Formelsammlung Optik

Mario Felder
Michi Fallegger

3. Juni 2014

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Strahlen Optik

1.1 Einleitung

- Einfallswinkel = Ausfallswinkel
- Licht breitet sich von einem Punkt A zu einem Punkt B so aus, dass die Laufzeit minimal wird.

1.2 Konstanten

Lichtgeschwindigkeit
$c = 299'792'458$ m/s

1.3 Brechung und Brechungsindex n

Brechungsindex:

$$n = \frac{c}{c_{mat}}$$

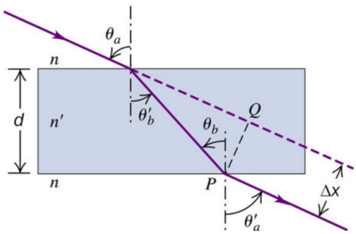
Brechungsgesetz von Snellius:

$$n_A \cdot \sin\theta_A = n_B \cdot \sin\theta_B$$

Der **Winkel** bezüglich der Grenzfläche-Lots.

1.4 Strahlenverschiebung

$$\Delta x = d \cdot \frac{\sin(\theta_a - \theta_b^{‘})}{\cos\theta_b^{‘}}$$



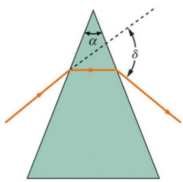
1.5 Totalreflexion

Totalreflexion tritt auf, wenn der Grenzwinkel $\theta_k rit$ überschritten wird.

$$\sin\theta_{krit} = \frac{n_B}{n_A}$$

Totalreflexion Prisma:

$$\sin\frac{\alpha+\delta}{2} = n \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$



1.6 Linsen

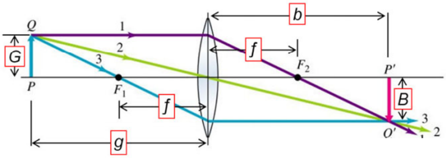
Sammellinsen, Konvexlinsen: Dieser Linsentyp hat eine positive d.h. reelle Brennweite
Zerstreulinsen, Konkavlinsen: Dieser Linsentyp hat eine negative, d.h. virtuelle Brennweite f

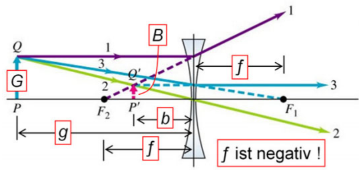
1.6.1 Strahlkonstruktion bei dünnen Linsen

Linsengleichung:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{f \cdot g}{g - f}$$

$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g}$$

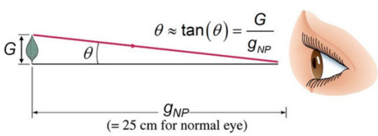


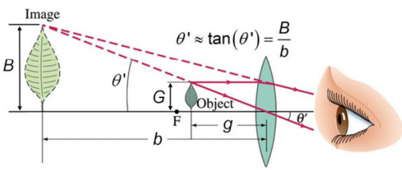


1.6.2 Vergrösserung

Vergrösserung:

$$M = \frac{\theta^{`}}{\theta} = \frac{g_{NP}}{f} \approx \frac{25cm}{f}$$

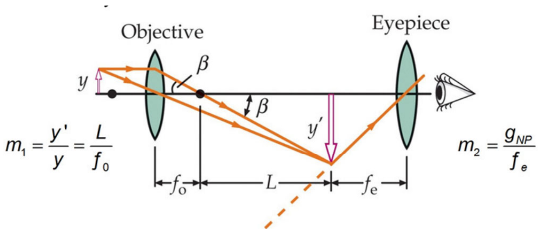




1.6.3 Optische Instrumente: Mikroskop

Vergrösserung eines Mikroskops:

$$M = m_1 \cdot m_2 = \frac{L \cdot g_{NP}}{f_0 \cdot f_e}$$



Kapitel 2

Wellen Optik

2.1 Konstanten

$$\boxed{\begin{array}{l} \varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} As/Vm \\ \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} Vs/Am \\ n_{Wasser} = 1.3 \\ n_{Glas} = 1.5 \end{array}}$$

