Devoir à la maison n° 20

À rendre le 25 mai

Pour ce DM, vous rendrez, parmi les trois premiers exercices, un exercice (au choix) si vous le rendez seul, deux exercices (au choix) si vous le rendez en binôme, trois exercices (au choix !) si vous le rendez en trinôme.

Le quatrième exercice est facultatif et pourra être rendu séparément.

I. Premier exercice, élémentaire

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ de rang 1. Montrer $\exists ! \lambda \in \mathbb{K}, f^2 = \lambda f$.

II. Deuxième exercice, intermédiaire

Un employé appelle n personnes au téléphone. À chaque fois qu'il compose un numéro, il se trompe avec une probabilité p. On note X le nombre de numéros correctement effectués au premier essai. Si le numéro est faux, l'employé rappelle (une fois seulement). On note Y le nombre de numéros refaits, et Z le nombre de numéros refaits et correctement effectués.

1) Donner les lois de X et Y, et calculer leurs espérances.

2) Calculer la loi de Z sachant que $[X = k]$. En déduire la loi de Z et son espérance.

3) Déterminer la loi de $S = X + Z$.

III. Troisième exercice, intermédiaire

Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $G(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Établir que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et donner sa dérivée.

2) En déduire que G est décroissante sur un intervalle $[M, +\infty[$, pour un certain $M \in \mathbb{R}$ que l'on ne déterminera pas.

3) Montrer que G admet une limite L quand x tend vers $+\infty$ (on ne demande pas la valeur de L).

4) Le but de cette question est de déterminer L.

a) Soit $F : x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Montrer que F croît sur $\mathbb{R}_+$.

b) En écrivant $F(x)$ sous la forme $F(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, et en utilisant que pour tout $t \geqslant 1$, on a $t^2 \geqslant t$, montrer que F est majorée.

c) Exprimer $G(x)$ en fonction de F et de x. En déduire la valeur de L.

IV. Exercice facultatif, difficile

Peut-on construire une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ et discontinue sur $\mathbb{Q}$?
Indice : on pourra utiliser, après l'avoir démontré, que si l'on a une suite de rationnels (p_n/q_n), *avec* $\forall n \in \mathbb{N}\ p_n \wedge q_n = 1$, *qui converge vers* $x \notin \mathbb{Q}$, *alors* $q_n \to +\infty$.

— **FIN** —