Formelsammlung Lineare Systeme und Regelung

Mario Felder, Michi Fallegger

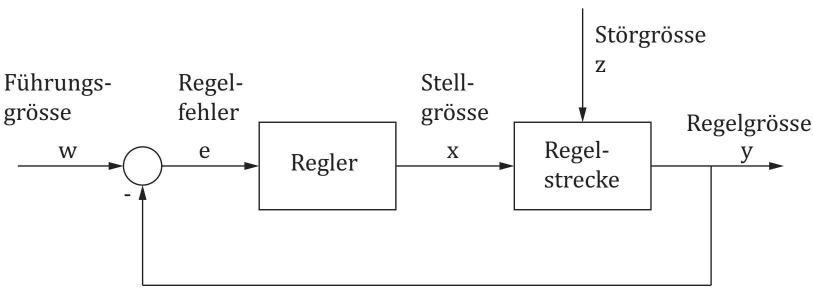
19. Februar 2014

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

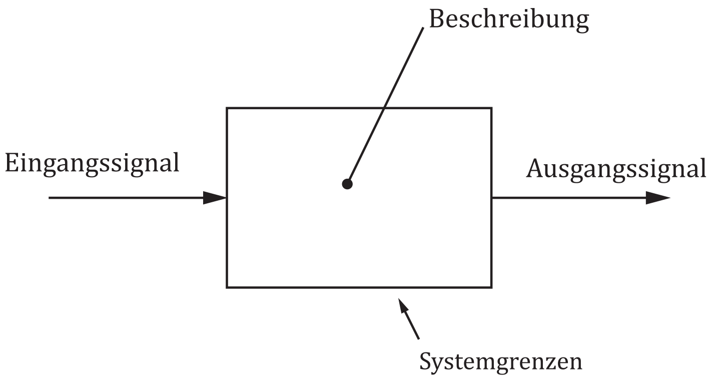
1.1 Regelkreis



Merkmale:

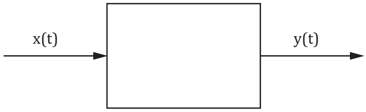
- Erfassen der Regelgrösse y
- Vergleich von Führungs- und Regelgrösse
- Angleichen der Regelgrösse an die Führungsgrösse in Wirkungskreis

1.2 Systeme



Ursache Wirkung

Signale sind rückwirkungsfrei, also eingeprägte Grössen.



Nr.	Bsp	Klassifikation
1	$y(t) = \cos t \cdot x(t)$	statisch
2	$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = -\cos(y(t)) + x(t)$	**dynamisch**
3	$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = -y(t) + x(t)$	**zeitkontinierlich**
4	$y((k+1)\tau) = -y(k \cdot \tau) + x(k \cdot \tau)$	zeitdiskret
5	$y(t) = \cos(x(t-\tau))$	**kausal**
6	$y(t) = \cos(x(t+\tau))$	nicht kausal
7	$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = -3y(t) + x(t)$	**zeitinvariant**
8	$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = -\cos t \cdot y(t) + x(t)$	zeitvariant
9	$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = -y(t) + x(t)$	**linear**
10	$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = -y^2(t) + x(t)$	nicht linear
11	$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = -y(t) + x(t)$	**endlich-dimensional**
12	$\frac{\partial y(t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} y(x,t) + x(t)$	unendlich-dimensional
13	$y(t) = t \cdot \cos^2 t \cdot x(t)$	**single input / single output**
14	$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & \sin(t) \\ t & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$	multiple input / multiple output

Kapitel 2

Systeme und Signale

2.1 Signale

2.1.1 Definition

Ein Signal ist eine (reelle) Funktion:

$$u: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

2.1.2 Einheitssprung

Der Einheitssprung wird in der Technik oft gebraucht und ist folgendermassen definiert:

$$\sigma := \begin{cases} 1 & \text{für alle } t \geq 0 \\ 0 & \text{für alle } t < 0. \end{cases}$$

Eine weitere Bezeichnung lautet $H(t)$, Heaviside-Funktion.

2.1.3 Eigenschaften

Sprungstelle: Ist eine Funktion $u(t)$ in einem Punkt t_0 definiert aber unstetig, so heisst t_0 eine Sprungstelle von $u(t)$.
Wenn die einseitigen Grenzwerte $\lim\limits_{t \nearrow t_0} u(t)$ und $\lim\limits_{t \searrow t_0} u(t)$ existieren und endlich sind, so heisst die Sprungstelle endlich.

