VI Fonctions usuelles

19 novembre 2016

Dans tout ce chapitre, A désigne une partie de $\mathbb{R}$ et f une application de A dans $\mathbb{R}$.

1 Vocabulaire usuel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

On considère une application $f : A \to \mathbb{R}$, dont on veut étudier les propriétés. Notamment, on peut vouloir représenter le graphe de cette fonction : c'est $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in A \text{ et } y = f(x)\}$ (que l'on représente, lorsque c'est possible, par une « courbe »).

1.1 Transformations usuelles d'une fonction.

Proposition 1.1.1.
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, on considère des graphes tracés dans le repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

— Le graphe de la fonction $x \mapsto f(x) + a$ s'obtient en translatant le graphe de f du vecteur $a\overrightarrow{\jmath}$ (voir la figure 1).

— Le graphe de la fonction $x \mapsto f(x + a)$ s'obtient en translatant le graphe de f du vecteur $-a\overrightarrow{\imath}$ (voir la figure 2).

— Le graphe de la fonction $x \mapsto f(ax)$ s'obtient en dilatant le graphe de f suivant le vecteur $\overrightarrow{\imath}$ et par le rapport $\dfrac{1}{a}$ (voir la figure 3).

— Le graphe de la fonction $x \mapsto af(x)$ s'obtient en dilatant le graphe de f suivant le vecteur $\overrightarrow{\jmath}$ et par le rapport a (voir la figure 4).

— Le graphe de la fonction $x \mapsto f(-x)$ s'obtient en prenant le symétrique du graphe de f par rapport à l'axe $O\overrightarrow{\jmath}$ (voir la figure 5).

— Le graphe de la fonction $x \mapsto -f(x)$ s'obtient en prenant le symétrique du graphe de f par rapport à l'axe $O\overrightarrow{\imath}$ (voir la figure 6).

— Le graphe de la fonction $x \mapsto -f(-x)$ s'obtient en prenant le symétrique du graphe de f par rapport au point O (voir la figure 7).

Démonstration.
On montre le premier cas, les autres sont similaires. Notons Γ le graphe de f, Γ' celui de $x \mapsto f(x)+a$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $(x, y) \in \Gamma' \Leftrightarrow (x, y-a) \in \Gamma$, ce qui est bien le résultat demandé. □

Remarque 1.1.2.
Le graphe de la fonction $x \mapsto f(a - x)$ s'obtient donc

— soit en translatant le graphe de f du vecteur $-a\overrightarrow{\imath}$ puis en prenant le symétrique par rapport à $O\overrightarrow{\jmath}$;

— soit en prenant le symétrique du graphe de f par rapport à $O\overrightarrow{\jmath}$ puis en le transtlatant par le vecteur $a\overrightarrow{\imath}$.

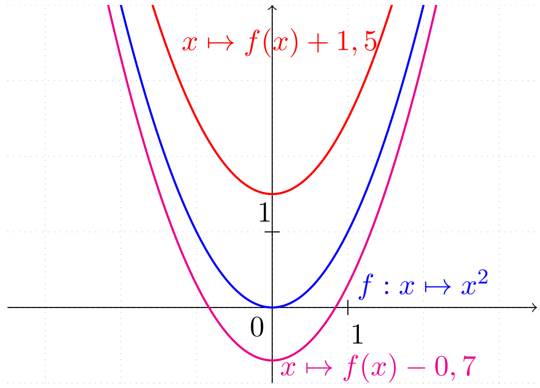


FIGURE 1 – Translation verticale du graphe.

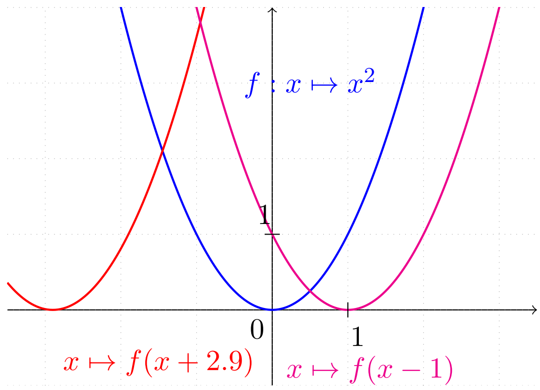


FIGURE 2 – Translation horizontale du graphe.

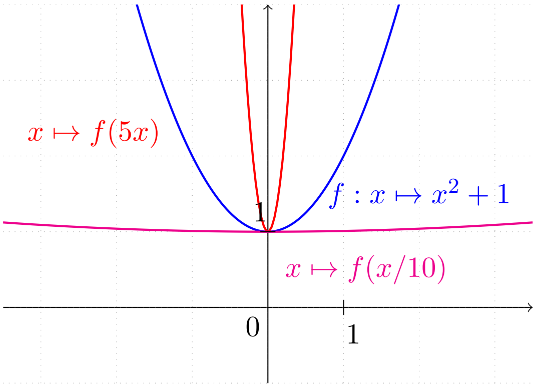


FIGURE 3 – Dilatation horizontale du graphe.

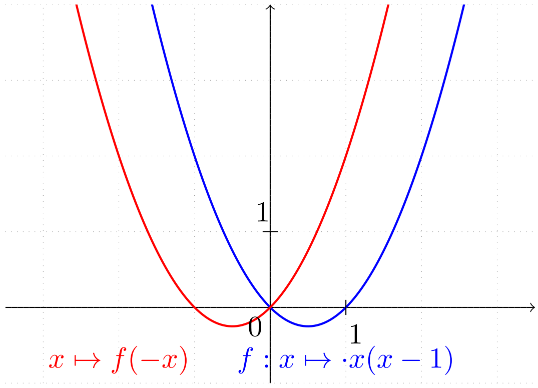


FIGURE 5 – Symétrie du graphe par rapport à l'axe vertical.

