Computació Numèrica

Sistemes d'equacions lineals. Mètodes directes.

M. Àngela Grau Gotés

Departament de Matemàtica Aplicada II
Universitat Politècnica de Catalunya · BarcelonaTech.

24 de febrer de 2020

drets d'autor

"Donat el caràcter i la finalitat exclusivament docent i eminentment il·lustrativa de les explicacions a classe d'aquesta presentació, l'autor s'acull a l'article 32 de la Llei de propietat intel·lectual vigent respecte de l'ús parcial d'obres alienes com ara imatges, gràfics o altre material contingudes en les diferents diapositives"

Índex

1. Sessions 3, 4 i 5
   - Matlab
   - Mètodes directes
   - Mètodes iteratius
   - Equacions normals
2. Referències

MATLAB®

Matrius

Una matriu s'obté entrant la llista explícita dels seus elements, separats per blancs o comes, fent servir punt i coma per acabar una fila, i entre claudàtors.

$\gg$ `A = [1 1; 2 2]`
Podem fer referència als elements de la matriu,
$\gg$ A(2,2) ens retorna 2,
i modificar el seu valor si així convé $\gg$ A(2,2)=5.

Les matrius no s'han de dimensionar, això permet d'afegir files ($\gg$ `A=[A;3 3]`) o treure-les-en ($\gg$ `A=A(1:2,:)`) i retornem a la matriu `A` inicial.

Com definir una matriu?

a) Per la llista explícita dels seus elements.

b) Fent ús de funcions predefinides en `Matlab`:

   `rand` , `randn` , `zeros` , `eye` , `ones` , `magic` , `hilbert` , `diag`.

c) Llegint dades des d'un fitxer extern.

d) Executant un `script` definit per nosaltres.

Exercicis

Exercici 1 Genereu una matriu quadrada aleatòria d'ordre la suma dels dígits del DNI. Per aquesta matriu:

a) Obteniu la seva inversa, la seva transposada i la seva diagonal.

b) Esborreu les columnes 2 i 4

c) Eleveu totes les dades al cub.

d) Obteniu l'arrel quadrada de les dades de la matriu. (sqrt)

e) Calculeu el vector de mitjes per files (mean). Calculeu el vector de desviacions estàndar per files (std).

Exercicis

Exercici 2 Definiu la matriu $U = (u_{ij})_{15\times 15}$ i el vector $b = (b_i)_{15\times 1}$ com

$$u_{ij} = \begin{cases} \cos(ij) & i \leq j\,, \\ 0 & i > j\,, \end{cases} \qquad \text{i} \qquad b_i = \tan(i)\,.$$

Exercici 3 Definiu la matriu $L = (l_{ij})_{20\times 20}$ i el vector $b = (b_i)_{20\times 1}$ com

$$l_{ij} = \begin{cases} i + j & i \geq j\,, \\ 0 & i < j\,, \end{cases} \qquad \text{i} \qquad b_i = i\,.$$

Funcions matricials

a) La <u>trasposada</u> d'una matriu `A`, s'obté per `A'`.
b) La <u>inversa</u> d'una matriu `A`, s'obté per `inv(A)`.
c) La <u>diagonal</u> d'una matriu `A`, s'obté per `diag(A)`.
d) El <u>determinant</u> d'una matriu `A`, s'obté per `det(A)`.
f) `eig(A)` són els <u>valors propis</u> d'una matriu `A`.
g) `triu(A)`, `tril(A)`.

Operacions aritmètiques

a) Per a la <u>divisio</u> de matrius, tenim / i \
Si `A` és una matriu no singular, la solució al sistema `A*X=B` , la calcularem com `X=A\B`;
en canvi per `X=B/A` denotarem la solució del sistema `X*A=B`.

Funcions predefinides

a) `A\b`, solució del sistema $Ax = b$.

b) `[L,U,P]=lu(A)`, factorització $PA = LU$.

c) `L=chol(A)`, factorització $A = LL'$.

d) `[Q,R]=qr(A)`, factorització $A = QR$.

e) `[V,D]=eig(A)`, vectors i valors propis.

f) `[S,V,D]=svd(A)`, descompossició en valors singulars.

