R01.06
octobre 2021

DM 1
Récurrence et arithmétique

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par: $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$ pour tout $n \geq 0$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$ on a :

$$u_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$$

Exercice 2

Pour tout $n \geq 1$,soit $S_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$S_n = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

Exercice 3

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $\quad 6 \mid 3n^2 + 3n + 6$

Reprendre cette démonstration avec les **congruences**.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $\quad 1665x + 1035y = 45$

Après avoir cherché PGCD(1665,1035) et simplifié l'équation, on justifiera l'existence de solutions et on sera précis dans la résolution.

Exercice 5

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $a = 5n + 1$ et $b = 2n - 1$. On note $\Delta = PGCD(a; b)$.

1 - Démontrer que les valeurs possibles de Δ sont 1 ou 7.

2 - Déterminer les entiers n tels que $a \equiv 0[7]$ et $b \equiv 0[7]$.

3 - En déduire, suivant les valeurs de n, la valeur de Δ.