第10章　クレジット デフォルト スワップ

2007 年の世界金融危機後に導入された ISDA CDS スタンダードモデルはハザードレートによって生存確率を計算するモデルである。この章では初めにハザードレートの意味を明確に示しながら、生存確率を算出後、リスキーキャッシュフローに対する期待値を計算することで、CDS 時価の計算方法を例示する。
次に ISDA CDS スタンダードモデルの取引慣習を QuantLib のコードと計算例で紹介する。

10.1　シングルネーム CDS のイメージと用語

クレジット デフォルト スワップ (**Credit Default Swap** 以下 **CDS**) とは保険に類似した取引である。例えば、A 社の債券を保有している投資家 X が A 社の倒産を懸念した場合、CDS という保険を購入 (“ **プロテクションの買い** ” と言う) することで、倒産した場合に被る損失額を CDS の売り手 (プロテクションの売り手) から保険金として回収することが出来る。

“ A 社の社債のケース ”

数値例で考えてみよう。投資家 X は A 社の債券を額面 1000 万円保有中で、保険期間 5 年間で保有額面に対して年間 100bp の**保険料** (または**プレミアム**、**クーポン**と呼ぶ) を支払う CDS の契約を行ったとしよう。(また契約後 4 年が経過し、CDS は残存 1 年、プレミアム 130bp になったとも仮定する)

この場合、年間のプレミアム額は 1000 万円 $\times\ 100bp = 10$ 万円 であるが、その支払方法は 3 か月毎に 4 分の 1 づつの 2 万 5000 円を後払いで支払うルールである (3 か月で 4 分の 1 としたが、本来 ACT/360 の日数計算)。ただし、A 社の倒産後は一般的にはプレミアムを支払う必要は無くなる。

A 社が倒産し、デフォルトした A 社の無担保普通社債が ISDA のルールに従った**オークション** (Auction) [*1] にかけられ、45%で競り落とされたとする

[*1] オークションの詳細な情報は www.creditfixings.com で参照可能。

と、この投資家 X は 100%とオークション価格 45%の差額である 55%が損失額と看做され、CDS の売り手から、1000 万円 × 55% = 550 万円 を**保険金** (Default payment) として受け取ることができる。

ここで、CDS の用語を補足しておくと、まず 100bp のプレミアムは **CDS スプレッド** (**クォートスプレッド**, quarted spread) とも呼ばれる。オークションの最終価格 (Final price) の 45%を**回収率** (Recovery rate, R で表記) と呼ぶ。

実際の回収率は倒産後のオークション等で決定され、倒産するまで回収率は未定なので、日本企業で 35%、米国企業で 40%の回収率を仮定し、取引が行われる。[*2]

なぜこの取引に“スワップ”という名前が与えられているかについて説明しよう。この CDS 契約ではプレミアム支払額は 5 年間で総額 50 万円、一方倒産が発生した時に受け取る保険金は回収率 35%が仮定され、650 万円となる。

実はそれぞれの金額の**期待値の現在価値**が等価になっていて、この 2 つのキャッシュフローは交換可能であることが名前の由来である。金利スワップのレグに倣い、前者のキャッシュフローは**プレミアムレグ**、後者は**デフォルトレグ** (または**プロテクションレグ**) と呼ばれる。

交換 (スワップ) するイメージを数値例で見ておく。まず、現在価値に換算する為のディスカウントファクターを 0.9754 とし、A 社の倒産する確率 (**倒産確率**, Default probability) を 7.15%と仮定した場合、それぞれのレグの期待値の現在価値は次のように計算できる。

プレミアムレグ

$$
\begin{aligned}
&= \overbrace{\underbrace{10\,\text{万円} \times 5\,\text{年}}_{\text{プレミアム 5 年分}} \times \underbrace{(100\% - 7.15\%)}_{\text{生存確率 } 92.85\%}}^{\text{期待値}} \times \underbrace{0.9754}_{\text{ディスカウント}} \qquad (10.1)\\
&= 41.8\,\text{万円}
\end{aligned}
$$

デフォルトレグ

$$
= \overbrace{\underbrace{650\,\text{万円}}_{\substack{\text{保険金}\\ (1-35\%)\times\text{額面}}} \times \underbrace{7.15\%}_{\text{倒産確率}}}^{\text{期待値}} \times \underbrace{0.9754}_{\text{ディスカウント}} = 41.8\,\text{万円} \qquad (10.2)
$$

このように 2 つのレグの期待値の現在価値が等しくなるので、スワップすることが出来る。

式 (10.1)、(10.2) について補足しよう。

[*2] ISDA が決めた市場慣行であり、業種や債務タイプによって倒産前回収率は異なる。この倒産前回収率が決定されたデータは Altman[9] を参照。

(プレミアムレグ)

- CDS の場合、金利スワップでは使用されなかった期待値計算を行う。
- その理由は倒産が発生すると保険料支払いが停止する為。
- プレミアムレグにある 50 万円 (年 10 万円の 5 年分の総額) は本来 “ 倒産以前に払われた保険料のみ ” とすべき。
- その金額を見積もることは期待値を計算することに等しい。

つまり、倒産しない確率“100%−倒産確率”を**生存確率** (Survival probability) と言うが、保険料のキャッシュフローと生存確率の積を計算し、保険料支払い額を見積もっている。

(デフォルトレグ)

- デフォルトレグの 650 万円とはデフォルトした時に受け取る保険金。(**偶発的支払額**、**Contingent payments** とも参照)
- 一般的に回収率 R を使って、次式で表す。

$$\text{偶発的支払額} \quad := \quad (1 - \underset{\substack{\text{回収率}\\(35\%\text{等})}}{R}) \times \text{額面金額} \tag{10.3}$$

- このキャッシュフローが発生する確率が倒産確率。

デフォルトレグでは偶発的支払額に倒産確率を掛け、デフォルト時に受け取る期待値を計算。

CDS のキャッシュフローはデフォルトによって、消滅したり、突然発生したりする為、**リスキーキャッシュフロー**と呼ばれる。
この意味はキャッシュフローの発生確率が 1 よりも小さいことを意味している。金利スワップでは倒産を考慮に入れていない為、キャッシュフローの発生確率を 1 と仮定していた。その結果、期待値を考える必要が無かったのである。

CDS の時価とは保険料を支払う立場か、受け取る立場かを考慮したプレミアムレグの時価とデフォルトレグの時価の差額となる。この時価を計算する作業の大半は市場で建値された CDS スプレッドから倒産確率を計算する部分である。

10.2　ポアソン分布, 生存確率, ハザードレートモデル

“ B 銀行のローンのケース ”

まずは CDS で主役となるポアソン分布から始める。例えば、B 銀行が行ったローンの過去のデフォルト率は年率 0.3%だったとしよう。年間 1000 件のローンが行われる場合、1 年間では 3 件、

$$\underbrace{1000\,\text{件} \times 0.3\%}_{\text{期待値の計算}} \quad = \quad \underbrace{3\,\text{件}}_{\substack{\lambda:\ \text{強度} \\ \text{ハザードレート} \\ \text{(頻度)}}} \tag{10.4}$$

がデフォルトすることが予想できる。この 3 件のことを**ポアソン分布**の用語で**強度** (**Intensity**、CDS 市場では**ハザードレート Hazard rate**) と呼び[*3] 、$\boldsymbol{\lambda}$ (ラムダ) で表す。

10.2.1　ポアソン分布と生存確率

ではこの 1000 件のローンポートフォリオが年間 2 件のデフォルトで済む確率を計算しよう。N を事象の発生回数とし、二項分布を使えば、

$$\begin{aligned} Pr\{\underbrace{N=2}_{\text{発生回数}}\} &= \underbrace{\binom{1000}{2}\ (\overbrace{0.3\%}^{\substack{proba\\bility}})^2\ (\overbrace{99.7\%}^{1-prob.})^{998}}_{\text{二項分布の計算}} \\ &= \frac{1000!}{2! \times 998!}\ (0.3\%)^2\ (99.7\%)^{998} \ = \ 22.4154\% \end{aligned}$$

で計算[*4] できる。この計算はポアソンの時代 (19 世紀) ではかなり面倒だったようで、二項分布の極限の**ポアソン分布**を考えたと言われている。(真偽不明)

その分布の一般式は強度 λ を使い、

$$Pr\{N=j\} \quad = \quad e^{-\lambda}\ \frac{\lambda^j}{j!}, \qquad (j = 0, 1, 2, \cdots) \tag{10.5}$$

であり、上のケースでは 強度 $\lambda = 3$、2 件のデフォルト ($j = 2$) を使用し、

$$Pr\{\underset{\text{(発生回数)}}{N=2}\} \quad = \quad e^{-3}\ \frac{3^2}{2!} \ = \ 22.4042\%$$

のように、先の二項分布の計算結果とほぼ同じ値となる。

[*3] 更に強度 (Intensity) を Frequency(頻度) と呼ぶ人もいる。

[*4] 式中の $\binom{1000}{2}$ は組合せを意味し ${}_{1000}C_2$ の意味。前者のほうが一般的。

ポアソン分布とは稀にしか起こらない事象の発生回数の確率を計算出来る分布であり、その分布の形状は図 10.1 のように、強度 λ という 1 つのパラメーター[*5] で決定される。

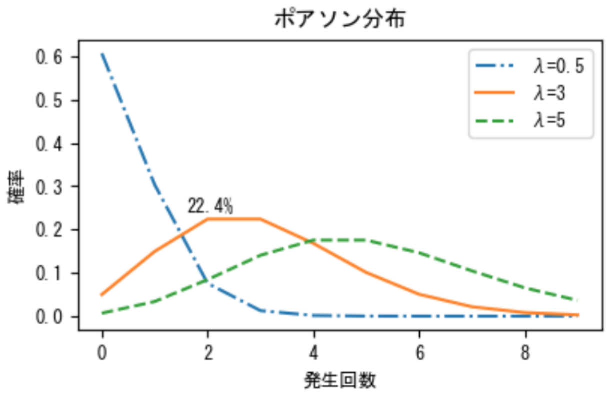


図 10.1: ポアソン分布と 3 つの強度

(発生回数=0 が各強度の生存確率)

式 (10.4) から類推出来るように、強度 =3 件とはデフォルト率 0.3%の場合の期待値である。もし過去のデフォルト率が 1.0%なら、強度または期待値は 10 件となる。強度が大きいことは“ 事象が起こる確率 ”が大きいことを意味する (図 10.1 において λ が大きくなると x 軸の発生回数が増えている)。このような意味合いがあり、ポアソン分布のパラメーターは期待値 (平均値) と言わず、“ 強度 (Intensity) ”と呼ばれる。