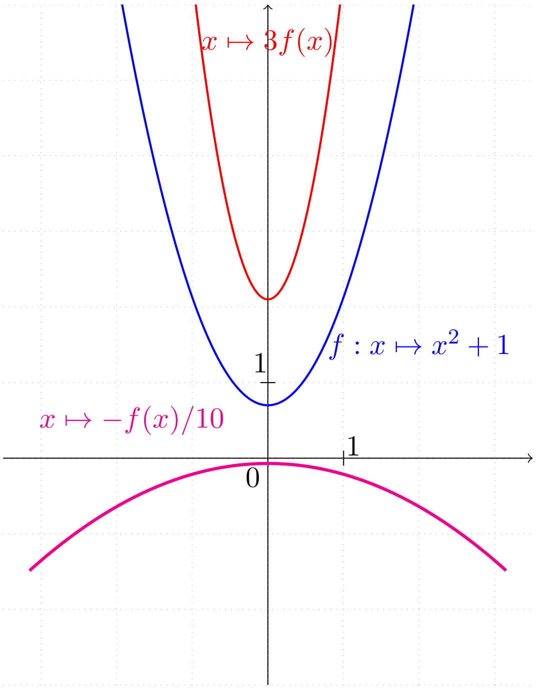


FIGURE 4 – Dilatation verticale du graphe.

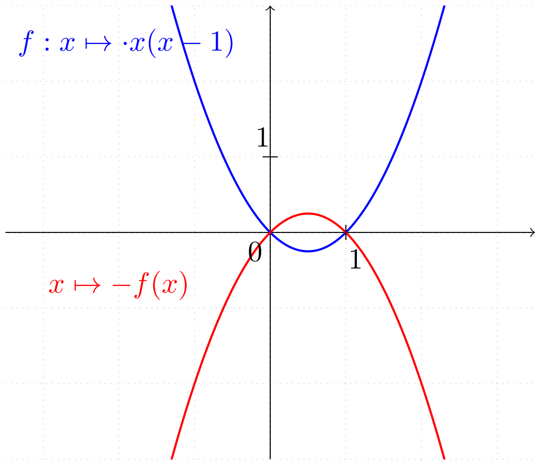


FIGURE 6 – Symétrie du graphe par rapport à l'axe horizontal.

1.2 Fonctions paires, impaires et périodiques.

Nous nous intéressons maintenant aux classes de fonctions invariantes par certaines transformations introduites plus haut.

Définition 1.2.1. (i) On dit que f est *paire* si $\forall x \in A$, $-x \in A$ et $f(-x) = f(x)$.

(ii) On dit que f est *impaire* si $\forall x \in A$, $-x \in A$ et $f(-x) = -f(x)$.

• Dessin : les graphes des fonctions paires sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, ceux des fonctions impaires sont symétriques par rapport à l'origine.
• Réduction du domaine étude : il suffit d'étudier une fonction paire ou impaire sur $\mathbb{R}_+^* \cap A$

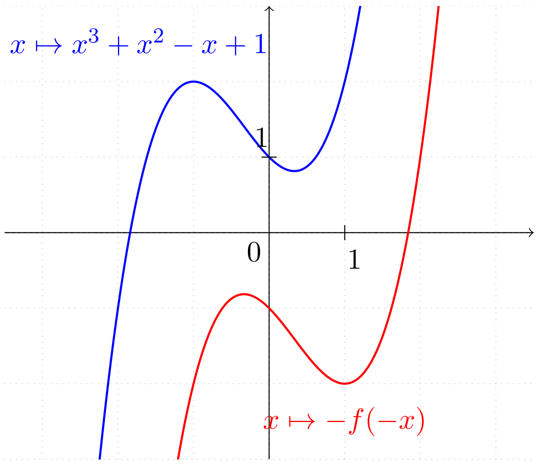


FIGURE 7 – Symétrie du graphe par rapport à l'axe horizontal.

pour obtenir toutes les informations nécessaires sur cette fonction.

Une fonction n'est pas toujours paire ou impaire. Le contraire de paire n'est pas impaire.

Exemple 1.2.2.
Sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ est paire, $x \mapsto x^3$ est impaire et $x \mapsto x^2 + x$ n'est ni paire ni impaire.

Proposition 1.2.3.
Soit E, F, G trois parties de $\mathbb{R}$, $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. Si f est paire, $g \circ f$ est paire.
2. Si f est impaire et g est paire, $g \circ f$ est paire.
3. Si f et g sont impaires, $g \circ f$ est impaire.

Démonstration.
Élémentaire. □

Définition 1.2.4.
Supposons que A est centré ($\forall x \in A, -x \in A$). Alors il existe deux uniques fonctions $g : A \to \mathbb{R}$ et $h : A \to \mathbb{R}$ vérifiant :

— g est paire ;
— h est impaire ;
— $f = g + h$.

On dit que g est la *partie paire* de f et h sa *partie impaire*.

Démonstration.
On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : On suppose que l'on a g et h qui conviennent et l'on essaie d'obtenir des informations dessus. *Indice : si $x \in A$, calculer $f(x) + f(-x)$.*
On a en fait montré l'unicité de g et de h.

Synthèse : On vérifie que les fonctions trouvées dans la phase d'analyse conviennent.
On a alors montré l'existence de g et de h.

□

Exemple 1.2.5.
Les fonctions cosinus et sinus hyperboliques, que nous introduirons bientôt, sont les parties paires et impaires de la fonction exponentielle.

Définition 1.2.6.
Soit $T > 0$. On dit que f est T-périodique si pour tout $x \in A$, $x + T \in A$ et $f(x + T) = f(x)$. Dans ce cas T est appelé ***UNE*** période de f.

• Dessin : on observe un « motif » de longueur T se répétant.
• Réduction du domaine d'étude : si f est T-périodique, il suffit d'étudier f sur tout intervalle de longueur T inclus dans A.

Il n'y a jamais unicité de la période !

Exemple 1.2.7.
Les fonctions constantes, cos, sin, tan, $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont périodiques.

Exercice 1.2.8.
Déterminer l'allure de la fonction f paire, 4-périodique et telle que $f|_{[0,2]} = \mathrm{Id}$.

1.3 Fonctions monotones

Définition 1.3.1. (i) On dit que f est *croissante* (resp. *strictement croissante*) si :

$$\forall(x,y)\in A^2,\ x\geqslant y\Rightarrow f(x)\geqslant f(y).$$

$$(\text{resp. } \forall(x,y)\in A^2,\ x>y\Rightarrow f(x)>f(y).$$

(ii) On dit que f est *décroissante* (resp. *strictement décroissante*) si :

$$\forall(x,y)\in A^2,\ x\geqslant y\Rightarrow f(x)\leqslant f(y).$$

$$(\text{resp. } \forall(x,y)\in A^2,\ x>y\Rightarrow f(x)<f(y).$$

(iii) On dit que f est *monotone* (resp. *strictement monotone*) si elle croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictemement décroissante).

