

Formelsammlung Lineare Systeme und Regelung

Mario Felder
Michi Fallegger

20. Juni 2014

Inhaltsverzeichnis

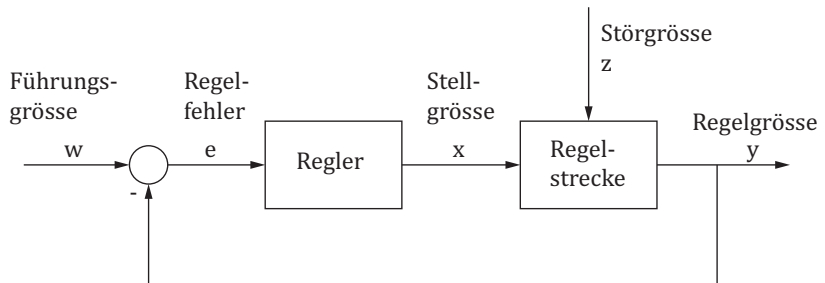
1	Regelungstechnik	1
1.1	Regelkreis	1
1.2	Systeme	2
1.3	Linearisierung	3
1.3.1	Arbeitspunkt festlegen	3
1.3.2	Linearisierung um Arbeitspunkt	4
1.4	Stabilität	4
1.4.1	Hurwitz-Kriterium	4
1.4.2	Nyquist-Kriterium	5
1.5	Amplituden- und Phasenreserve	6
1.5.1	Totzeitreserve	7
1.6	Kompositionen von Grundelementen	8
1.7	Stationärer Fehler	10
1.8	Reglerelemente	11
1.8.1	Übersicht	11
1.8.2	P -Glieder	15
1.8.3	PT_1 -Glieder	16
1.8.4	PT_2 -Glieder	17
1.8.5	PT_t -Glieder	21
1.8.6	D -Glieder	22
1.8.7	DT_1 -Glieder	23
1.8.8	PD -Glieder	24
1.8.9	PDT_1 -Glieder	24
1.8.10	PPT_1 -Glieder	24
1.8.11	I -Glieder	24
1.8.12	IT_1 -Glieder	25

1.8.13	<i>PI</i> -Glied	25
1.8.14	<i>PID</i> -Glied	25
1.8.15	<i>PIDT</i> ₁ -Glied	25
2	Systeme und Signale	27
2.1	Signale	27
2.1.1	Definition	27
2.1.2	Einheitssprung	27
2.1.3	Eigenschaften	27
2.1.4	Operationen	28
2.2	Systeme	30
2.2.1	Eigenschaften	30
2.3	Dirac-Delta-Funktion	32
2.3.1	Ausblendefunktion	32
2.3.2	Verallgemeinerte Ableitung	32
3	Laplace Transformation	33
3.1	Definition	33
3.1.1	Konvergenzbereich	33
3.2	Eigenschaften der Laplace-Transformation	34
3.3	Partialbruchzerlegung	35
3.3.1	Rationale Funktionen mit einfache Polen	36
3.3.2	Rationale Funktionen mit mehrfachen Polen	36
3.4	Lösen von Differentialgleichungen	36
3.5	Übertragungsgleichung LZI-Systemen	37
3.6	Faltung	38
3.6.1	Gewichtsfunktion	38
3.6.2	Impulsantwort	38
3.6.3	Sprungantwort	39
3.6.4	Anfangswertsatz	39
3.6.5	Endwertsatz	39
3.6.6	Stabilität	40
4	Fourier-Transformation	41
5	Teilsysteme	43
5.1	Flühlersche Regel	44

Kapitel 1

Regelungstechnik

1.1 Regelkreis



Merkmale:

- Erfassen der Regelgrösse y
- Vergleich von Führungs- und Regelgrösse
- Angleichen der Regelgrösse an die Führungsgrösse in Wirkungskreis

Führungsübertragungsverhalten:

$$G(s) = \frac{G_R \cdot G_S}{1 + G_R \cdot G_S}$$

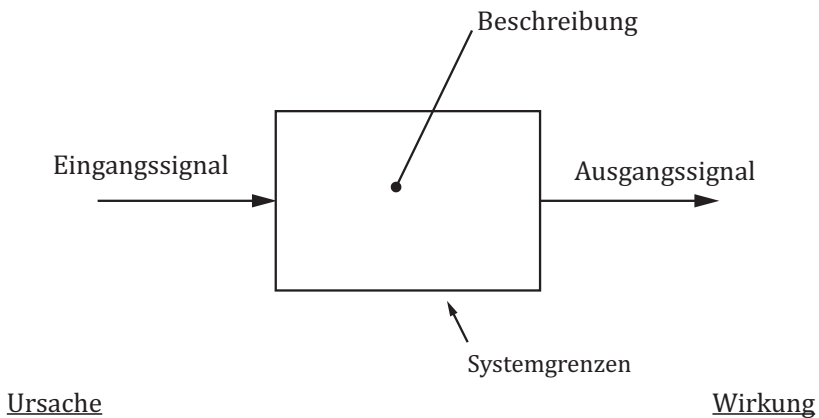
Störübertragungsverhalten (Störung zwischen Regler und Strecke):

$$G_{z1}(s) = \frac{G_S}{1 + G_R \cdot G_S}$$

Störübertragungsverhalten (Störung nach Strecke):

$$G_{z2}(s) = \frac{1}{1 + G_R \cdot G_S}$$

1.2 Systeme



Signale sind rückwirkungsfrei, also eingeprägte Größen.



Nr.	Bsp	Klassifikation
1	$y(t) = \cos t \cdot x(t)$	statisch
2	$\frac{dy(t)}{dt} = -\cos(y(t)) + x(t)$	dynamisch
3	$\frac{dy(t)}{dt} = -y(t) + x(t)$	zeitkontinuierlich
4	$y((k+1)\tau) = -y(k \cdot \tau) + x(k \cdot \tau)$	zeitdiskret
5	$y(t) = \cos(x(t - \tau))$	kausal
6	$y(t) = \cos(x(t + \tau))$	nicht kausal
7	$\frac{dy(t)}{dt} = -3y(t) + x(t)$	zeitinvariant
8	$\frac{dy(t)}{dt} = -\cos t \cdot y(t) + x(t)$	zeitvariant
9	$\frac{dy(t)}{dt} = -y(t) + x(t)$	linear
10	$\frac{dy(t)}{dt} = -y^2(t) + x(t)$	nicht linear
11	$\frac{dy(t)}{dt} = -y(t) + x(t)$	endlich-dimensional
12	$\frac{\partial y(t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} y(x, t) + x(t)$	unendlich-dimensional
13	$y(t) = t \cdot \cos^2 t \cdot x(t)$	single input/output
14	$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & \sin(t) \\ t & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$	multiple input/output

