DS 2
logique et arithmétique

R01.06
4 décembre 2021
1h30
sur 30 points

Partie 1 (15 points)

Exercice 1 (3 points)

Exprimer les propositions suivantes en utilisant les connecteurs logiques et les quantificateurs :

a. L'équation $x^2 + x - 1 = 0$ admet au moins une solution réelle supérieure à $\dfrac{3}{2}$.

b. Il existe un unique nombre entier naturel compris entre $\sqrt{5}$ et $\sqrt{10}$.

c. Pour qu'un nombre réel x soit supérieur à 1, il suffit que son cube soit supérieur à 2.

Exercice 2 (3 points)

Soit P la proposition : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R} \quad | \quad x^2 - ax + a^2 = 0$

a. Déterminer $\overline{P}$ la négation de la proposition P.

b. En déduire que la proposition P est fausse.

Exercice 3 (2 points)

Montrer en utilisant un raisonnement par contraposée que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (xy + x + y < 0) \implies (x > -2 \text{ ou } y > -2)$$

Exercice 4 (2 points)

Démontrer que $n(2n + 1)(7n + 1)$ est divisible par 2 par disjonction de cas.

Exercice 5 (5 points)

Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Partie 2 (15 points)

Exercice 6 (3 points)

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $a = 5n + 1$ et $b = 2n - 1$. On note $\Delta = PGCD(a; b)$.

a. Démontrer que les valeurs possibles de Δ sont 1 ou 7.

b. Déterminer les entiers n tels que $a \equiv 0[7]$ et $b \equiv 0[7]$.

c. En déduire, suivant les valeurs de n, la valeur de Δ.

Exercice 7 (7 points)

Question de cours : Enoncer le théorème de Bézout.

On considère l'équation $(E) : 87x + 31y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. En utilisant l'algorithme d'Euclide, vérifier que 87 et 31 sont premiers entre eux.

b. En déduire un couple d'entiers relatifs $(u; v)$ tel que $87u + 31v = 1$, puis déduire une solution particulière de l'équation (E).

c. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

d. Trouver les points de la droite Δ d'équation $87x + 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise strictement entre 0 et 100.

Exercice 8 (5 points)

a) Montrer que : $3^3 \equiv -1[7]$.

b) En déduire que $1515^{2004} - 1$ est divisible par 7 et que le reste de 3^{2018} par 7 est 2.