



LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON  
SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR  
CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I.  
ANNÉE 2018 - 2019

---

C3 : ANALYSE TEMPORELLE DES SYSTÈMES ASSERVIS

## TD 6 - Analyse temporelle des SLCI (1er ordre)(C3-1)

16 Octobre 2018

---

### Compétences

- **Analyser :**
  - apprécier la pertinence et la validité des résultats.
  - Quantifier et interpréter les écarts.
- **Modéliser :** Proposer un modèle de connaissance et de comportement : système du premier ordre
- **Résoudre :** Procéder à la mise en oeuvre d'une démarche de résolution analytique :
  - détermination d'une réponse temporelle pour un système du premier ordre.
  - Prévoir les performances en termes de rapidité.
- **Expérimenter :** Identification temporelle d'un modèle de comportement .

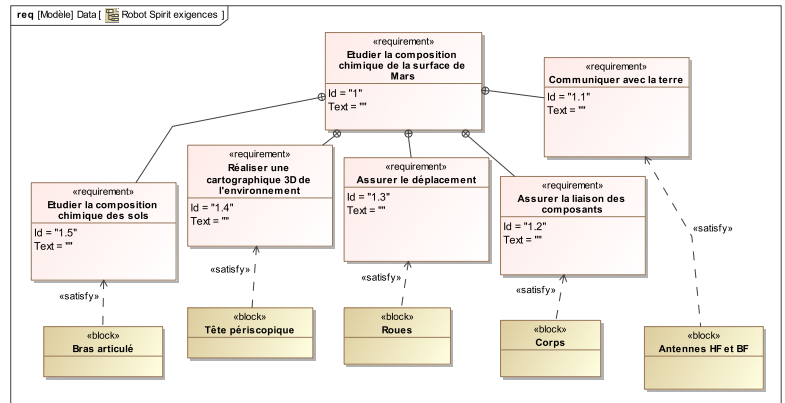
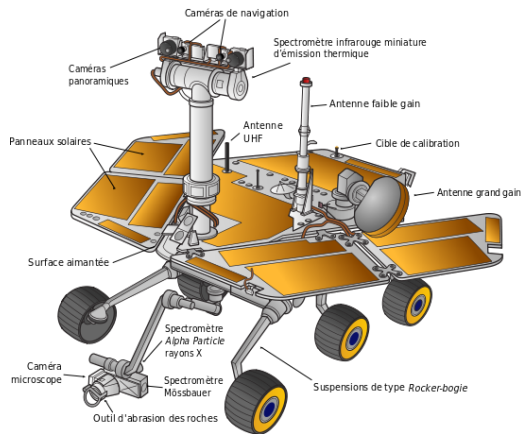
### 1 Étude du robot d'exploration martienne

#### a) Mise en situation de l'étude

Le robot Spirit a été conçu par la NASA pour étudier la composition chimique de la surface de la planète Mars. Les principaux composants de ce robot sont :

- un corps, appelé "Warm Electronic Box", dont la fonction est d'assurer la liaison entre les divers composants. Il supporte les batteries qui sont chargées par des capteurs solaires. Il protège également l'électronique embarquée des agressions extérieures.
- Une tête périscopique orientable dont la fonction est d'orienter le système appelé "Pancam" (Panoramic Camera) qui se trouve à 1,4 m de hauteur. Ce dernier fournit une vue en 3 dimensions de l'environnement. Le traitement des images acquises par les caméras du système Pancam permet à Spirit de réaliser une cartographie des terrains et donc de trouver de manière autonome son chemin en évitant les obstacles. Cette autonomie de déplacement est renforcée par l'utilisation de quatre caméras de direction situées sur le corps.
- Un bras articulé dont la fonction est d'amener quatre outils (une foreuse, un microscope et deux spectromètres) à proximité d'une roche à étudier. L'étude de la roche par ces quatre outils se fait par des carottages horizontaux.
- Six roues, animées chacune par un motoréducteur, dont la fonction est d'assurer le déplacement de Spirit sur un sol caillouteux. Les deux roues avant et arrière possèdent de plus un moteur permettant au robot d'effectuer des changements de direction jusqu'à un demi tour sur place.
- Un système de communication et des antennes hautes et basses fréquences, dont la fonction est de permettre à Spirit de communiquer avec la terre.

La figure ci-dessous donne un diagramme des exigences partiel technique du robot.



### b) Principe d'étude de l'exigence "Permettre à la NASA d'étudier la composition chimique de la surface de Mars"

Cette exigence est réalisée, d'un point de vue temporel, par les 3 phases suivantes :

- la phase d'approche : Spirit "repère" une roche dont la forme est adaptée à l'étude chimique. Son rôle consiste à s'en rapprocher suffisamment près pour pouvoir l'étudier.
- la phase de déploiement : le corps de Spirit est fixe, le bras articulé se déploie et amène l'ensemble des 4 outils à proximité de la roche.
- la phase de prospection : le corps de Spirit ainsi que le bras articulé sont fixes, les 4 outils étudient la composition chimique de la roche.

Dans le cadre de ce sujet, on va se limiter à l'analyse de la phase d'approche. L'objectif est de vérifier que la solution constructive satisfait les niveaux attendus des critères des exigences techniques.

