

テキスト 10.5.3節：式(10.9)の導出について (by chatGPT)

式(10.9) $\lambda \approx \frac{\text{クレジットスプレッド}}{1-\text{回収率}}$ というハザードレート近似は、「プレミアムレグの現在価値 = プロテクションレグの現在価値」という **パーCDS条件** を、かなり単純化した連続時間モデルで解くと、そのまま出てきます。

1. 前提とモデル設定

連続時間で、次のようにかなり単純化します。

- 無リスク金利はフラットで定数： r
- ハザードレート（デフォルト強度）もフラットで定数： λ
- 回収率は定数： R
- CDS の名目元本：1
- プレミアムは連続払い、年率スプレッド： s
(現実は四半期払い+アキュラルですが、まずは無視)
- デフォルト時の損失は $1 - R$ が即時に支払われる（プロテクションレグ）
- デフォルトは一度だけ起こる
- デフォルト時の割引ファクターとデフォルトは独立、かつ金利は一定

この仮定のもとで、満期 T の CDS を考えます。

2. 生存確率とデフォルトの密度

ハザードレートが定数 λ なら、リスク中立測度下で

- 時刻 t まで生存している確率

$$S(t) = \mathbb{Q}(\tau > t) = e^{-\lambda t}$$

- 時刻 t にデフォルトする確率密度（タイム密度）

$$f(t) = \mathbb{Q}(\tau \in [t, t + dt)) = \lambda e^{-\lambda t} dt$$

となります（ポアソン過程の待ち時間分布と同じ構造）。

3. プレミアムレグの現在価値

CDS のプレミアムレグは、

- 名目 1 に対して
- 年率 スプレッド s を
- 「生存している間だけ」支払う

ので、時刻 t に支払われる「微小なプレミアム」を

- 金額 : s, dt
- 支払われる条件 : 時刻 t まで生存 (確率 $S(t) = e^{-\lambda t}$)
- 割引ファクター : e^{-rt}

とすると、プレミアムレグの現在価値は

$$PV^{\text{premium}} = \int_0^T s \cdot e^{-rt} \cdot S(t) dt = s \int_0^T e^{-rt} e^{-\lambda t} dt = s \int_0^T e^{-(r+\lambda)t} dt.$$

4. プロテクションレグの現在価値

プロテクションレグは、

- デフォルトが起きたら損失分 $1 - R$ を支払う

です。時刻 t にデフォルトする確率密度は $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

従って、その時支払われる損失の現在価値の期待値は

- 損失額 : $1 - R$
- デフォルト時刻の密度 : $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$
- 割引ファクター : e^{-rt}

なので

$$PV^{\text{protection}} = \int_0^T (1 - R) \cdot e^{-rt} \cdot f(t) dt = \int_0^T (1 - R) e^{-rt} \lambda e^{-\lambda t} dt = (1 - R) \lambda \int_0^T e^{-(r+\lambda)t} dt.$$

5. パーCDS条件からの導出

パーCDSのスプレッド s は

$$PV^{\text{premium}} = PV^{\text{protection}}$$

を満たすように決まります。上の式を代入すると

$$s \int_0^T e^{-(r+\lambda)t} dt = (1-R)\lambda \int_0^T e^{-(r+\lambda)t} dt.$$

両辺に同じ積分

$$\int_0^T e^{-(r+\lambda)t} dt$$

が掛かっているので、これを割り算で消すと

$$s = (1-R)\lambda.$$

従って、

$$\lambda = \frac{s}{1-R}.$$

これが、よく使われる

$$\text{ハザードレート} \approx \frac{\text{クレジットスプレッド}}{1 - \text{回収率}}$$

という関係式の導出です。

6. 「近似」である理由

上の導出はかなり「きれいに」やりすぎていて、現実の CDS とは違う点が多いので、実務では **近似** として見るのが普通です。主な簡略化は：

- 金利とハザードレートがともにフラット・定数
- スプレッドも満期まで一定
- プレミアムは連続払い（実務は四半期払い）
- デフォルト時のプレミアムアキュラルを無視している
- 割引因子とハザードの独立を仮定

こうした単純化の下では上のように完全にキャンセルし、
きれいに

$$s = (1 - R)\lambda$$

が出来ます。

より現実的な設定（ターム構造がある

$$s(t), \lambda(t), r(t)$$

、離散払い、アキュラル込み）では、
同様の考え方で

- パーCDS条件：プレミアムレグ PV = プロテクションレグ PV

から、数値的に

$$\lambda(t)$$

のターム構造を解いていきますが、
短期のフラット近似で見るとやはり

$$\lambda(t) \approx \frac{s(t)}{1 - R}$$

という「クレジット・トライアングル」の形が出てきます。

もし「離散払い+アキュラルを入れた形で同じ関係がどう出てくるか」
あるいは「クレジットボンドのペースプレッドから同じ式を出す」
というバージョンも見たいようであれば、そちらも展開します。