2.2 Grundformeln

Wellengeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{F_S}{\mu}}$$

μ: Längenmasse

Harmonische Welle:

$$\lambda \cdot f = v$$

Wellenzahl:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$$

2.3 EM Welle in einem transparenten Material

Der Brechungsindex n beschreibt wie sich die Welle in einm transparenten Material fortbewegt.

$$c_0 \Rightarrow c = \frac{c_0}{n} \qquad \lambda_0 \Rightarrow \lambda = \frac{\lambda_0}{n} \qquad f \Rightarrow konstant$$

2.4 Dopplereffekt (Optik)

Da eine EM Welle kein Medium braucht für die Fortbewegung, ist beim EM Dopplereffekt nur die relative Geschwindigkeit v zwischen Sender und Empfänger relevant.

$$f^{‘} = f \cdot \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

v ist positiv bei Entfernung
v ist negativ bei Annäherung

2.5 Reale Welle und komplexe Darstellung

Die komplexe Darstellung des E-Feld wird gewählt, weil die Berechnungen oft einfacher sind, insbesondere bei der Superposition (Additon) von Feldern und der Berechnung der Leistung.

$$E(x,t) = E_0 \cdot e^{i(kx-\omega t+\phi_0)}$$

2.6 Vergleich des E-Felds an zwei Punkten

Positionsvergleich:

$$E(x+\Delta x,t) = E(x,t) \cdot e^{ik\Delta x}$$

Zeitvergleich:

$$E(x,t+\Delta t) = E(x,t) \cdot e^{-ik\Delta t}$$

Phasenverschiebung:

$$E(x_1,t_1) = E_0 \cdot e^{i(kx_1-\omega t_1+\phi_0)} = E_0 \cdot e^{i\phi_1}$$

$$E(x_2,t_2) = E_0 \cdot e^{i(kx_2-\omega t_2+\phi_0)} = E(x_1,t_1) \cdot e^{i\Delta\phi_1}$$

2.7 Intensität einer EM Welle

$$I = \frac{Leistung}{Fläche} = \frac{P}{A} = \frac{1}{2} \cdot nc_0\varepsilon_e|E_0|^2$$

$$B_0 \cdot e^{i(kx-\omega t)} \cdot (-i\omega) = E_0 \cdot e^{i(kx-\omega t)} \cdot (ik)$$

$$B_0 = E\frac{k}{\omega} = E\frac{1}{c}$$

c_0: Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
n: Brechungsindex
ε_0: Dielektrizitätskonstante

2.8 Interferenz

- Konstruktive Interferenz: $\Delta\varphi = 0$
- Destruktive Interferenz: $\Delta\varphi = \pi$

Für Interferenzen zu addieren werden sie zuerst in das E-Feld zurück gerechnet.

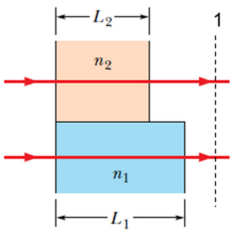
Zeigerdiagramm:

$$E_{tot}(x,t) = E_{1,0} \cdot e^{i\phi_1} + E_{2,0} \cdot e^{i\phi_2} = (E_{1,0} + E_{2,0} \cdot e^{i\Delta\phi}) \cdot e^{i(kx-\omega t)}$$

$$I_{tot} = \frac{1}{2} n c_0 \varepsilon_0 |E_{tot}|^2 = \frac{1}{2} n c_0 \varepsilon_0 |E_{1,0} + E_{2,0} \cdot e^{i\Delta\phi}|^2$$

Phasenverschiebung:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta L k_0 + k_2 L_2 - k_1 L_1$$



$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$
$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_1$

2.9 Reflexion und Transmission

Energieerhaltung:

$$I_0 = I_r + I_t \qquad \Rightarrow \qquad n_1 E_0^2 = n_1 E_r^2 + n_2 E_t^2$$

Definition:

$$E_r = r \cdot E_0 \qquad \Rightarrow \qquad E_t = t \cdot E_0 \qquad \Rightarrow \qquad 1 + r = t$$

Reflexions- und Transmissionskoeffizienten:

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

$$I_r = |r|^2 \cdot I_0 \qquad \Rightarrow \qquad I_t = \frac{n_2}{n_1}|t|^2 \cdot I_0$$

