Sprawozdanie laboratorium metody numeryczne Lab 13 - Całkowanie numeryczne przy użyciu kwadratur Gaussa

Jędrzej Szostak

1. Cel ćwiczenia

Zapoznanie się z numerycznymi metodami całkowania Gaussa.

2. Opis problemu

Pierwszym zadaniem było obliczenie całki:

$$f_1 = \int_0^2 \frac{x}{4x^2+1} dx$$

za pomocą metody Gaussa-Legandre'a i porównanie otrzymaną wartość z wartością analityczną obliczoną przy pomocy wzoru:

$$c_{1,a} = \int \frac{x}{a^2x^2 \pm c^2} = \frac{1}{2a^2} ln\left|a^2x^2 \pm c^2\right|$$

oraz wykonać wykres $\left|f_1 - c_{1,a}\right|, dla\, n\ -\ liczby\ węzłów\ [2,\ 20]$

Kolejnym problemem było rozwiązanie całki:

$$f_2 = \int_0^\infty x^k exp(-\ x) dx$$

za pomocą metody Gaussa-Laguerre'a i porównanie otrzymaną wartość z wartością analityczną obliczoną przy pomocy wzoru:

$$f_2 = \int_0^\infty x^k exp(-\ x) dx\ \ = k$$

, gdzie k = 5 oraz k =10 i n - liczby węzłów [2, 20]

Ostatnim problemem była podwójna całka przedstawiająca się wzorem:

$$f_3 = \int_{0}^{-\infty}\int_{0}^{-\infty} sin^2(x)sin^4(y)exp(-x^2 - y^2)dxdy$$

metodą Gaussa-Hermite’a i porównanie jej z wartością analityczną równa 0.1919832644. dla n -ilosci wezlow [2, 15].

3. Opis metody

Kwadratury Gaussa są metodami całkowania numerycznego polegającego na takim wyborze wag $w1$, $w2$, . . . , wn i węzłów interpolacji $t1$,$t2$, . . . ,tn, aby wyrażenie:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i f(t_i)$$

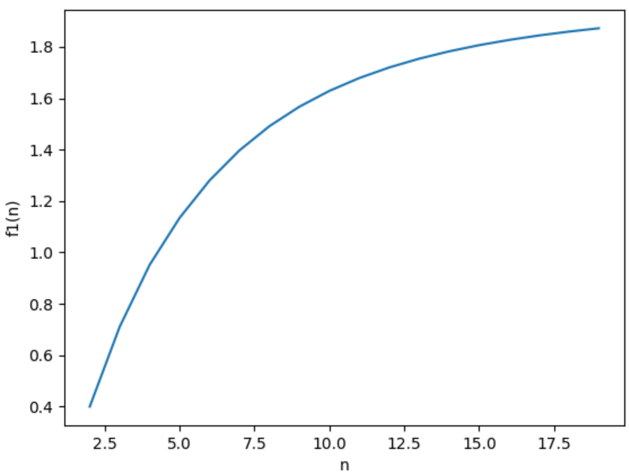
było najbliższe całce:

$$I(f) = \int_{a}^{b} w(x)f(x)dx$$

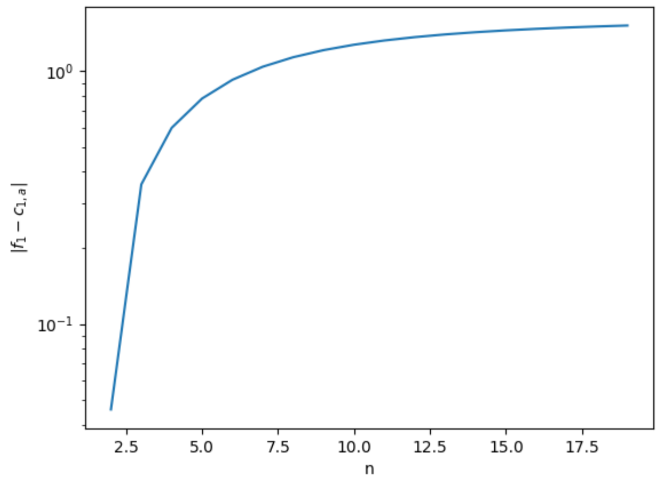
,gdzie f - funkcja określona na odcinku [a, b], a w - funkcja wagowa.