1.3 Linearisierung

Approximation durch Gerade:

$$f(\bar{x} + \Delta x) \approx (\bar{x}) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{\bar{x}} \cdot \Delta x$$

1.3.1 Arbeitspunkt festlegen

Im stationären Zustand gilt:

$$\frac{d^n}{dt^n} = 0$$

Für das Eingangssignal $u(t)$ und das Ausgangssignal $y(t)$:

$$h(t) = \bar{y} + \Delta y(t) \quad , \quad u(t) = \bar{u} + \Delta u(t)$$

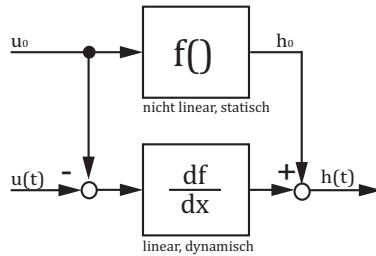
1.3.2 Linearisierung um Arbeitspunkt

Es gilt:

$$D(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, \dot{y}, y, u^{(m)}, u^{(m-1)}, \dots, \dot{u}, u) = 0$$

D kann am Punkt \bar{y}, \bar{u} approximiert werden durch:

$$\frac{\partial D}{\partial y^{(n)}} \bigg|_{\bar{y}} \cdot \Delta y^n + \dots + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} \bigg|_{\bar{y}} \cdot \Delta \dot{y} + \frac{\partial D}{\partial y} \bigg|_{\bar{y}} \cdot \Delta y + \frac{\partial D}{\partial u^{(n)}} \bigg|_{\bar{u}} \cdot \Delta u^n + \dots + \frac{\partial D}{\partial \dot{u}} \bigg|_{\bar{u}} \cdot \Delta \dot{u} + \frac{\partial D}{\partial u} \bigg|_{\bar{u}} \cdot \Delta u = 0$$



1.4 Stabilität

Grundlegendes Stabilitätskriterium für LZI-Glieder:

Ein LZI-Glied ist genau dann stabil, wenn die n Nullstellen des Nennerpolynoms sämtliche negative Realteile haben. In der komplexen s -Ebene müssen die Nullstellen sämtlich links von der imaginären Achse liegen.

1.4.1 Hurwitz-Kriterium

Das Polynom $N(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n = 0$ ist nur dann stabil, wenn alle Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ungleich null sind und ein

positives Vorzeichen haben. Zusätzlich müssen alle n Linieardeterminanten positiv sein (mit n Zeilen und n Spalten).

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_2 & \dots \\ \dots & & & & \end{vmatrix}$$

Mit den jeweiligen Unterdeterminanten (für den fall $n = 3$):

$$\begin{aligned} D_1 &= |a_1| = a_1 > 0 \\ D_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0 \\ D_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 D_2 > 0 \end{aligned}$$

Die letzte Determinante erfüllt jeweils zwangsmässig die Bedingung.

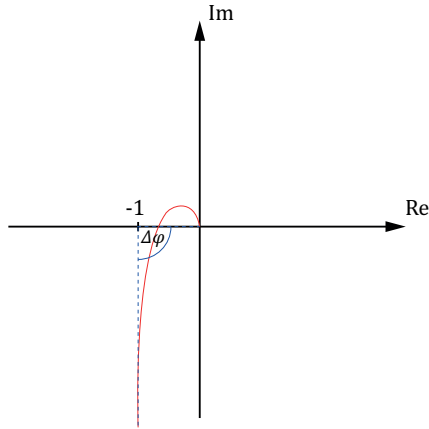
1.4.2 Nyquist-Kriterium

Das Stabilitätskriterium nach Nyquist beurteilt die Stabilität eines Regelkreises aus dem Verlauf des **Frequenzgangs des offenen Regelkreises**. Das Nyquist-Kriterium betrachtet die Ortskurve gegenüber dem Punkt -1 auf der reellen Achse. Dabei wird die Winkeländerung von $\omega = 0 \rightarrow \omega = \infty$ betrachtet. Dabei muss folgende Beziehung erfüllt sein, damit das Regelsystem stabil ist:

$$\Delta\varphi = i_k \cdot \frac{\pi}{2} + r_k \cdot \pi$$

r_k : Anzahl Polstellen mit positivem Realteil

i_k : Anzahl Polstellen auf der imaginären Achse



1.5 Amplituden- und Phasenreserve

Die Amplitudenreserve A_R ist ein Mass für den Abstand der Ortskurve $G_O(j\omega)$ vom Punkt -1 in Richtung der reellen Achse. Die Kreisfrequenz an der Stelle, an der $G_O(j\omega)$ die reelle Achse schneidet, heisst Phasenschnittkreisfrequenz ω_π .

Definition Amplitudenreserve:

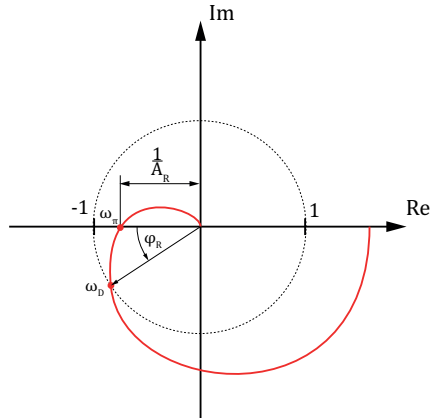
$$A_R = \frac{1}{|G_O(j\omega_\pi)|} \quad \text{Stabilitätsbedingung: } A_R > 0.$$

Die Phasenfrequenz φ_R ist der Winkel zwischen der negativ-reellen Achse und dem Punkt, an dem die Ortskurve $G_O(j\omega)$ den Einheitskreis schneidet. Die Kreisfrequenz im Schnittpunkt heisst Durchtrittskreisfrequenz ω_D .

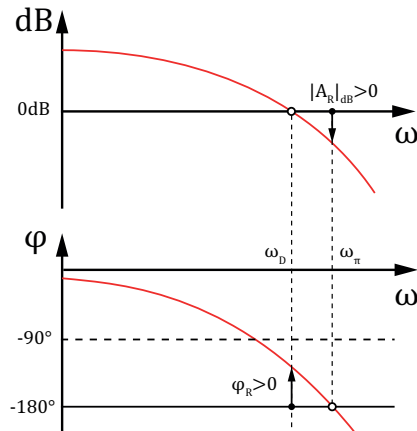
Definition Phasenreserve:

$$\varphi_R = \angle G_O(j\omega_D) + \pi \quad \text{Stabilitätsbedingung: } \varphi > 0.$$

Ablesen von der Ortskurve:



Ablesen vom Bodediagramm:



1.5.1 Totzeitreserve

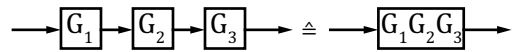
Die Totzeitreserve T_{tR} ist eine zusätzliche Totzeit, die in einem Regelkreis auftreten darf, ohne dass der Regelkreis instabil wird.

