V Équations différentielles linéaires

13 octobre 2020

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Résultats d'analyse

On utilise ici les notions d'analyse vues en terminale : continuité, dérivabilité, intégrales. Elles seront définies et travaillées ultérieurement.

1.1. Continuité et dérivabilité d'une fonction à valeurs complexes.

Si on ne le précise pas, I est toujours un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$.

Définition 1.1.1.
On appelle *partie réelle de f* la fonction

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Re}(f) & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \mathrm{Re}(f(x)) \end{array}.$$

De même on appelle *partie imaginaire de f* la fonction

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Im}(f) & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \mathrm{Im}(f(x)) \end{array}.$$

On peut alors décomposer : $f = \mathrm{Re}(f) + i\,\mathrm{Im}(f)$.

Remarque 1.1.2.
Cette définition assure que, de manière générale,

$$\mathrm{Re}(f(x)) = \mathrm{Re}(f)(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f(x)) = \mathrm{Im}(f)(x).$$

Exemple 1.1.3.
Avec

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & & x & \mapsto & (2+i)\mathrm{e}^{(1+i)x} \end{array},$$

on a

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Re}(f) & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & & x & \mapsto & \mathrm{e}^{x}(2\cos(x) - \sin(x)) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Im}(f) & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & & x & \mapsto & \mathrm{e}^{x}(\cos(x) + 2\sin(x)) \end{array}.$$

Définition 1.1.4.
1. On dit que f est *continue* (resp. *dérivable*) en a si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont. Dans le cas où f est dérivable, on appelle dérivée de f en a notée $f'(a)$ le complexe
$$f'(a) = (\mathrm{Re}(f))'(a) + i(\mathrm{Im}(f))'(a).$$
2. On dit que f est *continue* (resp. *dérivable*) sur un intervalle si elle l'est en tout point de cet intervalle.
3. On note (notations non officielles) $\mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ et $\mathscr{D}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions respectivement continues et dérivables de I dans $\mathbb{K}$.

Remarque 1.1.5.
Le premier point de la définition précédente assure que, si $f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable, alors

$$(\mathrm{Re}\, f)' = \mathrm{Re}(f') \quad \text{et} \quad (\mathrm{Im}\, f)' = \mathrm{Im}(f').$$

Les propriétés usuelles de la dérivée sont vraies du point de vue complexe.

Proposition 1.1.6.
Soit $A \subset \mathbb{R}$, $f, g : I \to \mathbb{C}$.
1. Si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable et
$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$
2. La fonction fg est dérivable et
$$(fg)' = f'g + fg'.$$
3. Si g ne s'annule pas, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable et
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Démonstration.
À chaque fois, décomposer tous les objets selon leurs parties réelles et imaginaires, puis revenir aux définitions en utilisant les propriétés de la dérivation réelle. □

Pour la composition, on se gardera de dériver deux fonctions à variable complexe (c'est bien plus compliqué que de dériver des fonctions à variable réelle). On dispose cependant du résultat suivant.

Théorème 1.1.7.
Soit $\varphi \in \mathscr{D}(I, \mathbb{K})$. L'application $x \mapsto \mathrm{e}^{\varphi(x)}$ est dérivable sur I de dérivée l'application $x \mapsto \varphi'(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)}$.

Démonstration.
Soit $x \in I$, on a
$$\mathrm{e}^{\varphi(x)} = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi(x))}(\cos(\mathrm{Im}(\varphi(x)) + i\sin(\mathrm{Im}(\varphi(x))).$$
On a donc
$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\varphi(x)}\right) &= \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi(x))}\cos(\mathrm{Im}(\varphi(x)),\\ \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\varphi(x)}\right) &= \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi(x))}\sin(\mathrm{Im}(\varphi(x)).\end{aligned}$$
Ces deux expressions sont bien dérivables, par opérations sur les fonctions dérivables, donc e^{φ} est bien dérivable.

De plus,
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi)(x)}\right) = \mathrm{Re}(\varphi'(x)) \times \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi(x))}.$$
Il suffit ensuite de dériver les produits :
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\varphi(x)}\right)\right) = \mathrm{Re}(\varphi'(x))\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi(x))}\cos(\mathrm{Im}(\varphi(x))\\ - \mathrm{Im}(\varphi'(x))\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi(x))}\sin(\mathrm{Im}(\varphi(x))).\end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\varphi(x)}\right)\right) = \mathrm{Re}(\varphi'(x))\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi(x))}\sin(\mathrm{Im}(\varphi(x))\\ + \mathrm{Im}(\varphi'(x))\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi(x))}\cos(\mathrm{Im}(\varphi(x))).\end{aligned}$$
Il suffit enfin de vérifier que
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\varphi(x)}\right)\right) + i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\varphi(x)}\right)\right) = \varphi'(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)}.$$
□

Exemple 1.1.8.
Dériver la fonction de l'exemple 1.1.3.

Définition 1.1.9 (Dérivées successives.)**.**
On définit par récurrence les dérivées successives d'une fonction $f : I \to \mathbb{C}$.
- $f^{(0)} = f$.
- Si f est dérivable, $f^{(1)} = f'$.
- Pour tout entier naturel n, si $f^{(n)}$ est définie et est dérivable, alors on définit $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

Remarque 1.1.10.
On notera souvent f'' au lieu de $f^{(2)}$, un peu plus rarement f''' au lieu de $f^{(3)}$.

Les physiciens utilisent souvent les notations $\dot{f}$, $\ddot{f}$ et $\dddot{f}$ pour indiquer des dérivées successives par rapport à la variable temps.

Définition 1.1.11.
1. On note $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continuement dérivables sur I, *i.e.* l'ensemble des fonctions dérivables, dont la dérivée est continue :
$$\mathscr{C}^1(I, \mathbb{K}) = \{\, f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{K}) \mid f' \in \mathscr{C}(I, K) \,\}.$$
2. Si $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{D}^n(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I : ce sont les fonctions f telles que $f^{(n)}$ est définie.
3. Si $n \in \mathbb{N}$, on note aussi $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions n fois continuement dérivables sur I, *i.e.* l'ensemble des fonctions n fois dérivables, dont la dérivée n^{e} est continue :
$$\mathscr{C}^n(I, \mathbb{K}) = \left\{ f \in \mathscr{D}^n(I, \mathbb{K}) \;\middle|\; f^{(n)} \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K}) \right\}.$$
4. On note $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions infiniment dérivables : c'est l'intersection
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{C}^n(I, \mathbb{K}).$$

On ne dérive ici que des fonctions d'une variable réelle.

Remarque 1.1.12.
Si f est dans $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{K})$, on dit que f est de *classe* $\mathscr{C}^n$ sur I.

1.2. Primitives.

Si on ne le précise pas, I est toujours un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$.

Définition 1.2.1.
Soit $A \subset \mathbb{R}$, soit $f : A \to \mathbb{K}$ et $F : A \to \mathbb{K}$. On dit que F est **UNE** *primitive* de f si F est dérivable sur A et si $F' = f$.

Théorème 1.2.2.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to \mathbb{K}$ dérivable. La fonction f est constante si et seulement si

$$\forall x \in I, f'(x) = 0.$$

L'hypothèse fondamentale est ici que I est un intervalle.

Exercice 1.2.3.
Proposer un contre-exemple au théorème précédent dans le cas où I n'est pas un intervalle.

Corollaire 1.2.4.
Toutes les primitives d'une même fonction *sur un intervalle* diffèrent d'une constante, et quand cette constante parcourt $\mathbb{K}$, on obtient toutes les primitives.

