Sprawozdanie laboratorium metody numeryczne
Lab 3 - metoda sprzężonego gradientu i największego spadku dla macierzy wstęgowej

Jędrzej Szostak

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia była nauka rozwiązywania układów równań metodą sprężonego gradientu i największego spadku przy użyciu macierzy wstęgowej.

2. Opis problemu

Naszym zadaniem było rozwiązanie układu równań, gdzie macierz A to macierz wstęgowa przedstawiona wzorem:

$A[i][j] = \frac{1}{1+|i-j|},\ gdy\ |i - j| \leq m,\ i,\ j = 0,...,\ n - 1$
$A[i][j] = 0,\ gdy\ |i - j| > m$

,gdzie w naszym przypadku jako *m* przyjęliśmy 5, a *n = 1000.*
Z kolei wektor wyrazów wolnych jest wypełniany w następujący sposób:
$B[i] = i,\ i = 0,...,\ n - 1$
Za wektor *x* przyjęliśmy wektor o rozmiarze *n* wypełniony samymi zerami w pierwszym przypadku, a w drugim analogiczny wektor jedynek.

3. Opis metody

3.1 **Metoda największego spadku**
Jest to metoda iteracyjna rozwiązywania układu równań, polegająca na znalezieniu minimum zadanej funkcji celu. W każdym kroku, w zadanym kierunku wyszukiwana jest najmniejsza wartość funkcji celu.

Na początku obliczamy wektor reszt ze wzoru:

$$r = v = B - Ax_k$$

Następnie obliczamy współczynnik α dla każdej iteracji:

$$\alpha = \frac{r_k^T r_k}{v_k A v_k}$$

$,\ gdzie\ v_k\ i\ r_k\ to\ wektor\ pomocniczy\ i\ wektor\ reszty\ dla\ k - tej\ iteracji\ pętli$

Dzięki temu obliczamy przybliżony wektor rozwiązań dla każdej iteracji:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha v_k$$

Jeśli norma wektora x równa $\sqrt{r_k^T r_k}$ jest większa od 1e-6 to powtarzamy działanie od początku aż ten warunek przestanie być spełniany. W naszym wypadku też dla każdej iteracji zapisywaliśmy do wektorów wartości norm wektora reszt i wektora rozwiązań.

3.2 Metoda sprzężonych gradientów

Polega ona na postępowaniu według poniższych kroków:
Przed wejściem do pętli obliczamy wektor reszt i pomocniczy wektor v:

$$r = v = B - Ax$$

Następnie już wewnątrz pętli obliczamy współczynnik α:

$$\alpha = \frac{r_k^T r_k}{v_k A v_k}$$

$, gdzie\ v_k\ i\ r_k\ to\ wektor\ pomocniczy\ i\ wektor\ reszty\ dla\ k - tej\ iteracji\ pętli$

obliczamy wektor rozwiązań i reszt:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha v_k$$

$$r_{k+1} = r_k - \alpha v_k$$

i ostatecznie współczynnik β, który pozwala wyznaczyć nowy wektor pomocniczy:

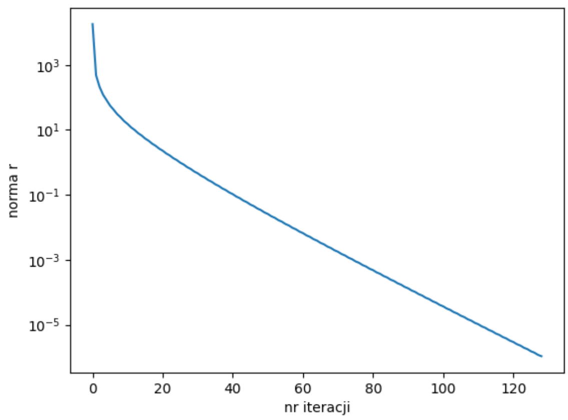
$$\beta = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}$$