- $n_1 < n_2$: Reflektierte Welle erfährt einen Phasensprung von π, bzw. $\lambda/2$
- $n_1 > n_2$: Reflektierte Welle erfährt keinen Phasensprung

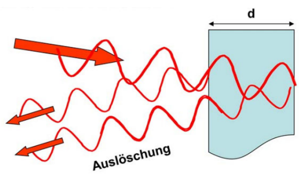
2.10 Dünnfilm-Interferenz

Bedingung reduzierte Reflexion:

$$d = m\frac{\lambda_0}{2n} \qquad m = 1, 2, ..$$

Bedingung verstärkte Reflexion:

$$d = \frac{\lambda_0}{4n} + m\frac{\lambda_0}{2n} \qquad m = 0, 1, ..$$



Die Reflexion beim Übergang zwischen zwei Medien mit Brechungsindizes n_1 und n_2 kann mit einer zusätzlichen Antireflexions-Dünnschicht reduziert werden.

$n_1 < n_{AR} < n_2$

Schichtdicke $\frac{\lambda}{4n_{AR}}$

Idealer Brechungsindex:

$$n_{AR}^2 = n_1 \cdot n_2$$

2.11 Fabry-Perot Interferometer

Das Fabry-Perot Interferometer (Etalon) besteht aus zwei parallelen, reflektierenden Oberflächen in einem festen Abstand d mit einer Reflexion R<100.

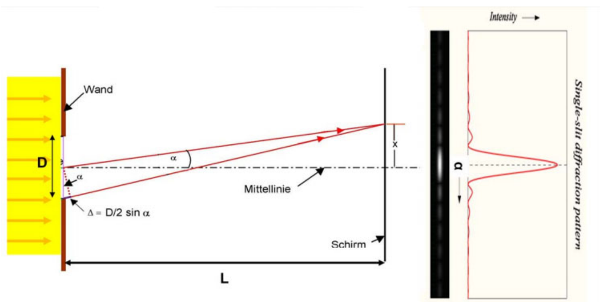
under construction

2.12 Beugung am Spalt

$$\sin\alpha_{min} = m \cdot \frac{\lambda}{D} \qquad \sin\alpha_{max} = (m + \frac{1}{2}) \cdot \frac{\lambda}{D}$$

Für kleine Beugungswinkel gilt:

$$x_{min} = m \cdot \frac{\lambda}{D} L \qquad x_{max} = (m + \frac{1}{2}) \cdot \frac{\lambda}{D} L \qquad m = 1, 2, 3...$$



Auflösungsvermögen Mikroskopie

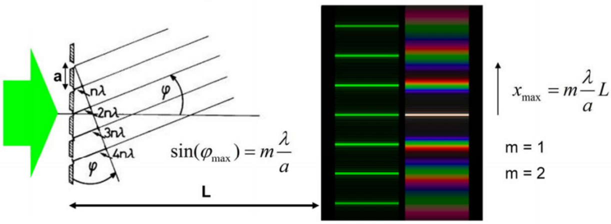
$$\Delta l = 1.22 \cdot \frac{f \cdot \lambda}{D}$$

f: Brennweite der Linse
D: Durchmesser der Linse

2.13 Beugung am Gitter

Wenn Licht auf eine periodische Anordnung von Streukörpern trifft, können die Elementarwellen, die von den Streukörpern ausgehen in bestimmte Richtungen konstruktiv interferieren und ein Beugungsmuster generieren.

$$\sin \varphi_{max} = m\frac{\lambda}{a} \qquad x_{max} = m\frac{\lambda}{a}L \qquad m = 1, 2, ...$$



2.14 Polarisation

$$E_t = E_0 \cdot \cos \Delta\varphi \qquad I_t = I_0 \cdot \cos^2(\Delta\varphi)$$

Polarisationsgrad:

$$PG = \frac{P_{max} - P_{min}}{P_{max} + P_{min}}$$

2.15 Transmission und Reflexion (Fresnell)

under construction

2.16 Absorption

Viele Materialien absorbieren einen Teil des Lichtes. Die Absorption hängt von der Wellenlänge ab und ist oft charakteristisch für ein Material.

