Formelsammlung Lineare Systeme und Regelung

Mario Felder
Michi Fallegger

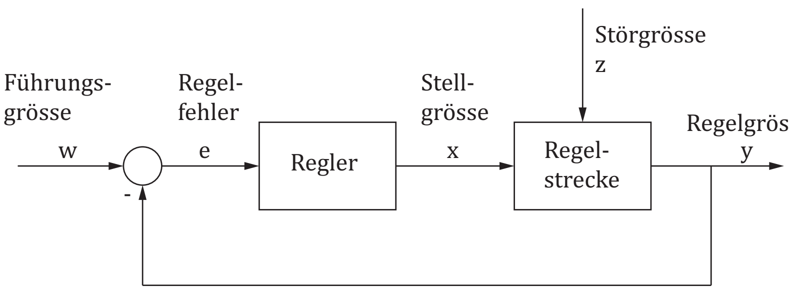
29. März 2014

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

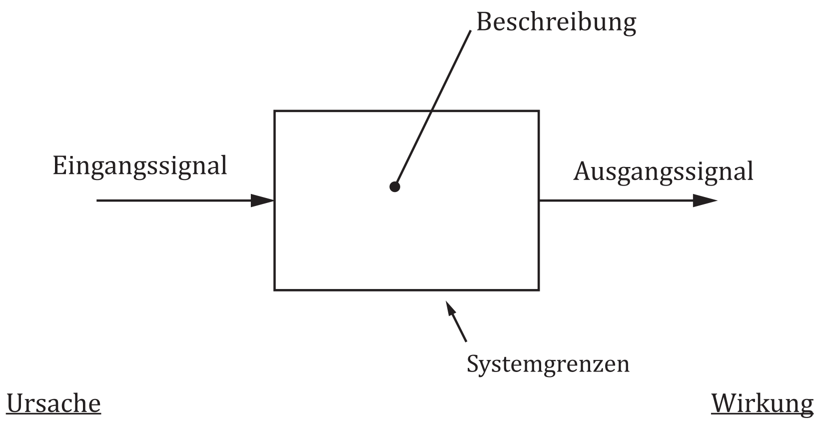
1.1 Regelkreis



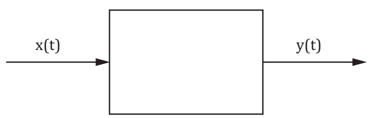
Merkmale:

- Erfassen der Regelgrösse y
- Vergleich von Führungs- und Regelgrösse
- Angleichen der Regelgrösse an die Führungsgrösse in Wirkungskreis

1.2 Systeme



Signale sind rückwirkungsfrei, also eingeprägte Grössen.



Nr.	Bsp	Klassifikation
1	$y(t) = \cos t \cdot x(t)$	statisch
2	$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = -\cos(y(t)) + x(t)$	**dynamisch**
3	$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = -y(t) + x(t)$	**zeitkontinierlich**
4	$y((k+1)\tau) = -y(k \cdot \tau) + x(k \cdot \tau)$	zeitdiskret
5	$y(t) = \cos(x(t-\tau))$	**kausal**
6	$y(t) = \cos(x(t+\tau))$	nicht kausal
7	$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = -3y(t) + x(t)$	**zeitinvariant**
8	$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = -\cos t \cdot y(t) + x(t)$	zeitvariant
9	$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = -y(t) + x(t)$	**linear**
10	$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = -y^2(t) + x(t)$	nicht linear
11	$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = -y(t) + x(t)$	**endlich-dimensional**
12	$\frac{\partial y(t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} y(x,t) + x(t)$	unendlich-dimensional
13	$y(t) = t \cdot \cos^2 t \cdot x(t)$	**single input / single output**
14	$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & \sin(t) \\ t & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$	multiple input / multiple output

Kapitel 2

Systeme und Signale

2.1 Signale

2.1.1 Definition

Ein Signal ist eine (reelle) Funktion:

$$u: \ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

2.1.2 Einheitssprung

Der Einheitssprung wird in der Technik oft gebraucht und ist folgendermassen definiert:

$$\sigma := \begin{cases} 1 & \text{für alle } t \geq 0 \\ 0 & \text{für alle } t < 0. \end{cases}$$

Eine weitere Bezeichnung lautet $H(t)$, Heaviside-Funktion.

2.1.3 Eigenschaften

Sprungstelle: Ist eine Funktion $u(t)$ in einem Punkt t_0 definiert aber unstetig, so heisst t_0 eine Sprungstelle von $u(t)$.
Wenn die einseitigen Grenzwerte $\lim\limits_{t \nearrow t_0} u(t)$ und $\lim\limits_{t \searrow t_0} u(t)$ existieren und endlich sind, so heisst die Sprungstelle endlich.