Pràctica

Per a les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Comproveu les igualtats següents:

a) $(AB)C = A(BC)\,,$

b) $A(B+C) = AB + AC\,,$

c) $(AB)^t = B^t A^t\,.$

d) $(A+B)C = AC + BC.$

Sistemes d'equacions lineals

Mètodes directes

Sistemes TRIANGULARS

Exercici 4 Escriviu un script de `Matlab` per trobar la solució d'un sistema lineal triangular superior (inferior) $AX = B$ pel mètode de substitució enrera (endavant). Feu jocs de proves.

$$
\text{a)} \left\{ \begin{array}{rcr} 3x - 2y + z - t & = & 8 \\ 4y - z + 2t & = & -3 \\ 2z + 3t & = & 11 \\ 5t & = & 15 \end{array} \right.
$$

$$
\text{b)} \left\{ \begin{array}{lcr} 5x & = & -10 \\ x + 3y & = & 4 \\ 3x + 4y + 2z & = & 2 \\ -x + 3y - 6z - t & = & 5 \end{array} \right.
$$

Sistemes TRIANGULARS

Exercici 4 - continuació

4.a) Escriviu el codi necessari per a definir la matriu $A = (a_{ij})_{20\times 20}$ i el vector $b = (b_i)_{20\times 1}$ com

$$a_{ij} = \begin{cases} \max(i,j) & i < j\,, \\ -1 & i = j\,, \\ 0 & i > j\,, \end{cases} \qquad \text{i} \qquad b_i = 2^{-i}\,.$$

4.b) Trobar la solució d'un sistema lineal $AX = b$ pel mètode de substitució enrera. Representa gràficament la solució trobada $(i, x_i)\,,\ 1 \leq i \leq 20$.

Mètode de Gauss

Exercici 5 Resoleu per eliminació gaussiana el sistema lineal $Ax = b$ amb

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= -3\,, \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 &= -7\,, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 6\,. \end{aligned}$$

Exercici 6 Resoleu per eliminació gaussiana el sistema lineal $Ax = b$ amb

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 6 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Factorització Txoleski

Exercici 7 Trobeu la descomposició de Txoleski i després resoleu el sistema d'equacions lineals $Ax = b$ següent:

$$a)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 6x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & & & = & 7 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ -x_1 & & & - & x_3 & + & 3x_4 & = & -2 \end{array}\right.$$

En Matlab la factorització $R'R = A$ s'obté per [R]=chol(A).

Tota matriu simètrica i definida positiva té factorització $R'R = A$.

Factorització QR

En Matlab la factorització QR s'obté per [Q ,R]=qr(A).

En aquest cas, la resolució del sistema lineal $Ax = b$ amb $AP = QR$, R triangular inferior i Q ortogonal, és en dos passos:

- Pas 1, es calcula $B = Q'b$.
- Pas 2, es resol el sistema triangular $Rx = B$.

Les matrius A i $R = Q'A$ tenen el mateix nombre de condició.

Factorització QR

Exercici 8 Trobeu la descomposició QR i després resoleu el sistema d'equacions lineals $Ax = b$ següents:

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0.05x_1 + 0.07x_2 + 0.06x_3 + 0.05x_4 & = & 0.23 \\ 0.07x_1 + 0.10x_2 + 0.08x_3 + 0.07x_4 & = & 0.32 \\ 0.06x_1 + 0.08x_2 + 0.10x_3 + 0.09x_4 & = & 0.33 \\ 0.05x_1 + 0.07x_2 + 0.09x_3 + 0.10x_4 & = & 0.31 \end{array}\right.$$

En Matlab la factorització $A = QR$ s'obté per [Q,R]=qr(A).

