13주차(1/3)

MNIST 경사하강법 2

파이썬으로배우는기계학습

한동대학교 김영섭교수

MNIST 경사하강법 2

- 학습 목표
 - 미니배치(Mini-Batch) 경하하강법을 학습한다.
 - 다양한 경사하강법들의 차이점을 학습한다.
 - 과대적합(Overfitting) 원인과 해결 방법을 학습한다.
- 학습 내용
 - 미니배치(Mini-Batch) 경사하강법
 - 경사하강법들의 장단점과 학습률
 - 과대적합(Overfitting) 원인과 해결 방법
 - 조기 종료
 - 데이터 증식
 - 드롭아웃

1. 경사하강법의 차이점: 배치 경사하강법

- 배치 경사하강법
 - 모든 샘플의 오차 총합

$$J(w) = \frac{1}{m} \sum_{i}^{m} (y^{(i)} - \hat{y}^{(i)})^{2}$$

$$w_{new} = w_{old} + \eta \frac{\partial J(w)}{\partial w_i}$$

$$= w_{old} + \eta \left(\frac{1}{m} \sum_{i}^{m} (y^{(i)} - \hat{y}^{(i)}) x_{j}^{(i)} \right)$$

1. 경사하강법의 차이점: 배치 경사하강법

- 배치 경사하강법
 - 모든 샘플의 오차 총합
 - 메모리 문제 가능함
 - 학습 속도가 느려짐
 - 안정적인 학습

$$J(w) = \frac{1}{m} \sum_{i}^{m} (y^{(i)} - \hat{y}^{(i)})^{2}$$

$$w_{new} = w_{old} + \eta \frac{\partial J(w)}{\partial w_i}$$

$$= w_{old} + \eta \left(\frac{1}{m} \sum_{i}^{m} (y^{(i)} - \hat{y}^{(i)}) x_{j}^{(i)} \right)$$

1. 경사하강법의 차이점: 확률적 경사하강법

- 배치 경사하강법
 - 모든 샘플의 오차 총합



- 확률적 경사하강법
 - 각 샘플의 오차로 가중치 조정

$$J(w) = \frac{1}{m} \sum_{i}^{m} (y^{(i)} - \hat{y}^{(i)})^{2}$$

$$w_{new} = w_{old} + \eta \frac{\partial J(w)}{\partial w_j}$$

$$= w_{old} + \eta \frac{1}{m} \sum_{i}^{m} (y^{(i)} - \hat{y}^{(i)}) x_{j}^{(i)}$$

$$w_{new} = w_{old} + \eta \left(y^{(i)} - \widehat{y}^{(i)} \right) x_j^{(i)}$$

1. 경사하강법의 차이점: 확률적 경사하강법

- 배치 경사하강법
 - 모든 샘플의 오차 총합



- 확률적 경사하강법
 - 각 샘플의 오차로 가중치 조정
 - 메모리 문제 없음
 - 수렴 속도가 빠름
 - 불안정한 수렴
 - 대규모 기계학습에 적합

$$J(w) = \frac{1}{m} \sum_{i}^{m} (y^{(i)} - \hat{y}^{(i)})^{2}$$

$$w_{new} = w_{old} + \eta \frac{\partial J(w)}{\partial w_j}$$

$$= w_{old} + \eta \frac{1}{m} \sum_{i}^{m} (y^{(i)} - \hat{y}^{(i)}) x_{j}^{(i)}$$

$$w_{new} = w_{old} + \eta \left(y^{(i)} - \widehat{y}^{(i)} \right) x_j^{(i)}$$

1. 경사하강법의 차이점: 미니 배치 경사하강법

- 배치 경사하강법
 - 모든 샘플의 오차 총합



- 확률적 경사하강법
 - ▶ 각 샘플의 오차



- 미니 배치 경사하강법
 - 일정 샘플들(미니 배치)의 오차 총합

$$J(w) = \frac{1}{m} \sum_{i}^{m} (y^{(i)} - \hat{y}^{(i)})^{2}$$

$$w_{new} = w_{old} + \eta \frac{\partial J(w)}{\partial w_j}$$

$$= w_{old} + \eta \frac{1}{m} \sum_{i}^{m} (y^{(i)} - \hat{y}^{(i)}) x_{j}^{(i)}$$

$$w_{new} = w_{old} + \eta (y^{(i)} - \hat{y}^{(i)}) x_j^{(i)}$$

$$w_{new} = w_{old} + \eta \left[\frac{1}{bs} \sum_{i}^{bs} (y^{(i)} - \hat{y}^{(i)}) x_{j}^{(i)} \right]$$

1. 경사하강법의 차이점: 미니 배치 경사하강법

- 배치 경사하강법
 - 모든 샘플의 오차 총합



- 확률적 경사하강법
 - ▶ 각 샘플의 오차



- 미니 배치 경사하강법
 - 일정 샘플들(미니 배치)의 오차 총합
 - 미니 배치 크기(bs = 8, 16, 32, 64...)
 - GPU/Numpy의 효율적 배열 처리

$$J(w) = \frac{1}{m} \sum_{i}^{m} (y^{(i)} - \hat{y}^{(i)})^{2}$$

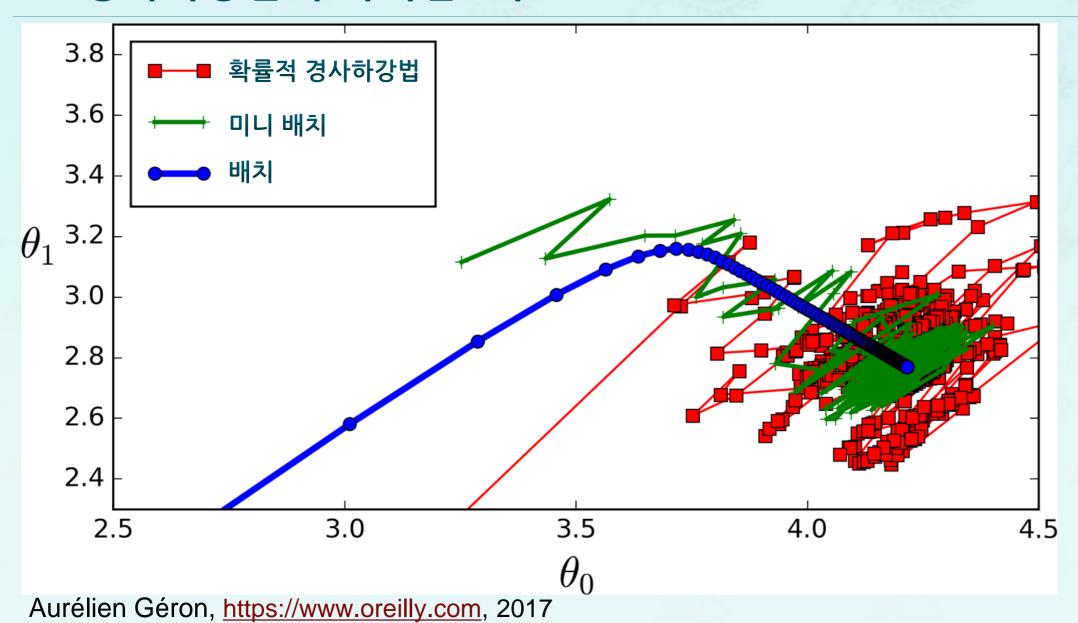
$$w_{new} = w_{old} + \eta \frac{\partial J(w)}{\partial w_j}$$

