线性代数

-29 课 相似矩阵和若尔当型

一. 知识概要

本节从正定矩阵的回顾谈起，介绍了相似矩阵和若尔当型。但是没有进行深入介绍，主要目的是让我们对这些变换方式有所了解。

二. 正定矩阵补充

在上一节学习的正定矩阵的基础上，我们给出以下问题：

（1）正定矩阵的逆矩阵是否也是正定矩阵？

解：

•由于逆矩阵的特征值是原矩阵特征值的倒数，所以**若 A 是正定矩阵，则A^{-1}也是正定矩阵**。

（2）假定 A 和 B 是正定矩阵，那么 A+B 呢？

解：

•由于 A、B 正定，对应可得到：

$$x^T Ax > 0，\quad x^T Bx > 0$$

•于是可以得到：

$$x^T(A+B)x > 0$$

所以，**若 A,B 都是正定矩阵，则 A+B 也是正定矩阵。**

（3）假设 A 是$m \times n$长方形矩阵，则由之前几节的讨论可知：A^TA是方阵，且对称，下面讨论其是否是一个正定矩阵？

解：

•使用正定矩阵判据式：

$$x^T A^T Ax$$

$$\text{得到：}(Ax)^T Ax = |Ax|^2 > 0$$

条件：A 的各列向量线性无关（零空间只有零向量），即仅当 x 为零向量时，Ax=0。

即：**矩阵 A 各列线性无关，列满秩时，可以确保A^TA是正定矩阵。**

对于正定矩阵，不需要进行“行交换”，也不必担心主元过小或者等于零。这可以简化我们的很多计算。

三. 相似矩阵

对于两个 n 阶方阵 A 和 B，如果说两者相似，这意味着存在某个可逆矩阵 M，使得等式：

$$B = M^{-1}AM \text{ 成立}$$

【例】设 A 具有无关的特征向量，则由前面几节的知识知道：

$$S^{-1}AS = \wedge$$

按照相似矩阵定义的说法，则 A 与 $\wedge$ 相似。但是与 A 相似的不只是这个对角阵，任取一对矩阵与矩阵的逆，就可以计算与 A 相似的矩阵。例如：

假设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, 可以知道其特征值为 1、3

下面任取一对矩阵与矩阵的逆，计算与 A 相似的矩阵：

$$M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -15 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

最终得到的这个矩阵 B 就与矩阵 A 相似。

那么矩阵 B 与 A 有什么共同性质呢？
答案是：它们具有相同的特征值（计算 B 的特征值可以验证这一结论）

结论：相似矩阵特征值相同（事实上，其线性无关的特征向量数目也一样）
证明：

- 首先写出特征方程： $Ax = \lambda x$
- $A = AI = AMM^{-1}$得到： $AMM^{-1}x = \lambda x$
- 同时左乘M^{-1}得到: $M^{-1}AMM^{-1}x = M^{-1}\lambda x$
- 由 $B = M^{-1}AM$：

$$BM^{-1}x = \lambda M^{-1}x$$

这也就说明了：A 与 B 特征值相同，线性无关的特征向量数目也相同。但是特征向量不一定相同（B 的特征向量对应为：$M^{-1}x$）

四. 若尔当型

4.1 重特征值的相似情况

上面介绍相似矩阵时提到过，相似矩阵的特征值相同，那么，是否特征值相同的矩阵就是属于同一类呢？下面通过二阶矩阵进行讨论：

设 $\lambda_1=\lambda_2=4$，具有此特征值的二阶矩阵可以被分为两类：

（1）$\begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}$自己是一类，也就是说，这类只有一个矩阵。

$$M^{-1}\begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}M = 4M^{-1}\mathrm{I}M = \begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}$$

由上面这个相似运算过程，我们知道与$\begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}$0 相似的只有其自身。

（2）其他特征值为 4 的矩阵是另一类，例如：$\begin{bmatrix}4 & 1\\0 & 4\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}5 & 1\\-1 & 3\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}a & *\\ * & 8-a\end{bmatrix}$。其中最有代表性的是$\begin{bmatrix}4 & 1\\0 & 4\end{bmatrix}$，我们称之为**若尔当标准型。**而这一类矩阵不可以相似对角化（否则就与第一类相似了）

结论：对于之前不能完成相似对角化的矩阵，都可以通过某种特殊方法，完成近似的“对角化”。如若尔当标准型。

4.2 若尔当型

由上面我 4.1 可知，若尔当型出现的背景是特征值数量相同，但是矩阵不相似情况。接下来我们来举两个个具有四重根的例子

【例 1】给定矩阵：

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

分析：

这个矩阵的四个特征值都是 0，对应的无关特征向量是两个，零空间的维数也为 n-r = 4-2 = 2。所以 Ax = 0 的解空间是二维的，A 有两个特征向量。

【例 2】给定矩阵：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

分析：

这个矩阵的四个特征值同样都是 0，同样有有两个特征向量，但是，此时这个矩阵与【例 1】的矩阵并不相似。

接下来我们引入若尔当块的概念，然后我们可以发现【例 1】和【例 2】的若尔当块不一样，因此它们并不相似。

若尔当块： J_i 表示 i 阶的若尔当块，它只有一个重复的特征值。

满足形式：

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 \\ & & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

解释：

若尔当块的对角线上都是同一个数，即重特征值λ_i。而对角线元素上方的第一个元素为 1，矩阵其余元素皆为 0。

另外注意，若尔当块的特征向量只有一个。而若尔当块可以构成若尔当矩阵。形如：

$$J = \begin{bmatrix} [J_1] & & \\ & \dots & \\ & & [J_d] \end{bmatrix}$$

（1）若尔当块的个数等于矩阵特征向量的个数。因为每一块对应于一个特征向量。

（2）而如果矩阵的特征值不相同，那么它就是一个可对角化的矩阵（对应的图中的 d 就是 n），所对应的若尔当阵就是对角阵∧。

（3）每个方阵都相似于一个若尔当阵 J

我们从之前的例子中的两个矩阵可以找到若尔当块：

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

由于这两个矩阵的若尔当块的分块不一样，所以【例 1】与【例 2】是的矩阵是不相似的。

这节课中并没有对如何求得若尔当矩阵展开详细讨论。

五. 学习感悟

本节对相似矩阵，若尔当块进行了介绍，主要从正反两方面了解了矩阵相似时对应特征值情况。进而引出了若尔当阵的判断方法。但是并没有对它的求解过程进行深入了解。