Une fonction n'est pas toujours croissante ou décroissante. Le contraire de croissant n'est pas décroissant : l'écrire avec des quantificateurs.

Exercice 1.3.2.
Donner un exemple de fonction croissante et décroissante, puis de fonction ni croissante, ni décroissante.

Théorème 1.3.3.
Si f est strictement monotone, alors f est injective.

Démonstration.
Cas strictement croissant (le cas strictement décroissant se traite de la même manière). Soient $x,x'\in A$ tq $f(x)=f(x')$. On ne peut pas avoir $x<x'$ car sinon on aurait $f(x)<f(x')$, ni $x>x'$ car sinon $f(x)>f(x')$. Ainsi $x=x'$. □

Exemple 1.3.4.
cos sur $[\pi,3\pi/2]$ est strictement croissante.

Proposition 1.3.5.
Soit E,F,G trois parties de $\mathbb{R}$, $f:E\to F$ et $g:F\to G$ monotones.

1. Si f et g sont de même monotonie, $g\circ f$ est croissante.
2. Si f et g sont de monotonies opposées, $g\circ f$ est décroissante.

Démonstration.
Élémentaire, sera vu en TD. □

2 Théorèmes d'analyse admis

Ces résultats seront démontrés plus tard. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I\to\mathbb{R}$. On utilise ici les notions de continuité, de dérivabilité et de primitives comme vues en terminale : nous les définirons proprement plus tard.

Théorème 2.0.1.
Soit $f : I\to\mathbb{R}$ dérivable.

1. f est croissante (resp. décroissante) si et seulement si $f'\geqslant 0$ (resp. $f'\leqslant 0$).
2. La fonction f est constante si et seulement si $\forall x\in I,\ f'(x)=0$.

Remarque 2.0.2. — On déduit de ce théorème que deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

— Il est essentiel que I soit un intervalle pour que l'implication de la droite vers la gauche soit vraie (en revanche pour l'autre implication ce n'est pas nécessaire).

— On a aussi que si f' est strictement positive (resp. négative), alors f est strictement croissante (resp. décroissante). Attention, la réciproque est fausse !

Exercice 2.0.3. 1. Trouver une application f non croissante dérivable sur son ensemble de définition, de dérivée positive.

2. Trouver une application g non constante dérivable sur son ensemble de définition, de dérivée nulle.

3. Trouver une application h dérivable non décroissante sur son ensemble de définition, de dérivée négative.

Théorème 2.0.4.
Soient $a < b$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue strictement monotone. Alors f est bijective de $[a, b]$ sur l'intervalle $f([a, b])$. Et :

(i) Si f croissante : $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$;

(ii) Si f décroissante : $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$;

(iii) on a des résultats analogues avec un intervalle semi-ouvert, même si a ou $b = \pm\infty$, mais ces résultats font intervenir des limites.

On résume cette information dans un tableau de variation, en indiquant par une flèche continue les intervalles sur lesquels la fonction est continue et strictement croissante.

Exercice 2.0.5.
Déterminer l'intervalle de définition de $x \mapsto \dfrac{(x+1)^2}{\mathrm{e}^x - 1}$ puis tracer son tableau de variations.

Exercice 2.0.6.
Chercher un contre-exemple au Théorème 2.0.4 pour chaque hypothèse que l'on enlève.

Proposition 2.0.7.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables, avec $f(I) \subset J$.
Alors, $g \circ f$ est dérivable et

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f).$$

Remarque 2.0.8.
Cela généralise les formules de dérivations de e^u, $\ln(u)$, $\sqrt{u}$ (*etc.*) vues au lycée.

Remarque 2.0.9.
On rappelle que le graphe de la réciproque d'une fonction bijective est le symétrique du graphe de cette fonction par rapport à la première bissectrice du plan.

Théorème 2.0.10.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ bijective.

(i) Si f est strictement monotone, alors f^{-1} l'est aussi et est de même monotonie que f.

(ii) Si f est continue, alors f^{-1} aussi.

(iii) Si f dérivable et si f' ne s'annule pas, alors f^{-1} est aussi dérivable et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

• Que se passe-t'il quand f' s'annule pour la tangente de f^{-1} ?

Exemple 2.0.11.
Retrouver ainsi la dérivée de $\sqrt{\cdot}$.

Remarque 2.0.12.
On peut facilement retrouver cette formule en dérivant $(f \circ f^{-1})$.

3 Fonction valeur absolue

Définition 3.0.1.
Soit $x \in \mathbb{R}$ On appelle *valeur absolue* de x le réel $|x| = \sqrt{x^2}$. Il vaut x si $x \geqslant 0$ et $-x$ sinon (voir la figure 8).

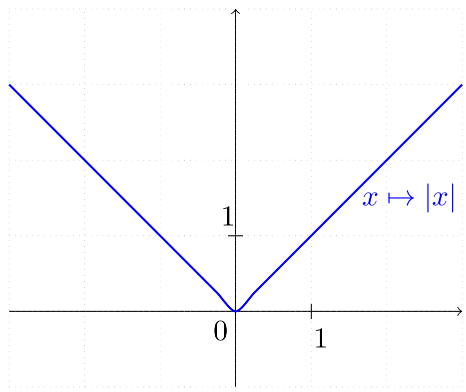


FIGURE 8 – Fonction valeur absolue.

Proposition 3.0.2.
C'est une fonction paire, continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$. Si $x > 0$, on a $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|x|) = 1$ et si $x < 0$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|x|) = -1$.

• Pour tout réel x, $|x|$ est positive, et est nulle ssi $x = 0$.
• $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x.y| = |x|.|y|$.
• La valeur absolue coïncide avec le module complexe. L'inégalité triangulaire est toujours vraie. Le cas d'égalité s'exprime alors simplement !
• Interprétation en terme de distance : $|x - y|$ est la distance entre x et y. On peut alors écrire, avec $(x, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2$, les intervalles $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] = \{y \in \mathbb{R} |\ |y - x| \leqslant \varepsilon\}$ et $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[= \{y \in \mathbb{R} |\ |y - x| < \varepsilon\}$.

