Sprawozdanie laboratorium metody numeryczne Lab 10 - Minimalizacja wartości funkcji metodą interpolacji kwadratowej Powella

Jędrzej Szostak

1. Cel ćwiczenia

Zapoznanie się z metodą interpolacji kwadratowej Powella służącą do minimalizacja wartości funkcji.

2. Opis problemu

Naszym zadaniem było przeprowadzenie interpolacji Powella dla funkcji:

$$f(x) = ln(x^5 + 3x^3 + x + 9) \quad (1)$$

oraz dla funkcji:

$$f(x) = x^6 \quad (2)$$

w zadanym zakresie i z zadanymi punktami początkowymi $\{x_1, x_2, x_3\}$.

3. Opis metody

Interpolacja kwadratowa Powella funkcji f(x) polega na przeprowadzenia wielomianu drugiego stopnia przez 3 punkty x_1, x_2, x_3.

$$p_2(x) = F[x_1] + F[x_1, x_2](x - x_1) + F[x_1, x_2, x_3](x - x_1)(x - x_2) \quad (3)$$

$$F[x_1, x_2] = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$F[x_1, x_2, x_3] = \frac{F[x_2, x_3]-F[x_1, x_2]}{x_3-x_1}$$

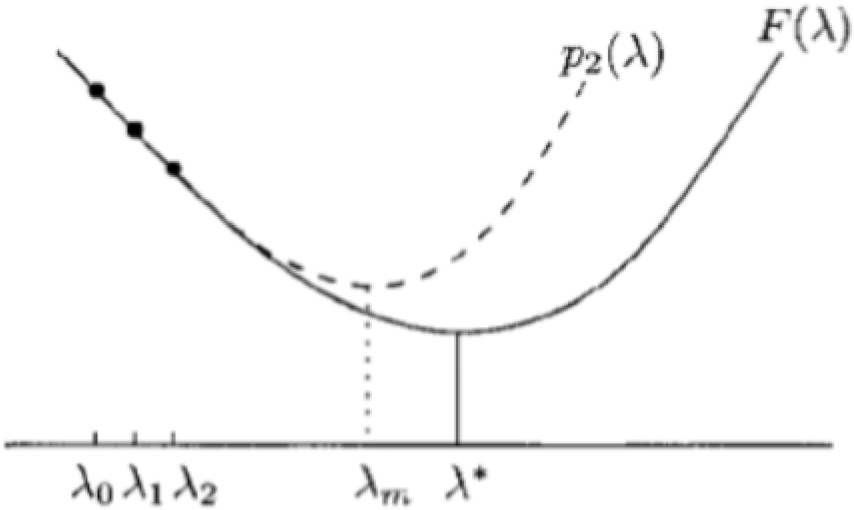
,gdzie $F[x_1,\ x_2]$ to iloraz różnicowy pierwszego stopnia,$F[x_1]$to wartość funkcji w punkcie x_1 a, $F[x_1,\ x_2,\ x_3]$to iloraz różnicowy drugiego stopnia.
Zakładając, że ciąg wartości funkcji f(x) jest malejący i narzucając warunek zerowania się pochodnej równanie (3) możemy zamienić na:

$$f(x_m) = \frac{F[x_1, x_2, x_3](x-x_1)-F[x_1, x_2]}{F[x_1, x_2, x_3]} \qquad (4)$$

, a jego wynikiem jest przybliżenie minimum funkcji.
Mając punkty początkowe i wartości w tych punktach możemy wyznaczyć przybliżone miejsce położenia tego minimum:

$$x_m = \frac{x_1+x_2}{2} - \frac{F[x_1, x_2]}{2F[x_1, x_2, x_3]} \qquad (5)$$

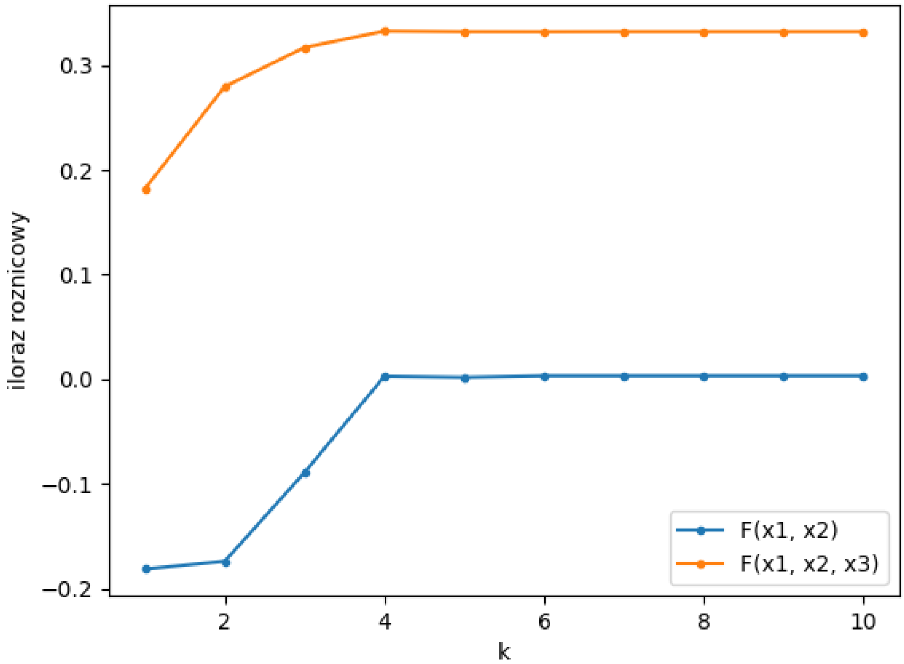
Będzie to minimum lokalne, gdy $F[x_1,\ x_2,\ x_3] > 0$.
Następnie dla każdej kolejnej iteracji zamieniamy ten obliczony punkt z najbardziej oddalonym od niego z wejściowej trójki $\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$.



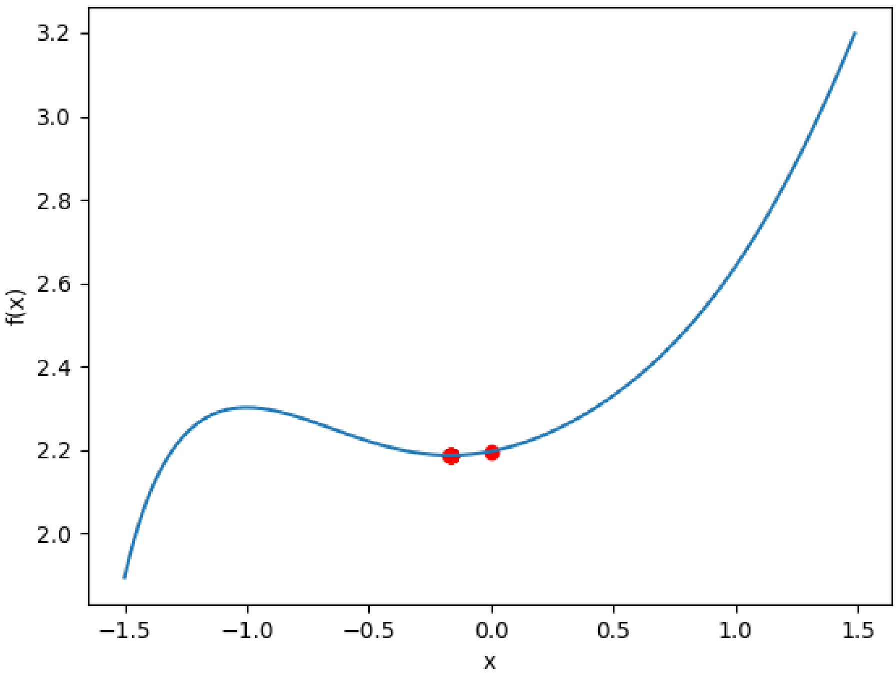
Rysunek 1. Graficzne przedstawienie metody interpolacji Powella

4. Wyniki

Interpolację wykonaliśmy dla funkcji (1) i (2) w przedziale x ∈ [−1.5 , 1,5] o zadanych warunkach początkowych. Następnie sporządziliśmy serię wykresów.
a) Interpolacja funkcji (1) dla x_1 = −0.5, x_2= x_1 + h, x_3 = x_2 + h, gdzie h = 0.01, n = 10.

