



LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON  
SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR  
CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I.  
ANNÉE 2017 - 2018

C5 : ANALYSE DES PERFORMANCES CINÉMATIQUES DES SYSTÈMES COMPOSÉS DE CHAINES DE SOLIDES

## TD 12 - Performances cinématiques des systèmes : détermination des lois d'entrée-sortie(C5-1)

### Compétences

- **Modéliser** : Proposer un modèle de connaissance et de comportement :
  - Modélisation plane;
  - Torseur cinématique;
  - Liaisons.
- **Résoudre** : Procéder à la mise en oeuvre d'une démarche de résolution analytique
  - Lois d'entrée-sortie géométrique;
  - Lois d'entrée-sortie cinématique;

### 1 Dispositif de réglage de l'incidence des pales d'hélicoptère

Un hélicoptère crée sa portance grâce au mouvement de rotation du rotor principal entraîné à l'aide de la turbine. Pour permettre à l'hélicoptère de se déplacer suivant les différentes directions, les pales prennent, suivant un axe radial, une incidence qui varie au cours de la rotation du rotor. Le dispositif qui transmet les consignes du pilote et qui permet d'imposer cette variation est le plateau de pas cyclique dont l'orientation est fixée par l'intermédiaire de plusieurs vérins hydrauliques. La figure ci-contre présente le mécanisme complet. Sur ce schéma n'est pas représenté le mécanisme permettant l'entraînement en rotation suivant un axe vertical des solides 4, 5, 6 et 8 qui ne fera pas l'objet de l'étude. Les 3 figures ci-dessous présentent 3 configurations du dispositif de réglage de l'incidence des pales.

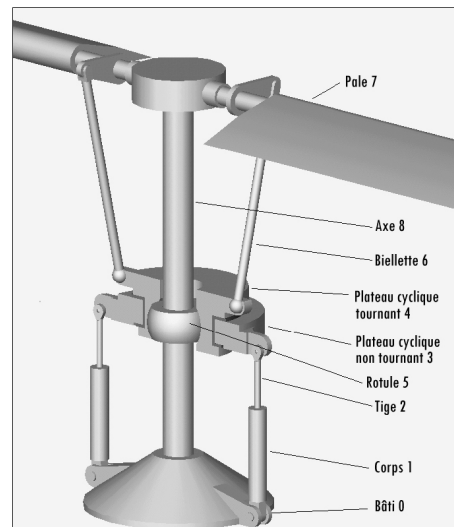
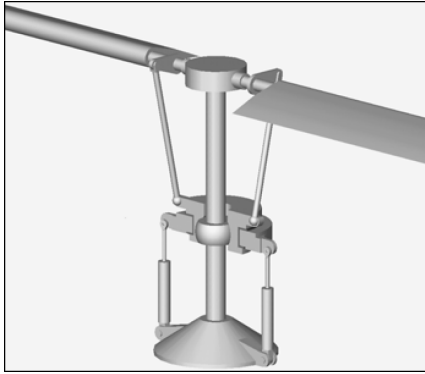
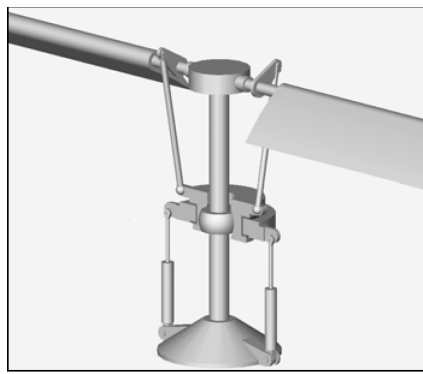


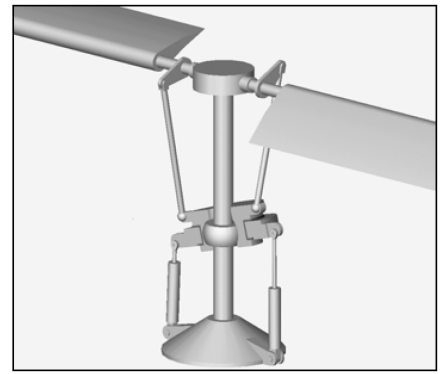
FIGURE 1



(a) Les pales sont en position horizontale (incidence nulle).



(b) Les pales présentent la même incidence.



