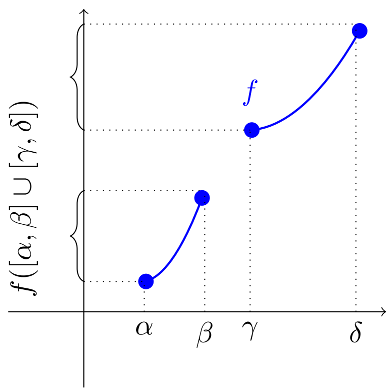

FIGURE 5 – Contre-exemple au TVI pour une fonction continue, non sur un intervalle.

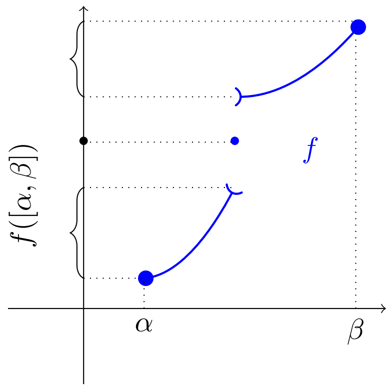

FIGURE 6 – Contre-exemple au TVI pour une fonction non continue, sur un intervalle.

Corollaire 2.1.4.
Soit $f \in \mathscr{C}(I)$, et $a, b \in I$ tels que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$. Alors il existe c entre a et b tel que $f(c) = 0$.

Remarque 2.1.5.
Une autre démonstration de ces résultats repose sur le principe de dichotomie, qui donne directement un algorithme. Voici un algorithme python. Pour tester si l'intervalle étudié est bien un intervalle où $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, on étudie le signe du produit $f(a)f(b)$. On s'arrête lorsque la largeur de l'intervalle est inférieure à un pas donné.

```python
def zeros (f,a,b,p) :
  """Recherche d'un zero de f dans
     l'intervalle [a,b]. Retourne le
     résultat avec une précision p.
     Précondition : f continue,
     a<b et f(a)*f(b)<=0"""
  g, d = a, b
  # [g,d] : Intervalle courant
  while d-g > p :
  # Invariant :
  # f s'annule entre g et d
  # soit (f(g)*f(d)<= 0)
  # Variant : g-d est divisé
  #        par deux à chaque étape
```

```
        m = (g+d)/2 # Milieu de [g,d]
        if (f(g)*f(m))<= 0 :
            d = m
            # On garde la moitié de gauche
        else :
            g = m
            # On garde celle de droite
    return m
```

2.2 Image d'un segment par une fonction continue.

Dans le cas d'un segment, le TVI peut-être complété.

Théorème 2.2.1.
L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Démonstration.
Notons $I = [a, b]$, $f : I \to \mathbb{R}$ continue, et $J = f([a, b])$. D'après le TVI, J est un intervalle. Il suffit de montrer que ses extrémités gauche et droite sont réelles et lui appartiennent.

Notons M la borne supérieure de J dans $\overline{\mathbb{R}}$ et montrons $M \in J$.

1. Remarquons tout d'abord qu'on peut construire une suite u de points de I vérifiant $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$. En effet :
   - Supposons $M = +\infty$, alors J n'est pas majoré, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un élément de J appartenant à $[n, +\infty[$, on note alors u_n un antécédent par f d'un tel élément dans $[a, b]$. On a alors
   $$\forall x \in \mathbb{N} \quad f(u_n) \geqslant n$$
   Donc
   $$f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$$
   - Supposons $M \in \mathbb{R}$. Alors pour tout n, il existe un élément de J dans l'intervalle $\left[M - \frac{1}{n+1}, M\right]$, on note alors u_n un antécédent par f d'un tel élément dans $[a, b]$. On a alors
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(u_n) \in \left[M - \frac{1}{n+1}, M\right]$$
   Donc
   $$f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$$
2. u est à valeurs dans $[a, b]$ or d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, $[a, b]$ est compact, donc on peut extraire de u une suite v convergeant vers une valeur $c \in [a, b]$. Comme f est continue sur $[a, b]$, on en déduit que $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(c)$.
   Or $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$, donc elle tend vers M.
   On a donc $M = f(c)$, donc $M \in f([a, b]) = J$.