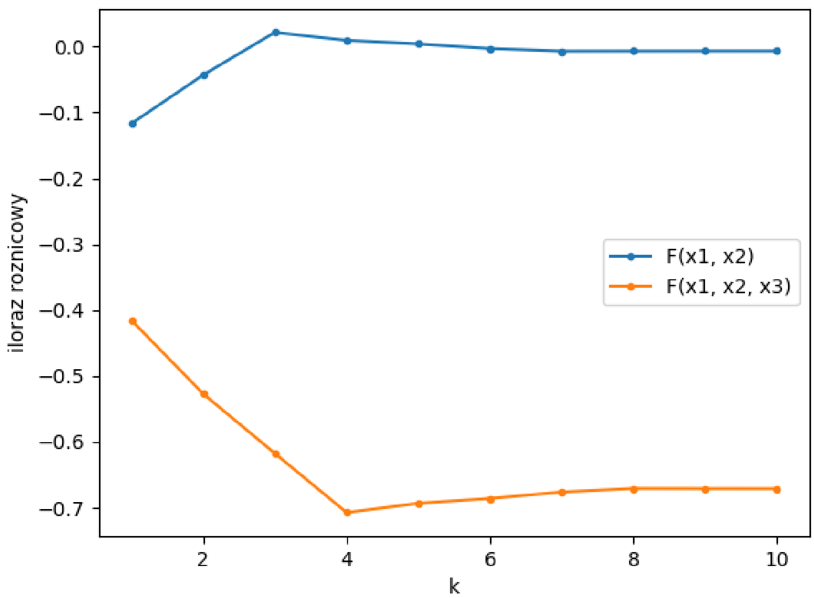


Rysunek 2. Ilorazy różnicowe funkcji (1) w zależności od iteracji dla punktów początkowych -0.5, -0.49, -0.48.

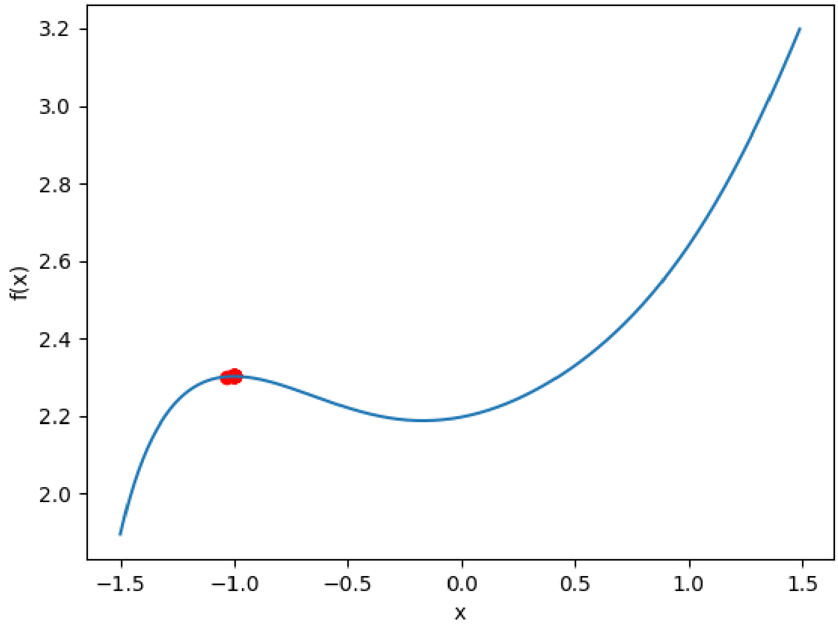


Rysunek 3. znalezione ekstrema lokalne funkcji (1) dla punktów początkowych -0.5, -0.49, -0.48.

b) Interpolacja funkcji (1) dla $x_1 = -0.9$, $x_2 = x_1 + h$, $x_3 = x_2 + h$, gdzie $h = 0.01$, n = 10.

