

Feuille d'exercice n° 26 : **Espaces euclidiens – Correction**

Exercice 1

1) Oui.

2) Non : on remarque que $\chi(P, P) = \int_{-1}^1 2P'P = [P^2]_{-1}^1 = P^2(1) - P^2(-1)$. Si $P = X$, $\chi(X, X) = 0$.
Ainsi $P \neq 0$ mais $\chi(P) = 0$. Ou encore : $\chi(X - 1, X - 1) = -4 < 0$.

3) Oui.

Exercice 2 $\langle Q, P \rangle = (b_0 + b_1)a_0 + (b_0 + 3b_1)a_1 + 3b_2a_2 = (a_0 + a_1)b_0 + (a_0 + 3a_1)b_1 + 3a_2b_2$ après développement. Donc $\langle Q, P \rangle = \langle P, Q \rangle$.

Si $R = c_0 + c_1X + c_2X^2$ $\langle P, Q + \lambda R \rangle = (a_0 + a_1)(b_0 + \lambda c_0) + (a_0 + 3a_1)(b_1 + \lambda c_1) + 3a_2(b_2 + \lambda c_2) = \langle P, Q \rangle + \lambda \langle P, R \rangle$, donc nous avons la linéarité par rapport à la première variable. La symétrie assure la linéarité par rapport à la seconde variable.

$\langle P, P \rangle = (a_0 + a_1)a_0 + (a_0 + 3a_1)a_1 + 3a_2a_2 = a_0^2 + 2a_0a_1 + 3a_1^2 + 3a_2^2 = (a_0 + a_1)^2 + 2a_1^2 + 3a_2^2 \geq 0$.

De plus $\langle P, P \rangle = 0$ ssi $(a_0 + a_1) = a_1 = a_2 = 0$ ssi $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ ssi $P = 0$.

Il s'agit donc bien d'un produit scalaire.

Exercice 3 Grâce à l'inégalité triangulaire sur E ,

$$\left\| \sum_{i=1}^n v_i \right\|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \|v_i\| \right)^2.$$

Ensuite, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur \mathbb{R}^n muni de sa structure euclidienne canonique, avec

$$v = \begin{pmatrix} \|v_1\| \\ \vdots \\ \|v_n\| \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \|v_i\| \right)^2 = \langle v, u \rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2 = n \left(\sum_{i=1}^n \|v_i\|^2 \right).$$

Exercice 4

1) Inégalité de Cauchy-Schwarz sur \mathcal{C}^0 muni du ps. usuel.

2) Appliquer avec g constante.

Exercice 5

1) Facile, correspond à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^{n \times n}$.

2) Avec $A_{*,j}$ la colonne j de A , $A_{i,*}$ la ligne i de A et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n , on a

$$N(A)^2 = \sum_{i=1}^n \|A_{i,*}\|^2 = \sum_{j=1}^n \|A_{*,j}\|^2.$$

Si $x \in \mathbb{R}^n$, on a alors par l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur \mathbb{R}^n :

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle A_{i,*}, x \rangle^2 \leq \sum_{i=1}^n \|A_{i,*}\|^2 \|x\|^2 = N(A) \|x\|^2$$

Alors,

$$N(AB) = \sum_{j=1}^n \|(AB)_{*,j}\|^2 = \sum_{j=1}^n \|A \times B_{*,j}\|^2 \leq \sum_{j=1}^n N(A) \|B_{*,j}\|^2 = N(A)N(B).$$

3) Inégalité de Cauchy-Schwarz avec $B = I_n$.

Exercice 6

- 1) Prendre $x = e_j$: $1 = \|e_j\|^2 = \sum_{i=1}^n (e_j|e_i)^2 = 1 + \sum_{i=1, i \neq j}^n (e_j|e_i)^2$, donc $0 = \sum_{i=1, i \neq j}^n (e_j|e_i)^2$. Ainsi pour tout $i \neq j$, $(e_i|e_j) = 0$.
- 2) Prendre x dans $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)^\perp$: alors $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2 = 0$, donc $x = 0$. Ainsi $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)^\perp = \{0\}$, et donc $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = E$. La famille est donc génératrice. Or elle est libre car orthormale.