$$I(d) = I_0 \cdot 10^{-\alpha d} \qquad I(d) = I_0 \cdot e^{-\alpha^* d} \qquad I(d) = I_0 \cdot 10^{\frac{-\alpha` d}{10}}$$

$$Chemiker \qquad Physiker \qquad OptischerIngenieur$$

$\alpha`$ in dB/m

2.17 Intensität Gauss Strahl

Die Intensität quer zur Strahlrichtung hat die Form einer Gauss Kurve. Im Abstand r=W von der z-Achse fällt die Intensität auf 13.5% (e^-2) ab.

$$I(r,z) = \underbrace{I_0 \left(\frac{W_0}{W(z)}\right)^2}_{I(0,z)} \cdot \underbrace{e^{-\frac{2r^2}{W(z)^2}}}_{Querschnittsprofil}$$

Strahlradius W(z):

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}$$

Mit $\pm z_0$ wird der Rayleigh Bereich (Tiefenschärfe) bezeichnet.

$$2z_0 = \frac{2\pi W_0^2}{\lambda}$$

Öffnungswinkel:

$$\theta_0 \approx \tan\theta_0 = \frac{\lambda}{\pi W_0} \qquad \text{in rad}$$

Gauss Strahlen:

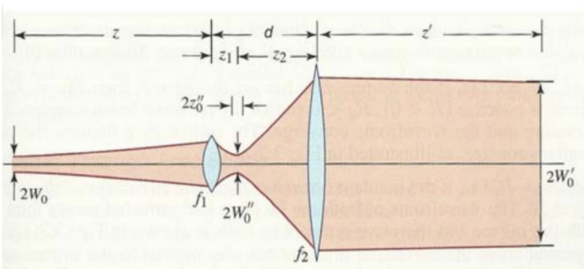
$$W_{FWHM}(z) = 1.18 \cdot W(z) \qquad \theta_{FWHM} = 1.18 \cdot \theta_0$$

2.18 Kollimierter Gauss Strahl

Ein Strahl heisst kolimiert/gebündelt, wenn die Divergenz sehr klein ist. Man bezeichnet einen Strahl auch als kollimiert, wenn der Rayleigh Bereich des Strahls ungefähr gleich gross ist wie die relevante Propagationsdistanz der Anwendung.

$$W_0^{‘} = \frac{\lambda \cdot f}{\pi \cdot W_0} \geq \frac{2\lambda \cdot f}{\pi \cdot D} \equiv \frac{2\lambda}{\pi} F_N$$

$$\frac{W_0}{W_0^{‘}} = \frac{f_1}{f_2^{‘}}$$



2.19 Wellenleiter

2.19.1 Metall-Wellenleiter

Als einfachstes System eines Wellenleiters kann man zwei parallele metallene Oberflächen (Spiegel) nehmen.

Bedingung: Wellenfronten von Reflexionen in die gleiche Richtung interferieren konstruktiv.

$$\sin\theta_m = \frac{m \cdot \lambda}{2d} \qquad m = 1, 2, 3, ...$$

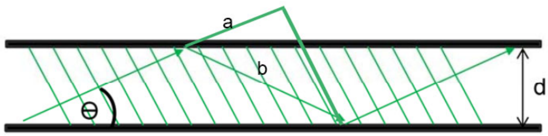
Da der sinus maximal 1 sein kann, gibt es eine maximale Anzahl Moden:

$$M \leq \frac{2d}{\lambda}$$

$$\lambda_c = 2d$$

wenn $\lambda > \lambda_c$ kann sich das Licht in dieser Art Wellenleiter nicht fortbewegen.

$$v_m = c \cdot \cos\theta_m = c\sqrt{1 - m^2 \cdot \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}}$$



2.19.2 Dielektrische planare Wellenleiter

Ein dielektrischer Wellenleiter besteht aus einem Kern und einem Mantel mit unterschiedlichen Brechungsindizes. Wenn $n_1 > n_2$ gibt es innerhalb eines Winkelbereichs Totalrefelxion und die Struktur funktioniert als Wellenleiter.

