

Feuille d'exercice n° 12 : **Limite d'une fonction**

Exercice 1 (✎) Déterminer les limites des expressions suivantes, en justifiant vos calculs.

- | | |
|----------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1) $\frac{x+2}{x^2 \ln x}$ lorsque $x \rightarrow 0^+$ | 12) $\frac{e^x - e^{x^2}}{x^2 - x}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ |
| 2) $2x \ln(x + \sqrt{x})$ lorsque $x \rightarrow 0^+$ | 13) $(1+x)^{\ln x}$ lorsque $x \rightarrow 0^+$ |
| 3) $\frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x \ln x}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ | 14) $\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ |
| 4) $\frac{e^{\sqrt{x+1}}}{x+2}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ | 15) $\left(\frac{x^3+5}{x^2+2}\right)^{\frac{x+1}{x^2+1}}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ |
| 5) $\frac{\ln(3x+1)}{2x}$ lorsque $x \rightarrow 0$ | 16) $\left(\frac{e^x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x+1}}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ |
| 6) $\frac{x^x - 1}{\ln(x+1)}$ lorsque $x \rightarrow 0^+$ | 17) $(\ln(1+x))^{\frac{1}{\ln x}}$ lorsque $x \rightarrow 0^+$ |
| 7) $\frac{2}{x+1} \ln\left(\frac{x^3+4}{1-x^2}\right)$ lorsque $x \rightarrow -\infty$ | 18) $\frac{x^{(x^{x-1})}}{x^{(x^x)}}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ |
| 8) $(x^2-1) \ln(7x^3+4x^2+3)$ lorsque $x \rightarrow (-1)^+$ | 19) $\frac{(x+1)^x}{x^{x+1}}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ |
| 9) $(x-2)^2 \ln(x^3-8)$ lorsque $x \rightarrow 2^+$ | 20) $\frac{x\sqrt{\ln(x^2+1)}}{1+e^{x-3}}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ |
| 10) $\frac{x(x^x-1)}{\ln(x+1)}$ lorsque $x \rightarrow 0^+$ | |
| 11) $(x \ln x - x \ln(x+2))$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ | |

Exercice 2 Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, étudier la limite en 0 des applications suivantes.

- | | |
|-------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| 1) $x \mapsto \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor$ | 2) $x \mapsto \frac{a}{x} \left\lfloor \frac{x}{b} \right\rfloor$ |
|-------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|

Exercice 3 (✎) Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} croissante, telle que $f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, où (u_n) est la suite de terme général n . Montrer que $f \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$.

Exercice 4 Montrer, en revenant à la définition de la limite, que $\frac{x^2 + \sin x}{(x+1)^2} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 1$.

Exercice 5 (✎) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la limite en $+\infty$ de $x \mapsto x^\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{x^\beta}\right)$.

Exercice 6 (✎) Montrer qu'une fonction périodique, non constante, n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 7 Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que f a une limite finie en $+\infty$, g est périodique et $f + g$ est croissante. Montrer que g est constante.

