Sprawozdanie metody numeryczne Lab1 - Układy równań liniowych

Jędrzej Szostak

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczeń było zrozumienie metody Gaussa-Jordana, która wykorzystywana jest do rozwiązywania układów równań liniowych. Następnie za jej pomocą mieliśmy rozwiązać zadanie 1.1 i 1.2.

2. Opis problemu

2.1. Celem zadania 1.1 było rozwiązanie układu równań liniowych, którego źródłem było równanie różniczkowe opisujące drgania oscylatora, za pomocą II zasady dynamiki Newtona otrzymujemy :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t). \tag{1}$$

Przybliżając występującą po lewej stronie równania (1) drugą pochodną położenia x w chwili t ilorazem różnicowym i po wprowadzeniu oznaczeń $\Delta t = h$, $x_i = x(ih)$ otrzymujemy z równania (1) iteracyjny przepis pozwalający na wyznaczenie x_{i+1} w zależności od x_i i x_{i-1}:

$$x_{i+1} + (\omega^2 h^2 - 2)x_i + x_{i-1} = 0. \tag{2}$$

Mając warunki początkowe $x_0 = A$, początkowe wychylenie z położenia równowagi, $(x_1 - x_0)/h = v_0$, początkowa wartość prędkości ciała. Dzięki równaniu (2) oraz warunkom początkowymi jesteśmy w stanie zapisać w postaci macierzowej równania dla pierwszych siedmiu kroków czasowych:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ v_0h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Naszym zadaniem było rozwiązanie układu (3) metodą Gaussa-Jordana oraz narysowanie zależności wychylenia z położenia równowagi dla tego układu na przestrzeni kilku okresów drgań.

2.2. Celem zadania 1.2 było rozwiązanie układu równań liniowych, a dokładnie rozwiązanie równania b=Ax, gdzie:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2q\cdot 10^{-4} & 1 & 6 & 9 & 10 \\ 2\cdot 10^{-4} & 1 & 6 & 9 & 10 \\ 1 & 6 & 6 & 8 & 6 \\ 5 & 9 & 10 & 7 & 10 \\ 3 & 4 & 9 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \text{ oraz } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 9 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a x to szukany wektor. Potem na jego podstawie mieliśmy obliczyć wektor c=Ax, co pozwoli nam obliczyć odchylenie za pomocą poniższego wzoru:

$$o(q) = \frac{1}{5}\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(c_i - b_i)^2}. \tag{4}$$

Następnie mieliśmy wykonać wykres o(q) w zakresie q od 0.2 do 5.

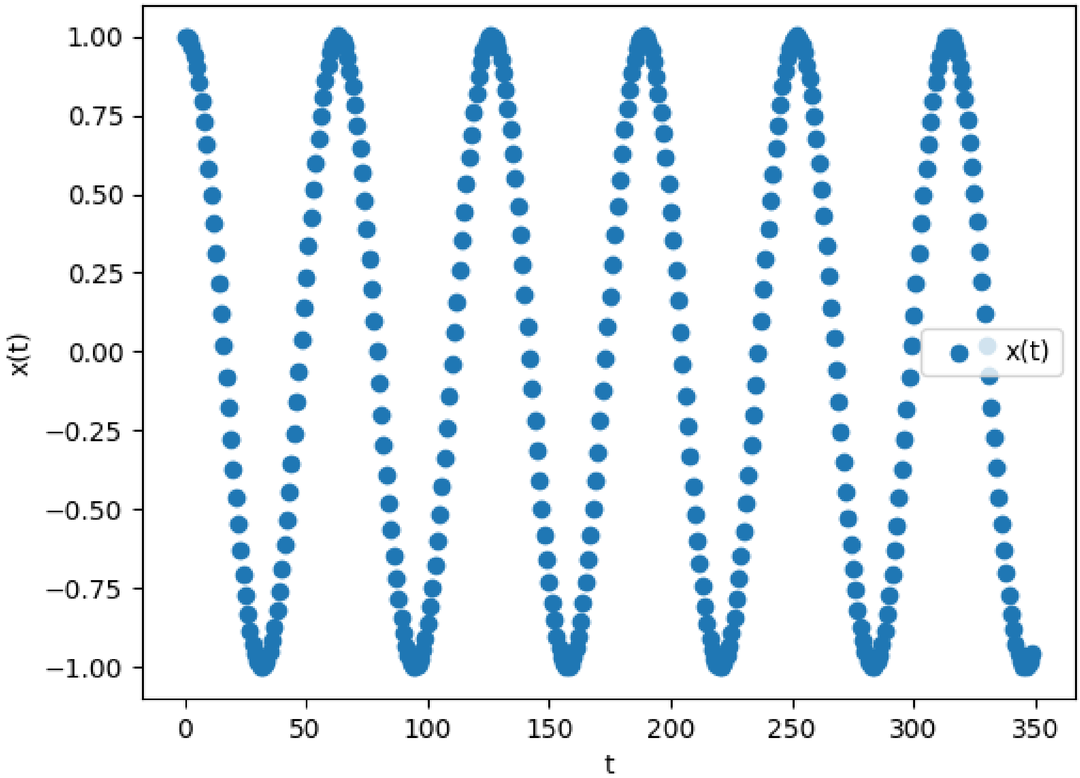
3. Opis metody

Oba zadania rozwiązywaliśmy za pomocą metody eliminacji Gaussa-Jordana, metoda ta jest bardzo podobna do metody Gaussa. Polega na tym, że zapisujemy układ równań w postaci macierzowej. Naszym celem jest wyzerowanie wartości nad i pod przekątną w macierzy współczynników. Przechodzimy kolejno po wszystkich wierszach. Metodologia dla i-tego wiersza. Dzielimy i-ty wiersz przez współczynnik stojący przy i-tym wyrazie, w tym i-tym wierszu. Następnie każdy wiersz o “wartości” większej od i odejmujemy wiersz i-ty przemnożony przez współczynnikiem będącym i-tym wyrazem w danym wierszu. Czynność tę powtarzamy, aż przejdziemy tym algorytmem przez wszystkie wiersze i otrzymamy macierz jednostkowa. Oczywiście te wszystkie operacje wykonujemy to też na kolumnie wyrazów wolnych (Najłatwiej przy pomocy macierzy współczynników i wyrazów wolnych stworzyć macierz rozszerzoną, metodologia się nie zmienia). Po otrzymaniu takiej macierz możemy zamienić ją dla ułatwienia na układ równań i wtedy widzimy, że wektor niewiadomych jest równy wektorowi wyrazów wolnych.