発生する回数は時間間隔を決めてカウントする。単位時間、例えば 1 年当たりの強度を λ 回 (これ以降 λ の単位は回数/年) とすると t 年間の強度 (発生回数) は $\lambda \times t$ となる。このように時間の単位を取り込んで式 (10.5) を修正すると

$$Pr\{\underbrace{N(t)=j}_{t\text{ 年間で事象が発生する回数}}\} \quad = \quad e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}, \qquad (j=0,1,2,\cdots) \tag{10.6}$$

となり、上式の $N(t)$ を**ポアソン過程**と呼ぶ。[*6]

(生存確率)

ではこの第 10 章で最も重要な式を導こう。t 年間、事象が 1 回も発生しない確率は式 (10.6) に $j=0$ を代入することで計算できる ($0!=1$ に注意)。特に

[*5] 正規分布の形状を決定するには、平均と分散の 2 つのパラメーターが必要であることと比較。

[*6] 確率変数 X がポアソン分布に従う場合、ポアソン分布の期待値 $E(X)=\lambda$。ポアソン過程の期待値は $E(X_t)=\lambda\, t$ である。

事象が倒産の場合、1 回も発生しない確率とは**生存確率**となる。

$$\textbf{生存確率：}\boldsymbol{Q_t} \;:=\; \underbrace{Pr\{N(t)=0\}}_{\text{事象が発生しない確率}} \;=\; \underbrace{e^{-\lambda t}}_{\text{生存確率}} \tag{10.7}$$

$$= \underbrace{Pr\{\text{ 倒産時刻: } \tau > t\ \}}_{\tau\text{を使用した生存確率}} \tag{10.8}$$

CDS 関連の文献では 2 つ目の等号 (式 10.8) のように**倒産時刻**:$\boldsymbol{\tau}$(time of default、τ はタウと読む) を使って生存確率を表す場合が多く、慣れておこう。(10.5.4 節で多用する)

“ B 銀行 ” の例で 1 年間 1 つのローンもデフォルトしない確率は、ハザードレート $\lambda = 3$、$t = 1$ 年 とし、次式で算出される。

$$\begin{aligned} Q_{1\text{年}} &= Pr\{N(1\text{年}) = 0\} \;=\; Pr\{\text{ 倒産時刻 : } \tau > 1\text{ 年 }\} \\ &= e^{-3\times 1\text{ 年}} \;=\; 0.0498 \;=\; 4.98\% \end{aligned}$$

10.2.2 ハザードレート

ここで “ A 社の社債のケース ” に戻り、A 社もハザードレート $\lambda = 3$ とすると、1 年後の生存確率は上の計算と同じ 4.98%。この値は図 10.1 の “ x 軸の発生回数=0 ” の y 軸の値で確認できる。ハザードレート $\lambda = 0.5$ の場合、同図から生存確率は 60%程度となる。

では A 社のハザードレートはどのように求めることが出来るだろうか? 本来ハザードレート $\lambda(t)$ は時間 t の経過で変動するが、計算を簡便にする為、定数 λ とする場合も多い。一般的には次式[*7] を使用して、クレジットスプレッドから近似計算する。

$$\textbf{ハザードレート (定数) : }\boldsymbol{\lambda} \;\simeq\; \frac{\overset{(CDS\text{ スプレッド等})}{\text{クレジットスプレッド}}}{\underbrace{1 - \text{回収率:}R}_{\text{(損失率)}}} \tag{10.9}$$

右辺の分母をはらって、次のように変形すれば、

$$\underset{(\text{または } CDS\text{ スプレッド})}{\text{クレジットスプレッド}} \;=\; \text{ハザードレート} \times \underset{(1-R)}{\text{損失率}} \tag{10.10}$$

“ ハザードレート × 損失率 ” は債券/CDS 市場で観測されるクレジットスプレッドとなる。つまり、ハザードレートは “ 統計学上の難しい数字 ” ではないという認識を持とう。

[*7] この式は 10.3 節以降で説明するプレミアムレグとデフォルトレグから導出される。詳細は 10.5.4 節を参照。

ここでは A 社の満期 1 年 CDS スプレッドを 130bp と仮定すると、A 社のハザードレートは式 (10.9) より 2.0%となる。

$$A\text{社 ハザードレート}:\lambda \;=\; \frac{\overset{(CDS\text{ スプレッド})}{130bp}}{1-\underset{(\text{回収率})}{35\%}} \;=\; \underset{(2.0\%)}{0.020}$$

標準的な CDS では取引日の翌日 (営業日ではない) から保険期間が始まる。A 社のケースでは取引日を 2022 年 9 月 19 日 (月)、保険開始日を 2022 年 9 月 20 日 (火) 、満期日を 1 年後の 2023 年 9 月 20 日 (水) とする。[*8]

ハザードレート $\lambda = 2\%$ の場合、CDS 満期までの 3ヶ月毎の生存確率は式 (10.7) より次の計算となる。

2022 年 9 月 20 日から 2023 年 9 月 20 日までの生存確率：

$$\left.\begin{array}{lcl} Q_{2022/9/20} &=& e^{-2\%\times(1\text{ 日}/365)} = 99.9945\% \\ Q_{2022/12/20} &=& e^{-2\%\times(92\text{ 日}/365)} = 99.4972\% \\ Q_{2023/3/20} &=& e^{-2\%\times(182\text{ 日}/365)} = 99.0077\% \\ Q_{2023/6/20} &=& e^{-2\%\times(274\text{ 日}/365)} = 98.5098\% \\ Q_{2023/9/20} &=& e^{-2\%\times(366\text{ 日}/365)} = 98.0145\% \end{array}\right\} \qquad (10.11)$$

図 10.2 ではこの計算を D 列で行った。この生存確率の計算では次の 2 点が重要である。

生存確率=1.0： 取引日 (2022/9/19、A6 セル) が“生存確率=1.0”であり、保険開始日 (2022/9/20) ではない。

生存確率は Act/365： プレミアム (保険料) は Act/360 で計算されるが、生存確率は Act/365。

- C 列のディスカウントファクターも Act/365。(プレミアム以外は Act/365 で計算と覚えよう)

	A	B	C	D	E	F
4	ﾊｻﾞｰﾄﾞ λ	2.00%				
5	TradeDT					
6	2022/9/19	τ (A365)	10% DF	生存確率Q	dQ	
7	2022/9/20		0.999726	99.9945%		
8	2022/12/20	0.249	0.975110	99.4972%	0.4974%	
9	2023/3/20	0.247	0.951360	99.0077%	0.4895%	(計算式)
10	2023/6/20	0.252	0.927680	98.5098%	0.4979%	C11=EXP(-10%*(A11-A6)/365)
11	2023/9/20	0.252	0.904590	98.0145%	0.4953%	D11=EXP(-B4*(A11-A6)/365) E11=D7-D8

図 10.2: ハザードレート 2%の生存確率

この図 10.2 は図 10.5 のエクセルに続く為、以下を補足しておく。

[*8] A 社の投資家 X は 4 年前に CDS を購入している為、この場合“新規取引”よりも残存 1 年の CDS の“時価評価”と見做そう。

1〜3 行： 図 10.5 で各パラメータを設定。(図 10.2 では省略)

B4: ハザードレート： 2.00%に設定。

B 列: テナー (τ) **：** Act/365 ベースで四半期ベースのテナーを計算。(このエクセルでは曜日は無視)

C 列: DF： 連続複利 10%でディスカウントファクターを計算。

D 列: 生存確率： 式 (10.11) で算出。

E 列: dQ： 生存確率の差を計算。(dQ は式 10.18 で定義)

F9 セルの計算式： ディスカウントファクター C11 セルと生存確率 D11 セルの計算式を表示したが、両者はほぼ同じ計算式。

- この類似性から第 9 章で説明したショートレートモデルがハザードレートのモデルとして転用される。

(倒産確率)

生存確率 Q が計算できれば、倒産確率は“ 1–Q ”として計算する。

t 時点の倒産確率：$\mathbf{1 - Q_t}$

$$
\begin{aligned}
&:= \ Pr\{\text{倒産時刻}: \tau \le t\} \ = \ 1 - \underbrace{Pr\{\text{倒産時刻}: \tau > t\}}_{\text{生存確率}} \\
&= \ 1 - \underbrace{e^{-\lambda \times t\ \text{年}}}_{\text{式 (10.7)}}
\end{aligned}
$$

式 (10.11) に対応する倒産確率は $1 - Q_t$ で計算出来るので省略するが、式 (10.11) を次の各点から見直そう。

- ハザードレートが時間に無関係に 2%の定数であるにも係らず、生存確率は時間の経過で低下。
    - ◇ フラットなイールドカーブでディスカウントファクターが低下することと同じ。
    - ◇ 標準的な CDS 取引ではハザードレートは CDS 満期まで一定と仮定する。(債券の複利利回りと同じ)
    - ◇ 例えば、5 年 CDS と 10 年 CDS では**クォートスプレッド** (市場で建値されたスプレッド) が異なり、それぞれのハザードレートを λ_5、λ_{10} とすると、λ_5、λ_{10} は異なる定数となる。
    - ◇ 10 年 CDS の当初 5 年間は λ_5 で評価するべきであり、後半の 5 年間は λ_{10} とは異なるハザードレートで評価する。(10.2.5 節参照)

◇ このことをハザードレートのタームストラクチャーと呼ぶ。(金利のタームストラクチャーと同じ)

- 2 時点間の生存確率の減少幅 dQ_t はその期間の倒産確率を示す。(式 10.18 で説明)

  ◇ 生存確率が時間の経過で低下することは、倒産確率が増えていることを意味する。

- t 時点 の**ハザードレート** λ_t とは単位時間当たりの**生存確率の減少率**と定義され、定義式は次式となる。

$$\lambda_t \quad := \quad -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\ln Q_{t+\Delta t} - \ln Q_t}{\Delta t} \quad = \quad -\frac{d}{dt} \ln Q_t \tag{10.12}$$

  ◇ この式の導出は 10.2.3 節参照。

  ◇ 生存確率に対数をとる点に関しては 181 ページ脚注 “ 対数の経済的解釈 ” 参照。

- 式 (10.11) の数値を使い、2023 年 6 月 20 日のハザードレートは次式で算出され、当然 2.0%となる。

$$\lambda_{2023/6/20} \quad = \quad -\frac{\ln 98.0145\% - \ln 98.5098\%}{(366-274)/365\ \text{日}} \quad = \quad 2.0\%$$

10.2.3 累積デフォルト率とハザードレートの関係

ハザードレートは重要な概念であり、式 (10.12) をイメージ出来るよう、“累積デフォルト率 ” の例を挙げ、この式を導出する。

多くの読者は格付け機関が公表する次表のような格付け別の**累積デフォルト率**を一度は目にした事があるかと思われる。ただ、この表は格付け AAA、AA、A に対して、式 (10.7) に $\lambda = \underset{(AAA)}{0.045\%}$、$\underset{(AA)}{0.095\%}$、$\underset{(A)}{0.65\%}$ を与えて計算した生存確率である。