Vector residu

Nombre de condició

Sigui A una matriu, i $\|\cdot\|$ qualsevol norma multiplicativa,

Nombre de condició d'una matriu

$$\mathcal{K}(A) = \begin{cases} \|A\|\|A^{-1}\|, & det(A) \neq 0 \\ \infty, & altrament \end{cases}$$

`Matlab`

- ✓ `cond(A,p)` Mesura el mal condicionament

  `cond(eye)=1` `cond(matsingular)=`∞

- ✓ `rcond(A,p)` Mesura el bon condicionament

  `rcond(eye)=1` `rcond(matsingular)=0`

Vector residu

Com a criteri de comparació entre la solució exacta x, i la solució calculada x^*, del sistema lineal $Ax = b$ definim el vector residu $r(x^*)$ per:

$$r(x^*) = Ax - Ax^* = b - Ax^*,$$

llavors es verifca:

$$\frac{\|x^* - x\|}{\|x\|} \leq \mathcal{K}(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = \mathcal{K}(A)\frac{\|r(x^*)\|}{\|b\|}$$

Factor d'amplificació de l'error

$$\frac{\|x^* - x\|}{\|x\|} \Big/ \frac{\|r(x^*)\|}{\|b\|}$$

Condicionament

Exercici 9

El vector $x = (1,1)^t$ és la solució dels sistemes

$$\left(\begin{array}{cc|c} 8 & -5 & 3 \\ 4 & 10 & 14 \end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 0.66 & 3.34 & 4 \\ 1.99 & 10.01 & 12 \end{array}\right).$$

Introduïm una petita pertorbació $\delta b = (-0.04, -0.06)^t$ en el terme independent dels dos sistemes. Sabeu donar una explicació del que s'observa?

Condicionament

Exercici 10

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 7 & 8 & 7 & 32 \\ 7 & 5 & 6 & 5 & 23 \\ 8 & 6 & 10 & 9 & 33 \\ 7 & 5 & 9 & 10 & 31 \end{array}\right) \xrightarrow{sol.exacte} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 7 & 8 & 7 & 32.1 \\ 7 & 5 & 6 & 5 & 22.9 \\ 8 & 6 & 10 & 9 & 33.1 \\ 7 & 5 & 9 & 10 & 30.9 \end{array}\right) \xrightarrow{sol.exacte} \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Una petita modificació en les dades (terme independent) dóna lloc a una gran modificació en el resultat (solució)

Sistemes d'equacions lineals

Mètodes iteratius

Mètodes iteratius

Matlab

- ✓ `D=diag(diag(A));` Diagonal de la matriu A.
- ✓ `d=diag(1 ./diag(A))` Inversa de la diagonal de A.
- ✓ `L=tril(A,-1)` Part triangular inferior de la matriu A.
- ✓ `U=triu(A,1)` Part triangular superior de la matriu A.

Mètode de Jacobi

$$Ax = b \Longleftrightarrow x^{k+1} = B_J\, x^k + c_J\,, \quad \forall\; k \geq 0\,.$$

- ✓ $B_J = -D^{-1}(L+U)$ Matriu d'iteració del mètode.
- ✓ $c_J = D^{-1}b$ Vector d'iteració del mètode.
- ✓ $\rho(B_J) < 1$ Convergència a priori.
- ✓ $\|x^{k+1} - x^k\| < \epsilon$ Convergència a posteriori.

Mètode de Gauss-Seidel

$$Ax = b \Longleftrightarrow x^{k+1} = B_{GS}\, x^k + c_{GS}\,, \quad \forall\ k \geq 0\,.$$

- ✓ $C = (L + D)^{-1}$ Matriu auxiliar del mètode.
- ✓ $B_{GS} = -C\ U$ Matriu d'iteració del mètode.
- ✓ $c_{GS} = C\ b$ Vector d'iteració del mètode.
- ✓ $\rho(B_{GS}) < 1$ Convergència a priori.
- ✓ $\|x^{k+1} - x^k\| < \epsilon$ Convergència a posteriori.

Mètodes de relaxació - variant JACOBI

Són una generalització dels dos mètodes estudiats; sumem i restem x_i^k en l'expressió del mètode de Jacobi,

$$x_{Ji}^{k+1} = x_i^k + \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^k \right) k \geq 0\,.$$

$$x_i^{k+1} = \omega x_{Ji}^{k+1} + (1-\omega) x_i^k \quad k \geq 0\,.$$

- ✓ $C = D^{-1}$ Matriu auxiliar.
- ✓ $B_{sor} = C\left((1-\omega)D - \omega(L+U)\right)$ Matriu d'iteració.
- ✓ $c_{sor} = \omega\ C\ b$ Vector d'iteració.