(c) Les pales ne présentent pas la même incidence.

**Q 1 : Indiquer à quelle situation de vol correspondent chacune de ces situations :**

- Hélicoptère en vol stationnaire;
- hélicoptère en déplacement dans le plan;
- hélicoptère à l'arrêt.

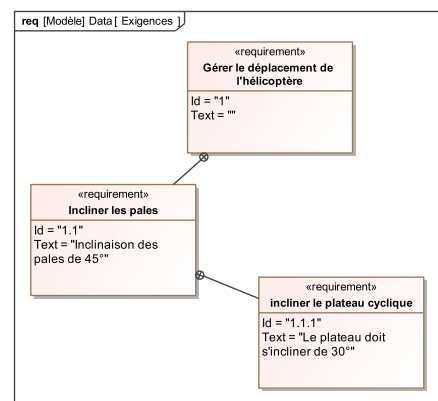
On se propose de construire une modélisation simplifiée et d'étudier les lois entrées-sorties des sous blocs fonctionnels qui constituent le dispositif de réglage de l'incidence cyclique des pales.

#### a) Étude du bloc orientation du plateau cyclique

L'inclinaison des pales est imposée par le système mécanique étudié précédemment dont les exigences techniques sont résumées dans le diagramme des exigences ci-dessous.

**Objectif 1 :**

La course du vérin est de  $28\text{ mm}$ . On souhaite déterminer l'inclinaison maximale du plateau cyclique qu'il est possible d'obtenir en fonction de la course du vérin.



Afin de simplifier l'étude, on construit un modèle plan de ce dispositif, constitué des solides suivants :

- Bâti 0 : lié au corps de l'hélicoptère. On donne le repère associé  $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .
- Un premier vérin permet d'actionner le dispositif :
  - Corps 1 en liaison pivot d'axe  $(G, \vec{z}_0)$  avec le bâti 0. On donne le repère associé  $R_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{0,1})$ .
  - Corps 1 en liaison pivot glissant d'axe  $(G, \vec{y}_1)$  avec la tige 2.
  - Tige 2 en liaison pivot d'axe  $(F, \vec{z}_0)$  avec le plateau 3. On donne le repère associé  $R_2 = R_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{0,1})$
- Le plateau 3 est en liaison pivot avec le bâti d'axe  $(E, \vec{z}_0)$ . On donne le repère associé  $R_3 = (O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_{0,3})$ .

**Données :**

- $\beta(t) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$  rotation autour de  $\vec{z}_0$ ,
- $\alpha(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$  rotation autour de  $\vec{z}_0$ ,
- $\vec{OG} = g \cdot \vec{x}_0$ ,
- $\vec{GF} = f(t) \cdot \vec{y}_1$ ,
- $\vec{OE} = e \cdot \vec{y}_0$
- $\vec{EF} = b \cdot \vec{x}_3$

**Q 2 : Tracer le graphe des liaisons**

**Q 3 : Faire les figures planes de projection**

**Q 4 : Écrire la fermeture géométrique du système.**

**Q 5 : En déduire une relation entre  $f(t)$  et  $\beta(t)$ .**

On donne sur la figure suivante l'évolution de la longueur du vérin  $f(t)$  en fonction de  $\alpha(t)$  compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$ .