Autrement dit, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si $F : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de $f : I \to \mathbb{K}$, l'ensemble de toutes les primitives de f est

$$\{ F + \lambda \mid \lambda \in \mathbb{K} \}.$$

L'hypothèse fondamentale est ici que l'on se place sur un intervalle.

Démonstration.
Soit F et G deux primitives d'une même application sur un intervalle.

Alors, $F' = G'$, donc $(F - G)'$ est nulle sur cet intervalle, donc $F - G$ est constante sur cet intervalle. Donc toutes les primitives d'une même application diffèrent d'une constante.

Réciproquement, si F est une primitive de f, il est aisé de voir que $F + \lambda$ est une primitive de f pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$. □

Exercice 1.2.5.
Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction inverse, définie sur $\mathbb{R}^*$.

Il convient de connaître toutes les primitives du formulaire.

1.3. Intégration de fonctions complexes.

Définition 1.3.1.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b \in I$ et $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{C})$. On appelle *intégrale de f sur* $[a, b]$ le complexe

$$\int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)\,\mathrm{d}t,$$

noté $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\int_a^b f$.

Pour pouvoir calculer $\int_a^b f$, f doit être définie au moins sur $[a, b]$. C'est assuré si $f : I \to \mathbb{C}$, avec I un intervalle et $a, b \in I$.

Remarque 1.3.2.
Cette définition assure que, si $f : I \to \mathbb{C}$ et si $a, b \in I$,

$$\mathrm{Re}\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(f)$$

et

$$\mathrm{Im}\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b \mathrm{Im}(f).$$

Exemple 1.3.3.
$\int_0^{2\pi} (1 + i)\mathrm{e}^{ix}\,\mathrm{d}x = 0.$

Proposition 1.3.4.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b \in I$, $f, g : I \to \mathbb{C}$ continues et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors,

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Démonstration.
C'est connu quand f, g, λ, μ sont réels. Il suffit de décomposer selon les parties réelles et imaginaires, puis de calculer. Pour alléger le calcul, on pourra traiter séparément le cas de la somme de celui du produit par un complexe. $\square$

L'interprétation en terme d'aire ne veut rien dire pour une fonction à valeurs complexes. Cela dit, comme pour les fonctions réelles, on peut calculer des intégrales par primitivation, ce qui est exprimé dans le théorème suivant.

Théorème 1.3.5 (Théorème fondamental du calcul intégral)**.**
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ et $a \in I$.

1. La fonction $\left\{ \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$ est une primitive de f.
2. Soit $A \in \mathbb{K}$. La fonction
$$\begin{array}{rcrcl} F & : & I & \to & \mathbb{K} \\ & & x & \mapsto & A + \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$
est la seule primitive de f telle que $F(a) = A$.

Corollaire 1.3.6.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$, $a, b \in I$ et F une primitive de f sur I. Alors,
$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Exemple 1.3.7.
Refaire le calcul de l'exemple 1.3.3 en primitivant directement.

Exercice 1.3.8.
Soient a et b deux réels. Calculer les primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et celles de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$.

1.4. Méthodes de calcul.

On donne ici les deux outils permettant de calculer l'immense majorité des intégrales que vous rencontrerez dans vos deux années de prépa. Ils sont à maîtriser parfaitement.

a. Intégration par parties.

Théorème 1.4.1.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $u, v \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$ et $a, b \in I$. Alors,
$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'.$$

Démonstration.
Puisque u, v sont de classe $\mathscr{C}^1$, $(uv)' = u'v + uv'$ est continue, donc par le théorème fondamental du calcul intégral :
$$[uv]_a^b = \int_a^b (uv)' = \int_a^b u'v + uv' = \int_a^b u'v + \int_a^b uv'.$$
$\square$

Exemple 1.4.2 (Grands classiques)**.**
Toutes ces exemples se résolvent par intégration par parties.
• Trouver une primitive de ln.
• Trouver une primitive de Arctan.
• Trouver une primitive du produit d'un polynôme et d'une exponentielle.
• Trouver une primitive du produit d'une fonction trigonométrique et d'une exponentielle.
• Trouver une primitive du produit d'un polynôme et d'une fonction trigonométrique.

Exercice 1.4.3.
Déterminer des primitives des fonctions suivantes : $x \mapsto (x^2+1)\mathrm{e}^x$, $x \mapsto \cos(x)\mathrm{e}^{2x}$, $x \mapsto x^2 \cos x$.

b. Changement de variables.

Théorème 1.4.4.
Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $a, b \in I$, $\varphi \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{C}^0(J, \mathbb{R})$

On suppose que $\varphi(I) \subset J$. Alors,
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi'(t) \cdot (f \circ \varphi)(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit que l'on a effectué le changement de variable « $x = \varphi(t)$ ».

Remarque 1.4.5.
Moyen mnémotechnique : on écrit « $x = \varphi(t)$ » (**au brouillon seulement** !). Alors $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, donc $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$. Reste le problème des bornes. Quand t va de a à b, $x = \varphi(t)$ va de $\varphi(a)$ à $\varphi(b)$. Et voilà ...

Démonstration.
f est continue sur I, donc y admet une primitive F. Ainsi, F est $\mathscr{C}^1$, comme $\varphi \in \mathscr{C}^1$. On voit que $F \circ \varphi$ est $\mathscr{C}^1$, et $(F\circ\varphi)' = \varphi' \cdot f \circ \varphi$ est continue.

On déduit alors le résultat du théorème fondamental (utilisé deux fois) :

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t &= [F]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}\\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))\\ &= [F\circ\varphi]_a^b\\ &= \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

□

Remarque 1.4.6.
Les seuls changements de variables que l'on se permettra de ne pas justifier sont ceux affines (on les signalera quand même !).

Exemple 1.4.7.
Calculons l'aire de l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (voir figure 1).

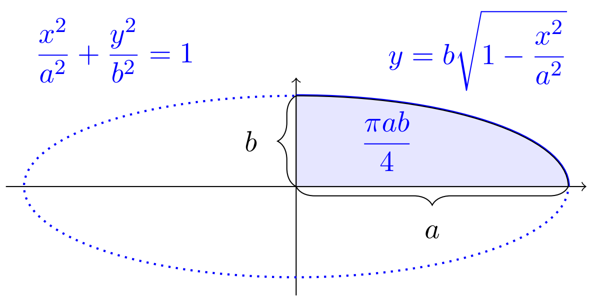


FIGURE 1 – Ellipse de demi-axes a et b.

Le quart supérieur droit de cette ellipse peut être paramétré par $\left(x, b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}\right)$, x allant de 0 à a. On calcule donc $I = \displaystyle\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x$.

On effectue le changement de variable $x = a\cos\theta$:

- la fonction $f : [0, a] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$ est continue,
- la fonction $\varphi : [0, \pi/2], \theta \mapsto a\cos\theta$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et à valeurs dans $[0, a]$,
- on a $\varphi' : \theta \mapsto -a\sin\theta$,
- $\varphi(0) = a$ et $\varphi(\pi/2) = 0$.

Remarquons que le sinus est positif sur $[0, \pi/2]$, et si $\theta \in [0, \pi/2]$, $f(\varphi(\theta)) = |\sin\theta|$. On obtient :

$$\begin{aligned} I &= -ab\int_{\pi/2}^0 |\sin\theta|\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= -ab\int_{\pi/2}^0 \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= ab\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{4}\pi ab - \frac{ab}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\pi/2}\\ &= \frac{1}{4}\pi ab.\end{aligned}$$

L'aire de l'ellipse est donc πab.

