Plan du cours

1. Le quantificateur universel ∀ : pour tout

Une proposition P peut dépendre d'un paramètre x, par exemple $x^2 \geq 1$, la proposition $P(x)$ est vraie ou fausse selon la valeur de x.

La proposition :

$$\forall x \in E, \quad P(x)$$

est vraie lorsque les propositions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E.

On lit : **pour tout x appartenant à E, $P(x)$**.

Pour tout x appartenant à E, $P(x)$ est vraie.

Exemple :

- $\forall x \in [1, +\infty[, \quad (x^2 \geq 1)$ est une proposition vraie.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x^2 \geq 1)$ est une proposition fausse.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n(n+1) \text{ est divisible par } 2$ est vraie.

2. Le quantificateur existentiel ∃ : il existe

La proposition :

$$\exists x \in E \mid \quad P(x)$$

est vraie lorsque l'on peut trouver **au moins** un x de E pour lequel $P(x)$ est vraie.

On lit : **il existe x appartenant à E tel que $P(x)$ (soit vraie)** .

Exemple :

- $\exists x \in \mathbb{R} \mid \quad (x(x-1) < 0)$ est vraie.

Par exemple $x = \frac{1}{2}$ vérifie bien la propriété.

- $\exists n \in \mathbb{N} \mid \quad n^2 - n > n$ est vraie.

Il y a plein de choix, par exemple $n = 3$ convient, mais aussi $n = 10$ ou même $n = 100$, un seul suffit pour dire que la proposition est vraie.

- $\exists x \in \mathbb{R} \mid \quad (x^2 = -1)$ est fausse.

Aucun réel au carré ne donnera un nombre négatif.

3. La négation des quantificateurs

La négation de : $\forall x \in E, \quad P(x)$ est $\exists x \in E \mid \quad \neg P(x)$.

Exemple :

- La négation de $\forall x \in [1, +\infty[, \quad (x^2 \geq 1)$

est la proposition : $\exists x \in [1, +\infty[\,| \quad (x^2 < 1)$.

En effet, la négation de $x^2 \geq 1$ est $\neg(x^2 \geq 1)$ mais s'écrit + simplement $x^2 < 1$.

- La négation de $\exists x \in E\,| \quad P(x)$ est : $\quad \forall x \in E, \quad \neg P(x)$.

Exemple :

- La négation de $\exists z \in \mathbb{R}\,| \quad (z^2 + z + 1 = 0)$ est : $\qquad \forall z \in \mathbb{R}, \quad (z^2 + z + 1 \neq 0)$.
- La négation de $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x + 1 \in \mathbb{Z})$ est : $\qquad \exists x \in \mathbb{R}\,| \quad (x + 1 \notin \mathbb{Z})$.
- Ce n'est pas + difficile d'écrire la négation de phrases complexes.

Pour la proposition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y > 0\,| \quad (x + y > 10)$$

Sa négation est :

$$\exists x \in \mathbb{R}\,| \quad \forall y > 0, \quad (x + y \leq 10).$$

Remarque :

- L'ordre des quantificateurs est très important.

Par exemple les deux phrases logiques :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R}\,| \quad (x + y > 0) \qquad \text{et} \qquad \exists y \in \mathbb{R}\,| \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x + y > 0).$$

sont différentes.

La première est vraie, la seconde est fausse.

En effet, une phrase logique se lit de **gauche à droite**, ainsi la première phrase affirme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R}\,| \quad (x + y > 0)$$

Pour tout réel x, il existe un réel y (**qui peut donc dépendre de** x) tel que $x + y > 0$

(par exemple on peut prendre $y = |x| + 1$).

C'est donc une phrase vraie.

Par contre la deuxième se lit :

$$\exists y \in \mathbb{R}\,| \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x + y > 0).$$

Il existe un réel y, tel que pour tout réel x, $x + y > 0$.

Cette phrase est fausse, cela ne peut pas être le même y qui convient pour tous les x !

On retrouve la même différence dans les phrases en français suivantes :

Voici une phrase vraie :

" Pour toute personne, il existe un numéro de téléphone "

Bien sûr, le numéro dépend de la personne.

Par contre cette phrase est fausse :

" Il existe un numéro, pour toutes les personnes."

Ce serait le même numéro pour tout le monde !

4. Unicité et existence

Quand on écrit : $\exists x \in \mathbb{R} \mid \quad (f(x) = 0)$,

cela signifie juste qu'il existe un réel pour lequel f s'annule. Rien ne dit que ce réel est unique.

Vous pouvez lire la phrase ainsi : il existe **au moins** un réel x tel que $f(x) = 0$.

Afin de préciser que f s'annule en une **unique** valeur, on rajoute un **point d'exclamation** ! :

$$\exists!\, x \in \mathbb{R} \mid \quad (f(x) = 0).$$

Remarque :

Pour la négation d'une proposition, **il faut être précis**.

La négation de l'inégalité stricte $<$ est l'inégalité large $\geq$, et inversement.

Les quantificateurs ne sont pas des abréviations.

- Soit vous écrivez une phrase en français :

Pour tout réel x, si $f(x) = 1$ alors $x \geq 0$.

