C6 : Analyse temporelle des systèmes asservis
C6-1 : Analyse temporelle des systemes asservis du 1er ordre

Émilien DURIF

Lycée La Martinière Monplaisir Lyon
Classe de MPSI
8 Mars 2022

Plan

1. Définitions
   - Système du premier ordre
   - Exemple du cours
2. Caractérisations de la réponse d'un système du premier ordre
   - Réponse à un échelon
   - Réponse à une rampe

Plan

1. Définitions
   - Système du premier ordre
   - Exemple du cours
2. Caractérisations de la réponse d'un système du premier ordre
   - Réponse à un échelon
   - Réponse à une rampe

Système du premier ordre

Système du premier ordre

On appelle **système du premier ordre** tout système linéaire, continu et invariant régi par une équation différentielle du premier degré de la forme :

$$\boxed{\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K\ e(t).} \tag{1}$$

Remarque

Pour la suite du cours, on considérera que les **conditions initiales de s(t) sont toujours nulles** *:*

- pour une équation différentielle du premier ordre : $s(t=0)=0$;
- pour une équation différentielle du deuxième ordre : $s'(t=0)=0$

Système du premier ordre

Système du premier ordre

On appelle **système du premier ordre** tout système linéaire, continu et invariant régi par une équation différentielle du premier degré de la forme :

$$\boxed{\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K\ e(t).} \quad (1)$$

Remarque

Pour la suite du cours, on considérera que les **conditions initiales de s(t) sont toujours nulles** *:*

- pour une équation différentielle du premier ordre : $s(t = 0) = 0$;
- pour une équation différentielle du deuxième ordre : $s'(t = 0) = 0$

Système du premier ordre

Système du premier ordre

On appelle **système du premier ordre** tout système linéaire, continu et invariant régi par une équation différentielle du premier degré de la forme :

$$\boxed{\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K\ e(t).} \quad (1)$$

Remarque

Pour la suite du cours, on considérera que les **conditions initiales de s(t) sont toujours nulles** *:*

- pour une équation différentielle du premier ordre : $s(t=0)=0$;
- pour une équation différentielle du deuxième ordre : $s'(t=0)=0$

Système du premier ordre

Propriété

La fonction de transfert de ces systèmes peut s'écrire sous la **forme canonique suivante** :

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}} \quad (2)$$

où :

- τ : **constante de temps** (en s) ;
- K : **gain statique** (unité selon l'application).

Système du premier ordre

Propriété

La fonction de transfert de ces systèmes peut s'écrire sous la **forme canonique suivante** :

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{1+\tau p}} \qquad (2)$$

où :

- τ : **constante de temps** (en s) ;
- K : **gain statique** (unité selon l'application).

Système du premier ordre

Propriété

La fonction de transfert de ces systèmes peut s'écrire sous la **forme canonique suivante** :

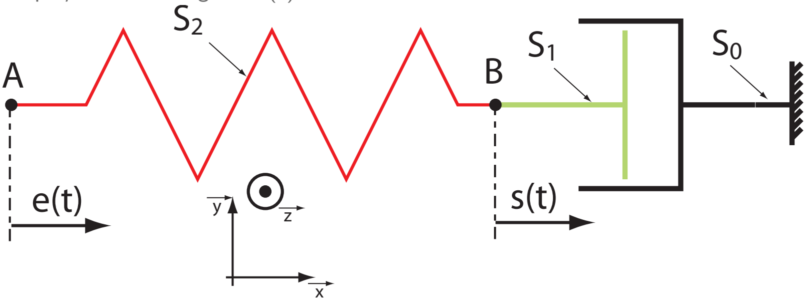
$$\boxed{H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}} \tag{2}$$

où :

- τ : **constante de temps** (en s) ;
- K : **gain statique** (unité selon l'application).

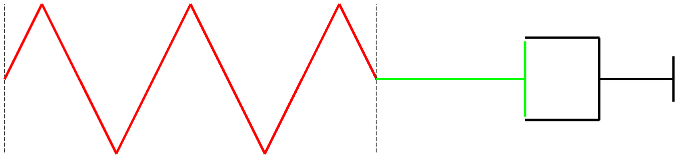
Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k **et amortisseur de coefficient** c
On déplace l'extrémité A d'une longueur $e(t)$. Le point B répond à ce déplacement en se déplaçant d'une longueur $s(t)$.



