

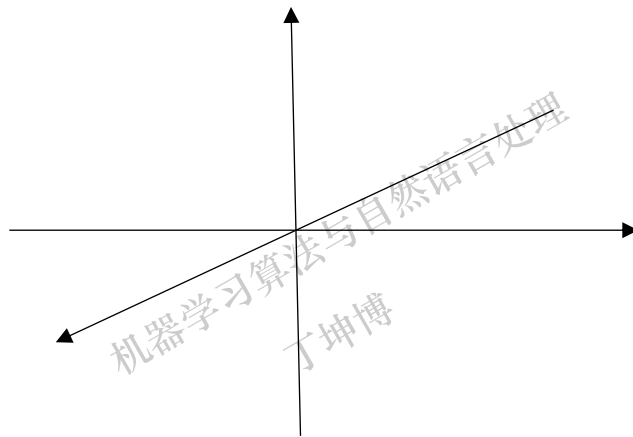
一、知识概要

本节从之前学习的子空间开始，介绍了子空间的部分性质。并重点介绍了列空间与方程 $Ax = b$ 之间的联系。并由此引出了零空间，根据 $Ax = b$ 这个方程给出了两种构建子空间的方法。

二. 子空间

2.1 子空间回顾

首先我们回顾一下上次讲到的子空间。首先明确，子空间必须**对线性运算封闭**。我们从一个简单的向量空间： R^3 空间开始。其图像如下，整个三维空间皆为 R^3 空间。

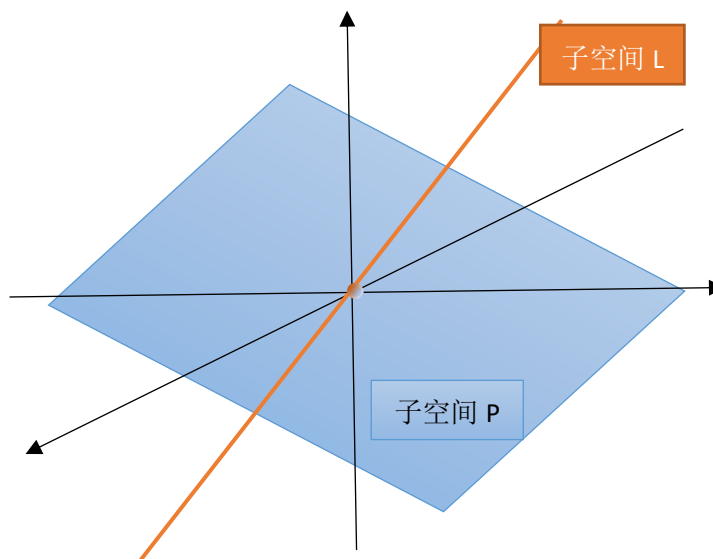


上一节中我们学习过， R^3 的子空间就是如下三个：

- (1) 穿过原点的无限延伸的平面 P
- (2) 穿过原点的无限延伸的直线 L
- (3) Z，原点。

注：子空间必须包含原点(零向量)

反映在图像上，即：



很明显，子空间直线 L 或平面 P 上，任取两个向量相加，得到的向量仍在该子空间中。而且将其上的向量做数乘伸长或缩短一定倍数，其结果也还在该子空间中。所以它们都对线性运算封闭。

2.2 子空间的“交”与“并”