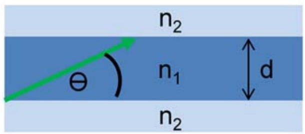
$$\cos \bar{\theta}_c = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\tan(\pi \frac{d}{\lambda} \cdot \sin \theta_m - m \frac{\pi}{2}) = \sqrt{\frac{\sin^2 \bar{\theta}_c}{\sin^2 \theta_m} - 1} \qquad m = 1, 2, 3, ..$$

Wie bei den metallischen gibt es zu jedem θ_m eine Mode, die propagieren. Die Anzahl der Moden ist durch θ_c beschränkt und beträgt:

$$M \doteq \frac{2d \cdot \sin \bar{\theta}_c}{\lambda} \doteq \frac{2d}{\lambda_0} \cdot NA \qquad \doteq \rightarrow \text{nächst grössere ganze Zahl}$$

$$NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = n_1 \cdot \sin \bar{\theta}_c$$



NA : Numerische Aperatur

2.19.3 Modenprofil

Die Eindrinktiefe nimmt mit der Modenzahl zu.

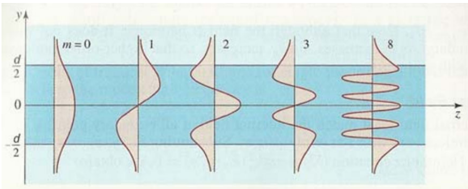
$$\delta_m = \frac{\lambda_0}{n_2 \cdot 2\pi} \left(\frac{\cos^2 \theta_m}{\cos^2 \bar{\theta}_c} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Im Unterschied zum metallenen Wellenleiter gibt es im dielektrischen immer eine Mode, selbst für sehr kleine d. Zu jeder Dicke gibt es jedoch einen cut-off Frequenz, unterhalb derer der Wellenleiter nur eine Mode zulässt.

$$f_c = \frac{c}{NA \cdot 2d}$$

Single mode wenn:

$$f < f_c \qquad \lambda > \lambda_c = 2d \cdot NA$$



2.20 Optische Fasern

2.20.1 Singlemodefaser

Optische Fasern bestehen aus einem Kern und einem Mantel mit unterschiedlichen Brechungsindizes. Es gibt Moden, deren Anzahl durch den Durchmesser des Kerns gegeben ist.

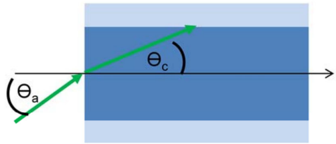
Um einen geringen Verlust zu erlangen, muss der Strahldurchmesser dem Modeprofil entsprechen und die Strahldivergenz muss kleiner sein als:

$$\sin\theta_a = NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

Single Mode kann nur der Grundmode (m=0) propagieren für die Frequenzen unterhalb der cut-off Frequenz.

$$f_c = \frac{c}{NA \cdot 2.61a}$$

a : Kernradius



2.20.2 Multimodefaser

Für Fasern mit grossem Kernradius a gilt:

$$M \approx \left(\frac{4a}{\lambda_0} \cdot NA\right)^2$$

2.21 Schwarzkörper-/Thermische Strahlung

Lord Rayleigh's Berechnung beschreiben das Emissionsverhalten eines Schwarzkörpers für grosse Wellenlänge.

$$K(\lambda, T) = 2c \cdot k_B \cdot \frac{T}{\lambda^4}$$

Stefan-Boltzmann's Formel beschreibt für das gesamte Emissionsvermögen des schwarzen Körper.

$$R(T) = \sigma \cdot T^4 \qquad [R] = \frac{W}{m^2}$$

$\sigma : 5.67040 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$

Die effektiv abgestrahlte Leistung eines realen Körpers mit Temperatur T_1 in einer Umgebung mit Temperatur T_2.

$$\Delta P = \varepsilon \sigma A \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$

ε : Beschreibt die prozentuale Fläche unter der Kurve.

