

# Formelsammlung Lineare Systeme und Regelung

Mario Felder  
Michi Fallegger

17. Juni 2014



# Inhaltsverzeichnis

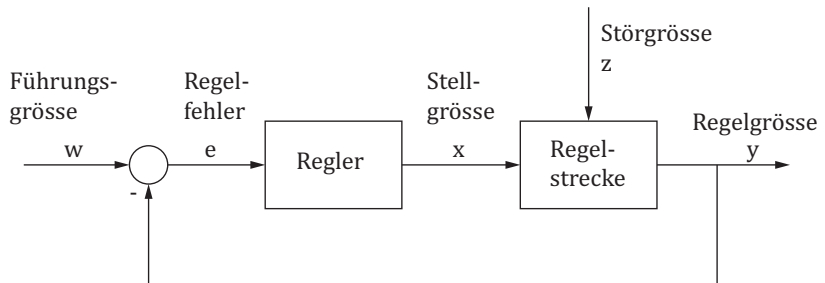
<b>1</b>	<b>Regelungstechnik</b>	<b>1</b>
1.1	Regelkreis . . . . .	1
1.2	Systeme . . . . .	2
1.3	Linearisierung . . . . .	3
1.3.1	Arbeitspunkt festlegen . . . . .	3
1.3.2	Linearisierung um Arbeitspunkt . . . . .	4
1.4	Stabilität . . . . .	4
1.4.1	Hurwitz-Kriterium . . . . .	4
1.4.2	Nyquist-Kriterium . . . . .	5
1.5	Amplituden- und Phasenreserve . . . . .	6
1.5.1	Totzeitreserve . . . . .	7
1.6	Kompositionen von Grundelementen . . . . .	8
1.7	Stationärer Fehler . . . . .	10
1.8	Reglerelemente . . . . .	11
1.8.1	Übersicht . . . . .	11
1.8.2	$P$ -Glieder . . . . .	15
1.8.3	$PT_1$ -Glieder . . . . .	15
1.8.4	$PT_2$ -Glieder . . . . .	15
1.8.5	$PT_t$ -Glieder . . . . .	15
1.8.6	$D$ -Glieder . . . . .	16
1.8.7	$DT_1$ -Glieder . . . . .	16
1.8.8	$PD$ -Glieder . . . . .	16
1.8.9	$PDT_1$ -Glieder . . . . .	16
1.8.10	$PPT_1$ -Glieder . . . . .	17
1.8.11	$I$ -Glieder . . . . .	17
1.8.12	$IT_1$ -Glieder . . . . .	17

1.8.13	<i>PI</i> -Glied . . . . .	17
1.8.14	<i>PID</i> -Glied . . . . .	18
1.8.15	<i>PIDT</i> <sub>1</sub> -Glied . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Systeme und Signale</b>	<b>19</b>
2.1	Signale . . . . .	19
2.1.1	Definition . . . . .	19
2.1.2	Einheitssprung . . . . .	19
2.1.3	Eigenschaften . . . . .	19
2.1.4	Operationen . . . . .	20
2.2	Systeme . . . . .	22
2.2.1	Eigenschaften . . . . .	22
2.3	Dirac-Delta-Funktion . . . . .	24
2.3.1	Ausblendefunktion . . . . .	24
2.3.2	Verallgemeinerte Ableitung . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Laplace Transformation</b>	<b>25</b>
3.1	Definition . . . . .	25
3.1.1	Konvergenzbereich . . . . .	25
3.2	Eigenschaften der Laplace-Transformation . . . . .	26
3.3	Partialbruchzerlegung . . . . .	27
3.3.1	Rationale Funktionen mit einfache Polen . . . . .	28
3.3.2	Rationale Funktionen mit mehrfachen Polen . . . . .	28
3.4	Lösen von Differentialgleichungen . . . . .	28
3.5	Übertragungsgleichung LZI-Systemen . . . . .	29
3.6	Faltung . . . . .	30
3.6.1	Gewichtsfunktion . . . . .	30
3.6.2	Impulsantwort . . . . .	30
3.6.3	Sprungantwort . . . . .	31
3.6.4	Anfangswertsatz . . . . .	31
3.6.5	Endwertsatz . . . . .	31
3.6.6	Stabilität . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Fourier-Transformation</b>	<b>33</b>
<b>5</b>	<b>Teilsysteme</b>	<b>35</b>
5.1	Flüblersche Regel . . . . .	36

# Kapitel 1

## Regelungstechnik

### 1.1 Regelkreis



Merkmale:

- Erfassen der Regelgrösse  $y$
- Vergleich von Führungs- und Regelgrösse
- Angleichen der Regelgrösse an die Führungsgrösse in Wirkungskreis