Exemple 1.4.8.
En posant $x = \sqrt{t}$, on a

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} &= 2\int_1^3 \frac{1}{1 + \sqrt{t}^2} \times \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\\ &= 2\int_{\sqrt{1}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\\ &= 2\,[\operatorname{Arctan}(x)]_{x=1}^{\sqrt{3}}\\ &= 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

Proposition 1.4.9.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue.

1. Si f est paire et $a \in \mathbb{R}$ alors
$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. Si f est impaire et $a \in \mathbb{R}$ alors
$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$
et
$$\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $T > 0$, si f est T-périodique, alors
$$\int_{0}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. 1. On considère $\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ et on pose $x = -t$.
Ainsi,
$$\begin{aligned}\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{-a} -f(-x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^{-a} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

2. Comme le point précédent avec
$$\begin{aligned}\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{-a} -f(-x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{-a} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

3. *On peut commencer à regarder à partir d'un dessin, dans le cas où $-T < a < 0$.*
On a :
$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$$
Or par changement de variable $x = t + T$, on obtient
$$\int_a^0 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a+T}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
On en déduit que
$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{a+T}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$
On peut remarquer que l'hypothèse $-T < a < 0$ qui a nourri notre intuition ne joue en fait aucun rôle : elle n'est utilisée nulle part dans la démonstration.
Nous avons donc le résultat attendu.

□

2. Généralités sur les équations différentielles linéaires.

2.1. Cadre.

- On s'intéressera à des équations différentielles dont les solutions sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- On considérera I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
- On s'intéressera uniquement à des équations différentielles *linéaires*.

Définition 2.1.1 (Équation différentielle linéaire)**.**
Soit n un entier naturel non nul, et $a_0,\dots,a_{n-1}$ et b des applications continues de I dans $\mathbb{K}$, alors

- On appelle *équation différentielle linéaire d'ordre* n l'équation de variable y
$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t). \quad (\mathscr{E})$$
- Une *solution* de cette équation est une application $f : I \to \mathbb{K}$ n fois dérivable sur I vérifiant : pour tout $t \in I$,
$$f^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)f^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)f'(t) + a_0(t)f(t) = b(t).$$
- L'équation $(\mathscr{E})$ est dite *homogène* si b est la fonction nulle ($b = 0_{\mathbb{K}^I}$).
- *L'équation homogène associée à* $(\mathscr{E})$ est
$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0. \quad (\mathscr{H})$$

Remarque 2.1.2.
Nous ne nous intéresserons pas dans le reste de ce chapitre au cas plus général d'une équation

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots \\ +a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \qquad (\mathscr{E})$$

où on a également affecté $y^{(n)}$ d'un coefficient $a_n(t)$.

En effet :

— Si a_n ne s'annule pas, il suffit de diviser cette équation par $a_n(t)$ pour se ramener au cas étudié ici.

— Si a_n s'annule, il est difficile de donner des résultats généraux. En pratique, si on rencontre une telle équation où a_n s'annule, on cherchera en général les solutions sur les intervalles où a_n ne s'annule pas et on regardera au cas par cas comment recoller les solutions aux points où a_n s'annule.

Définition 2.1.3 (Problème de Cauchy)**.**
Soit

— $t_0 \in I$

— $y_0,\dots,y_{n-1}$ des éléments de $\mathbb{K}$

La recherche des solutions f de $(\mathscr{E})$ vérifiant les *conditions initiales* suivantes :

$$\begin{aligned} f(t_0) &= y_0 \\ \text{et } f'(t_0) &= y_1 \\ &\dots \\ \text{et } f^{(n-1)}(t_0) &= y_{n-1} \end{aligned}$$

est appelé *problème de Cauchy linéaire d'ordre n*

Exemple 2.1.4.
En physique les déplacement d'un mobile sont régis par l'équation de la dynamique reliant la dérivée seconde de la position et les forces qui s'appliquent au mobile, qui dépendent en général de sa position et ou de sa vitesse. Il s'agit donc d'une équation différentielle d'ordre 2. [1] Il est raisonnable de penser que le problème de Cauchy a alors une unique solution : une position initiale et une vitesse initiale étant données, une seule trajectoire est possible.

1. En général linéaire dans les problèmes de prépa mais dans la vraie vie c'est parfois plus compliqué.

2.2. Structure de l'ensemble des solutions.

Théorème 2.2.1 (Structure des solutions)**.**
Soit

— $n \in \mathbb{N}$

— $(\mathscr{E})$ une équation différentielle linéaire d'ordre n, d'ensemble de solutions $S_{\mathscr{E}}$

— $(\mathscr{H})$ l'équation homogène associée, d'ensemble de solutions $S_{\mathscr{H}}$

Alors

1. $S_{\mathscr{E}} \subset \mathscr{C}^n(I, \mathbb{K})$
2. $S_{\mathscr{H}}$ est non vide et est stable par combinaisons linéaires.
3. Pour tout $y_0 \in S_{\mathscr{E}}$ fixé, on a
$$S_{\mathscr{E}} = \{\, y_0 + y \mid y \in S_{\mathscr{H}} \,\}\,.$$
4. En particulier, $S_{\mathscr{E}}$ est l'ensemble vide ou un singleton ou un ensemble infini.

Démonstration.
Sous les hypothèses de l'énoncé :

1. Toute solution f est nécessairement n fois dérivable et pour tout $t \in I$,
$$f^{(n)}(t) = b(t) - a_{n-1}(t)f^{(n-1)}(t) - \dots \\ - a_1(t)f'(t) - a_0(t)f(t).$$
Or b, a_{n-1}, $f^{(n-1)}$, …, a_0, f sont des applications continues. Donc $f^{(n)}$ est continue, donc $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{K})$.
2. L'application nulle est une solution triviale de $S_{\mathscr{H}}$, donc $S_{\mathscr{H}}$ est non vide.
Pour toute application f n fois dérivable et tout $t \in I$, notons $\psi_f(t)$ le scalaire
$$f^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)f^{(n-1)}(t) + \dots \\ + a_1(t)f'(t) + a_0(t)f(t).$$
On a alors $f \in S_{\mathscr{H}} \iff \forall t \in I \quad \psi_f(t) = 0$ (ou, de façon plus concise : $f \in S_{\mathscr{H}} \iff \psi_f = 0_{\mathbb{K}^I}$).
Soit alors f et g deux applications n fois dérivables de I dans $\mathbb{K}$ et λ et μ deux éléments de $\mathbb{K}$. Alors $\lambda f + \mu g$ est évidemment n fois dérivable. Et pour tout $t \in I$,

on a $\psi_{\lambda f+\mu g}(t) = \lambda\psi_f(t) + \mu\psi_g(t)$ (autrement dit $\psi_{\lambda f+\mu g} = \lambda\psi_f + \mu\psi_g$).

En particulier, si f et g sont solutions de l'équation homogène, on a $\psi_f = 0$ et $\psi_g = 0$, donc $\psi_{\lambda f+\mu g} = 0$ donc $\lambda f + \mu g \in S_{\mathscr{H}}$.

3. Soit $y_0 \in S_{\mathscr{E}}$ fixé. On a donc, pour tout $t \in I$, $\psi_{y_0}(t) = b(t)$

   Soit alors $f : I \to \mathbb{K}$ une application n fois dérivable. On a

$$\begin{aligned} f \in S_{\mathscr{E}} &\iff \psi_f = b \\ &\iff \psi_f = \psi_{y_0} \\ &\iff \psi_{f-y_0} = 0 \\ &\iff f - y_0 \in S_{\mathscr{H}} \end{aligned}$$

   Donc pour tout $f \in S_{\mathscr{E}}$, f s'écrit sous la forme y_0+y où $y \in S_{\mathscr{H}}$. Donc $S_{\mathscr{E}} \subset \{\, y_0 + y \mid y \in S_{\mathscr{H}} \,\}$.

