

Q. 金利スワップの変動レグの評価法をT-forward メジャーから説明して！

A. 以下では、**金利スワップの変動レグ** (floating leg) の**現在価値**をT-forward measure (T-フォワード測度) を使って説明します。

1. セットアップ

変動レグのキャッシュフロー：

- 観測時点 : t
- クーポン期間 : $[T_{i-1}, T_i]$
- 支払い時点 : T_i
- 複利期間 : τ_i
- 浮動金利 : $L(T_{i-1}, T_i)$ (期間開始時点にFix)

変動レグの支払額は

$$\text{CF}_i = \tau_i L(T_{i-1}, T_i)$$

スワップ価値は通常はリスク中立測度 (\mathbb{Q}) で割引するが、**フォワード測度を使うとより簡単な形が得られる。**

2. T-forward measure (T-フォワード測度)

任意の未来時点 T を numeraire とし：

$$\text{numeraire } N(t) = P(t, T)$$

このときの測度を \mathbb{Q}^T (T-フォワード測度) と言う。

割引債価格との関係：(マルチングール)

$$\frac{P(t, U)}{P(t, T)} = \mathbb{E}_t^T \left[\frac{1}{P(U, T)} \right]$$

3. 浮動金利の定義 (LIBOR の定義)

LIBOR の定義より

$$1 + \tau_i L(T_{i-1}, T_i) = \frac{P(T_{i-1}, T_i)}{P(T_{i-1}, T_i)} = \frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)}.$$

よって

$$L(T_{i-1}, T_i) = \frac{1}{\tau_i} \left(\frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1 \right).$$

4. 変動レグの PV を T_k -forward measure で計算する

支払時点は T_i なので、numeraire に $P(t, T_i)$ を使うと特に簡単になる。

変動レグ 1 本の現在価値は

$$PV_i = P(t, T_i), \mathbb{E}_t^{T_i} [\tau_i L(T_{i-1}, T_i)].$$

ここで、重要なトリックは：

- $L(T_{i-1}, T_i)$ は **期間開始時点で決まる** (確定する)
- 測度を T_i -forward に変えると **フォワードレートが martingale になる**

具体的に：

$$F(t; T_{i-1}, T_i) = \mathbb{E}_t^{T_i} [L(T_{i-1}, T_i)].$$

NUMERAIRE を $P(t, T_i)$ に取ったことで **フォワードレートの期待値 = 現在のフォワードレート** になる。

つまり測度変換により

$$\mathbb{E}_t^{T_i} [L(T_{i-1}, T_i)] = F(t; T_{i-1}, T_i).$$

よって

$$PV_i = P(t, T_i), \tau_i, F(t; T_{i-1}, T_i).$$

5. フォワードレートを割引債で表す

$$F(t; T_{i-1}, T_i) = \frac{1}{\tau_i} \left(\frac{P(t, T_{i-1})}{P(t, T_i)} - 1 \right).$$

これを PV に代入すると

$$\text{PV}_i = P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i).$$

変動レグの現在価値が **割引債 2 本の差** に簡約される。

6. スワップの変動レグ全体の価値

全期間の合計は

$$\text{PV}^{\text{float}} = \sum_{i=1}^n [P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i)] = P(t, T_0) - P(t, T_n).$$

これはよく知られた結果で

- 変動レグ = **パーのボンドの価値 – 残存部分の割引債**
 - または **名目元本の割引差**
-

7. 結論 : T-forward 測度を使うと何が嬉しいか

T-forward measure を使うと

1. 数式が大幅に簡略化される (フォワードレートがその測度で martingale)
 2. 変動レグの PV が **債券 2 本の差** という極めて単純な形になる
 3. モデルに依存しない (短期金利モデルに依存しない)
-

8. 必要なら、HW や LGM モデルでの導出も可能

もし希望があれば :

- Hull–White の $P(t, T)$ を使った形

- LGM の exponent form
- OU カーネル β_t, H_t, α_t を使った measure change
- exposure (CVA/EPE) での変動レグの扱い

なども続けて説明できます。

必要あれば言ってください。