Führungsübertragungsverhalten:

$$G(s) = \frac{G_R \cdot G_S}{1 + G_R \cdot G_S}$$

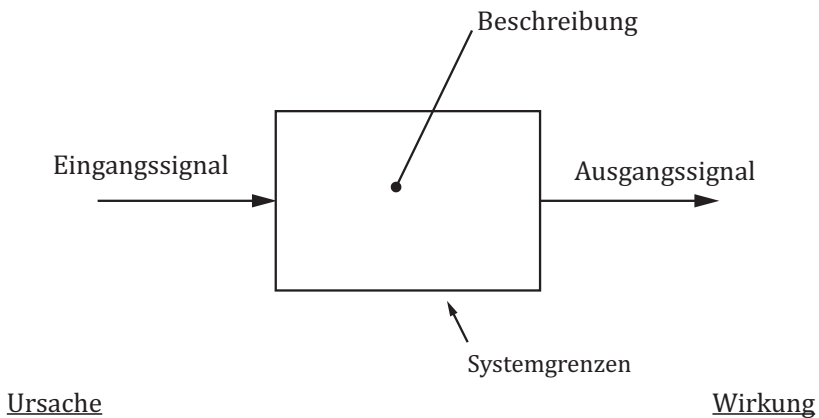
Störübertragungsverhalten (Störung zwischen Regler und Strecke):

$$G_{z1}(s) = \frac{G_S}{1 + G_R \cdot G_S}$$

Störübertragungsverhalten (Störung nach Strecke):

$$G_{z2}(s) = \frac{1}{1 + G_R \cdot G_S}$$

### 1.2 Systeme



Signale sind rückwirkungsfrei, also eingeprägte Größen.



Nr.	Bsp	Klassifikation
1	$y(t) = \cos t \cdot x(t)$	statisch
2	$\frac{dy(t)}{dt} = -\cos(y(t)) + x(t)$	<b>dynamisch</b>
3	$\frac{dy(t)}{dt} = -y(t) + x(t)$	<b>zeitkontinuierlich</b>
4	$y((k+1)\tau) = -y(k \cdot \tau) + x(k \cdot \tau)$	zeitdiskret
5	$y(t) = \cos(x(t - \tau))$	<b>kausal</b>
6	$y(t) = \cos(x(t + \tau))$	nicht kausal
7	$\frac{dy(t)}{dt} = -3y(t) + x(t)$	<b>zeitinvariant</b>
8	$\frac{dy(t)}{dt} = -\cos t \cdot y(t) + x(t)$	zeitvariant
9	$\frac{dy(t)}{dt} = -y(t) + x(t)$	<b>linear</b>
10	$\frac{dy(t)}{dt} = -y^2(t) + x(t)$	nicht linear
11	$\frac{dy(t)}{dt} = -y(t) + x(t)$	<b>endlich-dimensional</b>
12	$\frac{\partial y(t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} y(x, t) + x(t)$	unendlich-dimensional
13	$y(t) = t \cdot \cos^2 t \cdot x(t)$	<b>single input/output</b>
14	$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & \sin(t) \\ t & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$	multiple input/output

## 1.3 Linearisierung

Approximation durch Gerade:

$$f(\bar{x} + \Delta x) \approx (\bar{x}) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{\bar{x}} \cdot \Delta x$$

### 1.3.1 Arbeitspunkt festlegen

Im stationären Zustand gilt:

$$\frac{d^n}{dt^n} = 0$$

Für das Eingangssignal  $u(t)$  und das Ausgangssignal  $y(t)$ :

$$h(t) = \bar{y} + \Delta y(t) \quad , \quad u(t) = \bar{u} + \Delta u(t)$$

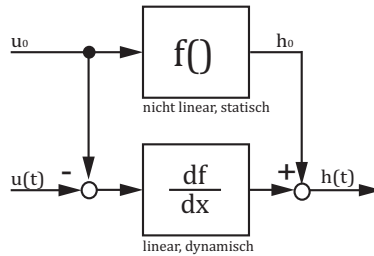
### 1.3.2 Linearisierung um Arbeitspunkt

Es gilt:

$$D(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, \dot{y}, y, u^{(m)}, u^{(m-1)}, \dots, \dot{u}, u) = 0$$

$D$  kann am Punkt  $\bar{y}, \bar{u}$  approximiert werden durch:

$$\frac{\partial D}{\partial y^{(n)}} \bigg|_{\bar{y}} \cdot \Delta y^n + \dots + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} \bigg|_{\bar{y}} \cdot \Delta \dot{y} + \frac{\partial D}{\partial y} \bigg|_{\bar{y}} \cdot \Delta y + \frac{\partial D}{\partial u^{(n)}} \bigg|_{\bar{u}} \cdot \Delta u^n + \dots + \frac{\partial D}{\partial u} \bigg|_{\bar{u}} \cdot \Delta u = 0$$



## 1.4 Stabilität

Grundlegendes Stabilitätskriterium für LZI-Glieder:

Ein LZI-Glied ist genau dann stabil, wenn die  $n$  Nullstellen des Nennerpolynoms sämtliche negative Realteile haben. In der komplexen  $s$ -Ebene müssen die Nullstellen sämtlich links von der imaginären Achse liegen.

### 1.4.1 Hurwitz-Kriterium

Das Polynom  $N(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n = 0$  ist nur dann stabil, wenn alle Koeffizienten  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  ungleich null sind und ein



positives Vorzeichen haben. Zusätzlich müssen alle  $n$  Linieardeterminanten positiv sein (mit  $n$  Zeilen und  $n$  Spalten).

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_2 & \dots \\ \dots & & & & \end{vmatrix}$$

Mit den jeweiligen Unterdeterminanten (für den fall  $n = 3$ ):

$$D_1 = |a_1| = a_1 > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 D_2 > 0$$

Die letzte Determinante erfüllt jeweils zwangsmässig die Bedingung.