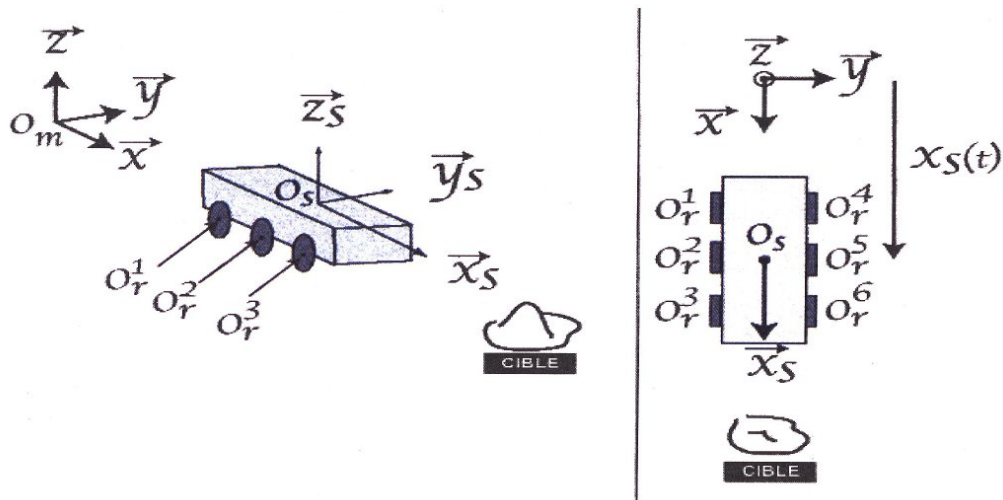
### c) Étude de la phase d'approche

L'objectif est de définir l'asservissement de Spirit de manière à répondre aux spécifications de la phase d'approche. Celle-ci consiste à amener Spirit avec **précision et rapidité** au voisinage d'une roche à étudier :

Désignation	Critère	Niveau
S'approcher de la cible	Erreur $\varepsilon_{position}$ sur la position cible	$\varepsilon_{position} < 0,01m$
	Rapidité	Temps de réponse à 5% inférieur à 300s

L'asservissement de ce déplacement est indispensable du fait de l'existence de perturbations mal connues, qui sont principalement engendrées par les rafales de vent sur la surface de Mars. Pour effectuer cette approche, la motorisation est assurée par un bloc motoréducteur à courant continu dans chacune des six roues (cf ci dessous). Le mouvement ainsi généré est observé de manière optique. En effet, les caméras situées sur la tête périscopique Pancam (cf figure 1) permettent à tout instant de connaître la position absolue de Spirit. Le traitement de cette information par l'électronique embarquée fournit donc une mesure de l'erreur par rapport à la position cible.

A titre d'information, on donne le paramétrage ci dessous. On désignera par (S) le corps du robot.



L'objectif est d'asservir la position  $x_s(t)$  de Spirit de manière à approcher la cible en respectant la cahier des charges précédent.

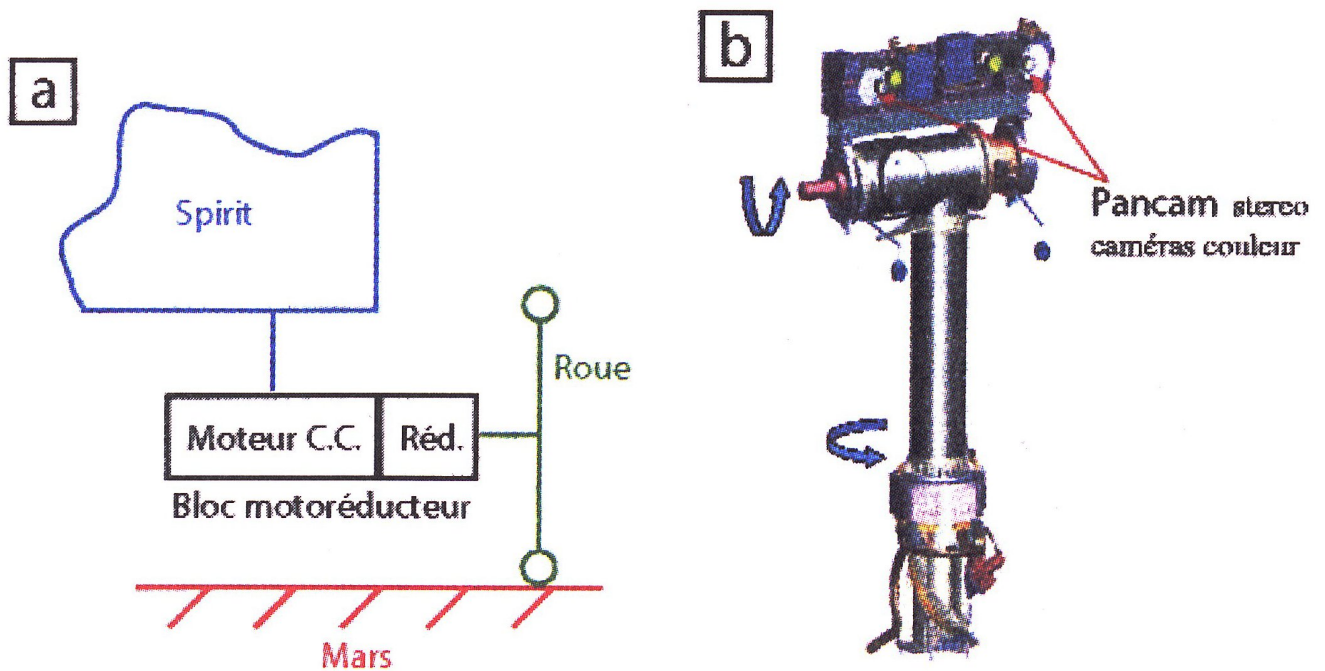


FIGURE 1 – Schéma d'implantation du bloc motoréducteur sur une des roues (chaque roue est motorisée) et de la tête périscopique Pancam

#### d) Architecture du système asservi

Une étude de Dynamique de Spirit en déplacement par rapport au sol, sous l'action mécanique des moteurs et de la perturbation due au vent donne les équations suivantes (programme de 2ème année) :

$$M_s \ddot{x}_s(t) = 6 F_{r-s}^x(t) + F_{v-s}^x(t) \quad (1)$$

$$\left( M_r + \frac{\tilde{I}_r^y}{R_r^2} \right) \ddot{x}_s(t) = - F_{r-s}^x(t) + \frac{C_{s-r}^y(t)}{R_r} \quad (2)$$

On définit les constantes suivantes :

- $M_s$  : masse de Spirit sans les roues ;
- $M_r$  : masse d'une roue ;
- $\tilde{I}_r^y = I_r^y + \eta^2 \cdot I_{arbre\ moteur}^y$  : inertie de rotation d'une roue et de son moteur, autour de son axe de révolution ;
- $R_r$  : rayon d'une roue ;
- $\eta$  : rapport de réduction du réducteur à engrenage.