4. Wyniki

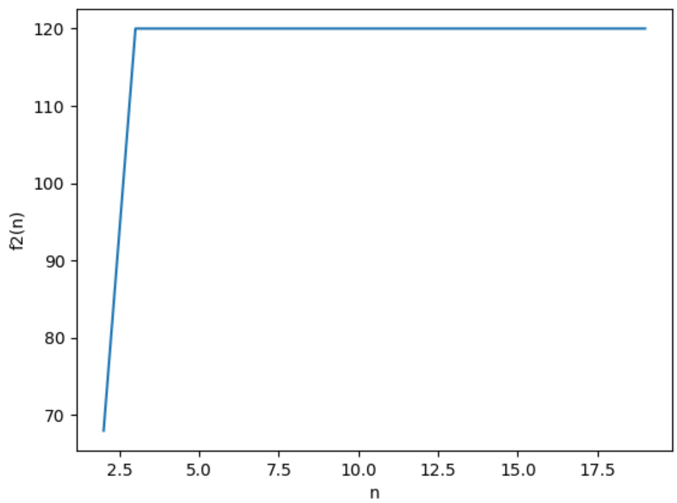
Wyniki kwadratury Gaussa-Legandre’a dla $f_1 = \int_{0}^{2} \frac{x}{4x^2+1}dx$, $n \in [2, 20]$



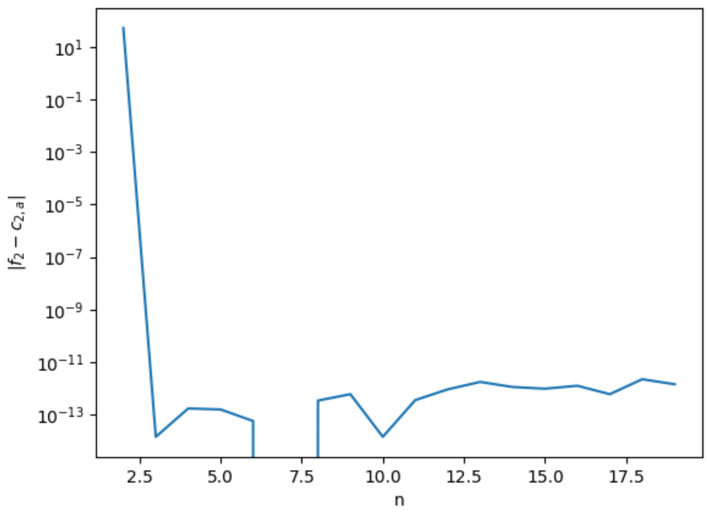
oraz rozbieżność od wartości analitycznej:



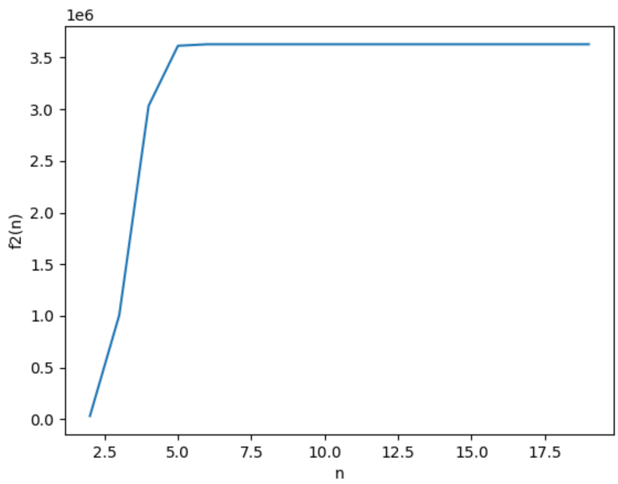
Wyniki kwadratury Gaussa- Laguerre’a dla $f_2 = \int_0^\infty x^k exp(-x)dx$, $n \in [2, 20]$, k = 5