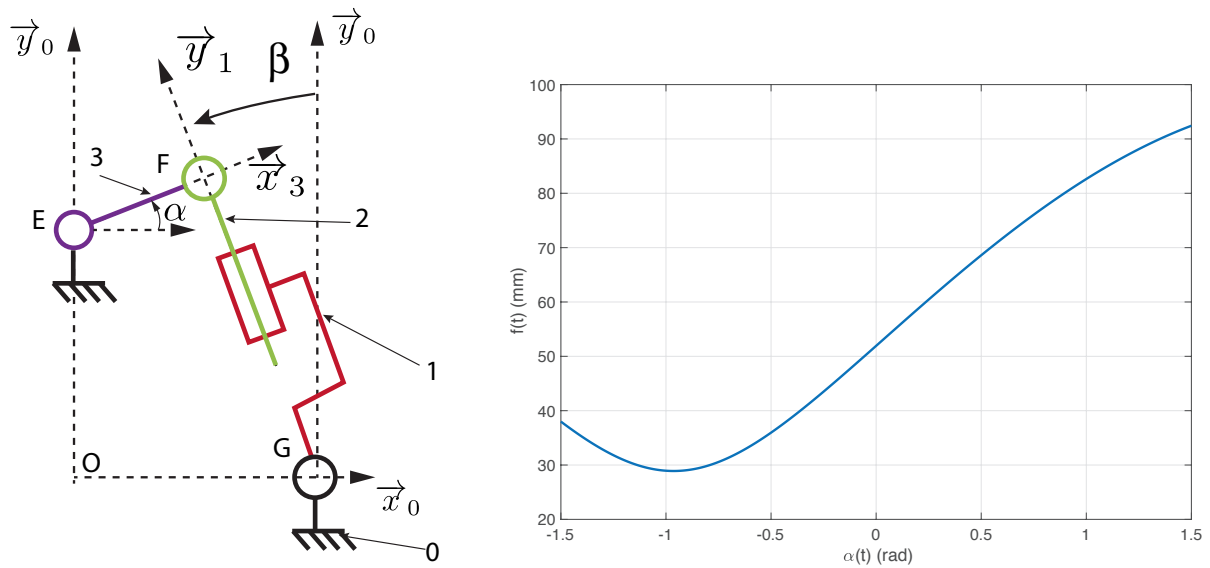


FIGURE 2 – Schéma cinématique du dispositif décrit ci-dessus, dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$

**Q 6 : Sachant que le vérin est en position médiane (mi-course) lorsque  $\alpha = 0$ , en déduire le débattement angulaire du plateau cyclique et conclure sur le cahier des charges.**

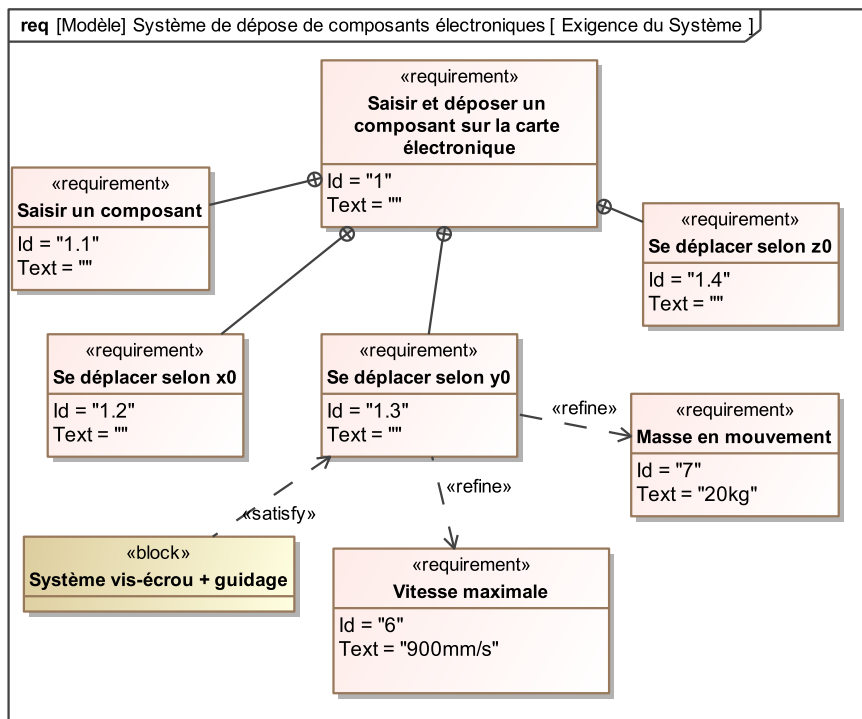
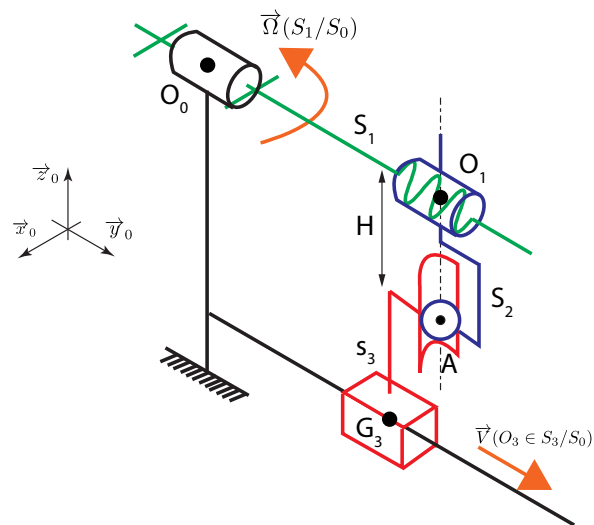
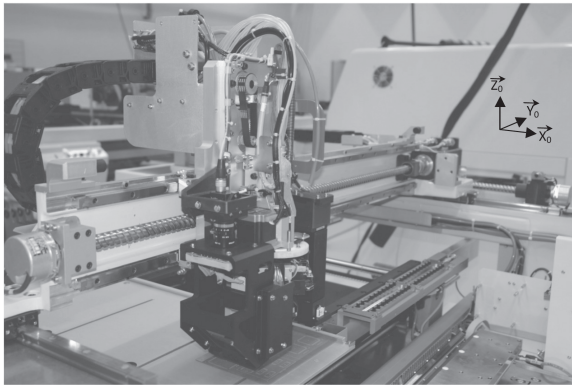
## 2 Système de dépôt de composants électroniques

