,

Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.

Définition de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que

$$a = bq + r \quad 0 \leq r < b$$

(On appelle a le **dividende**, b le **diviseur**, q le **quotient** et r le **reste**.)

Exercice 1

1. Écrire la division euclidienne de 185 par 31 en posant la division.
2. Ecrire la division euclidienne de −113 par 8.
3. Sachant que 12 079 233 = 75 968times159+321 déterminer le reste de la division euclidienne de 12 079 233 par 75 968, puis par 159.
4. Soit n un entier. Quel est le reste de la division euclidienne de $12n + 7$ par 3
5. On fait la division euclidienne d'un entier n par 137 et 143.
   Les quotients sont égaux et les restes respectifs sont 131 et 5.
   Quel est cet entier n ?

Divisibilité.

Un entier b est **diviseur** d'un entier a (ou a est **multiple** de b) s'il existe un entier q tel que $a = bq$

D'autres formulations sont possibles pour décrire la relation $a = bq$:

- a est divisible par b
- b divise a
- b est un diviseur de a

On utilise la notation $b \mid a$ pour signifier que b divise a.

Exemple :
- $6 = 2 \times 3$ donc 2 et 3 sont des diviseurs de 6.

Les diviseurs dans $\mathbb{N}$ de 6 sont : 1, 2, 3, 6.

- $-52 = (-4) \times 13$ donc −4, 4, −13 et 13 sont des diviseurs de −52.

Les diviseurs dans $\mathbb{Z}$ de −52 sont : −52, −26, −13, −4, −2, −1, 1, 2, 4, 13, 26, 52.

Remarque :

1. 0 est multiple de tout entier a car $0 = 0 \times a$.
2. 1 divise tout entier a car $a = a \times 1$.
3. Si a est un multiple de b et si $a \neq 0$, alors : $|a| \geq |b|$.

Critères de divisibilité

- Un nombre est divisible par 2 si et seulement si son dernier chiffre est pair.
- Un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres l'est.
- Un nombre est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres l'est.
- Un nombre est divisible par 5 si et seulement si son dernier chiffre est 0 ou 5.

- Un nombre est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres l'est.
- un entier est divisible par 11 si la différence entre la somme des chiffres de rangs pairs et la somme des chiffres de rangs impairs est divisible par 11.

Exercice 2

- Faire la liste de tous les diviseurs de 30.
- Donner un multiple de 11 à 5 chiffres non trivial
- Déterminer les entiers naturels a et b tels que $a^2 - b^2 = 25$.
- Soit xyz un nombre de trois chiffres en base 10.
  Démontrer que la somme $xyz + zxy + yzx$ des trois nombres obtenus par permutation des chiffres est toujours multiple de 111.
  Exemple : 324+432+243=999 est un multiple de 111.

Exercice 3 Cours

Soient a,b et c dans $\mathbb{Z}$.

Montrez (et retenez) les quatre propriétés suivantes :

1. $(a \mid b)$ et $(b \mid c) \Longrightarrow a \mid c$.
2. $a \mid (b + c)$ et $a \mid c \Longrightarrow a \mid b$
3. pour tout $n, m \in \mathbb{Z} \quad (a \mid b) \quad et \quad (a \mid c) \Longrightarrow a \mid (nb + mc)$.
4. $(a \mid b)$ et $(b \mid a) \Longrightarrow (a = b)$ ou $(a = -b)$.

Exercice 4

Lorsqu'on divise a par b, le reste est 8 et lorsqu'on divise $2a$ par b, le reste est 5. Déterminer le diviseur b.

Exercice 5

1. On considère l' expression $B = n^2 - 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
   a. Démontrer que pour n pair, B est impair.
   b. Démontrer que pour n un entier impair strictement supérieur à 1, B est pair et divisible par 8.
2. L'exercice consiste à trouver les valeurs du naturel $n > 4$ pour lesquelles la fraction $\frac{n+17}{n-4}$ est un entier.
   a. Démontrer que $n - 4$ divise $n + 17$ équivaut à $n - 4$ divise 21.
   b. Déterminer alors toutes les valeurs de n correspondant au problème.

Exercice 6

Soit l'équation (E) : $xy - 5x - 5y - 7 = 0$.
1. Montrer que : $xy - 5x - 5y - 7 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(y - 5) = 32$.
2. Déterminer les couples d'entiers naturels $(x; y)$ qui vérifient (E).

Exercice 7

Soit m et n des entiers relatifs tels que m divise à la fois $8n + 7$ et $6n + 5$.

Montrer que $m = \pm 1$.

Exercice 8

1. Montrer que si un entier naturel d divise $12n + 7$ et $3n + 1$ alors il divise 3.
2. Montrer que $\frac{12n+7}{3n+1}$ est irréductible.

Exercice 9

Pour faire comprendre la division - d'un entier naturel par un entier naturel non nul - à l'école primaire, on procède par soustractions successives.

Si l'on veut diviser 32 par 5, on soustrait 5 à 32 autant de fois que cela est possible.

$$\begin{aligned} &32 - 5 = 27 \\ &27 - 5 = 22 \\ &22 - 5 = 17 \\ &17 - 5 = 12 \\ &12 - 5 = 7 \\ &7 - 5 = 2 \end{aligned}$$

On a ainsi enlevé 6 fois 5 et il reste 2. On peut donc écrire :

$32 = 5 \times 6 + 2$

1. Compléter la fonction en Python , « division(a,b) », renvoyant le quotient q et le reste r de la division dans $\mathbb{N}$ de a par $b \geq 0$ par soustractions successives.
2. Tester cette fonction avec : division(32,5); division(12,13) et division(1412,13).

```
def division(a:int,b:int)->tuple[int,int]:
    init=a
    q=0
    while ...:
        a=...
        q=...
    print("%s = %s * %s + %s" %(init,q,b,init-q*b))
    return q,init-q*b

division(32,5)
```

Exercice 10 Liste des diviseurs en Python

Ecrire un programme Python donnant la liste des diviseurs d'un entier naturel.

```
# liste des diviseurs d'un entier.
# L.append(i) permet d'ajouter i à la liste L.
# a%b donne le reste dans la division de a par b.

from math import sqrt,floor

def diviseur1(n:int)->list[int]:
    L=[]

    return L


print(diviseur1(100))


# En plus condensé

def diviseur2(n:int)->list[int]:
    return [i for i in range(1,n+1) if n%i==0]

print(diviseur2(100))

# Bonus : proposer une amélioration à cette fonction pour ne plus parcourir
# toutes les valeurs jusque n. (critère d'arrêt)

def diviseur_ameliore(n:int)->list[int]:
    L=[]
```

```
    return L
print(diviseur_ameliore(12331212332222))
```