


Feuille d'exercice n° 01 : **Trigonométrie et nombres imaginaires**

Exercice 1 () Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1) $\sin x = \frac{1}{2}$

3) $\cos x = -1$

5) $\cos(4x) = -1$

2) $\tan x = \sqrt{3}$

4) $\sin(3x) = 1$

6) $\sin(x) \cos(x) = \frac{1}{4}$

Exercice 2 () Résoudre les équations suivantes :

1) $\tan(2x) = 1$

4) $\sin(x + 3\pi/4) = \cos(x/4)$

2) $\sin x + \cos x = \sqrt{\frac{3}{2}}$

5) $\cos(x + \pi/6) \cos(x - \pi/6) = \frac{1}{2}$

3) $\cos(5x) = \cos(2\pi/3 - x)$

6) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$

Exercice 3 () Résoudre l'équation $\sin(3x) \cos^3(x) + \sin^3(x) \cos(3x) = \frac{3}{4}$.


Exercice 4 Résoudre sur \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1) $\tan x \geq 1$

3) $2 \sin^2 x \leq 1$

2) $\cos\left(\frac{x}{3}\right) \leq \sin\left(\frac{x}{3}\right)$

4) $\cos^2 x \geq \cos(2x)$

Exercice 5 () Pour quelles valeurs de m l'équation $\sqrt{3} \cos x - \sin x = m$ admet-elle des solutions ? Les déterminer lorsque $m = \sqrt{2}$.

Exercice 6 On cherche à déterminer tous les réels t tels que $\cos t = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

- 1) Démontrer qu'il existe une unique solution dans l'intervalle $]0, \pi/4[$. Dans la suite, on notera cette solution t_0 .
- 2) Calculer $\cos(2t_0)$, puis démontrer que $\cos(4t_0) = -\cos(t_0)$.
- 3) En déduire t_0 .
- 4) Résoudre l'équation.

Exercice 7 Soit $x, y \in]0, \pi/2[$ tels que $\tan x = \frac{1}{7}$ et $\tan y = 2$.

- 1) En utilisant $\tan(x + 2y)$, calculer $x + 2y$.
- 2) Calculer $\cos(2y)$.

Exercice 8 Résoudre $\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{6 + \sqrt{3}}{8}$.

Exercice 9 (✎) Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

1) $\frac{1+2i}{3-4i}$

3) $\frac{(1+i)^3}{(1-i)^2}$

5) $\frac{1}{1+\frac{2}{i}}$

2) $\frac{1}{(1+2i)^2}$

4) $\frac{1+i}{3-i} + \frac{1-i}{3+i}$

6) $(1 + (1 + (1 + 2i)^2)^{-1})$

Exercice 10 Montrer que pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$, il existe $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = m^2 + n^2.$$

Exercice 11 (✎) Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

1) $(\sqrt{3} - i)^{11}$

2) $(-1 + i)^{17}$

3) $(1 + i\sqrt{3})^{-42}$

Exercice 12 Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $z = \frac{1 + \cos \theta + i \sin \theta}{1 - \cos \theta - i \sin \theta}$. Calculer $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$.

Exercice 13 Soient z_1 et z_2 deux complexes de module 1, tels que $1 + z_1 z_2 \neq 0$. Montrer que

$$\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}.$$

Exercice 14 Soit $a \in [0; 2\pi[$ et n un entier naturel. Déterminer le module et l'argument de $(1 + ie^{ia})^n$.