2.21.1 Wiensche Verschiebungsgesetz

Verschiebungsgesetz von Wien für das Emissionsmaximum eines schwarzen Körpers als Funktion der Temperatur.

$$\lambda_{max} \cdot T = 2.898 \cdot 10^{-3} m \cdot K$$

2.22 Zeitliche Kohärenz

Tie Kohärenzzeit T_c ist gekoppelt mit der Breite des Spektrums Δf.

$$\Delta f \approx \frac{1}{\pi \cdot \tau_c}$$

Kapitel 3

Quanten Optik

3.1 Konstanten

$$\boxed{\begin{aligned} &h = 6.62606872 \cdot 10^{-34} J \cdot s \\ &m_e = 9.1094 \cdot 10^{-31} kg \\ &k_B = 1.380658 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \\ &eV = 1.602176565 \cdot 10^{-19} J \\ &\hbar = \frac{h}{2\pi} \end{aligned}}$$

3.2 Grundformeln

Umrechnung:

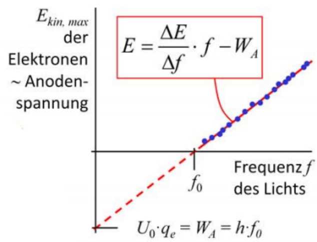
$$E_J = E_{eV} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}$$

3.3 Photon- das Lichtquantum

Die maximale kinetische Energie nimmt linear mit der Frequenz des Lichts zu. Es wird kein Photostrom beobachtet für $f < f_0$.

$$E = h \cdot f = \hbar \cdot \omega = \frac{h \cdot c}{\lambda}$$

h: Planck'sche Konstante $= 6.62606872 \cdot 10^{-34} J \cdot s$



3.4 Impuls des Photons - Compton Streuung

Obwohl das Photon keine Ruhemasse besitzt, hat es trotzdem einen Impuls. Die Relativitätstheorie liefert für das Photon mit Wellenlänge λ den Impuls p:

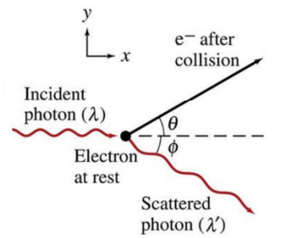
$$p = \frac{E}{c} = \frac{h \cdot f}{c} = \frac{h}{\lambda} = m \cdot v \qquad \text{pro Photon}$$

Energie- und Impulserhaltung liefern:

$$\Delta\lambda = \lambda^{`} - \lambda = \frac{h}{m_e \cdot c} \cdot (1 - \cos\phi) = \lambda_c \cdot (1 - \cos\phi))$$

Anzahl Photonen pro Sekunde:

$$n = \frac{P}{E}$$



3.5 Bremsstrahlung

In einer Röntgenröhre werden Elektronen von einer geheizten Kathode auf die Anode beschleunigt. Maximale Frequenz (kleinste Wellenlänge) kann ein Bremstrahlungs-Photon erreichen, wenn es die ganze kinetische Energie des Elektrons schluckt.

$$q_e \cdot V_{AC} = h \cdot f_{max} = \frac{h \cdot c}{\lambda_{max}} = \frac{\Delta E}{h \cdot c}$$

3.6 Energie

In einem elektrischen Spannungsfeld, entspricht die Differenzspannung der Energie auf ein Elektron.
zB. 100V → 1 Elektron → 100eV

$$E = \frac{1}{2} \cdot m_0 v^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m_E} = \frac{p^2}{2m}$$

3.7 Energieniveaus von Wasserstoff

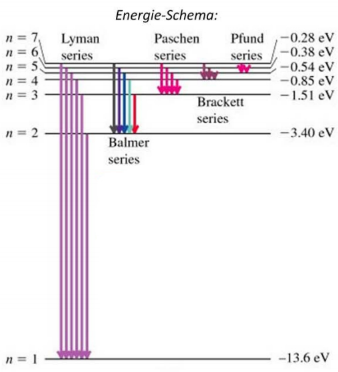
Balmer-Formel:

$$\frac{1}{\lambda} = R_y \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$R_y = 1.097 \cdot 10^7 m^{-1}$
$n = 3, 4, 5, ...$

$$E_n = -\frac{h \cdot c \cdot R_y}{n^2}$$

$R_y = 1.097 \cdot 10^7 m^{-1}$
$n = 1, 2, 3, ...$



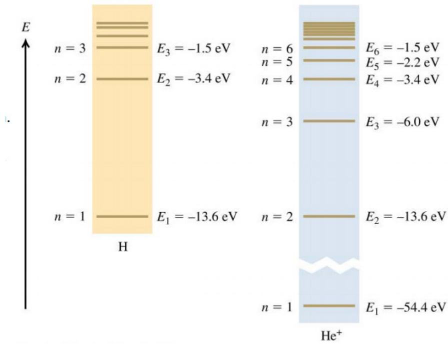
3.7.1 Bohr's Herleitung der Balmerformel