4 Fonctions puissances entières, polynomiales et rationnelles

4.1 Fonctions puissances entières

Définition 4.1.1.
$x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. On appelle x *puissance* n le réel $x \times \ldots \times x$ (n fois), noté x^n.
Par convention $x^0 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, même 0.
Si n est strictement négatif, et si $x \neq 0$, on pose $x^n = \dfrac{1}{x^{-n}}$.

Remarque 4.1.2.
Cela peut se définir rigoureusement par récurrence.

Proposition 4.1.3. (i) $x^{m+n} = x^m x^n$, $x^{mn} = (x^m)^n$, $(xy)^n = x^n y^n$, $\dfrac{x^n}{y^n} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^n$.

(ii) $x \mapsto x^n$ a la même parité que n. elle est définie, continue, dérivable de dérivée $x \mapsto nx^{n-1}$.

• Allure des courbes dans tous les cas (n pair, impair, positif, négatif) : voir les figures 9 et 10.

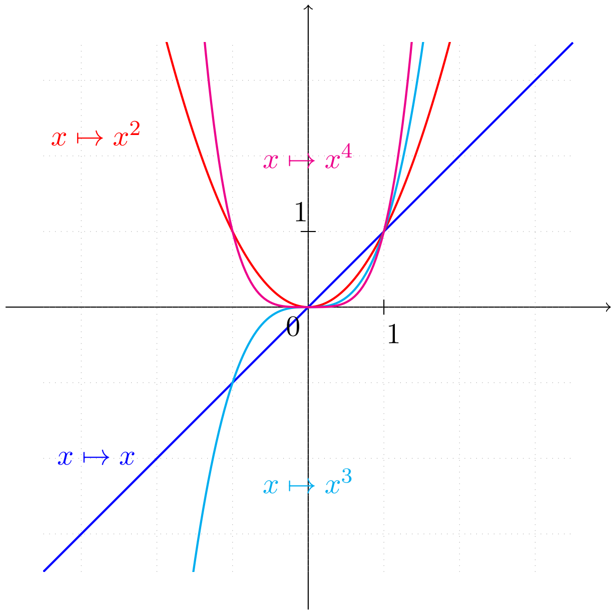


FIGURE 9 – Quelques fonctions puissance, exposants positifs.

• Comparaisons : pour $x \in]0, 1]$, $0 \leqslant x^4 \leqslant x^3 \leqslant x^2 \leqslant x \leqslant 1 \leqslant 1/x \leqslant 1/x^2 \ldots$ et l'inverse pour $x \in [1, +\infty[$.

4.2 Fonctions polynomiales et rationnelles

Définition 4.2.1.
On appelle fonction polynomiale toute fonction de la forme $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, où $n \in \mathbb{N}$ et les $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Dans ce cas, n est appelé le degré de f.

Proposition 4.2.2.
Toute fonction polynomiale est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et : $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n$.

Démonstration.
Mettre $a_n x^n$ en facteur. □

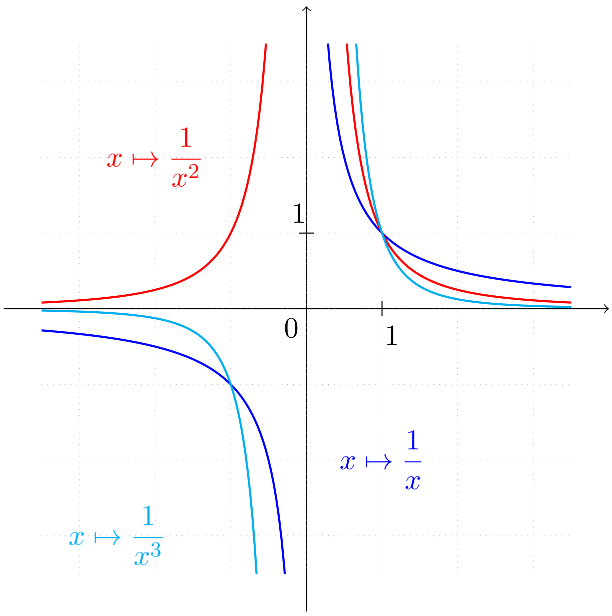


FIGURE 10 – Quelques fonctions puissance, exposants négatifs.

Définition 4.2.3.
On appelle *fonction rationnelle* toute fonction de la forme $f : x \mapsto \dfrac{g(x)}{h(x)}$ où g et h sont des fonctions polynomiales. Si $a_n x^n$ et $b_m x^m$ sont les termes dominants de g et h, on a : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$.

Remarque 4.2.4.
L'ensemble de définition d'une telle fonction est au moins inclus dans l'ensemble des réels sur lesquels h ne s'annule pas. Nous l'étudierons précisément dans le chapitre dédié aux fractions rationnelles. Sur cet ensemble, toute fraction rationnelle est continue et dérivable.

5 Fonctions exponentielles, logarithmes et puissances quelconques

5.1 Exponentielle et logarithme

Définition 5.1.1.
On appelle *logarithme népérien* la primitive, notée ln, de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ valant 0 en 1.

Proposition 5.1.2.
La fonction ln est continue, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement croissante (donc injective) et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Démonstration.
Les outils pour cela seront vus plus tard, mais il suffit de dire que c'est la primitive d'une fonction continue et positive. □

Définition 5.1.3.
On appelle fonction *exponentielle* notée exp la réciproque de ln. On a donc $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$.

Proposition 5.1.4.
La fonction exp est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$, et égale à sa dérivée.

Démonstration.
Utiliser les propriétés de la réciproque. □

- Graphes : voir la figure 11.

Proposition 5.1.5.
L'exponentielle est partout strictement positive, elle est trictement croissante et bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

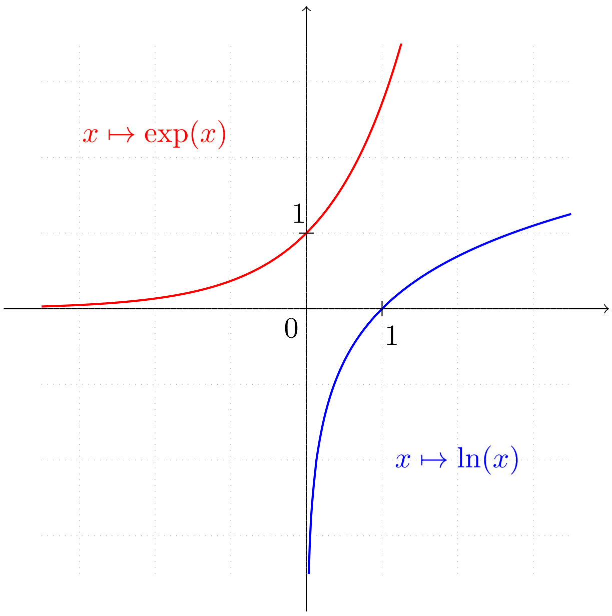


FIGURE 11 – Logarithme et exponentielle.

