Fonctions usuelles - un problème supplémentaire, corrigé

1) **a)** Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos \leqslant 1$ donc $1 \leqslant 5 - 4\cos x \leqslant 9$. Ainsi, f est définie sur $[0, \pi]$. Elle y est aussi dérivable comme composée et quotient de fonctions dérivables (dont le dénominateur ne s'annule pas). On obtient alors

$$\boxed{\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(5-4\cos x)\cos x - 2\sin^2 x}{(5-4\cos x)^{3/2}} \\ &= \frac{-2\cos^2 x + 5\cos x - 2}{(5-4\cos x)^{3/2}} \\ &= 2\frac{\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)(2-\cos x)}{(5-4\cos x)^{3/2}}. \end{aligned}}$$

Le facteur $2 - \cos x$ étant toujours positif, $\boxed{f'(x) \text{ est du signe de } \cos x - \tfrac{1}{2}.}$

b) On en déduit que $\boxed{f \text{ est croissante sur } [0, \pi/3] \text{ et décroissante sur } [\pi/3, \pi].}$

Elle atteint donc un $\boxed{\text{maximum en } \dfrac{\pi}{3}, \text{ qui vaut } \dfrac{1}{2}.}$

De plus, $f'(0) = 1$ et $f'(\pi) = -\dfrac{1}{3}$. La courbe représentative de f est tracée dans la figure 1.

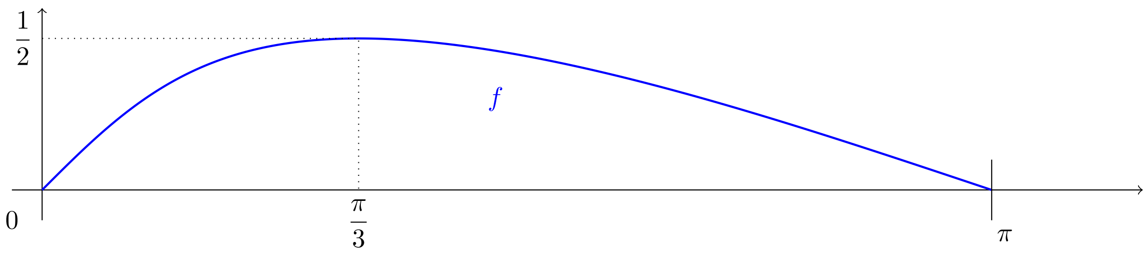

Figure 1 – Courbe représentant f.

2) **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$, on sait déjà que $5 - 4\cos x > 0$. Il reste à prouver que $-1 \leqslant \frac{4-5\cos x}{5-4\cos x} \leqslant 1$. Or,

$$\begin{aligned} -1 \leqslant \frac{4-5\cos x}{5-4\cos x} \leqslant 1 &\iff \left(\frac{4-5\cos x}{5-4\cos x}\right)^2 \leqslant 1 \\ &\iff (4-5\cos x)^2 \leqslant (5-4\cos x)^2 \\ &\iff 9 - 9\cos^2 x \geqslant 0 \\ &\iff 9\sin^2 x \geqslant 0\ , \end{aligned}$$

ce qui est toujours vrai. Ainsi, $\boxed{g \text{ est bien définie.}}$

b) Soit $x \in [0, \pi]$, alors, directement par la définition de l'arc cosinus,

$$\boxed{\cos g(x) = \frac{4-5\cos x}{5-4\cos x}.}$$

De là, on déduit

$$\sin^2 g(x) = 1 - \cos^2 g(x) = \frac{9\sin^2 x}{(5-4\cos x)^2}\ ,$$

puis, sachant que $g(x) \in [0, \pi]$ (définition de la fonction arc cosinus), $\sin g(x) \geqslant 0$,

on obtient $\boxed{\sin g(x) = \sqrt{\dfrac{9\sin^2 x}{(5-4\cos x)^2}} = \dfrac{3\sin x}{5-4\cos x}.}$

c) Le théorème de dérivation d'une fonction composée permet d'affirmer que g est dérivable en tout point x pour lequel $-1 < \frac{4-5\cos x}{5-4\cos x} < 1$, ce qui oblige *a priori* à exclure les points 0 et π (*reprendre les calculs de la question* ***2)a)****) avec des inégalités strictes*). Prenons donc $x \in]0,\pi[$: en dérivant la relation $\cos g(x) = \frac{4-5\cos x}{5-4\cos x}$, on obtient :

$$\forall x \in]0,\pi[\qquad -g'(x) \cdot \sin g(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{4-5\cos x}{5-4\cos x}\right) = \frac{9\sin x}{(5-4\cos x)^2} \ ,$$

donc

$$\boxed{\forall x \in \ ]0,\pi[\qquad g'(x) = \frac{9\sin x}{(5-4\cos x)^2} \times \frac{-1}{\sin g(x)} = -\frac{3}{5-4\cos x} \ .}$$

d) En utilisant la question **2)b)**, si $x \in [0,\pi]$, *(à vous de détailler ce calul)*

$$\boxed{(g\circ g)(x) = \mathrm{Arccos}\left(\frac{4-5\cos g(x)}{5-4\cos g(x)}\right) = \mathrm{Arccos}(\cos x) = x}$$

car $x \in [0,\pi]$. Ainsi, $g \circ g = \mathrm{Id}_{[0,\pi]}$ (on dit que g est une bijection involutive de $[0,\pi]$ sur lui-même), donc g est bijective et g est la réciproque de g.

$\boxed{\text{Dans un repère orthonormal, } (\Gamma) \text{ est donc symétrique par rapport à la droite d'éq. } y = x.}$

e) On voit que la dérivée de g est strictement négative, qu'elle tend vers -3 en 0 et $-\dfrac{1}{3}$ et π. Comme $g(0) = \pi$ et $g(\pi) = 0$, cela permet de tracer la courbe de g (voir figure 2).

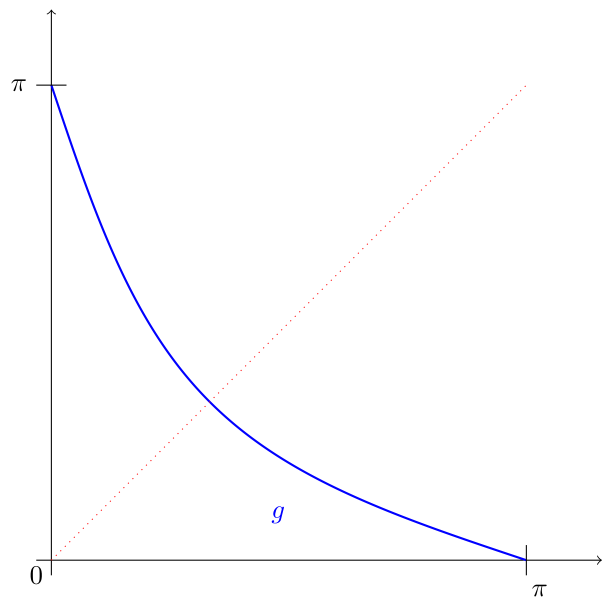

FIGURE 2 – Courbe représentant g.