

Sprawozdanie laboratorium metody numeryczne

Lab 8 - Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach.

Jędrzej Szostak

1. Cel ćwiczenia

Zapoznanie się z metodą interpolacji przy pomocy funkcji sklejanych będących wielomianami 3 stopnia poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach.

2. Opis problemu

Naszym zadaniem była interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie pochodnych drugiego stopnia w węzłach dla dwóch przypadków (funkcji):

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (1)$$

oraz

$$f_2(x) = \cos(2x) \quad (2)$$

W tym celu musieliśmy wykonać algorytmy służące do wyznaczania wartości drugich pochodnych w węzłach oraz algorytm do wyznaczania wartości funkcji w położeniu międzywęzłowym przy warunkach początkowych zakładających, że pochodne drugiego rzędu na krańcach przedziały wynoszą 0. Dodatkowo dla $f_1(x)$ oraz liczby węzłów równej 10, w przedziale $x \in [-5, 5]$ wyznaczyliśmy wartości drugich pochodnych i porównaliśmy je z wartościami analitycznymi liczonymi zgodnie ze wzorem:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \approx \frac{f(x - \Delta x) - 2f(x) + f(x + \Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad (3)$$

, gdzie $\Delta x = 0.01$.

3. Opis metody

Do rozwiązania problemu musieliśmy zacząć od rozwiązania układu równań liniowych:

$$Am = d \quad (4)$$

którego generatorem jest:

$$\mu_1 m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i m_{i+1} = d_i \quad (5)$$

gdzie m_i to poszukiwane wartości drugich pochodnych w węzłach (indeksowanych $i = 1, 2, \dots, n$). Pozostałe oznaczenia:

$$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \mu_i = 1 - \lambda_i \quad (6)$$

elementy wektora wyrazów wolnych

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right) \quad (7)$$

oraz położenia węzłów: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ i odległości międzywęzłowe

$$h_i = x_i - x_{i-1} \quad (8)$$

Zostały narzucone warunki na drugie pochodne na brzegach, czyli:

$$m_1 = \alpha, m_n = \beta \quad (9)$$

Po wprowadzeniu warunków brzegowych do układu równań otrzymujemy go w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ \beta \end{bmatrix}$$

Po jego rozwiązaniu wartość funkcji interpolującej dla $x \in [x_{i-1}, x_i]$ (numer poprzedzającego i) wyznaczamy według poniższego wzoru:

$$s_{i-1}(x) = m_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + m_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i \quad (10)$$

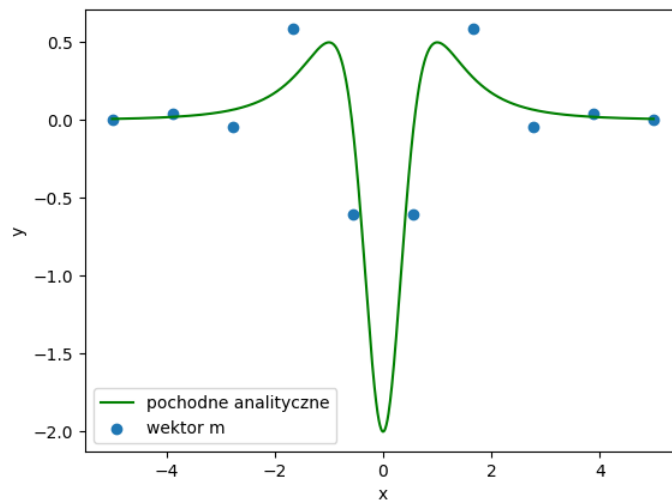
, gdzie stałe całkowania mają postać:

$$A_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6} (m_i - m_{i-1}) \quad (11)$$

$$B_i = y_{i-1} - m_{i-1} \frac{h_i^2}{6} \quad (12)$$

4. Wyniki

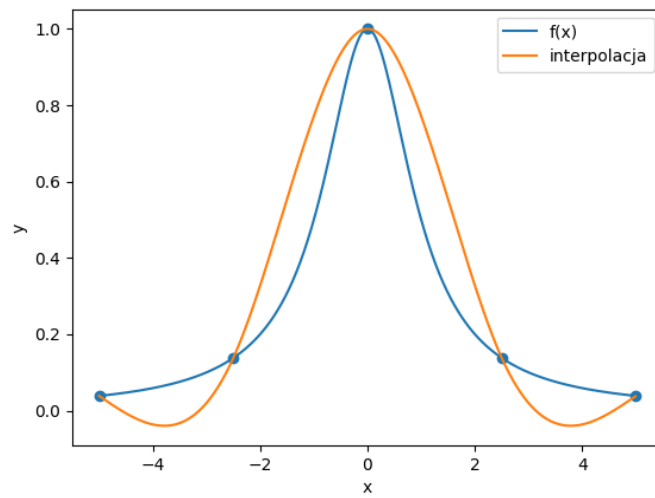
Wyznaczone wartości dla drugich pochodnych dla funkcji (1) dla $n = 10$, w przedziale $x \in [-5, 5]$ i $\Delta x = 0.01$:



Rysunek 1. Wykres porównujący otrzymane pochodne z wartościami analitycznymi.

