# Aproksymacja Pade funkcji $\exp(-x^2)$

Tomasz Chwiej

8 maja 2018

## 1 Wstęp

Na laboratorium funkcję $f(x)$ przybliżymy przy pomocy funkcji wymiernej

$$R_{N,M}(x) = \frac{P_N(x)}{Q_M(x)} = \frac{\sum_{i=0}^{N} a_i x^i}{\sum_{i=0}^{M} b_i x^i} \tag{1}$$

z $b_0 = 1$. W tym celu rozwijamy funkcję $f(x)$ w szereg Maclaurina

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \tag{2}$$

i przyrównujemy pochodne $f(x)$ oraz $R_{N,M}(x)$ dla rzędu $k = 0, 1, \ldots, N + M$

$$\left.\frac{d^k R_{N,M}(x)}{dx^k}\right|_{x=0} = \left.\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right|_{x=0} \tag{3}$$

Warunki te generują układ równań

$$\sum_{m=1}^{N} b_m \cdot c_{N-m+k} = -c_{N+k}, \quad k = 1, 2, \ldots, N \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} c_{N-M+1} & c_{N-M+2} & \cdots & c_N \\ c_{N-M+2} & c_{N-M+3} & \cdots & c_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_N & c_{N+1} & \cdots & c_{N+M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_M \\ b_{M-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{N+1} \\ -c_{N+2} \\ \vdots \\ -c_{N+M} \end{bmatrix} \tag{5}$$

który trzeba rozwiązać aby znaleźć współczynniki $\vec{b} = [b_0, b_1, \ldots, b_M]$ a następnie korzystamy z relacji

$$a_i = \sum_{j=0}^{i} c_{i-j} \cdot b_j, \quad i = 0, 1, \ldots, N \tag{6}$$

w celu wyznaczenia współczynników $\vec{a} = [a_0, a_1, \ldots, a_N]$.

## 2 Zadania do wykonania

Naszym zadaniem jest wykonanie aproksymacji Padego funkcji

$$f(x) = \exp(-x^2) \tag{7}$$

kolejno dla $(N, M) = (2, 2), (4, 4), (6, 6), (2, 4), (2, 6), (2, 8)$. W tym celu wykonujemy następujące kroki

1. Współczynniki szeregu Maclaurina $(c_k)$ otrzymujemy bezpośrednio z rozwinięcia funkcji $\exp(-x^2)$

$$exp(-x^2) = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p \frac{x^{2p}}{p!} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot x^k \tag{8}$$

   Wartości współczynników $c_k$ zachowujemy w wektorze $\vec{c} = [c_0, c_1, \ldots, c_n]$

2. Rozwiązujemy układ równań dany wzorem (5) używając biblioteki GSL

$$A \cdot \vec{x} = \vec{y} \tag{9}$$

   gdzie:

$$A_{i,j} = c_{N-M+i+j+1}, \quad i,j = 0,1,\ldots,M-1 \tag{10}$$

$$y_i = -c_{N+1+i}, \quad i = 0,1,\ldots,M-1 \tag{11}$$

   po rozwiązaniu układu równań (9) zachowujemy współczynniki wielomianu $Q_M(x)$

$$b_0 = 1 \quad \text{oraz} \quad b_{M-i} = x_i, \quad i = 0,1,\ldots,M-1 \tag{12}$$

   Współczynniki zapisujemy w wektorze $\vec{b} = [b_0, b_1, \ldots, b_M]$.

3. Wyznaczamy współczynniki wielomianu $P_N(x)$ zgodnie z wzorem (6). Współczynniki zapisujemy w wektorze $\vec{a} = [a_0, a_1, \ldots, a_N]$.

4. Dla ustalonego n tworzymy wykresy $f(x)$ oraz $R_{N,M}(x)$ (używając wzoru 1) na jednym rysunku w zakresie $x \in [-5, 5]$.

Przykładowe wyniki: