DS n°9 : Fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom : Note :

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

Algèbre linéaire

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y - 2z + t \\ -2x + y - z - t \\ -x + 2y - 3z \\ 4x + y - 3z + 3t \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs suivantes :

$$\mathrm{rg}(f) = \qquad (1) \qquad \dim(\mathrm{Ker}\, f) = \qquad (2)$$

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par $u : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ - y + 2z \\ x + 3y + z \end{pmatrix}$.

On considère les bases de $\mathbb{R}^3$ suivantes : $\mathscr{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $\mathscr{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ deux bases de $\mathbb{R}^3$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2}(u) = \qquad (3)$$

Probabilités

Un professeur corrige un QCM pour deux classes : la première contient 35 étudiants, la seconde 45. Un étudiant de la première classe a une chance sur 3 de faire une erreur, un étudiant de la deuxième classe une chance sur 4. Les copies sont mélangées.
Le professeur corrige une question fausse. Quelle est la probabilité que la copie provienne de la première classe ?

(4)

Une urne contient des boules blanches et noires en proportion p et q (avec $p+q=1$). On procède à des tirages successifs avec remise. La probabilité que la première boule blanche tirée apparaisse lors du n^{e} tirage vaut :

$$\boxed{} \tag{5}$$

La probabilité que la k-ième boule blanche tirée apparaisse lors du n^{e} tirage vaut :

$$\boxed{} \tag{6}$$

Une urne contient n boules noires et b blanches. Un joueur tire k boules dans cette urne successivement avec remise. À chaque coup, s'il tire une boule blanche, il gagne g points, et sinon il en perd 1. Pour que le gain algébrique soit d'espérance nulle, il faut poser

$$g = \boxed{} \tag{7}$$

Dans ce cas, la variance de son gain algébrique est

$$\boxed{} \tag{8}$$

Une usine peut produire chaque jour entre 1 et n composants. Cependant, plus l'usine produit, moins les composants sont de bonne qualité. Plus exactement, si l'usine a produit i composants en une journée, chaque composant a une probabilité $\frac{i}{n}$ d'être défaillant (sinon, il est dit viable). Les composants sont produits indépendamment les uns des autres.
Pour quelle valeur de i est-ce que le nombre moyen de composants viables produit en une journée est maximal ?

$$\boxed{} \tag{9}$$

Le directeur de l'usine choisit le nombre de composants à produire uniformément entre 1 et n, on note V le nombre de composants viables produits.

$$P(V=1) = \boxed{} \tag{10}$$

$$E[V] = \boxed{} \tag{11}$$

— **FIN** —