De la même manière, on montre $\inf(J) \in J$. □

Corollaire 2.2.2.
Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration.
Soit f continue sur un segment $[a, b]$. D'après le théorème, $f([a, b])$ est un segment $[c, d]$. f est donc majorée par d, minorée par c. Or $d \in f([a, b])$ donc d possède un antécédent dans $[a, b]$ par f. f atteint donc ce majorant (qui est donc un maximum). De la même façon, f atteint son minorant c, qui est donc un minimum de f sur $[a, b]$. □

Exemple 2.2.3.
C'est un résultat intuitif, voici des contre-exemples lorsque les hypothèses ne sont pas vérifiées.

- Sur un intervalle fermé, non borné : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ est continue, mais n'a ni maximum ni minimum.
- Sur un intervalle ouvert non fermé : $]0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$ est continue mais n'a pas de maximum.
- Avec une fonction non continue : sur le segment $[0, 1]$, la fonction qui a un réel associe 0, sauf aux $1/n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ qui leur associe n. Cette fonction est discontinue et n'a pas de maximum.

Exemple 2.2.4.
Toute fonction périodique continue et définie sur $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-périodique, et $x \in \mathbb{R}$. Sur $[0, T]$, f est bornée et atteint son maximum M en x_M et son minimum m en x_m.

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $x' \in [0, T]$ tel que $x - x'$ soit un multiple entier de T (il est suffisant (et nécessaire) de prendre pour x' la valeur $T \times (x/T - \lfloor x/T \rfloor)$). On en déduit $f(x) \in [m, M]$. f est donc bornée sur $\mathbb{R}$ et atteint ses bornes en x_M et x_m. □

2.3 Rappels concernant les fonctions strictement monotones.

Dissipons d'emblée une idée populaire, mais fausse : ce n'est pas parce qu'une fonction est dérivable en un point que l'on peut dire quoi que ce soit quant au sens de variation de la fonction au voisinage de ce point.

Exemple 2.3.1.
Soit la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{x}{2} & \text{si} & x \neq 0, \\ 0 & \text{si} & x = 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Alors f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(0) = 1/2$, mais f n'est monotone sur aucun voisinage de 0.

Dans la suite, nous ne parlerons pas du tout de dérivabilité.

Théorème 2.3.2.
Soit $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}$ vérifiant $a < b$. Supposons que f est continue sur I et ***strictement*** croissante sur I. Soit $\ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $f \underset{a}{\rightarrow} \ell$ et $f \underset{b}{\rightarrow} \ell'$. Alors :

1. si $I = [a, b]$, alors $f(I) = [f(a), f(b)]$;
2. si $I =]a, b[$, alors $f(I) =]\ell, \ell'[$;
3. si $I = [a, b[$, alors $f(I) = [f(a), \ell'[$;
4. si $I =]a, b]$, alors $f(I) =]\ell, f(b)]$.

On a un résultat analogue lorsque f est ***strictement*** décroissante sur I.

Démonstration.
Remarquons que f étant strictement monotone, f admet une limite à droite en a et à gauche en b.

On se contente de donner le cas f strictement décroissante et $I =]a, b]$. On sait que $f(I)$ est un intervalle. On note $\alpha = \inf f(I)$ et $\beta = \sup f(I)$. f étant décroissante, $f(b)$ minore $f(I)$, or $f(b)$ est dans $f(I)$, donc $\alpha = f(b)$. Par ailleurs, comme f est strictement décroissante, on ne peut avoir $\beta \in f(I)$, car alors il existerait $c \in]a, b]$ vérifiant $f(c) = \beta$ et dans ce cas on aurait $f(\frac{a+c}{2}) > \beta$ et β ne majorerait plus $f(I)$, ce qui serait absurde.

Enfin, le théorème de limite monotone nous donne l'existence des limites manipulées. On en rappelle ici les arguments.

