Sprawozdanie laboratorium metody numeryczne Lab 12 - Całkowanie numeryczne metodą Simpsona

Jędrzej Szostak

1. Cel ćwiczenia

Nauka numerycznego obliczania całki przy pomocy metody Simpsona.

2. Opis problemu

Mieliśmy obliczyć całkę postaci:

$$\int_0^{\Pi} x^m sin(kx)dx$$

dla trzech przypadków i w każdym z nich:

- m=0, k=1
- m = 1, k=1
- m = 5, k =5

Do sprawdzenia naszych obliczeń musieliśmy dysponować wartościami dokładnymi, które można dość łatwo obliczyć korzystając z rozwinięcia funkcji sin(x) w szereg:

$$\int_a^b x^m sin(kx)dx = \sum_{i=0}^{\infty} (-\ 1)^i \frac{(kx)^{2i+m+2}}{k^{m+1}(2i+1)!(2i+m+2)}\Big|_a^b$$

W naszym wypadku wartość x-a nie jest zbyt duża więc sumę szeregu (2) możemy łatwo obliczyć sumując tylko 20-30 pierwszych wyrazów.
Następnie należało wykonać to samo zadanie korzystając z metody Simpsona dla następującej liczby węzłów: n = 2p + 1 = 11, 21, 51, 101, 201.

3. Opis metody

Metoda Simpsona jest jedną z metod przybliżonego całkowania. Jako przybliżenie stosujemy parabolę przechodzą przez trzy kolejne węzły. Pole pod parabolą w przedziale ($-h$, h) równe jest całce oznaczonej:

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx = \frac{h}{3}(f(-h) + f(0) + f(h))$$

Do uzyskania poprawnego wyniku rozszerzamy tę metodę na cały przedział , dzieląc go na n równych części i dla każdego z nich dokonujemy obliczeń.
Znając wartości $f(x)$ w równoodległych węzłach $x_0 - x_n$ gdzie $n = 2p$ otrzymujemy wzór na sumę pól pod kolejnymi parabolami:

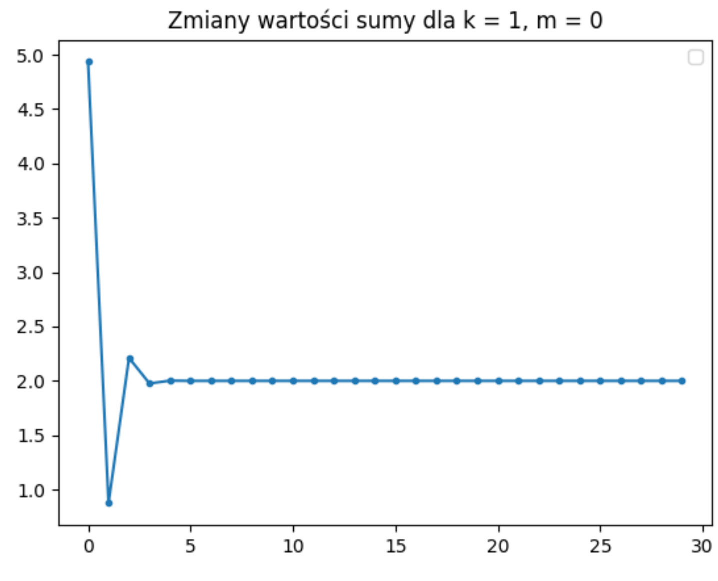
$$\int_{x_0}^{x_n} \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4\sum_{i=1}^{p} y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{p-1} y_{2i} + y_n)$$

