Correction du DS n°1 du 5 octobre 2022 Arithmétique et Logique

R1.06

Logique (30 points)

Exercice 1 (**2 points**)

1. Oui , c'est une proposition qui est fausse.
2. Non, ce n'est pas un prédicat car on ne précise pas le domaine de x.

Exercice 2 (**6 points**)

1.

p	q	r	$\bar{q}$	$p \wedge r$	$p \vee \bar{q}$	P
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1	1

1.
$$\begin{aligned}
(p \wedge r) \implies (p \vee \bar{q}) &\iff \overline{p \wedge r} \vee (p \vee \bar{q}) && \text{équivalence de l'implication} \\
&\iff (\bar{p} \vee \bar{r}) \vee (p \vee \bar{q}) && \text{De Morgan} \\
&\iff \bar{p} \vee \bar{r} \vee p \vee \bar{q} && \text{associativité} \\
&\iff \bar{p} \vee p \vee \bar{r} \vee \bar{q} && \text{commutativité} \\
&\iff 1 \vee \bar{r} \vee \bar{q} && \text{complémentarité} \\
&\iff 1 && \text{élément neutre}
\end{aligned}$$

1. P est une tautologie.

Exercice 3 (**3 points**)

1. $Q \implies R$

2. Q est une condition suffisante pour R.

3. $(x = -2) \implies x \leq 0$

Exercice 4 (**4 points**)

1. Associativité de la disjonction exclusive : $(A \oplus B) \oplus C \iff A \oplus (B \oplus C)$

Commutativité de la disjonction exclusive : $A \oplus B \iff B \oplus A$

1. $A \oplus A \iff 0$ et $A \oplus 0 \iff A$

2. $$\begin{aligned}(A\oplus B)\oplus A &\iff A\oplus(A\oplus B) \quad \text{commutativité}\\ &\iff (A\oplus A)\oplus B \quad \text{associativité}\\ &\iff 0\oplus B \quad \text{définition de la disjonction exclusive}\\ &\iff B \quad \text{élément neutre}\end{aligned}$$

Exercice 5 (6 points)

1. La personne recrutée n'a ni connaissances informatiques, ni expérience mais a suivi un stage.
2. E : $(c\wedge e)\vee(\bar{c}\wedge s)\vee(\bar{e}\wedge s)$
3. $$\begin{aligned}(c\wedge e)\vee(\bar{c}\wedge s)\vee(\bar{e}\wedge s) &\iff (c\wedge e)\vee[(\bar{c}\vee\bar{e})\wedge s]\\ &\iff (c\wedge e)\vee[(\overline{c\wedge e})\wedge s]\\ &\iff [(c\wedge e)\vee(\overline{c\wedge e})]\wedge[(c\wedge e)\vee s]\\ &\iff 1\wedge[(c\wedge e)\vee s]\\ &\iff (c\wedge e)\vee s\end{aligned}$$
4. La personne recrutée a des connaissances informatiques et de l'expérience, ou a suivi un stage.

Exercice 6 (4 points)

Écrire la négation, la contraposée et la réciproque des implications suivantes :

1. P : il pleut.
   A : avoir un parapluie.
   M : être mouillé.

S'il ne pleut pas ou que j'ai un parapluie, alors je ne serai pas mouillé.

$$(\bar{P}\vee A)\implies\bar{M}$$

Négation :

$$(\bar{P}\vee A)\wedge M.$$

Contraposée :

$$M\implies(P\wedge\bar{A})$$

Réciproque :

$$\bar{M}\implies(\bar{P}\vee A)$$

1. Pour tous réels x et y, si $xy=0$ alors $(x=0$ ou $y=0)$ est un théorème

Négation :

$$xy=0\wedge(x\neq 0\wedge y\neq 0)$$

n'est donc pas un théorème.

Contraposée :

$$(x\neq 0\wedge y\neq 0)\implies xy\neq 0$$

est un théorème.

Réciproque :

$$(x = 0 \vee y = 0) \implies xy = 0$$

est un théorème.