On définit également les grandeurs variables suivantes :

- $x_s(t)$  : position de Spirit sur Mars ;
- $C_{s-r}^y(t)$  : couple moteur appliqué sur la roue ;
- $F_{r-s}^x(t)$  : effort d'une roue sur Spirit ;
- $F_{v-s}^x(t)$  : effort du vent, modélisant la perturbation sur Spirit.

L'étude de la motorisation, dans le cas d'un moteur à courant continu, donne les équations suivantes :

$$u(t) = e(t) + R_m i(t) + L \frac{di(t)}{dt}, \quad (3)$$

$$\frac{C_{s-r}^y(t)}{\eta} = K_t \cdot i(t), \quad (4)$$

$$e(t) = K_e \frac{\eta}{R_r} \dot{x}_s(t). \quad (5)$$

On définit les constantes suivantes :

- $R_m$  : résistance aux bornes de l'induit,
- $L$  : inductance aux bornes de l'induit,
- $K_t$  : constante de couple,
- $K_e$  : constante de force contre-électromotrice.

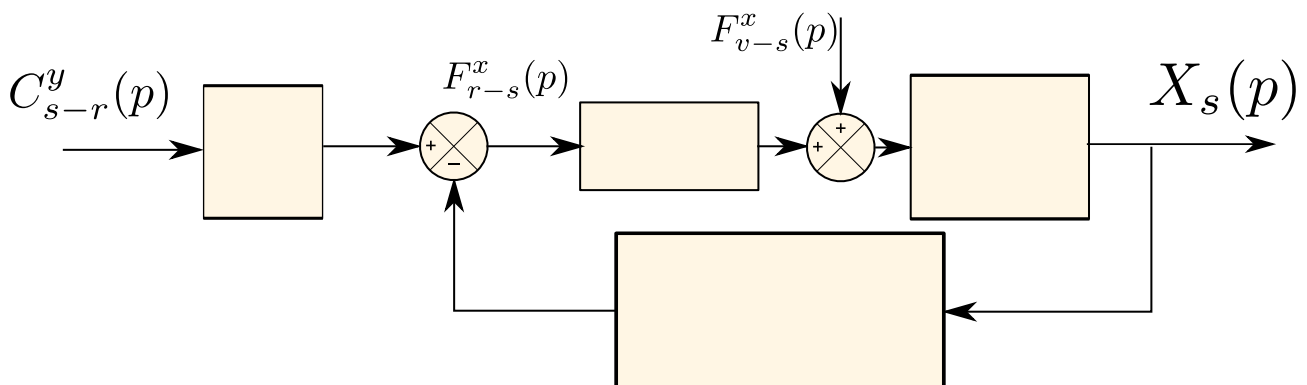
On définit également les grandeurs variables suivantes :

- $u(t)$  : tension d'alimentation,
- $e(t)$  : force contre-électromotrice,
- $i(t)$  : intensité.

#### e) Mise en place du modèle de connaissance

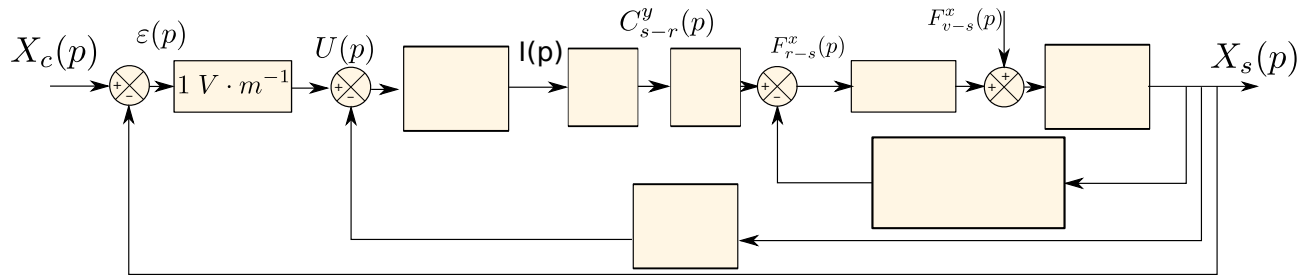
**Q 1 :** Écrire la transformée de Laplace des équations de la Dynamique, notées **1** et **2** en considérant que les conditions initiales sont nulles.

**Q 2 :** A partir des équations précédentes dans le domaine de Laplace, remplir les schémas blocs situés sur la figure ci-dessous.



**Q 3 :** Écrire la transformée de Laplace des équations régissant le Moteur à Courant Continu, notées **3**, **4** et **5** en considérant que les conditions initiales sont nulles.

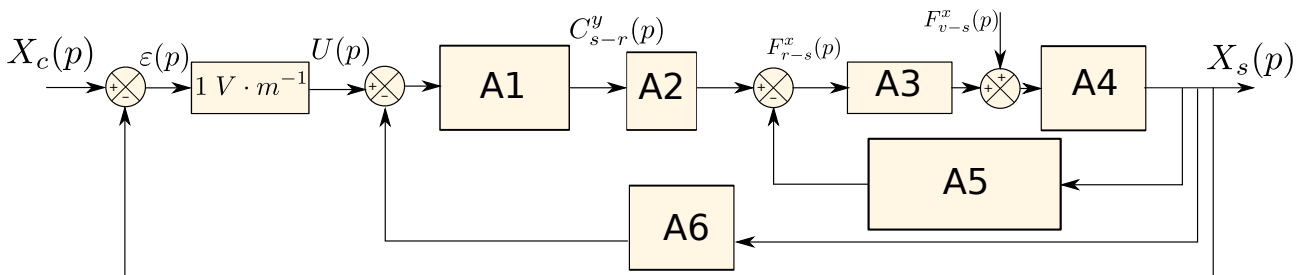
**Q 4 :** A partir des équations précédentes dans le domaine de Laplace, remplir le schéma bloc du document ci-dessous.



