Sprawozdanie laboratorium metody numeryczne Lab 7 - interpolacja Newtona z optymalizacją położeń węzłów

Jędrzej Szostak

1. Cel ćwiczenia

   Zapoznanie się z metodą interpolacji Newtona oraz metodami optymalizacji położeń węzłów takich jak metoda Czebyszewa.

2. Opis problemu

   Interpolacja to metoda numeryczna polegająca na budowaniu w danym obszarze $\Omega \subset R^n$ tzw. funkcji interpolacyjnej, która przyjmuje w nim z góry zadane wartości w ustalonych punktach nazywanych węzłami. Stosowana jest zarówno w metodach numerycznych (np. przy obliczaniu całek ze skomplikowanych funkcji), jak i w naukach doświadczalnych przy budowaniu funkcji na podstawie danych pomiarowych w skończonej liczbie punktów.

   Naszym zadaniem było przeprowadzenie interpolacji wielomianowej Newtona dla funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \tag{1}$$

3. Opis metody

   Wzór interpolacyjny Newtona wykorzystany do rozwiązania zadania przedstawia się następująco:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(x_0) \cdot \prod_{i=0}^{j-1}(x - x_i) \tag{2}$$

   gdzie: $f^{(j)}(x_0)$ to iloraz rzędu *j* liczony dla węzła x_0 , a x_i są położeniami węzłów,n - stopień wielomianu, *x* - szukane przybliżenie wartości wielomianu, *W(x)* - wartość wielomianu dla argumentu *x*. Wartości ilorazów różnicowych wyznaczyliśmy zgodnie z poniższą (prawą) tabelą.

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
y_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
y_1 & f^{(1)}_{x_{0,\dots}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
y_2 & f^{(1)}_{x_1} & f^{(2)}_{x_0} & 0 & 0 & 0 \\
y_3 & f^{(1)}_{x_2} & f^{(2)}_{x_1} & f^{(3)}_{x_0} & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\
y_n & f^{(1)}_{x_{n-1}} & f^{(2)}_{x_{n-2}} & f^{(3)}_{x_{n-3}} & \dots & f^{(n)}_{x_0} \\
\hline
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
f_{0,0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
f_{1,0} & f_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
f_{2,0} & f_{2,1} & f_{2,2} & 0 & 0 & 0 \\
f_{3,0} & f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\
f_{n,0} & f_{n,1} & f_{n,2} & f_{n,3} & \dots & f_{n,n} \\
\hline
\end{array}
$$

gdzie: zerowa kolumna (y_i) to wartości funkcji w węzłach, a elementy $f_{j,j}$ to ilorazy różnicowe rzędu *j* występujące we wzorze (2). Do wyznaczenia elementów tabeli użyliśmy algorytmu:

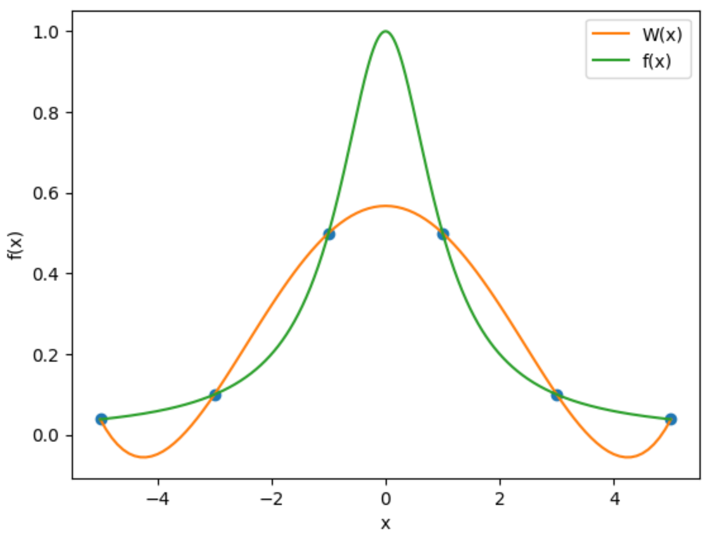
$$f_{i,j} = \frac{f_{i,j-1} - f_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}} \qquad (3)$$