Definition Totzeitreserve:

$$T_{tR} = \frac{\varphi_R}{\omega_D}$$

1.6 Kompositionen von Grundelementen

Betrachten der Verkettung:



Allgemeine Übertragungsfunktion:

$$G(s) = k \frac{s^n \cdot (1 + sT_1)^n \dots}{s^m \cdot (1 + sT_2)^m (1 + 2dT_2s + s^2T_2^2) \dots} \cdot e^{-sT}$$

1.6. KOMPOSITIONEN VON GRUNDELEMENTEN

Anteil	Bode	Ortskurve	Sprungantwort
k			
s^n			
$\frac{1}{s^m}$			
$(1 + sT)^n$			
$\frac{1}{(1 + sT)^m}$			
e^{-sT}			

1.7 Stationärer Fehler

Der stationäre Fehler ist die Differenz zwischen Führungsgrösse $w(t)$ und Regelgrösse $y(t)$ zum Zeitpunkt $t = \infty$:


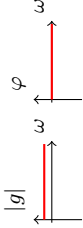
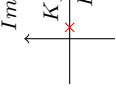


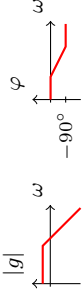
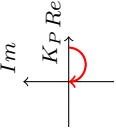
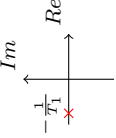

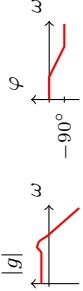
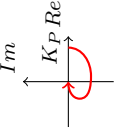
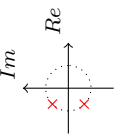
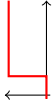
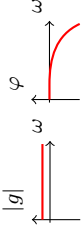
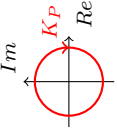
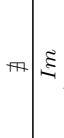
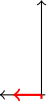
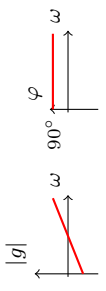
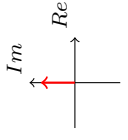
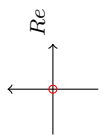
$$e(\infty) = w(\infty) - y(\infty)$$

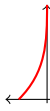
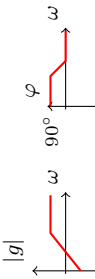



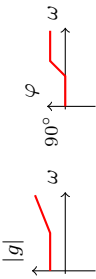

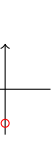

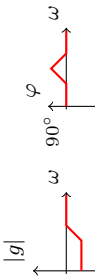
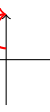
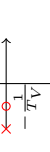

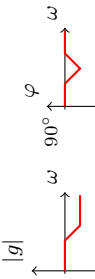

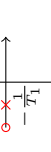

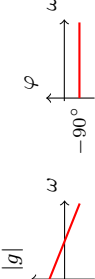


Diese Grösse kann über den Laplace Endwertsatz berechnet werden:


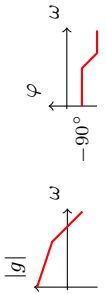
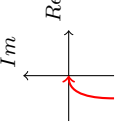
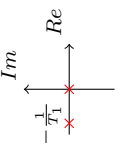

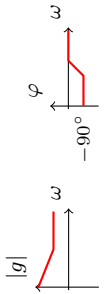
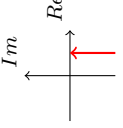
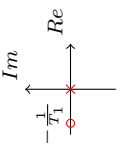

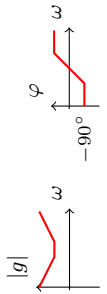
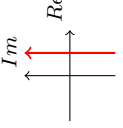
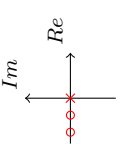

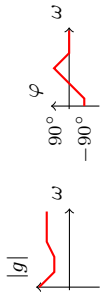
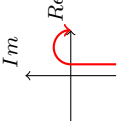
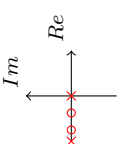
$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot (W(s) - Y(s))$$

1.8 Reglerelemente

1.8.1 Übersicht

Name	$h(t)$	$G(s)$	Bode	Ortsk.	PN-Plan
P		K_P			
$P T_1$		$\frac{K_P}{1+sT_1}$			
$P T_2$		$\frac{K_P \cdot \omega_0^2}{\omega_0^2 + 2d\omega_0 \cdot s + s^2}$			
$P T_t$		$K_P \cdot e^{-sT_t}$			
D		$K_D \cdot s$			

Name	$h(t)$	$G(s)$	Bode	Ortsk.	PN-Plan
DT_1		$\frac{K_D \cdot s}{1+sT_1}$			
PD		$K_P \cdot (1 + sT_V)$			
PDT_1		$K_P \cdot \frac{1+T_V}{1+sT_1}, T_V > T_1$			
PPT_1		$K_P \cdot \frac{1+T_V}{1+sT_1}, T_V < T_1$			
I		$K_I \cdot \frac{1}{s}$			

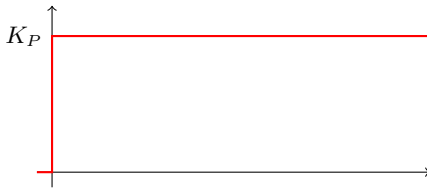
Name	$h(t)$	$G(s)$	Bode	Ortsk.	PN-Plan
IT_1		$\frac{K_I}{s \cdot (1 + sT_1)}$			
PI		$K_P \cdot \left(1 + \frac{1}{sT_N}\right)$			
PID		$K_P \cdot \left(1 + \frac{1}{sT_N} + sT_V\right)$			
$PIDT_1$		$K_P \cdot \left(1 + \frac{1}{sT_N} + \frac{sT_V}{1 + sT_1}\right)$			

1.8.2 P -Glied

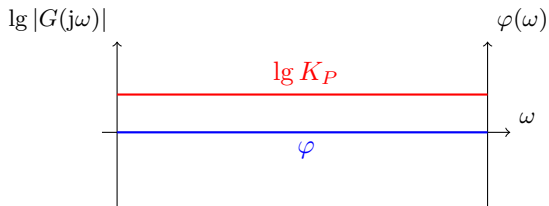
DGL: $y(t) = K_P \cdot w(t)$

Übertragungsfunktion: $G(s) = K_P$

Sprungantwort: $h(t) = K_P$

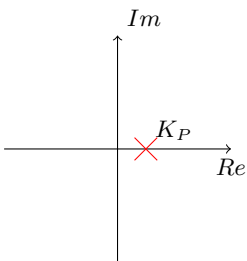


Bodediagramm:



Ortskurve:

PN-Plan:



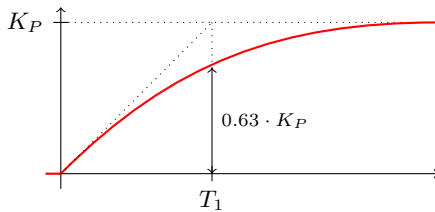
\nexists

1.8.3 PT_1 -Glied

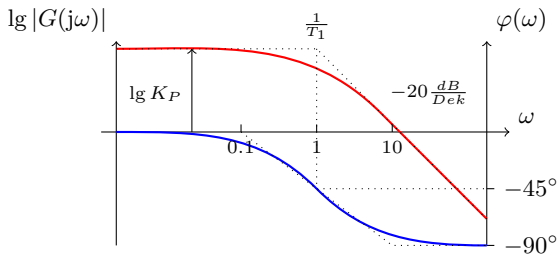
DGL: $T_1 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K_P \cdot u(t)$

Übertragungsfunktion: $G(s) = \frac{K_P}{1+sT_1}$

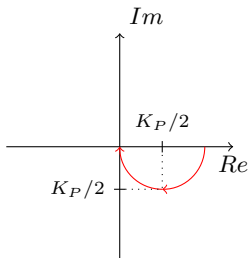
Sprungantwort: $h(t) = K_P \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$



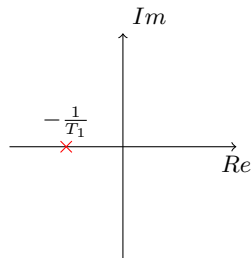
Bodediagramm:



Ortskurve:



PN-Plan:



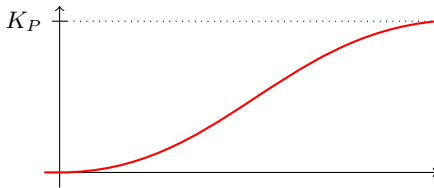
1.8.4 PT_2 -Glied

DGL: $\ddot{y}(t) + 2d\omega \cdot \dot{y}(t) + y = K_P \cdot u(t)$

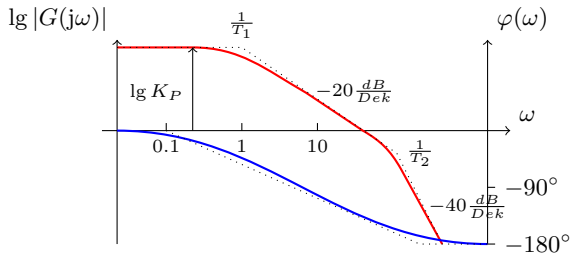
Übertragungsfunktion: $G(s) = \frac{K_P \cdot \omega_0^2}{\omega_0^2 + 2d\omega_0 \cdot s + s^2}$

$D > 1$ **Kriechfall**

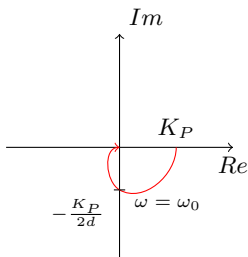
Sprungantwort: $h(t) = K_P \cdot \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$



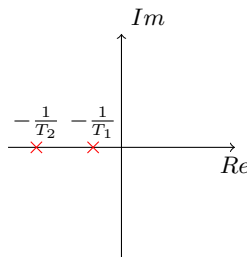
Bodediagramm:



Ortskurve:

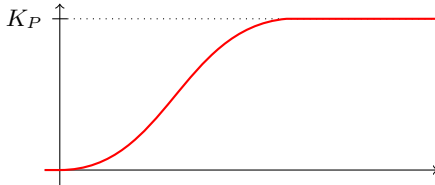


PN-Plan:

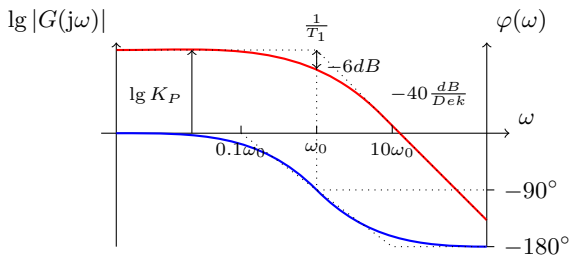


$D = 1$ **aperiodischer Grenzfall**

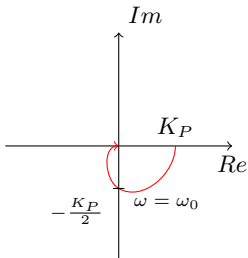
Sprungantwort:
$$h(t) = K_P \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{t}{T_1} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \right)$$



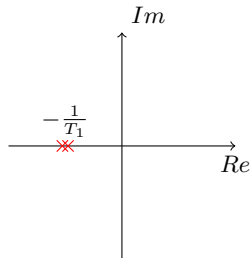
Bodediagramm:



Ortskurve:



PN-Plan:

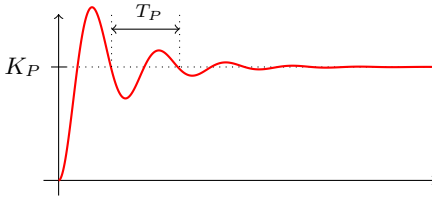


$0 < D < 1$ stabiler Schwingfall

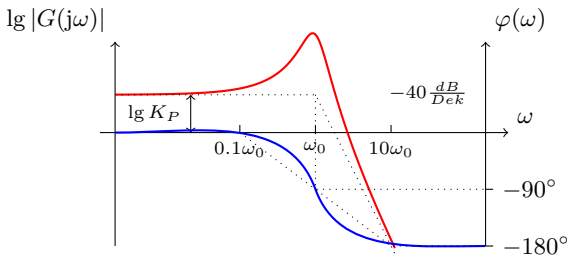
Sprungantwort:
$$h(t) = K_P \cdot \left(1 - \frac{e^{-d\omega_0 t}}{\sqrt{1-d^2}} \cdot \sin(\omega_e t + \arccos d) \right)$$

Eigenkreisfrequenz: $\omega_e = \sqrt{1-d^2} \cdot \omega_0$

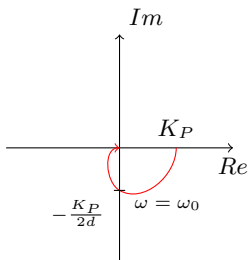
Periodeldauer: $T_P = \frac{2\pi}{\omega_e}$



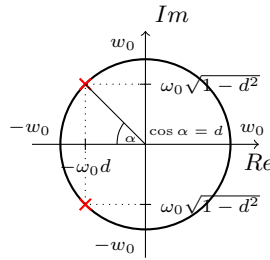
Bodediagramm:



Ortskurve:



PN-Plan:

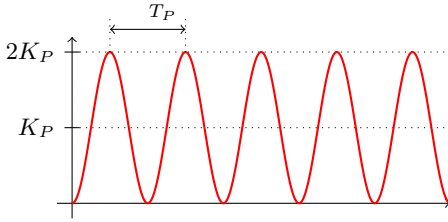


$D = 0$ grenzstabiler Schwingfall

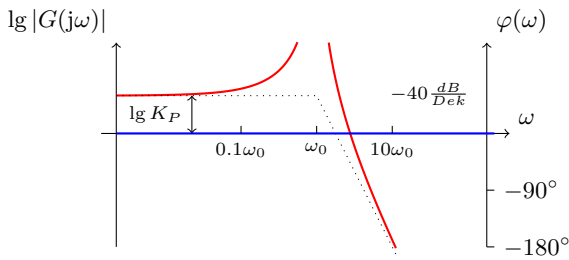
Sprungantwort: $h(t) = K_P \cdot (1 - \cos \omega_0 t)$

Eigenkreisfrequenz: $\omega_e = \omega_0$

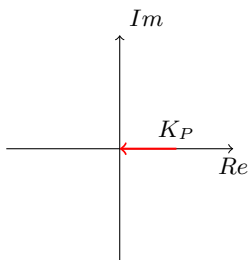
Periodeldauer: $T_P = \frac{2\pi}{\omega_0}$



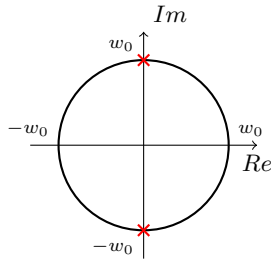
Bodediagramm:



Ortskurve:



PN-Plan:

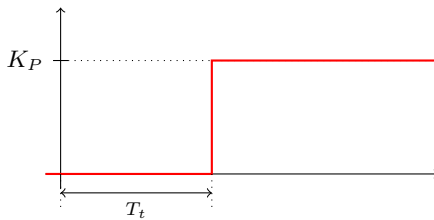


1.8.5 PT_t -Glied

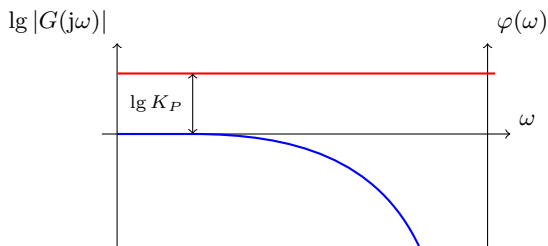
DGL: $y(t) = K_P \cdot u(t - T_t)$

Übertragungsfunktion: $G(s) = K_P \cdot e^{-sT_t}$

Sprungantwort: $h(t) = K_P \cdot \sigma(t - T_t)$

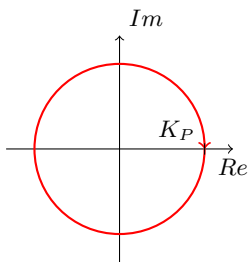


Bodediagramm:



Ortskurve:

PN-Plan:



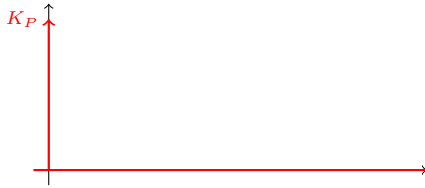
\nexists

1.8.6 D-Glied

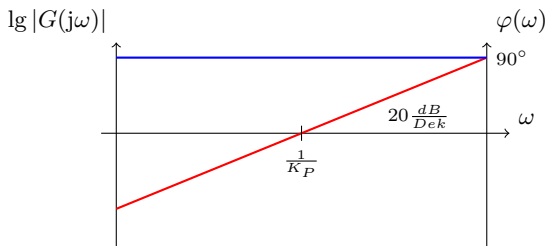
DGL: $y(t) = K_D \cdot \dot{u}(t)$

Übertragungsfunktion: $G(s) = K_P \cdot s$

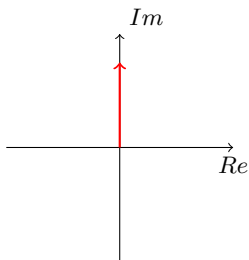
Sprungantwort: $h(t) = K_P \cdot \delta(t)$



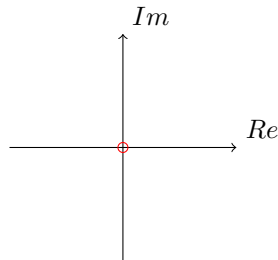
Bodediagramm:



Ortskurve:



PN-Plan:

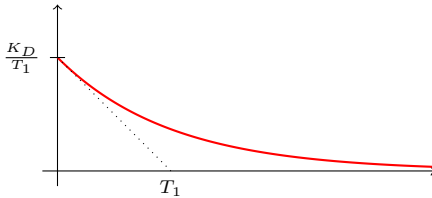


1.8.7 DT_1 -Glied

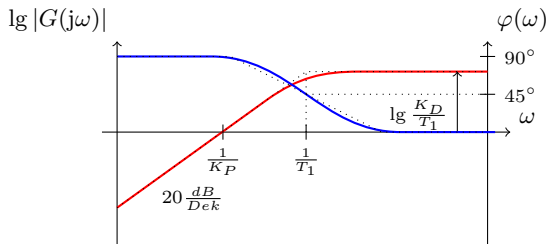
DGL: $T_1 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K_D \cdot \dot{u}(t)$

Übertragungsfunktion: $G(s) = \frac{K_D \cdot s}{1 + sT_1}$

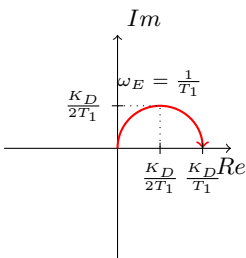
Sprungantwort: $h(t) = \frac{K_D}{T_1} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$



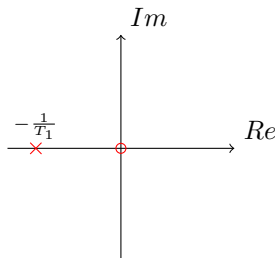
Bodediagramm:



Ortskurve:



PN-Plan:



1.8.8 PD -Glieder

DGL: $y(t) = K_P \cdot (T_V \cdot \dot{u}(t) + u(t))$

Übertragungsfunktion: $G(s) = K_P$

Sprungantwort: $h(t) = K_P$

1.8.9 PDT_1 -Glieder

DGL: $T_1 \dot{y}(t) + y(t) = K_P \cdot (T_V \cdot \dot{u}(t) + u(t))$, $T_V > T_1$