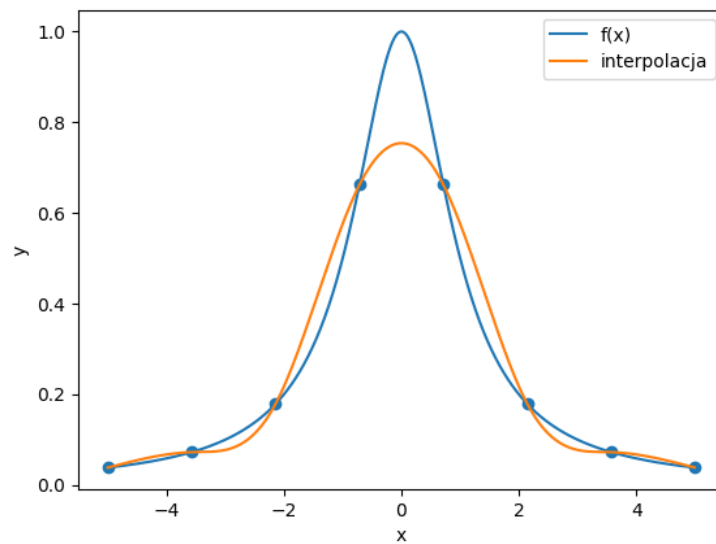
Następnie uzyskane interpolacje dla funkcji (1):

a) $n = 5$



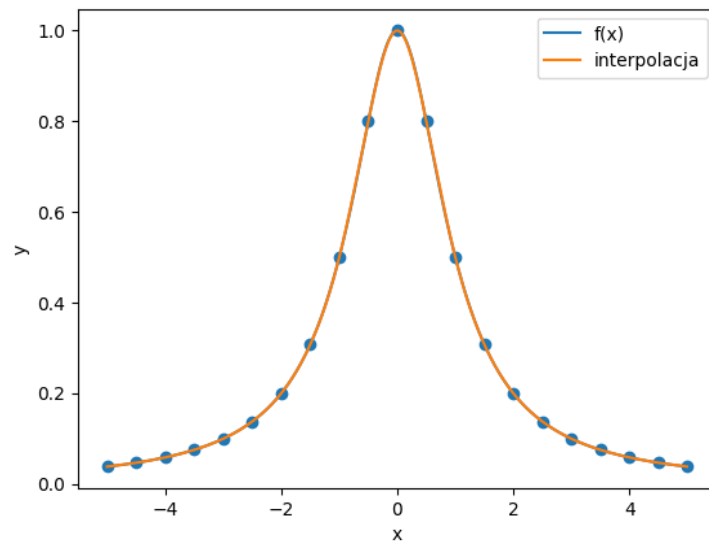
Rysunek 2. interpolacja funkcji $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ dla 5 węzłów

b) $n = 8$



Rysunek 3. interpolacja funkcji $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ dla 8 węzłów

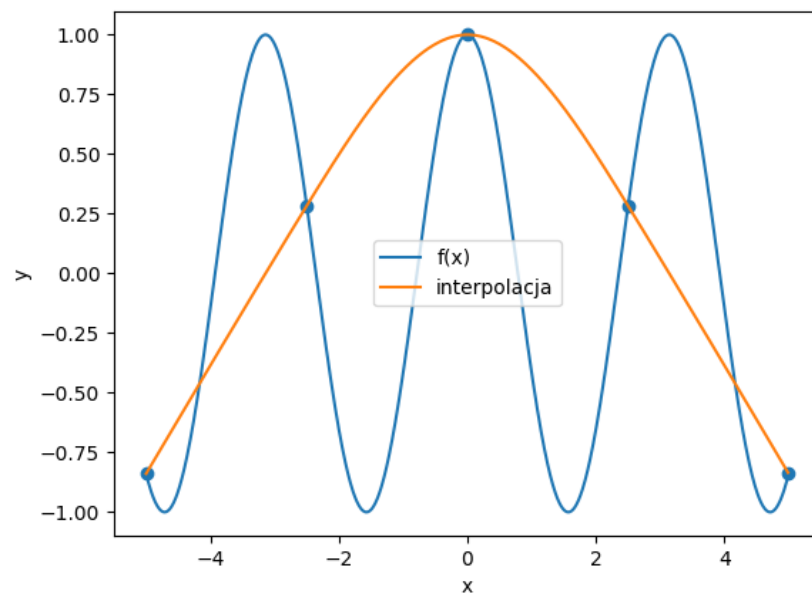
c) $n = 21$



Rysunek 4. interpolacja funkcji $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ dla 21 węzłów