累積デフォルト率 (19xx 年〜202x 年)

格付け	1 年	2 年	3 年
AAA	0.045%	0.090%	0.135%
AA	0.095%	0.190%	0.285%
A	0.648%	1.292%	1.931%
(A 生存確率)	99.352%	98.708%	98.069%

(4 行目は A 格の累積デフォルト率を 1 から引いた値)

この表からハザードレートを計算しよう。例えば、シングル A 格の 2 年〜3 年の期間のハザードレートは式 (10.12) で定義された " 生存確率の減少率 " として、次式で算出する。(表の 4 行目の数字を使用)

$$-\frac{98.069\% - 98.708\%}{98.708\%} \quad = \quad \underbrace{0.648\%}_{\substack{\lambda=0.65\%\text{に}\\ \text{近い値}}} \times 1\text{ 年}$$

当然、表の作成で使用したハザードレート 0.65%に近い値を得る。ではこの数値例で式 (10.12) を導出しよう。まず、生存確率 Q_t の記号で表すと、

$$-\frac{\overset{(98.069\%)}{Q_{3\text{ 年}}} - \overset{(98.708\%)}{Q_{2\text{ 年}}}}{\underset{(98.708\%)}{Q_{2\text{ 年}}}} \quad = \quad -\frac{Q_{3\text{ 年}}}{Q_{2\text{ 年}}} + 1 \simeq -\ln\frac{Q_{2\text{ 年}+\Delta t}}{Q_{2\text{ 年}}}$$

$$= \quad -\big(\ln Q_{2\text{ 年}+\Delta t} - \ln Q_{2\text{ 年}}\big) \quad = \quad \underset{(0.648\%)}{\lambda_{2\text{ 年}}} \times \underset{(1\text{ 年})}{\Delta t}$$

最後の等号で両辺を Δt で割り、添字の 2 年を t とし、$\Delta t \to 0$ で極限を取ると、式 (10.12) を得る。

$$\lambda_t \quad = \quad -\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\ln Q_{t+\Delta t} - \ln Q_t}{\Delta t} \quad = \quad \underbrace{-\frac{d\ln Q_t}{dt}}_{(\text{式 }10.12)}$$

$$= \quad -\frac{d\ln Q_t}{dQ_t}\frac{dQ_t}{dt} \quad = \quad -\frac{1}{Q_t}\frac{dQ_t}{dt}$$

ハザードレートの定義式 (式 10.12) を上式最後の項のように変形し、この微分方程式を Q_t について解けば、時間の関数としてのハザードレートの生存確率の式を得る。

$$\int_0^t \lambda_u du \quad = \quad -\int_0^t \frac{1}{Q_u}\, dQ_u \quad \text{より} \quad \ln Q_t \quad = \quad -\int_0^t \lambda_u du \tag{10.13}$$

$$Q_t \quad = \quad e^{-\int_0^t \lambda_u du} \tag{10.14}$$

実際に発表されている累積デフォルト率は期間ごとにハザードレートが異なるだろう。その場合、各期間の λ_t を**区分定数** (Piecewise constant) とした式 (10.15) で対応する。(式 10.14 で e の肩の積分記号を $\lambda_t \Delta t$ の足し算に変えたもの)

$$Q_{t\text{ 年}} \quad = \quad e^{-\big(\overbrace{\lambda_0 + \cdots + \lambda_{t-1}}^{\substack{\text{ハザードレート}\\ \text{タームストラクチャー}}}\big)\times\Delta t\text{ 年}} \tag{10.15}$$

$$= \quad e^{-\lambda\times t\text{ 年}}$$

上式 2 番目の等号は $\lambda_t = \lambda$(定数) の場合で式 (10.7) となる。

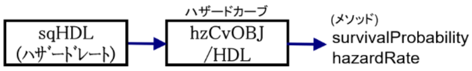
数式の展開が続いたので、先ほど計算したハザードレートに戻ろう。式 (10.10) を使い、次のようにハザードレートから 42.1bp のクレジットスプレッドが算出できる。

$$\underset{(\text{ハザードレート})}{0.648\%} \times (\, 1 - \underset{(\text{回収率})}{35\%}\,) = \underset{(\text{クレジットスプレッド})}{42.1bp}$$

つまり“累積デフォルト率”があれば、ハザードレートを経由し、格付け別/年数別で現実のクジレットスプレッドを算出することが出来る。(実際の回収率があれば、より現実味が増す)

10.2.4　QuantLib による生存確率の計算

図 10.3 は QuantLib で生存確率を計算させるコードである。初めに出力された満期時 (2023 年 9 月 20 日) のディスカウントファクター DF、生存確率 Q、ハザードレートが図 10.2 エクセルと同じ値となっていることを確認しよう。




```
1  from myABBR import * ;import myUtil as mu ; np.set_printoptions(precision=6)
2  # 1.初期値 bP:buyProtection
3  tradeDT = jDT(2022,9,19) ;                                setEvDT(tradeDT)
4  matDT,           ntlAMT,    rfRT,   cdsQT,    hzdRT                      =¥
5  jDT(2023,9,20),10_000_000,  0.10,  1.30/100,   0;hzdRT=cdsQT/(1-rcvRTj)
6  
7  # 2.cdsスケジュール
8  cdsSCD = ql.Schedule(tradeDT+1, matDT, pdFreqQ, calWK, FLLW, unADJ, dtGENf, EoMf)
9  
10 # 3.DF,hazardRateカーブ
11 dsCvOBJ, dsCvHDL = mu.ffTSH(tradeDT, rfRT, dcA365)
12 hzCvOBJ = ql.FlatHazardRate(tradeDT,mu.sqHDL(hzdRT), dcA365)
13 hzCvHDL = ql.DefaultProbabilityTermStructureHandle(hzCvOBJ)
14 print(f'(満期日) DF:{dsCvOBJ.discount(matDT)             :.6f}, '
15         f'生存確率Q:{hzCvOBJ.survivalProbability(matDT):.6%}, '
16         f'ﾊｻﾞｰﾄﾞﾚｰﾄ:{hzCvOBJ.hazardRate(matDT)          :.6%}' )
```

```
(満期日) DF:0.904590, 生存確率Q:98.014497%, ﾊｻﾞｰﾄﾞﾚｰﾄ:2.000000%
```

図 10.3: QuantLib によるハザードレート 2%の生存確率の計算

ではコードを説明する。

1: `set_printoptions(precision=6)` : numpy のプリント出力を 6 桁に変更。
(この設定に関しては図 2.21 の説明参照)

4, 5: 初期値設定 :

rfRT : 連続複利 10%を設定。(risk free rate の略)

cdsQT : クォートスプレッドを 1.30%。(QT は quote の略)

hzdRT : hazard rate の略で、当初ゼロを設定し、直後にセミコロンで文を区切り、再設定。

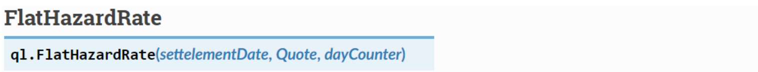
- 式 (10.9) により、hzdRT=cdsQT/(1-rcvRTj) が計算され、2.0%で再設定。
- myABBR モジュールで、**rcvRTj**=0.35 と日本企業用の回収率 35%を定義。(rcvRTj は recovery rate Japan の略)

8: cdsSCD： この行は CDS のスケジュールオブジェクトを設定。(生存確率の計算には無関係な為、Schedule コンストラクタの引数は 10.3.2 節で説明)

11: dsCvOBJ, dsCvHDL： ディスカウントカーブオブジェクト dsCvOBJ とそのハンドル dsCvHDL を myUtil モジュールの ffTSH 関数で作成。

- 日数計算を dcA365 に指定している点に注意。
- ffTSH 関数の複利の引数指定がない為、連続複利で計算。

12: `FlatHazardRate`： フラットハザードレートのコンストラクタ (以下が QLP ドキュメントのスクリーン) を利用し、ハザードレートカーブのオブジェクト hzCvOBJ を作成。


FlatHazardRate

`ql.FlatHazardRate(settelementDate, Quote, dayCounter)`

第 1 引数：settlementDate は生存確率=1.0 となる日付を指定。

第 2 引数：“ Quote ”であり、ハザードレートを mu.sqHDL(hzdRT) としてハンドルで設定。

第 3 引数：ディスカウントカーブ同様、ハザードレートカーブも dcA365 を指定。

13: `DefaultProbabilityTermStructureHandle`： ハザードレートカーブをハンドルに変換する場合のコンストラクタ。(生存確率を計算する場合、ハンドルは不要だが、CDS エンジンにセットする際に必要)

15: `survivalProbability`, 16: `hazardRate`： 生存確率とハザードレートを計算するハザードレートカーブのメソッド。

- 日付を引数にする部分は 14 行目の discount メソッドと同じ仕様。

10.2.5　条件付きの生存確率/倒産確率と Q_t 漸化式

ここではデフォルトレグを計算する準備として、条件付生存確率と条件付倒産確率について説明し、Q_t の漸化式を導出する。

初めに数値例として、A 社 ($\lambda = 2\%$) が今から 1 年間生存出来たとし、その後 3 ヶ月 (0.25 年) 以内に倒産する確率を計算する。この確率は倒産時刻 τ を使い、次のように記述する。

条件付倒産確率

$$= Pr\{ \overbrace{\text{倒産時刻}: \tau \le 1.25\text{ 年}}^{A:1.25\text{ 年以内に倒産}} \mid \overbrace{\text{倒産時刻}: \tau > 1.0\text{ 年}}^{B:\ 1\text{ 年間の生存}:\ Q_{1.0}} \}$$

この式は**条件付確率の公式**“$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$”を使うことで変形され、式 (10.17) となり、

$$\text{条件付倒産確率} \quad = \quad 1 - e^{\overset{(\lambda)}{2\%} \times \overset{(\Delta t)}{0.25\text{年}}} \; = \; 0.50125\%$$

が算出される。

まず条件付生存確率の計算式を導こう。ここではハザードレートを時間で階段的に変化すると仮定し (式 10.15 の peicewise constant なタームストラクチャー) 、時点 t のハザードレートを λ_t と表記する。

条件付生存確率：

$$\begin{aligned} & Pr\{\text{倒産時刻}: \underbrace{\tau > t + \Delta t}_{A} \mid \underbrace{\tau > t}_{B}\} \\ & \quad = \frac{Pr\{\tau > t + \Delta t \ \cap \ \tau > t\}}{Pr\{\tau > t\}} = \frac{Pr\{\tau > t + \Delta\}}{Pr\{\tau > t\}} \\ & \quad = \frac{Q_{t+\Delta t}}{Q_t} \overset{(\text{式 } 10.7)}{=} \frac{e^{-\lambda_t (t+\Delta t)}}{e^{-\lambda_t t}} = e^{-\lambda_t \Delta t} \end{aligned} \tag{10.16}$$

