Devoir à la maison n° 20

À rendre le 12 mai

I. Espace dual

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n non nulle. L'ensemble $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ des formes linéaires de E est un $\mathbb{K}$-ev appelé le *dual* de E et noté E^*. Le dual de E^* est appelé le *bidual* de E et noté E^{**}. On a ainsi $(E^*)^* = E^{**}$.
Soit $\mathscr{B} = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note e_i^* l'unique forme linéaire de E définie par la relation :

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases},$$

où δ est appelé *symbole de Kronecker*.
La famille $(e_k^*)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est alors notée $\mathscr{B}^*$.

1) Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, e_k^* est appelée l'*application coordonnée d'indice* k de $\mathscr{B}$. Justifier cette appellation en montrant que pour tout $x \in E$ on a

$$x = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x) e_k.$$

2) **a)** Montrer que $\mathscr{B}^*$ est une base de E^*, appelée la *base duale de* $\mathscr{B}$.

b) Soit $f \in E^*$, montrer que le n-uplet des coordonnées de f dans $\mathscr{B}^*$ est $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.

3) Pour tout $x \in E$ on note ev_x l'application $\begin{array}{ccc} E^* & \to & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & f(x) \end{array}$, appelée *évaluation de f en x*.

a) Soit $x \in E$. Montrer que ev_x appartient à E^{**}.

b) Montrer que l'application $ev : \begin{array}{ccc} E & \to & E^{**} \\ x & \mapsto & ev_x \end{array}$ est un isomorphisme de E sur E^{**}.

c) Quelle est l'application e_i^{**} ?

II. Indice d'un endomorphisme nilpotent

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un endomorphisme f de E est dit *nilpotent* s'il existe un entier naturel p vérifiant $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Dans ce cas, l'*indice* de f est le plus petit des entiers naturels p vérifiant $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On considère $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent, d'indice p.

1) Soit $u \in E \setminus \operatorname{Ker}(f^{p-1})$, montrer que la famille $(u, f(u), \ldots, f^{p-1}(u))$ est libre.

2) En déduire que, si E est de dimension finie égale à n, alors $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

3) Soit $g \in \mathscr{GL}(E)$ vérifiant $f \circ g = g \circ f$ (g commute avec f). Montrer que $f + g \in \mathscr{GL}(E)$ lorsque :

- **a)** E est de dimension finie ;
- **b)** E est quelconque.

4) Donner des exemples d'endomorphismes f et g de $\mathscr{L}(\mathbb{K}^2)$, où f est nilpotent, $g \in \mathscr{GL}(\mathbb{K}^2)$ mais $f + g \notin \mathscr{GL}(\mathbb{K}^2)$.

— FIN —