### a) Présentation

Le système étudié permet de déposer automatiquement des composants électroniques sur un circuit. On s'intéresse ici à la modélisation d'un seul axe (selon la direction notée  $\vec{y}_0$ ) actionné par un moteur électrique et utilisant un mécanisme de transformation de mouvement "vis-écrou".

#### Hypothèses :

- le référentiel associé au repère  $R_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est supposé galiléen;
- les solides seront supposés indéformables;
- la position de  $G_3$  est définie par  $\vec{O_0G_3} = y \cdot \vec{y}_0 + z \cdot \vec{z}_0$
- les liaisons sont supposées parfaites (sans jeu ni frottement).
- Les axes  $(O_1, \vec{y}_0) = (O_0, \vec{y}_0)$  sont les axes de la liaison pivot entre  $S_0$  et  $S_1$  et de la liaison hélicoïdale entre  $S_2$  et  $S_3$ .
- Le point  $A$  est le centre de la liaison sphère cylindre entre  $S_2$  et  $S_3$ .
- On donne  $\vec{AO_1} = H \vec{z}_0$ .



- $S_0$  : poutre transversale considérée comme fixe par rapport au bâti;

- $S_1$  : vis à billes (hélice à droite) et arbre moteur;
- $S_2$  : écrou de la vis à billes (inertie négligeable);
- $S_3$  : chariot supportant la tête de dépose (masse  $M_3$ );

**Données numériques associées au système :**

- Pas de la vis à billes :  $p = 20\text{ mm}$ .
- Diamètre de la vis à billes :  $D = 25\text{ mm}$ .

On pourra noter le torseur cinématique associé à la liaison entre les solides  $S_i$  et  $S_j$  par :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_i/S_j)} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{cc} p_{ij} & u_{ij} \\ q_{ij} & v_{ij} \\ r_{ij} & w_{ij} \end{array} \right\}_{R_0}$$



**Objectif 2 :**

L'objectif de cette étude est de relier les grandeurs liées à l'actionneur du système (moteur avec une vitesse de rotation de  $S_1/S_0$  :  $\vec{\Omega}(S_1/R_0) = \dot{\theta} \cdot \vec{y}_0$ , à celles liées à l'effecteur (tête de dépose  $S_3$  :  $\vec{V}(G_3 \in S_3/R_0) \cdot \vec{y}_0 = \dot{y}$ ).

**b) Modélisation du système**

**Q 1 : Tracer le graphe de liaisons du système**

**Q 2 : Exprimer les torseurs cinématiques de chaque liaison en faisant apparaître leur lieu d'invariance.**

**Q 3 : Exprimer la fermeture cinématique et choisir un point pour l'exprimer.**

**Q 4 : Déplacer tous les torseurs au même point choisi précédemment.**

**Q 5 : Écrire les équations qui découlent de la fermeture cinématique**

**Q 6 : Résoudre ce système d'équations et déterminer la loi d'entrée sortie**

**Q 7 : Déterminer la vitesse de rotation du moteur en tour/min pour respecter le cahier des charges.**

### 3 Transmission mécanique du système exosquelette : Joint Cardan

**a) Présentation**

Le support de cette étude est une orthèse portable (figure 3), de type exosquelette (squelette externe), qui contribue, entre autres applications, au développement de la tonicité musculaire de l'épaule et du bras.