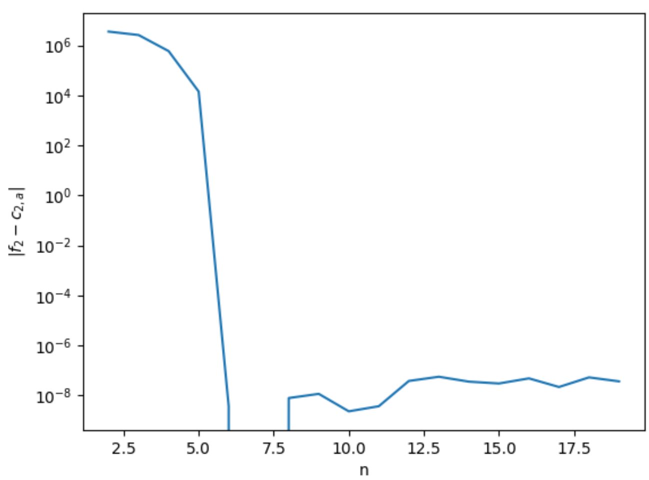


oraz rozbieżność od wartości analitycznej:



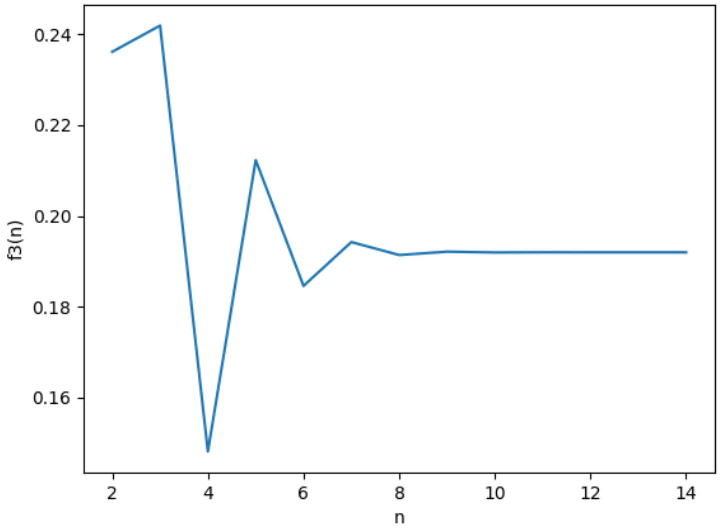
analogiczne wykresy, ale dla k = 10 przestawiają się następująco:



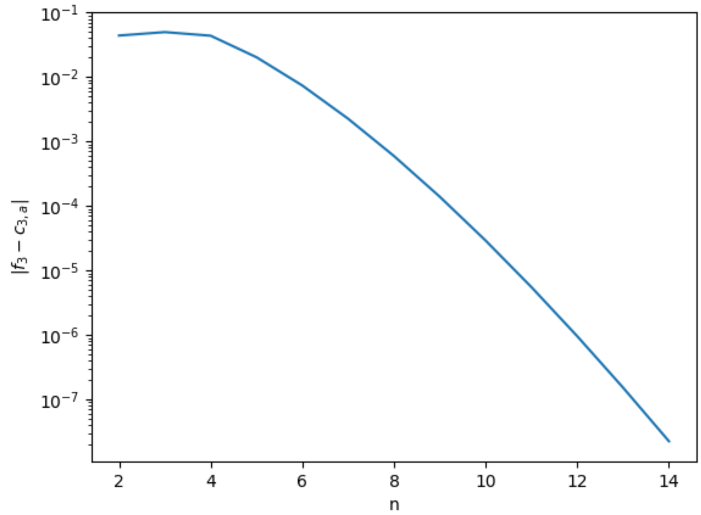


Wyniki kwadratury Gaussa-Hermite'a dla

$$f_3 = \int_0^{-\infty}\int_0^{-\infty} sin^2(x)sin^4(y)exp(-x^2 - y^2)dxdy, n \in [2, 15]$$



oraz rozbieżność od wartości analitycznej:



5. Wnioski

Całkowanie numeryczne przy użyciu kwadratur Gaussa jest dobrze uwarunkowaną numerycznie i szybką metodą do obliczenia wartości całki. Dokładność rozwiązania jest zależna od stopnia wielomianu podcałkowego (stopień rośnie, dokładność maleje) oraz od liczby węzłów (im więcej tym dokładniej).