   Réciproquement, pour tout $y \in S_{cH}$, l'application f définie par $f = y_0 + y$ est n fois dérivable et $f - y_0 \in S_{\mathscr{H}}$, donc $f \in S_{\mathscr{E}}$. Donc $\{\, y_0 + y \mid y \in S_{\mathscr{H}} \,\} \subset S_{\mathscr{E}}$.

   On a donc bien $S_{\mathscr{E}} = \{\, y_0 + y \mid y \in S_{\mathscr{H}} \,\}$.

4. On sait que $S_{\mathscr{H}}$ n'est pas vide puisqu'il contient au moins l'application nulle. Supposons qu'il contienne au moins une autre application f. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, λf appartient également à $S_{\mathscr{H}}$. Donc ou bien $S_{\mathscr{H}}$ est réduit à un élément, ou bien il est infini.

   D'après le point précédent, si $S_{\mathscr{E}}$ possède au moins un élément y_0, on a $S_{\mathscr{E}} = \{\, y_0 + y \mid y \in S_{\mathscr{H}} \,\}$. Donc $y \mapsto y_0 + y$ est une bijection de $S_{\mathscr{H}}$ sur $S_{\mathscr{E}}$, donc $S_{\mathscr{E}}$ est ou bien réduit à un élément (y_0) ou bien est infini.

   Donc ou bien $S_{\mathscr{E}}$ est vide, ou il est réduit à un élément, ou il est infini.

□

Remarque 2.2.2.
Nous retrouvons ici le même type de structure de l'ensemble des solutions que dans le cas des systèmes linéaires. Ce n'est pas une coïncidence : un même type de structure algébrique se cache derrière (les espaces vectoriels et affines) !

Exemple 2.2.3.
Il a été vu en terminale (et nous redémontrerons bientôt) qu'il existe une seule fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solution de $y' - y = 0$ et vérifiant $y(0) = 1$.

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation $y' - y = 0$ est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\mathrm{e}^x \end{array} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 2.2.4.
Déterminer toutes les solutions du problème de Cauchy $y' - y = 0$ et $y(0) = 42$.

Théorème 2.2.5 (Principe de superposition)**.**
Soit n un entier, $a_0,\dots,a_{n-1}$, b_1, b_2 des applications continues de I dans $\mathbb{K}$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Notons a_n la fonction constante égale à 1. On considère les équations

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = b_1, \qquad (\mathscr{E}_1)$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = b_2, \qquad (\mathscr{E}_2)$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2. \qquad (\mathscr{E})$$

Alors pour toute solution y_1 de $\mathscr{E}_1$ et toute solution y_2 de $\mathscr{E}_2$, $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est une solution de $\mathscr{E}$.

Démonstration.
On reprend les notations de la démonstration de la proposition 2.2.1. Soit y_1 et y_2 des solutions respectives de $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$. On a $\psi_{y_1} = b_1$ et $\psi_{y_2} = b_2$. Or $\psi_{\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2} = \lambda_1\psi_{y_1} + \lambda_2\psi_{y_2}$. Donc $\psi_{\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2} = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$. □

Théorème 2.2.6 (Solutions du problème de Cauchy linéaire)**.**
Soit n un entier naturel et $\mathscr{E}$ une équation différentielle linéaire d'ordre n. Alors, pour tout choix des conditions initiales, le problème de Cauchy linéaire d'ordre n admet une unique solution.

Remarque 2.2.7.
Ce théorème est hors-programme dans le cas général. Sa démonstration dans le cas général requiert en effet des outils d'analyse que nous n'avons pas encore à notre disposition.

En revanche, dans les cas $n = 1$ et $n = 2$, le résultat est au programme et sera démontré.

Remarque 2.2.8.
Le théorème précédent implique que par chaque point de $I \times \mathbb{R}$, il passe une et une seule courbe solution. Les courbes solutions partitionnent donc $I \times \mathbb{R}$. Un exemple est donné dans la figure 2.

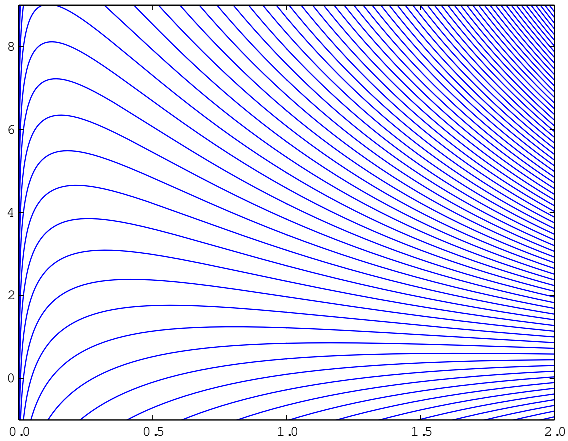


FIGURE 2 – Courbes solutions de l'équation $y' + y = \dfrac{1}{x}$, représentées sur $]0,2] \times [-1,9]$.

3. Équations linéaires du premier ordre.

3.1. Résolution de l'équation homogène.

Théorème 3.1.1.
Soit A une primitive de a sur I. Soit $a \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$. Alors, l'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + ay = 0$ est

$$S_{\mathscr{H}} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & K\mathrm{e}^{-A(t)} \end{array} \;\middle|\; K \in \mathbb{K} \right\}.$$

Si de plus une condition initiale est fixée, alors la solution est unique. En particulier si y s'annule en un point, elle est identiquement nulle.

Démonstration.
Toute fonction de la forme $t \mapsto K\mathrm{e}^{-A(t)}$ est une solution (c'est évident, il n'y a qu'à dériver).

Réciproquement, soit y une solution. On pose $z(t) = y(t)\mathrm{e}^{A(t)}$ pour $t \in I$. z est dérivable sur I et pour tout t, $z'(t) = y'(t)\mathrm{e}^{A(t)} + y(t)A'(t)\mathrm{e}^{A(t)} = (y'(t) + a(t)y(t))\mathrm{e}^{A(t)} = 0$, donc z est une constante K.

Une condition initiale $y(t_0) = y_0$ étant donnée, elle est vérifiée si et seulement si $K\mathrm{e}^{-A(t_0)} = y_0$, c'est-à-dire si et seulement si $K = y_0\mathrm{e}^{A(t_0)}$. Il y a alors une et une seule solution : $t \mapsto y_0\mathrm{e}^{A(t_0)-A(t)}$. □

Remarque 3.1.2.
On dit que l'ensemble des solutions a une structure de droite vectorielle, de vecteur directeur $t \mapsto \mathrm{e}^{-A(t)}$.

Exercice 3.1.3.
Déterminer les intervalles de résolution puis résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' + y = 0$
2. $y' + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = 0$ avec $y(1/2) = 1$.

Corollaire 3.1.4.
Une solution qui s'annule en un point ne peut être que la fonction nulle.

Démonstration.
En effet elle est solution d'un problème de Cauchy de la forme $y(t_0) = 0$. Or il existe une unique solution à ce problème et la fonction nulle est manifestement solution. □

3.2. Résolution d'une équation avec second membre.

Remarque 3.2.1.
On a déjà vu que si l'on connaissait une solution $\tilde{y}$ de l'équation avec second membre, alors on pouvait construire toutes les solutions de l'équation avec second membre à partir de l'ensemble des solutions de l'équation homogène.

Dans le cas d'une équation d'ordre un, on dit que l'ensemble des solutions a une structure de droite affine, car l'ensemble des solutions est l'ensemble des $\tilde{y} + y$ pour y parcourant une droite vectorielle.