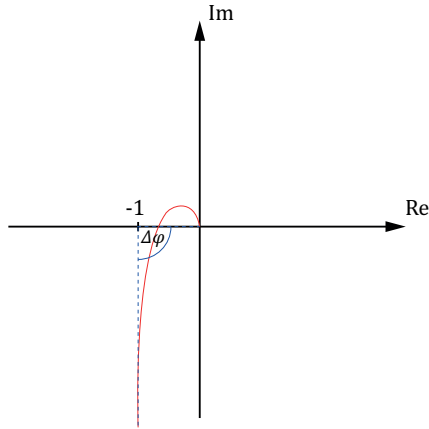
### 1.4.2 Nyquist-Kriterium

Das Stabilitätskriterium nach Nyquist beurteilt die Stabilität eines Regelkreises aus dem Verlauf des **Frequenzgangs des offenen Regelkreises**. Das Nyquist-Kriterium betrachtet die Ortskurve gegenüber dem Punkt  $-1$  auf der reellen Achse. Dabei wird die Winkeländerung von  $\omega = 0 \rightarrow \omega = \infty$  betrachtet. Dabei muss folgende Beziehung erfüllt sein, damit das Regelsystem stabil ist:

$$\Delta\varphi = i_k \cdot \frac{\pi}{2} + r_k \cdot \pi$$

$r_k$ : Anzahl Polstellen mit positivem Realteil

$i_k$ : Anzahl Polstellen auf der imaginären Achse



## 1.5 Amplituden- und Phasenreserve

Die Amplitudenreserve  $A_R$  ist ein Mass für den Abstand der Ortskurve  $G_O(j\omega)$  vom Punkt  $-1$  in Richtung der reellen Achse. Die Kreisfrequenz an der Stelle, an der  $G_O(j\omega)$  die reelle Achse schneidet, heisst Phasenschnittkreisfrequenz  $\omega_\pi$ .

Definition Amplitudenreserve:

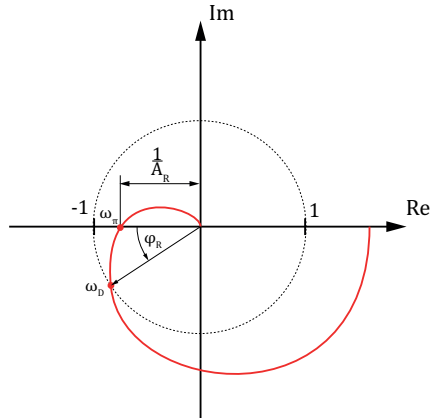
$$A_R = \frac{1}{|G_O(j\omega)|} \quad \text{Stabilitätsbedingung: } A_R > 0.$$

Die Phasenfrequenz  $\varphi_R$  ist der Winkel zwischen der negativ-reellen Achse und dem Punkt, an dem die Ortskurve  $G_O(j\omega)$  den Einheitskreis schneidet. Die Kreisfrequenz im Schnittpunkt heisst Durchtrittskreisfrequenz  $\omega_D$ .

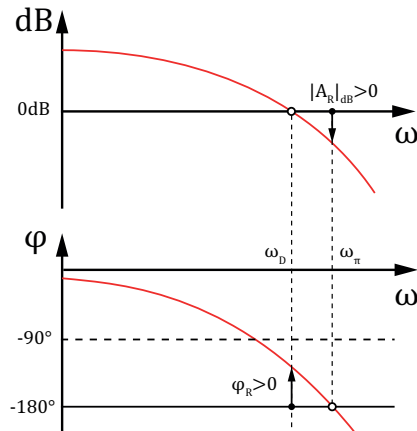
Definition Phasenreserve:

$$\varphi_R = \angle G_O(j\omega) + \pi \quad \text{Stabilitätsbedingung: } \varphi > 0.$$

Ablesen von der Ortskurve:



Ablesen vom Bodediagramm:



### 1.5.1 Totzeitreserve

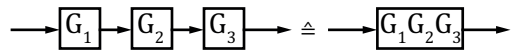
Die Totzeitreserve  $T_{tR}$  ist eine zusätzliche Totzeit, die in einem Regelkreis auftreten darf, ohne dass der Regelkreis instabil wird.

Definition Totzeitreserve:

$$T_{tR} = \frac{\varphi_R}{\omega_D}$$

## 1.6 Kompositionen von Grundelementen

Betrachten der Verkettung:



Allgemeine Übertragungsfunktion:

$$G(s) = k \frac{s^n \cdot (1 + sT_1)^n \dots}{s^m \cdot (1 + sT_2)^m (1 + 2dT_2s + s^2T_2^2) \dots} \cdot e^{-sT}$$

## 1.6. KOMPOSITIONEN VON GRUNDELEMENTEN

Anteil	Bode	Ortskurve	Sprungantwort
$k$			
$s^n$			
$\frac{1}{s^m}$			
$(1 + sT)^n$			
$\frac{1}{(1 + sT)^m}$			
$e^{-sT}$			

## 1.7 Stationärer Fehler

Der stationäre Fehler ist die Differenz zwischen Führungsgrösse  $w(t)$  und Regelgrösse  $y(t)$  zum Zeitpunkt  $t = \infty$ :


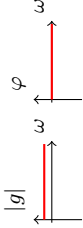
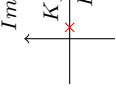