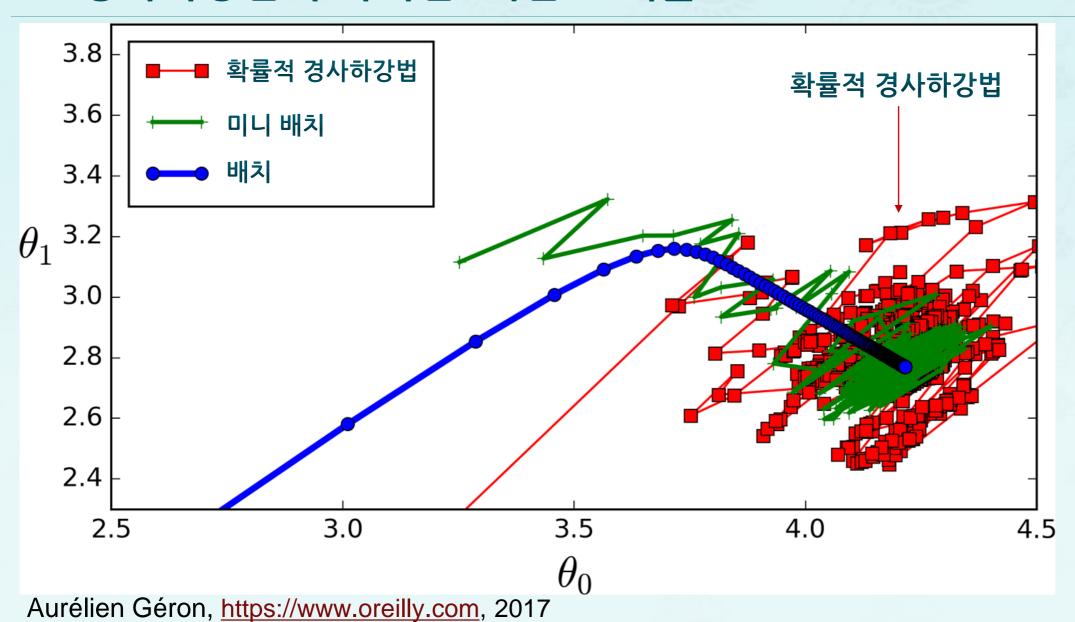
$$= w_{old} + \eta \frac{1}{m} \sum_{i}^{m} (y^{(i)} - \hat{y}^{(i)}) x_{j}^{(i)}$$

$$w_{new} = w_{old} + \eta (y^{(i)} - \hat{y}^{(i)}) x_j^{(i)}$$

$$w_{new} = w_{old} + \eta \left(\frac{1}{bs} \sum_{i}^{bs} (y^{(i)} - \hat{y}^{(i)}) x_j^{(i)} \right)$$

1. 경사하강법의 차이점: 비교





- 학습률 빠른 감소
 - 지역 최소값에서 멈춤
- 학습률 느린 감소
 - 전역 최소값에 도달하지 못함
- 학습 스케줄링 방법

- 학습률 빠른 감소
 - 지역 최소값에서 멈춤
- 학습률 느린 감소
 - 전역 최소값에 도달하지 못함
- 학습 스케줄링 방법
 - 1. 미리 정의된 고정 학습 스케줄링
 - 2. 성능 기반 학습 스케줄링

- 학습률 빠른 감소
 - 지역 최소값에서 멈춤
- 학습률 느린 감소
 - 전역 최소값에 도달하지 못함
- 학습 스케줄링 방법
 - 1. 미리 정의된 고정 학습 스케줄링
 - 2. 성능 기반 학습 스케줄링
 - 3. 지수 기반 학습 스케줄링 $\eta(t) = \eta_0 10^{-t/r}$

- 학습률 빠른 감소
 - 지역 최소값에서 멈춤
- 학습률 느린 감소
 - 전역 최소값에 도달하지 못함
- 학습 스케줄링 방법
 - 1. 미리 정의된 고정 학습 스케줄링
 - 2. 성능 기반 학습 스케줄링
 - 3. 지수 기반 학습 스케줄링 $\eta(t) = \eta_0 10^{-t/r}$
 - 4. 거듭제곱 기반 학습 스케줄링 t

$$\eta(t) = \eta_0 (1 + \frac{t}{r})^{-c}$$

```
def fit(self, X, y):
        self.cost_ = []
        m \text{ samples} = len(y)
        Y = joy.one_hot_encoding(y, self.n_y)
        eta_scheduled = np.linspace(self.eta,
 6
                                     0.0001, self.epochs)
        for epoch in range(self.epochs):
            A0 = np.array(X, ndmin=2).T
            Y0 = np.array(Y, ndmin=2).T
 9
10
11
            Z1, A1, Z2, A2 = self.forpass(A0)
            E2 = Y0 - A2
12
            E1 = np.dot(self.W2.T, E2)
13
14
15
            dZ2 = E2 * self.g prime(Z2)
            dZ1 = E1 * self.g prime(Z1)
16
17
18
            eta = eta_scheduled[epoch]
19
            self.W2 += eta * np.dot(dZ2, A1.T) / m_samples
            self.W1 += eta * np.dot(dZ1, A0.T) / m_samples
20
            self.cost .append(np.sqrt(np.sum(E2 * E2)))
21
22
        return self
```

```
def fit(self, X, y):
        self.cost = []
        m \text{ samples} = len(y)
        Y = joy.one_hot_encoding(y, self.n_y)
        for epoch in range(self.epochs):
            for i in range(0, m_samples, self.batch_size):
                A0 = X[i: i + self.batch_size]
                Y0 = Y[i: i + self.batch_size]
                A0 = np.array(X[m], ndmin=2).T
 9
                Y0 = np.array(Y[m], ndmin=2).T
10
                Z1 = np.dot(self.W1, A0)
11
12
                A1 = self.g(Z1)
13
                Z2 = np.dot(self.W2, A1)
                A2 = self.g(Z2)
14
15
16
                E2 = Y0 - A2
                E1 = np.dot(self.W2.T, E2)
17
18
                dZ2 = E2 * self.g prime(Z2)
                dZ1 = E1 * self.g_prime(Z1)
19
                dW2 = np.dot(dZ2, A1.T)
20
                dW1 = np.dot(dZ1, A0.T)
21
                self.W2 += self.eta * dW2/self.batch_size
                self.W1 += self.eta * dW1/self.batch_size
23
24
                self.cost_.append(np.sqrt(np.sum(E2 * E2))
25
                                  /self.batch size)
26
        return self
```