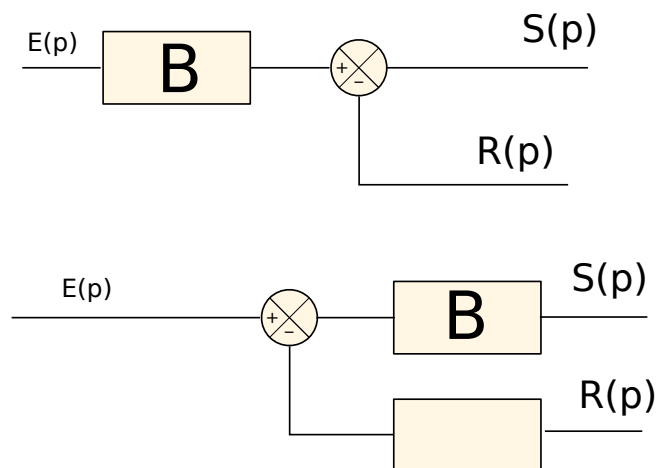
#### f) Modèle de commande du robot

La tension  $u(t)$  de commande est déterminée à partir de l'écart  $\varepsilon(p)$  entre la position cible  $X_c(p)$  et la position courante  $X_s(p)$ , via une boucle d'observation (ie de retour) unitaire (système PANCAM). L'ensemble des schémas blocs précédents viennent donc s'insérer comme détaillé sur la figure ci-dessous, pour constituer un système reliant la consigne  $X_c(p)$  et la position courante de Spirit  $X_s(p)$ . On choisit de prendre une amplification unitaire de  $1 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ .

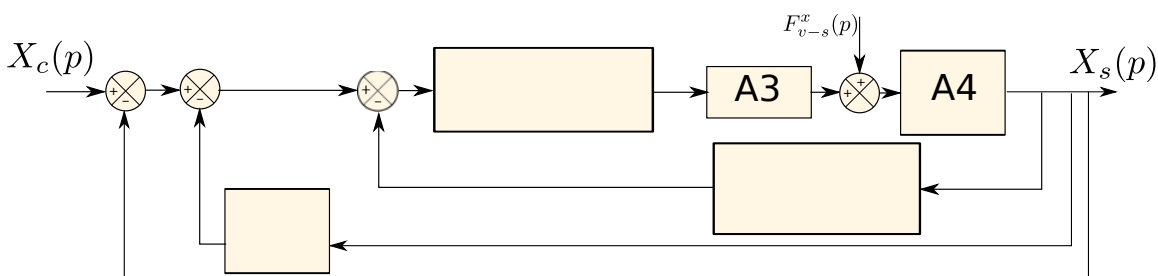
*Remarque :* les blocs avec les fonctions de transferts  $A_i$  sont ceux déterminés lors des questions précédentes. On pourra dans un premier tout exprimer en fonctions des différents  $A_i$ .



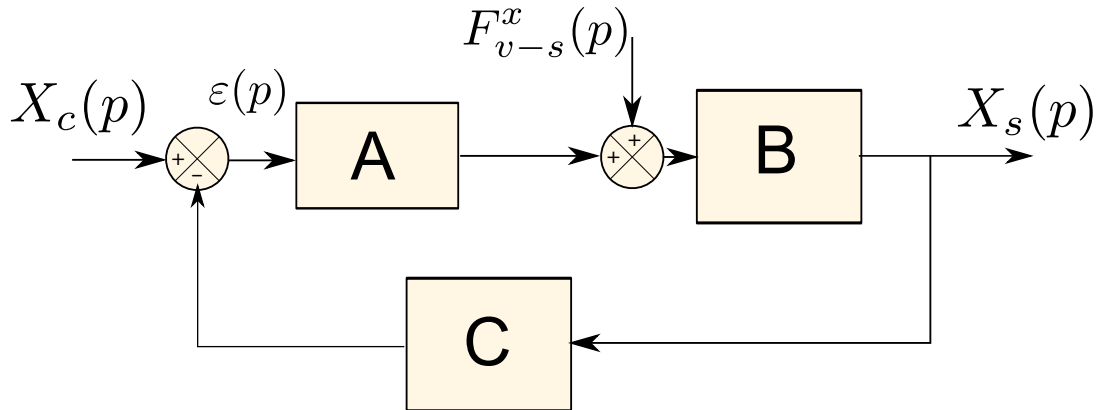
**Q 5 :** Pour réduire ce schéma bloc nous allons le manipuler en passant des blocs de l'amont vers l'aval des points de prélèvement. On raisonne donc déjà dans le cas général grâce à la figure ci-dessous. Donner l'expression du bloc manquant en fonction de B



**Q 6 :** Montrer alors que l'on peut mettre le schéma bloc sous la forme suivante avec 3 retours en parallèle.



**Q 7 :** Ce schéma bloc peut se réduire à un schéma de bloc de la forme de celui proposé ci dessous (On pourra regrouper les trois boucles retours parallèles en une seule. Exprimer alors A, B et C en fonctions des  $A_i$



**Q 8 :** A partir des résultats de l'étude préliminaire et de la partie précédente, donner l'expression des blocs A, B et C.

Le moteur utilisé dispose d'une inductance très faible qui permet par la suite de simplifier le modèle. On va donc considérer  $L=0$ .

**Q 9 :** Sous couvert de cette hypothèse d'inductance nulle, montrer que les fonctions de transfert A, B et C s'expriment :

$$A = \frac{6 \cdot \eta K_t}{R_m R_r}, B = \frac{1}{M_s p^2}$$

et

$$C = \frac{(\tilde{I}_r^y R_m + M_r R_r^2 R_m) p^2 + \eta^2 K_t K_e p + \eta R_r K_t}{\eta R_r K_t}$$

Pour la suite du problème, on admettra ce résultat.

On va à présent s'intéresser à la relation liant la sortie aux deux entrées du système, que l'on notera :

$$X_S(p) = G_1(p) \cdot X_c(p) + G_2(p) \cdot F_{v-s}^x(p)$$

**Q 10 :** A partir de la méthode de votre choix, exprimer  $G_1(p)$  et  $G_2(p)$  en fonction de A, B et C.

**Q 11 :** En remplaçant A, B et C par leur valeur (cf ci dessus), montrer que l'on peut écrire sous forme canonique :

$$G_1(p) = \frac{\tilde{K}_1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

et

$$G_2(p) = \frac{\tilde{K}_2}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

**Q 12 :** Donner l'expression des constantes caractéristiques :  $\tilde{K}_1$ ,  $\tilde{K}_2$ ,  $\xi$  et  $\omega_0$

#### g) Étude des performances du systèmes corrigé vis-à-vis du cahier des charges

Le robot Spirit est étudié pour une entrée de consigne en échelon, d'amplitude notée  $X_{C0}$  constante. Dans un premier temps, on prendra la perturbation  $F_{v-s}^x(p)$  nulle.

