DS1

October 4, 2023

DS 1Arithmétique et logique

R1.0618 octobre 20231h30 heures

0.0.1 QCM (3 points)

Indiquez sur votre copie le numéro de la question et la réponse choisie.

Q1 : Le reste dans la division euclidienne de 2^{2023} par 2 est :

a. 0

b. 1

c. 2

d. sans calculatrice, je ne peux pas savoir.

Q2 : Pour tout k entier relatif, le nombre 2k+5 est :

a. un multiple de 5

b. impair

c. divisible par 2

d. divisible par 5

Q3 : La phrase “$x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x - 3 = 0$” est :

a. vraie

b. fausse

c. un prédicat

d. une proposition

Q4 : $\frac{2}{3}$ appartient à l'ensemble :

a. $\mathbb{Q}$

b. $\mathbb{Z}$

c. $\mathbb{N}$

d. $\mathbb{D}$

Q5 : Lequel de ces nombres est un multiple de 11 :

a. 524 368

b. 524 369

c. 524 370

d. 524 371

Q6 : Soit x un nombre réel, et $P(x) : x^2 = 4, Q(x) : x = 2$.

P(x) est suffisant pour Q(x)
P(x) est nécessaire pour Q(x)
P(x) est nécessaire et suffisant pour Q(x)
P(x) n'est ni nécessaire ni suffisant pour Q(x)

0.1 Logique (15 points)

0.1.1 EXERCICE 1 : Raisonnement (5 points)

Dans le texte suivant `ou bien` signifie ou exclusif.

Le but de cet exercice est de valider (ou non) le raisonnement suivant :

S'il y a de l'oxygène alors il y a combustion.

Il y a de l'oxygène ou bien il y a de l'azote.

Il n'y a pas d'azote.

Donc il y a combustion.

On prendra comme proposition élémentaires :

o : il y a de l'oxygène

c : il y a combustion

a : il y a de l'azote

1. Écrire ce raisonnement à l'aide des propositions élémentaires o,c,a et des connecteurs logiques. On ne cherchera pas à le simplifier pour le moment.
2. Vérifier en utilisant une table de vérité que :

$$(o \oplus a) \wedge \overline{a} \iff (o \wedge \overline{a})$$

3. Simplifier maintenant ce raisonnement. Est-il valide ?

0.1.2 EXERCICE 2 : Expression Booléenne. (3 points)

a	b	c	$f(a,b,c)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Donner puis simplifier l'expression logique de $f(a,b,c)$.

<!–### EXERCICE 3 : Le $\oplus$ (**3 points**)

- Ecrire les formules de l'associativité et la commutativité de la disjonction exclusive $\oplus$.
- Simplifier $A \oplus A$, $A \oplus 0$.
- En citant la propriété utilisée à chaque étape, démontrer que :

$$(A \oplus B) \oplus A = B.$$

0.1.3 EXERCICE 4 : Logique (3 points)

Écrire la négation, la contraposée et la réciproque de l'implication suivante :

> « Si j'ai plus de 10 de moyenne et pas de note en dessous de 8, alors je réussis mon année. »

0.1.4 EXERCICE 5 : Fonction inhibition. (3 points)

Soit la fonction inhibition de a par b,notée * et définie par:

$$a * b = a \wedge \overline{b}$$

où a et b sont des propositions et 1 est la tautologie, 0 l'antilogie.

- Exprimer $\overline{a}$ uniquement à l'aide de 1 et de l'opérateur $*$.
- Exprimer $a \wedge b$ uniquement à l'aide de 1 et de l'opérateur $*$.
- Soient a, b, c trois propositions:
  - Développer $(a * b) * c$
  - Développer $a * (b * c)$

L'opérateur $*$ est-il associatif ?

Éventuellement, donner des valeurs de a, b, c pour justifier votre réponse.

0.2 Arithmétique (15 points)

0.2.1 EXERCICE 6 : Division euclidienne (3 points)

On considère l'égalité suivante :

$$23 \times 51 + 35 = 1208$$

Sans effectuer de division, répondre aux questions suivantes :

- Quels sont le quotient et le reste de la division de -1208 par 51 ?
- Quels sont le quotient et le reste de la division de 1208 par 23 ?

0.2.2 EXERCICE 7 : Tableau de congruences (3 points)

- Recopier et compléter le tableau de congruence suivant :

$x \equiv [6]$	0	1	2	3	4	5
$x^2 \equiv [6]$						
$x^2 + x + 1 \equiv [6]$						

- Quel est l'ensemble des solutions pour que $x^2 + x + 1$ soit divisible par 6 ?

0.2.3 EXERCICE 9 : Divisibilité (3 points)

d et n sont des entiers naturels.

- Démontrer que si d divise $9n + 2$ et $7n - 3$, alors d divise 41. On citera la propriété utilisé.
- Quelles sont les valeurs possibles pour d.

0.2.4 EXERCICE 10 : Divisibilité (2 points)

Déterminer les entiers naturels n tel que

$$\frac{3n+2}{n+4} \in \mathbb{N}$$

0.2.5 EXERCICE 11 : Division euclidienne (2 points)

On divise un entier naturel n par 152, puis par 147. Les quotients sont égaux et les restes respectifs sont 13 et 98.

Quel est cet entier naturel n ?

0.2.6 EXERCICE 12 : Congruence et divisibilité (3 points)

Montrer que

$$4^4 \equiv 3[11]$$

puis en déduire que :

pour tout entier naturel n,

$$4^{4n+2} - 3^{n+3}$$

est divisible par 11.