Übertragungsfunktion: $G(s) = K_P$

Sprungantwort: $h(t) = K_P$

1.8.10 PPT_1 -Glieder

DGL: $T_1 \dot{y}(t) + y(t) = K_P \cdot (T_V \cdot \dot{u}(t) + u(t))$, $T_V < T_1$

Übertragungsfunktion: $G(s) = K_P$

Sprungantwort: $h(t) = K_P$

1.8.11 I -Glieder

DGL: $\dot{y} = K_I u(t)$

Übertragungsfunktion: $G(s) = K_P$

Sprungantwort: $h(t) = K_P$

1.8.12 IT_1 -Glieder

DGL: $T_1 \cdot \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = K_I \cdot u(t)$

Übertragungsfunktion: $G(s) = K_P$

Sprungantwort: $h(t) = K_P$

1.8.13 PI -Glieder

DGL: $y(t) = K_P \cdot \left(u(t) + \frac{1}{T_N} \int u(t) dt \right)$

Übertragungsfunktion: $G(s) = K_P$

Sprungantwort: $h(t) = K_P$

1.8.14 PID -Glieder

DGL: $y(t) = K_P \cdot \left(u(t) + \frac{1}{T_N} \int u(t) dt + T_V \cdot \dot{u}(t) \right)$

Übertragungsfunktion: $G(s) = K_P$

Sprungantwort: $h(t) = K_P$

1.8.15 $PIDT_1$ -Glieder

DGL: $T_1 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K_P \cdot \left(\frac{T_1 + T_N}{T_N} u(t) + \frac{1}{T_N} \int u(t) dt + (T_1 + T_V) \cdot \dot{u}(t) \right)$

Übertragungsfunktion: $G(s) = K_P$

Sprungantwort: $h(t) = K_P$

Kapitel 2

Systeme und Signale

2.1 Signale

2.1.1 Definition

Ein Signal ist eine (reelle) Funktion:

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

2.1.2 Einheitssprung

Der Einheitssprung wird in der Technik oft gebraucht und ist folgendermassen definiert:

$$\sigma := \begin{cases} 1 & \text{für alle } t \geq 0 \\ 0 & \text{für alle } t < 0. \end{cases}$$

Eine weitere Bezeichnung lautet $H(t)$, Heaviside-Funktion.

2.1.3 Eigenschaften

Sprungstelle: Ist eine Funktion $u(t)$ in einem Punkt t_0 definiert aber unstetig, so heisst t_0 eine Sprungstelle von $u(t)$.

Wenn die einseitigen Grenzwerte $\lim_{t \nearrow t_0} u(t)$ und $\lim_{t \searrow t_0} u(t)$ existieren und endlich sind, so heisst die Sprungstelle endlich.

Knickstelle: Ist $u(t)$ in t_0 stetig, aber nicht differenzierbar, so wird t_0 Knickstelle genannt.

Sprungstetig: Eine Funktion, die bis auf endliche Sprung- und Knickstellen überall differenzierbar ist, wird sprungstetig genannt.

Gerade: Eine Funktion $u(t)$ ist gerade, falls ihr Graph achsensymmetrisch zur u -Achse ist:

$$u(-t) = u(t) \quad \text{für alle } t$$

Ungerade: Eine Funktion $u(t)$ ist ungerade, falls ihr Graph punktsymmetrisch zum Ursprung ist:

$$u(-t) = -u(t) \quad \text{für alle } t$$

Kausale Signale: Dies sind Funktionen, die *vor* einem Zeitpunkt t_0 Null sind. (Bsp. der Einheitssprung)

Beschränkt: Ein Signal $u(t)$ heisst beschränkt, falls u dem Betrage nicht beliebig grosse Werte annimmt:

$$|u(t)| \leq M_u \quad \text{für alle } t.$$

2.1.4 Operationen

Vertärkung / Amplifizierung

Multiplikation mit einer Konstanten:

$$u(t) \rightarrow A \cdot u(t)$$

Überlagerung

Addition zweier Signale:

$$(u_1(t), u_2(t)) \rightarrow a_1(t) + u_2(t)$$

Zeitliche Verschiebung

Ein Signal wird um die Zeit t_0 verzögert, indem t durch $t - t_0$ ersetzt wird:

$$u(t) \rightarrow u(t - t_0)$$

Zeitliche Reskalierung

Ein Signal wird um den Faktor α zeitlich reskaliert (verlangsamt, gestreckt), indem t durch t/α ersetzt wird:

$$u(t) \rightarrow u\left(\frac{t}{\alpha}\right)$$

Allgemein gilt

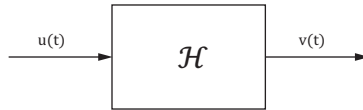
Jedes sprungstetige Signal $u(t)$ lässt sich mit Hilfe von verschobenen Einheitssprüngen in folgender Form schreiben:

$$u(t) = u_s(t) + A_0 \cdot \sigma(t - t_0) + A_1 \cdot \sigma(t - t_1) + \dots$$

Dabei sind:

- $u_s(t)$ ein stetiges Signal (ohne Sprünge, aber evtl. Knickstellen),
- die Zeiten t_0, t_1, \dots die Sprungstellen von $u(t)$,
- die Zahlen A_0, A_1, \dots die Sprunghöhen zu den Zeiten t_0, t_1, \dots

2.2 Systeme



Ein System ist eine Zuordnungsvorschrift, die eine Funktion $u(t)$ (Eingangssignal) in eine andere Funktion $v(t)$ (Ausgangssignal) überführt.

$$\mathcal{H}\{u(t)\} = v(t)$$

2.2.1 Eigenschaften

Linear

Ein System ist linear, wenn die folgenden beiden Eigenschaften gelten:

- Das System antwortet auf ein amplifiziertes Eingangssignal mit der Verstärkung des Ausgangssignals um den gleichen Faktor:

$$\mathcal{H}\{A \cdot u(t)\} = A \cdot \mathcal{H}\{u(t)\} = A \cdot v(t)$$

für jedes Eingangssignal $u(t)$ und jede Konstante $A \in \mathbb{R}$

- Das System antwortet auf eine Überlagerung zweier Signale mit der Überlagerung der beiden Ausgangssignale

$$\mathcal{H}\{u_1(t) + u_2(t)\} = \mathcal{H}\{u_1(t)\} + \mathcal{H}\{u_2(t)\} = v_1(t) + v_2(t)$$

für zwei beliebige Eingangssignale $u_1(t), u_2(t)$.

