线性代数

-34 课 左右逆与伪逆

一、知识概要

本节从矩阵的左右逆谈起，并介绍了伪逆矩阵。本节内容更多的是复习以及扩展以往知识。

二．逆矩阵

2.1 满秩逆矩阵

之前我们学习过，对于 m*n 的矩阵 A，若秩 r = m = n，则 A 为满秩矩阵，即有逆矩阵A^{-1}，使得 AA^{-1} = A^{-1}A = I

2.2 左逆矩阵

同样对 m*n 的矩阵 A，如果 A 列满秩，即 r = n < m，列向量之间线性无关，而行向量不一定，此时矩阵零空间中只有零向量。同样因为列向量之间线性无关，

则 Ax = b 的解$\begin{cases} \text{不存在} \\ \text{存在，且唯一（由于零空间中只有零向量，无法加其通解）} \end{cases}$

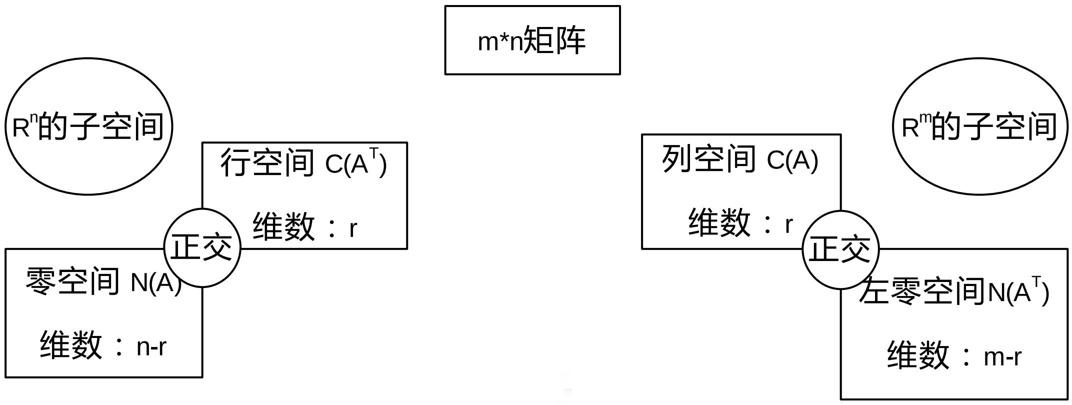
对于 A 来说，A^TA 很明显是个 n*n 对称矩阵，而且满秩。所以A^TA 是可逆的。所以$(A^TA\ )^{-1}$是存在的。这时就有$(A^TA\ )^{-1}A^TA\ = I$,如果看 A 左侧为一个整体，那么$(A^TA\ )^{-1}A^T$就可以被称为 A 的左逆。称为A_{left}^{-1}。

2.3 右逆矩阵

还是 m*n 矩阵 A，若 A 行满秩，r = m < n，此时 m 个行向量之间线性无关，此时就是A^T的零空间中只包含零向量，此时由于行向量互相无关，故 Ax = b 总能被求解，消元永远也不会得到全零行。而 Ax = b 中自由变量为 n-m 个，即有无穷解。