Théorème 3.2.2.
Soit a et b deux applications continues de I dans $\mathbb{C}$, et A une primitive de a.

Alors le problème de Cauchy $y' + ay = b$ et $y(t_0) = y_0$ admet une unique solution :

$$\left\{ \begin{array}{ccl} I & \rightarrow & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{A(t_0)-A(t)}y_0 + \mathrm{e}^{-A(t)} \displaystyle\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{A(u)}b(u)\,\mathrm{d}u \end{array} \right.$$

Remarque 3.2.3.
L'unicité est aisée à démontrer : si on dispose de deux solutions de ce problème, leur différence est une solution de l'équation homogène du problème s'annulant en t_0, c'est donc l'application nulle.

On peut également assez directement montrer que l'application donnée est solution par calcul.

Nous donnons cependant ci-dessous une autre démonstration qui a l'avantage de permettre de retrouver la formule. Cette méthode est à connaître et s'appelle la *méthode de la variation de la constante*.

Lemme 3.2.4.
Soit $h : I \to \mathbb{C}$ ne s'annulant pas. Alors, pour tout $y : I \to \mathbb{C}$, il existe une unique fonction $C : I \to \mathbb{C}$ telle que $y = Ch$.

De plus, si h est dérivable, alors y est dérivable si et seulement si C l'est.

Démonstration.
C'est élémentaire : $y = Ch$ si et seulement si $C = \dfrac{y}{h}$.

On obtient la dérivabilité de C ou de y par opérations usuelles sur les fonctions dérivables. □

Démonstration (Théorème 3.2.2)**.**
Notons $\mathscr{E}$ l'équation $y' + ay = b$, $(\mathscr{H})$ l'équation homogène associée, $S_{\mathscr{E}}$ et $S_{\mathscr{H}}$ les ensembles de solutions respectifs de ces deux équations et S l'ensemble des solutions du problème de Cauchy $y' + ay = b$ et $y(t_0) = y_0$.

On sait que $y_{\mathscr{H}} : t \mapsto \mathrm{e}^{-A(t)}$ est une solution de $\mathscr{H}$ qui ne s'annule jamais.

D'après le lemme 3.2.4, toute fonction $y : I \to \mathbb{K}$ dérivable est de la forme $Cy_{\mathscr{H}}$, avec $C : I \to \mathbb{K}$ dérivable..

Soit donc une fonction $C : I \to \mathbb{K}$ est une application dérivable, posons $y = Cy_{\mathscr{H}}$. La fonction y est dérivable comme produit de fonctions dérivables.

Soit alors $t \in I$. On a

$$\begin{aligned} y' + ay &= C'y_{\mathscr{H}} + Cy'_{\mathscr{H}} + aCy_{\mathscr{H}} \\ &= C'y_{\mathscr{H}} + C\big(y'_{\mathscr{H}} + ay_{\mathscr{H}}\big). \end{aligned}$$

Or $y_{\mathscr{H}}$ est solution de $(\mathscr{H})$, donc $y'_{\mathscr{H}} + ay_{\mathscr{H}} = 0$. Donc y est solution de $\mathscr{E}$ si et seulement si $C'y_{\mathscr{H}} = b$, c'est-à-dire si et seulement si C' est l'application $t \mapsto \mathrm{e}^{A(t)}b(t)$, c'est-à-dire si et seulement si C est une primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{A(t)}b(t)$, *i.e.* si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$C : t \mapsto \lambda + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{A(u)}b(u)\,\mathrm{d}u.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et

$$y : t \mapsto \lambda\mathrm{e}^{-A(t)} + \mathrm{e}^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{A(u)}b(u)\,\mathrm{d}u.$$

Remarque : On vient donc de prendre une solution quelconque de $(\mathscr{H})$.

Alors, y est solution du problème de Cauchy ($y' + ay = b$ et $y(t_0) = y_0$) si et seulement si $y(t_0) = y_0$, donc si et seulement si $\lambda = y_0\mathrm{e}^{A(t_0)}$, c'est-à-dire si et seulement si y est l'application

$$t \mapsto \mathrm{e}^{A(t_0)-A(t)}y_0 + \mathrm{e}^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{A(u)}b(u)\,\mathrm{d}u.$$

□

3.3. Résolution pratique.

a. Schéma de résolution (à connaître !).

On effectuera *toujours* les actions suivantes, dans l'ordre.

1. Déterminer I.
2. Résoudre (E_H).
3. Trouver une solution dite particulière (solution évidente, second membre d'une forme particulière ou méthode de variation de la constante).
4. S'occuper éventuellement des conditions initiales.
5. Donner les solutions.

Remarque 3.3.1.
On ne vous demande jamais que de trouver *une* solution particulière : faites le plus simplement possible ! Si vous ne voyez pas de solution évidente, la méthode de la variation de la constante est assez efficace et vous permet de retrouver la formule générale (une erreur est vite arrivée !). Il est permis de chercher une solution particulière au brouillon puis de l'exhiber sur sa copie, en justifiant qu'elle vérifie bien les conditions imposées.

Exemple 3.3.2.
On résout l'équation $y' + y = \mathrm{e}^{2x}$ sur $\mathbb{R}$. Ses solutions sont les $x \mapsto \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{2x} + K\mathrm{e}^{-x}$, avec $K \in \mathbb{K}$.

Exercice 3.3.3.
Résoudre le problème de Cauchy :

$$y' - \frac{y}{x} = x\ln(x),\ \ y(1) = 2.$$

b. Seconds membres particuliers.

On considère l'équations $y' + ay = b$, dans le cas où a est ***une constante***. Si b est d'une des formes suivantes, alors la méthode de la variation de la constante (ainsi que certains arguments que nous développerons un peu plus tard) nous indique qu'il est possible à chaque fois de chercher une solution particulière sous une forme assez simple.

Polynôme - exponentielle Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Si $b : x \mapsto P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$, où P est un polynôme de degré n, on cherche une solution particulière de la forme $Q(t)\mathrm{e}^{\alpha t}$ avec Q de degré n si $\alpha \neq -a$, $n+1$ sinon.

Polynôme - fonction trigonométrique Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $b : x \mapsto P(x)\cos(\alpha x)$ (ou $P(x)\sin(\alpha x)$) et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on résout d'abord l'équation $y' + ay = P(t)\mathrm{e}^{i\alpha t}$ avec la méthode du point précédent (Q sera alors à coefficients complexes), et on prend les parties réelles et imaginaires (explications).

Polynôme - fonction hyperbolique Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $b : x \mapsto P(x)\operatorname{ch}(\alpha x)$ (ou $P(x)\operatorname{sh}(\alpha x)$) et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on résout d'abord l'équation $y' + ay = P(t)\mathrm{e}^{\alpha t}$ avec la méthode du premier point, on obtient une solution y_+. On résout ensuite l'équation $y' + ay = P(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}$ avec la méthode du premier point, on obtient alors une solution y_-. Par superposition, on prend $\dfrac{y_+ + y_-}{2}$ pour ch et $\dfrac{y_+ - y_-}{2}$ pour sh.

On remarquera qu'il est souvent tout aussi rapide de procéder par variation de la constante ...

Exemple 3.3.4.
Trouver une solution particulière pour $y' + y = \mathrm{e}^t$, pour $y' + y = \sin(t)$ et pour $y' + y = \operatorname{ch}(t)$.