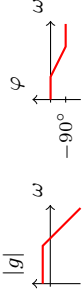
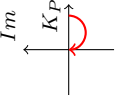
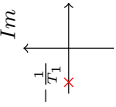

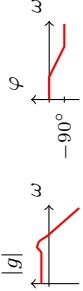
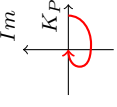
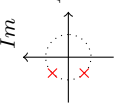
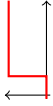
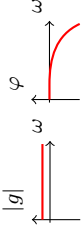
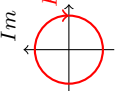

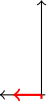
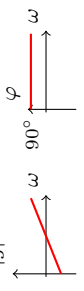
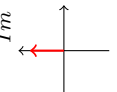

$$e(\infty) = w(\infty) - y(\infty)$$

Diese Grösse kann über den Laplace Endwertsatz berechnet werden:

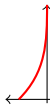
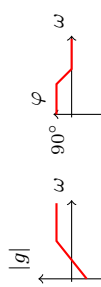

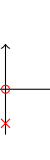

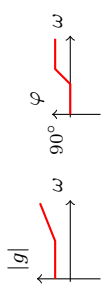



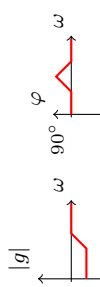
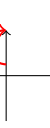
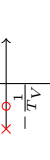

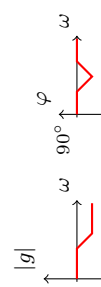



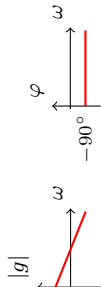


$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot (W(s) - Y(s))$$


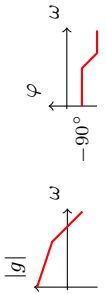
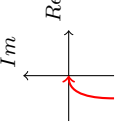
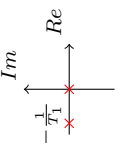

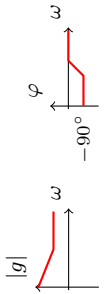
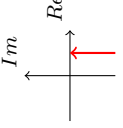
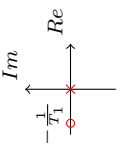

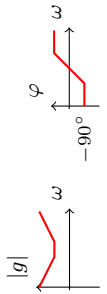
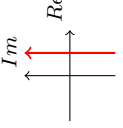
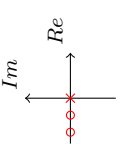

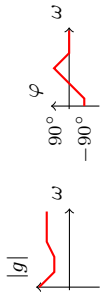
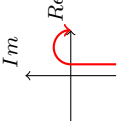
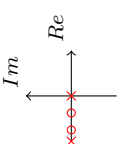
## 1.8 Reglerelemente

### 1.8.1 Übersicht

Name	$h(t)$	$G(s)$	Bode	Ortsk.	PN-Plan
$P$		$K_P$			
$P T_1$		$\frac{K_P}{1+sT_1}$			
$P T_2$		$\frac{K_P \cdot \omega^2}{\omega_0^2 + 2d\omega_0 \cdot s + s^2}$			
$P T_t$		$K_P \cdot e^{-sT_t}$			
$D$		$K_D \cdot s$			



Name	$h(t)$	$G(s)$	Bode	Ortsk.	PN-Plan
$DT_1$		$K_D \cdot s$ $1+sT_1$			
$PD$		$K_p \cdot (1 + sT_V)$			
$PDT_1$		$K_p \cdot \frac{1+sT_V}{1+sT_1}, T_V > T_1$			
$PPT_1$		$K_p \cdot \frac{1+sT_V}{1+sT_1}, T_V < T_1$			
$I$		$K_I \cdot \frac{1}{s}$			

Name	$h(t)$	$G(s)$	Bode	Ortsk.	PN-Plan
$IT_1$		$\frac{K_I}{s \cdot (1 + sT_1)}$			
$PI$		$K_P \cdot \left(1 + \frac{1}{sT_N}\right)$			
$PID$		$K_P \cdot \left(1 + \frac{1}{sT_N} + sT_V\right)$			
$PIDT_1$		$K_P \cdot \left(1 + \frac{1}{sT_N} + \frac{sT_V}{1 + sT_1}\right)$			

### 1.8.2 $P$ -Glieder

DGL:  $y(t) = K_P \cdot w(t)$

Übertragungsfunktion:  $G(s) = K_P$

Sprungantwort:  $h(t) = K_P$

### 1.8.3 $PT_1$ -Glieder

DGL:  $T_1 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K_P \cdot u(t)$

Übertragungsfunktion:  $G(s) = K_P$

Sprungantwort:  $h(t) = K_P$

### 1.8.4 $PT_2$ -Glieder

DGL:  $\ddot{y}(t) + 2d\omega \cdot \dot{y}(t) + y = K_P \cdot u(t)$

Übertragungsfunktion:  $G(s) = K_P$

Sprungantwort:  $h(t) = K_P$

### 1.8.5 $PT_t$ -Glieder

DGL:  $y(t) = K_P \cdot u(t - T_t)$

Übertragungsfunktion:  $G(s) = K_P$

Sprungantwort:  $h(t) = K_P$

### 1.8.6 $D$ -Glieder

DGL:  $y(t) = K_D \cdot \dot{u}(t)$

Übertragungsfunktion:  $G(s) = K_P$

Sprungantwort:  $h(t) = K_P$

### 1.8.7 $DT_1$ -Glieder

DGL:  $T_1 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K_D \cdot \dot{u}(t)$