- Supposons $\beta = +\infty$, alors f n'est pas majorée, donc pour tout $M > 0$, il existe $c \in I$ tel que $f(c) > M$. Mais f est décroissante, donc pour tout $x \in]a, c]$, $f(x) > M$. On a donc $f \underset{a}{\rightarrow} +\infty = \beta$.
- Supposons $\beta \in \mathbb{R}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $\beta - \varepsilon$ ne majore pas $f(I)$, donc il existe $d \in]\beta - \varepsilon, \beta]$ tel que $d \in f(I)$, donc il existe $c \in I$ tel que $f(c) \in]\beta - \varepsilon, \beta]$. Or f est décroissante, donc pour tout $x \in]a, c]$, on a $f(x) \in]\beta - \varepsilon, \beta]$. Ainsi $f(I) = [f(b), \ell'[$ ($\beta \notin f(I)$ car f est strictement décroissante). On a donc $f \underset{a}{\rightarrow} \beta$.

Dans les deux cas, on a bien $f(I) = [f(b), \ell'[$ □

Remarque 2.3.3.
Si la fonction f n'est supposée que monotone, $f(I)$ peut être fermé alors que I est ouvert (prendre f constante, par exemple).

2.4 Monotonie stricte, bijectivité et continuité.

Explorons maintenant les liens entre ces trois notions.

Lemme 2.4.1 (Réciproque d'une application strictement monotone)**.**
Soit D et E deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : D \rightarrow E$ une bijection strictement monotone. Alors l'application réciproque $f^{-1} : E \rightarrow D$ est strictement monotone, de même sens de variation que f.

Démonstration.
Montrons maintenant que f^{-1} est strictement monotone, de même sens de variation que f.

- Supposons que f soit strictement croissante. Alors, soit y_1 et y_2 deux éléments de $f(D)$ vérifiant $y_1 < y_2$ et soit $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Si on avait $x_1 \geqslant x_2$ alors, comme f est croissante, on aurait $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, c'est-à-dire $y_1 \geqslant y_2$, ce qui serait absurde. Donc $x_1 < x_2$, c'est-à-dire $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.
  f^{-1} est donc strictement croissante.
- Supposons que f soit strictement décroissante. De la même façon, on montre que f^{-1} est alors strictement décroissante.

Dans les deux cas, f^{-1} est strictement monotone, de même sens de variation que f. □

Le résultat suivant est une réciproque partielle au théorème des valeurs intermédiaires.

Lemme 2.4.2.
Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application monotone telle que $f(I)$ est un intervalle.

Alors f est continue sur I.

Démonstration.
Le cas où I est un intervalle vide ou réduit à un point est trivial. Nous supposons donc par la suite que I n'est ni vide, ni réduit à un point.

Nous étudions seulement ici le cas où f est croissante. Si f est décroissante, il suffit d'appliquer ce qui suit à $-f$.

Il suffit de montrer que d'une part que pour tout point $a \in I$ qui n'est pas l'extrémité gauche de I, on a $f \underset{a^-}{\longrightarrow} f(a)$ et d'autre part que pour tout point $a \in I$ qui n'est pas l'extrémité droite de I, on a $f \underset{a^+}{\longrightarrow} f(a)$.

Par l'absurde, supposons que ce n'est pas le cas. Pour fixer les idées, supposons qu'il existe $a \in I$ qui n'est pas l'extrémité gauche de I vérifiant $f \underset{a^-}{\not\longrightarrow} f(a)$ (l'autre cas est similaire). Notons alors α un point de I vérifiant $\alpha < a$.

Alors, f étant croissante, on sait que la limite de f en a, à gauche, existe. Notons la ℓ. Alors, $f(\alpha) \leqslant \ell \leqslant f(a)$. Puisque $f \underset{a^-}{\not\longrightarrow} f(a)$, on a $\ell < f(a)$. L'intervalle $]\ell, f(a)[$ n'est donc pas vide, on peut donc y choisir un point y. On a alors $f(\alpha) \leqslant \ell < y < f(a)$.

Or $f(I)$ est un intervalle, donc $y \in f(I)$. Donc il existe $c \in I$ vérifiant $f(c) = y$. On a $f(c) < f(a)$ et f croissante, donc $c < a$. Donc $f(c) \leqslant \ell$, donc $y \leqslant \ell$ ce qui est absurde. □

Lemme 2.4.3.
Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$, une application continue et injective. Alors f est strictement monotone.