- 각 epoch마다
 - 각 미니 배치 크기로 나누어 연산
 - batch_size = 8, 16, 32, 64, ...

```
def fit(self, X, y):
        self.cost = []
        m \text{ samples} = len(y)
        Y = joy.one_hot_encoding(y, self.n_y)
        for epoch in range(self.epochs):
            for i in range(0, m_samples, self.batch_size):
                A0 = X[i: i + self.batch_size]
                Y0 = Y[i: i + self.batch size]
 8
                A0 = np.array(X[m], ndmin=2).T
                Y0 = np.array(Y[m], ndmin=2).T
                Z1 = np.dot(self.W1, A0)
11
12
                A1 = self.g(Z1)
13
                Z2 = np.dot(self.W2, A1)
                A2 = self.g(Z2)
14
15
16
                E2 = Y0 - A2
17
                E1 = np.dot(self.W2.T, E2)
18
                dZ2 = E2 * self.g prime(Z2)
19
                dZ1 = E1 * self.g prime(Z1)
                dW2 = np.dot(dZ2, A1.T)
20
21
                dW1 = np.dot(dZ1, A0.T)
                self.W2 += self.eta * dW2/self.batch size
                self.W1 += self.eta * dW1/self.batch_size
23
24
                self.cost .append(np.sqrt(np.sum(E2 * E2))
25
                                   /self.batch size)
26
        return self
```

- 각 epoch마다
 - 각 미니 배치 크기로 나누어 연산
 - batch_size = 8, 16, 32, 64, ...
 - 입력을 batch_size로 슬라이싱

```
def fit(self, X, y):
        self.cost = []
       m \text{ samples} = len(y)
       Y = joy.one_hot_encoding(y, self.n_y)
        for epoch in range(self.epochs):
            for i in range(0, m_samples, self.batch_size):
                A0 = X[i: i + self.batch_size]
                Y0 = Y[i: i + self.batch size]
                A0 = np.array(X[m], ndmin=2).T
                Y0 = np.array(Y[m], ndmin=2).T
10
                Z1 = np.dot(self.W1, A0)
11
12
                A1 = self.g(Z1)
13
                Z2 = np.dot(self.W2, A1)
                A2 = self.g(Z2)
14
15
16
                E2 = Y0 - A2
17
                E1 = np.dot(self.W2.T, E2)
18
                dZ2 = E2 * self.g prime(Z2)
                dZ1 = E1 * self.g prime(Z1)
19
20
                dW2 = np.dot(dZ2, A1.T)
21
                dW1 = np.dot(dZ1, A0.T)
                self.W2 += self.eta * dW2/self.batch size
                self.W1 += self.eta * dW1/self.batch_size
23
24
                self.cost .append(np.sqrt(np.sum(E2 * E2))
25
                                   /self.batch size)
26
        return self
```

- 각 epoch마다
 - 각 미니 배치 크기로 나누어 연산
 - batch_size = 8, 16, 32, 64, ...
 - 입력을 batch_size로 슬라이싱
 - 가중치를 조정함

```
def fit(self, X, y):
        self.cost = []
        m \text{ samples} = len(y)
        Y = joy.one hot encoding(y, self.n y)
        for epoch in range(self.epochs):
            for i in range(0, m_samples, self.batch_size):
                A0 = X[i: i + self.batch_size]
                Y0 = Y[i: i + self.batch size]
                A0 = np.array(X[m], ndmin=2).T
                Y0 = np.array(Y[m], ndmin=2).T
10
                Z1 = np.dot(self.W1, A0)
11
12
                A1 = self.g(Z1)
13
                Z2 = np.dot(self.W2, A1)
                A2 = self.g(Z2)
14
15
16
                E2 = Y0 - A2
17
                E1 = np.dot(self.W2.T, E2)
18
                dZ2 = E2 * self.g prime(Z2)
                dZ1 = E1 * self.g prime(Z1)
19
                dW2 = np.dot(dZ2, A1.T)
20
21
                dW1 = np.dot(dZ1, A0.T)
                self.W2 += self.eta * dW2/self.batch size
                self.W1 += self.eta * dW1/self.batch_size
23
24
                self.cost .append(np.sqrt(np.sum(E2 * E2))
25
                                   /self.batch size)
26
        return self
```

- 검증단계
 - 학습자료 1000, 테스트 자료 100

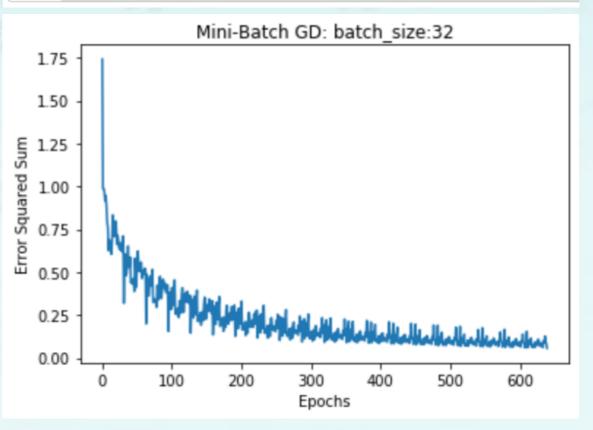
```
1 (X, y), (Xtest, ytest) = joy.load_mnist()
2 nn = MnistMiniBatch(784, 100, 10,
3 epochs = 20, batch_size = 32)
4 nn.fit(X[:1000], y[:1000])
5 accuracy = nn.evaluate(Xtest[:100], ytest[:100])
6 print('accuracy {}%'.format(accuracy))
```

```
def evaluate(self, Xtest, ytest):
    m_samples = len(ytest)
    scores = 0
A2 = self.predict(Xtest)
    yhat = np.argmax(A2, axis = 0)
    scores += np.sum(yhat == ytest)
    return scores/m_samples * 100
```