**Q 13 :** Définir l'expression de  $X_c(p)$

**Q 14 :** Définir l'erreur statique absolue, notée  $\varepsilon_{Sa}$ , de ce système. En précisant le théorème utilisé, calculer cette erreur statique absolue. Le système est-il précis vis-à-vis de sa consigne d'entrée?

On tient à présent compte de l'entrée de perturbation, que l'on modélise également par un échelon d'amplitude constante  $F$ . A partir des valeurs des constantes du moteur, on peut montrer que l'erreur statique absolue est de 0,172 m.

Une étude non demandée ici permettrait de montrer qu'une correction non unitaire de gain  $K_1 = 20$  assurerait les contraintes de précision en cas de perturbation. Le modèle ainsi obtenu serait toujours du second ordre et aurait pour fonction de transfert :

$$G_1(p) = \frac{1}{1 + 27,7 p + 0,36 p^2}$$

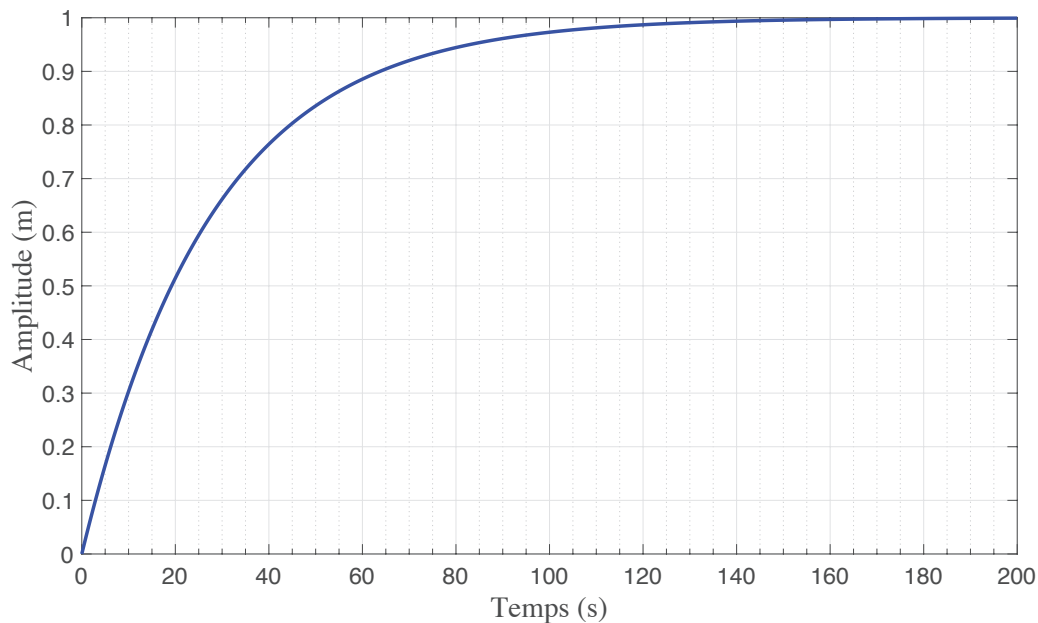
**Q 15 : Montrer que la fonction de transfert précédente peut être mise sous la forme :**

$$G_1(p) = \frac{1}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

**Q 16 : Donner la valeur numérique des deux constantes :  $\tau_1, \tau_2$ . Montrer que l'une est négligeable devant l'autre.**

Le système ainsi corrigé a été testé. On a alors enregistré l'allure de sa réponse pour une entrée en échelon d'amplitude 1. Le relevé est donné dans le document réponse. Cette courbe permet de définir un modèle simplifié du système. On parle alors de modèle de comportement.

**Q 17 : A partir de la réponse expérimentale, et en le justifiant, identifier l'ordre de la fonction de transfert du modèle de comportement. Sur le graphe du document réponse, effectuer les tracés nécessaires pour identifier les paramètres caractéristiques de ce système.**



**Q 18 : Vérifier que les critères de rapidité et de précision sont vérifiés**

## Corrigé

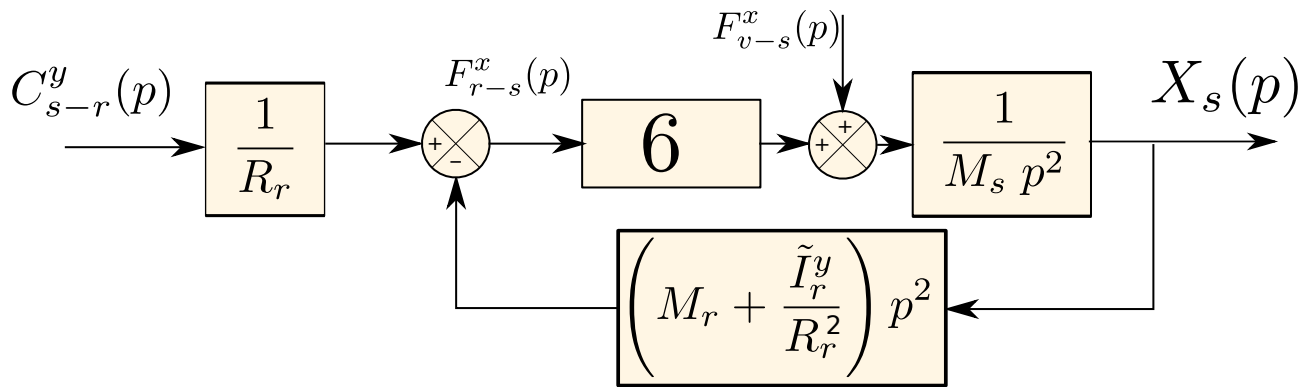
### 1 Corrigé : étude du robot d'exploration martienne