**b) Étude de la chaîne d'énergie d'une articulation**

La figure 4(a) donne une représentation tridimensionnelle de la transmission utilisée. Le schéma de principe proposé en figure 4(b) peut se décomposer en quatre sous-ensembles distincts :

- l'axe du moteur est relié par l'intermédiaire de deux joints de Cardan et d'une tige cylindrique intermédiaire I à l'axe 24 d'une petite roue dentée;
- par un système de courroie crantée 25, la petite roue dentée entraîne une grande roue dentée fixée sur l'axe 16 du dispositif hélicoïdal;
- le dispositif hélicoïdal assure la transformation du mouvement de rotation de l'axe 16 en un mouvement de translation du câble 4;
- le câble 4 par l'intermédiaire de plusieurs poulies entraîne en rotation l'axe que l'on souhaite commander.

On s'intéresse à la transmission du mouvement de rotation entre l'axe du moteur et l'axe 24 de la petite roue dentée par l'intermédiaire des deux joints de Cardan. Il est donc nécessaire de déterminer la relation cinématique d'entrée-sortie dans un seul joint de Cardan dont le schéma cinématique est donné sur la figure 5 avec le paramétrage suivant imposé :

- L'arbre d'entrée E est en liaison pivot d'axe  $(O_E, \vec{y}_E)$  avec le bâti ( $S_0$ ) fixe associé au repère  $R_0 = (O_E, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  avec  $\theta_E = (\vec{x}_0, \vec{x}_0) = (\vec{z}_0, \vec{z}_E)$ .
- L'arbre de sortie S est en liaison pivot d'axe  $(O_S, \vec{y}_S)$  avec le bâti ( $S_0$ ) fixe associé au repère  $R_{0^*} = (O_S, \vec{x}_{0^*}, \vec{y}_{0^*}, \vec{z}_{0^*})$  avec  $\theta_S = (\vec{x}_{0^*}, \vec{x}_S) = (\vec{z}_{0^*}, \vec{z}_S)$ .