Démonstration.
Utiliser les propriétés de la réciproque. □

Proposition 5.1.6.
On a $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.

Démonstration.
Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$, étudions $f_y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(xy)$. C'est une fonction dérivable, comme composée de fonctions dérivables, et si $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_y'(x) = y\left(\dfrac{1}{xy}\right) = \dfrac{1}{x}$. Ainsi, f_y est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, donc diffère de ln d'une constante. Avec $x = 1$, on obtient cette constante : pour tout $x > 0$, on a bien $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

L'autre identité s'en déduit en observant que exp est la réciproque de ln. □

• En particulier, $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$, $\ln(1/x) = -\ln x$ et $\ln(x^n) = n \ln x$.
• $\mathrm{e} = \exp(1) \approx 2,718\ldots$

5.2 Exponentielle de base quelconque

Définition 5.2.1.
Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \in \mathbb{R}$. On appelle « x puissance a » (ou exponentielle de base x), noté x^a, le réel $x^a = \exp(a \ln x)$.

x^a n'est qu'une notation pour $\exp(a \ln x)$.

x^a n'est pas défini avec $x \leqslant 0$, avec cette définition.

Remarque 5.2.2.
• Si $a \in \mathbb{N}$, cette définition coïncide avec la définition donnée précédemment.
• On a alors pour tout $x > 0$, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$. La notation e^x est alors utilisée pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour désigner $\exp(x)$.

• Cas particuliers :

1. $a \in \mathbb{N}$: x^a défini sur $\mathbb{R}$.
2. $a \in \mathbb{Z}$: x^a défini sur $\mathbb{R}^*$.
3. $a \in \mathbb{R}^+$: prolongeable en 0 par continuité.
4. $a = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $p, q > 0$: définie sur $\mathbb{R}_+$, donc prolongeable en zéro, comme réciproque de la fonction x^q. Et même prolongeable sur $\mathbb{R}$ si q impair.

• Pour traiter un exercice avec des puissances quelconques, il faut quasiment toujours repasser par l'écriture exponentielle.

Proposition 5.2.3.
$\forall x, x' \in \mathbb{R}_+^*$ et $y, y' \in \mathbb{R}$, on a :

1. $(xx')^y = x^y . x'^y$.
2. $x^{y+y'} = x^y . x^{y'}$.
3. $x^{(yy')} = (x^y)^{y'}$.
4. $x^{-y} = \dfrac{1}{x^y} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^y$.

Démonstration.
Revenir à la définition via l'exponentielle. □

• On peut dériver x^a en utilisant directement sa définition. On remarquera notamment que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^a) \neq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}(x^a).$$

⚠ On n'utilisera jamais le symbole $'$ pour dériver une expression, mais plutôt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\heartsuit}$, où $\heartsuit$ est la variable par rapport à laquelle on dérive l'expression (les autres étant fixées).

Exemple 5.2.4.
Que veut dire $(x^y)'$?

Proposition 5.2.5.
Soit $a \in \mathbb{R}$. On note $f_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto x^a$.

1. f_a est continue, et dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_a'(x) = ax^{a-1}$.
2. Si $a \neq 0$, f_a est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa réciproque est $f_{1/a}$.
3. Si $a < a'$, $\forall x > 1$, $x^a < x^{a'}$, si $x \in]0,1[$, $x^a > x^{a'}$

Démonstration.
1. Il suffit de dériver dans la définition.
2. Il suffit de vérifier que $(x^a)^{1/a} = (x^{1/a})^a = x$.
3. Étude des limites, suivant le signe de a.

□

• Graphes : voir la figure 12.

Définition 5.2.6 (Logarithme de base a)**.**
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction « puissance en base a », $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*, x \mapsto a^x$, est bijective. Sa réciproque est le logarithme de base a

$$\log_a : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}. \end{cases}$$

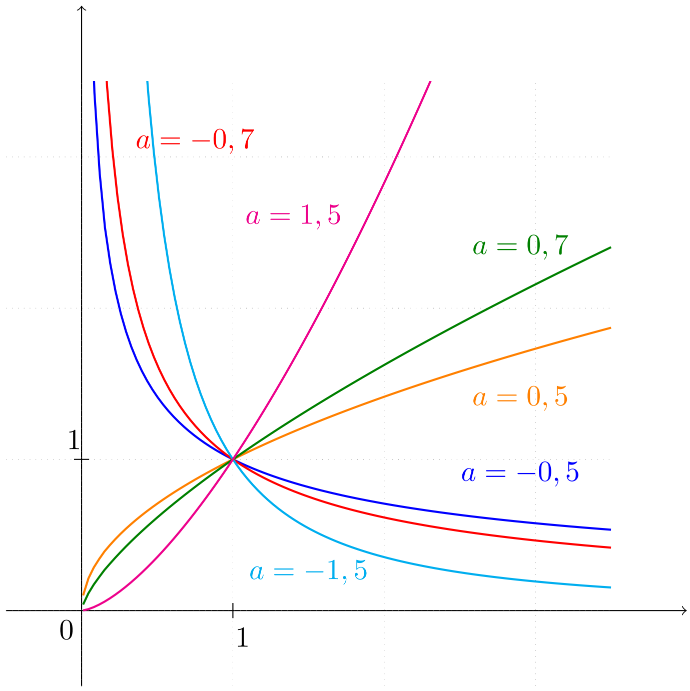
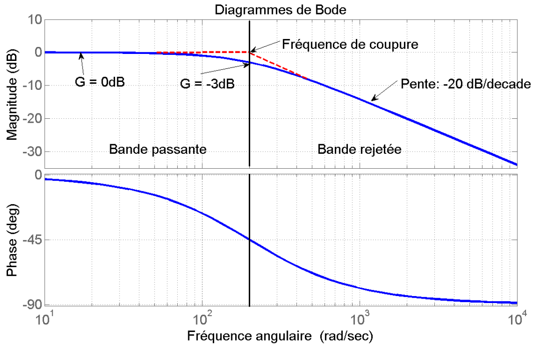


FIGURE 12 – Quelques fonctions de la forme $x \mapsto x^a$.