Übertragungsfunktion:  $G(s) = K_P$

Sprungantwort:  $h(t) = K_P$

### 1.8.8 $PD$ -Glieder

DGL:  $y(t) = K_p \cdot (T_V \cdot \dot{u}(t) + u(t))$

Übertragungsfunktion:  $G(s) = K_P$

Sprungantwort:  $h(t) = K_P$

### 1.8.9 $PDT_1$ -Glieder

DGL:  $T_1 \dot{y}(t) + y(t) = K_p \cdot (T_V \cdot \dot{u}(t) + u(t))$  ,  $T_V > T_1$

Übertragungsfunktion:  $G(s) = K_P$

Sprungantwort:  $h(t) = K_P$

**1.8.10  $PPT_1$ -Glieder**

DGL:  $T_1 \dot{y}(t) + y(t) = K_P \cdot (T_V \cdot \dot{u}(t) + u(t))$ ,  $T_V < T_1$

Übertragungsfunktion:  $G(s) = K_P$

Sprungantwort:  $h(t) = K_P$

**1.8.11  $I$ -Glieder**

DGL:  $\dot{y} = K_I u(t)$

Übertragungsfunktion:  $G(s) = K_P$

Sprungantwort:  $h(t) = K_P$

**1.8.12  $IT_1$ -Glieder**

DGL:  $T_1 \cdot \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = K_I \cdot u(t)$

Übertragungsfunktion:  $G(s) = K_P$

Sprungantwort:  $h(t) = K_P$

**1.8.13  $PI$ -Glieder**

DGL:  $y(t) = K_P \cdot \left( u(t) + \frac{1}{T_N} \int u(t) dt \right)$

Übertragungsfunktion:  $G(s) = K_P$

Sprungantwort:  $h(t) = K_P$

### 1.8.14 *PID*-Glieder

DGL: 
$$y(t) = K_P \cdot \left( u(t) + \frac{1}{T_N} \int u(t) dt + T_V \cdot \dot{u}(t) \right)$$

Übertragungsfunktion: 
$$G(s) = K_P$$

Sprungantwort: 
$$h(t) = K_P$$

### 1.8.15 *PIDT*<sub>1</sub>-Glieder

DGL: 
$$T_1 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K_P \cdot \left( \frac{T_1 + T_N}{T_N} u(t) + \frac{1}{T_N} \int u(t) dt + (T_1 + T_V) \cdot \dot{u}(t) \right)$$

Übertragungsfunktion: 
$$G(s) = K_P$$

Sprungantwort: 
$$h(t) = K_P$$

# Kapitel 2

## Systeme und Signale

### 2.1 Signale

#### 2.1.1 Definition

Ein Signal ist eine (reelle) Funktion:

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

#### 2.1.2 Einheitssprung

Der Einheitssprung wird in der Technik oft gebraucht und ist folgendermassen definiert:

$$\sigma := \begin{cases} 1 & \text{für alle } t \geq 0 \\ 0 & \text{für alle } t < 0. \end{cases}$$

Eine weitere Bezeichnung lautet  $H(t)$ , Heaviside-Funktion.

#### 2.1.3 Eigenschaften

**Sprungstelle:** Ist eine Funktion  $u(t)$  in einem Punkt  $t_0$  definiert aber unstetig, so heisst  $t_0$  eine Sprungstelle von  $u(t)$ .

Wenn die einseitigen Grenzwerte  $\lim_{t \nearrow t_0} u(t)$  und  $\lim_{t \searrow t_0} u(t)$  existieren und endlich sind, so heisst die Sprungstelle endlich.

**Knickstelle:** Ist  $u(t)$  in  $t_0$  stetig, aber nicht differenzierbar, so wird  $t_0$  Knickstelle genannt.

**Sprungstetig:** Eine Funktion, die bis auf endliche Sprung- und Knickstellen überall differenzierbar ist, wird sprungstetig genannt.

**Gerade:** Eine Funktion  $u(t)$  ist gerade, falls ihr Graph achsensymmetrisch zur  $u$ -Achse ist:

$$u(-t) = u(t) \quad \text{für alle } t$$

**Ungerade:** Eine Funktion  $u(t)$  ist ungerade, falls ihr Graph punktsymmetrisch zum Ursprung ist:

$$u(-t) = -u(t) \quad \text{für alle } t$$

**Kausale Signale:** Dies sind Funktionen, die *vor* einem Zeitpunkt  $t_0$  Null sind. (Bsp. der Einheitssprung)

**Beschränkt:** Ein Signal  $u(t)$  heisst beschränkt, falls  $u$  dem Betrage nicht beliebig grosse Werte annimmt:

$$|u(t)| \leq M_u \quad \text{für alle } t.$$

### 2.1.4 Operationen

#### Vertärkung / Amplifizierung

Multiplikation mit einer Konstanten:

$$u(t) \rightarrow A \cdot u(t)$$

#### Überlagerung

Addition zweier Signale:

$$(u_1(t), u_2(t)) \rightarrow a_1(t) + u_2(t)$$



**Zeitliche Verschiebung**

Ein Signal wird um die Zeit  $t_0$  verzögert, indem  $t$  durch  $t - t_0$  ersetzt wird:

$$u(t) \rightarrow u(t - t_0)$$

**Zeitliche Reskalierung**

Ein Signal wird um den Faktor  $\alpha$  zeitlich reskaliert (verlangsamt, gestreckt), indem  $t$  durch  $t/\alpha$  ersetzt wird:

$$u(t) \rightarrow u\left(\frac{t}{\alpha}\right)$$

**Allgemein gilt**

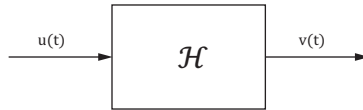
Jedes sprungstetige Signal  $u(t)$  lässt sich mit Hilfe von verschobenen Einheitssprüngen in folgender Form schreiben:

$$u(t) = u_s(t) + A_0 \cdot \sigma(t - t_0) + A_1 \cdot \sigma(t - t_1) + \dots$$

Dabei sind:

- $u_s(t)$  ein stetiges Signal (ohne Sprünge, aber evtl. Knickstellen),
- die Zeiten  $t_0, t_1, \dots$  die Sprungstellen von  $u(t)$ ,
- die Zahlen  $A_0, A_1, \dots$  die Sprunghöhen zu den Zeiten  $t_0, t_1, \dots$

## 2.2 Systeme



Ein System ist eine Zuordnungsvorschrift, die eine Funktion  $u(t)$  (Eingangssignal) in eine andere Funktion  $v(t)$  (Ausgangssignal) überführt.

$$\mathcal{H}\{u(t)\} = v(t)$$

### 2.2.1 Eigenschaften

#### Linear

Ein System ist linear, wenn die folgenden beiden Eigenschaften gelten:

- Das System antwortet auf ein amplifiziertes Eingangssignal mit der Verstärkung des Ausgangssignals um den gleichen Faktor:

$$\mathcal{H}\{A \cdot u(t)\} = A \cdot \mathcal{H}\{u(t)\} = A \cdot v(t)$$

für jedes Eingangssignal  $u(t)$  und jede Konstante  $A \in \mathbb{R}$

- Das System antwortet auf eine Überlagerung zweier Signale mit der Überlagerung der beiden Ausgangssignale

$$\mathcal{H}\{u_1(t) + u_2(t)\} = \mathcal{H}\{u_1(t)\} + \mathcal{H}\{u_2(t)\} = v_1(t) + v_2(t)$$

für zwei beliebige Eingangssignale  $u_1(t), u_2(t)$ .

Zusammengefasst:

$$\mathcal{H}\{A_1 \cdot u_1(t) + A_2 \cdot u_2(t)\} = A_1 \cdot v_1(t) + A_2 \cdot v_2(t)$$

**Zeitinvariant**

Ein System ist zeitinvariant, wenn es auf ein Signal immer gleich reagiert, egal zu welcher Zeit man das System mit einem Signal stimuliert:

$$\mathcal{H}\{u(t - t_0)\} = v(t - t_0)$$

## 2.3 Dirac-Delta-Funktion

Die Dirac-Delta-Funktion ist definiert als Ableitung des Einheitssprungs:

$$\delta(t) = \frac{d\sigma}{dt}$$

Sie hat Punktweise folgende Werte:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq 0 \\ \infty & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

Es sollte jedoch nur unter dem Integral gerechnet werden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

### 2.3.1 Ausblendefunktion

Ist die Funktion  $u(t)$  an der Stelle  $t_0$  stetig, so gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = u(t_0)$$

oder:

$$u(t) \cdot \delta(t - t_0) = u(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$$

### 2.3.2 Verallgemeinerte Ableitung

Es ist definiert:

$$\frac{d}{dt}(A \cdot \sigma(t - t_0)) := A \cdot \delta(t - t_0)$$

# Kapitel 3

## Laplace Transformation

### 3.1 Definition

Definition der Laplace-Transformierten  $U(s)$  eines Signals  $u(t)$ :

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} u(t) \cdot e^{-st} dt = \lim_{a \nearrow 0} \int_a^{\infty} u(t) \cdot e^{-st} dt$$

Notation:

$$u(t) \circ \longrightarrow U(s) \quad , s \in \mathbb{C}$$

#### 3.1.1 Konvergenzbereich

Die Laplace-Transformierte eines Signals existiert nicht für jedes  $s$ . Falls das Integral

$$U(s) = \int_0^{\infty} u(t) \cdot e^{-st} dt$$

konvergiert, so existiert die Laplace-Transformierte von  $u(t)$ .

