线性代数

-33 课　复习 3

一、知识概要

本节为习题课，主要回顾了下 26~32 课的学习内容，并通过习题进行复习。

二．复习

2.1 回顾知识

首先我们回顾了特征值与特征向量，Ax = λx 方程，以及求特征向量的方程。并介绍了微分方程的求解。之后我们学习了特殊形式的矩阵，从对称矩阵开始，对称矩阵特征值永远为实数。并且总存在足够的特征向量。即使特征值重复，特征向量也是足够的，我们选取正交的特征向量，将对称矩阵对角化为 $A = A^T = Q\wedge Q^T$。并通过对称矩阵，引出了正定矩阵概念。

之后我们还介绍了相似矩阵 $B = M^{-1}AM$。相似矩阵实际上就是在用不同的基表示同一样东西。同时，A 与 B 也具有同样的特征值。同样，这个形式也帮助我们更加方便的计算矩阵的幂。

最后我们还介绍了 SVD 分解方式：$A = U\sum V^T$ 。

2.2 例题

【例 1】解方程：$\dfrac{du}{dt} = Au = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} u$

解：

之前介绍过通解形式：

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} x_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} x_3$$

首先，我们要求解其特征值与特征向量，然后通过 u（0）来确定这三个常数。

显然 A 是一个奇异矩阵，于是可以得到：$\lambda_1 = 0$

令行列式：

$$\left| A - \lambda I \right| = 0$$

可以求得另外两个特征值：

$$\lambda_2 = \sqrt{2}i, \lambda_3 = -\sqrt{2}i$$

在这里先暂停继续求解。思考几个问题。

问题一：最终的稳定状态是否会趋向零？
分析：

根据特征值，u(t)的大小会保持不变，解既不发散，也并不收敛于 0。

问题二：当 t 为何值时，会有：u（t）=u（0）？
分析：

由复数的几何意义，我们可以得到其周期 T 满足等式，而我们知道，$e^{0}=e^{2\pi i}=1$，设 T 是一个周期，这就意味着当$\sqrt{2}iT=2\pi i$ 时，它就回到了 u（0）。

解得：

$$T=\sqrt{2}\pi$$

注：除了上面两个问题，这里还给出了一个结论：

当 $AA^{T}=A^{T}A$ 时，矩阵 A 具有正交的特征向量。

对称阵、反对称阵和正交阵就满足这样的条件

下面继续考虑解方程：
如何将 u（t）表示成矩阵指数的形式？
方程的解：

$$u(t)=e^{At}u(0)$$

而如果 A 可以对角化，使用 23 课学习的分解方法与结论，得到；

$$e^{At}=Se^{\wedge t}S^{-1}$$

S 可以直接求特征向量得到，因为这里的 A 满足 $AA^{T}=A^{T}A$，所以求得的特征向量是正交的，必然线性无关，直接写入矩阵 S 即可。而λ通过我们的求解已知，方程的解代入即可。

【例 2】已知一个 3*3 矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = c, \lambda_3 = 2$，对应特征向量：

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

有以下问题：

（1）满足什么条件时，这个矩阵 A 可以被对角化，请给出对应 c 的范围。

事实上，对于所有的 c 都可以对角化。因为这三个特征向量是相互正交的，所以这个矩阵具有三个线性无关的特征向量，可以构成 S，可以对角化。

（2）c 取何值时，矩阵对称？

对称阵的特征值都是实数，所以 c 取实数。

（3）c 取何时，得到正定矩阵？

不可能（已经有特征值为 0）

（4）什么时候矩阵正半定？

当 c 不小于零的时候。

（5）可能是马尔可夫矩阵吗？

不可能;因为马尔科夫矩阵最大特征值为 1,但是这里有一个特征值大于 1。

（6）矩阵可能是一个投影矩阵的两倍吗？

符号化这个问题，即是：A/2 可能是 P 吗？

对于投影矩阵 P，满足： $P^2 = P$，从特征值的角度可以推得：$\lambda^2 = \lambda$

解得：

$$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 1$$

这里要求:

$$2P = A$$

所以取：c 为 0 或 2

【例 3】已知矩阵 A 对称且正交，回答下列问题。

（1）它的特征值可以等于什么？

分析：

我们知道对称阵的特征值是实数，那么正交矩阵的特征值呢？事实上，正交矩阵的特征值的绝对值为 1（只改变方向，不改变大小）

证明：

• 记正交矩阵为 Q，有:

$$Qx = \lambda x$$

接下来对等式两边取长度，首先我们要知道，正交矩阵不改变向量的长度，因为如果求 Qx 的长度，即为$x^T Q^T$Qx，而Q^TQ = I，所以$x^T Q^T$Qx = x^Tx。所以 Q 不改变向量长度。

• 对等式两端同时取长度：

$$\|x\| = |\lambda|\|x\|$$ （正交矩阵不改变长度）

于是证得结论，特征值绝对值为 1。

所以，该问题的答案是：-1 或者 1

（2）这样的矩阵一定没有重特征值吗？

不一定，这个如果是 3x3 的矩阵，特征值只有两种选择，这时就有重复的特征值了。

（3）这样的矩阵可以对角化吗？

A 有重复的特征值，但是任何对称矩阵和任何正交矩阵都可以对角化。不仅如此，还可以选择正交的特征向量构成它们的正交阵 Q。

（4）这样的矩阵可逆吗？

可逆，因为（1）中证明了，正交矩阵特征值不可能是 0。

（5）证明：$\frac{1}{2}(A+I)$是一个投影矩阵。

方法一：

逐一验证投影矩阵的性质（P^T=P，P^2=P）

首先验证第一个性质：$\frac{1}{2}(A+I)$显然是对称阵。

其外验证第二个性质：

$$P^2 = \frac{1}{4}\left(A^2 + 2A + I\right)$$

而 A 是对称矩阵，且是正交矩阵，所以：

$$A = A^T = A^{-1}$$

得到：

$$A^2 = AA^{-1} = I$$

代入上式P^2：

$$P^2 = \frac{1}{4}\left(A^2 + 2A + I\right) = \frac{1}{2}\left(A + I\right) = P$$

满足性质二，故其为投影矩阵。

方法二：从特征值的角度考虑：

$\frac{1}{2}\left(A+I\right)$的特征值为：(-1+1)/2 和(1+1)/2。即为 0 和 1，且 A 对称，故为投影矩阵。

三. 学习感悟

这一章是对特征值。特征向量的深入讨论。延伸了正定矩阵与对称矩阵的概念。并介绍了相似矩阵与 SVD 分解。这些内容是这门课程的最后一部分。之后只剩下一课需要讨论：左右逆与伪逆。