Wyznaczanie pierwiastków układu równań nieliniowych metodą Newtona

Ireneusz Bugański

Proszę wyznaczyć pierwiastki układu równań nieliniowych metodą Newtona:

$$\begin{cases} 2xy^2 - 3x^2y - 2 = 0 \\ x^2y^3 + 2xy - 12 = 0 \end{cases}. \tag{1}$$

W k-tej iteracji metody Newtona dostajemy wektor rozwiązń $\mathbf{r}_\mathrm{k} = [x_k, y_k]$, zależny od rozwiązania w kroku $k-1$:

$$\mathbf{r}_\mathrm{k} = \mathbf{r}_{\mathrm{k}-1} + \Delta\mathbf{r}, \tag{2}$$

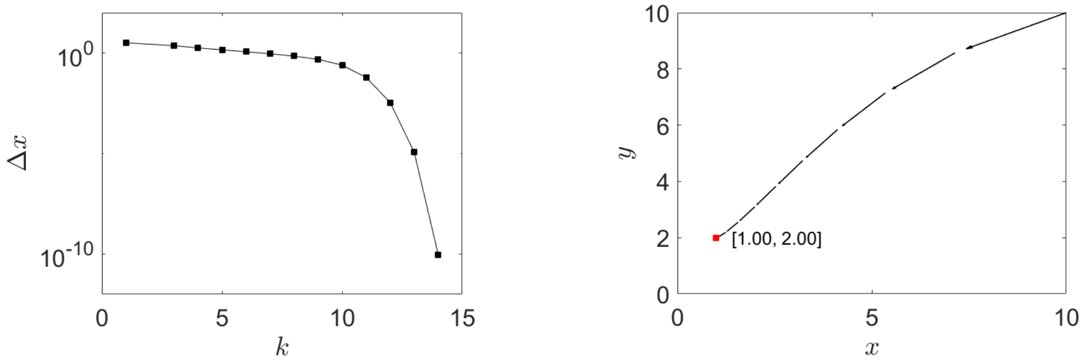
gdzie $\Delta\mathbf{r}$ można obliczyć ze wzoru:

$$\Delta\mathbf{r} = -\begin{bmatrix} 2y^2 - 6xy & 4xy - 3x^2 \\ 2xy^3 + 2y & 3x^2y^2 + 2x \end{bmatrix}^{-\mathbf{1}}_{r=r_{k-1}} \cdot \begin{bmatrix} 2xy^2 - 3x^2y - 2 \\ x^2y^3 + 2xy - 12 \end{bmatrix}_{r=r_{k-1}}. \tag{3}$$

Proszę wykonać obliczenia dla $\mathbf{r_0} = [10, 10]$ oraz $\mathbf{r_0} = [10, -4]$. Przyjąć jako warunek zbieżności $\|\Delta\mathbf{r}\| = \|\mathbf{r}_{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{k-1}}\| < 10^{-6}$. W obu wypadkach algorytm zbiega się do rozwiązania, którym jest $\mathbf{r} = [1, 2]$.

W opracowaniu wyników proszę narysować wykres $\|\Delta\mathbf{r}\|$ w funkcji numeru iteracji metody Newtona dla każdego z warunków początkowych oraz wykres punktów pośrednich (x, y), przez które przechodzi algorytm w trakcie znajdowania miejsca zerowego układu równań.

Przykłądowe rozwiązania dla $\mathbf{r_0} = [10, 10]$.



Rys. 1. Z lewej: wykres normy długości różnicy wektorów położenia punktów w zależności od numeru iteracji k (na wykresie $\Delta x \equiv \|\Delta \mathbf{r}\|$); z prawej: wykres punktów pośrednich, przez które przechodzi algorytm, zmierzając do rozwiązania układu równań. Punkt końcowy zaznaczony jest czerwonym markerem.