Der Bereich aller Zahlen  $s$ , für welche die Laplace-Transformierte eines Signals konvergiert, den Konvergenzbereich (KB).

$$s = \sigma + \omega \cdot j \quad , \sigma = \operatorname{Re}(s) \text{ und } \omega = \operatorname{Im}(s)$$

Somit ist der Konvergenzbereich:

$$KB = \{s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(s) > \sigma_0\}$$

## 3.2 Eigenschaften der Laplace-Transformation

### Linearitätssatz

$$A \cdot u(t) + B \cdot v(t) \circ \bullet A \cdot U(s) + B \cdot V(s)$$

### Ähnlichkeitssatz

$$u(a \cdot t) \circ \bullet \frac{1}{a} \cdot U\left(\frac{s}{a}\right) \quad , a > 0$$

### Dämpfungssatz

$$e^{-a \cdot t} u(t) \circ \bullet U(s + a) \quad , a > 0$$

### Zeitverschiebungssatz

$$t(t - t_0) \cdot \sigma(t - t_0) \circ \bullet e^{-t_0 \cdot s} \cdot U(s) \quad , t_0 \geq 0$$

### Faltungssatz

$$u(t) * v(t) \circ \bullet U(s) \cdot V(s)$$

### Differentiationssatz

$$\dot{u}(t) \circ \bullet s \cdot U(s) - u(0^-)$$

$$\ddot{u}(t) \circ \bullet s^3 \cdot U(s) - s^2 \cdot u(0^-) - s \cdot \dot{u}(0^-) - \ddot{u}(0^-)$$

Mit Anfangsbedingung  $0^- = 0$ :

$$\frac{d^n}{dt^n} u(t) \circ \bullet s^n \cdot U(s)$$

### Integrationssatz

$$\int_{0^-}^t dt \circ \bullet \frac{1}{s} \cdot U(s)$$

### Inverse Laplace-Transformation

$$\mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = u(t)$$

$$U(s) \bullet \circ u(t)$$

Eindeutigkeitssatz:

$$U(s) = V(s) \bullet \circ u(t) = v(t) \quad , \text{ für } t > 0$$

## 3.3 Partialbruchzerlegung

Rationale Funktion:

$$R(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

Wobei  $Z(s)$ , und  $N(s)$  Polynome in  $s$  sind.

$Z(s) > N(s)$  unecht gebrochen,  $Z(s) < N(s)$  gebrochen

In Linearfaktoren zerlegen:

$$R(s) = \frac{Z(s)}{(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_m)}$$

Wobei  $s_1, \dots, s_m$  komplexe Polstellen von  $R(s)$  sind.

### 3.3.1 Rationale Funktionen mit einfache Polen

$$R(s) = \frac{Z(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_m)} \quad , s_1, \dots, s_m \text{ paarweise verschieden}$$

Es gibt komplexe Zahlen  $a_1, \dots, a_m$ , so dass

$$R(s) = \frac{a_1}{s-s_1} + \frac{a_2}{s-s_2} + \dots + \frac{a_m}{s-s_m}$$

Bestimmung der komplexen Zahlen  $a_i$ :

$$a_i = R(s) \cdot (s-s_1)|_{s=s_i}$$

### 3.3.2 Rationale Funktionen mit mehrfachen Polen

$$R(s) = \frac{Z(s)}{(s-a)^m} \quad a \in \mathbb{C}$$

Es gibt komplexe Zahlen  $a_1, \dots, a_m$ , so dass

$$R(s) = \frac{a_1}{s-a} + \frac{a_2}{(s-a)^2} + \dots + \frac{a_m}{(s-a)^m}$$

Bestimmung der komplexen Zahlen  $a_i$ :

$$a_{m-i} = \frac{1}{i!} \left[ \frac{d^i}{ds^i} R(s)(s-a)^a \right]_{s=a} \quad i = 0, \dots, m-1$$

## 3.4 Lösen von Differentialgleichungen

1. Differentialgleichung in Bildbereich überführen  $\rightarrow$  algebraische Gleichung



2. algebraische Gleichung im Bildraum nach der unbekannten Funktion auflösen
3. Bildfunktion des Eingangssignals bestimmen und in die algebraische Gleichung einsetzen
4. Lösung aus dem Bildraum in den Zeitraum zurück transformieren

## 3.5 Übertragungsgleichung LZI-Systemen

Der Zusammenhang zwischen Eingangssignal  $u(t)$  und Ausgangssignal  $v(t)$  ist durch eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten beschrieben

$$a_n \cdot v^{(n)} + a_{n-1} \cdot v^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot \dot{v} + a_0 \cdot v = b_m \cdot u^{(m)} + b_{m-1} \cdot u^{(m-1)} + \dots + b_0 \cdot u$$

Da nur kausale Signale betrachtet werden, entfallen die Anfangsbedingungen:

$$a_n s^n V + a_{n-1} s^{n-1} V + \dots + a_1 s V + a_0 V = b_m s^m U + b_{m-1} s^{m-1} U + \dots + b_0 U$$

Nach  $V(s)$  aufgelöst ergibt dies:

$$V(s) = \underbrace{\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}}_{G(s)} \cdot U(s)$$

Die rationale Funktion  $G(s)$  wird Übertragungsfunktion des Systems genannt. Daraus ergibt sich die Übertragungsgleichung:

$$V(s) = G(s) \cdot U(s)$$

## 3.6 Faltung

Die Faltung ist definiert durch:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

Die Faltung in den Bildbereich transformiert:

$$(f * g)(t) \circ \longrightarrow F(s) \cdot G(s)$$

### Rechenregeln

1. Dirac-Delta ist das neutrale Element bzgl. der Faltung:  $\delta(t - t_0) * g(t) = g(t - t_0)$
2. Kommutativität:  $f * g = g * f$
3. Assoziativität:  $f * (g * h) = (f * g) * h$
4. Distributivität:  $f * (g + h) = f * g + f * h$

### 3.6.1 Gewichtsfunktion

Aus dem Faltungssatz ergibt sich:

$$v(t) = g(t) * u(t) \quad , g(t) \circ \longrightarrow G(s)$$

$g(t)$  wird Gewichtsfunktion genannt.