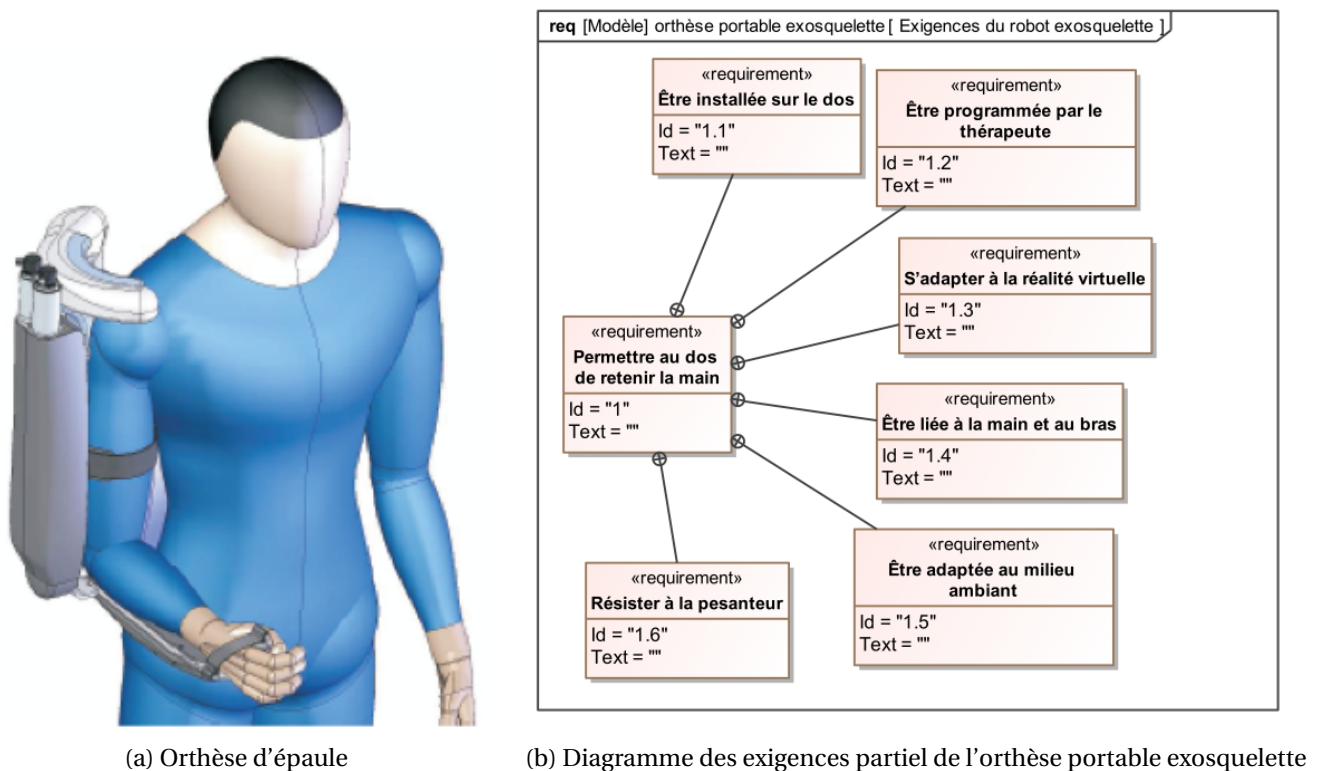


FIGURE 3 – Présentation du support d'étude

- On note  $\varphi$  l'angle constant que forment les axes des deux arbres qui sont reliés par le joint de Cardan avec  $\varphi = (\vec{x}_0, \vec{x}_0^*) = (\vec{y}_0, \vec{y}_0^*)$

Le joint cardan se compose :

- d'une fourchette **FE** lié à l'arbre d'entrée **E** d'axe  $(O_E, \vec{y}_E)$  disposant de deux alésages d'axe commun  $(I, \vec{z}_E)$ ;
- d'une fourchette **FS** lié à l'arbre de sortie **S** d'axe  $(O_S, \vec{y}_S)$  disposant de deux alésages d'axe commun  $(I, \vec{x}_S)$ ;
- d'un croisillon **C**, en liaisons pivots d'axes  $(I, \vec{z}_E)$  et  $(I, \vec{x}_S)$  respectivement avec les fourchettes **FE** et **FS**.

**Q 1 : Construire le graphe de liaisons du système.**

**Q 2 : Représenter les figures planes de projection.**

**Q 3 : Par construction, les deux axes du croisillon sont orthogonaux : après avoir identifié les deux directions de ces axes, écrire, en utilisant cette propriété, une équation liant les deux paramètres angulaires  $\theta_E$ ,  $\theta_S$  et l'angle constant  $\varphi$ .**

**Q 4 : En déduire la relation exprimant la vitesse angulaire de sortie  $\omega_S = \dot{\theta}_S$  en fonction de la vitesse angulaire d'entrée  $\omega_E = \dot{\theta}_E$  et de l'angle  $\varphi$ . Tracer l'allure de la vitesse de rotation  $\omega_S$  en fonction du temps, dans le cas où la vitesse  $\omega_E$  est constante; on précisera les valeurs minimale et maximale de  $\omega_S$  au cours du temps en fonction de  $\omega_E$  et  $\varphi$ .**

Dans la transmission étudiée, les deux joints de Cardan sont reliés par une tige cylindrique intermédiaire **I** selon la géométrie de la figure 6. Les axes du moteur et de la petite roue dentée sont parallèles, de sorte que l'axe de la tige cylindrique **I** soit contenu dans le plan caractérisé par les deux axes précédents, et forme un angle  $\varphi$  avec chacun de ces axes.



#### Remarque 1 :

on remarque que, dans cette configuration, les deux cardans sont placés de manière symétrique, les deux arbres de sortie des cardans simples étant reliés, l'arbre d'entrée du 1<sup>er</sup> cardan servant d'entrée globale et l'arbre d'entrée du 2<sup>ème</sup> cardan de sortie globale de ce système à double cardan.

