Minimalizacja wartości funkcji metodą interpolacji kwadratowej Powella

Tomasz Chwiej

15 maja 2018

1 Wstęp

W metodzie interpolacji Powella korzystamy z lokalnego przybliżenia funkcji wielomianem drugiego stopnia (wykład). Jeśli znamy położenie trzech punktów: $\{x_1, x_2, x_3\}$ i wartości funkcji w tych punktach $\{f(x_1), f(x_2), f(x_3)\}$, to przy założeniu że ciąg wartości funkcji jest malejący możemy wyznaczyć przybliżone położenie minimum:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{F[x_1, x_2]}{2F[x_1, x_2, x_3]} \tag{1}$$

gdzie:

$$F[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{2}$$

jest ilorazem różnicowym pierwszego rzędu, a

$$F[x_1, x_2, x_3] = \frac{\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} - \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}{x_3 - x_1} \tag{3}$$

jest ilorazem różnicowym drugiego rzędu. Wykorzystamy tę zależność do znalezienia minimum/maksimum wartości funkcji.

2 Zadania do wykonania

1. Zaprogramować metodę interpolacji Powella do znalezienia minimum wartości funkcji.
2. Dla funkcji
$$f_1(x) = ln\left(x^5 + 3x^2 + x + 9\right) \tag{4}$$
   - Sporządzić wykres funkcji w zakresie $x \in [-1.5, 1]$
   - Przyjąć jako punkty startowe: $x_1 = -0.5$, $x_2 = x_1 + h$, $x_3 = x_2 + h$, $h = 0.01$ i znaleźć kolejne 10 przybliżeń położenia minimum. W każdej iteracji do pliku proszę zapisać: x_1, x_2, x_3, x_m, $F[x_1, x_2]$, $F[x_1, x_2, x_3]$
   - Powtórzyć rachunki z poprzedniego podpunktu dla: $x_1 = -0.9$, $x_2 = x_1 + h$, $x_3 = x_2 + h$, $h = 0.01$. Dane zapisać do pliku.
3. Dla funkcji
$$f_2(x) = x^6 \tag{5}$$
   Przyjąć jako punkty startowe: $x_1 = 1.5$, $x_2 = x_1 + h$, $x_3 = x_2 + h$, $h = 0.01$ i znaleźć kolejne 100 przybliżeń położenia minimum. W każdej iteracji do pliku proszę zapisać jak poprzednio: x_1, x_2, x_3, x_m, $F[x_1, x_2]$, $F[x_1, x_2, x_3]$

4. W sprawozdaniu proszę

   - **Nie zamieszczać tabelek z danymi**
   - Sporządzić rysunki przedstawiające położenia kolejnych przybliżeń w funkcji iteracji dla trzech rozważanych przypadków
   - Dla każdego rozważanego przypadku proszę sporządzić rysunek pokazujący zmiany ilorazu 1 i 2 rzędu w funkcji iteracji
   - Uzasadnić: dlaczego dla funkcji $f_1(x)$ dla drugiego zestawu punktów startowych znajdujemy maksimum a nie minimum (analiza wartości ilorazów)?
   - Wyjaśnić: dlaczego dla funkcji $f_2(x)$ metoda jest wolnozbieżna? oraz Jaki warunek stopu jest najodpowiedniejszy?
   - O istnieniu minimum bądź maksimum w danym punkcie rozstrzyga wartość drugiej pochodnej. Czy dla funkcji $f_2(x)$ też tak jest?