

## 一、知识概要

这一节中我们介绍一下消元法，即是上一节中我们提到的“系统化”求解方程所用的方法，通过矩阵消元运算可以很轻松地求解复杂方程。另外介绍了消元矩阵，即我们的消元运算在矩阵乘法中所表现的形式。并从消元矩阵引入，介绍逆矩阵的基础知识。

## 二. 消元法求解方程

### 2.1 消元法介绍

对于一些“好”的系数矩阵（可逆矩阵） $A$  来说，我们可以使用消元法来求解方程  $Ax = b$ ，我们还是从一个例子谈起。

【例 1】

$$\text{求解方程: } \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3x + 8y + z = 12 \\ 4y + z = 2 \end{cases}$$

还是使用矩阵运算，将方程写为矩阵形式  $Ax = b$ 。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

所谓矩阵的消元法，与我们初等数学中学习的解二元一次方程组的消元法其实师出同门，都是通过将不同行的方程进行消元运算来简化方程，最后能得到简化的方程组，只不过这里我们把系数单独抽出来进行运算，寻找一种矩阵情况下的普遍规律而已。

消元针对的对象是系数矩阵  $A$ :  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ 。首先注意，左上角的 1 是消元法的关键，我们称之为主元 1，接下来通过我们熟悉的“将一行乘倍数加到另一行”的行化简方法将第一列中除了主元之外的元素全变为 0。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2,1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

第一步目标达成，我们在第一列中只留下了主元 1，很好，接下来我们可以认为第一行与第一列已经“完工”了，再看去掉第一行第一列之后右下角剩下的部分： $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ，同样，我们将左上角的 2 视为主元，消元第一列，使其列上（不包括第一行中元素）除此主元 2 之外皆为 0。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3,2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

这时候第三行只剩下 5，我们直接将其处理为主元即可。得到：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2,1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3,2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

由于 A 矩阵可逆，经过消元处理得到的上三角矩阵  $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$  中有三个主元，至此，消元结束，得到的 U 即为我们想要化简的形式。

注：

并不是所有的 A 矩阵都可消元处理，需要注意在我们消元过程中，如果主元位置（左上角）为 0，那么意味着这个主元不可取，需要进行“换行”处理，首先看它的下一行对应位置是不是 0，如果不是，就将这两行位置互换，将非零数视为主元。如果是，就再看下下行，以此类推。若其下面每一行都看到了，仍然没有非零数的话，那就意味着这个矩阵不可逆，消元法求出的解不唯一。下面是三个例子：

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 2.2 回带求解

其实回带求解应该和消元法同时进行，只不过本课中以及一些软件工作原理中它们是先后进行的，所以我们这里分开讨论，先介绍增广矩阵：

还是【例 1】中的方程： $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}$ ，我们先给出增广矩阵形式：

$$\text{增广矩阵: } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

一下子就看出来了，就是把系数矩阵 A 和向量 b 拼接成一个矩阵就行了。

然后像我们之前说的那样消元，但是这次要带着增广的  $b$  (蓝色部分) 一起进行：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2,1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3,2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{bmatrix}$$

好，带回方程  $Ax = b$ ，变为：

$$\begin{cases} 1x + 2y + z = 2 \\ 2y - 2z = 6 \\ 5z = -10 \end{cases}$$

从下向上开始求解，很容易求出  $x$ ， $y$ ， $z$  的值了。

### 三. 消元矩阵

#### 3.1 行向量与矩阵的乘法

上面的消元法是从简单的变换角度介绍了消元的具体操作，接下来我们需要用矩阵来表示变换的步骤，这也十分有必要，因为这是一种“系统地”变换矩阵的方法。

首先我们需要介绍向量与矩阵之间的乘法，上一节中我们提到了矩阵与列向量之间的乘法，例如：

$$\begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \text{矩阵列的线性组合} = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}$$

\*3   \*4   \*5

这并不能解决我们现在的问题，因为消元法之中我们用到的是行变换，那么我们考虑这个问题，行向量与矩阵的乘积是什么呢？

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} = \text{矩阵行的线性组合} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