Exemple 3.3.5.
Résoudre $y' + 2y = \operatorname{ch} t - (1+t)\mathrm{e}^{-2t}$. On trouve que les solutions sont les fonctions de la forme $t \mapsto \dfrac{1}{6}\mathrm{e}^t + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} - (\dfrac{1}{2}t^2 + t + K)\mathrm{e}^{-2t}$, pour $K \in \mathbb{K}$

4. Équations différentielles du second ordre à coefficients constants.

4.1. Définitions.

Une équation différentielle linéaire du second ordre est une équation de la forme $y'' + \alpha y' + \beta y = d$ où α, β et d sont des applications continues, d'inconnue $y : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable sur I.

Dans la suite de ce chapitre, on ne s'intéressera qu'au cas où α et β sont des constantes. Plus généralement, on s'intéressera aux équations de la forme $ay'' + by' + cy = d$, où a, b, c sont des constantes de $\mathbb{K}$ avec $a \neq 0$ et $d \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$, d'inconnue $y : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable sur I. d est appelé le *second membre* de cette équation. On dit qu'elle est homogène si son second membre est nul. On appelle *équation homogène* associée à $ay'' + by' + cy = d$ l'équation $ay'' + by' + cy = 0$.

4.2. Résolution d'une équation homogène.

On considère ici l'équation homogène définie sur $\mathbb{R}$

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{$\mathscr{H}$}$$

Lemme 4.2.1.
Soit $r \in \mathbb{K}$, la fonction $y_r : t \mapsto \mathrm{e}^{rt}$ est solution de $(\mathscr{H})$ si et seulement si $ar^2 + br + c = 0$.

Démonstration.
y_r est dérivable et $y_r' = ry_r$. Donc y_r est deux fois dérivable et $y_r'' = r^2 y_r$. On a donc $ay_r'' + by_r' + cy_r = (ar^2 + br + c)y_r$. On conclut en remarquant que y_r ne s'annule jamais. □

Définition 4.2.2 (Équation et polynôme caractéristique)**.**
L'équation caractéristique de $(\mathscr{H})$ est l'équation

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{EC}$$

Le polynôme caractéristique de $(\mathscr{H})$ est

$$aX^2 + bX + c.$$

Théorème 4.2.3 (Solutions complexes de $(\mathscr{H})$)**.**
Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$, avec $a \neq 0$.

1. Si (EC) a deux solutions complexes distinctes r_1, r_2, alors les solutions complexes de $(\mathscr{H})$ sont les applications de la forme
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \end{array} \right.$$
pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.
2. Si (EC) a une unique solution complexe r, alors les solutions complexes de $(\mathscr{H})$ sont les applications de la forme
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (\lambda t + \mu) e^{rt} \end{array} \right.$$
pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

Démonstration.
Soit r une solution complexe de (EC), on sait d'après le lemme 4.2.1 que $y_r : t \mapsto e^{rt}$ est une solution de $(\mathscr{H})$. De plus, y_r ne s'annule jamais.

On peut donc mettre en œuvre la méthode de la variation de la constante. En effet, pour toute fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fois dérivable, il existe $K : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fois dérivable telle que $y = K y_r$ (poser $K = y/y_r$).

Soit donc $K : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fois dérivable, posons $y = K y_r$. La fonction y est deux fois dérivable, par produit. On a alors, comme $y_r' = r y_r$.
$$y' = K' y_r + K y_r' = (K' + rK) y_r.$$
Le même type de calcul donne
$$y'' = (K'' + 2rK' + r^2 K) y_r.$$
On a alors
$$ay'' + by' + cy = \left[aK'' + (2ar + b)K' + (ar^2 + br + c)K \right] y_r.$$
Ainsi, comme r est solution de (EC), on a $ar^2 + br + c = 0$, donc
$$ay'' + by' + cy = (aK'' + (2ar + b)K') y_r.$$
Comme y_r ne s'annule jamais, $ay'' + by' + cy = 0$ si et seulement si
$$aK'' + (2ar + b)K' = 0.$$
Remarquons que $2ar + b = 0$ si et seulement si $r = -\dfrac{b}{2a}$, *i.e.* si et seulement si (EC) possède une unique solution complexe : r.

• Si (EC) possède une unique solution complexe, alors y est solution de $(\mathscr{H})$ si et seulement si $K'' = 0$. En primitivant deux fois, on obtient directement que c'est équivalent à « K est une fonction affine », d'où le résultat dans ce cas là.
• Supposons maintenant que (EC) possède deux solutions complexes distinctes, notons r' la seconde solution. On peut tout de suite remarquer que $r + r' = -\dfrac{b}{a}$. Remarquons aussi que l'équation $aK'' + (2ar + b)K' = 0$ équivaut à l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 portant sur K' :
$$(K')' + \left(2r + \frac{b}{a}\right) K' = 0.$$
Ainsi, y est solution de $(\mathscr{H})$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que
$$K' : t \mapsto \alpha \exp\left[-\left(2r + \frac{b}{a}\right) t \right].$$
En primitivant ceci, y est solution de $(\mathscr{H})$ si et seulement s'il existe $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tel que
$$K : t \mapsto \beta \exp\left[-\left(2r + \frac{b}{a}\right) t \right] + \gamma.$$
Ainsi, y est solution de $(\mathscr{H})$ si et seulement s'il existe $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tel que
$$y : t \mapsto \left(\beta \exp\left[-\left(2r + \frac{b}{a}\right) t \right] + \gamma \right) \times e^{rt}.$$
Après simplification, y est solution de $(\mathscr{H})$ si et seulement s'il existe $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tel que
$$y : t \mapsto \beta e^{r't} + \gamma e^{rt}.$$
□

Exemple 4.2.4.
L'ensemble des solutions complexes de $y'' + y = 0$ est
$$\left\{ \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \lambda e^{ix} + \mu e^{-ix} \end{array} \right. \middle| \ \lambda, \mu \in \mathbb{C} \right\}.$$
Par les formules d'Euler, c'est aussi
$$\left\{ \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \lambda \sin(x) + \mu \cos(x) \end{array} \right. \middle| \ \lambda, \mu \in \mathbb{C} \right\}.$$

Théorème 4.2.5 (Solutions réelles de $(\mathscr{H})$)**.**
Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 0$.

1. Si (EC) a deux solutions réelles distinctes r_1, r_2, alors les solutions réelles de $(\mathscr{H})$ sont les applications de la forme
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \end{array} \right.$$

pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

2. Si (EC) a une unique solution réelle r, alors les solutions réelles de $(\mathscr{H})$ sont les applications de la forme
$$\left\{\begin{array}{lll}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (\lambda t+\mu)\mathrm{e}^{rt}\end{array}\right.$$
pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

3. Si (EC) a deux solutions complexes conjuguées distinctes, que l'on note $\alpha \pm i\omega$ avec $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$, alors les solutions réelles de $(\mathscr{H})$ sont les applications de la forme
$$\left\{\begin{array}{lll}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\cos(\omega t)\mathrm{e}^{\alpha t}+\mu\sin(\omega t)\mathrm{e}^{\alpha t}\end{array}\right.$$
pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Ce sont aussi exactement les applications de la forme
$$\left\{\begin{array}{lll}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & A\cos(\omega t+\varphi)\mathrm{e}^{\alpha t}\end{array}\right.$$
pour $A \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi \in]-\pi, \pi]$.

Lemme 4.2.6.
Soit $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$, avec $\omega \neq 0$. Les deux ensembles de fonctions exposés au point 3. du théorème 4.2.5 sont égaux.