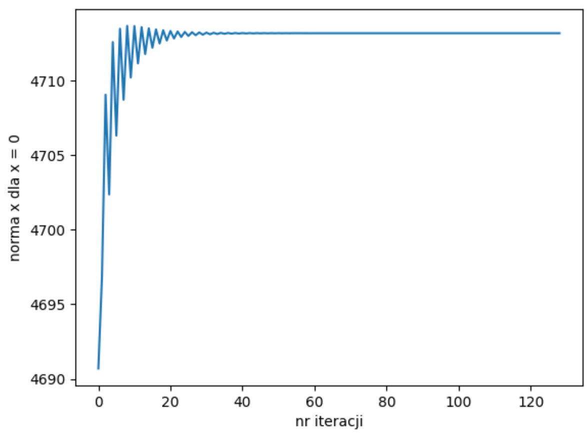
$$v_{k+1} = r_{k+1} + \beta v_k$$

Jeśli norma wektora r równa $\sqrt{r_k^T r_k}$ jest większa od 1e-6 to powtarzamy działanie zaczynając od obliczenia współczynnika α.

4. Wyniki

4.1 Metoda największego spadku



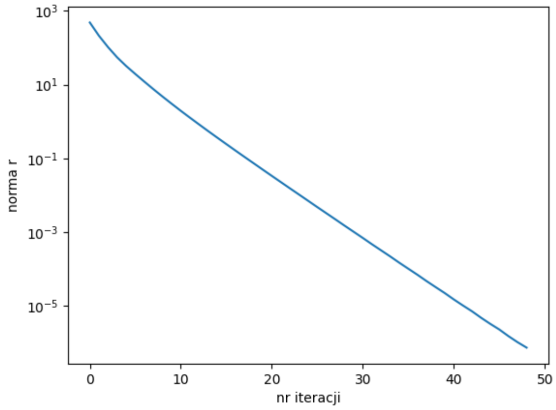


Rys.1 norma wektora r w zależności od numeru iteracji

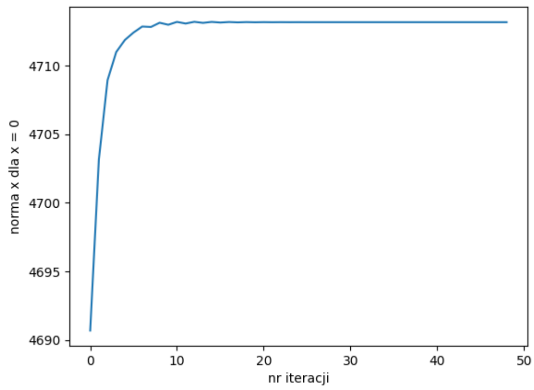
Rys.2 norma wektora rozwiązań x dla kolejnych iteracji

W wypadku tego algorytmu ilość przejść pętli wynosiła 129. Była ona niezależna od wektora startowego *x* (czy był wektorem zer czy jedynek). Wykresy też dla tych dwóch wektorów startowych wyglądały bardzo podobnie, dlatego ich nie umieszczałem. Jedyne czym się różniły czasem wykonania i dla wektora zer był on nieznacznie większy w większości testowanych przypadków (chociaż były wyjątki i różnice nie były duże).

4.2 Metoda sprzężonego gradientu



Rys.3 norma wektora r w zależności od numeru iteracji



Rys.4 norma wektora rozwiązań x dla kolejnych iteracji

W wypadku tej metody ilość iteracji pętli wynosiła 49 co jest znacznie niższą ilością niż w przypadku metody największego spadku, z czego wynika, że czas wykonania algorytmu też był niższy.

5. Podsumowanie

W wypadku, obu metod udało się otrzymać poprawny wynik z dokładnością bliską podwójnej precyzji, co wskazuje na poprawne wykonanie ćwiczenia.Liczba powtórzeń iteracji w algorytmie sprzężonego gradientu wynosi 49 a największego spadku 129 co wskazuje na to, że ten pierwszy jest dużo bardziej efektywny (prawie 3 krotnie). Czas wykonania mniej efektywnego z algorytmów (największego spadku) jest rzędy 0.15 sekundy co przy tak dużej macierzy pokazuje, że w ogólności oba te algorytmy potrafią bardzo sprawnie rozwiązywać nawet duże układy równań.