Démonstration.
Supposons par l'absurde que f n'est pas strictement monotone, c'est-à-dire qu'elle n'est ni strictement croissante, ni strictement décroissante.

Comme f n'est pas strictement croissante, il existe $(x, y) \in I^2$ vérifiant $x < y$ et $f(x) \geqslant f(y)$.

De même, comme f n'est pas strictement décroissante, il existe $(x', y') \in I^2$ vérifiant $x' < y'$ et $f(x') \leqslant f(y')$.

Notons

$$\begin{array}{rrcl} \alpha : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & (1-t)x + tx' \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \beta : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & (1-t)y + ty' \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & f(\alpha(t)) - f(\beta(t)) \end{array}$$

I est convexe donc pour tout $t \in [0,1]$, $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ appartiennent à I, donc φ est bien définie.

Par ailleurs, on peut remarquer que, comme $x < y$ et $x' < y'$, pour tout $t \in [0,1]$, on a $\alpha(t) < \beta(t)$.

Enfin, on a :

(i) φ est continue sur $[0,1]$;

(ii) $\varphi(0) = f(x) - f(y) \geqslant 0$;

(iii) $\varphi(1) = f(x') - f(y') \leqslant 0$.

Donc φ s'annule en une valeur $t \in [0,1]$. On a alors $f(\alpha(t)) = f(\beta(t))$.

Or f est injective, donc $\alpha(t) = \beta(t)$. Or $\alpha(t) < \beta(t)$, donc c'est absurde. □

Théorème 2.4.4 (Théorème de la bijection strictement monotone)**.**
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Posons $J = f(I)$. Alors si deux quelconques des trois propriétés suivantes sont vraies, la troisième l'est également :

(i) J est un intervalle et f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $f(I)$.

(ii) f est strictement monotone sur I.

(iii) f est continue sur I.

De plus, lorsque ces conditions sont vérifiées, l'application réciproque $f^{-1} : J \to I$ est aussi une bijection continue strictement monotone.

Démonstration.
Pour ce qui est de la première partie du théorème :

— Dans le cas où (i) et (ii) sont vraies, $f(I)$ est un intervalle, f est donc continue d'après le lemme 2.4.2

— Dans le cas où (i) et (iii) sont vraies, f réalise une bijection de I sur $f(I)$ donc est injective, or elle est continue, donc strictement monotone d'après le lemme 2.4.3.

— Dans le cas où (ii) et (iii) sont vraies, f est strictement monotone donc injective, donc réalise une bijection de I sur $f(I)$. De plus, elle est continue donc $f(I)$ est un intervalle.

Pour ce qui est de la seconde partie, supposons donc ces conditions vérifiées.

Alors on sait que la bijection d'une application strictement monotone est monotone, donc $f^{-1} : J \to I$ est strictement monotone.

De plus f^{-1} réalise une bijection de l'intervalle J sur l'intervalle $f^{-1}(J) = I$.

La première partie assure donc que f^{-1} est continue. □

Exemple 2.4.5.
Cela permet de montrer que les fonctions Arccos, Arcsin et Arctan sont continues.

3 Extension au cas des fonctions à valeurs complexes.

Les notions de continuité, continuité à gauche et à droite se généralisent sans problème aux fonctions à valeurs complexes, puisque c'est juste une histoire de limite. On a aussi le résultat suivant.

Théorème 3.0.1.
Soit $f : I \to \mathbb{C}$, $a \in I$. On a équivalence entre :

1. f est continue en a (resp. sur I)
2. $\text{Im}(f)$ et $\text{Re}(f)$ sont continues en a (resp. sur I).

La caractérisation séquentielle de la continuité est vraie comme pour les applications à valeurs dans $\mathbb{R}$, de même que toutes les résultats sur les opérations usuelles. En revanche, les grands théorèmes liés au TVI ne peuvent pas être étendus à $\mathbb{C}$: ils font appel à l'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple 3.0.2.
Notons $f : \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{it} \end{array}$. Alors f est continue sur $[0,\pi]$, vaut 1 en 0, -1 en π mais ne s'annule pas.

Quant à l'image du segment $[0,\pi]$, il s'agit d'un demi-cercle et non d'un intervalle !