次に条件付倒産確率は“ $1-$ 条件付生存確率 ”なので、次式となる。

条件付倒産確率：

$$Pr\{\text{倒産時刻}: \tau \le t + \Delta t \mid \tau > t\} \; = \; 1 - e^{-\lambda_t \Delta t} \tag{10.17}$$

(生存確率 Q_t の漸化式)

生存確率 $Q_{t+\Delta t}$ は 1 つ前の生存確率 Q_t と条件付生存確率 $e^{-\lambda_t \Delta t}$ との積となり、以下の漸化式のように記述できる。

$$Q_{t+\Delta t} \quad = \quad Q_t \times \overbrace{e^{-\lambda_t \Delta t}}^{\substack{\text{条件付生存確率} \\ \text{式 } (10.16)}}$$

図 10.2 の E 列で計算した dQ はこの漸化式を使い、次式のように変形できる。

$$\begin{aligned} dQ_t \quad & := \quad Q_t - Q_{t+dt} \; = \; Q_t - Q_t \times e^{-\lambda_t dt} \\ & = \quad Q_t \times \big(\overbrace{1 - e^{-\lambda_t dt}}^{\substack{\text{条件付倒産確率} \\ \text{式 } (10.17)}}\big) \end{aligned} \tag{10.18}$$

つまり、dQ_t とは“ 時点 t まで生存出来た場合で、時点 $t + dt$ までに倒産する確率 ”を表している。この式はデフォルトレグを評価する際に登場する。

10.2.6　クォートスプレッドとハザードレートの関係

10.2 節の最後として、クォートスプレッドとハザードレートの関係について説明する。CDS の計算は図 10.4 のような順序で行われる。

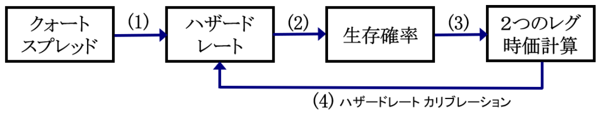


図 10.4: CDS の計算手順

(以下のカッコ付の番号は図 10.4 に対応)

(1) 市場のクォートスプレッドから、式 (10.9) でハザードレートの近似値を算出。

(2) このハザートレートを使い、生存確率 Q_t を計算。

(3) 生存確率から、CDS の時価をプレミアムレグとデフォルトレグから算出。

この 10.2 節ではクォートスプレッドをハザードレート近似値に変換し、生存確率を求めたが、これらの計算は (1)、(2) に該当する。(3) に関しては、次節以降でレグ毎に詳細な計算方法を説明する。

CDS クォートスプレッドをハザードレートへ変換する (1) 部分は以下の問題を含んでいる。

- CDS スプレッドからハザードレートを計算する式 (10.9) は精度の高い近似値を計算するが、正しいハザードレートでは無い。
- なぜならクォートスプレッドは

  プレミアムレグの時価 = デフォルトレグの時価

  を成立させるスプレッドであるが、式 (10.9) のハザードレートはこの等号を成立させない。
- 更に CDS のタームストラクチャーに対応したハザードレートを求めようとすると、式 (10.9) は使えなくなる。

これらの欠点を回避するハザードレートの計算法が上図 (4) となる。図 10.4 の右側ボックスから " ハザードレート " ボックスに向かう矢印 (4) は " プレミアムレグの時価 = デフォルトレグの時価 " が成立するまで、バザードレートを調整する計算を繰り返し行うことを表している。この作業のことをハザードレートの**キャリブレーション**と呼び、10.5.2 節で説明する。

尚、市場でクレジットスプレッドを基にポアソン過程を使用して、生存確率を計算させるモデルを**ハザードレートモデル**と呼ぶ。[*9]

10.3 プレミアムレグの計算

図 10.5 エクセルの E1 セル 94,321.19 円はトイモデルで CDS 契約日に算出したプレミアムレグの現在価値である。この 10.3 節ではこの計算方法を説明する。

初めに図 10.2 で計算されたディスカウントファクター DF、生存確率 Q とその差 dQ の値が図 10.5 と同じとなっている点を確認しよう。

(準備 1: 日数計算法の調整)

次に 100bp のプレミアム (保険料) 支払いの現在価値を金利スワップの固定レグの式 (2.3) で計算すると式 (10.19) となることを理解しよう。

プレミアム支払額の現在価値 (額面 1 円、倒産のない場合)

$$
\begin{aligned}
&= \overbrace{C}^{\substack{\text{クーポン} \\ 100bp}} \times \overbrace{365/360}^{\text{日数調整}} \times \overbrace{\sum_i (D_i \times \tau_i)}^{\substack{PV01 \\ (\text{アニュイティ})}}, \qquad i = \text{プレミアム支払日} \\
&= \overbrace{C^a}^{\substack{\text{日数調整後} \\ \text{クーポン } 101.4bp}} \times \overbrace{PV01}^{0.9395} \qquad (10.19)
\end{aligned}
$$

2 番目の等号では B 列テナー τ_i が Act/365 で計算され、クーポンは Act/360 の為、" 日数調整:365/360 " をクーポン側に掛け、C^a と表示した。(a は adjust の略)

(準備 2: ビッグバンプロトコル)

ISDA は 2009 年 3 月 12 日 CDS 取引ルールを次のように改定した。(この改定は**ビッグバンプロトコル**と呼ばれた) [*10]

- 毎期支払うプレミアムを債券と同じ " クーポン " として参照。
- **クーポン**は 25bp, 100bp, 500bp 等に固定。
- CDS の取引は市場で建値される CDS スプレッド (クォートスプレッド) とクーポンの差額分を**前払い決済** (**Upfront settlement**) する方式へ変更。

---

*9 この呼び名は O'kane [42] に従った。一般的には **Reduced-form モデル** (**誘導形モデル**) として参照される。

*10 Auction Hardwiring Supplement Protocol を指す。

10.3.1　リスキー PV01 (RPV01)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	額面	10,000,000		ﾌﾟﾚﾐｱﾑ ﾚｸﾞ	94,321.19	(計算式)	E1=B1*B2*365/360*E12		
2	ｸｰﾎﾟﾝ(Act360)	1.00%	(Act365)1.014%	ﾃﾞﾌｫﾙﾄ ﾚｸﾞ	122,462.50		E2=B1*E13		
3	回収率 R	35%		NPV(時価)	28,141.31		E3=-E1+E2 E4=E13/E12*(360/365)		
4	ﾊｻﾞｰﾄﾞ λ	2.00%		ﾌｪｱｽﾌﾟﾚｯﾄﾞ	1.29836%				
5	TradeDT					(切捨て)	midpoint 計算		
6	2022/9/19	τ (A365)	10% DF	生存確率Q	dQ	days	中間日	DF^m	Q^m
7	2022/9/20		0.999726	99.9945%					
8	2022/12/20	0.249	0.975110	99.4972%	0.4974%	45	2022/11/4	0.987476	99.7483%
9	2023/3/20	0.247	0.951360	99.0077%	0.4895%	45	2023/2/3	0.963161	99.2521%
10	2023/6/20	0.252	0.927680	98.5098%	0.4979%	46	2023/5/5	0.939445	98.7585%
11	2023/9/20	0.252	0.904590	98.0145%	0.4953%	46	2023/8/5	0.916062	98.2619%
12			(PV01)0.9395	RPV01	0.93029	(計算式)	E10=D10-D11		
13				(1-R) x Σ(D dQ)	1.2246%		E11=SUMPRODUCT(B8:B11,C8:C11,I8:I11)		
14							E12=SUMPRODUCT(H8:H11,E8:E11)*(1-B3)		

図 10.5: A 社の CDS 計算

ではCDSのプレミアムレグの時価の計算に移る。まず3か月毎に支払うプレミアムはリスキーキャッシュフローなので、期待値をとる必要があることを思い出そう。期待値はキャッシュフローに確率を掛けて計算するので、生存確率 Q_i を使用し、式 (10.19) の期待値計算は次式となる。

$$
\begin{aligned}
&\text{プレミアム支払額の期待値の現在価値}\\
&= \overbrace{C^a}^{\substack{\text{日数調整後}\\\text{クーポン}}} \times \overbrace{\sum_i (D_i \times \tau_i \times \overbrace{Q_i}^{\substack{\text{生存}\\\text{確率}}})}^{\substack{\text{金利スワップ}\\ PV01}}
\end{aligned}
\tag{10.20}
$$

式 (10.11) で計算した生存確率 (図 10.5D 列) は保険料支払日の確率となっているが、上式で必要な確率は各保険料期間の平均的な生存確率である。CDS取引では保険料期間の**中間日 (midpoint)** の生存確率 $\boldsymbol{Q_i^m}$ (肩に m を表示) を使うことがスタンダードとなっている。(ディスカウントファクターは保険料支払日を使用)

図 10.5 F〜I 列のグレー部分で中間日を G 列で算出し、その日付のディスカウントファクター DF^m と生存確率 Q^m を計算した。G 列中間日の算出は以下の手順となる。

F8: days 45 : このセルの計算式は`=INT( (A8-A7)/2 )`で、2022/12/20(A8 セル) と 2022/9/20(A7 セル) の日数の半分を切捨てし、45 日を計算。

G8: 中間日 2022/11/4 : 2022/9/20(A7 セル) に 45 日を足し、中間日 2022/11/4 を算出。

H8: $\boldsymbol{DF^m}$、I8: $\boldsymbol{Q^m}$: 中間日 2022/11/4 のディスカウントファクター DF^m と生存確率 Q^m を計算。

- 日付を特定した DF や Q の算出法は説明済みで省略。(DF は式 1.2、Q は式 10.11 参照)
- ディスカウントファクター DF^m はデフォルトレグの計算で使用。

式 (10.20) の生存確率 Q_i は中間日の生存確率 Q_i^m となり、プレミアムレグの時価は次式から 94,321.19 円 (E1 セル) となる。

$$
\begin{aligned}
&\text{プレミアムレグの時価 (額面 1 円)} \\
&= \underbrace{101.4bp}_{\text{日数調整後}} \times \Big(\underbrace{0.975110}_{C8\text{ セル}} \times \underbrace{0.25\text{ 年}}_{B8\text{ セル}} \times \underbrace{Q^m_{2022/11/4}}_{I8\text{ セル}} + \\
&\qquad \cdots + \underbrace{0.904590}_{C11\text{ セル}} \times \underbrace{0.252\text{ 年}}_{B11\text{ セル}} \times \underbrace{Q^m_{2023/8/5}}_{I11\text{ セル}} \Big) \\
&= 101.4bp \times \underbrace{0.93029}_{\substack{E12\text{ セル} \\ (RPV01)}} = \underbrace{94.32119bp}_{\substack{E1\text{ セルは額面} \\ 1000\text{ 万円の値}}}
\end{aligned}
$$

