# Devoir à la maison n° 21

À rendre le 7 juin

Dans tout le problème les matrices utilisées appartiennent à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Toute matrice $M$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est notée : $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & \ell & m \\ r & s & t \end{pmatrix}$.

On appelle $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Elle est formée des matrices :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut donc écrire : $M = aE_1 + bE_2 + cE_3 + kE_4 + \ell E_5 + mE_6 + rE_7 + sE_8 + tE_9$.
À une telle matrice $M$ on associe les huit nombres :

$$s_1(M) = a+b+c, \quad s_2(M) = k+\ell+m, \quad s_3(M) = r+s+t, \quad s_4(M) = a+k+r,$$
$$s_5(M) = b+\ell+s, \quad s_6(M) = c+m+t, \quad s_7(M) = a+\ell+t, \quad s_8(M) = r+\ell+c.$$

Soit aussi

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on note

- — $S$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques,
- — $A$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ formé des matrices antisymétriques,
- — $V$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la matrice $J$,
- — $T$ l'ensemble des matrices pour lesquelles le nombre $s_7(M)$ est nul (ensemble des matrices de trace nulle).
- — $\mathscr{M}$ l'ensemble des matrices magiques de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, *i.e.* l'ensemble des matrices dont les 8 nombres $s_1(M), s_2(M), \dots, s_8(M)$ sont égaux entre eux.

**1)** **a)** Justifier que les sous-espaces vectoriels $S$ et $A$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

**b)** Quelles sont les dimensions de $S$ et $A$ ?

**c)** Montrer que $T$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?

**2)** On considère l'application $\varphi$ qui, à la matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ , associe l'élément $(s_1(M), \ldots, s_8(M))$ de $\mathbb{R}^8$.

- **a)** Montrer que $\varphi$ est une application linéaire.
- **b)** Écrire la matrice de $\varphi$ en rapportant l'espace de départ $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ à la base $\mathscr{B}$ et l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^8$ à sa base canonique notée $\mathscr{C}$.
- **c)** Montrer que le rang de cette matrice est 7.

  *On pourra remarquer que l'une des lignes est combinaison linéaire des autres, puis considérer une combinaison linéaire nulle des autres lignes.*
- **d)** En déduire la dimension du noyau de $\varphi$.

**3)** **a)** Justifier que $\mathscr{M}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ .

- **b)** Montrer que $\mathscr{M} \cap T$ et $V$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{M}$.
- **c)** En observant que $\mathscr{M} \cap T = \operatorname{Ker} \varphi$, déterminer la dimension de $\mathscr{M}$.

**4)** **a)** Déterminer une matrice de $\mathscr{M} \cap T$ symétrique dont le coefficient d'indice $(1,1)$ vaut 1.

- **b)** Déterminer une matrice de $\mathscr{M} \cap T$ antisymétrique dont le coefficient d'indice $(1,3)$ vaut 1.
- **c)** Former une base de $\mathscr{M}$.

**5)** Montrer qu'il n'existe qu'une matrice magique vérifiant $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ et donner celle-ci.

— **FIN** —