

Q1. BSモデルとブラックモデルの違いは？

A1. 結論を先に言うと、

- BSモデルは「スポット価格」を直接モデル化する
- ブラックモデル（Black 76）は「フォワード（先物）価格」をモデル化する

——これが本質的な違いです。

1. BSモデル（Black–Scholes）

何をモデル化するか

原資産のスポット価格 (S_t)

仮定（代表例）

無配当株式の場合：

$$dS_t = \mu S_t, dt + \sigma S_t, dW_t$$

リスク中立測度では：

$$dS_t = r S_t, dt + \sigma S_t, dW_t$$

価格付けの構造

- 割引：金利 (r)
- 配当：あれば (q)
- 対象：株式オプションなど

2. ブラックモデル（Black 1976, Black–76）

何をモデル化するか

フォワード価格（または先物価格）($F_t(T)$)

仮定

$$dF_t = \sigma F_t, dW_t$$

- ドリフトは **0**
- 金利は **モデルの外**（割引にのみ使用）

オプション価格（例：コール）

$$C = P(0, T), \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} \left[(F_T - K)^+ \right]$$

3. 決定的な違い（核心）

観点	BSモデル	ブラックモデル
モデル化対象	スポット (S_t)	フォワード (F_t)
測度	リスク中立測度	フォワード測度
ドリフト	(r-q)	0
金利	モデル内	モデル外（割引のみ）
主な用途	株式オプション	金利・商品・先物オプション

4. 数学的な関係（重要）

フォワード価格は

$$F_t(T) = \frac{S_t}{P(t, T)}$$

BSモデルで

$$dS_t = rS_tdt + \sigma S_t dW_t$$

とすると、**(T)-フォワード測度**では

$$dF_t(T) = \sigma F_t(T) dW_t^{(T)}$$

つまり：

ブラックモデルは BSモデルを測度変換した姿

です。

5. なぜブラックモデルが必要か？

特に金利・先物の世界では：

- 金利が確率的
- スポット概念が曖昧 or 不便
- 市場で直接観測できるのは **先物・フォワード**

そのため、

- スポットを無理に仮定する BS より
- **フォワードを直接モデル化する Black**

の方が自然です。

6. 実務での使い分け

- **株式オプション**
→ BS（または BSM）
- **金利キャップ・フロア（LMM以前）**
→ Black（Black-76）
- **商品・先物オプション**
→ Black
- **金利モデル（LGM, HW）との接続**
→ Black が自然

A1. まとめ（短く）

- **BSモデル**
→ スポット (S_t) をモデル化
- **ブラックモデル**
→ フォワード (F_t) をモデル化
- **理論的關係**
→ ブラックモデル = BSモデルをフォワード測度で見たもの

この違いを理解していれば、
なぜ金利オプションで Black を使うのか
が完全に腑に落ちるはずです。

Q2. Fisher Blackがブラックモデルを発表した1976年 当時、彼は「測度が違うこと」を理解していたの？

A2. 短く言うと、

はい。ただし「現代的な測度論（numeraire／測度変換）」としてではなく、
“結果として同じ内容を別の言葉で”理解していた、が正確です。

結論（要点）

- **Fisher Black（1976）は**
 - 「フォワード価格は期待值的にドリフト 0 で動く」
 - 「割引して期待値を取れば価格が出る」という事実を**完全に理解していた**。
- **ただし、**
 - **測度変換**
 - **フォワード測度**
 - **numeraire の変更**といった**現代的な確率論の言葉は使っていない**。

→ 概念は理解していたが、形式化は後年。

1. Black (1976) 論文で実際にやっていること

論文

「*The Pricing of Commodity Contracts*」(1976)

で Black は、明示的にこう仮定します：

- 先物（またはフォワード）価格 (F_t) は
 - 対数正規
 - ドリフト項なし

つまり

$$\frac{dF_t}{F_t} = \sigma dW_t$$

これは現代的に言えば：

「(T)-フォワード測度の下での力学」

そのものです。

2. 彼はなぜドリフトを 0 にしてよいと分かっていたのか？

Black の論理は、測度論ではなく **無裁定・複製** です。

- 先物は
 - 初期コスト 0
 - 自己金融ポジション
- よって
 - 期待的なトレンド（ドリフト）があれば裁定機会になる

→

「先物価格の期待変化率は 0 でなければならない」

これは

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}[F_T \mid \mathcal{F}_t] = F_t$$

という マルチンゲール性を

言葉ではなく経済直観で使っている、と言えます。

3. では「測度が違う」ことを理解していなかったのか？

答え：数学的には No、概念的には Yes

1976年当時：

- 「測度」という言葉は使わない
- 「リスク中立測度」という用語すら一般的ではない
- Girsanov, numeraire change は **まだ整理されていない**

しかし：

- 「何を割引して期待値を取るか」
- 「先物は自然にドリフトが消える」
- 「金利をモデルに入れなくてよい」

という **測度変更の核心部分**は完全に押さえている。

4. 現代的な整理との対応関係

Black (1976) の言葉	現代の言葉
先物価格はドリフト 0	フォワード測度下でのマルチンゲール
割引して期待値を取る	numeraire = 割引債
金利は価格式にしか出ない	金利は測度の外

→ 言語が違うだけで、やっていることは同じ。

5. 測度論としての完成はいつ？

- Harrison & Kreps (1979)
- Harrison & Pliska (1981)
- Geman–El Karoui–Rochet (1995) (numeraire change)

この流れで、

「Black-76 = フォワード測度の BS」

という整理が 後付けで数学的に明確化されました。

6. 正確な評価（重要）

よくある誤解：

「Black は測度を理解していなかった」

これは 誤りです。

正しくは：

Black は経済的直観で測度変更と同値のことを行っていたが、それを測度論として形式化する必要が当時なかった

A2. まとめ（ひと言）

- Black は
「測度が違う」という“事実”を理解していた
- ただし
それを測度論の言葉で説明する文化・道具がまだなかった
- 現代の我々が
後から「フォワード測度」と名付けた

あなたのように

HW / LGM / フォワード測度を理解している立場から見ると、

「Black-76 は、測度論が生まれる前に測度論を使っていた」

と言うのが、いちばんフェアな評価です。