Exercice 7

- 1) Tout vecteur orthogonal à tout élément de G l'est à tout élément de F .
- 2) $F \cap G \subset F + G$ d'où \subset .
Réciproquement, soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$, soit $y = f + g \in F + G$, alors $x \perp f$ et $x \perp g$ donc $x \perp y$, donc \supset .
- 3) On est dans un espace euclidien, par bi-orthogonalité $(F^\perp + G^\perp) = F \cap G$ et on passe encore à l'orthogonal.

Exercice 8

Soit $f \in F^\perp$.

Posons $g : t \mapsto tf(t)$.

On a $g(0) = 0$ et $g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, donc $g \in F$. De plus on a $g \perp f$, donc

$\int_0^1 tf(t)^2 dt = \int_0^1 g(t)f(t) dt = 0$. Or $t \mapsto tf(t)^2$ est une application continue à valeurs positives sur $[0, 1]$, comme elle est d'intégrale nulle sur $[0, 1]$, elle est donc nulle sur $[0, 1]$.

On a donc $f = 0$, donc $F^\perp \subset \emptyset$.

Donc $F^\perp = \emptyset$.

Exercice 9 L'ensemble des matrices diagonales est $\text{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2})$. Directement, ou passant par les orthogonaux de $\text{Vect } E_{1,1}$ et de $\text{Vect } E_{2,2}$, l'orthogonal est $\text{Vect}(E_{1,2}, E_{2,1})$

L'ensemble des matrices symétriques est $\text{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2} + E_{2,1})$. L'orthogonal recherché est un sev de dimension 1 du précédent. $x E_{1,2} + y E_{2,1} \perp E_{1,2} + E_{2,1}$ ssi $x + y = 0$ donc l'orthogonal recherché est celui des matrices antisymétriques.

Exercice 10 $\det(e_1, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{dvpt 2ème ligne}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$ donc il s'agit bien d'une base.

Posons $v_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit $z_2 = e_2 - (e_2.v_1)v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Posons alors $v_2 = \frac{z_2}{\|z_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Enfin, soit $z_3 = e_3 - (e_3.v_1)v_1 - (e_3.v_2)v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc posons $v_3 = \frac{z_3}{\|z_3\|} = z_3$.

Ainsi $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de (e_1, e_2, e_3) .

Exercice 11 Par l'absurde, supposons qu'il existe un tel A . Alors posons $B = X \times A$. On a $(B|A) = B(0) = 0$.

Or $(B|A) = \int_0^1 tA(t)^2 dt$ et $t \mapsto tA(t)^2$ est une fonction continue à valeurs positives sur $[0, 1]$. Son intégrale sur $[0, 1]$ étant nulle, cette fonction est donc nulle. On en déduit $A = 0$, donc $(1|A) = 0$ ce qui est absurde (on devrait avoir $(1|A) = 1$).

NB : Notons que le théorème de Riesz ne s'applique pas ici, puisqu'on n'est pas dans un espace euclidien mais seulement un préhilbertien ($\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie). Si l'énoncé était posé dans $\mathbb{R}_n[X]$ et non dans $\mathbb{R}[X]$, le théorème de Riesz assurerait l'existence d'un tel A . Notons qu'alors on aurait $\deg A = n$. En effet, si on avait $\deg A < n$, le même raisonnement conduirait à une absurdité.