- Soit vous écrivez la phrase logique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f(x) = 1 \Longrightarrow x \geq 0).$$

- Mais n'écrivez pas :

$\forall x$ réel, si $f(x) = 1 \Longrightarrow x$ positif ou nul.

- Il est défendu d'écrire $\nexists$, $(\not\Rightarrow)$. Ces symboles n'existent pas !

Exercice 1

Soit x représentant un chat quelconque et $P(x)$ le prédicat selon lequel x est gris.

On note C l'ensemble des chats.

1. Ecrire chacune des propositions suivantes sous forme symbolique :

- Tous les chats sont gris.
- Il existe un chat non gris.
- Aucun chat n'est gris.

2. Soit x représentant un chat quelconque,$P(x)$ le prédicat selon

lequel x est gris,$Q(x)$ le prédicat selon lequel x a des moustaches.

Exprimer la proposition :

$$\forall x \in C, (P(x) \wedge Q(x))$$

3. Parmi les propositions suivantes, laquelle en est la négation ?

- Il existe un chat non gris et sans moustache.
- Il n'existe aucun chat gris et avec des moustaches.
- Il existe un chat non gris ou sans moustache.

Exercice 2

Ecrire à l'aide des quantificateurs les phrases suivantes, puis écrire les négations :

- Pour tout nombre réel, son carré est positif.

- Pour chaque réel strictement positif, je peux trouver un entier relatif tel que leur produit soit strictement + grand que 1.
- Pour tout entier naturel n non nul, il existe un unique réel x tel que $\exp(x)$ égale n.

Exercice 3

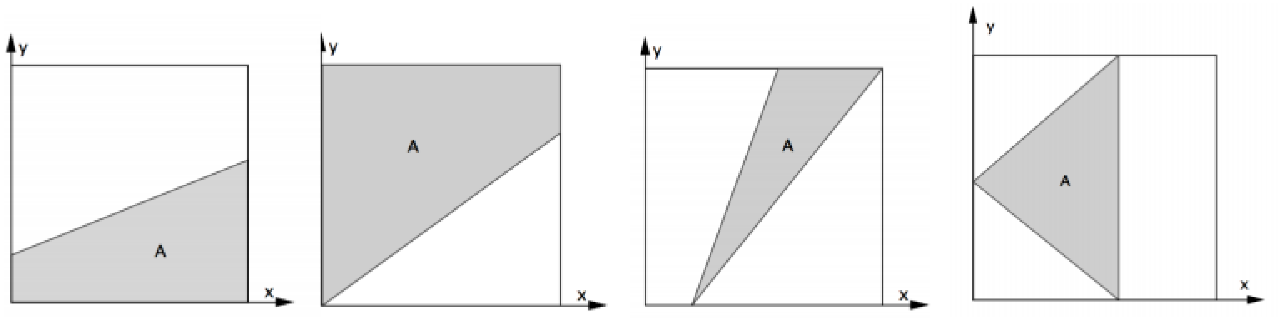
Soit le prédicat $P(x;y) : x + y = 0$

Pour chacune des propositions suivantes, donner sa valeur de vérité et écrire sa négation :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid \quad P(x;y)$
- $\exists y \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x;y)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}\,, \quad P(x;y)$
- $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid \quad P(x;y)$

Exercice 4 L'ordre des quantificateurs

Pour chacune des zones A représentées dans les repères ci-dessous , indiquer quelles propositions sont vraies :



1. $\forall x \in [0;1]\,, \quad \exists y \in [0;1] \mid \quad (x,y) \in A$
2. $\forall y \in [0;1]\,, \quad \exists x \in [0;1] \mid \quad (x,y) \in A$
3. $\exists x \in [0;1] \mid \quad \forall y \in [0;1]\,, \quad (x,y) \in A$
4. $\exists y \in [0;1] \mid \quad \forall x \in [0;1], \quad (x,y) \in A$

Exercice 5

Associer les propositions :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) > 0$
2. $\exists x \in \mathbb{R} \mid \quad f(x) > 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq 0$
4. $\exists x \in \mathbb{R} \mid \quad f(x) \neq 0$

a. La fonction n'est pas nulle.

b. La fonction n'est pas négative.

c. La courbe ne coupe pas l'axe des abscisses.

d. La courbe est au-dessus de l'axe des abscisses.

Exercice 6

Ecrire la négation des propositions suivantes et dire si elles sont vraies (avec un exemple d'existence) ou fausses (avec un contre-exemple).

1. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \mid y = \cos x$
2. $\exists x_1 \in \mathbb{R}, \exists x_2 \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 4x + 3 = (x - x_1)(x - x_2)$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^* \qquad \frac{x}{y} < 1 \Longrightarrow x < y$
4. $\forall (n, p, q) \in {\mathbb{N}^*}^3, n \mid pq \Longrightarrow n \mid pou n \mid q$

]

Exercice 7

Ecrire la négation des propositions suivantes :

1. $\forall x \in E, \exists y \in E |\ p(x; y) \Longrightarrow q(x; y)$
2. $(\forall x \in E,\exists y \in E \mid p(x; y)) \Longrightarrow (\forall z \in E, r(z))$.