,

Exercice 1

1. On souhaite déterminer le reste possible de la division euclidienne de 247^{349} par 7.

   a. Montrer que cela revient à chercher le reste de la division euclidienne de 2^{349} par 7.

   b. Montrer que, pour tout nombre entier naturel k :

   - $2^{3k} \equiv 1[7], \quad 2^{3k+1} \equiv 2[7], \quad 2^{3k+2} \equiv 4[7]$

   a. En déduire le résultat

2 . Quel est le reste de la division par 11 du nombre 57383^{2015} ?

Exercice 2

Soient $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ dont les restes modulo 11 sont 7 et 2 respectivement.

Donner le reste modulo 11 de $a^2 - b^2$

Exercice 3

Un code barre est une suite de 12 chiffres $c_{12}c_{11}...c_1$ suivie d'un chiffre de contrôle c_0 vérifiant

$$c_{12} + 3c_{11} + c_{10} + 3c_9 + c_8 + 3c_7 + c_6 + 3c_5 + c_4 + 3c_3 + c_2 + 3c_1 + c_0 \equiv 0(10)$$

La suite de 12 chiffres attribuée à un produit est 308612610032.

Calculer son chiffre de contrôle.

Exercice 4

Quels sont les entiers x et y tels que $x^2 + y^2 \equiv 2(8)$?

Exercice 5

En utilisant un tableau de congruence, trouver tous les entiers relatifs n tels que $n^2 + n + 1$ soit divisible par 7.

Exercice 6

1. Pour tout entier naturel n, déterminer les restes possibles dans la division euclidienne de n^2 par 5.
2. En déduire les restes possibles dans la division euclidienne de n^4 par 5.
3. Montrer que $n(n^4 - 1)$ est divisible par 5.

Exercice 7 Exponentiation modulaire rapide

1. Un premier exemple avec $5^{11}(14)$

L'idée est de seulement calculer $5, 5^2, 5^4, 5^8$ ...et de réduire modulo n à chaque fois.

Pour cela on remarque que $11 = 2^3 + 2^1 + 2^0 = 8 + 2 + 1$ en décomposant uniquement avec des puissances de 2, donc

on calcule les $5^{2^i}(14)$:

- $5 \equiv 5(14)$
- $5^2 \equiv 25 \equiv 11(14)$
- $5^4 \equiv 5^2 \times 5^2 \equiv 11 \times 11 \equiv 121 \equiv 9(14)$
- $5^8 \equiv 5^4 \times 5^4 \equiv 9 \times 9 \equiv 81 \equiv 11(14)$

A chaque étape est effectuée une multiplication modulaire.

Conséquence :

- $5^{11} \equiv 5^{8+2+1}(14) \equiv 5^8 \times 5^2 \times 5(14)$
- $5^{11} \equiv 11 \times 11 \times 5(14) \equiv 11 \times 55 \equiv 11 \times 13 \equiv 143 \equiv 3(14)$.

Nous obtenons donc un calcul de $5^{11}(14)$ en 5 opérations au lieu de 10 si on avait fait $5 \times 5 \times 5 \ldots$ et surtout avec des nombres plus petits à manipuler.

En fait, cette technique est basée sur la décomposition en base 2 de l'exposant.

1. Voici un autre exemple à compléter :

Calculer $17^{154}(100)$.

Tout d'abord on décompose l'exposant k = 154 en base 2 :

$(154)_{10} = \ldots$

On en déduit la décomposition en somme de puissance de 2.

$154 = \ldots$

Ensuite on calcule $17, 17^2, 17^4, 17^8, \ldots(100)$

$$\begin{aligned} 17 &\equiv \\ 17^2 &\equiv \\ 17^4 &\equiv \\ 17^8 &\equiv \\ 17^{16} &\equiv \\ 17^{32} &\equiv \\ 17^{64} &\equiv \\ 17^{128} &\equiv \end{aligned}$$

Il ne reste qu'à rassembler :

$17^{\{154\}} \equiv \ldots$]

Application :

Calculer $234^{97}[7]$