Remarque 5.2.7.
1. Cas particuliers utiles : $\log_{10}$ et $\log_2$. Ils donnent le nombre de chiffres dans l'écriture d'un entier en base 10 ou 2 : si $10^p \leqslant n < 10^{p+1}$, alors n s'écrit avec p chiffres en base 10 et $\lfloor \log_{10} n \rfloor = p$.
2. Propriétés fondamentales : $\log_{10}(10^x) = x$ et $10^{\log_{10} x} = x$.
3. Lien avec les diagrammes de Bode en SI pour représenter une fonction de transfert d'un système électrique (électronique ?). Échelle log/dB, où $dB = 20\log_{10}$ (autrement dit, 20dB d'augmentation signifie multiplication par 10 du signal) :



5.3 Croissances comparées

Exercice 5.3.1.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \exp(x) \geqslant 1+x+x^2/2$. En déduire la limite de $\exp(x)/x$ lorsque $x \to +\infty$.

Proposition 5.3.2.
Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :

1. l'exponentielle l'emporte sur les puissances : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{bx}}{x^a} = +\infty$.
2. les puissances l'emportent sur les logarithmes : $\lim\limits_{x\to 0} x^a.|\ln x|^b = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^a}{(\ln x)^b} = +\infty$.
3. l'exponentielle l'emporte sur les logarithmes (repasser par les deux premiers points).

Démonstration.
1. On utilise le résultat de l'exercice 5.3.1. Alors, $\dfrac{\mathrm{e}^{bx}}{x^a} = \left(\dfrac{\mathrm{e}^{bx/a}}{x}\right)^a = \left(\dfrac{b}{a}\right)^a \cdot \left(\dfrac{\mathrm{e}^{bx/a}}{bx/a}\right)^a$.
2. Par composition de limites, on a directement $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$ (et $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x = 0$).

   Ensuite, $\dfrac{x^a}{(\ln x)^b} = \left(\dfrac{x^{a/b}}{\ln x}\right)^b = \left(\dfrac{a}{b}\right)^b \left(\dfrac{x^{a/b}}{\ln\left(x^{a/b}\right)}\right)^b$.
   On obtient l'autre limite par composition.
3. Repasser par les deux premiers points.

□

6 Fonctions circulaires réciproques

6.1 Arccos et Arcsin

Définition 6.1.1.
La fonction cosinus est bijective de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Sa fonction réciproque est appelée arccosinus et noté Arccos. Elle est continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $]-1, 1[$ de dérivée $x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, décroissante. Son graphe est représenté sur la figure 13.

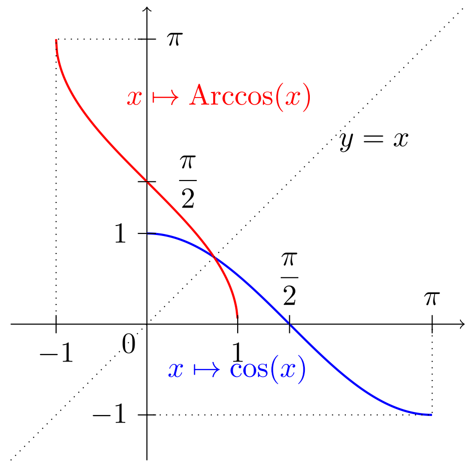


Figure 13 – Fonctions cos et Arccos.

Définition 6.1.2.
La fonction sinus est bijective de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$. Sa fonction réciproque est appelée arcsinus et noté Arcsin. Elle est continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $]-1, 1[$ de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, impaire et croissante. Son graphe est représenté sur la figure 14

Démonstration.
Donnons-la pour Arccos ; pour Arcsin on ne montre que l'imparité. □

Théorème 6.1.3.
$\forall x \in [-1, 1],\ \sin(\mathrm{Arccos}\, x) = \cos(\mathrm{Arcsin}\, x) = \sqrt{1-x^2}$.

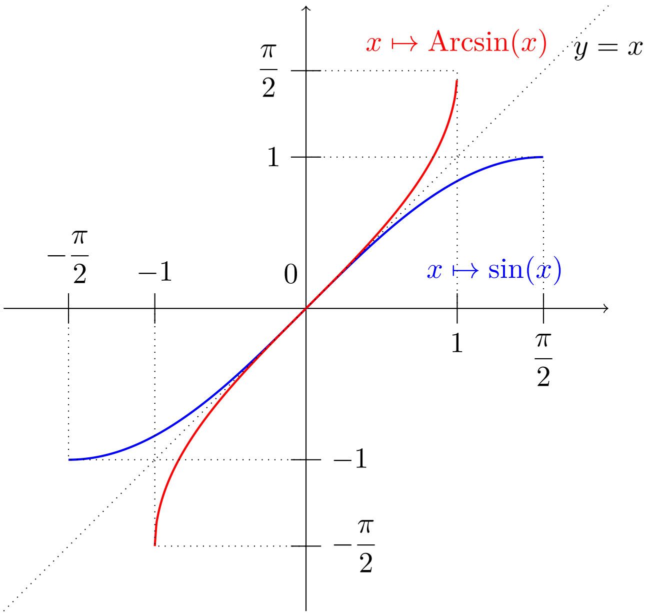


FIGURE 14 – Fonctions sin et Arcsin.