### 3.6.2 Impulsantwort

Die Impulsantwort ist definiert als die Antwort auf einen Einheitsimpuls  $u(t) = \delta(t)$  zur Zeit  $t = 0$ .

$$v(t) = g(t) * u(t) = g(t) * \delta(t) = g(t)$$

Die Impulsantwort ist die Gewichtsfunktion.

### 3.6.3 Sprungantwort

Als Sprungantwort  $h(t)$  bezeichnet man die Antwort des Systems auf einen Einheitssprung  $\sigma(t)$ :

$$h(t) = g(t) * \sigma(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ G(s) \cdot \frac{1}{s} \right\} = \int_{0-}^t g(\tau) d\tau$$

### 3.6.4 Anfangswertsatz

In gewissen Situationen ist das Verhalten des Systems kurz nach dem Einschalten interessant:

$$v(0^+) = \lim_{t \searrow 0} v(t)$$

Dies kann direkt im Bildraum berechnet werden. Ist  $v(t)$  ein in  $t = 0$  sprungstetiges Signal, so existiert der Anfangswert und es gilt:

$$v(0^+) = \lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow +\infty} s \cdot V(s)$$

### 3.6.5 Endwertsatz

Ist der Endwert  $v(\infty)$  eines Signals  $v(t)$  gefragt:

$$v(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$$

, gilt der folgende Satz:

Ist  $v(t)$  ein Signal, für welches der Endwert  $v(\infty)$  existiert, so gilt:

$$v(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot V(s)$$

Der Endwert existiert, wenn alle Pole der Bildfunktion  $V(s)$  links der imaginären Achse ( $\operatorname{Re}(s) < 0$ ) sind. Ausnahme ist eine einfache Polstelle bei  $s = 0$ .

### 3.6.6 Stabilität

Ein System ist symtptotisch stabil, falls seine Impulsantwort  $g(t)$  mit  $t \rightarrow \infty$  gegen Null abklingt:

$$g(\infty) = 0$$

Diese Eigenschaft ist äquivalent dazu, dass alle Polstellen der Übertragungsfunktion  $G(s)$  links der imaginären Achse liegen.

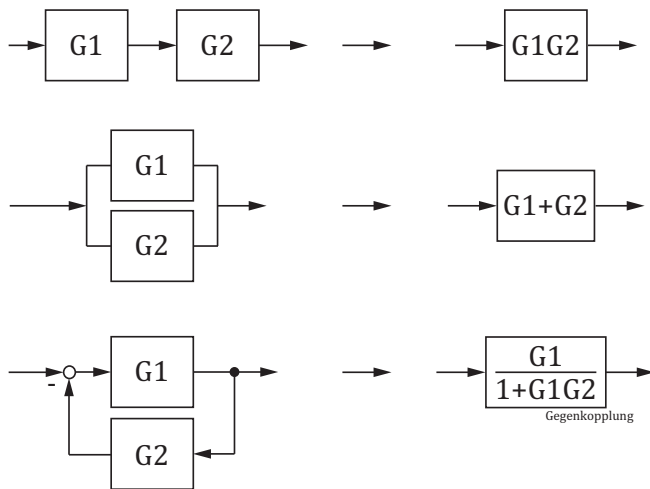
## Kapitel 4

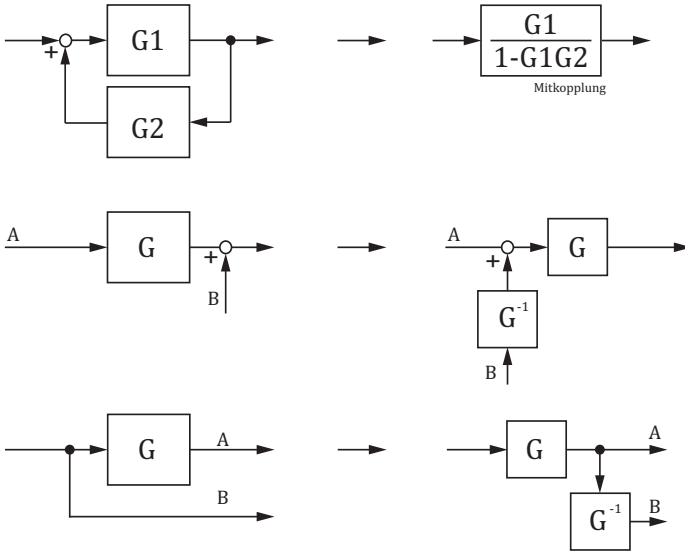
# Fourier-Transformation



# Kapitel 5

## Teilsysteme





## 5.1 Flühlersche Regel

Minuszeichen bei Summenpunkten können verschoben werden. Dadurch werden die Vorzeichen von nachfolgenden Summenpunkten invertiert. Berechnungsprinzip:

$$G(s) = \frac{P_{V1} + P_{V2} + \dots}{1 + P_{R1} + P_{R2} \dots}$$

$P_V$ : Vorwärts laufende Pfade

$P_R$ : Rückwärts laufende Pfade