2 つ目の等号にルビで記した **RPV01** は**リスキー PV01** を意味し、中間日の生存確率を使用して、次式で定義される。

$$
\boldsymbol{RPV01} \quad := \quad \sum_i \big(D_i \times \tau_i \times Q_i^m \big), \quad i = \text{プレミアム支払日} \tag{10.21}
$$

図 10.5 エクセル E12 セルではエクセルの $= SumProduct(\cdot)$ を使用し 次のように計算した。

$$
\underbrace{\overset{(E12\text{ セル})}{0.93029}}_{RPV01} \quad = \quad SumProduct(\underbrace{B8:B11}_{\text{テナー}}, \underbrace{C8:C11}_{\substack{\text{ディスカウント} \\ \text{ファクター}}}, \underbrace{I8:I11}_{\text{中間日生存確率}})
$$

以上より、RPV01 を使用したプレミアムレグの時価は次式で算出される。

プレミアムレグの時価

$$
\begin{aligned}
&= \underset{\substack{\text{日数調整後} \\ \text{クーポン}}}{C^a} \times \overbrace{\sum_{i=1:n} \Big(\underset{\substack{\text{ディス} \\ \text{カウント}}}{D_i} \times \underset{\text{テナー}}{\tau_i} \times \underset{\substack{\text{中間日} \\ \text{生存確率}}}{Q_i^m} \Big)}^{RPV01} && (10.22) \\
&= C \times \underbrace{365/360}_{\text{日数調整}} \times RPV01 && (10.23)
\end{aligned}
$$

RPV01 は PV01 に生存確率 Q_i^m をかけたものであり、RPV01 は PV01 をリスキーキャッシュフローに拡張させている。

10.3.2 QuantLib によるトイモデル CDS の時価計算

図 10.6 (388 ページ) は図 10.3 (379 ページ) から続くコードでトイモデルの CDS を QuantLib で評価した。

コード右下にあるオブジェクト図の破線の中は図 10.3 で作成した。この図 10.6 では 2 つのオブジェクト cdsOBJ、midENG を 2 行目〜4 行目で作成し、cdsOBJ のメソッドで CDS を評価するシンプルなコードとなる。

7、8 行目でプリント用に 2 項目を事前に計算し、9 行目から 16 行目で各メソッドで計算結果を出力した。初めにこれらメソッドを確認する為、図 10.5 エクセルの計算結果と比較する。10.4 節以降で説明するデフォルトレッグ等のメソッドも同時に理解しよう。

9: `tradeDate`: 2022-09-19 : CDS 契約日で A6 セルに対応。

10: `couponLegNPV`: -94,323.10 : プレミアムレッグ E1 セルに対応。

- QuantLib ではプレミアムレッグを couponLeg と参照。
- 3 行目の CreditDefaultSwap コンストラクタの 1 つ目の引数 **`bP`** は buy Protection の略で、myABBR モジュールで bP= ql.`Protection.Buyer` と短縮形を定義。(ql.`Protection.Seller` の短縮形は **`sP`**)
- プロテクションの買いはプレミアムの支払いであり、マイナスの符号が付く。
- E1 セル 94,321.19 円とほぼ同じ時価を算出。(2 円弱の差の理由は不明)

11: `defaultLegNPV`: 122,462.50 : デフォルトレッグ E2 セルに対応。

- デフォルトレッグの時価を表す。(10.4.2 節で説明)

12: `NPV`: 28,139.40 : NPV(時価) E3 セル 28,141.31 に対応。

- CDS の時価を表し、プレミアムレッグとデフォルトレッグの合計値から算出する。(10.5 節で説明)

7, 13: netTwoLEG : 7 行目で計算した 2 つのレグの合計値 netTwoLEG (=couponLegNPV+cdsOBJ.defaultLegNPV) を 13 行目でプリント。

- 12 行目の NPV メソッドの値と同じ値。(NPV メソッドがどのように算出されたかを確認)

8, 15: `impliedHazardRate`: 2.00% : 8 行目は cdsOBJ オブジェクトの現在のハザードレートを impliedHazardRate メソッドで hzdRTinOBJ 変数に設定。15 行目でプリント。

- リファレンスマニュアルでの impliedHazardRate の説明が次図であり、必要な引数は 3 つ targetNPV, discountCurve, dayCounter。4 番目 recoveryRate は 0.4 が初期値。
- 8 行目の最後の引数により、初期値 0.4 を日本の rcvRTj(=0.35) に修正。

◆ impliedHazardRate()

```
Rate impliedHazardRate ( Real                                   targetNPV,
                         const Handle< YieldTermStructure > &   discountCurve,
                         const DayCounter &                     dayCounter,
                         Real                                   recoveryRate = 0.4,
                         Real                                   accuracy = 1.0e-8,
                         PricingModel                           model = Midpoint ) const
```

尚 ハザードレートに関して、次の点に留意しよう。

- 図 10.3 の 5 行目で hzdRT=cdsQT/(1-rcvRTj) を計算し、外部データとしてハザードレート 2.00%を設定。
- 同様に図 10.5 エクセルの B4 セルも外部データとして、ハザードレートが与えられている。
- 10.2.6 節で説明したように、ハザードレートはキャリブレーションで内部的に生成するデータであり、出力された 2.0%は内部的に保有されたデータを表す。(キャリブレート前の為、初期値を表示)

16: `fairSpread`: 1.298330%： この fairSpread はハザードレート 2.0%から算出されたスプレッド。図 10.5 エクセル フェアスプレッド E3 セルに対応。(計算法は 10.5.1 節で説明)

- 図 10.3 の 4 行目クォートスプレッドは cdsQT=1.30%であり、メソッドで算出したフェアスプレッドとは異なる。
- 従ってクォートスプレッドとフェアスプレッドが等しくなるように、ハザードレートの調整 (キャリブレーション) が必要。

以上が 2 行目で作成された cdsOBJ の各メソッドの説明である。次に図 10.3 の 8 行目の cdsSCD オブジェクトも含めた 3 つのオブジェクトについて説明する。

(図 10.3 8 行目): cdsSCD： CDS 特有のスケジュールを以下のパラメータで作成。(このスケジュールはトイモデル用で 10.6 節で説明する ISDA スタンダートモデルのベースとなる)

tradeDT+1： CDS 契約日の翌日 (2022/9/20) が CDS 取引の起算日。(Schedule コンストラクタの一般的説明は図 2.9 を参照)

- この計算式が示すように “ 翌営業日 ” ではなく、カレンダーベースで曜日に関係のない翌日である点に注意。

`calWK`： CDS は保険としての性格上、資金決済とは関係ないカレンダー ql.`WeekendsOnly` を使用。(myABBR モジュールで calWK=ql.`WeekendsOnly` と定義)

- calWK は日本を除く多くの国で CDS 用カレンダーとして採用。

```
1  # 4.cds NPV計算
2  cdsOBJ = ql.CreditDefaultSwap(bP, ntlAMT, cpn100, cdsSCD, FLLW, dcA360)
3  midENG = ql.MidPointCdsEngine(hzCvHDL, rcvRTj, dsCvHDL)
4  cdsOBJ.setPricingEngine(midENG)
5  
6  # 5.プリント
7  netTwoLEG = cdsOBJ.couponLegNPV()+cdsOBJ.defaultLegNPV()
8  hzdRTinOBJ= cdsOBJ.impliedHazardRate(cdsOBJ.NPV(), dsCvHDL, dcA365, rcvRTj)
9  print(f'tradeDate     :{cdsOBJ.tradeDate().ISO() :}'      )
10 print(f'couponLegNPV  :{cdsOBJ.couponLegNPV()     : ,.2f}' )
11 print(f'defaultLegNPV :{cdsOBJ.defaultLegNPV()    : ,.2f}' )
12 print(f'NPV           :{cdsOBJ.NPV()              : ,.2f}' )
13 print(f'(netTwoLeg    :{netTwoLEG                 : ,.2f})')
14 print('-'*14)
15 print(f'hzdRT(inOBJ)  :{hzdRTinOBJ                :.6%}'  )
16 print(f'fairSpread    :{cdsOBJ.fairSpread()       :.6%}'  )
```

```
tradeDate     :2022-09-19
couponLegNPV  :-94,323.10
defaultLegNPV :122,462.50
NPV           :28,139.40
(netTwoLeg    :28,139.40)
--------------
hzdRT(inOBJ)  :2.000000%
fairSpread    :1.298330%
```

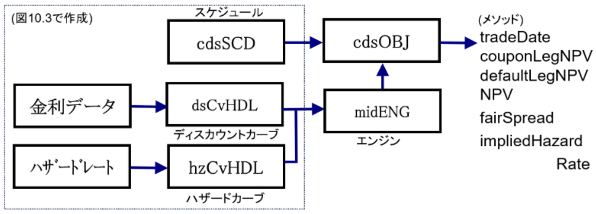


図 10.6: トイモデルの CDS 時価評価

(図 10.3 からの続きのコード)

- 日本のカレンダーは calWK に春分/秋分の日を休日として追加する。(10.6 節で説明)

FLLW： 5 番目の引数 FLLW はプレミアムの支払日を土日の場合、翌営業日とする指定。

unADJ： 6 番目の引数 unADJ は満期日を調整しない。

- もし満期日が休日でも CDS の保険契約は満期日で終わることを意味。

dtGENf： myABBR モジュールで dtGENf=ql.`DateGeneration.Forward` を短縮形で定義。

- dtGENf は起算日から 3ヶ月毎にプレミアム支払日を設定することを意味。(10.6 節の ISDA スタンダートモデルでは IMM カレンダーが使用されるので、dtGENf は忘れてよい)

2: cdsOBJ=ql.CreditDefaultSwap(· · ·)： CreditDefaultSwap コンストラクタで CDS オブジェクトを cdsOBJ に設定。必要な引数は下図の通り 6 つ。

CreditDefaultSwap

`ql.CreditDefaultSwap(`*side, nominal, spread, cdsSchedule, convention, dayCounter*`)`

side： プロテクションの売り買いのサイドを指定。

- (繰り返しとなるが)myABBR モジュールで bP= ql.`Protection.Buyer`、sP=ql.`Protection.Seller` の短縮形を定義。

`convention`： Schedule コンストラクタで FLLW と unADJ の 2 つを convention として指定したが、QLP ドキュメントでシンプルに“ convention ”とある場合、前者を意味。

- 後者は“ `terminationDateConvention` ”として参照。

dayCounter： CDS のプレミアムは Act/360 で算出される為、dcA360 を指定。(このコンストラクタのみ Act/360 を指定する。CDS でその他のコンストラクタは Act/365 となる)

