DS 2
Arithmétique et Démonstrations

R1.06
21 octobre 2022
1 heures 30
calculatrice interdite

Exercice 1 (2 points)

Le nombre 1 014 533 235 est-il divisible par 15 ? Expliquer.

Exercice 2 (4 points)

Écrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1. Le carré de tout entier relatif est positif.
2. Il existe un unique entier compris entre $\sqrt{2}$ et $\sqrt{5}$.
3. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
4. Pour qu'un nombre réel x soit supérieur à 1, il suffit que son cube soit supérieur à 2.

Exercice 3 (4 points)

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si elles sont fausses, donner un contre-exemple.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \quad x + y^2 = 1$
2. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y^2 = 1$
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \quad x + y^2 = 1$
4. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \quad x + y^2 = 1$

Exercice 4 (5 points)

1. Quelle est la négation de $P \implies Q$?
2. Donner la négation de :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Z} \quad | \quad (n = p) \implies (n \leq y) \land (p \geq y)$$

Exercice 5 (3 points)

Montrer que la différence entre les carrés de deux entiers naturels successifs est impair.

Exercice 6 (5 points)

1. Sur quelle équivalence logique est basée la démonstration par contraposée ?
2. Sur quelle équivalence logique est basée la démonstration par l'absurde ?
3. A l'aide d'un raisonnement par contraposée, démontrer que :

   $$\text{Si } n^2 \text{ est un entier naturel impair alors } n \text{ est un entier naturel impair.}$$

Exercice 7 (6 points)

Soit n un entier naturel non nul et

$$S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1)$$

1. Calculer S_1, S_2, S_3, S_4.
2. Conjecturer une expression simple de S_n en fonction de n.
3. Écrire l'hypothèse de récurrence P_n puis la démontrer.

Exercice 8 (4 points)

1. Citer précisément le théorème de Gauss.
2. Citer précisément le théorème de Bézout.

Exercice 9 (4 points)

Soit la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par : $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$

Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 2^n - 1$

Exercice 10

Partie 1 (6 points)

On considère l’équation

$$(E) \quad 5x - 26y = 2$$

dont les solutions sont des couples $(x; y)$ d’entiers relatifs.

1. Justifier le fait que l’équation (E) admet au moins un couple solution.

2. En utilisant l'algorithme d'Euclide, donner un couple solution particulière de l’équation (E).

   Pour la suite de l'exercice, vous pourrez utiliser $(-10, -2)$ comme solution particulière.

3. Vérifier que $5(x + 10) = 26(y + 2)$.

4. Déterminer tous les couples d’entiers relatifs solutions de l’équation (E).

5. En déduire qu’il existe un unique entier d vérifiant les conditions $0 \leq d \leq 25$ et $5d \equiv 2[26]$.

Partie 2 (7 points)

Pour coder un message, on traduit d'abord chaque lettre en son équivalent numérique : A=0, B=1,..., Z=25.

On définit le système de codage à l'aide de la transformation f suivante :

$$f(x) = (ax + b)[26]$$

1. Que dire du code obtenu lorsque l'on prend $a = 0$?

2. Montrer que les lettres A et C sont codées par la même lettre lorsque l'on choisit $a = 13$.

3. Existe-t-il d'autres valeurs de a pour lesquelles on a le même problème ?

   Dans toute la suite de l'exercice, on prend $a = 5$ et $b = 2$ donc

$$f(x) = (5x + 2)[26]$$

4. Coder la lettre F.

5. On se propose de décoder la lettre E.

   a) Montrer que décoder la lettre E revient à résoudre l'équation $5x \equiv 2[26]$.

   b) En déduire que $-x \equiv 10[26]$.

   c) Décoder alors la lettre E.