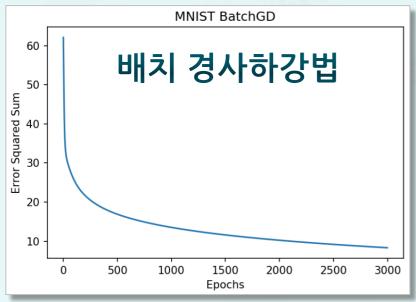
- 검증단계
 - 학습자료 1000, 테스트 자료 100
 - 정확도: 87.0 %

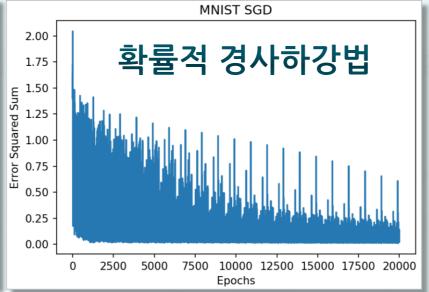
```
def evaluate(self, Xtest, ytest):
    m_samples = len(ytest)
    scores = 0
A2 = self.predict(Xtest)
    yhat = np.argmax(A2, axis = 0)
    scores += np.sum(yhat == ytest)
    return scores/m_samples * 100
```

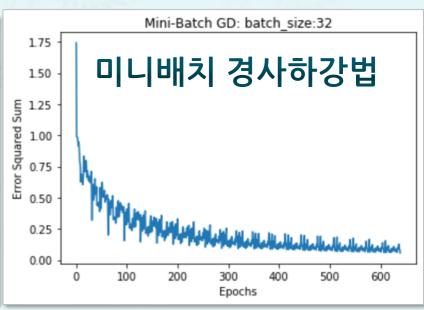
- 검증단계
 - 학습자료 1000, 테스트 자료 100
 - 정확도: 87.0 %



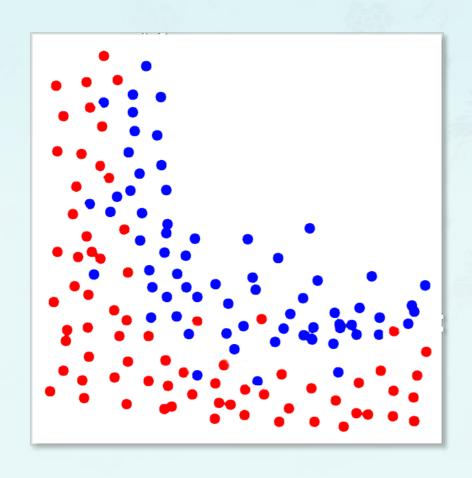
- 검증단계
 - 학습자료 1000, 테스트 자료 100
 - 정확도: 87.0 %