3, 4: midENG=`MidPointCdsEngine`： MidPointCdsEngine コンストラクタで CDS を計算するエンジンオブジェクトを作成。

- QLP ドキュメントでは下図のように引数は defaultProbability, recoveryRate, yieldTermStructure の 3 つが必要。

MidPointCdsEngine

`ql.MidPointCdsEngine`(*defaultProbability, recoveryRate, yieldTermStructure*)

- 3 つの引数は 3 行目のコードから推測出来る為、説明は省略。
- midpoint の意味は 10.3.1 節を参照。
- 3 行目のエンジンを midENG として設定し、4 行目で cdsOBJ へセット。

10.4　デフォルトレグの計算

デフォルトレグの時価は式 (10.3) で定義された偶発的支払額の期待値の現在価値であり、使用される確率が倒産確率であることは 10.1 節で既に述べた。しかしどの時点で倒産が発生するかにより、倒産確率やディスカウントファクターは異なってくる。この点を考慮し、デフォルトレグの計算は次のような手順で行う。

(1) 3ヶ月毎のプレミアム支払日で区切り、複数の時間帯を作成。

(2) 各時間帯の中間日のディスカウントファクター DF_i^m を使い (10.3.1 節で説明) 、偶発的支払額の期待値の現在価値を計算。

- 中間日の DF_i^m を使う理由は“3ヶ月間の中央でデフォルトが発生”と見做してよい。

(3) 全ての時間帯の合計額をデフォルトレグの時価とする。

10.4.1　時間帯 t の倒産確率

1 つ目の時間帯として、CDS 契約開始日から 0.25 年までの時間帯で倒産が発生するケースを考えよう。(以下 契約開始日を 0 年と参照)

この確率は“ 契約開始日に生存している確率 $Q_{0\text{年}}$ ”と“ その生存を仮定して、0.25 年までに倒産が発生する条件付倒産確率 ” の積となる。この確率は式 (10.18) で計算済みで $dQ_{0\text{年}}$ である。

図 10.5 の数値を使えば、この時間帯の倒産確率は次のように算出される。

$$
\begin{aligned}
&Pr\{0\text{年} < \text{倒産時刻}: \tau \leq 0.25\text{年}\}\\
&\qquad = dQ_{0\text{年}} = Q_{0\text{年}} - Q_{0.25\text{年}}\\
&\qquad = \underbrace{\overset{(D7\text{セル})}{99.9945\%} - \overset{(D8\text{セル})}{99.4972\%}}_{\text{生存確率の差}} = \underbrace{\overset{(E8\text{セル})}{0.4974\%}}_{\text{時間帯の倒産確率}}
\end{aligned}
$$

本書では dQ_t を時間帯 t の倒産確率と呼ぶ。

時間帯tの倒産確率

$$
:= Pr\{\, t < \text{倒産時刻}: \tau \leq t + dt\} = \underbrace{dQ_t}_{\text{生存確率の差}} \tag{10.24}
$$

10.4.2　デフォルトレグの時価

1 つ目の時間帯での偶発的支払額の期待値の現在価値は、式 (10.2) と同様の考え方となるが、ディスカウントファクターは時間帯 i の中間日の DF_i^m を使用し、次式で計算される。

0 年〜0.25 年のデフォルトレグの時価 (額面 1 円)

$$
= \overbrace{(1 - 0.35)}^{\text{損失率}} \times \overbrace{0.4974\%}^{\substack{\text{時間帯 0.25 年の}\\ \text{倒産確率}}} \times \overbrace{0.987476}^{\text{中間日 } DF^m} = 0.3192\%
$$

ここで回収率を R と表して、上式を一般化しておく。i を各プレミアム期間が始まる年数として、

時間帯tのデフォルトレグの時価

$$
= \overbrace{(1 - R)}^{\text{損失率}} \times \overbrace{dQ_i}^{\substack{\text{時間帯iの}\\ \text{倒産確率}}} \times \overbrace{D_i^m}^{\text{中間日 } DF^m}
$$

i =0.25 年、0.50 年、0.75 年も同様な計算で以下となる。(各自確認)

$$
\left.
\begin{aligned}
(1 - R) \times dQ_{0.25\text{年}} \times D^m_{0.25\text{年}} &= 0.3064\%\\
(1 - R) \times dQ_{0.05\text{年}} \times D^m_{0.50\text{年}} &= 0.3040\%\\
(1 - R) \times dQ_{0.75\text{年}} \times D^m_{0.75\text{年}} &= 0.2950\%
\end{aligned}
\right\} \tag{10.25}
$$

最後はこの 4 つを単純に足すことでデフォルトレグの時価となる。

$$
\begin{aligned}
&\text{デフォルトレグの時価 (額面 1 円)} \\
&\quad = \ 0.3192\% + \underbrace{00.3064\% + 0.3040\% + 0.2950\%}_{\text{式 (10.25)}}) \ = \ \underbrace{1.2246\%}_{\text{図 10.5 } E13 \text{ セル}}
\end{aligned}
$$

この数値例から類推できるようにデフォルトレグの時価の一般式は次式となる。[*11]

$$
\begin{aligned}
&\textbf{デフォルトレグの時価 (額面 1 円)} \\
&\quad = \underbrace{(1-R)}_{\text{損失率}} \times \sum_i \left\{ \underbrace{D_i^m}_{\text{中間日 } DF} \times \underbrace{dQ_i}_{\text{生存確率の差}} \right\} \qquad (10.26) \\
&\quad\quad i : \text{各プレミアム期間が始まる年数}
\end{aligned}
$$

図 10.5(384 ページ) に戻ると、式 (10.26) を F13 セルでエクセル関数 $= SumProduct(\cdot)$ を使用し、1 円当たりの時価を次のように計算し、

$$
\underbrace{1.2246\%}_{F13 \text{ セル}} \ = \ (1 - \underbrace{0.35}_{\text{回収率}}) \times SumProduct(\underbrace{H8:H11}_{\text{中間日 } DF^m}, \underbrace{E8:EF11}_{dQ})
$$

E2 セルで額面を掛けて、時価 122,462.50 円を算出した。

この値は図 10.6 で計算された " defaultLegNPV :122,462.50 " と同じ値となっていることも確認しよう。QuantLib ではデフォルトレグの値は CDS オブジェクトの **defaultLegNPV** メソッドで簡単に取得でき、説明は省略する。

10.5 CDS 時価とハザードレートキャリブレーション

CDS の時価はプレミアムレグの時価とデフォルトレグの時価の差額 (プレミアム授受の違いが符号に反映) である。" A 社のケース " の投資家 X はプレミアムを払う立場にあるので、CDS 時価は

$$
\begin{aligned}
&\text{投資家 } X \text{ の } CDS \text{ 時価} \\
&\quad = -\text{プレミアムレグ時価} + \text{デフォルトレグ時価} \\
&\quad = \underbrace{-94,321.19 \text{ 円}}_{E1 \text{ セル}} + \underbrace{122,462.50 \text{ 円}}_{E2 \text{ セル}} = \underbrace{28,141.31 \text{ 円}}_{E3 \text{ セル}} \qquad (10.27)
\end{aligned}
$$

と利益を計上している。(図 10.5 の各セル参照)

[*11] 時間帯をより細かくした場合、式 (10.26) は $\sum$ を $\int$ に替えて、次式で表される。

$$
\text{デフォルトレグの時価} = (1-R) \times \int_0^T D_i \ dQ_i \ , \qquad (T \ : \ CDS \text{ 満期年})
$$

10.5.1 フェアスプレッドの算出

市場で建値されている CDS スプレッド (クォートスプレッド) はプレミアムレグの時価とデフォルトレグの時価が等しいスプレッドである。クォートスプレッド (Act/360 ベース) を S、額面を 1 円とした場合、2 つのレグの時価が等しいことは

$$\underbrace{S \times \underset{\text{日数調整}}{(365/360)} \times RPV01}_{\substack{\text{式 (10.23)} \\ \text{プレミアムレグ}}} = \underbrace{(1-R) \times \sum_{i=1}^{m} (dQ_i \times D_i)}_{\substack{\text{式 (10.26)} \\ \text{デフォルトレグ}}}$$

と表せ、クォートスプレッド S は次式で算出される。

$$\text{クォートスプレッド:}S = \frac{(1-R) \times \sum_{i=1}^{m} (dQ_i \times D_i)}{(365/360) \times RPV01} \tag{10.28}$$

金利スワップレートが変動金利レグの時価を PV01 で割って計算できたように、CDS ではデフォルトレグの時価を RPV01 で割る式となる。

クォートスプレッドは市場で観測できるので、この式を使って計算する必要はないが、CDS の評価等の為に式 (10.28) で算出するスプレッドを**フェアスプレッド** (**fairSpread**) と呼ぶ。数値例として、図 10.5 (384 ページ) E4 セルの計算を見ておく。(計算結果が 130bp と異なっている点に注意)

$$\underset{(Act/360)}{\text{フェアスプレッド:}S} = \frac{\overbrace{1.2246\%}^{E13\text{ セル デフォルトレグ価格}}}{(365/360) \times \underbrace{0.93029}_{\substack{E12\text{ セル} \\ RPV01}}} = \underbrace{1.29836\%}_{E4\text{ セル}}$$

ここで上の値が意味することを確認しておこう。“ A 社のケース ”において、現在の A 社のクォートスプレッドは投資家 X が契約した当時の 100bp から 129.8bp まで拡大していることを表している。このことは式 (10.27) で保険の買い手である投資家 X の時価評価が 28,141 円の利益となっていることにも現れている。

この利益額は RVP01 を使って、次のように計算することもできる。

$$\begin{aligned} & CDS \text{ 時価 (額面 1 円当り)} \\ & \quad = \left(\text{フェアスプレッド} - \text{クーポン}\right) \times (365/360) \times RPV01 \qquad (10.29) \\ & \quad = (129.8bp - 100bp) \times (365/360) \times 0.93029 = 28.141bp \end{aligned}$$

10.5.2 ハザードレートのキャリブレーション

この一連の計算では当初、ハザードレートの近似値 2%が与えられ、その結果としてフェアスプレッド 129.8bp が算出された。A 社のクォートスプレッドが 130bp で建値されている場合、ハザードレートを修正し、式 (10.28) で計算されるフェアスプレッドを市場建値と同じ 130bp にさせる必要がある。