Zusammengefasst:

$$\mathcal{H}\{A_1 \cdot u_1(t) + A_2 \cdot u_2(t)\} = A_1 \cdot v_1(t) + A_2 \cdot v_2(t)$$

Zeitinvariant

Ein System ist zeitinvariant, wenn es auf ein Signal immer gleich reagiert, egal zu welcher Zeit man das System mit einem Signal stimuliert:

$$\mathcal{H}\{u(t - t_0)\} = v(t - t_0)$$

2.3 Dirac-Delta-Funktion

Die Dirac-Delta-Funktion ist definiert als Ableitung des Einheitssprungs:

$$\delta(t) = \frac{d\sigma}{dt}$$

Sie hat Punktweise folgende Werte:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq 0 \\ \infty & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

Es sollte jedoch nur unter dem Integral gerechnet werden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

2.3.1 Ausblendefunktion

Ist die Funktion $u(t)$ an der Stelle t_0 stetig, so gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = u(t_0)$$

oder:

$$u(t) \cdot \delta(t - t_0) = u(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$$

2.3.2 Verallgemeinerte Ableitung

Es ist definiert:

$$\frac{d}{dt}(A \cdot \sigma(t - t_0)) := A \cdot \delta(t - t_0)$$

Kapitel 3

Laplace Transformation

3.1 Definition

Definition der Laplace-Transformierten $U(s)$ eines Signals $u(t)$:

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} u(t) \cdot e^{-st} dt = \lim_{a \nearrow 0} \int_a^{\infty} u(t) \cdot e^{-st} dt$$

Notation:

$$u(t) \circ \longrightarrow U(s) \quad , s \in \mathbb{C}$$

3.1.1 Konvergenzbereich

Die Laplace-Transformierte eines Signals existiert nicht für jedes s . Falls das Integral

$$U(s) = \int_0^{\infty} u(t) \cdot e^{-st} dt$$

konvergiert, so existiert die Laplace-Transformierte von $u(t)$.

Der Bereich aller Zahlen s , für welche die Laplace-Transformierte eines Signals konvergiert, den Konvergenzbereich (KB).

$$s = \sigma + \omega \cdot j \quad , \sigma = \operatorname{Re}(s) \text{ und } \omega = \operatorname{Im}(s)$$

Somit ist der Konvergenzbereich:

$$KB = \{s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(s) > \sigma_0\}$$

3.2 Eigenschaften der Laplace-Transformation

Linearitätssatz

$$A \cdot u(t) + B \cdot v(t) \circ\!\!\!\longrightarrow\!\!\!\bullet A \cdot U(s) + B \cdot V(s)$$

Ähnlichkeitssatz

$$u(a \cdot t) \circ\!\!\!\longrightarrow\!\!\!\bullet \frac{1}{a} \cdot U\left(\frac{s}{a}\right) \quad , a > 0$$

Dämpfungssatz

$$e^{-a \cdot t} u(t) \circ\!\!\!\longrightarrow\!\!\!\bullet U(s + a) \quad , a > 0$$

Zeitverschiebungssatz

$$t(t - t_0) \cdot \sigma(t - t_0) \circ\!\!\!\longrightarrow\!\!\!\bullet e^{-t_0 \cdot s} \cdot U(s) \quad , t_0 \geq 0$$

Faltungssatz

$$u(t) * v(t) \circ\!\!\!\longrightarrow\!\!\!\bullet U(s) \cdot V(s)$$

Differentiationssatz

$$\dot{u}(t) \circ\!\!\!\longrightarrow\!\!\!\bullet s \cdot U(s) - u(0^-)$$

$$\ddot{u}(t) \circ\!\!\!\longrightarrow\!\!\!\bullet s^2 \cdot U(s) - s \cdot u(0^-) - \dot{u}(0^-)$$

$$\ddot{\ddot{u}}(t) \circ\!\!\!\longrightarrow\!\!\!\bullet s^3 \cdot U(s) - s^2 \cdot u(0^-) - s \cdot \dot{u}(0^-) - \ddot{u}(0^-)$$

$$u^{(n)}(t) \circ\!\!\!\longrightarrow\!\!\!\bullet s^n \cdot U(s) - s^{n-1} \cdot u(0^-) - s^{n-2} \cdot \dot{u}(0^-) - \dots - s \cdot u^{(n-2)}(0^-) - u^{(n-1)}(0^-)$$

Mit Anfangsbedingung $0^- = 0$:

$$\frac{d^n}{dt^n} u(t) \circ \bullet s^n \cdot U(s)$$

Integrationssatz

$$\int_{0^-}^t dt \circ \bullet \frac{1}{s} \cdot U(s)$$

Inverse Laplace-Transformation

$$\mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = u(t)$$

$$U(s) \bullet \circ u(t)$$

Eindeutigkeitssatz:

$$U(s) = V(s) \bullet \circ u(t) = v(t) \quad , \text{ für } t > 0$$

3.3 Partialbruchzerlegung

Rationale Funktion:

$$R(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

Wobei $Z(s)$, und $N(s)$ Polynome in s sind.

$Z(s) > N(s)$ unecht gebrochen, $Z(s) < N(s)$ gebrochen

In Linearfaktoren zerlegen:

$$R(s) = \frac{Z(s)}{(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_m)}$$

Wobei s_1, \dots, s_m komplexe Polstellen von $R(s)$ sind.

3.3.1 Rationale Funktionen mit einfache Polen

$$R(s) = \frac{Z(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_m)} \quad , s_1, \dots, s_m \text{ paarweise verschieden}$$

Es gibt komplexe Zahlen a_1, \dots, a_m , so dass

$$R(s) = \frac{a_1}{s-s_1} + \frac{a_2}{s-s_2} + \dots + \frac{a_m}{s-s_m}$$

Bestimmung der komplexen Zahlen a_i :

$$a_i = R(s) \cdot (s-s_1)|_{s=s_i}$$

3.3.2 Rationale Funktionen mit mehrfachen Polen

$$R(s) = \frac{Z(s)}{(s-a)^m} \quad a \in \mathbb{C}$$

Es gibt komplexe Zahlen a_1, \dots, a_m , so dass

$$R(s) = \frac{a_1}{s-a} + \frac{a_2}{(s-a)^2} + \dots + \frac{a_m}{(s-a)^m}$$

Bestimmung der komplexen Zahlen a_i :

$$a_{m-i} = \frac{1}{i!} \left[\frac{d^i}{ds^i} R(s)(s-a)^a \right]_{s=a} \quad i = 0, \dots, m-1$$

3.4 Lösen von Differentialgleichungen

1. Differentialgleichung in Bildbereich überführen \rightarrow algebraische Gleichung

2. algebraische Gleichung im Bildraum nach der unbekannten Funktion auflösen
3. Bildfunktion des Eingangssignals bestimmen und in die algebraische Gleichung einsetzen
4. Lösung aus dem Bildraum in den Zeitraum zurück transformieren