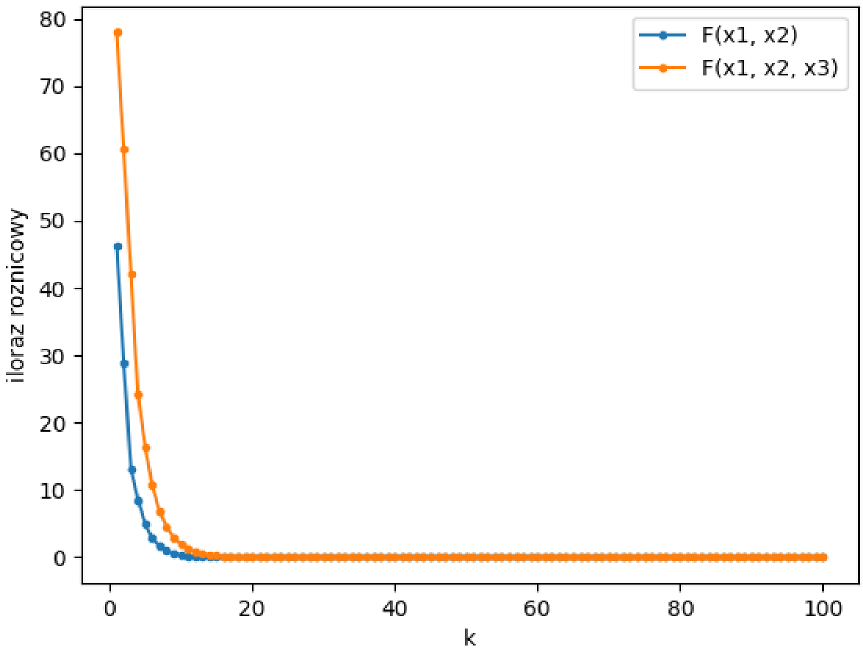


Rysunek 4. Ilorazy różnicowe funkcji (1) w zależności od iteracji dla punktów początkowych -0.9, -0.89, -0.88.

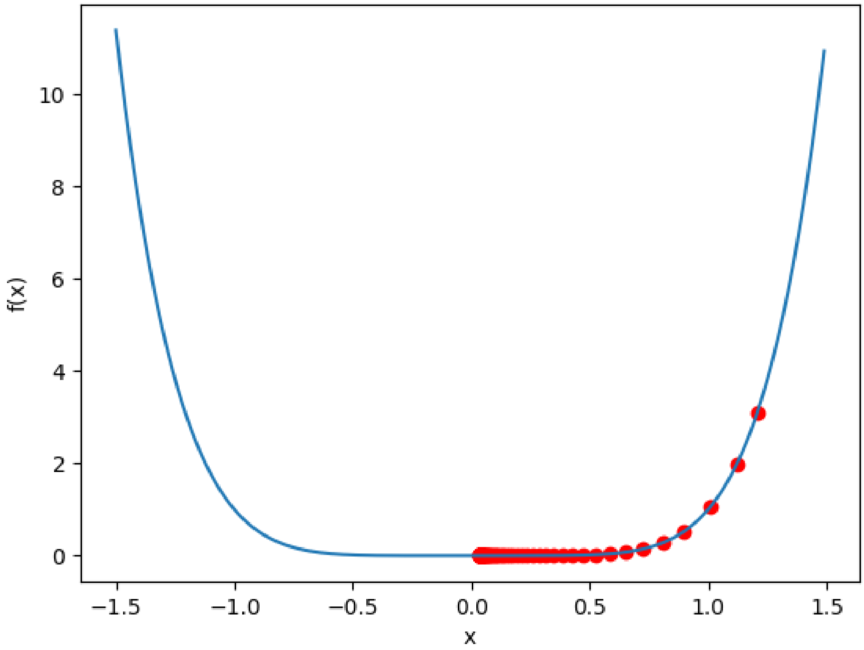


Rysunek 5. Znalezione ekstrema lokalne funkcji (1) dla punktów początkowych -0.9, -0.89, -0.88.

c) Interpolacja funkcji (2) dla x_1 = 1.5, x_2= x_1 + h, x_3 = x_2 + h, gdzie h = 0.01, n = 100.



Rysunek 6. Ilorazy różnicowe funkcji(2) w zależności od iteracji dla punktów początkowych 1.5, 1.51, 1.52.



Rysunek 7. Znalezione ekstrema lokalne funkcji (2) dla punktów początkowych 1.5, 1.51, 1.52.

5. Wnioski

Metoda Powella do znajdowania minimum funkcji poprzez interpolację jest skuteczna w minimalizacji wartości funkcji, niestety bardzo wiele w niej zależy od dobrania punktów początkowych, wartości funkcji w tych punktach muszą być malejące. Wadą metody jest też to, że wyznacza ekstrema niezależnie od tego czy jest to maksimum czy minimum lokalne. Widzimy na Rys7., że za każdym razem znajdujemy maksimum, co jest widoczne w wartościach drugiej pochodnej, która jest dodatnia. Dokładność tej metody zwiększa się wraz z liczbą iteracji.