**Q 1 : Écrire la transformée de Laplace des équations de la Dynamique, notées 1 et 2 en considérant que les conditions initiales sont nulles.**

$$M_s p^2 X_s(p) = 6 F_{r-s}^x(p) + F_{v-s}^x(p)$$

$$\left( M_r + \frac{\tilde{I}_r^y}{R_r^2} \right) p^2 X_s(p) = -F_{r-s}^x(p) + \frac{C_{s-r}^y(p)}{R_r}$$

**Q 2 : A partir des équations précédentes dans le domaine de Laplace, remplir le schéma blocs du document réponse.**



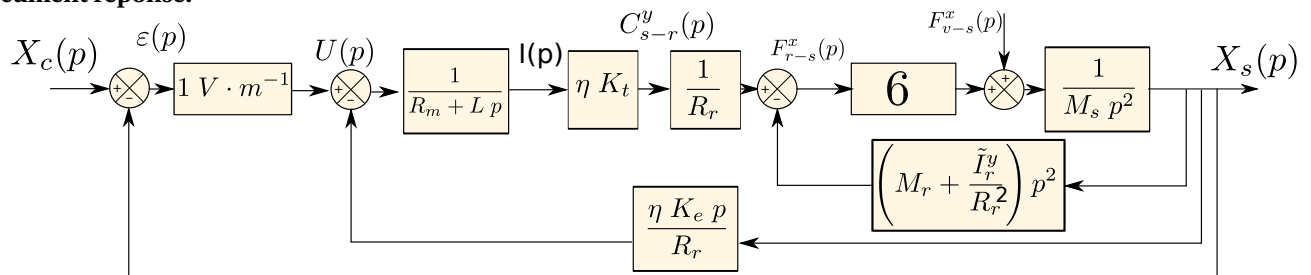
**Q 3 : Écrire la transformée de Laplace des équations régissant le Moteur à Courant Continu, notées 3, 4 et 5 en considérant que les conditions initiales sont nulles.**

$$U(p) = E(p) + R_m I(p) + L p I(p),$$

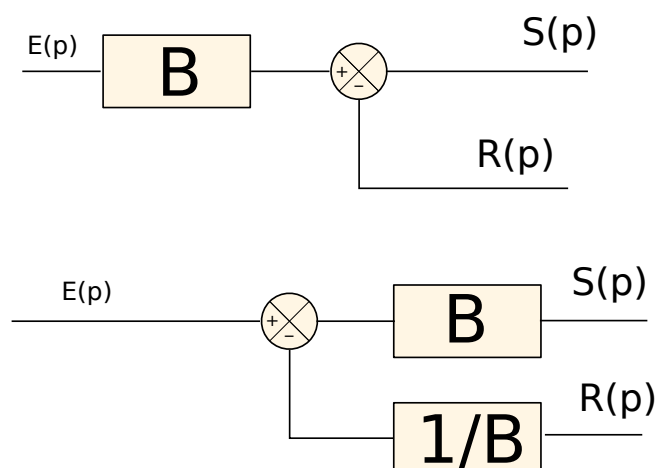
$$\frac{C_{s-r}^y(p)}{\eta} = K_t \cdot I(p),$$

$$E(p) = K_e \frac{\eta}{R_r} p X_s(p).$$

**Q 4 : A partir des équations précédentes dans le domaine de Laplace, remplir le schéma bloc de la figure du document réponse.**

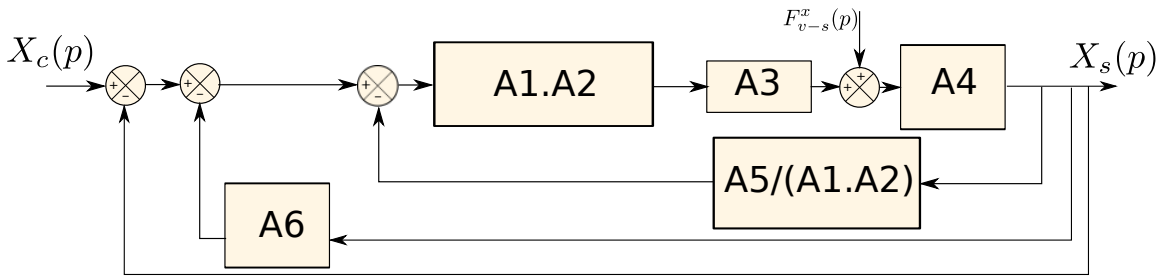


**Q 5 : Pour réduire ce schéma bloc nous allons le manipuler en passant des blocs de l'amont vers l'aval des points de prélèvement. On raisonne donc déjà dans le cas général grâce à la figure ci-dessous. Donner une relation l'expression du bloc manquant en fonction de B**

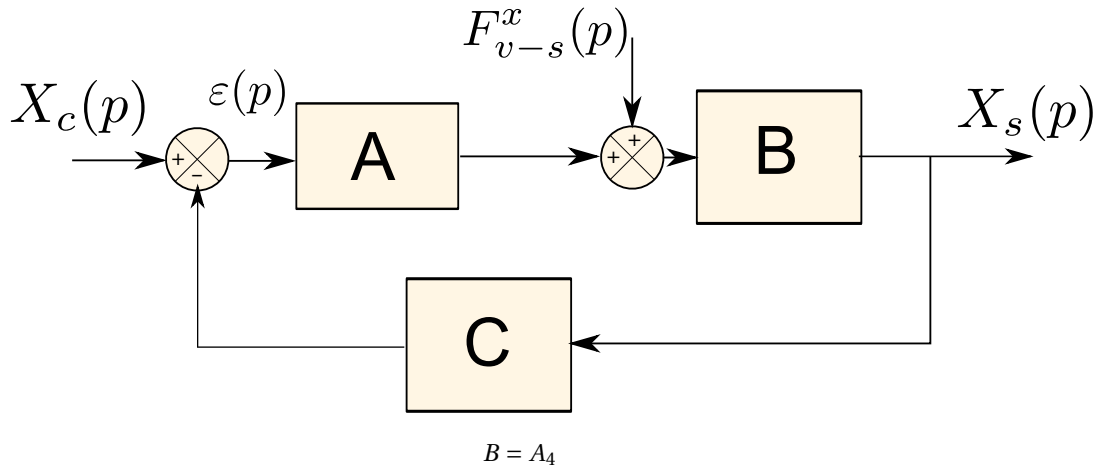


**Q 6 : Montrer alors que l'on peut mettre le schéma bloc sous la forme suivante avec 3 retours en parallèle. On pourra alors exprimer les fonctions de transfert manquantes à partir des fonctions  $A_i$ .**





