Całkowanie numeryczne metodą Simpsona

Tomasz Chwiej

21 grudnia 2015

1 Wstęp

Celem projektu jest obliczenie numeryczne całki typu:

$$I = \int_0^{\pi} x^m sin(kx) dx \tag{1}$$

metodą Simpsona. W celu sprawdzenia poprawności metody musimy dysponować wartościami dokładnymi, które można dość łatwo obliczyć korzystając z rozwinięcia funkcji $sin(x)$ w szereg:

$$sin(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \tag{2}$$

Wstawiając powyższe rozwinięcie pod całkę i wykonując całkowanie każdego elementu szeregu dostajemy:

$$I = \int_a^b x^m sin(kx) dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(kx)^{2i+1}}{(2i+1)!} x^m \tag{3}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(kx)^{2i+m+2}}{k^{m+1}(2i+1)!(2i+m+2)} \Bigg|_a^b \tag{4}$$

Jeśli wartość x-a nie jest zbyt duża to sumę szeregu (4) można łatwo obliczyć sumując tylko 20-30 pierwszych wyrazów. **Uwaga: wyznaczanie wartości wyrazów szeregu należy wykonać w podwójnej precyzji**.

2 Zadania do wykonania

1. Proszę obliczyć wartość całki typu (1) metodą rozwinięcia funkcji podcałkowej w szereg (wzór 4) dla

   a) $m = 0$, $k = 1$ ($I = 2$)

   b) $m = 1$, $k = 1$ ($I = \pi$)

   c) $m = 5$, $k = 5$ ($I = 56.363569$)

   W każdym z powyższych przypadków do pliku proszę zapisać wartości sum, gdy liczba sumowanych wyrazów jest równa $l = 1, 2, 3, \ldots, 30$ (innymi słowy - interesują nas zmiany wartości sumy w zależności od ilości uwzględnianych wyrazów).

2. Proszę obliczyć wartość całki typu (1) metodą Simpsona dla następującej liczby węzłów $n = 2p + 1 = 11, 21, 51, 101, 201$ oraz poniższych przypadków:

   a) $m = 0$, $k = 1$
   b) $m = 1$, $k = 1$
   c) $m = 5$, $k = 5$

Wyniki zapisać do pliku. W sprawozdaniu proszę wykonać wykresy zależności $|C-I|$ od ilości węzłów, gdzie: I jest wartością dokładną całki, a C jest wartością całki obliczoną numerycznie.