Equacions diferencials (II)

Integració Numèrica

1 Fórmules de quadratura Newton-Côtes.

1 Deduïu la fórmula de Newton-Côtes per a $\int_0^1 f(x)dx$ i nodes 0, 1/3, 2/3, 1.

2 Comproveu que la fórmula següent és exacta per a polinomis de grau ≤ 4 :

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{90}\left[7f(0) + 32f(\frac{1}{4}) + 12f(\frac{1}{2}) + 32f(\frac{3}{4}) + 7f(1)\right].$$

Obteniu una expressió per a $\int_a^b f(x)dx$ que sigui exacta per a tots els polinomis de grau 4.

3 Trobeu la distància que ha recorregut un mòvil a partir de les dades de la següent taula:

t min	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
v m/s	1	8	4	3.5	5	1	0

a) Representa gràficament les dades de la taula.

b) Explica l'estratègia i dona el resultat pel mètode del punt mig.

c) Explica l'estratègia i dona el resultat pel mètode dels trapezis.

d) Explica l'estratègia i dona el resultat pel mètode de Simpson.

4 Calculeu $\int_1^{1.8} f(x)\,dx$ per les dades de la següent taula:

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
$f(x)$	1.544	1.667	1.811	1.972	2.152	2.351	2.576	2.828	3.107

a) Explica l'estratègia i dona el resultat pel mètode dels trapezis prenent $h = 0.4$, 0.2, 0.1.

b) Explica l'estratègia i dona el resultat pel mètode de Simpson prenent $h = 0.4$, 0.2, 0.1.

5 Calculeu amb una precisió de cinc xifres les següents integrals, escollint per a cada una d'elles el mètode o mètodes que us semblin més adients.

$$\text{a)} \int_{-1}^1 e^{-x^2/2}\,dx\,,\quad \text{b)} \int_2^3 \frac{1}{1+\sqrt{\ln(x)}}\,dx\,,\quad \text{c)} \int_0^1 \sqrt{x}\cos(x)\,dx\,,\quad \text{d)} \int_0^1 \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx\,,$$

$$\text{e)} \int_0^{0.5} \frac{\arcsin(x)}{x}\,dx\,,\quad \text{f)} \int_0^1 \arctan(x)\ln(x)\,dx\,,\quad \text{g)} \int_{-1}^1 \frac{e^{x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,.$$

6 Mitjançant el mètode de Romberg, calculeu:

$$\text{a)} \int_0^1 \sqrt{x}\sin(x)dx\,, \qquad \text{b)} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1+x^4)}}dx\,, \qquad \text{c)} \int_1^\infty e^{-x^2}dx\,.$$

7 Escriure una funció (`ROMBERG8`) per avaluar $I = \displaystyle\int_a^b f(x)dx\,.$ La fórmula d'integració és:

$$I \approx \frac{h}{5670}\Big[217\Big(f(a)+f(b)\Big) + 1024\Big(f(a+\frac{h}{8}) + f(a+\frac{3h}{8}) + f(a+\frac{5h}{8}) + f(a+\frac{7h}{8})\Big)$$
$$+\,352\Big(f(a+\frac{h}{4}) + f(a+\frac{3h}{4})\Big) + 436f(a+\frac{h}{2})\Big] + O(h^8)\,.$$

8 Escriure un `script` (`ROMBERG8COMPOST`) per avaluar integrals mitjançant la fórmula composta de `ROMBERG8`. Feu un joc de proves prenent $f(x) = 1,\ x,\ \sin(x)$.

9 Calculeu la integral $I = \displaystyle\int_{-1}^1 e^{-x^2}\,dx$

a) Fent ús del mètode dels trapezis per $h = \dfrac{1}{2^k},\quad 0 \le k \le 5.$

b) Fent ús del mètode de Simpson prenent $h = \dfrac{1}{2^k},\quad 0 \le k \le 5.$

c) Fent ús del mètode de `ROMBERG8COMPOST` prenent $n = 1, 2, \ldots, 6$ subintervals.

d) Doneu els decimals exactes i les xifres significatives del les vostres aproximacions, sabent que

$$\int_0^t e^{-x^2}\,dx \;=\sqrt{\pi}\,erf\,(t)\,.$$

Consulteu l'ajuda de Matlab per la funció `erf`

2 Fórmules de quadratura GAUSSIANA

10 Amb una fórmula d'integració gaussiana de dos punts (m=2), calculeu:

$$\text{a)} \int_{-1}^1 e^x\,dx\,, \qquad \text{b)} \int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx\,, \qquad \text{c)} \int_0^1 e^{x^2}\,dx\,.$$

11 Integreu pel mètode de Legendre-Gauss de quatre punts (m=4),

$$\int_{-1}^1 \cos(x)\,dx\,, \quad \text{i} \quad \int_{-1}^1 e^x\,dx\,.$$

Prèviament cal deduir la fórmula, i al mateix temps doneu fites de l'error comès.

12 Calculeu les integrals següents per Gauss-Txebixev :

$$\text{a)} \int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,, \qquad \text{b)} \int_{-1}^1 \frac{\cos(\pi x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,, \qquad \text{c)} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx\,.$$

3 Mètodes de MonteCarlo per a integració aproximada.

13 Per trapezis useu $h = 0.1$, $h = 0.05$. Per MonteCarlo, la mostra de mida prou gran ($N > 1000$)

a) Calculeu $\int_0^1 x^2\,dx$, per trapezis i MonteCarlo.

b) Calculeu $\int_0^1 (1-x^2)^{(3/2)}\,dx$, per trapezis i MonteCarlo.

c) Com s'ha de pendre la mostra de gran per obtenir la mateixa exactitud que amb la fórmula dels trapezis?

14 Calculeu $\int_{-1}^1 e^{x^2}\,dx$,

a) Per la fórmula dels trapezis ($h = 0.1$, $h = 0.05$).

b) El mètode de MonteCarlo. Com s'ha de pendre la mostra de gran per obtenir la mateixa exactitud que amb la fórmula dels trapezis?

4 D'examen.

15 El logaritme neperià potset calculat fent ús de la fórmula

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{x}\,dx\,, \quad x > 1\,.$$

a) Useu la regla composta de Trapezis per a determinar $\ln(2)$ i $h = 2^{-k},\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Presenteu els resultats en taules.

b) Useu la fórmula composta de Simpson per a determinar $\ln(2)$ i $h = 2^{-k},\ k = 1, 2, 3, 4, 5$. Presenteu els resultats en taules.

c) Useu una tècnica de simulació (Mètode de MonteCarlo) per a determinar $\ln(2)$ preneu mostres de mida $10^{-k},\ k \geq 3, 4, 5, 6, \ldots$. Presenteu els resultats que s'obtenen taules.

d) Useu $\ln(x)$ de Matlab® per obtenir el valor de $\ln(2)$ amb 15 xifres decimals correctes, calculeu l'error absolut i l'error r elatiu de les aproximació dels apartats (**15.a**), (**15.b**) i (**15.c**). Quantes xifres significatives s'han obtingut?

e) Com s'ha de pendre la mostra de gran per obtenir la mateixa exactitud que amb la fórmula dels trapezis? Podem obtenir la mateixa exactitud que amb la fórmula de Simpson?