Knickstelle: Ist $u(t)$ in t_0 stetig, aber nicht differenzierbar, so wird t_0 Knickstelle genannt.

Sprungstetig: Eine Funktion, die bis auf endliche Sprung- und Knickstellen überall differenzierbar ist, wird sprungstetig genannt.

Gerade: Eine Funktion $u(t)$ ist gerade, falls ihr Graph achsensymmetrisch zur u-Achse ist:

$$u(-t) = u(t) \qquad \text{für alle } t$$

Ungerade: Eine Funktion $u(t)$ ist ungerade, falls ihr Graph punktxymmetrisch zum Ursprung ist:

$$u(-t) = -u(t) \qquad \text{für alle } t$$

Kausale Signale: Dies sind Funktionen, die *vor* einem Zeitpunkt t_0 Null sind. (Bsp. der Einheitssprung)

Beschränkt: Ein Signal $u(t)$ heisst beschränkt, falls u dem Betrage nicht beliebig grosse Werte annimmt:

$$|u(t)| \leq M_u \qquad \text{für alle } t.$$

2.1.4 Operationen

Vertärkung / Amplifizierung

Multiplikation mit einer Konstanten:

$$u(t) \to A \cdot u(t)$$

Überlagerung

Addition zweier Signale:

$$(u_1(t), u_2(t)) \to a_1(t) + u_2(t)$$

Zeitliche Verschiebung

Ein Signal wird um die Zeit t_0 verzögert, indem t durch $t - t_0$ ersetzt wird:

$$u(t) \rightarrow u(t - t_0)$$

Zeitliche Reskalierung

Ein Signal wird um den Faktor α zeitlich reskaliert (verlangsamt, gestreckt), indem t durch t/α ersetzt wird:

$$u(t) \rightarrow u\left(\frac{t}{\alpha}\right)$$

Allgemein gilt

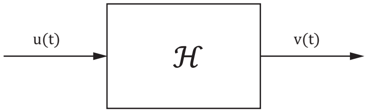
Jedes sprungstetige Signal $u(t)$ lässt sich mit Hilfe von verschobenen Einheitssprüngen in folgender Form schreiben:

$$u(t) = u_s(t) + A_0 \cdot \sigma(t - t_0) + A_1 \cdot \sigma(t - t_1) + ...$$

Dabei sind:

- $u_s(t)$ ein stetiges Signal (ohne Sprünge, aber evtl. Knickstellen),
- die Zeiten $t_0, t_1, ...$ die Sprungstellen von $u(t)$,
- die Zahlen $A_0, A_1, ...$ die Sprunghöhen zu den Zeiten $t_0, t_1, ...$.

2.2 Systeme



Ein System ist eine Zuordnungsvorschrift, die eine Funktion $u(t)$ (Eingangssignal) in eine andere Funktion $v(t)$ (Ausganssignal) überführt.

$$\mathcal{H}\left\{u(t)\right\} = v(t)$$

2.2.1 Eigenschaften

Linear

Ein System ist linear, wenn die folgenden beiden Eigenschaften gelten:

- Das System antwortet auf ein amplifiziertes Eingangssignal mit der Verstärkung des Ausgangssignals um den gleichen Faktor:

  $$\mathcal{H}\left\{A \cdot u(t)\right\} = A \cdot \mathcal{H}\left\{u(t)\right\} = A \cdot v(t)$$

  für jedes Eingangssignal $u(t)$ und jede Konstante $A \in \mathbb{R}$

- Das Syastem antwortet auf eine Überlagerung zweier Signale mit der Überlagerung der beiden Ausgangssignale

  $$\mathcal{H}\left\{u_1(t) + u_2(t)\right\} = \mathcal{H}\left\{u_1(t)\right\} + \mathcal{H}\left\{u_2(t)\right\} = v_1(t) + v_2(t)$$

  für zwei beliebige Eingangssignale $u_1(t), u_2(t)$.

