线性代数

-35 课　总复习

一、知识概要

本节为习题课，通过习题回顾整个线性代数课程内容。

二．例题

【例 1】已知 $Ax=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ 无解，$Ax=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ 有一个解

（1）A 是一个 mxn 的矩阵，秩为 r，试求解 m，n，r 这三个未知量间的关系。

分析：

根据矩阵运算规律，由于结果是三维向量，故 A 的 m=3

下面看秩：

如果方程没有解，那么矩阵的一些行就是其他行的线性组合。因为如果每一行都有主元，那此时不用再考虑方程可解条件，方程肯定有解。所以当方程无解时，秩 r 肯定小于 m

而对于方程只有一个解的情况，这说明零空间只有零向量。

综上说明：

$$r = n < m = 3$$

（2）试写出一个满足条件的矩阵

这里直接给出一个例子：

$$A=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

在上面的基础上，判断：

（3）$\left|A^TA\right|=\left|AA^T\right|$ 是否成立？

分析：不成立，由后面两问知：这两个行列式的值一个为 0，一个不为零，故二者不相等。

注意：如果 A 是方阵，那么上面的等式就是成立的。

（4） $A^T A$可逆？

可逆，这判断不需要实际算出矩阵这里，因为 r=n，列满秩。此时矩阵 A 各列线性无关，矩阵可逆。

（5） AA^T是正定矩阵？

分析：以上面我们举的例子来说，矩阵AA^T规格是 3x3 的，但是秩为 2，故一定不是正定矩阵。

（6）求证：对于方程$A^T y = c$（c 为任意向量）至少有一解

（事实上，对任意 c 有无穷多个解）

分析：

A^T是一个 n*m 的矩阵。什么时候方程有解？当行满秩时，即行向量线性无关时。而由之前的讨论知：A 的 r=n，即行向量线性无关，故至少有一解。而进一步来看，矩阵 A 的零空间维数是 m-r，由 r=n<m=3 这个关系可以知道，零空间中不仅仅有零向量，所以对应$A^T y = c$有无穷多个解。

【例 2】已知$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$，

（1）解方程： $Ax = v_1 - v_2 + v_3$，求解 x

这里显然可以直接写出：

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

（2）A 的列关系满足：$v_1 - v_2 + v_3 = 0$，那么解是否唯一？

分析：

之前学习过，当零空间中只有零向量时，解唯一。而由于已知的$v_1 - v_2 + v_3 = 0$，根据上一题，很明显$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$在零空间中，故零空间中不只有零向量，所以解不唯一。

（3）如果v_1，v_2，v_3标准正交，v_1，v_2怎样的线性组合最接近v_3？

分析：

这个问题就是在问 v_1，v_2 构成的平面上，哪一点最接近于 v_3。那么我们以空间坐标系为例，v_1，v_2，v_3 可以是标准基，即轴上的向量。

而 xy 面上最接近 v_3，即 z 轴的点就是零点。

故：

$$0v_1 + 0v_2 \text{ 最接近 } v_3 \text{。}$$

【例 3】已知一个马尔科夫矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$，求其特征值？

分析：

首先观察到矩阵 A，发现 A 不可逆，三列线性相关。故 A 有一个特征值为 0，

另外，这是一个马尔科夫矩阵，因此有一个特征值为 1，另外矩阵的迹为 0.8，故第三个特征值为-0.2。

记得介绍马尔科夫矩阵时，我么最常见的题型即是 u_k 与 u_0 之间的关系。求人口流动模型时就是如此。接下来复习一下：

问题：设 $u_0=\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$，$u_k = A^k u_0$，那么 k 不步之后，u 将趋近于什么？

解：

根据之前介绍过的内容，联系差分方程的介绍，这里有一个分解式：

$$u_k \;=\; c_1\lambda_1{}^k x_1 + c_2\lambda_2{}^k x_2 + c_3\lambda_3{}^k x_3$$

三个特征值已知，带进去看趋于无穷的情况得到（λ_2=1）：

$$u_\infty = c_2 x_2$$

下面来求特征值 1 **对应的特征向量** x_2：

令 $(A-I)x=0$，解得 $x_2=\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

下面来求**对应的系数** c_2：

这一般通过初始向量 u_0 来求。之前介绍的过程就是这样，但是这里，我们可

以通过另一种思路进行计算：还记得之前介绍的人口模型，在那里 $u_k = A^k u_0$ 这一过程只改变人口的分配比，不改变人口总数。所以看 $u_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$ 故这里一共初始有 10 人，而经过分配，人数分配变为了 $c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$，这样一来就很明显了：系数就是 1 时满足总人数不变。

综上，故：

$$u_\infty = c_2 x_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

【例 4】求解各个满足性质的二阶矩阵

（1）将向量投影到 $a = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ 所在直线的矩阵 P

解：

直接代入投影矩阵公式：$P = \dfrac{aa^T}{a^T a}$

（2）矩阵的特征值和对应的特征向量分别是：0，$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$；3，$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

解：

两个特征向量线性无关，直接套用对角化公式：$A = S \wedge S^{-1}$

（3）给出一个矩阵 A，不能分解成 $B^T B$ 的形式。

分析：

$B^T B$ 还是对称的，故我们只要给出一个非对称的矩阵即可。

（4）给出一个矩阵，有正交的特征向量，但不是对称的。

分析：

首先反对称矩阵满足这个性质，例如：$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

或者有复数域上的正交特征向量组的正交矩阵，如之前介绍过的:$\begin{bmatrix} cosx & -sinx \\ sinx & cosx \end{bmatrix}$

【例 5】在最小二乘的范畴内讨论问题。给定 Ax = b 形式：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}，其中\begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{3} \\ -1 \end{bmatrix}$$

A　　x　　= b

问题一：求 b 到 A 的列空间的投影

由最小二乘的意义，这里的投影就是将$\begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix}$代入$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$。得到的

即为：$\frac{11}{3} \times 列1 - 列2$

问题二：找出另一个非零向量 b 使得最小二乘的结果是 0，就是将问题变为：

$$寻找算式\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \end{bmatrix}中的 b，使得其中\begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

分析：

根据最小二乘法的意义，这里我们在求一个 b，使得列向量的最佳线性组合是 0，所以题目要求的 b 正交于这些列向量，也正交于列空间假设我们取：

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

这时这个 b 向量正交 A 的所有列向量，且最佳的拟合方式是$\begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$。

三. 学习感悟

至此，这门课程就算结束了，但是经过这一阶段的学习，我发现，仅仅看视频是不够的，我对这门课程的很多理解也是基于之前学习线性代数时的感悟与印象。理解线性代数更多内容还是要看教材，详细内容也都在教材上。笔记到此为止了，希望对大家有所帮助。