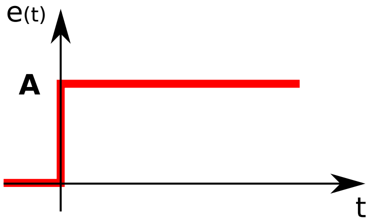
Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c
On déplace l'extrémité A d'une longueur $e(t)$. Le point B répond à ce déplacement en se déplaçant d'une longueur $s(t)$.



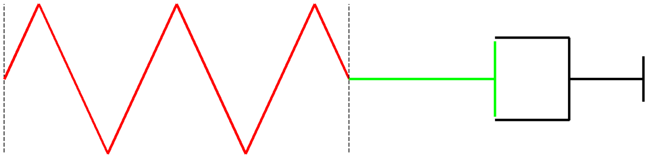
On impose un échelon sur le déplacement $e(t)$:

$$e(t=0)=0$$



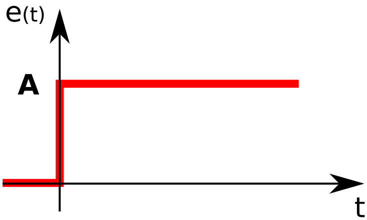
Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k **et amortisseur de coefficient** c
On déplace l'extrémité A d'une longueur $e(t)$. Le point B répond à ce déplacement en se déplaçant d'une longueur $s(t)$.



On impose un échelon sur le déplacement $e(t)$:

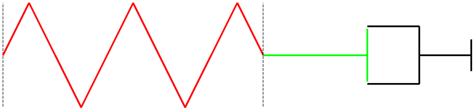
$$e(t = 0^{+}) = e0$$



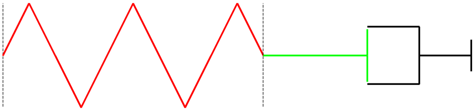
Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c
Question : Comment le système va répondre ?

Système oscillant

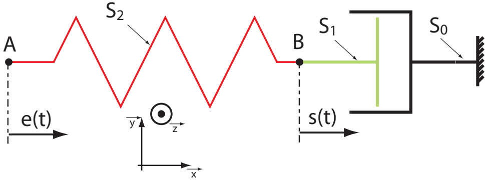


Système amorti



Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c



On déplace l'extrémité A d'une longueur $e(t)$. Le point B répond à ce déplacement en se déplaçant d'une longueur $s(t)$. En isolant le solide S_1 de masse (m), on obtient le bilan des actions mécaniques extérieurs suivant $\overrightarrow{x}$:

- Le ressort S_2 de raideur k exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant $\overrightarrow{x}$,

$$F_r = -k(s(t) - e(t)).$$

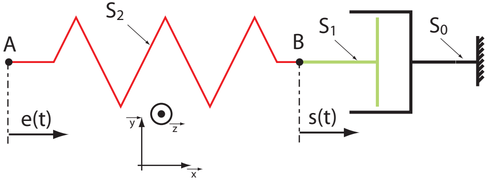
- L'amortisseur S_0 de coefficient de viscosité c exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant $\overrightarrow{x}$,

$$F_c = -c \cdot \frac{ds(t)}{dt}.$$

- On néglige le poids du solide S_1.

Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c



On déplace l'extrémité A d'une longueur $e(t)$. Le point B répond à ce déplacement en se déplaçant d'une longueur $s(t)$. En isolant le solide S_1 de masse (m), on obtient le bilan des actions mécaniques extérieurs suivant $\overrightarrow{x}$:

- Le ressort S_2 de raideur k exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant $\overrightarrow{x}$,

$$F_r = -k(s(t) - e(t)).$$

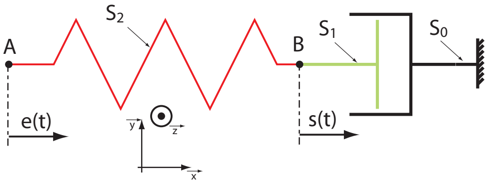
- L'amortisseur S_0 de coefficient de viscosité c exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant $\overrightarrow{x}$,

$$F_c = -c \cdot \frac{ds(t)}{dt}.$$

- On néglige le poids du solide S_1.

Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c

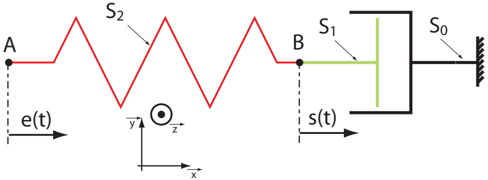


On déplace l'extrémité A d'une longueur $e(t)$. Le point B répond à ce déplacement en se déplaçant d'une longueur $s(t)$. En isolant le solide S_1 de masse (m), on obtient le bilan des actions mécaniques extérieurs suivant $\overrightarrow{x}$:

- Le ressort S_2 de raideur k exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant $\overrightarrow{x}$,
$$F_r = -k(s(t) - e(t)).$$
- L'amortisseur S_0 de coefficient de viscosité c exerce un effort de rappel donné par sa valeur algébrique suivant $\overrightarrow{x}$,
$$F_c = -c \cdot \frac{ds(t)}{dt}.$$
- On néglige le poids du solide S_1.

Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c



- En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique suivant la direction $\overrightarrow{x}$, on obtient :

$$F_r + Fc = m\frac{d^2s(t)}{dt^2}.$$

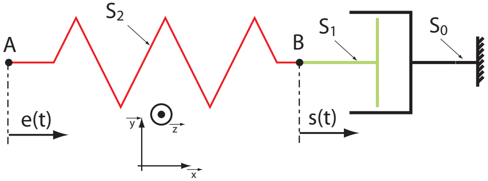
- En négligeant la masse m (ce qui revient à négliger l'inertie), on obtient alors,

$$\boxed{c\frac{ds(t)}{dt} + ks(t) = ke(t).} \tag{3}$$

- Cette équation différentielle de degré 1 caractérise **un système du premier ordre**.
- On considère que les conditions initiales sont nulles ($s(t=0)=0$).

Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c



- En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique suivant la direction $\overrightarrow{x}$, on obtient :

$$F_r + Fc = m\frac{d^2s(t)}{dt^2}.$$

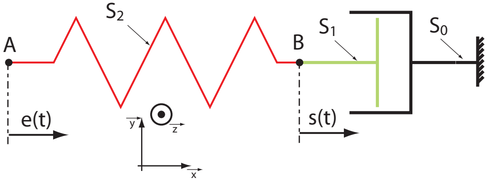
- En négligeant la masse m (ce qui revient à négliger l'inertie), on obtient alors,

$$\boxed{c\frac{ds(t)}{dt} + ks(t) = ke(t).} \tag{3}$$

- Cette équation différentielle de degré 1 caractérise **un système du premier ordre**.
- On considère que les conditions initiales sont nulles ($s(t=0)=0$).

Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c



- En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique suivant la direction $\overrightarrow{x}$, on obtient :

$$F_r + Fc = m\frac{d^2 s(t)}{dt^2}.$$

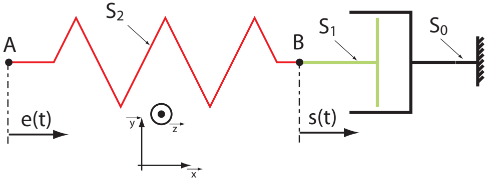
- En négligeant la masse m (ce qui revient à négliger l'inertie), on obtient alors,

$$\boxed{c\frac{ds(t)}{dt} + ks(t) = ke(t).} \qquad (3)$$

- Cette équation différentielle de degré 1 caractérise **un système du premier ordre**.
- On considère que les conditions initiales sont nulles ($s(t=0)=0$).

