	DS 2 **Sans calculatrice**	**R1.06** **21 novembre 2023** **1h30**

QCM (3 points)

Une seule bonne réponse par question. Vous marquerez sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1. L'équation diophantienne $12x + 15y = 4$ admet :

   A. une infinité de solutions.
   B. une solution unique.
   C. aucune solution.
   D. une infinité de solutions mais pas une en particulier.

2. La décomposition en facteurs premiers de 12 est :

   A. $1 \times 2^2 \times 3$
   B. 3×2^2
   C. $1 + 2 + 3^2$
   D. $2^3 + 2^2$

3. $a \equiv b[n]$ signifie :

   A. a est divisible par b.
   B. a est divisible par n.
   C. $a - b$ est divisible par n.
   D. $a + b$ est divisible par n.

4. L'implication logique $P \wedge \bar{Q} \implies Q$ est le principe de :

   A. la démonstration par récurrence.
   B. la démonstration par contraposée.
   C. la démonstration par l'absurde.
   D. la démonstration par équivalence.

5. Le nombre 2^{26} peut s'écrire :

   A. $2^{13} + 2^{13}$
   B. $2^{2^4+2^3+2^1}$
   C. $2^{2^4 \times 2^3 \times 2^1}$
   D. $2^{3^8} \times 2^{15}$

6. Le PPCM des deux nombres $2^3 \times 3^2 \times 5^3$ et $2^2 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$ est :
   A. $2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$
   B. $2^3 \times 3^2 \times 5^2$
   C. $2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^2$
   D. un autre nombre.

Exercice 1: Codage affine (14 points)

Afin de crypter un message, on utilise un chiffrement affine.

Chaque lettre de l'alphabet est associée à un nombre entier comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

A chaque lettre de numéro x, on associe la lettre correspondant au nombre :

$$y \equiv 7x + 5[26]$$

1. Coder la lettre L.
2. Résolution de l'équation diophantienne (E) : $\quad 7x - 26k = 1.$
   A. Justifier que E admet des solutions en énonçant précisément le théorème utilisé.
   B. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de (E).
   On admettra pour la suite que $(-11, -3)$ est une solution particulière de E.
   C. Montrer que $7(x + 11) = 26(k + 3)$.
   D. En utilisant le théorème de Gauss et en justifiant ses hypothèses, résoudre E.
   On ne fera pas la vérification des solutions.
3. Résolution de (E') : $\quad 7x \equiv 1(26)$
   A. Vérifier que 15 est une solution de (E').
   B. Déduire de la question 2. toutes les solutions de (E').
4. En déduire que $y \equiv 7x + 5(26)$ équivaut à $x \equiv 15y + 3(26)$.
5. A l'aide de la question précédente, décoder la lettre E.

Exercice 2 (4 points)

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
Exprime les propositions suivantes à l'aide de quantificateurs.

1. Le carré de tout entier relatif est positif.
2. Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2 , il existe un nombre premier qui le divise.

Exercice 3 (6 points)

1. Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 4^n - 1 \quad \text{est divisible par 3}$$

2. Reprendre cette démonstration avec les congruences.

Exercice 4 (3 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$x^2 + |x - 1| + x + 1 = 0$$

Exercice 5 (3 points)

Soit m et n des entiers relatifs.

Montrer par contraposée que :

Montrer que si $m \times n$ est impair, alors m et n sont impairs.

Exercice 6 (5 points)

1. Vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n(2n+1)+6(n+1)=(n+2)(2n+3)$$

2. Démontrer par récurrence que :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Exercice 7 (6 points)

Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

Écrire les négations des phrases quantifiées suivantes :

1. $\forall x \in I, f(x) \neq 0$
2. $\exists M \in \mathbb{R} \quad | \quad (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq M)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 0 \implies x \leq 0$

Exercice 8 (2 points)

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Si oui, justifier,si non, donner un contre-exemple.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \quad | \quad x+y^2=1$
2. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \quad | \quad x+y^2=1$

Exercice 9 (3 points)

1. Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 504 et 540.
2. En déduire le PGCD de ces deux nombres.
3. En déduire le nombre de diviseurs de 504.