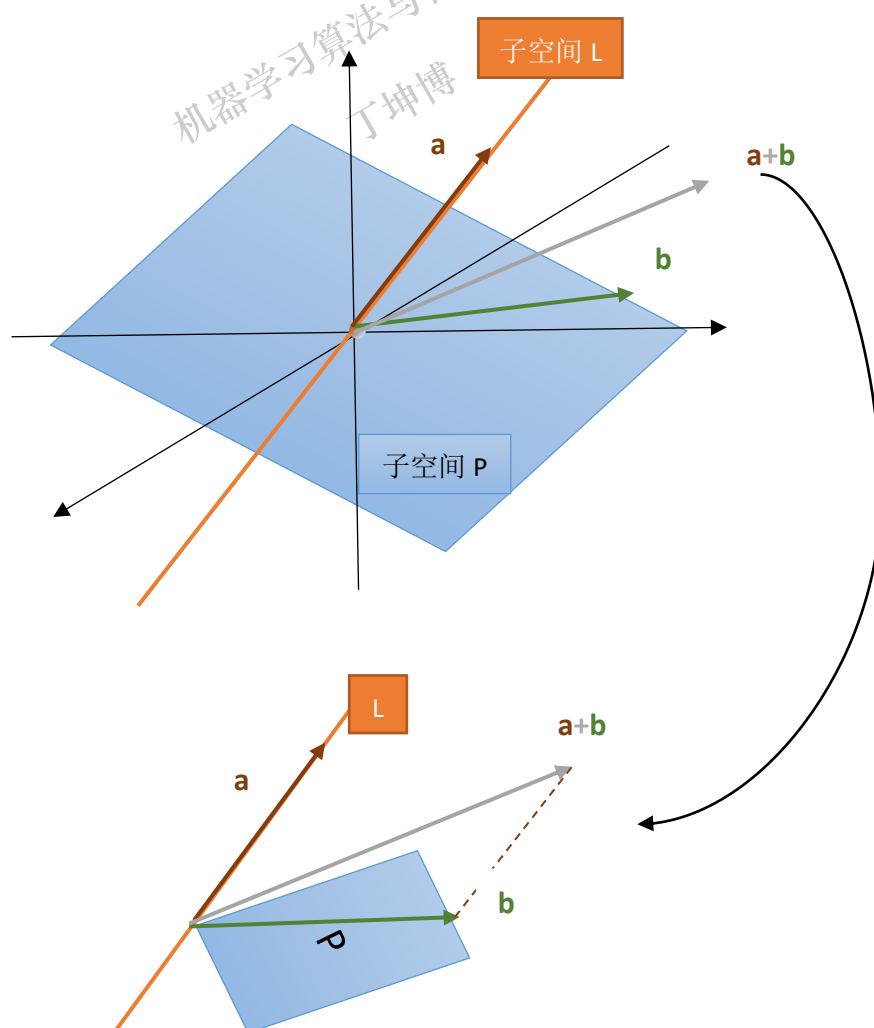
上面我们都是分别研究的两个子空间，那么接下来我们对两个空间之间联系部分展开讨论

2.2.1 $P \cup L$ 空间

还是讨论上面 R^3 的子空间 P 与 L ，首先要研究的就是它们的并空间，即：现有一集合，包含了 P 与 L 中的所有向量，那么这个集合是子空间吗？

答案是否定的。

很明显，我们将直线 L 与平面 P 看做同一个集合 $P \cup L$ 之后，这个集合对线性运算并不封闭。比如我们随便在直线 L 上取一个向量 a ，在平面 P 上取一个向量 b 。此时向量 $a+b$ 方向就会夹在直线 L 与平面 P 之间，脱离了 $P \cup L$ 的范围。所以 $P \cup L$ 无法构成空间。



2.2.2 $P \cap L$ 空间

如果看的是两个子空间的交集，那么上面那个 R^3 的例子再合适不过了。因为平面 P 与直线 L 相交的部分只有一个地方——原点。而原点显然是 R^3 的子空间之一。

如果推广到任意两个子空间的交呢？假设现在有子空间 S 和 T ，问其交集 $S \cap T$ 是否为子空间？

这次答案是肯定的。

为什么呢？抽象层面上来看， $S \cap T$ 集合是比 S, T 限制条件更多的集合，相当于一个更小的集合，限制更严格的集合，所以 $S \cap T$ 势必满足原本 S 和 T 的条件，所以可以构成一个子空间。

严格证明(对线性运算封闭)思路如下：

- (1) 加法封闭：在 $S \cap T$ 中取 v, w 向量，单看 S 空间， v, w 均在 S 空间里，由于 S 是子空间，对线性运算封闭，故 $v+w$ 也在 S 中，同样，再单看 T 空间，将上面的步骤中的 S 换成 T ，也可以得 $v+w$ 在 T 空间中。这就说明 $v+w$ 在 $S \cap T$ 中。所以 $S \cap T$ 对向量加法封闭。
- (2) 数乘封闭：在 $S \cap T$ 中取 a 向量， a 在 S 空间中，所以 n 倍的 a 仍在 S 空间中。同样， a 也在 T 空间中，故 n 倍的 a 也在 T 空间中。也就是 n 倍的 a 仍在 $S \cap T$ 中。所以 $S \cap T$ 对数乘运算也是封闭的。

三. 列空间

3.1 列空间回顾

我们通过一个例子来回顾之前的内容

现有矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ ，矩阵的列向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ 均是 R^4 中的四维向量，

所以 A 的列空间是 R^4 的子空间。

那么列空间里包含了什么呢？除了 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ 三个列向量。列空间里还包