Wasserstoff:

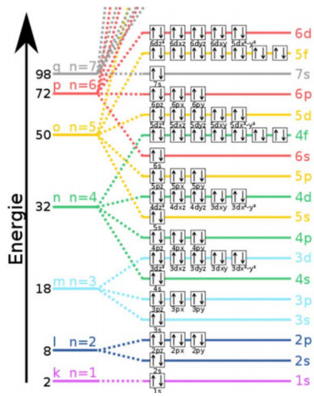
$$E_n = -\frac{1}{\varepsilon_0^2} \cdot \frac{m_e \cdot q_e^4}{8n^2 \cdot h^2}$$

Helium+:

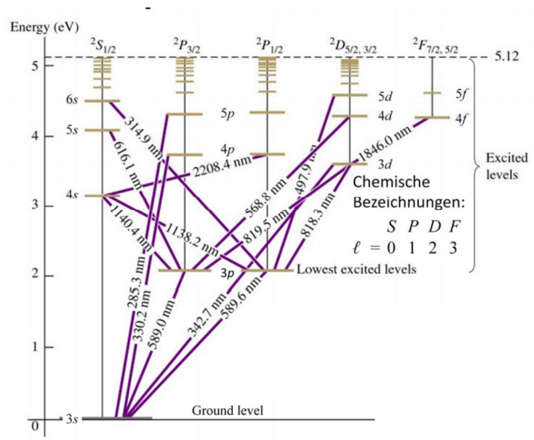
$$E_n = -\frac{1}{\varepsilon_0^2} \cdot \frac{m_e \cdot q_e^4}{2n^2 \cdot h^2}$$



3.8 Energieschema



3.9 Spektrum des Natriumatoms



3.10 Niveaubesetzung und Besetzungsinversion

Die Maxwell-Boltzmann-Verteilung der Geschwindigkeiten in einem Gas bei der Temperatur T lautet: $f(v,T) = C_1(T) \cdot v^2 e^{-\left(\frac{m_{kül}\ cdotv^2}{2k_B \cdot T}\right)}$
oder als Funktion der Energie: $f(E;T) = C_2(T)E \cdot e\ \frac{E}{k_B \cdot T}$.
Verhältnis der beiden Besetzungswahrscheinlichkeiten:

$$\frac{F(E_f,T)}{F(E_i,T)} = \frac{E_f}{E_i} \cdot e^{-\left(\frac{E_f - E_i}{k_B \cdot T}\right)} \approx e^{-\left(\frac{E_{Gap}}{k_B \cdot T}\right)}$$

$$\frac{f_2}{f_1} = e^{-\left(\frac{1}{k_B \cdot T}\right)} (E_2 - E_1)$$

$f = e^{-\frac{E_1}{k_B \cdot T}}$

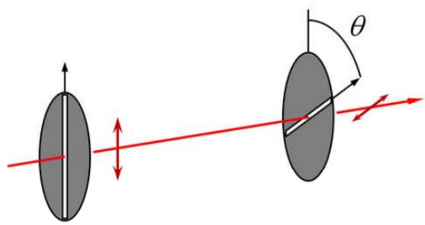
3.11 Quantenverschrkänkung = Superposition

Hg_2 Molekül:
Wir sind gewohnt Teilsysteme als völlig unabhängig voneinander zu betrachten. Verschränkung bedeutet nun, dass die beiden Atome durch eine gemeinsame Wellenfunktion beschrieben werden. Es handelt sich bei der instanten Spinausrichtung des zweiten Atoms nicht um eine Nachrichtenübertragung im klassischen Sinn. Bei der Messung des ersten Atoms, wird die Ausrichtung des zweiten Atoms festgelegt.