Démonstration.
$\cos \circ \mathrm{Arccos} = \mathrm{Id}_{[-1,1]}$, ($\mathrm{Arccos} \circ \cos \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, $=$ Id que sur $[0, \pi]$, exemple), donc $\sin^2(\mathrm{Arccos}\, x) = 1 - \cos^2(\mathrm{Arccos}\, x) = 1 - x^2$. Pour finir, on remarque que sur $[0, \pi]$, sin est positif, or $\mathrm{Im}(\mathrm{Arccos}) = [0, \pi]$. □

Exemple 6.1.4.
Très classique : résoudre $\mathrm{Arcsin}\, x = \mathrm{Arccos}\, \frac{4}{5}$, d'inconnue $x \in [-1, 1]$.
On a $\frac{4}{5} > 0$, donc $\mathrm{Arccos}\, \frac{4}{5} \in [0, \pi/2]$, donc on doit avoir $\mathrm{Arcsin}\, x \in [0, \pi/2]$, et donc $x \geqslant 0$.
Donc $\mathrm{Arcsin}\, x = \mathrm{Arccos}\, \frac{4}{5}$ ssi $\sin \mathrm{Arcsin}\, x = \sin \mathrm{Arccos}\, \frac{4}{5}$ (car $\mathrm{Arccos}\, \frac{4}{5} \in [-\pi/2, \pi/2]$) ssi $x = \sqrt{1 - (4/5)^2} = \frac{3}{5}$ (car $x \geqslant 0$).

Toujours faire attention aux signes des objets, et aux ensembles auxquels ils appartiennent.

Proposition 6.1.5.
Pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $\mathrm{Arcsin}\, x + \mathrm{Arccos}\, x = \pi/2$.

Démonstration.
Notons $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto \mathrm{Arcsin}\, x + \mathrm{Arccos}\, x$. Il suffit de montrer que f est constante sur $[-1, 1]$, de valeur $\pi/2$. Pour cela on peut vérifier les trois points suivants :

1. f est constante sur $]-1, 1[$. En effet, f est dérivable sur $]-1, 1[$ et d'après ce qui précède sa dérivée est nulle. Notons C sa valeur sur $]-1, 1[$.
2. f est constante sur $[-1, 1]$. En effet, on a $\forall x \in]-1, 1[\quad f(x) = C$, donc f admet une limite à droite en -1 et $\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = C$. Or f est continue en -1 car Arcsin et Arccos le sont. Donc $\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = f(-1)$. Donc $f(-1) = C$. De même $f(1) = C$. On a donc $\forall x \in [-1, 1] \quad f(x) = C$.
3. La valeur de f sur $[-1, 1]$ est $\pi/2$. En effet, en 0, f vaut $\mathrm{Arcsin}\, 0 + \mathrm{Arccos}\, 0$, qui est égal à $0 + \pi/2$.

□

6.2 Arctangente

Remarque 6.2.1.
• La dérivée de tan est $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$.
• On rappelle le graphe de tan sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ dans la figure 15.

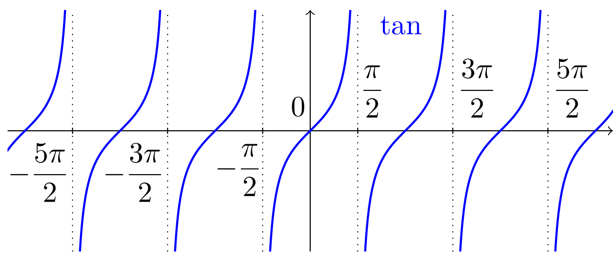


FIGURE 15 – Fonction tan.

Définition 6.2.2.
La fonction tangente est bijective de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque est appelée arctangente et noté Arctan (parfois atan). Elle est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto \frac{1}{1 + x^2}$,

impaire et strictement croissante. Son graphe est donné figure 16 (noter les asymptotes).

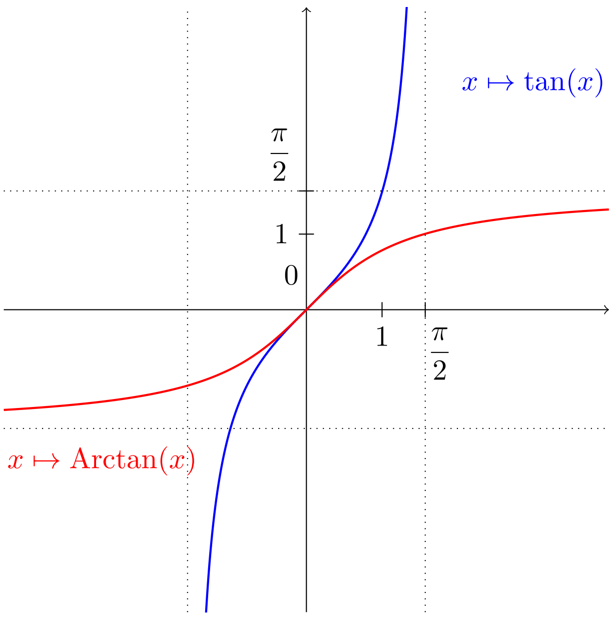


FIGURE 16 – Fonctions tan et Arctan.

Proposition 6.2.3.
À nouveau, remarquer que $\tan \circ \mathrm{Arctan} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, mais pas $\mathrm{Arctan} \circ \tan$: ce n'est l'identité que sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Exemple 6.2.4.
Résoudre l'équation $\mathrm{Arctan}(2x) + \mathrm{Arctan}(3x) = \frac{\pi}{4}$ (E).

Analyse Soit x une solution de l'équation. On a nécessairement

$$\tan(\mathrm{Arctan}(2x) + \mathrm{Arctan}(3x)) = \tan \pi/4$$

On en déduit successivement

$$\frac{\tan(\mathrm{Arctan}(2x)) + \tan(\mathrm{Arctan}(3x))}{1 - \tan(\mathrm{Arctan}(2x)).\tan(\mathrm{Arctan}(3x))} = 1$$

$$\frac{2x+3x}{1-2x.3x} = 1$$

$$5x = 1 - 6x^2$$

donc $x = -1$ ou $x = \frac{-1}{6}$.
Or $\mathrm{Arctan}(-2) + \mathrm{Arctan}(-3) < 0$, donc -1 ne peut pas être solution de (E). Donc il existe au plus une solution : $\frac{1}{6}$

Synthèse Posons $x = \frac{1}{6}$ et montrons que x est solution de (E).
Posons $v = \tan(\mathrm{Arctan}(2x) + \mathrm{Arctan}(3x))$. On a

$$\begin{aligned} v &= \frac{\tan(\mathrm{Arctan}(2x)) + \tan(\mathrm{Arctan}(3x))}{1 - \tan(\mathrm{Arctan}(2x)).\tan(\mathrm{Arctan}(3x))} \\ &= \frac{1/3 + 1/2}{1 - 1/3 \times 1/2} \\ &= \frac{5/6}{5/6} \end{aligned} = 1$$