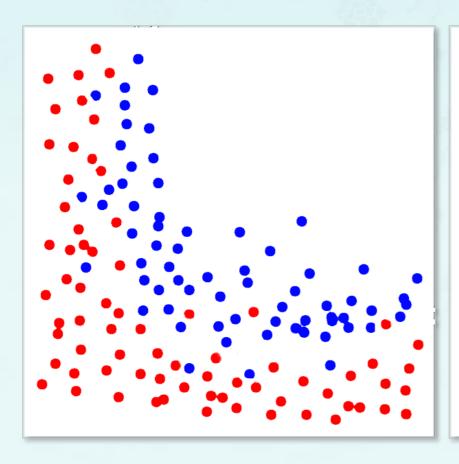


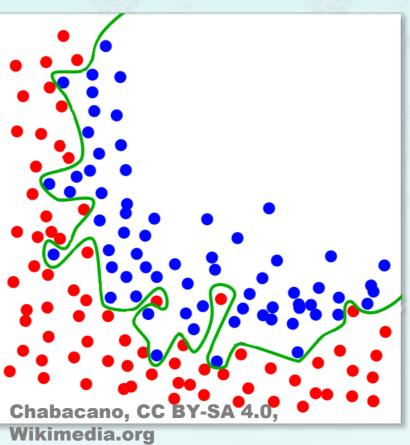
3. 과대적합: 개념 설명



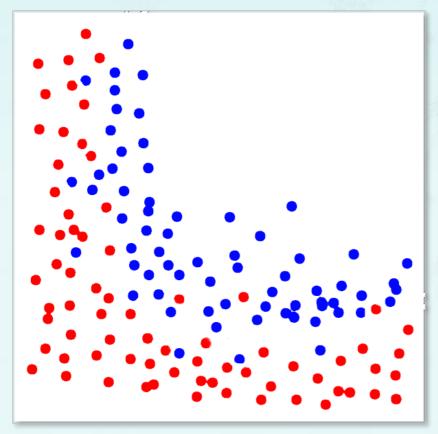
Chabacano, CC BY-SA 4.0, Wikimedia.org

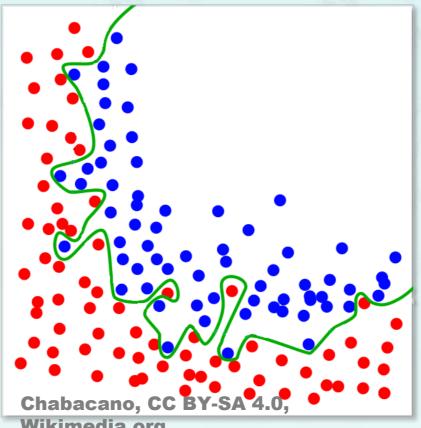
3. 과대적합: 개념 설명

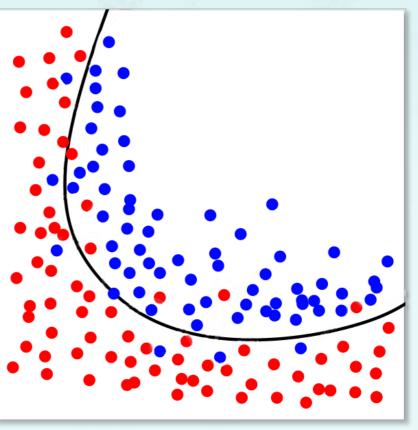




3. 과대적합: 개념 설명







Wikimedia.org

- 실험: 학습 자료 vs 테스트 자료
 - 은닉층 노드의 수: **100** 고정
 - 반복 횟수에 따른 정확도 비교

- 실험: 학습 자료 vs 테스트 자료
 - 은닉층 노드의 수: 100 고정
 - 반복 횟수에 따른 정확도 비교

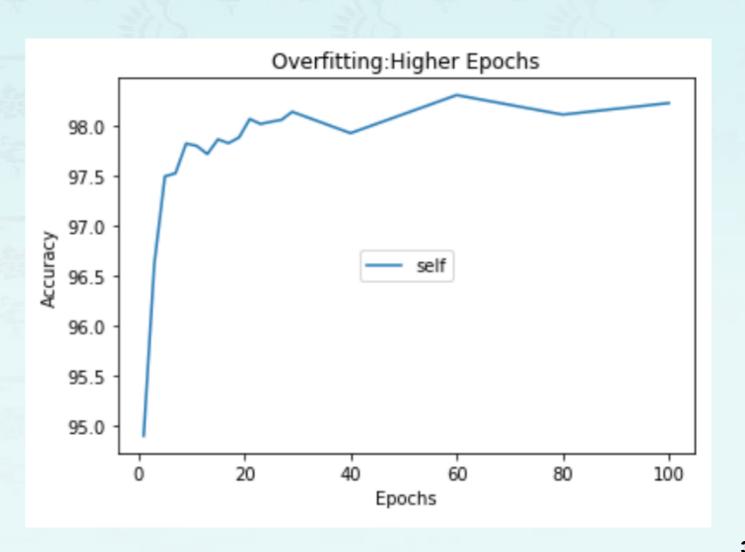
```
(X, y), (Xtest, ytest) = joy.load_mnist()
   epoch_list = [i for i in np.arange(1, 31, 2)] + \
                 [i for i in np.arange(40, 101, 20)]
4 | self_accuracy = []
   test_accuracy = []
   for i, e in enumerate(epoch_list):
       nn = MnistMiniBatch(784, 100, 10, epochs = e,
                            batch size = 32)
       nn.fit(X, y)
       self_accuracy.append(nn.evaluate(X, y))
10
       test_accuracy.append(nn.evaluate(Xtest, ytest))
11
```

- 실험: 학습 자료 vs 테스트 자료
 - 은닉층 노드의 수: 100 고정
 - 반복 횟수에 따른 정확도 비교

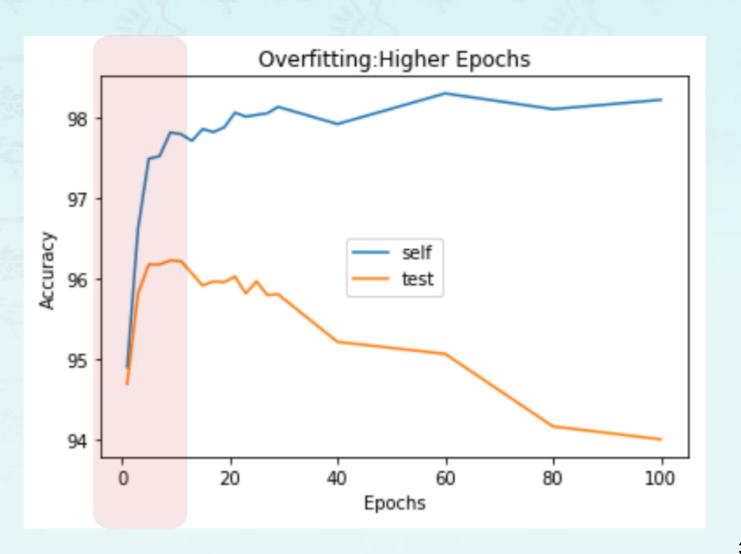
```
(X, y), (Xtest, ytest) = joy.load_mnist()
2 epoch_list = [i for i in np.arange(1, 31, 2)] + \
                 [i for i in np.arange(40, 101, 20)]
4 | self_accuracy = []
   test_accuracy = []
   for i, e in enumerate(epoch_list):
       nn = MnistMiniBatch(784, 100, 10, epochs = e,
                            batch_size = 32)
       nn.fit(X, y)
        self_accuracy.append(nn.evaluate(X, y))
10
       test_accuracy.append(nn.evaluate(Xtest, ytest))
11
```

- 실험: 학습 자료 vs 테스트 자료
 - 은닉층 노드의 수: 100 고정
 - 반복 횟수에 따른 정확도 비교
- 정확도 결과 비교 시각화 코드

- 실험: 학습 자료 vs 테스트 자료
 - 은닉층 노드의 수: 100 고정
 - 반복 횟수에 따른 정확도 비교
- 정확도 결과 비교 시각화



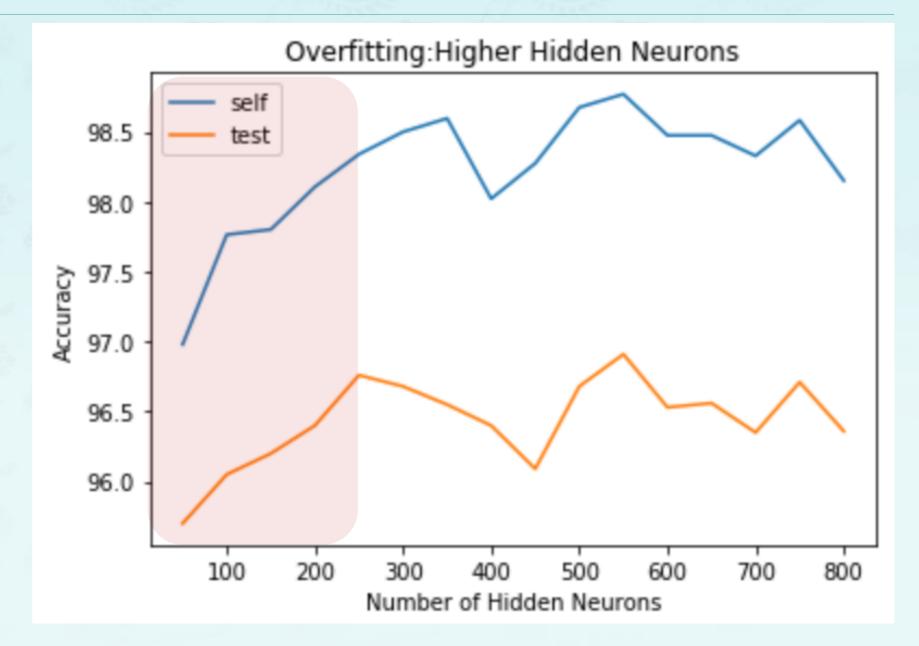
- 실험: 학습 자료 vs 테스트 자료
 - 은닉층 노드의 수: 100 고정
 - 반복 횟수에 따른 정확도 비교
- 정확도 결과 비교 시각화



