Feuille d'exercice n° 03 : **Systèmes linéaires - corrigés**

Exercice 18

1) Remarquons que comme le système est homogène (c'est-à-dire les coefficients du second membre sont nuls) alors $(0,0,0)$ est une solution du système. Voyons s'il y en a d'autres. Nous faisons semblant de ne pas voir que la seconde ligne implique $x=y$ et que le système est en fait très simple à résoudre. Nous allons appliquer le pivot de Gauss en faisant les opérations suivantes sur les lignes $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ x & + & 4y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

On fait maintenant $L_3 \leftarrow 2L_3 + 3L_2$ pour obtenir :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & & & 7z & = & 0 \end{array}\right.$$

En partant de la dernière ligne on trouve $z=0$, puis en remontant $y=0$, puis $x=0$. Conclusion l'unique solution de ce système est $(0,0,0)$.

2) On applique le pivot de Gauss $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & - & 2y & - & 3z & = & -4 \\ & - & y & - & z & = & -2 \end{array}\right.$$

Puis $L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2$ pour obtenir un système équivalent qui est triangulaire donc facile à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & - & 2y & - & 3z & = & -4 \\ & & & & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3 \\ y & = & 2 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

On n'oublie pas de vérifier que c'est une solution du système initial.

3) On fait les opérations $L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1$ pour obtenir :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & b \\ x & + & 2y & + & z & = & c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ & & 5y & - & 7z & = & 3b+a \\ & & 7y & + & z & = & 3c-a \end{array}\right.$$

Puis on fait $L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2$, ce qui donne un système triangulaire :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ & & 5y & - & 7z & = & 3b+a \\ & & & & 54z & = & 5(3c-a)-7(3b+a) \end{array}\right.$$

En partant de la fin on en déduit : $z = \frac{1}{54}(-12a - 21b + 15c)$ puis en remontant cela donne

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{18}(8a+5b-c) \\ y & = & \frac{1}{18}(-2a+b+7c) \\ z & = & \frac{1}{18}(-4a-7b+5c) \end{array}\right.$$

Exercice 21

1) On commence par simplifier le système en effectuant les opérations suivantes sur les lignes : $L_1 \leftarrow L_1 - L_4$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_4$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_4$:

$$(S) \iff \begin{cases} \lambda x & & & - & \lambda t & = & a-d \\ & & \lambda y & & & - & \lambda t & = & b-d \\ & & & & \lambda z & - & \lambda t & = & c-d \\ x & + & y & + & z & + & (1+\lambda)t & = & d \end{cases}$$

2) Traitons le cas particulier $\lambda = 0$. Si $\lambda = 0$ alors le système n'a des solutions que si $a = b = c = d$. Les solutions sont alors les (x, y, z, t) qui vérifie $x + y + z + t = d$. (C'est un espace de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$.)

3) Si $\lambda \neq 0$ alors on peut faire l'opération suivante sur la dernière ligne : $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{\lambda}L_1 - \frac{1}{\lambda}L_2 - \frac{1}{\lambda}L_3$ pour obtenir :

$$(S) \iff \begin{cases} \lambda x & & & - & \lambda t & = & a-d \\ & \lambda y & & - & \lambda t & = & b-d \\ & & \lambda z & - & \lambda t & = & c-d \\ & & & & (\lambda+4)t & = & d - \frac{1}{\lambda}(a+b+c-3d) \end{cases}$$

4) Cas particulier $\lambda = -4$. La dernière ligne devient $0 = a + b + c + d$. Donc si $a + b + c + d \neq 0$ alors il n'y a pas de solutions.
Si $\lambda = -4$ et $a + b + c + d = 0$ alors existe une infinité de solutions :

$$\left\{ \left(t - \frac{a-d}{4}, t - \frac{b-d}{4}, t - \frac{c-d}{4}, t \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

5) Cas général : $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq -4$. On calcule d'abord $t = \frac{1}{\lambda+4}\left(d - \frac{1}{\lambda}(a+b+c-3d)\right)$ et en remplaçant par la valeur de t obtenue on en déduit les valeurs pour $x = t + \frac{1}{\lambda}(a-d)$, $y = t + \frac{1}{\lambda}(b-d)$, $z = t + \frac{1}{\lambda}(c-d)$. Il existe donc une solution unique :

$$\left(\frac{(\lambda+3)a-b-c-d}{\lambda(\lambda+4)}, \frac{(\lambda+3)b-a-c-d}{\lambda(\lambda+4)}, \frac{(\lambda+3)c-a-b-d}{\lambda(\lambda+4)}, \frac{(\lambda+3)d-a-b-c}{\lambda(\lambda+4)} \right).$$