Exercice 7 (**5 points**)

La lecture du tableau nous donne :

$$\begin{aligned}
f(p;q;r) \iff 0 &\iff (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \iff 0 \\
&\iff [(\bar{p} \wedge r) \wedge (\bar{q} \vee q)] \vee (p \wedge q \wedge r) \iff 0 \\
&\iff [(\bar{p} \wedge r) \wedge 1] \vee (p \wedge q \wedge r) \iff 0 \\
&\iff (\bar{p} \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \iff 0 \\
&\iff [\bar{p} \vee (p \wedge q)] \wedge r \iff 0 \\
&\iff [\bar{p} \vee p) \wedge (\bar{p} \vee q)] \wedge r \iff 0 \\
&\iff (\bar{p} \vee q) \wedge r \iff 0 \\
&\iff \overline{(\bar{p} \vee q) \wedge r \iff 0} \\
&\iff \overline{(\bar{p} \vee q) \wedge r} \iff 1 \\
&\iff \overline{(\bar{p} \vee q)} \vee \bar{r} \iff 1 \\
&\iff (p \wedge \bar{q}) \vee \bar{r} \iff 1
\end{aligned}$$

Arithmétique (30 points)

Exercice 8 (**4 points**)

1. Donner la définition de la divisibilité dans $\mathbb{Z}$.

Soient a , b et q des entiers relatifs.
b divise a, ou $b|a$, s'il existe un entier q tel que $a = bq$.

1. Donner la définition de la congruence dans $\mathbb{Z}$.

Soit n un entier naturel $(n \geq 2)$, a et b deux entiers relatifs.

On dit que deux entiers a et b sont **congrus modulo** n si, et seulement si, a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.

On note alors : $a \equiv b[n]$.

Exercice 9 (**2 points**)

1. $-23 = bq + 7$ donc $bq = -30$ et $b > 7$. Ainsi b est un diviseur de -30 (donc de 30) supérieur à 7 donc $b \in \{10; 15; 30\}$

- Si $b = 10$, $q = -3$
- Si $b = 15$, $q = -2$
- si $b = 30$, $q = -1$

Exercice 10 (**2 points**)

$$\begin{cases} x-y &= 885 \\ x &= 29y+17 \end{cases}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{cases} x &= 885+y \\ x &= 29y+17 \end{cases}$$

soit :

$$885+y=29y+17$$

$$28y=868 \iff y=31$$

$$S=\{916;31\}$$

Exercice 11 (4 points)

1. $x \equiv 7[2]$
2. -2
3. 115-27=88 et $88 \equiv 0[11]$
4. $12n+7=4(3n+1)+3$ donc $r=3<4$

Exercice 12 (3 points)

1. $\dfrac{3n-17}{n-4}=\dfrac{3(n-4)-5}{n-4}=3-\dfrac{5}{n-4}$
2. $(n-4)$ divise $3n-17$ si et seulement si $n-4$ divise 5. Or les diviseurs de 5 dans $\mathbb{Z}$ sont $\{-5;-1;1;5\}$. Il reste à tester les différentes valeurs possibles :

- pour $n-4=-5$ et $n-4=-1$ c'est impossible car $n>4$.
- pour $n-4=1$ on obtient $n=5$.
- pour $n-4=5$ on obtient $n=9$.

$$S=\{5;9\}$$

Exercice 13 (3 points)

- $451 \equiv 3[7]$

  car $451=7\times 64+3$.

- $6 \equiv -1[7]$

- $9 \equiv 2[7]$
  $9^2 \equiv 4[7]$
  $9^3 \equiv 36[7] \equiv 1[7]$
  $(9^3)^4 \equiv 1[7]$

donc : $451\times 6^{43}-9^{12} \equiv 3\times(-1)^{43}-1[7] \equiv -4[7] \equiv 3[7]$

Le reste est donc 3.

Exercice 14 (**2 points**)

$3^{2017}[10] \equiv 3^{2\times1008+1} \equiv 3^{2^{1008}} \times 3 \equiv (-1)^{1008} \times 3 \equiv 3[10]$

Exercice 15 (**3 points**)

$2^{4n+1} + 3^{4n+1}[5] \equiv 2^{4^n} \times 2 + 3^{4^n} \times 3[5] \equiv 16^n \times 2 + 9^{2^n} \times 3 \equiv 1^n \times 2 + 1^n \times 3[5] \equiv 2 + 3[5] \equiv$
.

Exercice 16 (**5 points**)

1.

$x[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$4x[7]$	0	4	1	5	2	6	3

1. On en déduit que les solutions sont de la forme $x = 7k + 3$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
   Celles comprises strictement entre -10 et 10 sont :

$$S = \{-4; 3\}$$

1. $7x \equiv 8[9] \iff 4 \times 7x \equiv 4 \times 8[9] \iff 28x \equiv 32[9] \iff x \equiv 5[9]$

$$S = \{9k + 5; k \in \mathbb{Z}\}$$

Exercice 17 (**2 points**)

$$\begin{aligned} 187 &= 32 \times 5 + 27 \\ 32 &= 27 \times 1 + 5 \\ 27 &= 5 \times 5 + 2 \\ 5 &= 2 \times 2 + 1 \\ 2 &= 2 \times 1 \end{aligned}$$

Le PGCD est donc 1.