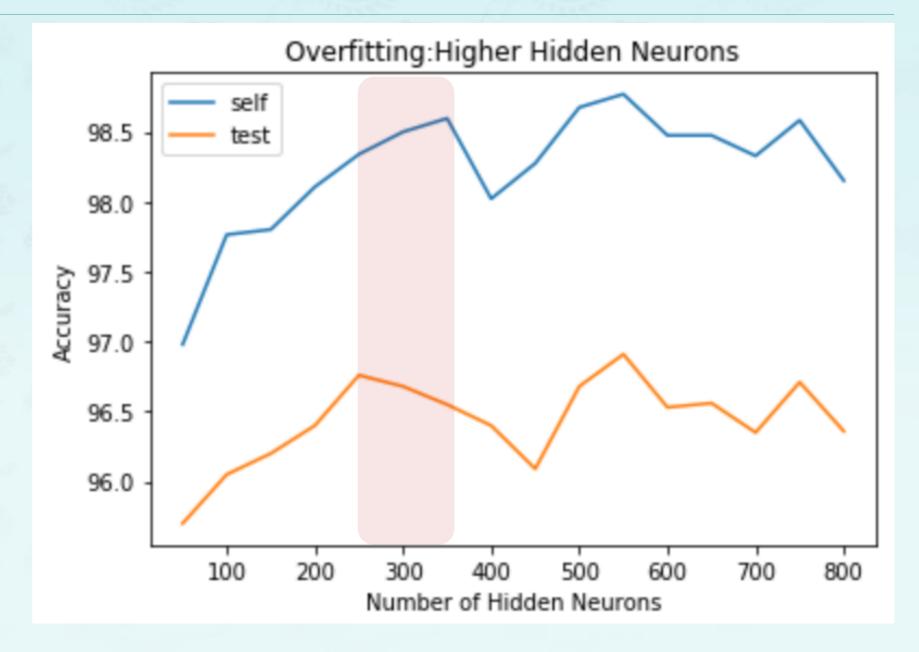
3. 과대적합: 원인 – 은닉층 노드의 수

- 실험: 학습 자료 vs 테스트 자료
 - 반복 횟수(10) 고정
 - 은닉층 노드의 수에 따른 정확도 비교

3. 과대적합: 원인 – 은닉층 노드의 수



3. 과대적합: 원인 – 은닉층 노드의 수

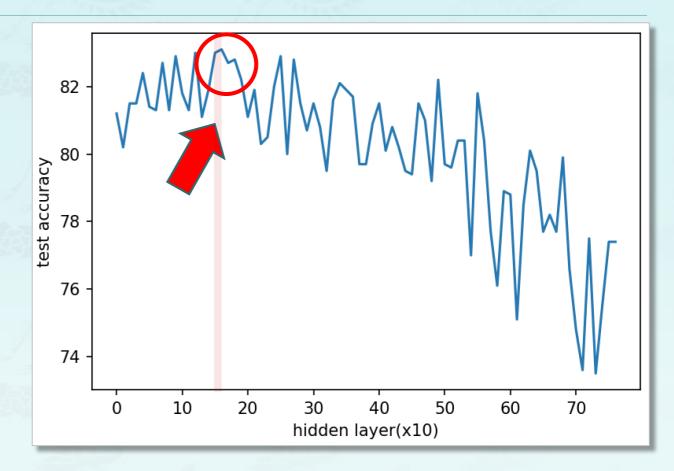


3. 과대적합: 해결 방법

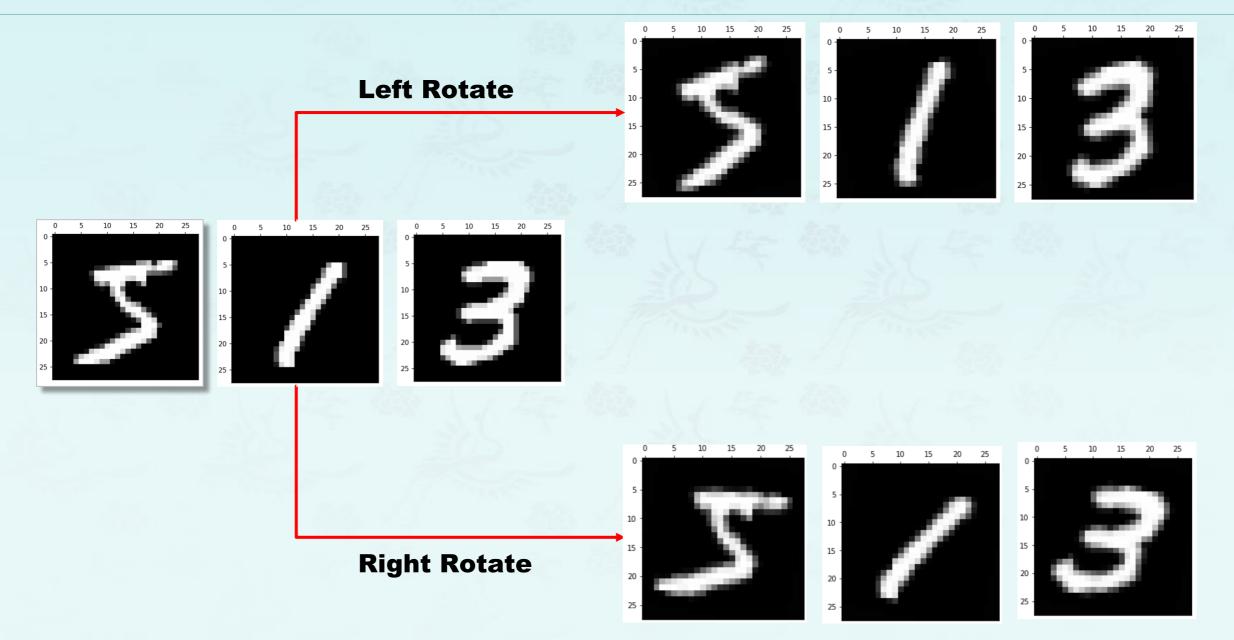
- 조기 종료
- 데이터 증식
- 드롭아웃

- 조기 종료(early stopping)
- 배치 경사하강법
 - 조기 종료점 찾기 용이
- 미니 배치, 확률적 경사하강법
 - 조기종료점 찾기 어려움
- 실험:
 - 은닉층 노드 40 → 800