Exercice 12 Si p est orthogonal alors pour tout x $p(x) \perp x - p(x)$ et alors si $x \in E$, par le théorème de Pythagore,

$$\|x\| = \|p(x) + x - p(x)\| = \sqrt{\|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2} \geq \|p(x)\|.$$

Réciproquement, soit $k \in \text{Ker } p$ et $i \in \text{Im } p$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $p(i + \lambda k) = i$ donc $\|i\|^2 \leq \|i\|^2 + \|\lambda k\|^2 + 2\lambda \langle i, k \rangle$, donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|k\|^2 + \lambda \langle i, k \rangle \geq 0$, ce qui n'est possible que si $i \perp k$.

Exercice 13 Soit un parallélogramme défini par deux vecteurs u et v . Alors ses deux diagonales sont portées par les vecteurs $u + v$ et $u - v$.

- 1) Ce parallélogramme est un rectangle ssi $u.v = 0$ ssi (identité de polarisation) $\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 = 0$ ssi ses deux diagonales ont même longueur.
- 2) Les deux diagonales sont orthogonales ssi $(u + v).(u - v) = 0$ ssi $\|u\|^2 + u.v - u.v - \|v\|^2 = 0$ ssi $\|u\| = \|v\|$ ssi ce parallélogramme est un losange.

Exercice 14 Faire un dessin donne tout de suite la solution !

- 1) Si $\|x\| = \|y\|$, alors $x + y \perp x - y$. De plus, $x = \frac{1}{2}(x + y) + \frac{1}{2}(x - y)$ et $y = \frac{1}{2}(x + y) - \frac{1}{2}(x - y)$, donc il suffit de prendre $H = (x - y)^\perp$ si $x \neq y$, ou tout hyperplan passant par x sinon.
- 2) Si $\langle x, y \rangle = \|y\|^2$, alors $x - y \perp y$. Alors $x = y + x - y$, donc il suffit de prendre $H = (x - y)^\perp$ si $x \neq y$, ou tout hyperplan passant par x sinon.
- 3) Dans chaque cas, si $x = y$, il n'y a pas unicité. Sinon
 - a) Si H est un hyperplan avec s la symétrie orthogonale demandée, alors $s(x - y) = y - x$ donc $x - y \in H^\perp$ donc (dimension) $H = (x - y)^\perp$.
 - b) Si H est un hyperplan avec p la projection orthogonale demandée, alors $p(x - y) = 0$ donc $x - y \in H^\perp$ donc (dimension) $H = (x - y)^\perp$.

Donc il y a unicité !

Exercice 15 Posons $E = \text{Vect}(1, \text{Id}, \exp)$ qui est bien euclidien. Il s'agit de calculer $d^2(\exp, \mathbb{R}_1[X])$. Pour cela calculons le projeté orthogonal de \exp sur $\mathbb{R}_1[X]$.

Une b.o.n de $\text{Vect}(1, \text{Id})$ est $(1, \sqrt{3}(2X - 1))$.

$$\langle \exp, 1 \rangle = \int_0^1 e^t dt = e - 1.$$

$$\langle \exp, 2X - 1 \rangle = 2 \int_0^1 te^t dt - \int_0^1 e^t dt = 2 - e.$$

Le projeté orthogonal de \exp sur $\mathbb{R}_1[X]$ est donc $P = e - 1 + 3(2 - e)(2X - 1) = 4e - 7 + 6(2 - e)X$.

Alors $d^2(\exp, \mathbb{R}_1[X]) = \|\exp - P\|^2 = \|\exp\|^2 - \|P\|^2$ par Pythagore, donc $d^2(\exp, \mathbb{R}_1[X]) = \int_0^1 e^{2t} dt - \int_0^1 (4e - 7)^2 + 12(4e - 7)(2 - e)t + 36(2 - e)^2 t^2 dt = 16e^2 + 49 - 56e + 6(8e - 4e^2 - 14 + 7e) + 12(4 + e^2 - 4e) = 4e^2 - 8e + 13$.