\*1   \*2   \*7

至于行向量与矩阵之间乘法为什么变为左乘，是因为此时，行向量是  $1 \times 3$  的，矩阵是  $3 \times 3$  的，故可以得到一个  $1 \times 3$  的结果。如果在右面的话，

$$\begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

这是个  $3 \times 3$  矩阵乘上一个  $1 \times 3$  矩阵，其中衔接部位

$1 \neq 3$ ，导致错误。其实学过矩阵之间的乘法之后这些东西都极为简单，但这里还是建议大家尽量从向量的角度去考虑问题。

### 3.2 消元矩阵介绍

好的，接下来是重点。学会了行向量与矩阵之间的乘法，我们就可以使用行向量对矩阵的行做操作了。所谓消元矩阵，就是将消元过程中的行变换转化为矩阵之间的乘法形式。

$$\text{首先我们要知道, } [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} = [1 \ 1 \ 1]$$

$$[0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ 1 & 1 & 1 \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} = [1 \ 1 \ 1]$$

$$[0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [1 \ 1 \ 1]$$

此时将 $[1 \ 0 \ 0]$ ， $[0 \ 1 \ 0]$ ， $[0 \ 0 \ 1]$ 构成一个矩阵：单位阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，

我们很容易验证，这样的单位阵与矩阵相乘不改变矩阵。消元矩阵就是它的变换形式。仍是以例一中的矩阵说明：

$$\begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

首先明确：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \text{本身}$$

我们消元过程是将第一行乘-3 加到第二行，这是对第二行的操作，那么就从单位阵得到第二行着手：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第一行乘-3 加到第二行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

单独抽取第二行的 $[-3 \ 1 \ 0]$   $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} * -3 \\ * 1 \\ * 0 \end{matrix} = [0 \ 2 \ -2]$

所以，经验证，这一步的消元矩阵就是 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，记为  $E_{21}$ ，意义是将矩阵 A 之中 2 行 1 列 (2, 1) 位置变为 0 的消元矩阵。

同样，计算  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3,2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{bmatrix}$  这一步的消元矩阵，即为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(第二行}*(-2)\text{)加到第三行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} (E_{32})$$

得到：

$$E_{32} E_{21} A (\text{系数矩阵}) = U (\text{上三角矩阵})$$

使用结合律，先计算  $E_{32} E_{21}$ ，记为 E，则 E 就是整个此消元过程的消元矩阵。

**核心：求消元矩阵就是从单位阵 I 入手，按照 A 每次变换的消元步骤操作 I 矩阵，能分别得到 E 某行某列，最后累积得到 E 即可。**

### 3.3 行交换矩阵与逆矩阵

#### (1) 行变换与列变换

有了上面消元矩阵的启发，不难得到，能够交换 2x2 矩阵中两行的矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

而交换 2x2 矩阵中两列的矩阵为：

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$$

所以，左乘等同行变换，右乘等同列变换。

#### (2) 逆矩阵初探

可以说我们学会了消元矩阵，就相当于我们可以用矩阵乘法对一个矩阵进行任何变化了，那么我们考虑一个反过程，即我们把一个消元结束的矩阵 U 如何变为未经消元的矩阵 A 呢？答案就是乘上一个逆矩阵。

比如【例 1】中的  $E_{21}$ ，是第一行 $\times(-3)$ 加到第二行，即  $E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，那

么与之相反，我们在第二行上加上第一行 $\times 3$ 就可以复原这一运算过程，即：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

其中的  $I$  乘矩阵  $A$  不会造成影响。此时的  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  称为  $E_{21}^{-1}$ ，就有了：

$$E_{21}^{-1} E_{21} = I$$

此时的  $E_{21}^{-1}$  就是  $E_{21}$  的逆矩阵。

## 五. 学习感悟

本节从矩阵消元的角度，介绍解方程的通用做法，并介绍了消元矩阵，使我们从矩阵乘法层面理解了消元的过程，并延伸了消元矩阵的应用：就是基于单位阵  $I$  的变化，对矩阵  $A$  进行行列变换的过程。这一节的消元法以后会常用，要熟练掌握才可以。