类比左逆，显然$AA^T(AA^T\ )^{-1}\ = \mathrm{I}$。则$A_{right}^{-1}$ = $A^T(AA^T\ )^{-1}$

注：如果我们左乘右逆矩阵或者右乘左逆矩阵，那么一般得不到 I，比如右乘左逆矩阵得到$A(A^TA\ )^{-1}A^T$，这时得到的是投影矩阵。



回到这幅经典的图，则：

满秩情况：两侧零空间都没了

列满秩情况：零空间没了

行满秩情况：左零空间没了

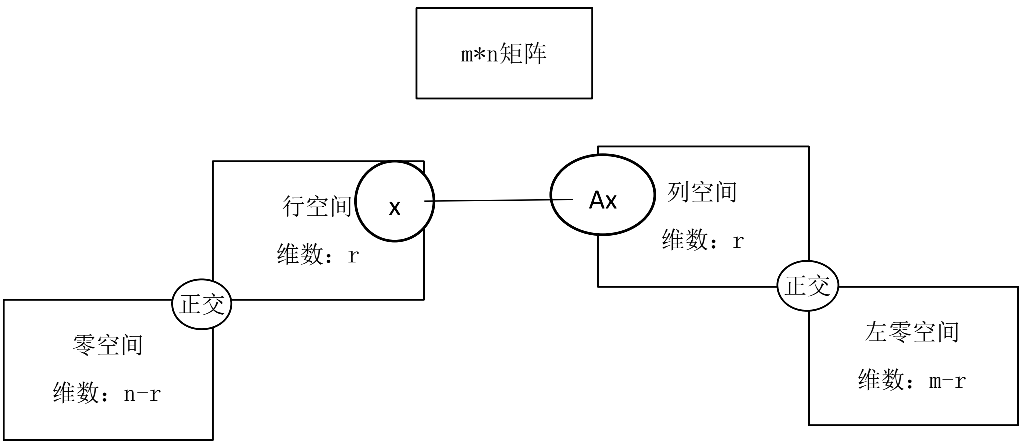
而我们接下来谈论的伪逆情况是一般情况，r 比 m 和 n 都小，图像四部分都存在。

三．伪逆矩阵

3.1 伪逆介绍

首先，对于上面介绍的逆矩阵都是一些特殊矩阵情况，对于一般的矩阵，更可能的情况是秩 r ＜ m ， r ＜ n。这时候 A，A^T零空间都存在，而逆矩阵实际上是一种逆操作。将矩阵变会原本样子的逆操作。但是如果操作后得到 0，那么就无法逆回去了。看上面行/列满秩情况只有一中零空间存在，或者根本没有零空间存在。但是现在这种情况，两侧零空间均存在。这时候就没有逆矩阵能拯救这些零空间了。

那如果我们把范围缩小呢？我们注意到，行空间与列空间都为 r 维，那么就有一种对应关系，即有矩阵 A，使行空间中的向量 x 经过 Ax 运算变换到列空间中。



所以，我们限制 A 只在行空间和列空间上，此时 A 就是个可逆矩阵，则A^{-1}为伪逆A^{+}。

我们证明一下在这两个空间中，若行空间中的 x≠y，则列空间中的 Ax ≠ Ay。

采用反证法，如果 x≠y，同时 Ax = Ay，那么就有 A(x-y)≠ 0。由于 x≠y，那么 x-y 属于行空间，同时又由 A(x-y)≠ 0，得到 x-y 属于零空间，故只能是，x=y 这一种情况。与我们的前提假设相悖。

3.2 伪逆求解

我们介绍 SVD 奇异值分解方法。即有一 m*n 矩阵 A，我们求解其伪逆时，首先将其分解：A = uΣV^T，其中的 u，V^T为正交矩阵。Σ为一个对角矩阵。其中的元素为：

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \\ & & & \end{bmatrix}$$（m*n），其中σ 为奇异值，下标 r 为秩

Σ的伪逆为Σ^{+}：

$$\begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & & & \\ & 1/\sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/\sigma_r \\ & & & \end{bmatrix}$$（n*m）下标 r 为秩

计算得到的$\Sigma\Sigma^{+}$与$\Sigma^{+}\Sigma$不同，一个是 n*n 矩阵。另一个是 m*m 的。即为Σ在行空间，列空间上的投影矩阵。这也表现了伪逆将我们代入两个很好的空间：行空间与列空间。

介绍完了Σ的伪逆求法，那么 A 本身的伪逆就好求了，u，V^T为正交矩阵，都可逆，直接求逆，得到：$A^{+} = V\Sigma^{+} u^T$，很明显，SVD 的特殊之处就在于将一切问题归结于对角矩阵上，在对角矩阵上很多东西会变得明显。

四．学习感悟

本节综合之前的学习内容，从逆，左逆，右逆引申到各个空间上的特点，即又归结于那张体现四个空间关系的图上。最后介绍了一般情况下求解伪逆的方法以及伪逆的意义。进一步认识了逆在“空间”上的特点。