Système du premier ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur k et amortisseur de coefficient c



- En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique suivant la direction $\overrightarrow{x}$, on obtient :

$$F_r + Fc = m\frac{d^2s(t)}{dt^2}.$$

- En négligeant la masse m (ce qui revient à négliger l'inertie), on obtient alors,

$$\boxed{c\frac{ds(t)}{dt} + ks(t) = ke(t).} \qquad (3)$$

- Cette équation différentielle de degré 1 caractérise **un système du premier ordre**.
- On considère que les conditions initiales sont nulles ($s(t=0)=0$).

Système du premier ordre : exemple

Détermination dans le domaine de Laplace de la fonction de transfert associée

- Dans le domaine de Laplace on obtient :

$$c \cdot p \cdot S(p) + kS(p) = kE(p).$$

- On obtient alors,

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{k + c \cdot p};$$

- qui s'écrit sous la forme canonique :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + \frac{c}{k} \cdot p};$$

- On peut alors identifier la forme canonique avec les coefficients :
  - $\tau = \frac{c}{k}$
  - $K = 1$

Système du premier ordre : exemple

Détermination dans le domaine de Laplace de la fonction de transfert associée

- Dans le domaine de Laplace on obtient :

$$c \cdot p \cdot S(p) + kS(p) = kE(p).$$

- On obtient alors,

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{k + c \cdot p};$$

- qui s'écrit sous la forme canonique :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + \frac{c}{k} \cdot p};$$

- On peut alors identifier la forme canonique avec les coefficients :
  - $\tau = \frac{c}{k}$
  - $K = 1$

Système du premier ordre : exemple

Détermination dans le domaine de Laplace de la fonction de transfert associée

- Dans le domaine de Laplace on obtient :

$$c \cdot p \cdot S(p) + kS(p) = kE(p).$$

- On obtient alors,

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{k + c \cdot p};$$

- qui s'écrit sous la forme canonique :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + \frac{c}{k} \cdot p};$$

- On peut alors identifier la forme canonique avec les coefficients :
  - $\tau = \frac{c}{k}$
  - $K = 1$

Système du premier ordre : exemple

Détermination dans le domaine de Laplace de la fonction de transfert associée

- Dans le domaine de Laplace on obtient :

$$c \cdot p \cdot S(p) + kS(p) = kE(p).$$

- On obtient alors,

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{k + c \cdot p};$$

- qui s'écrit sous la forme canonique :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + \frac{c}{k} \cdot p};$$

- On peut alors identifier la forme canonique avec les coefficients :
  - $\tau = \frac{c}{k}$
  - $K = 1$

Système du premier ordre : exemple

Détermination dans le domaine de Laplace de la fonction de transfert associée

- Dans le domaine de Laplace on obtient :

$$c \cdot p \cdot S(p) + kS(p) = kE(p).$$

- On obtient alors,

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{k + c \cdot p};$$

- qui s'écrit sous la forme canonique :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + \frac{c}{k} \cdot p};$$

- On peut alors identifier la forme canonique avec les coefficients :
  - $\tau = \frac{c}{k}$
  - $K = 1$

Plan

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Réponse indicielle

$$e(t) = e_0 \cdot u(t).$$

Si $e_0 = 1$, la réponse $e(t)$ est appelée **réponse indicielle**.

Équation de la réponse

On cherche à calculer $s(t)$ à partir de $H(p)$ et $E(p)$:

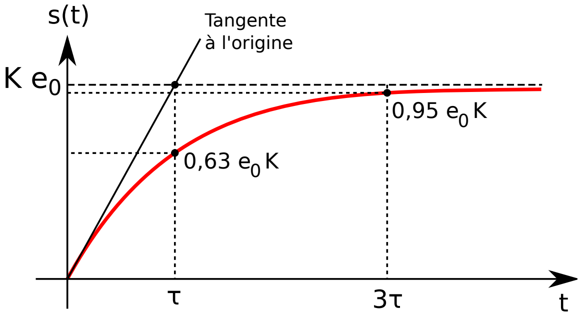
$$\begin{aligned} E(p) &= \frac{e_0}{p} \\ S(p) &= H(p) \cdot E(p) \\ &= \left(\frac{K}{1+\tau p}\right) \frac{e_0}{p} \end{aligned}$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