**Q 7 :** Ce schéma bloc peut se réduire à un schéma de bloc de la forme de celui proposé ci dessous (On pourra regrouper les trois boucles retours parallèles en une seule). Exprimer alors A, B et C en fonctions des  $A_i$



$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$$

$$C = 1 + A_6 + \frac{A_5}{A_1 \cdot A_2}$$

**Q 8 :** A partir des résultats de l'étude préliminaire et de la partie précédente, donner l'expression des blocs A, B et C.

$$A = \frac{6 \cdot \eta K_t}{(L p + R_m) R_r}$$

$$B = \frac{1}{M_s p^2}$$

$$C = \frac{L p + R_m}{\eta K_t} \left[ M_r R_r + \frac{I_r^y}{R_r} \right] p^2 + \frac{\eta K_e p}{R_r} + 1.$$

**Q 9 :** Sous couvert de cette hypothèse d'inductance nulle, montrer que les fonctions de transfert A, B et C s'expriment :

$$A = \frac{6 \cdot \eta K_t}{R_m R_r}, B = \frac{1}{M_s p^2}$$

et

$$C = \frac{(\bar{I}_r^y R_m + M_r R_r^2 R_m) p^2 + \eta^2 K_t K_e p + \eta R_r K_t}{\eta R_r K_t}$$

**Q 10 :** A partir de la méthode de votre choix, exprimer  $G_1(p)$  et  $G_2(p)$  en fonction de A, B et C.

En utilisant la méthode de superposition, on obtient :

- $G_1(p)$  en prenant  $F_{v-p}^x(p) = 0$  et en appliquant la formule de Black :

$$G_1(p) = \frac{A A' B}{1 + A A' B C}$$

- $G_2(p)$  en prenant  $X_c(p) = 0$  et en appliquant la formule de Black :

$$G_2(p) = \frac{B}{1 + A A' B C}$$

**Q 11 : En remplaçant A, B et C par leur valeur (cf ci dessus), montrer que l'on peut écrire sous forme canonique :**

$$G_1(p) = \frac{\tilde{K}_1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

et

$$G_2(p) = \frac{\tilde{K}_2}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

En remplaçant, on obtient :

$$\begin{aligned} G_1(p) &= \frac{A A' B}{1 + A A' B C} = \frac{\frac{6 \eta K_t}{R_m R_r M_s p^2}}{1 + \frac{6 \eta K_t}{R_m R_r M_s p^2 \eta R_r K_t} \left[ (\tilde{I}_r^y R_m + M_r R_r^2 R_m) p^2 + \eta^2 K_t K_e p + \eta R_r K_t \right]} \\ &= \frac{6 \eta K_t R_r}{R_m R_r^2 M_s p^2 + 6 \left[ (\tilde{I}_r^y R_m + M_r R_r^2 R_m) p^2 + \eta^2 K_t K_e p + \eta R_r K_t \right]} \\ &= \frac{6 \eta K_t R_r}{6 \eta R_r K_t + 6 \eta^2 K_t K_e p + R_m \left[ 6 \tilde{I}_r^y + (6 M_r + M_s) R_r^2 \right] p^2} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\eta K_e p}{R_r} + \frac{R_m \left[ 6 \tilde{I}_r^y + (6 M_r + M_s) R_r^2 \right] p^2}{6 \eta R_r K_t}} \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} G_2(p) &= \frac{B}{1 + A A' B C} = \frac{\frac{1}{M_s p^2}}{1 + \frac{6 \eta K_t}{R_m R_r M_s p^2 \eta R_r K_t} \left[ (\tilde{I}_r^y R_m + M_r R_r^2 R_m) p^2 + \eta^2 K_t K_e p + \eta R_r K_t \right]} \\ &= \frac{R_m R_r^2}{R_m R_r^2 M_s p^2 + 6 \left[ (\tilde{I}_r^y R_m + M_r R_r^2 R_m) p^2 + \eta^2 K_t K_e p + \eta R_r K_t \right]} \\ &= \frac{R_m R_r^2}{6 \eta R_r K_t + 6 \eta^2 K_t K_e p + R_m \left[ 6 \tilde{I}_r^y + (6 M_r + M_s) R_r^2 \right] p^2} \\ &= \frac{\frac{R_m R_r}{6 \eta K_t}}{1 + \frac{\eta K_e p}{R_r} + \frac{R_m \left[ 6 \tilde{I}_r^y + (6 M_r + M_s) R_r^2 \right] p^2}{6 \eta R_r K_t}} \end{aligned}$$

On reconnaît donc bien deux fonction transfert du second ordre.

**Q 12 : Donner l'expression des constantes caractéristiques :  $\tilde{K}_1$ ,  $\tilde{K}_2$ ,  $\xi$  et  $\omega_0$**

Par identification, on obtient :

$$\tilde{K}_1 = 1;$$

$$\tilde{K}_2 = \frac{R_m R_r}{6 \eta K_t};$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{6 \eta R_r K_t}{R_m [6 \tilde{I}_r^y + (6 M_r + M_s) R_r^2]}};$$

et

$$\xi = \frac{\omega_0 \eta K_e}{2 R_r} = \frac{\eta K_e}{2 R_r} \sqrt{\frac{6 \eta R_r K_t}{R_m [6 \tilde{I}_r^y + (6 M_r + M_s) R_r^2]}}.$$