Zusammengefasst:

$$\mathcal{H}\left\{A_1 \cdot u_1(t) + A_2 \cdot u_2(t)\right\} = A_1 \cdot v_1(t) + A_2 \cdot v_2(t)$$

Zeitinvariant

Ein System ist zeitinvariant, wenn es auf ein Signal immer gleich regiert, egal zu welcher Zeit man das System mit einem Signal stimuliert:

$$\mathcal{H}\left\{u(t-t_0)\right\} = v(t-t_0)$$

2.3 Dirac-Delta-Funktion

Die Dirca-Delta-Funktion ist definiert als Ableitung des Einheitssprungs:

$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}$$

Sie hat Punktweise folgende Werte:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq 0 \\ \infty & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

Es sollte jedoch nur unter dem Integral gerechnet werden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$$

2.3.1 Ausblendefunktion

Ist die Funktion $u(t)$ an der Stelle t_0 stetig, so gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot \delta(t - t_0)\mathrm{d}t = u(t_0)$$

oder:

$$u(t) \cdot \delta(t - t_0) = u(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$$

2.3.2 Verallgemeinerte Ableitung

Es ist definiert:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A \cdot \sigma(t - t_0)) := A \cdot \delta(t - t_0)$$

Kapitel 3

Laplace Transformation

3.1 Definition

Definition der Laplace-Transformierten $U(s)$ eines Signals $u(t)$:

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} u(t) \cdot \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t = \lim_{a \nearrow 0} \int_{a}^{\infty} u(t) \cdot \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t$$

Notation:

$$u(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, U(s) \qquad , s \in \mathbb{C}$$

3.1.1 Konvergenzbereich

Die Laplace-Transformierte eines Signals existiert nicht für jedes s. Falls das Integral

$$U(s) = \int_{0}^{\infty} u(t) \cdot \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t$$

konvergiert, so existiert die Laplace-Transformierte von $u(t)$.
Der Bereich aller Zahlen s, für welche die Laplace-Transformierte eines Signals konvergiert, den Konvergenzbereich (KB).

$$s = \sigma + \omega \cdot \mathrm{j} \qquad , \sigma = Re(s) \text{ und } \omega = Im(s)$$

Somit ist der Konvergenzbereich:

$$KB = \{s \in \mathbb{C} | Re(s) > \sigma_0\}$$

3.2 Eigenschaften der Laplace-Transformation

Linearitätssatz

$$A \cdot u(t) + B \cdot v(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet A \cdot U(s) + B \cdot V(s)$$

Ähnlichkeitssatz

$$u(a \cdot t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{a} \cdot U\left(\frac{s}{a}\right) \qquad , a > 0$$

Dämpfungssatz

$$\mathrm{e}^{-a \cdot t} u(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet U(s + a) \qquad , a > 0$$

Zeitverschiebungssatz

$$t(t - t_0) \cdot \sigma(t - t_0) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \mathrm{e}^{-t_0 \cdot s} \cdot U(s) \qquad , t_0 \geq 0$$

Faltungssatz

$$u(t) * v(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet U(s) \cdot V(s)$$

Differentiationssatz

$$\dot{u}(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet s \cdot U(s) - u(0^-)$$

$$\dddot{u}(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet s^3 \cdot U(s) - s^2 \cdot u(0^-) - s \cdot \dot{u}(0^-) - \ddot{u}(0^-)$$

Mit Anfangsbedingung $0^- = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} u(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet s^n \cdot U(s)$$

Integrationssatz

$$\int_{0^-}^{t} \mathrm{d}t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s} \cdot U(s)$$

Inverse Laplace-Transformation

$$\mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = u(t)$$

$$U(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\, u(t)$$

Eindeutigkeitssatz:

$$U(s) = V(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\, u(t) = v(t) \qquad \text{, für } t > 0$$

3.3 Partialbruchzerlegung

Rationale Funktion:

$$R(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

Wobei $Z(s)$, und $N(s)$ Polynome in s sind.

In Linearfaktoren zerlegen:

$$R(s) = \frac{Z(s)}{(s - s_1)(s - s_2) \ldots (s - s_m)}$$

Wobei $s_1, \ldots, s_m$ komplexe Polstellen von $R(s)$ sind.

3.3.1 Rationale Funktionen mit einfache Polen

$$R(s) = \frac{Z(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_m)} \qquad , s_1, \dots, s_m \text{ paarweise verschieden}$$

Es gibt komplexe Zahlen $a_1, \dots, a_m$, so dass

$$R(s) = \frac{a_1}{s-s_1} + \frac{a_2}{s-s_2} + \dots + \frac{a_m}{s-s_m}$$

Bestimmung der komplexen Zahlen a_i:

$$a_i = R(s) \cdot (s-s_1)|_{s=s_i}$$

3.3.2 Rationale Funktionen mit mehrfachen Polen

$$R(s) = \frac{Z(s)}{(s-a)^,} \qquad a \in \mathbb{C}$$

Es gibt komplexe Zahlen $a_1, \dots, a_m$, so dass

$$R(s) = \frac{a_1}{s-a} + \frac{a_2}{(s-a)^1} + \dots + \frac{a_m}{(s-a)^m}$$

Bestimmung der komplexen Zahlen a_i:

$$a_{m-i} = \frac{1}{i!}\left[\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}s^i} R(s)(s-a)^a\right]_{s=a} \qquad i = 0, \dots, m-1$$