Knickstelle: Ist $u(t)$ in t_0 stetig, aber nicht differenzierbar, so wird t_0 Knickstelle genannt.

sprungstetig: Eine Funktion, die bis auf endliche Sprung- und Knickstellen überall differenzierbar ist, wird sprungstetig genannt.

gerade: Eine Funktion $u(t)$ ist gerade, falls ihr Graph achsensymmetrisch zur u-Achse ist:

$$u(-t) = u(t) \qquad \text{für alle } t$$

ungerade: Eine Funktion $u(t)$ ist ungerade, falls ihr Graph punktxymmetrisch zum Ursprung ist:

$$u(-t) = -u(t) \qquad \text{für alle } t$$

kausale Signale: Dies sind Funktionen, die *vor* einem Zeitpunkt t_0 Null sind. (Bsp. der Einheitssprung)

beschränkt: Ein Signal $u(t)$ heisst beschränkt, falls u dem Betrage nicht beliebig grosse Werte annimmt:

$$|u(t)| \leq M_u \qquad \text{für alle } t.$$

2.1.4 Operationen

Vertärkung / Amplifizierung

Multiplikation mit einer Konstanten:

$$u(t) \to A \cdot u(t)$$

Überlagerung

Addition zweier Signale:

$$(u_1(t), u_2(t)) \to a_1(t) + u_2(t)$$

Zeitliche Verschiebung

Ein Signal wird um die Zeit t_0 verzögert, indem t durch $t - t_0$ ersetzt wird:

$$u(t) \rightarrow u(t - t_0)$$

Zeitliche Reskalierung

Ein Signal wird um den Faktor α zeitlich reskaliert (verlangsamt, gestreckt), indem t durch t/α ersetzt wird:

$$u(t) \rightarrow u\left(\frac{t}{\alpha}\right)$$

Allgemein gilt

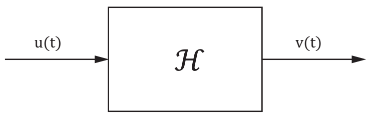
Jedes sprungstetige Signal $u(t)$ lässt sich mit Hilfe von verschobenen Einheitssprüngen in folgender Form schreiben:

$$u(t) = u_s(t) + A_0 \cdot \sigma(t - t_0) + A_1 \cdot \sigma(t - t_1) + ...$$

Dabei sind:

- $u_s(t)$ ein stetiges Signal (ohne Sprünge, aber evtl. Knickstellen),
- die Zeiten $t_0, t_1, ...$ die Sprungstellen von $u(t)$,
- die Zahlen $A_0, A_1, ...$ die Sprunghöhen zu den Zeiten $t_0, t_1, ...$

2.2 Systeme



Ein System ist eine Zuordnungsvorschrift, die eine Funktion $u(t)$ (Eingangssignal) in eine andere Funktion $v(t)$ (Ausganssignal) überführt.

$$\mathcal{H}\left\{u(t)\right\} = v(t)$$

2.2.1 Eigenschaften

Linear

Ein System ist linear, wenn die folgenden beiden Eigenschaften gelten:

- Das System antwortet auf ein amplifiziertes Eingangssignal mit der Verstärkung des Ausgangssignals um den gleichen Faktor:

  $$\mathcal{H}\left\{A \cdot u(t)\right\} = A \cdot \mathcal{H}\left\{u(t)\right\} = A \cdot v(t)$$

  für jedes Eingangssignal $u(t)$ und jede Konstante $A \in \mathbb{R}$

- Das Syastem antwortet auf eine Überlagerung zweier Signale mit der Überlagerung der beiden Ausgangssignale

  $$\mathcal{H}\left\{u_1(t) + u_2(t)\right\} = \mathcal{H}\left\{u_1(t)\right\} + \mathcal{H}\left\{u_2(t)\right\} = v_1(t) + v_2(t)$$

  für zwei beliebige Eingangssignale $u_1(t), u_2(t)$.

Zusammengefasst:

$$\mathcal{H}\left\{A_1 \cdot u_1(t) + A_2 \cdot u_2(t)\right\} = A_1 \cdot v_1(t) + A_2 \cdot v_2(t)$$

Zeitinvariant

Ein System ist zeitinvariant, wenn es auf ein Signal immer gleich regiert, egal zu welcher Zeit man das System mit einem Signal stimuliert:

$$\mathcal{H}\left\{u(t - t_0)\right\} = v(t - t_0)$$

2.3 Dirac-Delta-Funktion

Die Dirca-Delta-Funktion ist definiert als Ableitung des Einheitssprungs:

$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}$$

Sie hat Punktweise folgende Werte:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq 0 \\ \infty & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

Es sollte jedoch nur unter dem Integral gerechnet werden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$$

2.3.1 Ausblendefunktion

Ist die Funktion $u(t)$ an der Stelle t_0 stetig, so gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot \delta(t - t_0)\mathrm{d}t = u(t_0)$$

oder:

$$u(t) \cdot \delta(t - t_0) = u(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$$

2.3.2 Verallgemeinerte Ableitung

Es ist definiert:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A \cdot \sigma(t - t_0)) := A \cdot \delta(t - t_0)$$