**Q 5 : À l'aide des résultats de la question précédente, exprimer le rapport des vitesses angulaires :**

- $\omega_I/\omega_M$ , où  $\omega_I = \dot{\theta}_I$  et  $\omega_M = \dot{\theta}_M$  sont respectivement les vitesses angulaires de la tige intermédiaire **I** et du moteur;

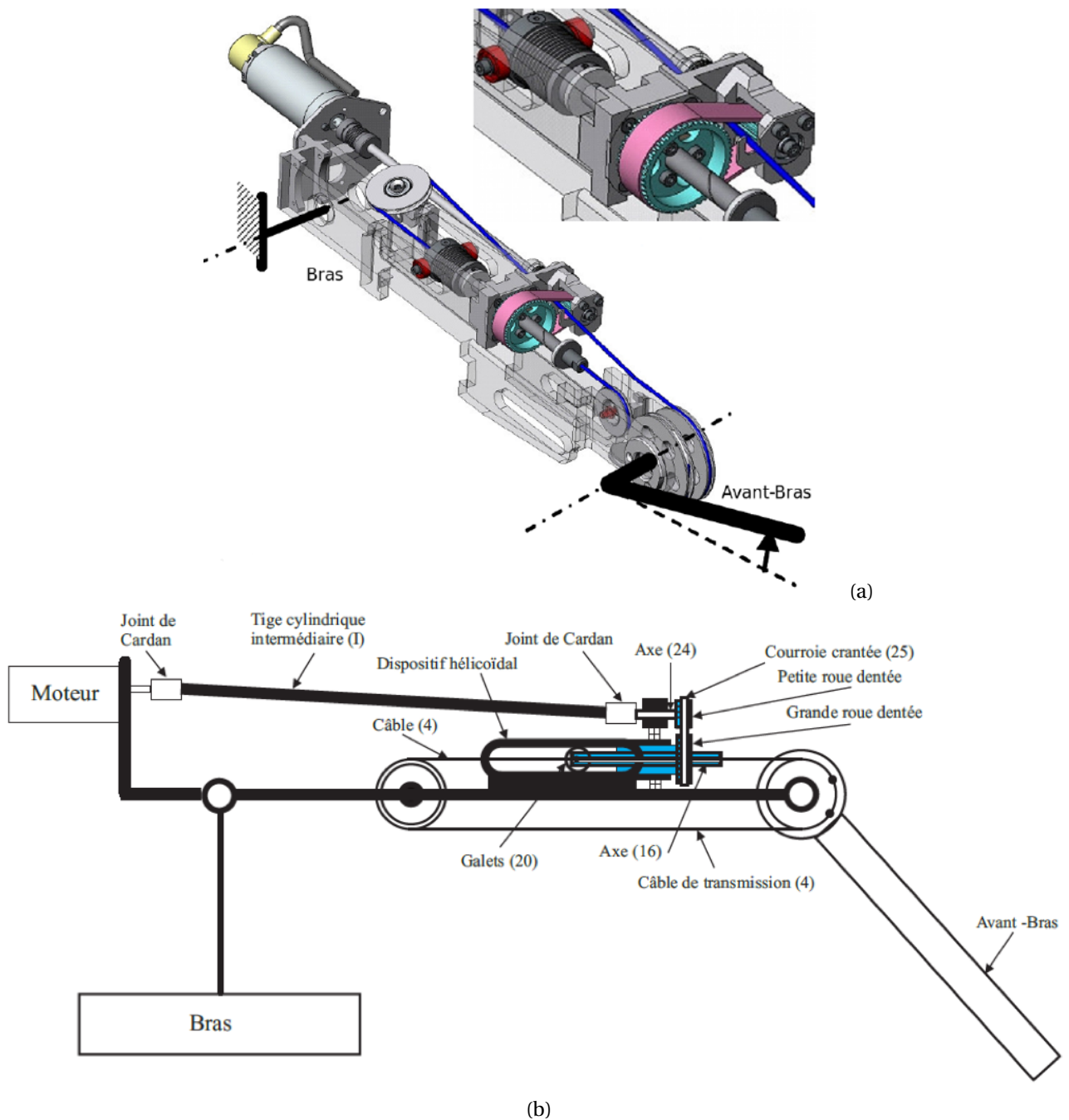


FIGURE 4 – Représentation de la transmission

- $\omega_I / \omega_P$ , où  $\omega_P = \dot{\theta}_P$  est la vitesse angulaire de la petite roue dentée liée à l'axe 24.

**Q 6 :** En déduire la relation entre les vitesses  $\omega_P$  et  $\omega_M$ . Conclure sur l'intérêt d'employer deux joints de Cardan dans cette configuration spécifique plutôt qu'un seul, et caractériser la propriété ainsi réalisée par les deux joints de Cardan.



