| | | |
|---|---|---|
| iut de BORDEAUX | **DS 1**<br>**Arithmétique et logique**<br>**Sans calculatrice** | **R1.06**<br>**18 octobre 2023**<br>**1h30** |

## QCM (3 points)

Indiquez sur votre copie le numéro de la question et la réponse choisie.

Q1 : Le reste dans la division euclidienne de $2^{2023}$ par $2$ est :

> a. 0
> b. 1
> c. 2
> d. sans calculatrice, je ne peux pas savoir.

Q2 : Pour tout $k$ entier relatif, le nombre $2k+5$ est :

> a. un multiple de 5.
> b. impair.
> c. divisible par 2.
> d. divisible par 5.

Q3 : La phrase "$x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x - 3 = 0$" est :

> a. vraie.
> b. fausse.
> c. un prédicat.
> d. une proposition.

Q4 : $\frac{2}{3}$ appartient à l'ensemble :

> a. $\mathbb{Q}$.
> b. $\mathbb{Z}$.
> c. $\mathbb{N}$.
> d. $\mathbb{D}$.

Q5 : Lequel de ces nombres est un multiple de 11 :

> a. 524 368
> b. 524 369
> c. 524 370
> d. 524 371

Q6 : Soit $x$ un nombre réel, et $P(x) : x^2 = 4, Q(x) : x = 2$.

> a. $P(x)$ est suffisant pour $Q(x)$.
> b. $P(x)$ est nécessaire pour $Q(x)$.
> c. $P(x)$ est nécessaire et suffisant pour $Q(x)$.
> d. $P(x)$ n'est ni nécessaire ni suffisant pour $Q(x)$.

# Logique (14 points)

## EXERCICE 1 : Raisonnement (5 points)

Dans le texte suivant `ou bien` signifie ou exclusif.

Le but de cet exercice est de valider (ou non) le raisonnement suivant :

> S'il y a de l'oxygène alors il y a combustion.
> Il y a de l'oxygène ou bien il y a de l'azote.
> Il n'y a pas d'azote.
>
> Donc il y a combustion.

On prendra comme proposition élémentaires :

> $o$ : il y a de l'oxygène
> $c$ : il y a combustion
> $a$ : il y a de l'azote

1. Écrire ce raisonnement à l'aide des propositions élémentaires $o, c, a$ et des connecteurs logiques. On ne cherchera pas à le simplifier pour le moment.
2. Vérifier en utilisant une table de vérité que :

$$(o \oplus a) \wedge \overline{a} \iff (o \wedge \overline{a})$$

3. Simplifier maintenant ce raisonnement. Est-il valide ?

## EXERCICE 2 : Expression logique (3 points)

| $a$ | $b$ | $c$ | $f(a,b,c)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Donner puis simplifier l'expression logique de $f(a,b,c)$.

## EXERCICE 3 : Logique (3 points)

Écrire la négation, la contraposée et la réciproque de l'implication suivante :

> Si j'ai plus de 10 de moyenne et pas de note en dessous de 8, alors je réussis mon année.

## EXERCICE 4 : Fonction inhibition. (3 points)

Soit la fonction inhibition de $a$ par $b$,notée $*$ et définie par:

$$a * b = a \wedge \bar{b}$$

où $a$ et $b$ sont des propositions et $1$ est la tautologie, $0$ l'antilogie.

1. En utilisant $1, a, b$ et uniquement l'opérateur $*$ :
   a. Exprimer $\bar{a}$.
   b. Exprimer $a \wedge b$.
2. Soient $a, b, c$ trois propositions:
   a. Développer $(a * b) * c$
   b. Développer $a * (b * c)$
   c. L'opérateur $*$ est-il associatif ? Si non, donner un contre-exemple.

# Arithmétique (14 points)

## EXERCICE 5 : Division euclidienne (2 points)

On considère l'égalité suivante :

$$23 \times 51 + 35 = 1208$$

Sans effectuer de division, répondre aux questions suivantes en justifiant :

1. Quels sont le quotient et le reste de la division de $-1208$ par $51$ ?
2. Quels sont le quotient et le reste de la division de $1208$ par $23$ ?

## EXERCICE 6 : Division euclidienne (2 points)

On divise un entier naturel $n$ par $152$, puis par $147$. Les quotients sont égaux et les restes respectifs sont $13$ et $98$.

Quel est cet entier naturel $n$ ?

## EXERCICE 7 : Tableau de congruences (2 points)

1. Recopier et compléter le tableau de congruence suivant :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x \equiv \ldots [6]$ | | | | | | |
| $x^2 \equiv \ldots [6]$ | | | | | | |
| $x^2 + x + 1 \equiv \ldots [6]$ | | | | | | |

2. Quel est l'ensemble des solutions pour que $x^2 + x + 1$ soit divisible par $6$ ?

## EXERCICE 8 : Divisibilité (2 points)

$d$ et $n$ sont des entiers naturels.

1. Démontrer que si $d$ divise $4n + 5$ et $6n + 3$, alors $d$ divise $9$. On citera la propriété utilisée.

2. Quelles sont les valeurs possibles pour $d$ ?

## EXERCICE 9 : Divisibilité (2 points)

Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x; y)$ tels que $x^2 - 16y^2 = -7$.

## EXERCICE 10 : Congruence et divisibilité (2 points)

Montrer que pour tout entier naturel $n$, $-2 \times 3^{2n+2} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7.

## EXERCICE 11 : Congruence (2 points)

Calculer $79^{2023} [7]$.