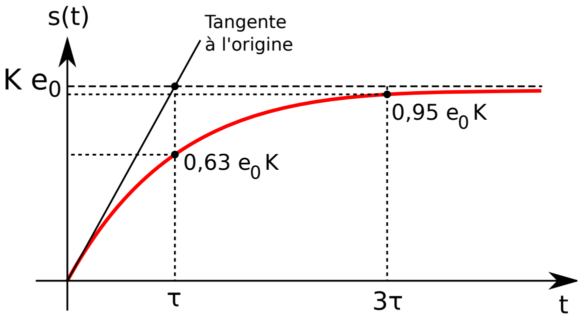
Réponse à un échelon

La réponse d'un système du 1^{er} ordre à un échelon est de la forme :

$$\boxed{s(t) = K \cdot e_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \cdot u(t).} \tag{4}$$



Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon



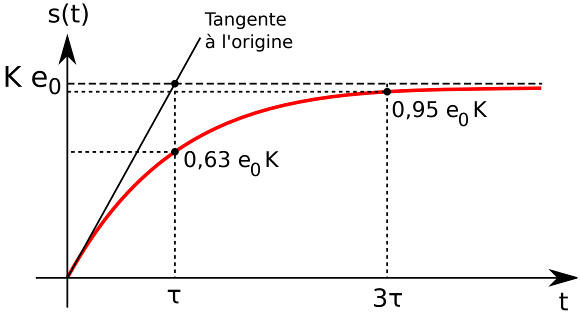
Au voisinage de $+\infty$:

$$\lim_{t \to +\infty} s(t) = \ldots$$

Au voisinage de 0 :

$$\lim_{t \to 0} s(t) = \ldots$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon



$$\lim_{t\to+\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} p\cdot S(p)$$
$$= Ke_0$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{ds(t)}{dt} = \lim_{p\to 0} p^2\cdot S(p)$$
$$= 0$$

$$\lim_{t\to 0} s(t) = \lim_{p\to+\infty} p\cdot S(p)$$
$$= 0$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{ds(t)}{dt} = \lim_{p\to+\infty} p^2\cdot S(p)$$
$$= \frac{K\cdot e_0}{\tau}$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Propriétés

- La réponse indicielle à un système du 1^{er} ordre possède :
  - une **asymptote horizontale au voisinage de** $+\infty$ d'ordonnée à l'origine $K \cdot e_0$,
  - une **tangente à l'origine de coefficient directeur** $\frac{K \cdot e_0}{\tau}$.
- La **rapidité** d'une réponse à un échelon pour un premier ordre est quantifiée par le **temps de réponse à** 5% (noté t_r) :

$$\boxed{t_r \approx 3\,\tau.} \tag{5}$$

- La **Précision** de la réponse à un échelon peut être indiquée par **l'erreur statique**, noté ε_s. Elle s'obtient en recherchant l'écart au voisinage de $+\infty$:

$$\boxed{\varepsilon_s = \lim_{t \to +\infty} (e(t) - s(t))} \tag{6}$$

- L'erreur statique ε_s d'un système du 1^{er} ordre de **gain unitaire** soumis à un échelon est nulle :

$$\boxed{\varepsilon_s = 0.} \tag{7}$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Démonstration de la rapidité

Calculons le temps de réponse à 5% pour un premier ordre

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Démonstration de la rapidité

$$s_{(t_r)} = K\ e_0 \left(1 - e^{-t_r/\tau}\right) = 0,95\ K\ e_0$$
$$\Leftrightarrow t_r = -\tau \ln(0,05)$$

avec $\ln(0.05) \approx -3$.

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Démonstration de la précision

Pour illustrer cela, prenons un gain $K = 1$. D'après le raisonnement suivant :

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Démonstration de la précision

$$\begin{aligned}\varepsilon_s &= \lim_{t\to+\infty}(e(t)-s(t)) = \lim_{p\to 0} p\cdot(E(p)-H(p)\cdot E(p)) \\ &= \lim_{p\to 0} p\cdot E(p)\left(1-\frac{1}{1+\tau p}\right) = \lim_{p\to 0} p\cdot\frac{e_0}{p}\left(1-\frac{1}{1+\tau p}\right) \\ &= \lim_{p\to 0} e_0\left(1-\frac{1}{1}\right) = 0\end{aligned}$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Attention

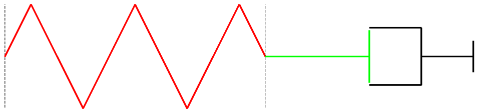
Verifier l'homogénéité ! ! !