On a donc

$$\tan(\mathrm{Arctan}(2x) + \mathrm{Arctan}(3x)) = \tan \pi/4 \quad (1)$$

De plus, $\mathrm{Arctan}(1/3) + \mathrm{Arctan}(1/2) \geqslant 0$. En outre, l'application Arctan étant strictement croissante, on a $\mathrm{Arctan}(1/3) < \mathrm{Arctan}(1/2) < \mathrm{Arctan}(1)$, or $\mathrm{Arctan}(1) = \pi/4$, donc on a $\mathrm{Arctan}(1/3) + \mathrm{Arctan}(1/2) < \pi/2$. Donc on a

$$\mathrm{Arctan}(2x) + \mathrm{Arctan}(3x) \in [0, \pi[\quad (2)$$

Or la restriction de tan à $[0, \pi[$ est injective donc d'après (1) et (2), on a $\mathrm{Arctan}(2x) + \mathrm{Arctan}(3x) = \frac{\pi}{4}$, $1/6$ est donc solution de (E).

Conclusion L'équation (E) admet une unique solution : $1/6$.

Exercice 6.2.5.
Étudier la fonction

$$f : x \mapsto \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right).$$

6.3 Coordonnées polaires

Soit (x, y) un couple de coordonnées cartésiennes d'un point M du plan. On veut un couple de coordonnées polaires de M. On cherche un tel couple sous la forme (r, θ) avec $r \geqslant 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$. On a $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. On doit avoir $x = r\cos\theta =$ et $y = r\sin\theta$, donc $\cos\theta = x/r$ et $\sin\theta = y/r$ (on écarte le cas $r = 0$, on dit par convention que toutes les $(0, \theta)$ conviennent).

On distingue deux cas :

Premier cas $y \geqslant 0$. donc M appartient au demi-plan supérieur, donc $\theta \in [0, \pi]$ et donc $\theta = \operatorname{Arccos}(x/r)$.

Second cas $y < 0$, alors $\theta \in]-\pi, 0[$, donc $-\theta \in]0, \pi[$, donc $-\theta = \operatorname{Arccos}(x/r)$, d'où $\theta = -\operatorname{Arccos}(x/r)$.

Remarque 6.3.1.
On aurait aussi pu utiliser Arcsin en distinguant les cas $x \geqslant 0$ ($\theta = \operatorname{Arcsin}(y/r)$) et $x < 0$ ($\theta = \pi - \operatorname{Arcsin}(y/r)$).

Exemple 6.3.2.
Un couple de coordonnées polaires de $(4, -3)$ est $\left(5, -\operatorname{Arccos}\frac{4}{5}\right)$.

7 Fonctions hyperboliques

7.1 ch, sh et th

Définition 7.1.1.
On appelle :

1. *Sinus hyperbolique* et on note sh l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$.
2. *Cosinus hyperbolique* et on note ch l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$.
3. *Tangente hyperbolique* et on note th l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{array}$.

Remarque 7.1.2.
Ces définitions sont les formules d'Euler pour cos, sin et tan, dans lesquelles on a retiré l'imaginaire i, d'où les noms de cosinus, sinus et tangente.

On retrouve aussi les parties paire (ch) et impaire (sh) de l'exponentielle.

Proposition 7.1.3.
1. La fonction ch est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est sh. ch est paire.
2. La fonction sh est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est ch. sh est impaire.
3. Graphes (cf. figure 17).
4. La fonction th est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2 = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2}$. th est impaire. Voir son graphe figure 18.
5. $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$.

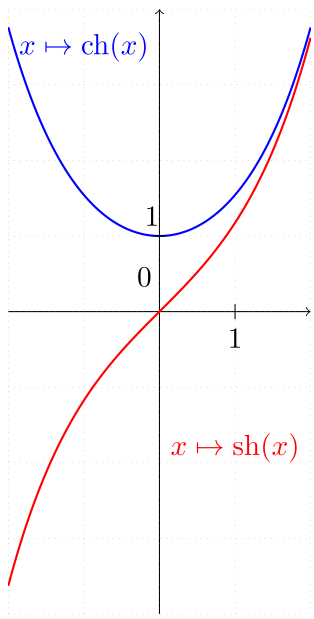


FIGURE 17 – Fonctions ch et sh.

Démonstration.
1. On calcule ch', et $\operatorname{ch}(-x)$.
2. Idem.
3. Tableau de variations. On rajoute : $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) = 0$, donc graphes asymptotiques l'un de l'autre.
4. On dérive th. Tableau de variations, étude des asymptotes.

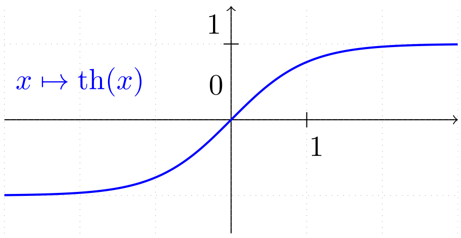


FIGURE 18 – Fonction th.

5. Simple calcul.

□

Remarque 7.1.4.
Pourquoi fonctions «hyperboliques» et «circulaires» ? Car $x^2 + y^2 = 1$ est l'équation du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$, donc $(x, y) \in \mathscr{C}$ ssi $\exists t \in \mathbb{R} \quad x = \cos t$ et $y = \sin t$.

De même, $x^2 - y^2 = 1$ est l'équation de l'hyperbole équilatère $\mathscr{H}$ d'asymptotes $x = \pm y$. Donc $(x, y) \in \mathscr{H}$ ssi $\exists t \in \mathbb{R} \quad x = \mathrm{ch}\, t$ et $y = \mathrm{sh}\, t$.

Remarque 7.1.5.
Toutes les formules trigo circulaires ont une analogue hyperbolique : ex : $\mathrm{ch}(a + b) = \mathrm{ch}\, a \,\mathrm{ch}\, b + \mathrm{sh}\, a \,\mathrm{sh}\, b$, $\mathrm{sh}(a + b) = \mathrm{sh}\, a \,\mathrm{ch}\, b + \mathrm{ch}\, a \,\mathrm{sh}\, b$.

7.2 Fonctions hyperboliques inverses

Elles sont hors-programme. :'(

Mais vous pouvez très bien les retrouver, ainsi que leurs propriétés, en tant qu'exercice ! :)