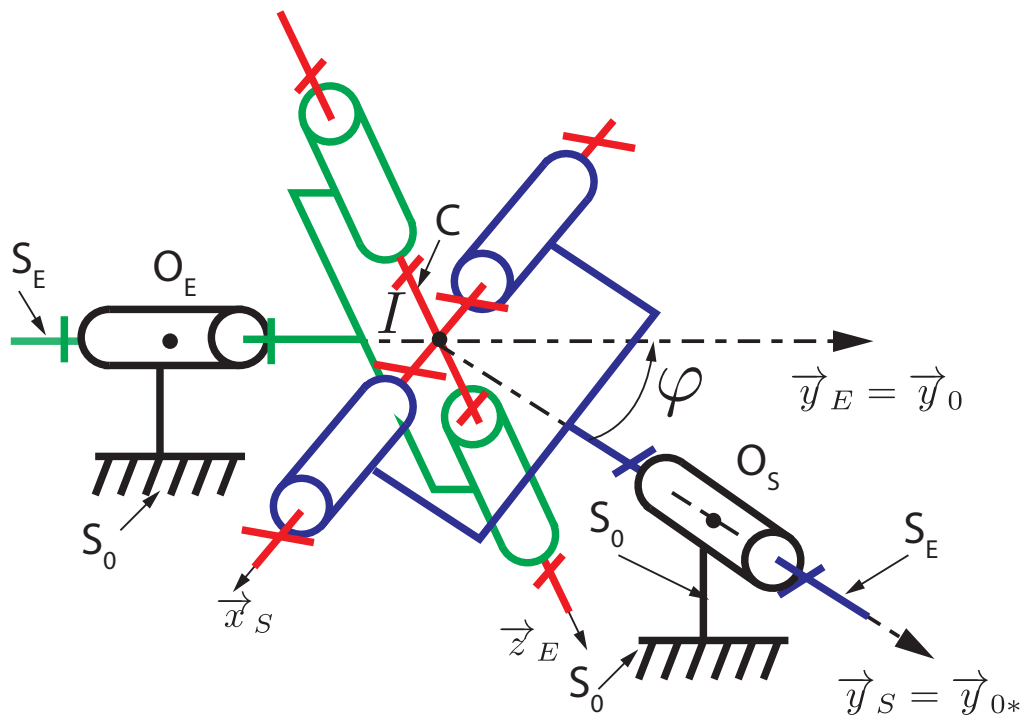


FIGURE 5 – Schéma cinématique d'un joint cardan

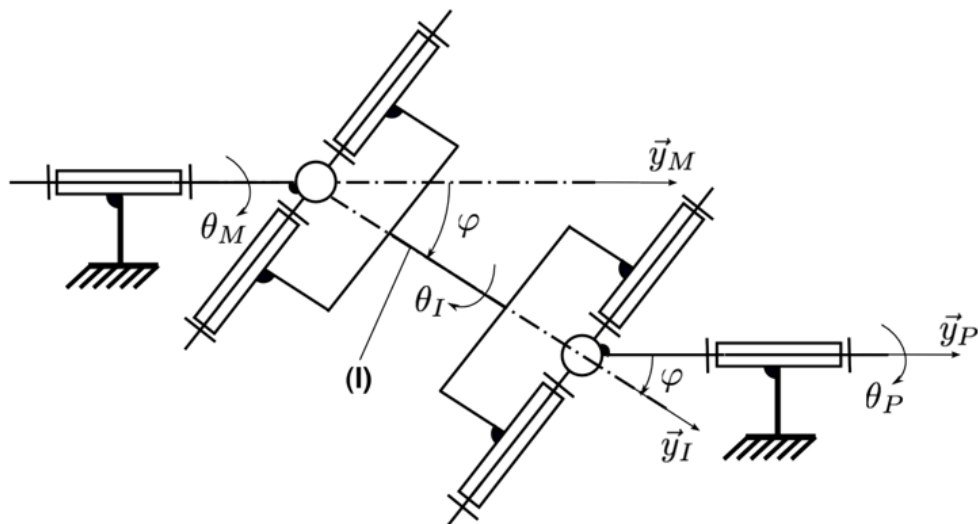


FIGURE 6 – Disposition des deux joints de Cardan dans la transmission étudiée