$$x_1 = b_1^{(n)}$$
$$x_2 = b_2^{(n)}$$
$$\dots$$
$$x_n = b_n^{(n)}$$

4. Wyniki

4.1. W zadaniu 1.2 przyjmując warunki początkowe k/m = 1, v0 = 0, A = 1 oraz krok całkowania h = 0.1 otrzymujemy następujący wykres wychylenia w czasie:



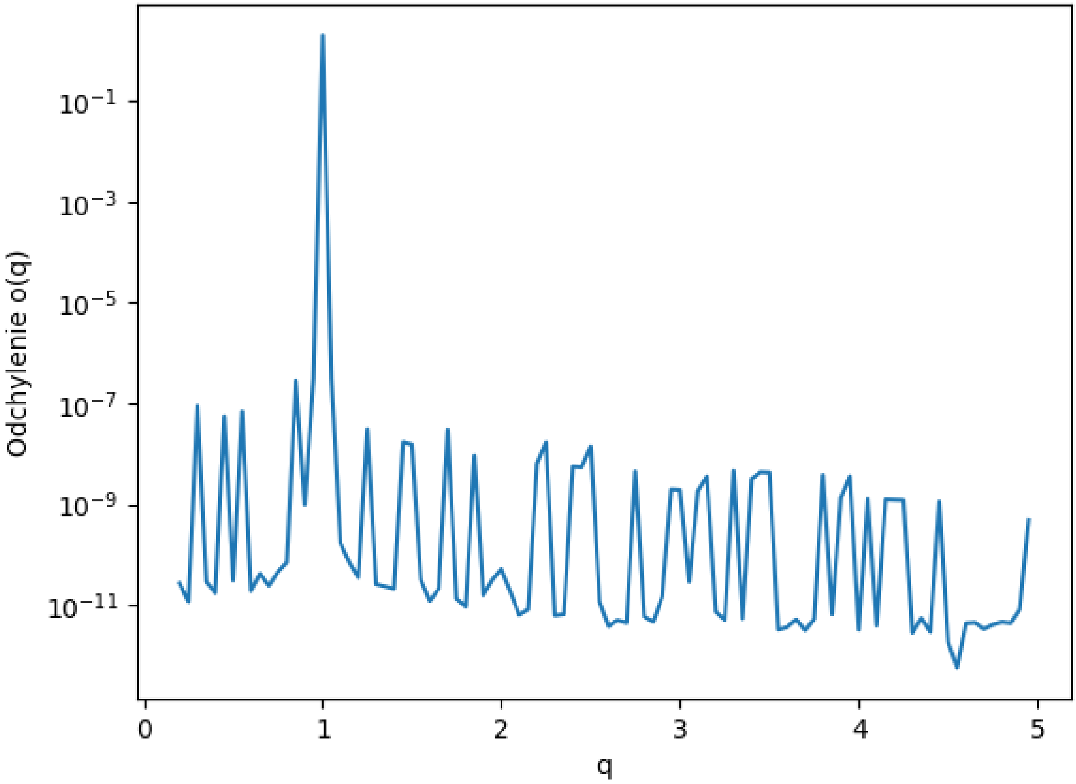
wykres 1

Widzimy, że nasz wykres pokrywa się z wykresem cos(t) i nie bez powodu bo, rozważany problem możemy również zapisać w postaci

$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

Podstawiając nasze warunki początkowe A = 1, ω = 1 otrzymujemy równanie x(t) = cost. Jak już zauważyliśmy pokrywa się on z naszym wykresem co świadczy o poprawnym wykonaniu zadania.

4.2. Po obliczeniu b=Ax, następnie obliczamy c=Ax i za pomocą wzoru (4) obliczamy odchylenie, q w zakresie od 0.2 do 5 i z krokiem 0.05:



wykres 2

5. Podsumowanie

Przywołane zadania przedstawiały układy równań liniowych z duża liczbą niewiadomych. Naszym zadaniem było je rozwiązać. Rozwiązaliśmy je za pomocą metody eliminacji Gaussa-Jordana.

5.1 w zadaniu 1.1. jak widzimy wynik dla naszych warunków początkowych ładnie pokrywa się z wykresem analityczny, co świadczy o dużej dokładności przedstawionej metody. Co ciekawe metoda jest bardzo efektywna, bo nawet dla dużej ilości kroków (w moim przypadku 350, czyli de facto macierz 350x350), obliczenia nie sprawiały specjalnie dużych problemów.

5.2 w zadaniu 1.2. na wykresie 2 widzimy jednoznacznie, że w okolicach 1 wartość odchylenia zdecydowanie odbiega od całej reszty (gwałtownie zaczyna rosnąć). Dzieje się tak dlatego, że dla q=1 układ równań jest sprzeczny i nie ma rozwiązań.

Również gdy q jest bliskie tej wartości to to układ ma jednoznaczne rozwiązanie, ale numerycznie jest źle uwarunkowany, bo macierz A jest bliska osobowości.