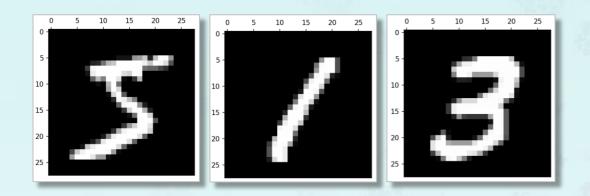
```
import joy
 2 (X, y), (Xtest, ytest) = joy.load_mnist()
 4 trainlist = []
 5 testlist = []
 6 | w1 = []
7 w2 = []
  for hl in range(40, 810, 10):
       nn = MnistMiniBatchGD([784, hl, 10], epochs = 20,
                              batch size =32)
10
11
       nn.fit(X[:1000], y[:1000])
12
       trainning = nn.evaluate(X[:1000], y[:1000])
13
       test = nn.evaluate(Xtest[:1000], ytest[:1000])
14
15
       trainlist.append(round(trainning, 2))
16
       testlist.append(round(test, 2))
17
       w1.append(nn.W1)
18
       w2.append(nn.W2)
```



3. 과대적합: 해결 방법 – 데이터 증식



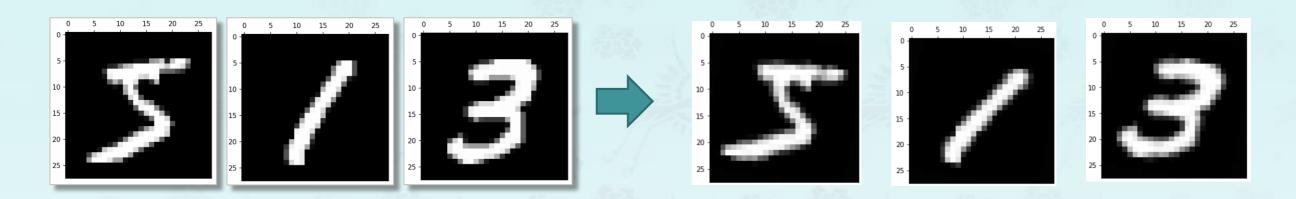
3. 과대적합: 해결 방법 – 데이터 증식



```
import joy
import scipy

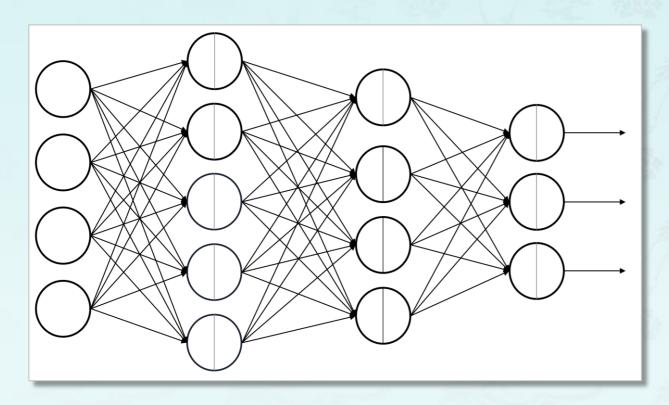
(X, y), (Xtest, ytest) = joy.load_mnist()
for idx in range(0, 3):
    Xr = X[idx].reshape(28, 28)
    joy.show_mnist(Xr, savefig='Xr_rotate')
    Xr = scipy.ndimage.rotate(Xr, 12.0, cval=0.01, order=1, reshape=False)
    joy.show_mnist(Xr, savefig='Xr_rotate_right')
```

3. 과대적합: 해결 방법 – 데이터 증식



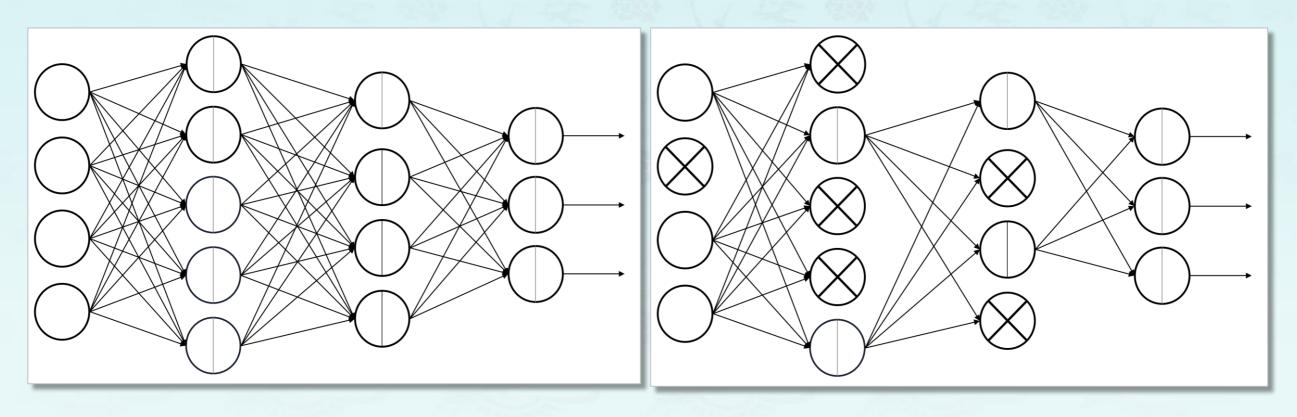
```
import joy
import scipy
(X, y), (Xtest, ytest) = joy.load_mnist()
for idx in range(0, 3):
    Xr = X[idx].reshape(28, 28)
    joy.show_mnist(Xr, savefig='Xr_rotate')
    Xr = scipy.ndimage.rotate(Xr, 12.0, cval=0.01, order=1, reshape=False)
    joy.show_mnist(Xr, savefig='Xr_rotate_right')
```