**Q 13 : Définir l'expression de  $X_c(p)$**

$$X_c(p) = \frac{X_{c0}}{p}$$

**Q 14 : Définir l'erreur statique absolue, notée  $\varepsilon_{Sa}$ , de ce système. En précisant le théorème utilisé, calculer cette erreur statique absolue. Le système est-il précis vis-à-vis de sa consigne d'entrée?**

$$\begin{aligned} \varepsilon_{Sa} = \varepsilon_0 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (e(t) - s(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} p (E(p) - S(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} p (E(p) - FTBF(p) E(p)) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} p \left( 1 - \frac{\tilde{K}_1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \right) \frac{X_{c0}}{p} = 0 \end{aligned}$$

**Q 15 : Montrer que la fonction de transfert précédente peut être mise sous la forme :**

$$G_1(p) = \frac{1}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

$\xi > 1$  donc le polynôme du numérateur admet deux racines réelles :

$$p_1 = \frac{-27,7 + \sqrt{27,7^2 - 4 \cdot 0,36}}{2 \cdot 0,36}$$

$$p_2 = \frac{-27,7 - \sqrt{27,7^2 - 4 \cdot 0,36}}{2 \cdot 0,36}$$

**Q 16 : Donner la valeur numérique des deux constantes :  $\tau_1, \tau_2$ . Montrer que l'une est négligeable devant l'autre.**  
On obtient :

$$\tau_1 = -\frac{1}{p_1} = \frac{-2 \cdot 0,36}{-27,7 + \sqrt{27,7^2 - 4 \cdot 0,36}} = 27,69 \text{ s}$$

$$\tau_2 = -\frac{1}{p_2} = \frac{-2 \cdot 0,36}{-27,7 - \sqrt{27,7^2 - 4 \cdot 0,36}} = 1,3 \times 10^{-2} \text{ s}$$

**Q 17 : A partir de la réponse expérimentale, et en le justifiant, identifier l'ordre de la fonction de transfert du modèle de comportement. Sur le graphe du document réponse, effectuer les tracés nécessaires pour identifier les paramètres caractéristiques de ce système.**

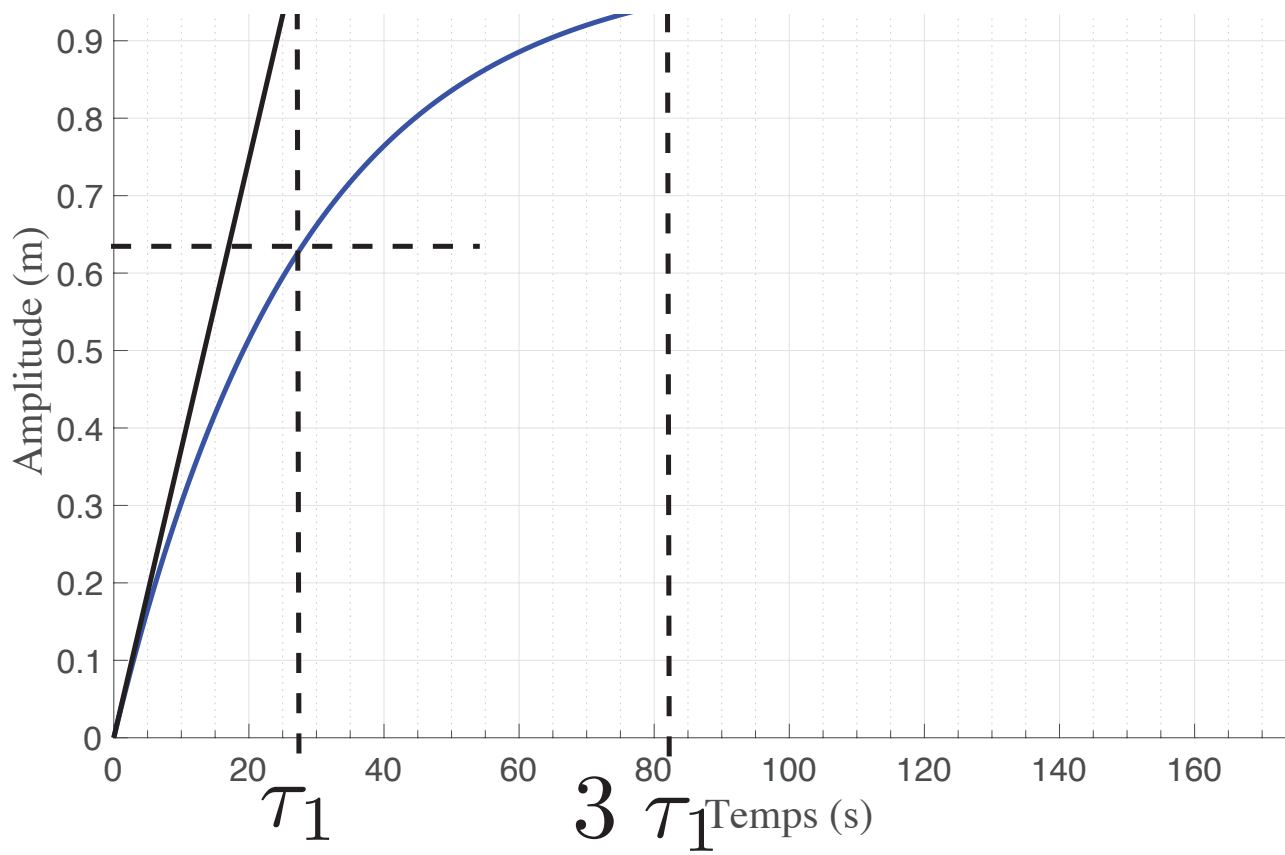
Sur le relevé expérimental on obtient la réponse d'un premier ordre. En effet  $\tau_2$  est négligeable devant  $\tau_1$  donc la fonction transfert peut se mettre sous la forme :

$$G_1(p) \simeq \frac{\tilde{K}_1}{1 + \tau_1 p}$$

On peut alors identifier  $\tau_1$  en utilisant :

- la tangente à l'origine de pente  $1/\tau_1$ ,

- le temps de réponse à 5% qui correspond à  $3 \tau_1$ ,
- le temps de montée à 63% correspondant à  $\tau_1$ .



**Q 18 : Vérifier que les critères de rapidité et de précision sont vérifiés**