3.12 Polarisation und Photonen

Die Durchgangswahrscheinlichkeit p der Photonen ist ene Funktion des Winkels θ (Gesetz von Malus):

$$p(\theta) = \cos^2(\theta)$$



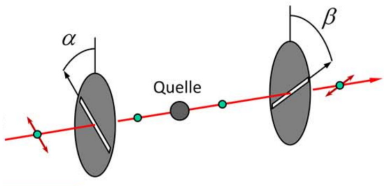
Die Wahrscheinlichkeit, dass das $+z$ polarisierte Teilchen den zweiten Polarisator als $+s$ polarisiertes Teilchen passiert, beträgt:

$$p(\theta) = \cos^2(\frac{\theta}{2})$$

3.13 Verschränkung mit Photonen

Eine Quelle produziere verschränkte Photonenpaare. Die verschränkten Photonen fliegen in entgegengesetzte Richtungen und passieren Polfilter. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Photonen die Filter passieren, ist:

$$p(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \cdot \cos^2(\alpha - \beta)$$



3.14 Schrödingergleichung - Wellenfunktion

Schrödinger Gleichung:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = U(x) \cdot \psi(x,t) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}$$

U ist eine (klassische) potentielle Energiefunktion, beispielweise die Coulombenergie eines Elektrons im Wasserstoffatom.

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$
$h = 6.62606872 \cdot 10^{-34}$

Die Coulomb-Energie des Elektron um den Wasserstoffkern (=Proton):

$$U_{H-Atom} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_e^2}{r}$$

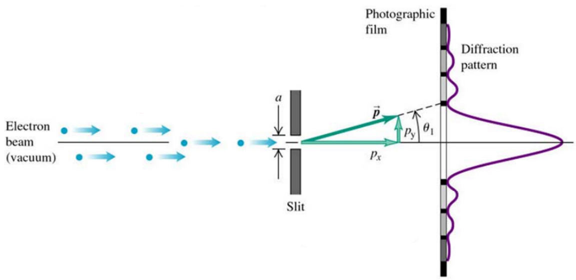
Die potentielle Energie der Hooke'sche Feder (=harmonische Oszillator):

$$U_{harm.Oszillator} = \frac{1}{2} \cdot kx^2$$

3.15 Interferenz → Unschärferelation

Nach klassicher Interferenz gilt folgende Beziehung zwischen Winkelablenkung θ_1, Wellenlänge λ und Spaltöffnung a:

$$\sin\theta_1 \approx \theta = \frac{\lambda}{a}$$



Je kleiner die Wellenlänge λ, desto schärfer ist das Hauptmaximum. Oder je grösser der Spalt a, desto kleiner die Winkelbeugung.

Die y-Beschränkung des Elektrons innerhalb a erzeugt einen y-Querimpuls.

$$\underbrace{\Delta p_y = p_y}_{\text{Def. von } \Delta p_y} = \underbrace{\tan\theta_1 \cdot p_x \approx \theta_1 \cdot p_x = \frac{\lambda}{a} \cdot p_x}_{\text{Beugung am Spalt}} = \underbrace{\frac{\lambda}{a} \cdot \frac{h}{\lambda}}_{\text{De Broglie}} \equiv \frac{\lambda}{\Delta y} \cdot \frac{h}{\lambda} \rightarrow \Delta p_y \cdot \Delta y = h$$

Heisenberg'sche Unschärferelation:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{\pi} = \frac{\hbar}{2}$$

ebenso:

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}$$

3.16 Tunneleffekt

Ein klassisches Teilchen mit Energie $E < U_0$ kommt nicht über diese Potentialbarriere. Es wird an der Wand reflektiert. Die Schrödingergleichung erlaubt aber Lösungen $\psi(x,t)$ wie in der Figur. Ein Teilchen, das ursprünglich links der Hürde ist, hat eine Wahrscheinlichkeit T, durch das Hindernis zu tunneln.

$$T = G \cdot e^{-2\kappa \cdot L} \ll 1$$

$$G = 16 \cdot \frac{E}{U_0} \cdot \left(1 - \frac{E}{U_0}\right)$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{2m \cdot (U_0 - E)}}{\hbar}$$

Aufenthaltszeit:

$$\Delta t \cdot \Delta E < \hbar$$