この作業が図 10.4(4) で説明したハザードレートのキャリブレーションである。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	額面	10,000,000		ﾌﾟﾚﾐｱﾑ ﾚｸﾞ	94,320.01				
2	ｸｰﾎﾟﾝ(Act360)	1.00%	(Act365)1.014%	ﾃﾞﾌｫﾙﾄ ﾚｸﾞ	122,616.01				
3	回収率 R	35%		時価(元本)	28,296.00				
4	ﾊｻﾞｰﾄﾞ λ	2.00253%		ﾌｪｱｽﾌﾟﾚｯﾄﾞ (A360)	1.30000%				
5	TradeDT					(切		計算	
6	2022/9/19	τ (A365)	10% DF	生存確率Q	dQ	(			Q^m
7	2022/9/20		0.999726	99.9945%					
8	2022/12/20	0.249	0.975110	99.4965%	0.4980%				99.7479%
9	2023/3/20	0.247	0.951360	99.0064%	0.4901%	45	2023/2/3	0.963161	99.2512%
10	2023/6/20	0.252	0.927680	98.5080%	0.4985%	46	2023/5/5	0.939445	98.7569%
11	2023/9/20	0.252	0.904590	98.0120%	0.4960%	46	2023/8/5	0.916062	98.2597%
12			(PV01)0.9395	RPV01	0.93028				
13				(1-R) x Σ(D dQ)	1.2262%				
14				(Goal Seek)	130.00	(計算式)	E14=E4*10^4		

ゴール シーク
数式入力セル(E): E14
目標値(V): 130
変化させるセル(C): B4
OK キャンセル

図 10.7: ハザードレートのキャリブレーション

図 10.7 は E4 セルのフェアスプレッドが 130bp となるように B4 セルのハザードレートを修正させた計算例である。

エクセルのゴールシーク機能で計算しているが、ゴールシークの精度を上げる為、図 10.7 では E4 セルの 10,000 倍を E14 セルの値とし、E14 セルが 130 になるようにハザードレート B4 セルを求めている。

計算結果はハザードレート 2.00253%(B4 セル) の時、フェアスプレッドが 130bp となる。ハザードレートが上った為に、D 列の生存確率が低下し、RPV01 が小さくなっている等を図 10.5 と比較しておこう。

一方、図 10.8 は QuantLib によるハザードレートの計算コードで、実質 2 行でハザードレート 2.00257%の算出は完了する。(図 10.7 エクセルとは少数 6 桁目まで一致。このハザードレートでハザードカーブを再設定し、エンジンを更新する手順で cds.OBJ.fairSpread が 1.30%を示す。各自確認)

```
# hazardRrateの算出（エンジン不要）
npv0OBJ = ql.CreditDefaultSwap(bP, ntlAMT, cdsQT, cdsSCD, FLLW, dcA360)
impHzdRT= npv0OBJ.impliedHazardRate(npv0, dsCvHDL, dcA365, rcvRTj)
print(f'impHzdRT:{impHzdRT:.8%}')
```

```
impHzdRT:2.00257278%
```

図 10.8: impliedHazardRate メソッドによるスプレッドからハザードレートの算出

簡単にコードを確認する。

2: npv0OBJ : ハザードレートを計算する為に CDS オブジェクト npv0OBJ を別に用意。(npv0OBJ は "NPV がゼロとなるオブジェクト" の略)

- 図 10.6 の 2 行目との相違は 3 番目の引数が cpn100 か cdsQT の部分。
- cpn100 は cdsOBJ のプレミアム (エクセルの B2 セル) であり、cdsQT はクォートスプレッドの 130bp(図 10.3 の 4 行目で設定)。
- npv0OBJ はクォートスプレッドをプレミアムとする CDS オブジェクト。

3: impHzdRT : npv0OBJ オブジェクトに対して、impliedHazardRate メソッドのハザードレートを impHzdRT へ設定。

- impliedHazardRate メソッド 1 番目の引数の `npv0` は myABBR モジュールで npv0=0.0 と定義。NPV=ゼロを表す変数。
- 図 10.6 の 8 行目で使用した impliedHazardRate メソッドでは 1 番目引数を cdsOBJ.NPV() と指定。
- 比較すると判るように、図 10.8 では 1 番目引数に npv0 を指定し、npv0OBJ オブジェクトの NPV() がゼロとなるハザードレートを算出。

多くの読者は " この便利なメソッドがあるなら、ハザードレートの近似式 (10.9) など使わず、初めから impliedHazardRate メソッドでハザードレートを計算すれば良かった " と考えるだろう。
しかし、これまでの説明が無い場合、impliedHazardRate メソッドから算出されるハザードレートはブラックボックスの数値となってしまう。この点を避ける為に長い説明をした。

尚、10.6 節で説明する "ISDA CDS スタンダードモデル" では impliedHazardRate メソッドで算出された数値をキャリブレーション無しにハザードレートとして使用し、CDS 時価等の計算を完了させる。*12

10.5.3 CDS キャッシュフロー表

図 10.9 は CDS のキャッシュフロー表を作成するコードで、中間日のディスカウントファクターや生存確率も出力させた為、若干長いコードとなった。

*12 `SpreadCdsHelper` というヘルパークラスもスプレッドからハザードレートを算出できるが、このトイモデルでは目標値を計算出来なかった為、本書では扱っていない。
ただこのヘルパーを使うとハザードレートのタームストラクチャーを計算出来るだろう。

このコードは金利スワップの図 2.11 (63 ページ) を元に作成しており、以下では相違点のみを説明する。(説明を省略した部分は図 2.11 等を参照。尚、10.6 節の ISDA アップフロントモデルでも使用する為、アップフロントモデルの観点からの説明もを補足)

```
 1 # 6.キャッシュフロー表: cdsOBJ.coupons()を使用
 2 tradeDT, ntlAMT = cdsOBJ.tradeDate(), cdsOBJ.notional() #関数化の為 設定
 3 dfCDS = pd.DataFrame({
 4     'payDate':    cpn.date(),
 5     'coupon':     cpn.rate(),
 6     'accStt':     cpn.accrualStartDate().ISO(),
 7     'accEnd':     cpn.accrualEndDate(),
 8     'days':       cpn.amount()/(ntlAMT*cpn.rate()    /360),
 9     'YF':         cpn.amount()/(ntlAMT*cpn.rate()*365/360),
10     'amount':     cpn.amount(),
11     } for cpn in map(ql.as_coupon, cdsOBJ.coupons()))
12 # 起算日の挿入
13 dfEFF = pd.DataFrame([{'payDate': cdsOBJ.protectionStartDate(),
14                         'accEnd': cdsOBJ.protectionStartDate()}],columns=dfCDS.columns)
15 dfCDS = pd.concat([dfEFF, dfCDS], ignore_index=True)
16 #ディスカウントファクター
17 psDF  = [1.0                 for dt in dfCDS.accEnd if dt <= tradeDT] #past   DF
18 fuDF  = [dsCvOBJ.discount(dt) for dt in dfCDS.accEnd if tradeDT < dt ] #future DF
19 dfCDS = pd.concat([dfCDS, pd.DataFrame(psDF+fuDF, columns=['DF']) ], axis=1)
20 #生存確率Qとdq
21 psQ   = [1.0                            for dt in dfCDS.accEnd if dt <= tradeDT]
22 fuQ   = [hzCvOBJ.survivalProbability(dt) for dt in dfCDS.accEnd if tradeDT < dt ]
23 dfCDS = pd.concat([dfCDS, pd.DataFrame(psQ+fuQ, columns=['Q']) ], axis=1)
24 dQ    = np.insert(np.diff(dfCDS.Q)*(-1), 0, 0)
25 dfCDS = pd.concat([dfCDS, pd.DataFrame( dict(dQ=dQ)) ], axis=1)
26 # mid計算
27 midDTs  = dfCDS.payDate[:-1]+(np.diff(dfCDS.payDate)/2).astype('int')
28 midDFs  = [dsCvOBJ.discount(dd) for dd in midDTs]
29 midQs   = [hzCvOBJ.survivalProbability(dd) for dd in midDTs]
30 dfDFQm  = pd.DataFrame( dict(mDate=midDTs, mDF=midDFs, mQ=midQs))
31 dfDFQm.mDate = dfDFQm.mDate.map(lambda x: x.ISO())
32 dfDFQm  = pd.concat([pd.DataFrame(columns=['mDate'],index=[0]),      #空の行を追加
33                                                     dfDFQm],ignore_index=True)
34 dfCDS   = pd.concat([dfCDS, dfDFQm ], axis=1)
35 #日付修正(ISOフォーマット)
36 dfCDS.payDate =  dfCDS.payDate.map(lambda x:x.ISO())
37 dfCDS.accEnd  =  dfCDS.accEnd.map(lambda x:x.ISO())
38 display(dfCDS[:].style.format(fmtSCF))
```

	payDate	coupon	accStt	accEnd	days	YF	amount	DF	Q	dQ
0	2022-09-20	nan%	nan	2022-09-20	nan	nan	nan	0.99972606	0.999945	0.000000
1	2022-12-20	1.000000%	2022-09-20	2022-12-20	91	0.249315	25,277.78	0.97510953	0.994972	0.004974
2	2023-03-20	1.000000%	2022-12-20	2023-03-20	90	0.246575	25,000.00	0.95135974	0.990077	0.004895
3	2023-06-20	1.000000%	2023-03-20	2023-06-20	92	0.252055	25,555.56	0.92767994	0.985098	0.004979
4	2023-09-20	1.000000%	2023-06-20	2023-09-20	92	0.252055	25,555.56	0.90458955	0.980145	0.004953

mDate	mDF	mQ
nan	nan	nan
2022-11-04	0.987476	0.997483
2023-02-03	0.963161	0.992521
2023-05-05	0.939445	0.987585
2023-08-05	0.916062	0.982619

図 10.9: トイモデル キャッシュフロー表

2: `tradeDate`, `notional`： myUtil モジュールにこのコードを関数として組

み込む為、cdsOBJ の tradeDate と notional メソッドを使い、取引日 (tradeDT) と想定元本 (ntlAMT) を関数内で設定。

- myUtil モジュールでは 3 つの引数 dsOBJ、hzCvOBJ、dsCvOBJ を必要とする **cdsCashFlow(dsOBJ, hzCvOBJ, dsCvOBJ)** という関数を定義。

3〜11: cdsOBJ.coupons : 金利スワップでは swapOBJ.leg(1) オブジェクトを as_coupon によって、キャストした。

CDS のキャッシュフローは cdsOBJ.coupons オブジェクトが持ち、スワップと同じように as_coupon でキャストが可能。

- キャスト後のメソッドも金利スワップと同じものとなり、4 行〜10 行目までの説明は省略。
- 8, 9 行目の“ days ”と“ YF ”はプレミアム金額の cpn.amount から逆算した。
- この理由は ISDA アップフロントモデルの償還日が“ 両端 ”になる為。(10.6.2 節 406 ページ 両端の説明参照)

13: protectionStartDate : dfCDS の 1 行目として protectionStartDate の日付の行を作成。

- ISDA アップフロントモデルでは CDS の起算日と protectionStartDate メソッドの日付はほぼ一致しない点に注意。(10.6.2 節 403 ページ 効力発生日の説明参照)
- ISDA アップフロントモデルの RPV01 を計算する場合、初回 YF 項は修正する必要がある。