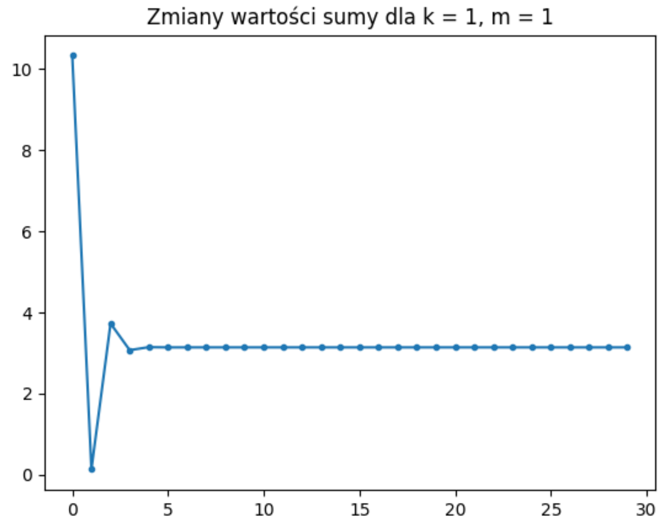
,gdzie

$$y_i = ax_i^2 + bx_i + c$$

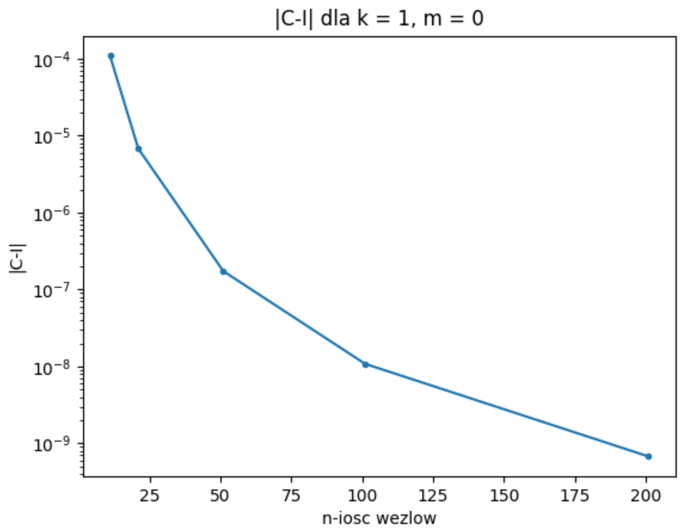
4. Wyniki

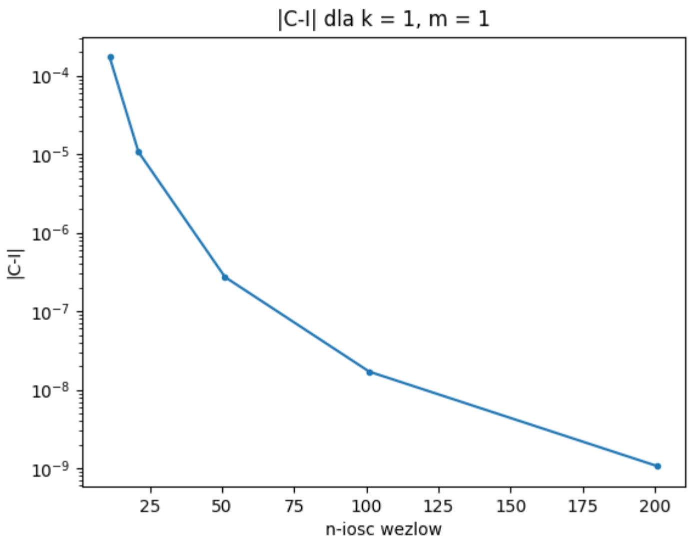
Wyniki zmiany wartości sum, dla liczby sumowanych wyrazów $l = 1,2,3, . . . , 30$ w metodzie analitycznej:

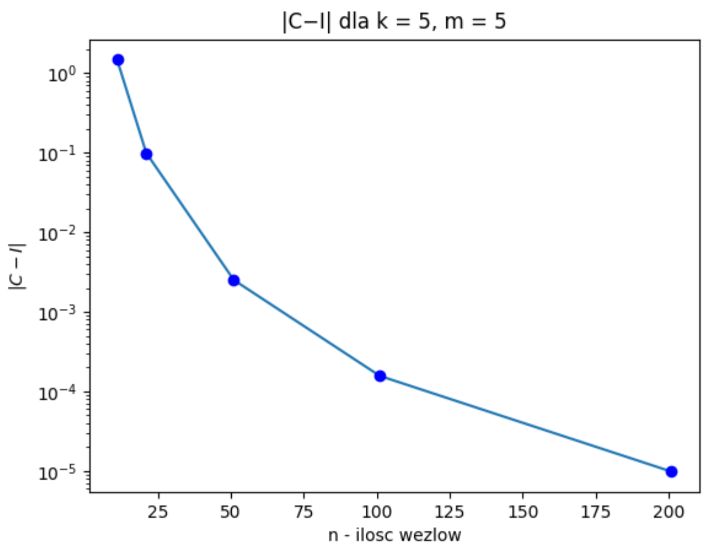




Wykresy zależności $|C - I|$ od ilości węzłów, gdzie I – wartość dokładna całki, C – wartość całki obliczona numerycznie w skali logarytmicznej dla metody Simpsona:


|C-I| dla k = 1, m = 0
|C-I|
n-iosc wezlow


|C-I| dla k = 1, m = 1
|C-I|
n-iosc wezlow


|C−I| dla k = 5, m = 5
|C − I|
n - ilosc wezlow

5. Wnioski

Metoda Simpsona jest bardzo dobrą metodą do obliczenia wartości całki dla funkcji, które nie przyjmują dużych wartości. Dla dwóch pierwszych przypadków wyniki były zgodne z oczekiwanymi wcześniej niż dla trzeciego zestawu parametrów. Wraz ze wzrostem m oraz k, różnica pomiędzy wartością oczekiwaną I a otrzymywaną C staje się coraz większa. Na dokładność otrzymanych wyników ma również duży wpływ liczba węzłów. Dla dużych n dostajemy już bardzo dokładne wyniki.