Démonstration.
Soit $A \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi \in]-\pi, \pi]$, soit
$$f : \left\{\begin{array}{lll}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & A\cos(\omega t+\varphi)\mathrm{e}^{\alpha t}\end{array}\right. .$$
Par les formules d'addition, si $t \in \mathbb{R}$,
$$f(t) = A\cos(\varphi)\cos(\omega t)\mathrm{e}^{\alpha t} - A\sin(\varphi)\sin(\omega t)\mathrm{e}^{\alpha t},$$
donc f est bien de la première forme.

Réciproquement, soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si $\lambda = \mu = 0$, il suffit de prendre $A = 0$ et φ quelconque. Sinon, posons $A = \sqrt{\lambda^2+\mu^2}$ et $\varphi \in]-\pi, \pi]$ tel que $\cos\varphi = \dfrac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$ et $\sin\varphi = -\dfrac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$. Alors,
$$\begin{aligned}&\lambda\cos(\omega t)+\mu\sin(\omega t)\\ =&\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\cos(\omega t)+\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\sin(\omega t)\right)\\ =&A(\cos(\omega t)\cos(\varphi)+\sin(\omega t)\sin(\varphi))\\ =&A\cos(\omega t+\varphi).\end{aligned}$$
□

Démonstration (Théorème 4.2.5)**.**
• Les cas où (EC) admet une ou deux solutions réelles se traitent exactement comme le cas complexe.
• Supposons donc que (EC) admette deux solutions complexes conjuguées distinctes $\alpha \pm i\omega$. On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solution de $(\mathscr{H})$. Alors y est solution complexe de $(\mathscr{H})$, donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que
$$y : t \mapsto \lambda\mathrm{e}^{(\alpha+i\omega)t}+\mu\mathrm{e}^{(\alpha-i\omega)t}$$
Or $y(0) = \lambda + \mu$ est réel donc $\lambda + \mu \in \mathbb{R}$, donc $\mathrm{Im}(\lambda) = -\mathrm{Im}(\mu)$.

De même $y(\pi/(2\omega)) \in \mathbb{R}$, donc
$$y\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = i(\lambda-\mu)\exp\left(\frac{r\pi}{2\omega}\right) \in \mathbb{R},$$
donc $\mathrm{Re}(\lambda) = \mathrm{Re}(\mu)$.

Ainsi, $\mu = \overline{\lambda}$.

Soit $\rho \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi \in]-\pi, \pi]$ tels que $\lambda = \rho\mathrm{e}^{i\varphi}$. Si $t \in \mathbb{R}$, alors
$$y(t) = 2\rho\cos(\omega t+\varphi)\mathrm{e}^{\alpha t}.$$
Ainsi, y est de la forme demandée.

Synthèse : Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et
$$y : \left\{\begin{array}{lll}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda\cos(\omega t)\mathrm{e}^{\alpha t}+\mu\sin(\omega t)\mathrm{e}^{\alpha t}\end{array}\right.$$
D'après le théorème de structure des solutions homogène (2.2.1 – une combinaison linéaire de solutions homogènes est solution homogène), il suffit de montrer que
$$s_1 : \left\{\begin{array}{lll}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \cos(\omega t)\mathrm{e}^{\alpha t}\end{array}\right.$$
et
$$s_2 : \left\{\begin{array}{lll}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sin(\omega t)\mathrm{e}^{\alpha t}\end{array}\right.$$
sont solution de $(\mathscr{H})$. Or, si $t \in \mathbb{R}$, par les formules d'Euler,
$$s_1(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{(\alpha+i\omega)t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{(\alpha-i\omega)t}.$$
D'après le théorème 4.2.3, $t \mapsto \mathrm{e}^{(\alpha+i\omega)t}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{(\alpha-i\omega)t}$ sont solutions de $(\mathscr{H})$, donc s_1 aussi. On effectue le même raisonnement pour s_2. □

Remarque 4.2.7.
Dans tous les cas, les solutions sont les combinaisons linéaires de deux solutions linéairement indépendantes. On dit que cet ensemble a une structure de plan vectoriel.

Exemple 4.2.8. 1. Les solutions complexes de $y''+y'+2y=0$ sont les fonctions de la forme

$$\begin{aligned} t \mapsto & \lambda e^{\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}t} + \mu e^{\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}t} \\ &= e^{-\frac{1}{2}t}\left(\lambda e^{\frac{-i\sqrt{7}}{2}t} + \mu e^{\frac{i\sqrt{7}}{2}t}\right) \end{aligned}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

2. La solution du problème de Cauchy $y''+2y'+y=0$, avec $y(1)=1$, $y'(1)=0$ est la fonction $t \mapsto t e^{1-t}$.

Théorème 4.2.9.
Le problème de Cauchy $ay''+by'+cy=0$ et $y(t_0)=y_0$ et $y'(t_0)=y_0'$, admet une unique solution.

Démonstration.
(*hors programme*) Nous traitons ici le cas où on cherche une solution à valeurs complexes et où le polynôme caractéristique a deux racines distinctes r_1 et r_2. Alors les solutions de l'équation différentielle considérées sont les applications y de la forme $t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ où λ et μ sont deux complexes. On a $y(t_0) = \lambda e^{r_1 t_0} + \mu e^{r_2 t_0}$ et $y'(t_0) = \lambda r_1 e^{r_1 0} + \mu r_2 e^{r_2 t_0}$.

Pour montrer que le problème de Cauchy admet une unique solution, il suffit de montrer que le système

$$\begin{cases} \lambda e^{r_1 t_0} + \mu e^{r_2 t_0} = y_0 \\ \lambda r_1 e^{r_1 t_0} + \mu r_2 e^{r_2 t_0} = y_0' \end{cases}$$

d'inconnues λ et μ admet une unique solution.

On peut s'en assurer par le calcul, ou on peut simplement remarquer que pour que ce système admette une unique solution, il suffit que l'équation

$$\lambda \begin{pmatrix} e^{r_1 t_0} \\ r_1 e^{r_1 t_0} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} e^{r_2 t_0} \\ r_2 e^{r_2 t_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$$

admette une unique solution.

Pour cela, il suffit de montrer que les vecteurs $\begin{pmatrix} e^{r_1 t_0} \\ r_1 e^{r_1 t_0} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} e^{r_2 t_0} \\ r_2 e^{r_2 t_0} \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$. Il suffit de vérifier qu'ils sont linéairement indépendants, ce qui est le cas puisque leur déterminant vaut $e^{r_1 t_0} r_2 e^{r_2 t_0} - r_1 e^{r_1 t_0} e^{r_2 t_0}$, qui est égal à $(r_2 - r_1) e^{(r_1+r_2)t_0}$, qui est non nul puisque $r_1 \neq r_2$. □

4.3. Résolution d'une équation avec second membre.

Théorème 4.3.1.
Si l'on connaît une solution $\tilde{y}$ de l'équation avec second membre alors on en connaît toutes les solutions : l'ensemble S des solutions de l'équation avec second membre est $S = \{ y_H + \tilde{y} \mid y_H \in S_H \}$.

Remarque 4.3.2.
On a déjà vu que si l'on connaissait une solution de l'équation $\tilde{y}$ avec second membre, alors on pouvait construire toutes les solutions de l'équation avec second membre à partir de l'ensemble des solutions de l'équation homogène.

Dans le cas d'une équation d'ordre deux à coefficients constants, on dit que l'ensemble des solutions a une structure de plan affine, car l'ensemble des solutions est l'ensemble des $\tilde{y}+y$ pour y parcourant un plan vectoriel.

• Cas particulier de seconds membres (le seul au programme) : $P(t)e^{\alpha t}$: P polynôme de degré n. on cherche une solution particulière de la forme $Q(t)e^{\alpha t}$ avec Q de degré :

(i) $\leqslant n$ si α n'est pas racine du poly. carac.
(ii) $\leqslant n+1$ si α est racine simple (i.e. $\Delta \neq 0$).
(iii) $\leqslant n+2$ si α est double.