Exercice 16 L'existence et l'unicité des polynômes de Tschébychev est un résultat classique qui constitue un exercice à lui seul : nous avons tout de suite $P_0 = 1$ et $P_1 = X$. Si $k \geq 1$, $\cos((k + 1)\theta) = 2\cos(k\theta)\cos(\theta) - \cos((k - 1)\theta)$, donc par récurrence forte (ou double) nous obtenons : P_{k+1} existe, $P_{k+1} = 2XP_k - P_{k-1}$, et aussi $\deg P_{k+1} = k + 1$, et son coefficient dominant est 2^k .

- 1) Facile et classique. Le seul point plus subtil est $\langle P, P \rangle = 0 \Rightarrow P = 0$. Soit un tel P . Alors $t \mapsto P^2(\cos(t))$ est continue, positive et d'intégrale nulle, donc est nulle sur $[0, \pi]$. Or $\cos(t)$ prend une infinité de valeurs différentes sur $[0, \pi]$ ($[-1, 1]$ précisément), donc le polynôme P est nul.
- 2) Si $i \neq j$, $\langle P_i, P_j \rangle = \int_0^\pi \cos(it) \cos(jt) dt = \frac{1}{2} \left(\int_0^\pi \cos((i+j)t) dt + \int_0^\pi \cos((i-j)t) dt \right) = 0$ car $i+j \neq 0$ et $i-j \neq 0$. Comme les P_i sont échelonnés en degré (de 0 à n), ils forment une famille libre. Comme ils sont au nombre de $n+1$, ils forment une base (orthogonale) de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 17 Notons F et G les matrices de f et de g dans cette base. Soit u un vecteur de E , on note u sa matrice dans cette base.

$$\langle f(u), g(u) \rangle = (Fu)^\top Gu = u^\top F^\top Gu = u^\top FG U = u^\top GF u = -u^\top G^\top F u = -\langle g(u), f(u) \rangle.$$

On conclut directement.

Exercice 18

- 1) Un vecteur normal est de coordonnées $n = (1, -2, 3)$. Une base orthogonale du plan est ($u = (2, 1, 0)$; $v = (-3, 6, 5)$). Ensuite :

$$s(x) = \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u + \frac{\langle x, v \rangle}{\|v\|^2} v - \frac{\langle x, n \rangle}{\|n\|^2} n.$$

2)

$$p(x) = \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u + \frac{\langle x, v \rangle}{\|v\|^2} v$$

- 3) On se place dans la base $(a, b, c) = \left(\frac{1}{\sqrt{17}}(1, 0, -4), (0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{17}}(4, 0, 1) \right)$, dans laquelle la matrice

de cette symétrie est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, et donc dans la base (i, j, k) la matrice de cette symétrie est

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{17}} & 0 & \frac{4}{\sqrt{17}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{\sqrt{17}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{17}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot {}^t \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{17}} & 0 & \frac{4}{\sqrt{17}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{\sqrt{17}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{17}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{15}{17} & 0 & -\frac{8}{17} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{8}{17} & 0 & \frac{15}{17} \end{pmatrix}.$$

- 4) On se place dans la base $(a, b, c) = \left(\frac{1}{\sqrt{17}}(1, 0, -4), (0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{17}}(4, 0, 1) \right)$, dans laquelle la matrice

de cette symétrie est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et donc dans la base (i, j, k) la matrice de cette symétrie est

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{17}} & 0 & \frac{4}{\sqrt{17}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{\sqrt{17}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{17}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot {}^t \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{17}} & 0 & \frac{4}{\sqrt{17}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{\sqrt{17}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{17}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{17} & 0 & -\frac{4}{17} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{17} & 0 & \frac{16}{17} \end{pmatrix}.$$

Exercice 19

- 1) $p(x) = \langle x, u \rangle u$ donc $p(e_j) = a_j u$ donc la matrice est $P = (a_i a_j) = (a_i) \times (a_i)^\top$.
- 2) Projection sur D^\perp : $P' = I_n - P$.
Symétrie / D : $S + I_n = 2P$ donc $S = 2P - I_n$.
Symétrie / D^\perp : $S' + I_n = 2P'$ donc $S' = 2P' - I_n = I_n - 2P$.