Optymalizacji węzłów dokonaliśmy przy pomocy wielomianu Czebyszewa, którego miejsca zerowe stanowią optymalne położenia węzłów interpolacji, które w efekcie pozwalają na uzyskanie interpolacji o najmniejszym oszacowaniu błędu interpolacji: *ε(x) = f(x) − W(x)*. Dla funkcji wielomianowych w przedziale *[a , b]*, zera wielomianów Czebyszewa można wyznaczyć korzystając z następującego wzoru:

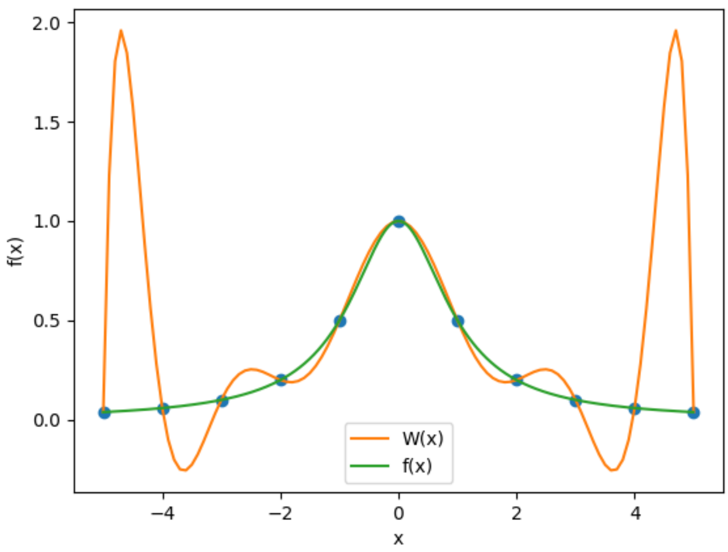
$$x_i = \frac{1}{2}\left[(x_{min} - x_{max})cos(\Pi\frac{2i+1}{2n+2}) + (x_{min} - x_{max})\right],\ i \ = \ 0, 1,\dots, n \qquad (4)$$

4. Wyniki

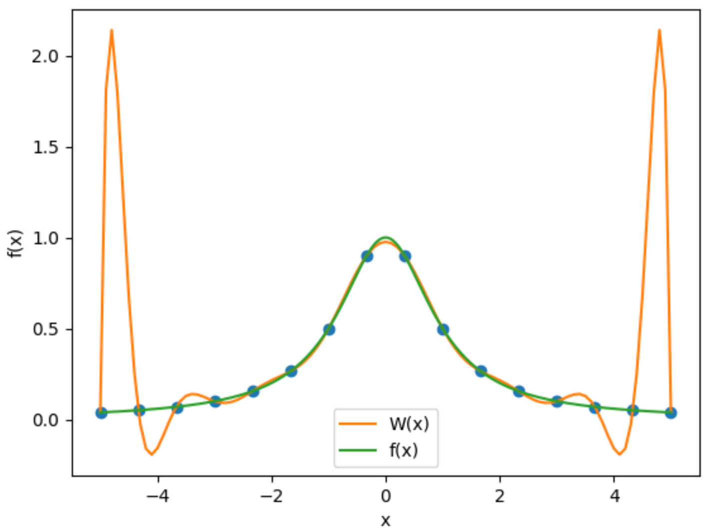
Interpolacji dokonywano w przedziale *[−5, 5]*, dla *n+1* węzłów *i=0,1,2 ,... , n* , gdzie za *n* kolejno przyjmowano *{5, 10 , 15, 20}*. Najpierw otrzymaliśmy wyniki bez optymalizacji węzłów.