含着它们的各种线性组合。也就是说， A 的列空间是由 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ 三个列向量

张开的一个子空间。

那么这个子空间有多大呢？这就需要用 $Ax = b$ 方程来解释了。

3.2 $Ax = b$ 的空间解释(从 A 的角度)

还是取 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ 。假设有一个方程 $Ax = b$ 如下：

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = b$$

第一个问题：这个方程是否始终有解？

我们看到， Ax 的本质就是对 A 的列向量进行线性组合：

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

或者可以认为， Ax 代表着 A 的列空间。

显然，三个四维向量的线性组合是无法铺满整个四维空间的，就如同两个三维向量无法张开一个三维空间一样。所以，这里的 Ax 只能是 R^4 空间的部分子空间，也就是说，无法保证任意拿出一个四维向量 $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \in R^4$ ，都能找到 A 列

向量的一种线性组合，使 $Ax = b$ 。

第二个问题：什么样的 b 可以使方程 $Ax = b$ 有解？

上面介绍过， Ax 就表示着 A 列向量的所有线性组合，也就是 A 的列空间。上面的 3.1 中提到过，A 的列空间就是 R^4 的一个子空间，所以对于一个四维向量 b ，只要 b 在“A 的列空间”这个 R^4 的子空间中，那么就可以找到一种 A 列向量的线性组合来构成 b 。也就是使得 $Ax = b$ 有解。

第三个问题：能否去掉 A 的一列，却不影响 A 的列空间呢？

先看看这三个列向量： $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ 。显然第三列 $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ 可以写成前两列的线性

组合： $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。也就是说这第三列对线性组合没有贡献。所以我们仅仅

依靠前两列的线性组合就可以构成A的列空间。我们称 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 这样的列为主列。

所以去掉第三列，并不影响A的列空间的构成。

四、零空间

4.1 零空间介绍

所谓零空间，就是 $Ax = 0$ 的所有解所构成的一个空间。

还是以 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ 为例，其零空间就是下面这个方程的解构成的空间：

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

也就是 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ，可以看到 x 有三个分量，所以其零空间是 R^3 的子空间。

所以，对于 $m \times n$ 的矩阵来说，列空间是 R^m 的子空间，零空间是 R^n 的子空间。列空间关键在于列向量的维数，零空间的关键在于列向量的个数。

首先来验证这样的 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 为什么能构成向量空间？

- (1) 加法封闭：在此零空间中任取两向量 v, w ，有 $Av = Aw = 0$ ，很显然 $A(v+w) = 0$ ，所以 $(v+w)$ 也属于零空间，加法封闭得证。
- (2) 数乘封闭：还是，在此零空间中任取向量 v ， $Av = 0$ ，则 $cAv = 0$ 。矩阵 A 与常数 c 位置可交换，所以 $A(cv) = 0$ 。所以 cv 也在零空间中。数乘运算封闭得证。

【例】求上面 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ 的零空间。

我们讨论过，这个A的第三列可以写成前两列的线性组合，所以可以写出令 $Ax = 0$ 的一个解： $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ，而其零空间即为： $C \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ （C表示任意常数）。反映在图像上，就是 R^3 中的一条穿过原点的直线。

4.2 $Ax = b$ 的空间解释(从 x 的角度)

那如果上面构造零空间的方程右侧变为任意向量的话,其解集 x 还能构成向量空间吗?

如:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

这样的所有 x 构成的解集还是向量空间吗?

显然不是。将 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 代入,其显然不是这个方程的解,就是说明这个

解集里根本没有零向量。之前我们学过,任何一个向量集合中必须要有零向量。就是说明这个解集连最基本的要求都无法满足,构不成向量空间。

反映在图像上,这里所有的 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 其实构成的是一个不过原点的平面。

这也告诉我们,想从 x 的角度研究 $Ax = b$ 这个方程,则只有 b 是零向量时, x 才能构成空间(零空间),其他情况中连零向量都不在解集中,更别谈向量空间了。

五. 学习感悟

这一课我们学习了列空间与零空间. 从 $Ax = b$ 入手,给出了两种构建子空间的方法:

1. 从 A 的列向量入手, 已知列向量, 根据其线性组合构造空间。
2. 从 $Ax = 0$ 方程组入手, 一开始并不知道 x 中有什么向量, 只是根据 $Ax = 0$ 这个方程构造方程组, 让 x 满足特定条件来构造子空间。

这两种构造子空间的方法需要掌握。其实就是一个从 A 的列向量入手, 一个从 x 的解集入手构建子空间的问题。