Exercice 20

- 1) Montrons la double inclusion (on pourrait n'en montrer qu'une et montrer l'égalité des dimensions grâce au théorème du rang).
- Soit $x \in \text{Ker}(f - \text{Id})$. Alors $x = f(x)$. Soit $y \in \text{Im}(f - \text{Id})$. Alors il existe $z \in E$ tel que $y = f(z) - z$. On a : $(x|y) = (x|f(z) - z) = (x|f(z)) - (x|z) = (f(x)|f(z)) - (x|z)$. Or f est orthogonal donc préserve le produit scalaire, et ainsi $(x|z) = (f(x)|f(z))$. D'où : $(x|y) = (x|z) - (x|z) = 0$, et $x \in \text{Im}(f - \text{Id})^\perp$.
 - Soit $x \in \text{Im}(f - \text{Id})^\perp$. Puisque $f(x) - x \in \text{Im}(f - \text{Id})$, on a $(x|f(x) - x) = 0$, soit $(x|f(x)) = (x|x) = (f(x)|f(x))$. On a alors $(f(x) - x|f(x) - x) = \|f(x)\|^2 + \|x\|^2 - 2(x|f(x)) = \|f(x)\|^2 + \|x\|^2 - 2\|x\|^2 = 0$, donc $f(x) - x = 0$, i.e. $x \in \text{Ker}(f - \text{Id})$.
- 2) $(f - \text{Id})^2 = 0$ signifie que $\text{Im}(f - \text{Id}) \subset \text{Ker}(f - \text{Id})$, et d'après la question précédente on a $\text{Im}(f - \text{Id}) \subset \text{Im}(f - \text{Id})^\perp$. On a donc $\text{Im}(f - \text{Id}) \cap \text{Im}(f - \text{Id})^\perp = \text{Im}(f - \text{Id})$. Or E est de dimension finie donc $\text{Im}(f - \text{Id}) \cap \text{Im}(f - \text{Id})^\perp = \{0\}$, d'où $\text{Im}(f - \text{Id}) = \{0\}$, et ainsi $f - \text{Id} = 0$.

Exercice 21

- 1) On remarque que les vecteurs colonnes de A forment une b.o.n, et $\det A = -1$, donc A est la matrice d'une symétrie orthogonale. De plus, $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ avec $\theta = \text{Arccos}\left(-\frac{7}{25}\right)$. Donc A est la symétrie orthogonale par rapport à la droite dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$.
- 2) Idem : B est la symétrie orthogonale par rapport à la droite dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$ avec $\theta = \text{Arccos}\left(\frac{3}{5}\right)$.
- 3) On remarque que les vecteurs colonnes de C forment une b.o.n, et $\det C = 1$, donc C est la matrice d'une rotation. De plus, $C = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ avec $\theta = \text{Arccos}\left(\frac{3}{5}\right)$. Donc C est la rotation d'angle $\text{Arccos}\left(\frac{3}{5}\right)$.

Exercice 22

- 1) On remarque que les deux vecteurs définis par les colonnes de A sont de norme 1 et orthogonaux entre eux, donc A est une matrice orthogonale. De plus, $\det A = 1$ donc A est une rotation. Son angle est θ tel que $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{1}{2}$. Ainsi A est la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.
- 2) $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ avec $\theta = \frac{\pi}{3}$. Donc B est la symétrie orthogonale par rapport à la droite dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$.

Exercice 23 $r \circ s \circ s$ est une réflexion, $s \circ r \circ s$ une rotation, réfléchir, faire un joli dessin en jouant sur l'axe de s et l'angle de r .

Puis le coup qui tue : $r \circ s$ est une réflexion donc $r \circ s \circ r \circ s = \text{Id}$, donc $r \circ s \circ r = s$ et $s \circ r \circ s = r^{-1}$.