

## QCM (3 points)

Indiquez sur votre copie le numéro de la question et la réponse choisie.

Q1 : Le reste dans la division euclidienne de  $2^{2023}$  par 2 est :

- a. 0
- b. 1
- c. 2
- d. sans calculatrice, je ne peux pas savoir.

Q2 : Pour tout  $k$  entier relatif, le nombre  $2k + 5$  est :

- a. un multiple de 5.
- b. impair.
- c. divisible par 2.
- d. divisible par 5.

Q3 : La phrase " $x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x - 3 = 0$ " est :

- a. vraie.
- b. fausse.
- c. un prédicat.
- d. une proposition.

Q4 :  $\frac{2}{3}$  appartient à l'ensemble :

- a.  $\mathbb{Q}$ .
- b.  $\mathbb{Z}$ .
- c.  $\mathbb{N}$ .
- d.  $\mathbb{D}$ .

Q5 : Lequel de ces nombres est un multiple de 11 :

- a. 524 368
- b. 524 369
- c. 524 370
- d. 524 371

Q6 : Soit  $x$  un nombre réel, et  $P(x) : x^2 = 4$ ,  $Q(x) : x = 2$ .

- a.  $P(x)$  est suffisant pour  $Q(x)$ .
- b.  $P(x)$  est nécessaire pour  $Q(x)$ .
- c.  $P(x)$  est nécessaire et suffisant pour  $Q(x)$ .
- d.  $P(x)$  n'est ni nécessaire ni suffisant pour  $Q(x)$ .

## Logique (14 points)

### EXERCICE 1 : Raisonnement (5 points)

Dans le texte suivant ou bien signifie ou exclusif.

Le but de cet exercice est de valider (ou non) le raisonnement suivant :

S'il y a de l'oxygène alors il y a combustion.

Il y a de l'oxygène ou bien il y a de l'azote.

Il n'y a pas d'azote.

Donc il y a combustion.

On prendra comme proposition élémentaires :

$o$  : il y a de l'oxygène

$c$  : il y a combustion

$a$  : il y a de l'azote

1. Écrire ce raisonnement à l'aide des propositions élémentaires  $o$ ,  $c$ ,  $a$  et des connecteurs logiques. On ne cherchera pas à le simplifier pour le moment.

2. Vérifier en utilisant une table de vérité que :

$$(o \oplus a) \wedge \bar{a} \iff (o \wedge \bar{a})$$

3. Simplifier maintenant ce raisonnement. Est-il valide ?

## EXERCICE 2 : Expression logique (3 points)

$a$	$b$	$c$	$f(a, b, c)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Donner puis simplifier l'expression logique de  $f(a, b, c)$ .

## EXERCICE 3 : Logique (3 points)

Écrire la négation, la contraposée et la réciproque de l'implication suivante :

Si j'ai plus de 10 de moyenne et pas de note en dessous de 8, alors je réussis mon année.

## EXERCICE 4 : Fonction inhibition. (3 points)

Soit la fonction inhibition de  $a$  par  $b$ , notée  $*$  et définie par:

$$a * b = a \wedge \bar{b}$$

où  $a$  et  $b$  sont des propositions et 1 est la tautologie, 0 l'antilogie.

- Exprimer  $\bar{a}$  uniquement à l'aide de 1 et de l'opérateur  $*$ .
- Exprimer  $a \wedge b$  uniquement à l'aide de 1 et de l'opérateur  $*$ .
- Soient  $a, b, c$  trois propositions:

- Développer  $(a * b) * c$

- Développer  $a * (b * c)$

L'opérateur  $*$  est-il associatif ?

Éventuellement, donner des valeurs de  $a, b, c$  pour justifier votre réponse.

## Arithmétique (14 points)

### EXERCICE 5 : Division euclidienne (2 points)

On considère l'égalité suivante :

$$23 \times 51 + 35 = 1208$$

Sans effectuer de division, répondre aux questions suivantes :

- Quels sont le quotient et le reste de la division de  $-1208$  par  $51$  ?
- Quels sont le quotient et le reste de la division de  $1208$  par  $23$  ?

### EXERCICE 6 : Tableau de congruences (2 points)

- Recopier et compléter le tableau de congruence suivant :

$x \equiv \dots [6]$						
$x^2 \equiv \dots [6]$						
$x^2 + x + 1 \equiv \dots [6]$						

- Quel est l'ensemble des solutions pour que  $x^2 + x + 1$  soit divisible par  $6$  ?

### EXERCICE 7 : Divisibilité (2 points)

$d$  et  $n$  sont des entiers naturels.

- Démontrer que si  $d$  divise  $4n + 5$  et  $6n + 3$ , alors  $d$  divise  $9$ . On citera la propriété utilisée.
- Quelles sont les valeurs possibles pour  $d$  ?

### EXERCICE 8 : Divisibilité (2 points)

Déterminer les couples d'entiers relatifs  $(x; y)$  tels que  $x^2 - 16y^2 = -7$ .

### EXERCICE 9 : Division euclidienne (2 points)

On divise un entier naturel  $n$  par  $152$ , puis par  $147$ . Les quotients sont égaux et les restes respectifs sont  $13$  et  $98$ .

Quel est cet entier naturel  $n$  ?

### EXERCICE 10 : Congruence et divisibilité (2 points)

Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $-2 \times 3^{2n+2} + 2^{4n+2}$  est divisible par  $7$ .

### EXERCICE 11 : Congruence (2 points)

Calculer  $79^{2023} [7]$