Exemple 4.3.3. 1. Résoudre $y''-y=2+e^{2t}$. Solutions homogène : $t \mapsto \lambda e^{t} + \mu e^{-t}$, solutions particulières : -2 (second membre 2), et $\dfrac{1}{3}e^{2t}$.

2. Résoudre $y''+2y'+y=(1+x)e^{-x}$. Solutions homogène : $x \mapsto (\lambda x+\mu)e^{-x}$, solution particulière : $y(x) = \left(\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3\right)e^{-x}$.

5. Un peu de physique : circuits RL et RLC.

Des équations différentielles apparaissent fréquemment en physique. Par exemple les oscillateurs, qu'ils soient mécaniques ou électriques

mènent à des équations différentielle du second ordre. Ainsi l'étude du pendule simple conduit à une équation du second ordre, avec ou sans terme de degré 1, suivant que les frottements sont pris en compte ou non.
Nous étudierons ici des circuits électriques.

Remarque : on adopte exceptionnellement les notations des physiciens : i pour l'intensité et j pour le complexe correspondant au point $(0,1)$, et donc $j^2 = -1$.

5.1. Circuit RL.

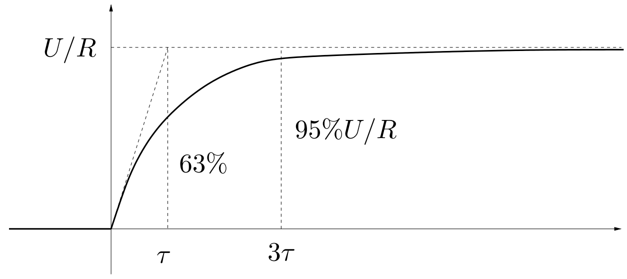
• On place en série : un générateur fournissant une tension constante U, une résistance R et une inductance L, et enfin un interrupteur, ouvert aux temps $t < 0$. Au temps $t = 0$ on ferme l'interrupteur, et on veut déterminer l'évolution de l'intensité : pour $t < 0$ on a évidemment $i = 0$.
On sait que la tension aux bornes de la résistance est Ri, celle aux bornes de l'inductance est $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = Li'(t)$. Avec la loi des mailles : $Li' + Ri = U$. On pose : $\tau = \dfrac{L}{R}$, appelée *constante de temps* du circuit. On va donc résoudre l'équation diff $i' + \dfrac{i}{\tau} = \dfrac{U}{L}$, sur $\mathbb{R}_+$.

• On commence par résoudre l'équation homogène : $t \mapsto K\mathrm{e}^{-t/\tau}$, $K \in \mathbb{R}$.

• On cherche une solution particulière : le second membre est une constante, on cherche donc une solution constante : ici $i = \dfrac{\tau U}{L} = \dfrac{U}{R}$ convient.

• Pour finir, on détermine K pour satisfaire la condition initiale : $i(0) = 0$. On obtient $K = -\dfrac{U}{R}$.

• Traçons le graphe de i.
On observe un régime *transitoire* (pour t proche de 0) et un régime *permanent* (pour t proche de $+\infty$). On peut déterminer graphiquement τ, en traçant l'asymptote horizontale, puis la tangente en 0, qui a pour équation $y = i'(0)t + i(0)$, soit



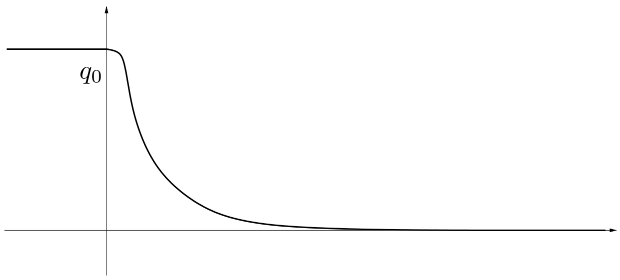
$y = \dfrac{U}{R\tau}t$. Pour $t = \tau$, ces droites se coupent. On considère que le régime permanent est atteint à partir de $t = 3\tau$. On a les approximations suivantes : $i(\tau) = \dfrac{U}{R}(1 - 1/e) \approx 0.63\dfrac{U}{R}$ et $i(3\tau) = \dfrac{U}{R}(1 - \mathrm{e}^{-3}) \approx 0.95\dfrac{U}{R}$.

5.2. Circuit RLC.

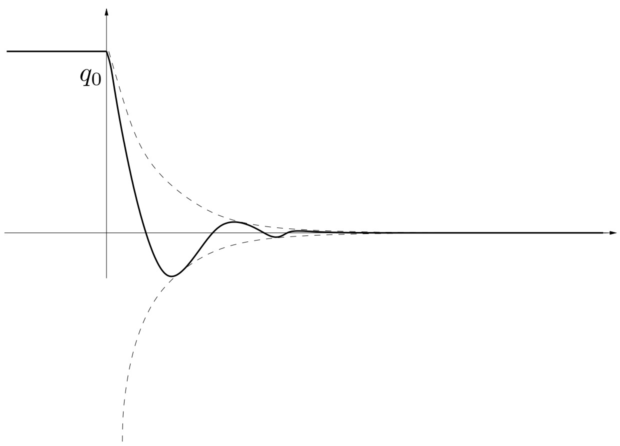
• Cette fois-ci on enlève le générateur de tension, mais on rajoute un condensateur de capacité C en série, et on veut étudier l'évolution de la charge q du condensateur. On sait que : $q = Cu_C$ et $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = q'$. On a donc : $Li' + Ri + q/C = 0$, mais on pose $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, appelée *pulsation propre* du circuit, et $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$, appelée *facteur de qualité*. Avec ces deux constantes, on obtient : $\dfrac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 q = 0$.

• Résolvons l'équation homogène : Le discriminant du poly car est $\Delta = \dfrac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \left(\dfrac{\omega_0}{Q}\right)^2(1 - 4Q^2)$. Il faut distinguer trois cas suivant la valeur de Q.

1. Régime apériodique ($Q < 1/2$ i.e. $\Delta > 0$) : les racines du poly car sont $-\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm \dfrac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1 - 4Q^2}$, toutes les deux strictement négatives, et appelées ω_1 et ω_2. Forme des solutions. On a : $q(0) = q_0$ et $q'(0) = 0$, car la charge q est constante pour $t \leqslant 0$, et q est continue. On a donc le graphe suivant :



2. Régime critique ($Q = 1/2$ i.e. $\Delta = 0$) : une racine double, $-\omega_0$. Forme des solutions. Même graphe qu'avant.
3. Régime pseudo-périodique ($Q > 1/2$ i.e. $\Delta < 0$) : les racines du polynôme caractéristique sont $-\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm j\dfrac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}$. Forme des solutions, avec un cos et un déphasage. Une solution est comprise entre $|\lambda|e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}$ et $-|\lambda|e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}$. Graphe :



Dans tous les cas, la décroissance de q vers 0 est très rapide : exponentielle. Pendant le régime permanent, il ne se passe rien.

6. Méthode d'Euler.

Comme on l'a vu, résoudre une équation différentielle revient à calculer une primitive d'une certaine fonction. Or il n'existe pas toujours de fonction élémentaire qui soit une primitive d'une fonction élémentaire donnée, ou alors on ne sait pas la trouver. Dans ce cas il est utile de savoir construire une approximation de la solution d'une équation différentielle de premier ordre. La méthode d'Euler est l'une des méthodes simples et classiques pour faire cela. Elle sera étudiée au second semestre en informatique.