24: dQ=np.insert(np.diff(dfCDS.Q)*(-1), 0, 0) : dQ の計算は np.dff()*(-1) で完了するが、データフレームの行位置を一致させる為、`np.insert(···, 0, 0)` により、numpy 配列の先頭に 0 を挿入。

25: pd.DataFrame(dict(dQ=dQ) : `dict(···)` によるデータフレーム作成の説明は図 2.5 参照。

27: astype('int') : この行は中間日を算出。

- “ np.diff(dfCDS.payDate)/2 ”により、中間日までの日数を実数 (float) で算出。
- その実数を astype('int') で整数へキャスト。(少数部分は切捨て)

以上がキャッシュフロー表のコードの補足である。図 10.10 はデータフレーム dfCDS を使い、CDS 時価評価の主な項目を手計算した。(コードの中の“ hc ”は hand calc の略)

図 10.5 エクセルと同じ値が算出されていることから、このキャッシュフロー表と図 10.10 のコードが正しいことが判る。

```
# couponLeg, DefaultLeg, NPV
hcCpnLEG = -(dfCDS.amount * dfCDS.DF * dfCDS.mQ).sum()
hcDftLEG =  (1-rcvRTj)    *(dfCDS.mDF* dfCDS.dQ).sum()
hcNPV    = hcCpnLEG + hcDftLEG*ntlAMT
print(f'(hc)cpnLegNPV: {hcCpnLEG:,.2f}',f'(hc)dftLegNPV: {hcDftLEG*ntlAMT:,.2f} ',
      f'(hc)NPV: {hcNPV:,.2f}')

# RPV01, fairSPD, Hazardrate
hcRPV01  =  (dfCDS.YF     * dfCDS.DF * dfCDS.mQ).sum()
hcFairSPD= (hcDftLEG/(hcRPV01*365/360))
hcHzdRT  = np.log(dfCDS.mQ.iloc[-2]/dfCDS.mQ.iloc[-1])/dfCDS.YF.iloc[-1]
print(f'(hc)RPV01: {hcRPV01:.8f}    ',  f'(hc)fairSPD: {hcFairSPD:.8%}  ',
      f'(hc)hzdRT: {hcHzdRT:.8%}')
```

```
(hc)cpnLegNPV: -94,321.19 (hc)dftLegNPV: 122,462.50  (hc)NPV: 28,141.31
(hc)RPV01: 0.93029116     (hc)fairSPD: 1.29835622%   (hc)hzdRT: 2.00000000%
```

図 10.10: トイモデル時価評価項目の手計算

10.5.4 式 (10.9) の導出 *

式 (10.12) では生存確率 Q_t でハザードレート $\lambda(t)$ を定義した (この節では λ_t を $\lambda(t)$ と表記)。倒産時刻 τ を使ったハザードレートの定義は条件付倒産確率 (式 10.17) を t で微分した次式となる。[*13]

$$\lambda(t) \;:=\; \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overbrace{Pr\{\tau \leq t + \Delta t \mid t < \tau\}}^{\text{条件付倒産確率 式 (10.17)}}}{\Delta t} \tag{10.30}$$

右辺は次のように変形出来るので、

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta t \to 0} \frac{Pr\{\tau \leq t + \Delta t \mid t < \tau\}}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Pr\{\, t < \tau \leq t + \Delta t\}}{\Delta t Pr\{\, t < \tau \,\}} \qquad (\,\text{条件付確率 } P(A \mid B) = \tfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ より}\,) \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Pr\{\, \tau \leq t + \Delta t\} - Pr\{\, \tau \leq t \,\}}{\Delta t Pr\{\, t < \tau \,\}} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Pr\{\, \tau \leq t \,\}}{\Delta t} \times \frac{1}{Pr\{\, t < \tau \,\}} \qquad (\,\text{分子を} \Delta Pr\{\cdot\} \text{ へ修正}\,) \\
&= \underbrace{\frac{dPr\{\, \tau \leq t \,\}}{dt}}_{\tau\text{の密度関数}} \times \frac{1}{Pr\{\, t < \tau \,\}}
\end{aligned}$$

式 (10.30) より 倒産確率の密度関数はハザードレート $\lambda(t)$ と生存確率の積で表せる。

$$\underbrace{\frac{d}{dt} Pr\{\, \tau \leq t \,\}}_{\substack{\text{倒産確率の} \\ \text{密度関数}}} \;=\; \lambda(t) \times \underbrace{Pr\{\, t < \tau \,\}}_{\text{生存確率}} \tag{10.31}$$

[*13] 式 (10.12) の Q_t を $Pr\{\tau > t\}$ に書き換えることで導出する。各自確認。

一方 生存確率の密度関数は

$$\begin{aligned}
\Delta \overbrace{Pr\{\ t < \tau\ \}}^{\text{生存確率}} &= Pr\{\ t + \Delta t < \tau\ \} - Pr\{\ t < \tau\ \} \\
&= 1 - Pr\{\ t + \Delta t \geq \tau\ \} - \Big(\ 1 - Pr\{\ t \geq \tau\ \}\ \Big) \\
&= -\Big[Pr\{\ t + \Delta t \geq \tau\ \} - Pr\{\ t \geq \tau\ \}\ \Big] \\
&= -\Delta \underbrace{Pr\{\ \tau \leq t\ \}}_{\text{倒産確率}}
\end{aligned}$$

の関係を利用し、式 (10.31) から次の微分方程式を得る。

生存確率の密度関数：

$$\frac{d}{dt} Pr\{\ t < \tau\ \} = -\lambda(t) \times Pr\{\ t < \tau\ \}$$

この方程式は変数分離法により、次式が解となる。

生存確率：

$$\begin{aligned}
Pr\{\ t < \tau\ \} &= E[\mathbf{1}_{\{t<\tau\}}] = e^{-\int_0^t \lambda(u)du} &\quad (10.32)\\
&= e^{-\lambda t} &\quad (\ \lambda(t) \text{ が定数で式 10.7に同じ })
\end{aligned}$$

1 つ目の等号の $E[\mathbf{1}_{\{t<\tau\}}]$ は生存確率を指標関数 $\mathbf{1}_{\{t<\tau\}}$ の期待値で表す表記法で、次の式 (10.34), (10.35) で使用する。[*14]

ここで式 (10.32) を式 (10.31) へ代入し、倒産確率の密度関数を用意しておく。

倒産確率の密度関数：

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} Pr\{\ \tau \leq t\ \} &= \lambda(t) \times e^{-\int_0^t \lambda(u)du} &\quad (10.33)\\
&= \lambda \times e^{-\lambda t} &\quad (\ \lambda(t) \text{ が定数の場合 })
\end{aligned}$$

次に式 (10.22) のプレミアムレグと式 (10.26) のデフォルトレグを連続時間の式に修正する。更に**ディスカウントレート $r(t) = 0.0\%$** と単純化する。

プレミアムレグ： 式 (10.22)

$$\begin{aligned}
&= \underset{\text{クーポン}}{C} \times \sum_{i=1:n} \Big(\underset{(DF)}{D_i} \times \underset{\text{テナー}}{\tau_i} \times \underset{\text{生存確率}}{Q_i} \Big) \\
&\Rightarrow C \times E\Big[\int_0^T \underset{(DF=1)}{e^{-\int_0^t r(u)du}} \times \underset{(\text{生存確率})}{1_{\{t<\tau\}}} \underset{\text{テナー}}{dt} \Big], \quad (n = T) \\
&= C \int_0^T E\big[1_{\{t<\tau\}}\big] dt, \qquad (\text{フビニの定理}) \\
&= C \int_0^T P\big(t < \tau\big) dt, \qquad (\text{式 } 10.32) \\
&= C \int_0^T e^{-\lambda t} dt = \frac{-C}{\lambda}\big(e^{-\lambda T} - 1\big), \quad (\ \lambda(t) \text{ を定数}) \qquad (10.34)
\end{aligned}$$

[*14] **指標関数** $\mathbf{1}_{\{\cdots\}}$ とは $\{\cdots\}$ の条件が成立すれば 1、未成立で 0 を戻す関数。

$$
\begin{aligned}
&\text{デフォルトレグ：式 (10.26)}\\
=\quad & \underset{\text{損失率}}{(1-R)} \times \sum_{i=1}^{m} \Big(\underset{(DF)}{D_i} \times \underset{\text{各時間帯倒産確率}}{dQ_i} \Big)\\
\Rightarrow\quad & (1-R) \times E\Big[\int_0^T \underset{(DF=1)}{e^{-\int_0^t r(u)du}} \times \underset{\text{各時間帯倒産確率}}{1_{\{t<\tau\le t+dt\}}}\ dt \Big]\\
=\quad & (1-R) \int_0^T E\big[1_{\{t<\tau\le t+dt\}}\big]\ dt\\
=\quad & (1-R) \int_0^T \underbrace{P\big(t<\tau\le t+dt\big)}_{\text{倒産確率の密度関数式 (10.33)}}\ dt\\
=\quad & (1-R) \int_0^T \lambda\, e^{-\lambda t} dt\ , \qquad\qquad (\ \lambda(t)\ \text{を定数})\\
=\quad & -(1-R)\big(e^{-\lambda T}-1\big) \qquad\qquad (10.35)
\end{aligned}
$$

式 (10.34)= 式 (10.35) として ハザードレート λ について解くと、式 (10.9) を得る。

$$
\text{式 (10.9)：}\ \lambda \quad = \quad \frac{C}{1-R}
$$

この式はディスカウントレート $r(t)$ =0.0%以外では近似式であり、ハザードレートのキャリブレーションが必要となる点、注意しよう。

10.6 ISDA CDS スタンダード モデル

ISDA CDS スンダード モデルは CDS の時価計算を標準化することを目的にビッグバンプロトコル (10.3 節参照) で発表されたモデルである。このモデルは取引の売買代金を計算する為の **ISDA アップフロントモデル**と時価評価/リスク管理用の ISDA フェアバリューモデルの 2 つが用意されている。

ISDA アップフロントモデル (以下**アップフロントモデル**と参照) は前節まででで説明したようにハザードレートを一定とし、時価を計算するモデルである。ハザードレートを一定とすることは、タームストラクチャー (期間構造) を考慮せず、CDS 満期時のスプレッドのみを計算に使用することを意味する。(債券の複利利回りも債券満期まで一定の利回りで計算することに類似)

一方、ISDA フェアバリューモデルはハザードレートにタームストラクチャーを持たせ、各プレミアム支払い日までの年数に応じ、使用するハザードレートを変えて評価するモデルとなる。ただこのフェアバリューモデルは開示情報が少なく、本書では扱わない。