Devoir à la maison n° 08

À rendre le 1er décembre

I. Borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Dans tout ce problème, on pourra utiliser sans démonstration le résultat connu suivant :

$$\forall x \in \mathbb{Q},\ x^2 \neq 2.$$

Soit

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Q}_+^* \;\middle|\; x^2 < 2 \right\} \text{ et } B = \left\{ x \in \mathbb{Q}_+^* \;\middle|\; x^2 > 2 \right\}.$$

On désire montrer par l'absurde que A ne possède pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. Supposons donc qu'une telle borne supérieure existe et notons la α ($\alpha \in \mathbb{Q}$). On pose $\beta = \dfrac{2}{\alpha}$.

1) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \dfrac{2}{x}$. Montrer que $f(A) = B$ et que $f(B) = A$.

2) Montrer que β est la borne inférieure de B dans $\mathbb{Q}$.

3) **a)** Montrer que $\alpha^2 \leqslant 2$ et en déduire que $\beta^2 \geqslant 2$.

b) En déduire une comparaison de α et de β.

4) **a)** Soit $a \in A$ et $b \in B$, montrer que $a \leqslant b$.

b) Retrouver la comparaison entre α et β précédemment obtenue.

5) En utilisant $\gamma = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$, déduire une contradiction des questions précédentes.

6) L'ensemble ordonné $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ possède-t-il donc la propriété de la borne supérieure ?

II. Une équation sur les entiers.

Résoudre en $(n, x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^4$ l'équation $n^x + n^y = n^z$.

— FIN —