Mètodes de relaxació - variant SEIDEL

Són una generalització dels dos mètodes estudiats; sumem i restem x_i^k en l'expressió del mètode de Jacobi,

$$x_{Si}^{k+1} = x_i^k + \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^k \right) k \geq 0 \, .$$

$$x_i^{k+1} = \omega x_{Si}^k + (1-\omega) x_i^k \quad k \geq 0 \, .$$

- ✓ $C = (D + \omega L)^{-1}$ Matriu auxiliar.
- ✓ $B_{sor} = C\left((1-\omega)D - \omega U\right)$ Matriu d'iteració.
- ✓ $c_{sor} = \omega \; C \; b$ Vector d'iteració.

Exercici 11

Escriviu un programa que implementi els esquemes iteratius dels mètodes presentats.

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

Exercici 11

Introduiu un test de convergència per als algoritmes de Jacobi i Gauss - Seidel.

$$\text{b) } (A\,|\,b) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 10 & -7 & 0 & 1 & 7 \\ -3 & 2 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 5 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\text{c) } (A\,|\,b) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 6 & -2 & 2 & 4 & 0 \\ 12 & -8 & 4 & 10 & -10 \\ 3 & -13 & 3 & 3 & -39 \\ -6 & 4 & 2 & -18 & -16 \end{array}\right).$$

Exercici 12

Resoleu pel mètodes de classe el sistema $Ax = b$ donat per

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ 15 \end{pmatrix}$$

prenent $x^{(0)} = (0\,,0\,,0\,,0)^\top$ i una tolerància $0.5 \cdot 10^{-12}$. Quantes iteracions calen?

Calculeu els errors $\delta^k = ||x^k - x^{k-1}||$ i estudieu δ^k/δ^{k-1}.

Exercici 13

Determineu el factor w òptim per a resoldre

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & & & = & 2 \\ x & & & + & z & + & 2t & = & 3 \\ x & + & y & & & + & t & = & 4 \\ -x & + & y & - & z & + & t & = & 1 \end{array}\right.$$

fent ús dels mètode de sobrerelaxació variants de Jacobi i de Gauss-Seidel. Feu un estudi per $0 < \omega < 2$. Presenteu els resultats en una taula.

Exercici 14

Resoleu pel mètodes de classe el sistema $Ax = b$ donat per

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -5 & 0 & -5 \\ -5 & 12 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -2 \\ -5 & 0 & -2 & 9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -3.45 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x^* = \begin{pmatrix} 0.14 \\ 0.95 \\ 0.37 \\ 0.16 \end{pmatrix}$$

prenent $x^{(0)} = (0\,,0\,,0\,,0)^\top$ i una tolerància $0.5 \cdot 10^{-12}$. Quantes iteracions calen?

Calculeu els errors $e^k = ||x^k - x^*||$, $\delta^k = ||x^k - x^{k-1}||$.
Estudieu e^k/e^{k-1} i δ^k/δ^{k-1}.

Sistemes d'equacions lineals

Mínims quadrats

Equacions normals

$Ax = b\,,$ m files i n incògnites amb rang(A)=n :

- ✓ $A'AX = A'b$ — Equacions normals.
- ✓ $RX = Q'b$ — Solució per factorització.
- ✓ $\|b - AX\|_2$ — Residu mínim.
- ✓ $||Y - \hat{Y}||_2$ — Estimació error.

Exercici 15

Determineu la solució d'error quadràtic mínim per al sistema lineal:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & & & = & 2 \\ x & & & + & z & + & 2t & = & 3 \\ x & + & y & & & + & t & = & 4 \\ & - & y & + & 2z & & & = & 2 \\ -x & + & y & - & z & + & t & = & 1 \end{array} \right.$$

1. Escriviu el sistema lineal de la forma $Ax = b$. Escriviu les equacions normals en forma matricial $Bx = c$.
2. Doneu la solució de les equacions normals. Expliqueu quin mètode de resolució feu servir per al sistema de les equacions normals.
3. Calculeu el vector residu en la solució. Comproveu que $(0, -1, 2, -1)^t$ té residu més gran.

Guies de MATLAB

- MathWorks Documentation Center, Matlab Users's Guide online
- MathWorks Documentation Center, Matlab Functions's Guide online
- MathWorks Documentation Center, Matlab Users's Guide in pdf
- MathWorks Documentation Center, Tutorials