Computació Numèrica

Sistemes d'equacions NO lineals

M. Àngela Grau Gotés

Departament de Matemàtica Aplicada II
Universitat Politècnica de Catalunya · BarcelonaTech.

30 de març de 2020

drets d'autor

"Donat el caràcter i la finalitat exclusivament docent i eminentment il·lustrativa de les explicacions a classe d'aquesta presentació, l'autor s'acull a l'article 32 de la Llei de propietat intel·lectual vigent respecte de l'ús parcial d'obres alienes com ara imatges, gràfics o altre material contingudes en les diferents diapositives"

© 2019 by M. Àngela Grau Gotés.

Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional.

Índex

1. Sessió 8.
   - Matlab
   - Sistemes d'equacions NO lineals
     - Pràctica 19: Resolució gràfica
     - Pràctica 20: Mètodes iteratius
     - Pràctica 21: Variants del mètode de Newton
   - Exercicis
2. Referències

El manual de referència és
http://www.mathworks.es/es/help/matlab/

MATLAB®

Recordem . . .

Funcions matricials

a) La <u>trasposada</u> d'una matriu `A`, s'obté per `A'`.

b) La <u>inversa</u> d'una matriu `A`, s'obté per `inv(A)`.

c) La <u>diagonal</u> d'una matriu `A`, s'obté per `diag(A)`.

d) El <u>determinant</u> d'una matriu `A`, s'obté per `det(A)`.

e) `rank(A)` és el <u>rang</u> d'una matriu `A`.

cc BY NC ND
© 2020 by M. Àngela Grau.

Recordem . . .

Funcions predefinides

a) `A\b`, solució del sistema $Ax = b$.

b) `[V,D]=eig(A)`, vectors i valors propis.

c) `[S,V,D]=svd(A)`, descompossició en valors singulars.

d) Parts d'una matriu:

- superior `triu(A)`,
- inferior `tril(A)`,
- diagonal `diag(A)`.

Sistemes d'equacions NO lineals

Sistemes d'equacions no lineals

La funció $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de diverses variables dóna lloc al sistema d'equacions no lineals

$$F(\mathbf{z}) = 0\,,$$

que també es pot escriure com

$$\left\{ \begin{array}{c} F_1(z_1, \ldots, z_n) = 0, \\ F_2(z_1, \ldots, z_n) = 0, \\ \vdots \\ F_n(z_1, \ldots, z_n) = 0. \end{array} \right. \qquad (1)$$

Pràctica 19

Sistemes de dues equacions i dues incògnites : resolució gràfica

Calcular valors aproximats de les solucions del sistema d'equacions no lineals

$$x = \sin(x+y)\,,$$
$$y = \cos(x-y)\,,$$

Es demana:

- Aproximeu la solució del sistema d'equacions gràficament. Consulteu la documentació de `FIMPLICIT`
- Fent ús de la instrucció **FSOLVE** de MATLAB® prenent z^0 l'aproximació obtinguda en l'apartat anterior. Presenteu les iteracions en una taula.

El mètode de la iteració simple

Transformen $F(z) = 0$ com $z = G(z)$, el mètode és

$$\mathbf{z}^{(k+1)} = G(\mathbf{z}^{(k)}) \tag{2}$$

per $\mathbf{x}^{(k)}$ indiquem el vector d'iteració k-èssim.

Algorisme computacional Donats $\mathbf{z}^0$ i $\eta > 0$ l'algorisme és:

$$\mathbf{z}^{(k+1)} = G(\mathbf{z}^{(k)}) \tag{3}$$

fins que

$$||\mathbf{z}^{(k+1)} - \mathbf{z}^{(k)}|| < \eta \quad \text{i} \quad ||F(\mathbf{z}^{(k+1)})|| < \eta$$

La convergència depèn si $||J_G(\alpha)|| < 1$.

cc BY NC ND

El mètode de Newton

Si F és diferenciable amb continuïtat, el mètode és

$$\mathbf{z}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k)} - \left(DF(\mathbf{z}^{(k)})\right)^{-1} \cdot F(\mathbf{z}^{(k)}) \tag{4}$$

per $\mathbf{z}^{(k)}$ indiquem el vector d'iteració k-èssim.

Algorisme computacional

Donats $\mathbf{z}^0$ i $\eta > 0$ l'algorisme és:

$$\left\{ \begin{array}{rl} (DF(\mathbf{z}^{(k)})) \cdot \mathbf{y}^{(k)} = & -F(\mathbf{z}^{(k)}) \\ \mathbf{z}^{(k+1)} = & \mathbf{z}^{(k)} + \mathbf{y}^{(k)} \end{array} \right. \tag{5}$$

fins que

$$||\mathbf{z}^{(k+1)} - \mathbf{z}^{(k)}|| < \eta \quad \text{i} \quad ||F(\mathbf{z}^{(k+1)})|| < \eta$$

CC BY NC ND

Pràctica 20

Sistemes de dues equacions i dues incògnites : mètodes iteratius

Calcular valors aproximats de les solucions del sistema d'equacions no lineals

$$x = \sin(x + y)\,,$$
$$y = \cos(x - y)\,,$$

Es demana:

- Aproximeu totes les solucions del sistema fent ús del **mètode de la iteració simple** prenent la funció d'iteració G adient. Verifiqueu la convergència a priori del vostre mètode abans de calcular les iteracions. Preneu z^0 una aproximació gràfica.
- Aproximeu totes les solucions del sistema fent ús del **mètode de Newton**. Preneu z^0 una aproximació gràfica.