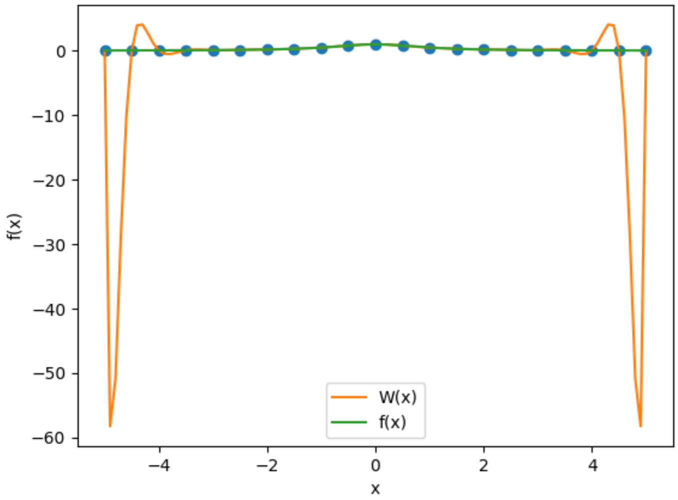
Rysunek 1. Wykres interpolacyjny dla n=5 i węzłów rozstawionych symetrycznie



Rysunek 2. Wykres interpolacyjny dla n=10 i węzłów rozstawionych symetrycznie

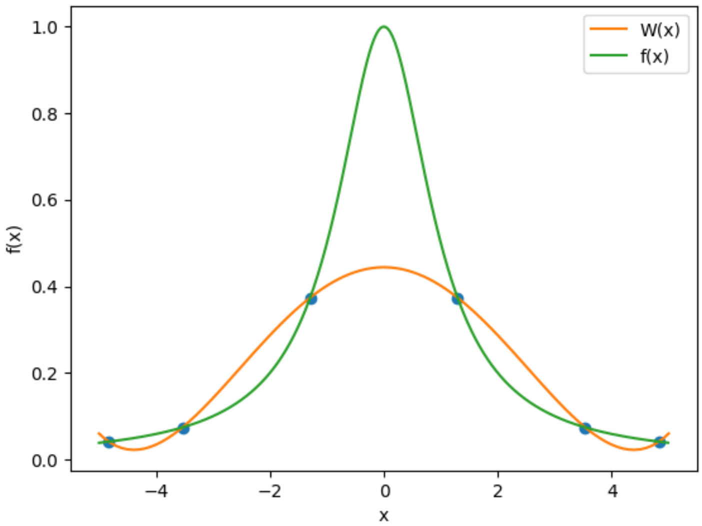


Rysunek 3. Wykres interpolacyjny dla n=15 i węzłów rozstawionych symetrycznie

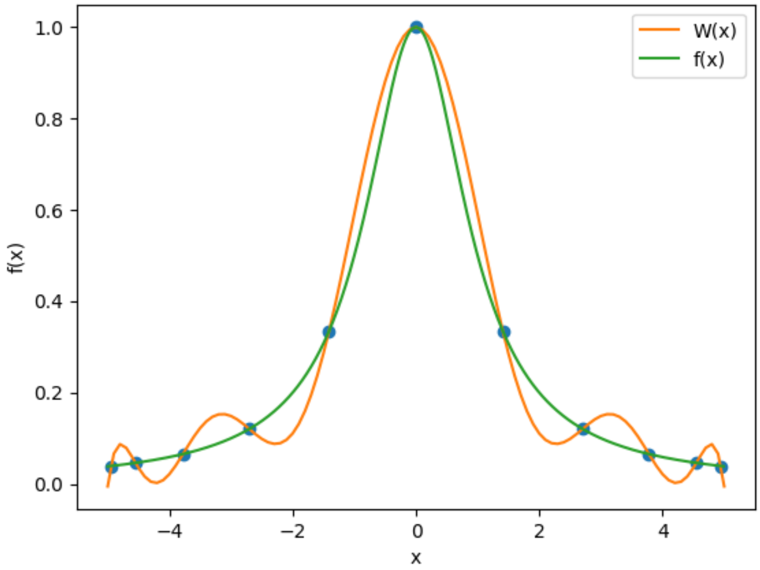


Rysunek 4. Wykres interpolacyjny dla n=20 i węzłów rozstawionych symetrycznie

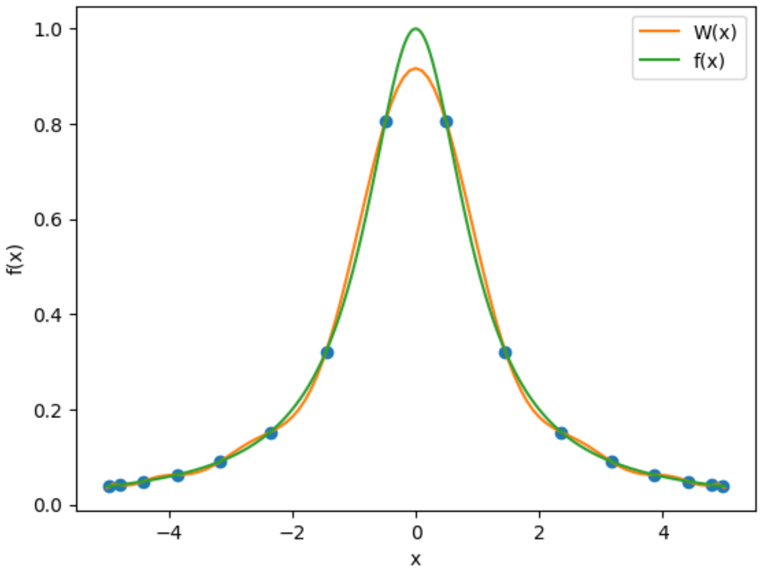
Następnie wyznaczyliśmy wielomain interpolacyjny, ale ze zoptymalizowanymi węzłami interpolacyjnymi przy pomocy wielomianu Czebyszewa:



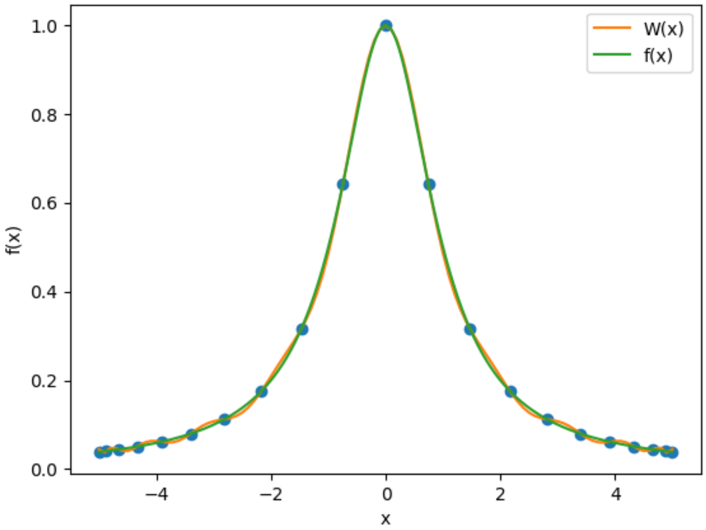
Rysunek 5. Wykres interpolacyjny dla n=5 i węzłów zoptymalizowanych metodą Czebyszewa



Rysunek 6. Wykres interpolacyjny dla n=10 i węzłów zoptymalizowanych metodą Czebyszewa



Rysunek 6. Wykres interpolacyjny dla n=15 i węzłów zoptymalizowanych metodą Czebyszewa



Rysunek 8. Wykres interpolacyjny dla n=20 i węzłów zoptymalizowanych metodą Czebyszewa

5. Wyniki

Wyniki otrzymane podczas ćwiczenia są zgodne z przykładami podanymi przez prowadzącego co świadczy o poprawnym wykonaniu ćwiczenia. Gdy węzły interpolacyjne są rozłożone równomiernie to widzimy, że wraz ze wzrostach ich ilości poprawia się dopasowanie w środku przedziału, ale pogarsza przy krańcach. Widzimy, że optymalizacja doboru węzłów przy pomocy wielomianu Czebyszewa rozwiązuje ten problem. Ustawienie takie pozwala na zagęszczenie węzłów na krańcach przedziałów przez co dopasowanie tam jest lepsze. W takim przypadku przybliżenie wraz ze wzrostem ilości węzłów interpolacyjnych zaczyna być bardzo dokładne. Metoda jest dobrze uwarunkowana numerycznie i efektywna.