线性代数

-8 课　Ax=b 的可解性和解的结构

一、知识概要

上一节中，我们学到了矩阵引出的空间概念，并学习了 Ax = 0 的求解过程。本节我们进一步探讨，给出求解 Ax = b 的一般求解方法以及可解条件。并总结上节中提到的“秩”对不同形式方程的解的影响。

二．Ax=b 的解

2.1 可解性

这节要介绍解 Ax = b，这个方程并不一定有解。我们通过一个例子来说明下这个问题：

【例 1】

求方程：$\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 6 & 8\\ 3 & 6 & 8 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}$ 的可解条件

这里的 A 有一个特点，就是 1，2 两行之和等于第三行。根据之前学到的技巧(第二课的增广消元法)，列增广矩阵后消元，由于之前写过很多消元步骤了，这里不再赘述。不难得到：

$$\begin{bmatrix}\mathbf{1} & 2 & 2 & 2 & b_1\\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 4 & b_2-b_1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3-b_2-b_1\end{bmatrix}$$

观察最后一行，代入方程会得到：$0 = b_3-b_2-b_1$。这一行方程必须成立。于是我们就得到了，本方程的可解条件为: $0 = b_3-b_2-b_1$。

再看这个条件：$0 = b_3-b_2-b_1$，它反映了一种线性组合特点，即 b 向量的第三个分量是前两个分量之和。反过来看 A 矩阵本身特点，发现 A 矩阵第三行也是前两行的和。记得之前我们说过，Ax = b 有解的条件是 b 在 A 的列空间中。这个例子再一次印证了这个条件。

我们从本题中得到一个启示：Ax = b 有解的条件：

• 列空间角度：

当且仅当 b 属于 A 的列空间时成立。

• 线性组合角度：

b 必须是 A 各列的线性组合。

• A 矩阵本身变换角度：

如果 A 的各行线性组合得到零行（如例【1】），那么对 b 取相同运算方式，必将得到自然数 0。

2.2 完整解方程过程

接下来我们介绍通解，特解，并借此求解方程 Ax = b。

我们接着【例 1】开始聊。设 $b = \begin{bmatrix}1\\5\\6\end{bmatrix}$满足可解条件，我们来彻底求解方程。

首先介绍一下**通解**概念。什么是通解呢？就是满足这个方程的所有解。将“无穷解”用一种形式表达出来。

对于 Ax = b 这个方程，**通解 = 矩阵零空间向量 + 矩阵特解**。这很好理解，矩阵零空间向量代入方程最后结果等于 0，所以它不会影响等式，而是把方程的解向量扩展到一个类似子空间上，使我们求出的解更具有普遍意义。而矩阵零空间向量我们之前介绍过，那么我们**只需要关注特解怎么求**就好了。

上一节中我们求解 Ax = 0 方程的特解时，分别将自由变量赋值为 0/1，这是因为最特殊的赋值方式：**自由变元全部赋值为 0** 的方式在 Ax = 0 中行不通，因为这样的赋值方式在 Ax = 0 中得到的是零向量,但是我们最后求出的通解为：

$$x = c\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}2\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$$

只要将系数全定为 0 就可以得到“零向量”这个解。很明显在解 Ax = 0 时不能将自由变元全赋为 0.

但是 Ax = b 这个方程不同，只要 b 不是 0，我们就可以将**自由变元全部赋值为 0**。本例中我们使用此方法得到特解：

以下为完整过程：

我们让自由变元x_2，x_4 = 0，回代方程得到：

$$
\begin{aligned}
&x_1 + 2x_3 = 1 \\
&2x_3 = 3
\end{aligned}
$$

解得特解为：$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

通过上一节的知识我们很容易求出 Ax = 0 对应的 A 在零空间中的解：

$$
c_1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

所以最后的结果为：**特解 + 零空间任意向量**。

$$
\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

这个解集在几何角度的解释为：R^4上的一个二维平面，很显然，这个解集无法构成一个向量空间，因为解集中连零向量都没有。也就可以理解为：解集在空间中表现为R^4中的一个不过原点的平面。

三 .m*n 的矩阵 A 的秩与解的关系

很明显在上面我们消元求 Ax = b 的过程中，矩阵 A 的秩对最后解的形式有至关重要的影响，下面我们就总结一下这方面的问题。

3.1 列满秩

即 m*n 的矩阵 A 中，秩 R = n < m。例如：

$$
m\left\{\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}}^{n}\right. \qquad R = 2 = n < m
$$

消元后 A 为$\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$形式。我们发现这样的矩阵没有自由变元，即$x_1$，$x_2 \cdots x_n$都为

主元。也就是说这样的矩阵零空间向量中只有一个向量——零向量。这样的矩阵 A 构造的方程 Ax = b，要么不满足可解条件，要么只有一种符合对应方程组的解。

解最后只有两种情况：

- 有解且唯一
- 无解，不满足可解条件 不可能没有解?

3.2 行满秩

即 m*n 的矩阵中，秩 R = m < n。例如：

$$m\left\{\overbrace{\begin{bmatrix}1 & 2 & 6 & 5\\ 3 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}}^{n}\right. \qquad R = 2 = m < n$$

上一节中介绍过，这样的矩阵消元之后会是$[I \quad F]$形式（I 表示单位阵，F 表示其他部分），很明显由这样的矩阵构成的方程 Ax = b，最后肯定是无穷多个解，因为该种矩阵中，永远有自由变元(n - R)个。

3.3 行列皆满秩

当 m*n 矩阵 A 是方阵时，即有 m = n 时，那么秩 R = m 时，R 也必 = n。例：

$$m\left\{\overbrace{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}}^{n}\right. \qquad R = 2 = m = n$$

这种矩阵经过消元，必可以化为单位阵 I，自由变量个数为 0。只能得到一个全是主元的方程组。所以这种矩阵构成的 Ax = b 方程最后只能有唯一解。

3.4 不满秩

秩 R < n,而且 R < m 时，A 矩阵不满秩，此时 A 可化简为$\begin{bmatrix}I & F\\ 0 & 0\end{bmatrix}$形式，最后化简结果中有 0 行。如【例 1】中的矩阵，b 的分量与零行牵扯出了可解条件的存在。所以这样的矩阵 A 所构成的 Ax = b 方程解有两种情况：

- 不满足可解条件（零行导致的可解条件）
- 解无穷多个（特解 + 零空间所有向量）。

3.5 总结

观察以上情况，自由变量总为（n-r）个，所以先判断自由变量个数可以初步判断 Ax = b 的解的结构：

$$\begin{cases} n - r = 0 \text{ 时，方程即为唯一解或不满足可解条件而无解。} \\ n - r \neq 0 \text{ 时，方程为无穷多解或不满足可解条件而无解。} \end{cases}$$

而可解条件的产生是由于 A 消元之后的 0 行导致的，所以再判断 A 消元之后会不会有零行产生就可以确定解的结构：

$$\begin{cases} \text{消元后有零行产生时，需要考虑方程是否满足可解条件。} \\ \text{消元后没有零行时，方程不用考虑可解条件的影响。} \end{cases}$$

四、学习感悟

本节基于上一节中零空间的求解，延伸介绍了 Ax = b 的一般解法。并从 A 矩阵秩的角度探讨了秩与方程解的结构之间的联系。至此我们已经学完了解方程 Ax= b 形式矩阵方程的所有问题，在这个过程中，我们需要注意的无非就是自由变元个数，以及通解和特解问题，整体而言，这部分重在求解流程以及如何理解。正确理解向量空间之后，理解这种矩阵方程问题也就不是什么难事了。