Variants del mètode de Newton

Es redueix el cost computacional de cada iteració contra l'ordre de convergència.

- **Newton modificat.** Es fixa la matriu $J_F(\mathbf{z}^{(k)})$ per un nombre constant d'iteracions.
- **Mètode de Jacobi.** La matriu $J_F(\mathbf{z}^{(k)})$ es substitueix per una matriu diagonal, amb la diagonal de $J_F(\mathbf{z}^{(k)})$. Matriu $D_F(\mathbf{z}^{(k)})$.
- **Mètode de Gauss-Seidel.** La matriu $J_F(\mathbf{z}^{(k)})$ es substitueix per la matriu triangular inferior de $J_F(\mathbf{z}^{(k)})$. Matriu $G_F(\mathbf{z}^{(k)})$.
- **Mètode de sobrerelaxació o SOR**. Per $\omega = 1/(1+\rho)$
  $\mathbf{z}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} - (\rho \cdot D_F(\mathbf{z}^{(i)}) + G_F(\mathbf{z}^{(i)}))^{-1} \cdot F(\mathbf{z}^{(i)})$

Pràctica 21

Sistemes de dues equacions i dues incògnites : mètodes iteratius

Calcular valors aproximats de les solucions del sistema d'equacions no lineals

$$x = \sin(x+y)\,,$$
$$y = \cos(x-y)\,,$$

Es demana:

- Aproximeu la solucions del sistema fent ús del **mètode de Newton modificat**. Preneu z^0 una aproximació gràfica.
- Aproximeu la solucions del sistema fent ús del **mètode de Jacobi**. Preneu z^0 una aproximació gràfica.
- Aproximeu la solucions del sistema fent ús del **mètode de GAUSS-seidel**. Preneu z^0 una aproximació gràfica.
- Aproximeu la solucions del sistema fent ús del **mètode SOR**. Preneu z^0 una aproximació gràfica. Joc de proves per ρ.

CC BY NC ND

Exercicis

Exercici 3 - Full 5

Determineu les solucions del sistema d'equacions no lineals

$$\begin{aligned} x^2 - y - 1 &= 0\,, \\ (x-2)^2 + (y-0.5)^2 - 1 &= 0\,. \end{aligned} \tag{6}$$

a) Comproveu que l'equació (6) té una solució. Determineu gràficament una aproximació z^0.

b) Calculeu 5 iterats pel mètode de Newton prenent z_0 adient.

c) Calculeu 5 iterats pel mètode de la iteració simple, z^0. Feu ús del teorema de convergència.

d) Calculeu 5 iterats pel mètode de Newton modificat, z^0.

Continuació exercici 3

Determineu les solucions del sistema d'equacions no lineals

$$\begin{aligned} x^2 - y - 1 &= 0\,, \\ (x-2)^2 + (y-0.5)^2 - 1 &= 0\,. \end{aligned} \tag{7}$$

e) Calculeu 5 iterats pel mètode de Jacobi, z^0.

f) Calculeu 5 iterats pel mètode de Gauss-Seidel, z^0.

g) Calculeu 5 iterats pel mètode de sobrerelaxació, z^0. Joc de proves per ρ.

h) Quin mètode és convergent? Quin és divergent? Per què? Comenta les diferències trobades. Quants decimals correctes s'obtenen?

CC BY NC ND

Exercici 5 - Full 5

Determineu les solucions del sistema d'equacions no lineals

$$\begin{aligned} \cos(x) &= e^y\,, \\ \sin(xy) &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{8}$$

amb una exactitud tal que $||\mathbf{Z}^{(k+1)} - \mathbf{Z}^{(k)}|| \leq 10^{-6}$, si $\mathbf{Z} = (x, y)^t$.

a) Comproveu que l'equació (8) té una solució.Determineu gràficament una aproximació z^0.

b) Fent ús del mètode de Newton prenent z_0 adient.

c) Fent ús del mètode de la iteració simple, z^0. Verifiqueu el teorema de convergència.

d) Fent ús del mètode de Newton modificat, z^0.

Continuació exercici 5

Determineu les solucions del sistema d'equacions no lineals

$$\begin{aligned} \cos(x) &= e^y \,, \\ \sin(xy) &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{9}$$

e) Fent ús del mètode de Jacobi, z^0.

f) Fent ús del mètode de Gauss-Seidel, z^0.

g) Fent ús del mètode de sobrerelaxació, z^0. Joc de proves per ρ.

h) Quin mètode és convergent? Quin és divergent? Per què? Comenta les diferències trobades. Quants decimals correctes s'obtenen?

Guies de MATLAB

- MathWorks Documentation Center, Matlab Users's Guide online
- MathWorks Documentation Center, Matlab Functions's Guide online
- MathWorks Documentation Center, Matlab Users's Guide in pdf
- MathWorks Documentation Center, Tutorials