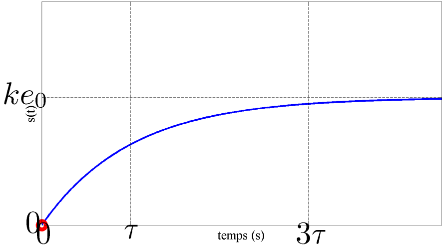
$$\boxed{\varepsilon_s = \lim_{t \to +\infty} \left(K\ e(t) - s(t)\right).} \tag{8}$$

Dans tous les cas

$$\boxed{\varepsilon_s = 0.} \tag{9}$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à un échelon





Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une rampe

Équation de la réponse

On cherche à calculer $s(t)$ à partir de $H(p)$ et $E(p)$:

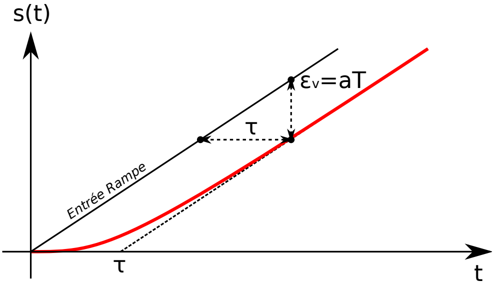
$$E(p) = \frac{a}{p^2}$$

$$S(p) = H(p)E(p) = \left(\frac{K}{1+\tau p}\right)\frac{a}{p^2} = K\ a\left(\frac{1}{p^2} - \frac{\tau}{p} + \frac{\tau^2}{1+\tau p}\right)$$

Après transformée inverse, on obtient :
La réponse d'un système du 1^{er} ordre soumis à une rampe est de la forme :

$$\boxed{s(t) = K\ a\left(t + \tau\left(e^{-t/\tau} - 1\right)\right)\ u(t).} \tag{10}$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une rampe



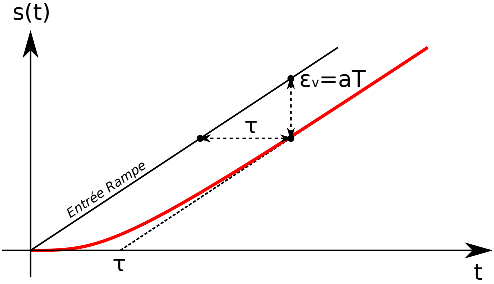
Au voisinage de $+\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty} s(t) = \ldots$$

Au voisinage de 0 :

$$\lim_{t\to 0} s(t) = \ldots$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une rampe



Au voisinage de $+\infty$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{t \to +\infty} s(t) &= \lim_{p \to 0} p\, S(p) \\
&= \lim_{p \to 0} \frac{K\ a}{p\,(1+\tau p)} \\
&= +\infty
\end{aligned}
$$

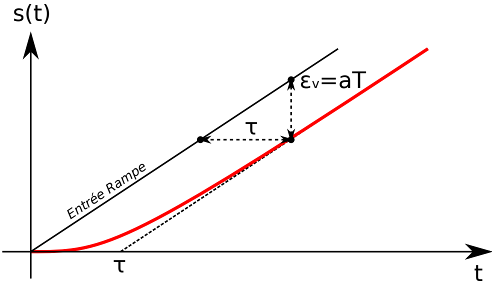
$$\lim_{t \to +\infty} \frac{ds(t)}{dt} = K\ a$$

Au voisinage de 0 :

$$
\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} s(t) &= \lim_{p \to +\infty} p\, S(p) \\
&= \lim_{p \to +\infty} \frac{K\ a}{p\,(1+\tau p)} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{ds(t)}{dt} = 0$$

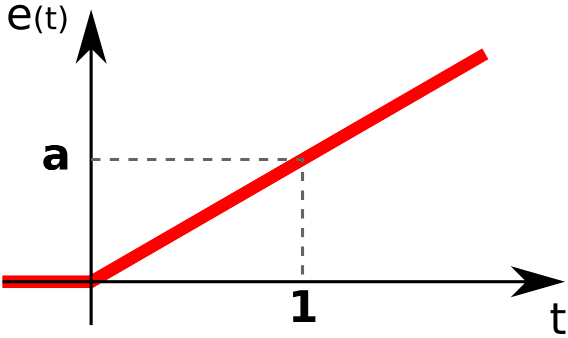
Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une rampe



Propriétés

- une **tangente horizontale au voisinage de** 0,
- une **asymptote oblique, de coefficient directeur** $K\ a$.

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une rampe



Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une rampe

Propriétés

- La réponse d'un système du 1^{er} ordre à une rampe possède :
  - **une tangente horizontale au voisinage de** 0,
  - **une asymptote oblique, de coefficient directeur** $K\ a$ car une asymptote oblique d'équation $y_{(t)} = a\ (t - \tau)$ au voisinage de $+\infty$.
- • **Précision :** Pour $K = 1$, on trouve :

$$\boxed{\varepsilon_v = a\ \tau.} \tag{11}$$

- • **Rapidité :** La rapidité d'une réponse à une rampe d'un système du 1^{er} ordre peut se caractériser par un **retard de traînage** r_t :

$$\boxed{r_t = \tau.} \tag{12}$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une impulsion

Réponse à une impulsion :

On considère maintenant un dirac :

$$e(t) = a \cdot \delta t.$$

Équation de la réponse

On cherche à calculer $s(t)$ à partir de $H(p)$ et $E(p)$:

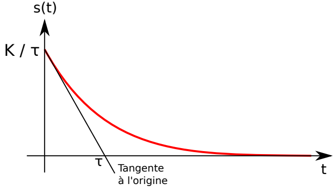
$$E(p) = 1$$

$$S(p) = H(p)E(p) = \left(\frac{K}{1+\tau p}\right) \times 1 = \frac{K}{\tau}\left(\frac{1}{\frac{1}{\tau}+p}\right)$$

Après transformée inverse, on obtient :
la réponse temporelle d'un système du 1^{er} ordre à une impulsion a pour équation :

$$\boxed{s(t) = \frac{K}{\tau} e^{-t/\tau}.} \tag{13}$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une impulsion



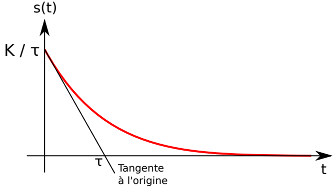
Au voisinage de $+\infty$:

$$\lim_{t \to +\infty} s(t) = \dots$$

Au voisinage de 0 :

$$\lim_{t \to 0} s(t) = \dots$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une impulsion



Au voisinage de 0 :

$$\lim_{t \to 0} s(t) = \lim_{p \to +\infty} p\, S(p) = \lim_{p \to +\infty} \frac{K\ p}{1+\tau p} = \frac{K}{\tau}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{ds(t)}{dt} = \lim_{p \to +\infty} p \left[p \frac{K}{1+\tau p} - \frac{K}{\tau} \right]$$

$$= \lim_{p \to +\infty} p \left[\frac{pK\tau - K - pK\tau}{\tau\,(1+\tau p)} \right] = \lim_{p \to +\infty} - \frac{-K\ p}{\tau\,(1+\tau\ p)}$$

$$= -\frac{K}{\tau^2}$$

Au voisinage de $+\infty$:

$$\lim_{t \to +\infty} s(t) = \lim_{p \to 0} p\, S(p) = \lim_{p \to 0} \frac{K\ p}{1+\tau p} = 0$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{ds(t)}{dt} = 0$$

Système du premier ordre : caractérisation de la réponse à une impulsion

Propriétés

La réponse d'une système du 1^{er} ordre sollicité par un Dirac possède :

- **une asymptote horizontale** d'équation $s(t) = 0$ au voisinage de $+\infty$,
- **une tangente d'équation d'équation** $s(t) = -\frac{K}{\tau^2}t + \frac{K}{\tau}$ au voisinage de 0.