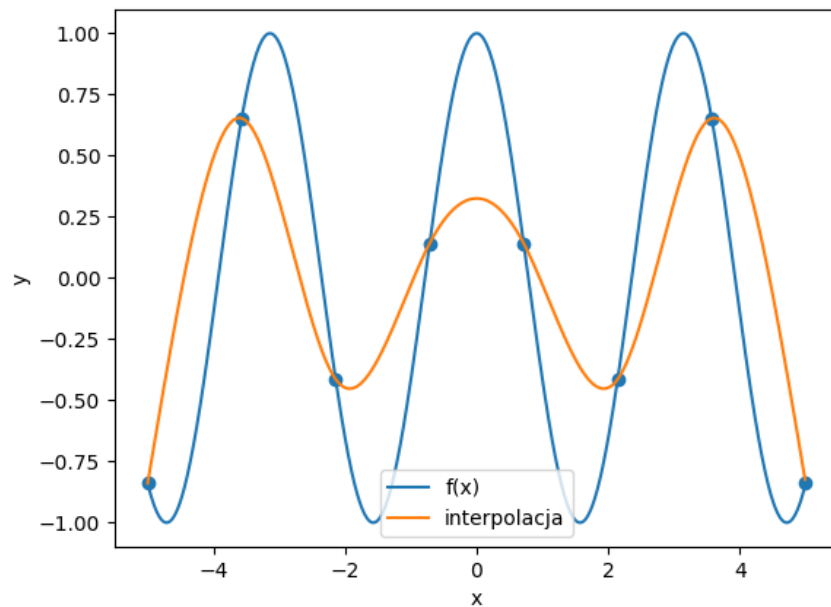
Oraz uzyskane interpolacje dla funkcji (2):

a) $n = 5$



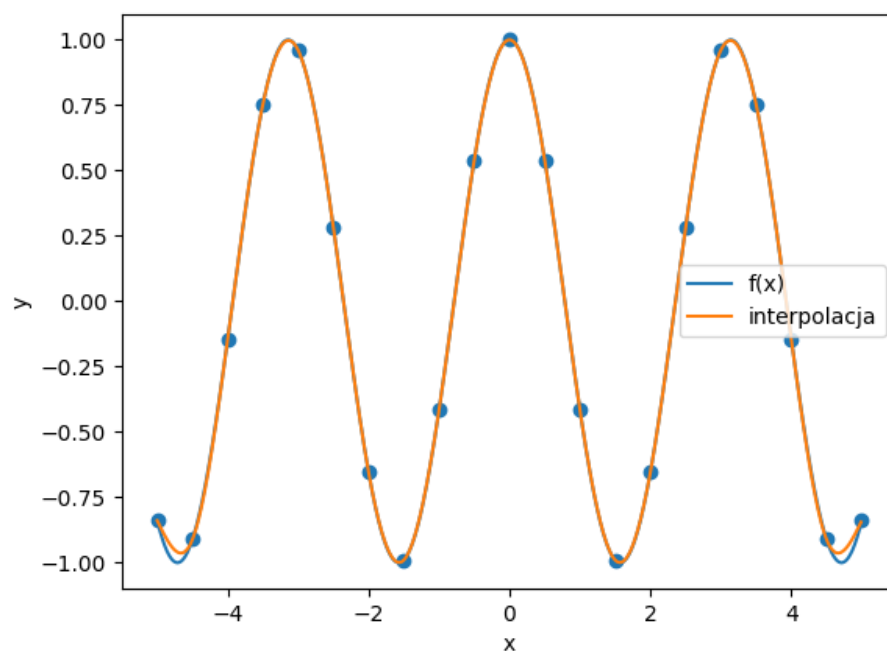
Rysunek 5. interpolacja funkcji $f_2(x) = \cos(2x)$ dla 5 węzłów

b) $n = 8$



Rysunek 6. interpolacja funkcji $f_2(x) = \cos(2x)$ dla 8 węzłów

c) $n = 21$



Rysunek 7. interpolacja funkcji $f_2(x) = \cos(2x)$ dla 21 węzłów

5. Wnioski

Interpolacja funkcjami sklejanymi jest metodą wydajną i dobrze uwarunkowaną numerycznie dla wielomianów niskiej stopni. Wartości wyznaczone metoda

interpolacji są bliskie wartościom teoretycznym na krańcach przedziału, ale istotnie się “rozjeżdżają” na środku przedziału. Widzimy również, że wraz ze wzrostem węzłów interpolacyjnych dokładność dopasowania wzrasta.