3.4 Lösen von Differentialgleichungen

1. Differentialgleichung in Bildbereich überführen $\rightarrow$ algebraische Gleichung

2. algebraische Gleichung im Bildraum nach der unbekannten Funktion auflösen

3. Bildfunktion des Eingangssignals bestimmen und in die algebraische Gleichung einsetzen

4. Lösung aus dem Bildraum in den Zeitraum zurück transformieren

3.5 Übertragungsgleichung LZI-Systemen

Der Zusammenhang zwischen Eingangssignal $u(t)$ und Ausgangssignal $v(t)$ ist durch eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten beschrieben

$$a_n \cdot v^{(n)} + a_{n-1} \cdot v^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot \dot{v} + a_0 \cdot v = b_m \cdot u^{(n)} + b_{n-1} \cdot u^{(n-1)} + \ldots + b_0 \cdot u$$

Da nur kausale Signale betrachtet werden, entfallen die Anfangsbedingungen:

$$a_n s^n V + a_{n-1} s^{n-1} V + \ldots + a_1 s V + a_0 V = b_m s^m U + b_{m-1} s^{m-1} U + \ldots + b_0 U$$

Nach $V(s)$ aufgelöst ergibt dies:

$$V(s) = \underbrace{\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}}_{G(s)} \cdot U(s)$$

Die rationale Funktion $G(s)$ wird Übertragungsfunktion des Systems genannt. Daraus ergibt sich die Übertragungsgleichung:

$$V(s) = G(s) \cdot U(s)$$

3.6 Faltung

Die Faltung ist definiert durch:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) \mathrm{d}\tau$$

Die Faltung in den Bildbereich transformiert:

$$(f * g)(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s) \cdot G(s)$$

Rechenregeln

1. Dirac-Delta ist das neutrale Element bzgl. der Faltung: $\delta(t-t_0) * g(t) = g(t - t_0)$
2. Kommutativität: $f * g = g * f$
3. Assoziativität: $f * (g * h) = (f * g) * h$
4. Distributivität: $f * (g + h) = f * g + f * h$

3.6.1 Gewichtsfunktion

Aus dem Faltungssatz ergibt sich:

$$v(t) = g(t) * u(t) \qquad , g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ G(s)$$

$g(t)$ wird Gewichtsfunktion genannt.

3.6.2 Impulsantwort

Die Impulsantwort ist definiert als die Antwort auf einen Einheitsimpuls $u(t) = \delta(t)$ zur Zeit $t = 0$.

$$v(t) = g(t) * u(t) = g(t) * \delta(t) = g(t)$$

Die Impulsantwort ist die Gewichtsfunktion.

3.6.3 Sprungantwort

Als Sprungantwort $h(t)$ bezeichnet man die Antwort des Systems auf einen Einheitssprung $\sigma(t)$:

$$h(t) = g(t) * \sigma(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s) \cdot \frac{1}{s}\right\} = \int_{0^-}^{t} g(\tau)\mathrm{d}\tau$$

3.6.4 Anfangswertsatz

In gewissen Situationen ist das Verhalten des Systems kurz nach dem Einschalten interessant:

$$v(0^+) = \lim_{t \searrow 0} v(t)$$

Dies kann direkt im Bildraum berechnet werden. Ist $v(t)$ ein in $t = 0$ sprungstetiges Signal, so existiert der Anfangswert und es gilt:

$$v(0^+) = \lim_{Re(s) \to +\infty} s \cdot V(s)$$

3.6.5 Endwertsatz

Ist der Endwert $v(\infty)$ eines Signals $v(t)$ gefragt:

$$v(\infty) = \lim_{t \to \infty} v(t)$$

, gilt der folgende Satz:
Ist $v(t)$ ein Signal, für welches der Endwert $v(\infty)$ existiert, so gilt:

$$v(\infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot V(s)$$

Der Endwert existiert, wenn alle Pole der Bildfunktion $V(s)$ links der imaginären Achse ($Re(s) < 0$) sind. Ausnahme ist eine einfache Polstelle bei $s = 0$.

3.6.6 Stabilität

Ein System ist symptotisch stabil, falls seine Impulsantwort $g(t)$ mit $t \to \infty$ gegen Null abklingt:

$$g(\infty) = 0$$

Diese Eigenschaft ist äquivalent dazu, dass alle Polstellen der Übertragungsfunktion $G(s)$ links der imaginären Achse liegen.

Kapitel 4

Fourier-Transformation