3.5 Übertragungsgleichung LZI-Systemen

Der Zusammenhang zwischen Eingangssignal $u(t)$ und Ausgangssignal $v(t)$ ist durch eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten beschrieben

$$a_n \cdot v^{(n)} + a_{n-1} \cdot v^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot \dot{v} + a_0 \cdot v = b_m \cdot u^{(n)} + b_{n-1} \cdot u^{(n-1)} + \dots + b_0 \cdot u$$

Da nur kausale Signale betrachtet werden, entfallen die Anfangsbedingungen:

$$a_n s^n V + a_{n-1} s^{n-1} V + \dots + a_1 s V + a_0 V = b_m s^m U + b_{m-1} s^{m-1} U + \dots + b_0 U$$

Nach $V(s)$ aufgelöst ergibt dies:

$$V(s) = \underbrace{\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}}_{G(s)} \cdot U(s)$$

Die rationale Funktion $G(s)$ wird Übertragungsfunktion des Systems genannt. Daraus ergibt sich die Übertragungsgleichung:

$$V(s) = G(s) \cdot U(s)$$

3.6 Faltung

Die Faltung ist definiert durch:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

Die Faltung in den Bildbereich transformiert:

$$(f * g)(t) \circ \longrightarrow F(s) \cdot G(s)$$

Rechenregeln

1. Dirac-Delta ist das neutrale Element bzgl. der Faltung: $\delta(t - t_0) * g(t) = g(t - t_0)$
2. Kommutativität: $f * g = g * f$
3. Assoziativität: $f * (g * h) = (f * g) * h$
4. Distributivität: $f * (g + h) = f * g + f * h$

3.6.1 Gewichtsfunktion

Aus dem Faltungssatz ergibt sich:

$$v(t) = g(t) * u(t) \quad , g(t) \circ \longrightarrow G(s)$$

$g(t)$ wird Gewichtsfunktion genannt.

3.6.2 Impulsantwort

Die Impulsantwort ist definiert als die Antwort auf einen Einheitsimpuls $u(t) = \delta(t)$ zur Zeit $t = 0$.

$$v(t) = g(t) * u(t) = g(t) * \delta(t) = g(t)$$

Die Impulsantwort ist die Gewichtsfunktion.

3.6.3 Sprungantwort

Als Sprungantwort $h(t)$ bezeichnet man die Antwort des Systems auf einen Einheitssprung $\sigma(t)$:

$$h(t) = g(t) * \sigma(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ G(s) \cdot \frac{1}{s} \right\} = \int_{0-}^t g(\tau) d\tau$$

3.6.4 Anfangswertsatz

In gewissen Situationen ist das Verhalten des Systems kurz nach dem Einschalten interessant:

$$v(0^+) = \lim_{t \searrow 0} v(t)$$

Dies kann direkt im Bildraum berechnet werden. Ist $v(t)$ ein in $t = 0$ sprungstetiges Signal, so existiert der Anfangswert und es gilt:

$$v(0^+) = \lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow +\infty} s \cdot V(s)$$

3.6.5 Endwertsatz

Ist der Endwert $v(\infty)$ eines Signals $v(t)$ gefragt:

$$v(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$$

, gilt der folgende Satz:

Ist $v(t)$ ein Signal, für welches der Endwert $v(\infty)$ existiert, so gilt:

$$v(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot V(s)$$

Der Endwert existiert, wenn alle Pole der Bildfunktion $V(s)$ links der imaginären Achse ($\operatorname{Re}(s) < 0$) sind. Ausnahme ist eine einfache Polstelle bei $s = 0$.

3.6.6 Stabilität

Ein System ist symptotisch stabil, falls seine Impulsantwort $g(t)$ mit $t \rightarrow \infty$ gegen Null abklingt:

$$g(\infty) = 0$$

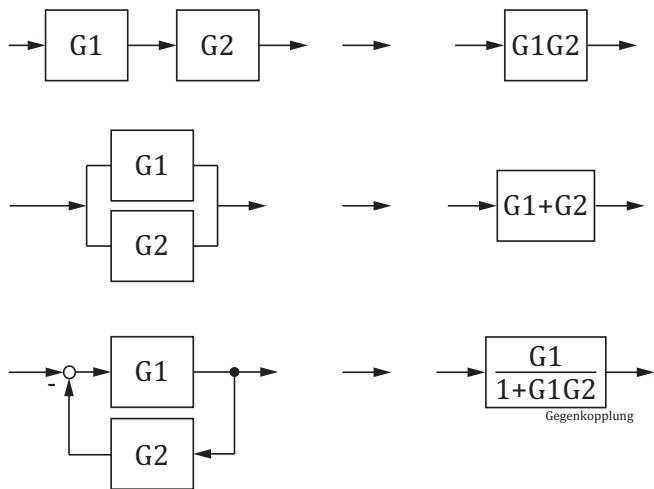
Diese Eigenschaft ist äquivalent dazu, dass alle Polstellen der Übertragungsfunktion $G(s)$ links der imaginären Achse liegen.

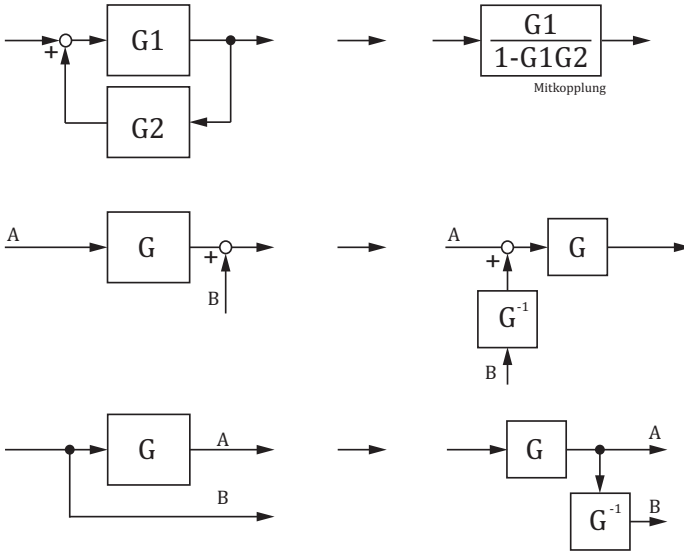
Kapitel 4

Fourier-Transformation

Kapitel 5

Teilsysteme





5.1 Flühlersche Regel

Minuszeichen bei Summenpunkten können verschoben werden. Dadurch werden die Vorzeichen von nachfolgenden Summenpunkten invertiert. Berechnungsprinzip:

$$G(s) = \frac{P_{V1} + P_{V2} + \dots}{1 + P_{R1} + P_{R2} \dots}$$

P_V : Vorwärts laufende Pfade

P_R : Rückwärts laufende Pfade