■ 기본 다층 인공신경망

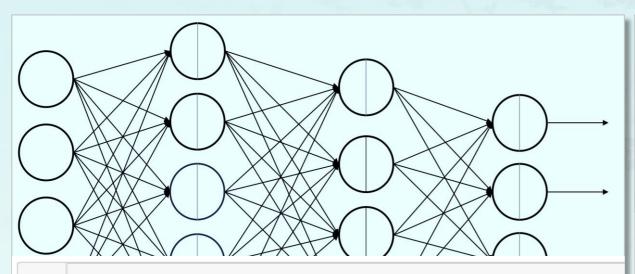


■ 기본 다층 인공신경망

■ 드롭아웃 적용한 다층 인공신경망



■ 기본 다층 인공신경망



```
import joy
(X, y), (Xtest, ytest) = joy.load_mnist()
nn = MnistMiniBatchGD(784, 600, 10, epochs = 40)
nn.fit(X[:3000], y[:3000])
self = nn.evaluate(X[:3000], y[:3000])
test = nn.evaluate(Xtest[:1000], ytest[:1000])
print('MNIST self accuracy {}%'.format(self))
print('MNIST test accuracy {}%'.format(test))
```

MNIST self accuracy 100.0% MNIST test accuracy 90.0%



■ 드롭아웃 적용한 다층 인공신경망

```
import joy
(X, y), (Xtest, ytest) = joy.load_mnist()
nn = MnistMiniBatchGD_Dropout(784, 600, 10,
            epochs = 40, dropout_ratio = 0.5)
nn.fit(X[:3000], y[:3000])
self = nn.evaluate(X[:3000], y[:3000])
test = nn.evaluate(Xtest[:1000], ytest[:1000])
print('MNIST self accuracy {}%'.format(self))
print('MNIST test accuracy {}%'.format(test))
```

MNIST self accuracy 99.73333333

MNIST test accuracy 91.7%

- 2012년 제프리 힌튼 교수 제안
- 간단한 알고리즘
- 학습과정에서 일부 뉴론들 제외
- 성능 향상: 1~2 %
- 드롭아웃 확률: 50% 로 시작함

Forpass()

```
def forpass(self, A0, train=True):
       Z1 = np.dot(self.W1, A0)
       A1 = self.g(Z1)
       # Dropout
       if train:
            self.drop_units = \
                 np.random.rand(*A1.shape) > self.dropout_ratio
            A1 = A1 * self.drop_units / self.dropout_ratio
10
       Z2 = np.dot(self.W2, A1)
11
       A2 = self.g(Z2)
12
13
        return Z1, A1, Z2, A2
```



```
def fit(self, X, y):
        self.cost = []
        m \text{ samples} = len(y)
        Y = joy.one hot encoding(y, self.n y)
        for epoch in range(self.epochs):
            for i in range(0, m_samples, self.batch_size):
                A0 = X[i: i + self.batch_size].T
                Y0 = Y[i: i + self.batch_size].T
                Z1, A1, Z2, A2 = self.forpass(A0)
10
11
                E2 = Y0 - A2
                E1 = np.dot(self.W2.T, E2)
12
13
                dZ2 = E2 * self.g prime(Z2)
                dZ1 = E1 * self.g prime(Z1)
14
15
16
                dZ1 = dZ1 * self.drop units
17
18
                self.W2 += self.eta * np.dot(dZ2, A1.T)
19
                self.W1 += self.eta * np.dot(dZ1, A0.T)
                self.cost .append(np.sqrt(np.sum(E2 * E2)
20
21
                                           /self.batch size))
22
        return self
```

predict()

```
def predict(self, X):
    A0 = np.array(X, ndmin=2).T
    Z1, A1, Z2, A2 = self.forpass(A0, train=False)
    return A2
```

MNIST 경사하강법 2

- 학습 정리
 - 미니배치(Mini-Batch) 경사하강법을 학습하기
 - 학습 스케줄링
 - 과대적합의 원인과 해결 방법
 - 조기 종료
 - 데디터 증식
 - 드롭아웃

- 차시 예고
 - 12-2 Deep Neural Net 1

13주차(1/3)

MNIST 경사하강법 2

파이썬으로배우는기계학습

한동대학교 김영섭교수

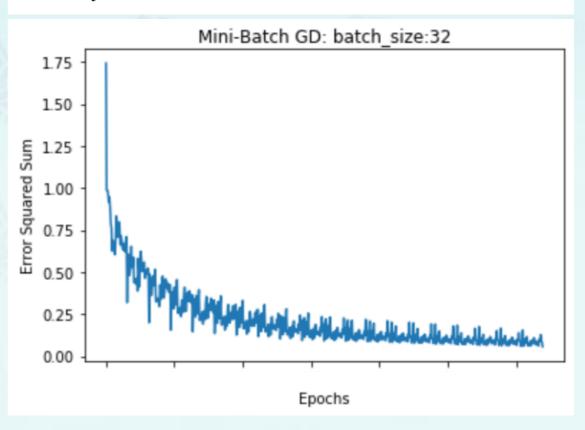
2. 미니 배치 경사하강법: 퀴즈

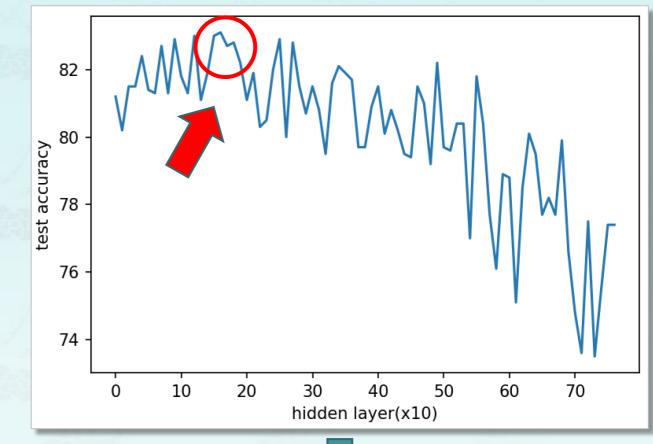
■ 미니 배치 경사하강법 코드와 실행 결과입니다. 이를 바탕으로 그래프의 x축에 나타나는 최대 epoch의 수는 얼마입니가?

$$epochs \times \frac{number\ of\ samples}{batch\ size}$$

$$=20 \times \frac{1000}{32} = 625$$

accuracy 87.0%







- 1 bestWidx = np.argmax(testlist, axis=0)
- 2 nn.W1 = w1[bestWidx]
- 3 nn.W2 = w2[bestWidx]