Devoir à la maison n° 8

À rendre le 3 décembre

Triplets pythagoriciens

Le but de ce problème est l'étude dans $\mathbb{Z}^3$ de l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2. \qquad (\mathscr{F})$$

Les solutions de cette équation sont appelées *triplets pythagoriciens.*

Un triplet pythagoricien *primitif* est un triplet $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}$, tel que :

- (x, y, z) est solution de $(\mathscr{F})$;
- y est pair ;
- il n'existe pas d'entier naturel autre que 1 divisant x, y et z (ce qui s'écrit $x \wedge y \wedge z = 1$).

On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des triplets pythagoriciens primitifs.

On note $\mathscr{S}'$ l'ensemble des triplets de la forme $(u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$ tels que :

- $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$;
- $u \wedge v = 1$;
- $2|(u + v + 1)$.

*Les questions des parties **1)** et **2)** sont très détaillées et doivent être bien comprises.*

1) **a)** Soit $x \in \mathbb{Z}$. Montrer que si x est pair alors $4|x^2$, et que si x est impair alors $4|x^2 - 1$.

b) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ une solution de $(\mathscr{F})$. En utilisant la question précédente, montrer que x et y ne peuvent pas être tous les deux impairs. Montrer que si $(x, y, z) \in \mathscr{S}$, x est impair.

2) On veut montrer que $\mathscr{S}' \subset \mathscr{S}$.

a) Soit $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $u \wedge v = 1$. Montrer que $u^2 \wedge v^2 = 1$.

b) Soit $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, soit n un entier naturel divisant $u^2 - v^2$ et $u^2 + v^2$. Montrer qu'alors n divise $2u^2$ et $2v^2$.

c) Soit $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $u \wedge v = 1$. Déduire de ce qui précède que les seuls entiers naturels qui peuvent diviser $u^2 - v^2$ et $u^2 + v^2$ sont 1 et 2.

d) Soit $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $2|(u + v + 1)$. Montrer que u et v ne peuvent pas être tous deux impairs ou tous deux pairs.

e) En déduire, en utilisant la question **1)a)**), que, si $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ vérifie $u \wedge v = 1$ et $2|(u + v + 1)$, $(u^2 - v^2) \wedge (u^2 + v^2) = 1$.

f) Montrer que $\mathscr{S}' \subset \mathscr{S}$.

3) On veut maintenant montrer l'inclusion inverse, *i.e.* $\mathscr{S} \subset \mathscr{S}'$. Soit $(x, y, z) \in \mathscr{S}$. On introduit $(x', y', z') = \left(\frac{z + x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z - x}{2}\right)$.

a) Montrer que x', y' et z' sont des entiers.

b) Vérifier que $y'^2 = x'z'$.

c) Montrer que $x' \wedge z' = 1$.

d) En déduire, en utilisant la question **3)b)**), que x' et z' sont en fait des carrés, c'est-à-dire des nombres de la forme q^2, avec $q \in \mathbb{Z}$ (on pourra utiliser la décomposition en facteurs premiers de y').

e) Montrer que $(x, y, z) \in \mathscr{S}'$.

4) Donner l'ensemble des triplets pythagoriciens.

5) Dans le plan, quel est l'ensemble des points du cercle unité (de rayon 1, de centre l'origine) à coordonnées *rationnelles* ?

— **FIN** —