

CONCEPTES BÀSICS

1 MATLAB®

1 Operacions

1. Calcula les quantitats següents:

$$r = \sqrt{1 - \frac{2}{\pi^5}}, \quad r = e^2 \ln 5, \quad r = \sin^2 2 + \cos^2 4.$$

2. Evaluateu les ïents expressions:

$$b = (5 >= 5.5), \quad b = (\sin(\pi) == 0), \quad b = ((7 <= 8) == (3/2 == 1)).$$

- 2 Fer una gràfica per cada una de les funcions següents:

$$\star f(x) = x^5 e^{-x^2} - \frac{\sin x}{x^2 + 1} \text{ per } x \in [-2\pi, 2\pi].$$

$$\star f(x) = \frac{x^2 - 4x - 7}{x^2 - x - 6} \text{ per } -6 \leq x \leq 6 \text{ (presenta dues assímptotes).}$$

$$\star f(x) = \cos x \text{ i les seves aproximacions de Taylor de grau } 0, 2, 4, 6.$$

Preneu un mínim de 50 punts en l'interval; representeu les gràfiques amb títol, quadrícula.

3 Scripts

1. Escriviu un script que calculi $1 + 2 + \dots + n$ per a diferents valors de n .
2. Escriviu un script que calculi $1^p + 2^p + \dots + n^p$ per a diferents valors de n i p .
3. Escriviu un script per a resoldre les equacions de segon grau $ax^2 + bx + c = 0$, on a , b , c són nombres reals. Cal distingir els casos trivials i els casos $a = 0$, $b^2 - 4ac < 0$ i $b^2 - 4ac > 0$. Feu un joc de proves.

4 Funcions

1. Escriviu una funció que retorni l'error absolut i l'error relatiu de les dades x , \tilde{x} .
2. Escriviu una funció que retorni els decimals exactes i les xifres significatives de les dades x , \tilde{x} .
3. Escriviu una funció que generi una mostra de v.a.u. de mida "n", en faci l'histograma, calculi la mitja i la desviació estàndar. No ha de retornar cap argument

- 5 Escriviu una **funció** d'argument m que calculi

$$\sqrt{12} \sum_{n=0}^m \frac{(-1/3)^n}{2n+1}$$

Calculeu el valor per $m = 5$, $m = 10$, i $m = 20$ i compareu el resultat amb π .

6 Avalueu les funcions

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 1, \quad g(x) = x^2 / \sqrt{x^2 + 1} + 1$$

per a la successió de valors de $x_n = 8^{-n}$, $n \geq 1$. Encara que $f(x) = g(x)$, l'ordinador dóna resultats diferents. Quins resultats són de fiar i quins no? Per què? Justifiqueu la vostra resposta.

7 La successió

$$x_1 = 2\sqrt{2}, \quad x_2 = 2^2\sqrt{2 - \sqrt{2}}, \quad x_3 = 2^3\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \quad x_4 = 2^4\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}, \dots$$

convergeix a π . Escriu un **script** de MATLAB[®] que calculi x_k i $|x_k - \pi|$ per $k = 1, 2, \dots, 15$.

2 Algorismes**8** Calcular el valor x_{10} del mètode iteratiu següent:

$$x_k = \frac{1}{2} \left(x_{k-1} + \frac{a}{x_{k-1}} \right) \quad k \geq 1 \text{ i } x_0 = a.$$

Comparar el resultat obtingut amb el valor \sqrt{a} , quants decimals correctes s'obtenen?

9 Definim el nombre e com $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$. Per calcular-ne una aproximació considerem el mètode iteratiu definit per

$$x_k = x_{k-1} + \frac{1}{k!}, \quad k \geq 1, \quad x_0 = 1$$

Calculeu els 20 primers termes de la recurrència, compareu els vostres resultats amb el valor $\exp(1)$ retornat per Matlab.

10 Escriviu una **function** que calculi e^x per a tot x a partir de la sèrie de Taylor en $x = 0$ de la funció exponencial,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Feu un joc de proves per a diferents valors de n i de x ; compareu el vostre resultat amb el resultat que retorna la funció **exp** de Matlab. (Feu un joc de proves).

11 Escriviu un **script** que calculi e^x amb almenys 12 decimals correctes (feu ús de la funció anterior).**12** Per calcular les integrals $I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx$, $n \geq 1$, disposem de dos mètodes iteratius diferents:

$$\text{a) } I_{n-1} = \frac{1 - I_n}{n}, \quad n \geq 2 \quad \text{on } I_0 = 0,$$

$$\text{b) } I_n = 1 - nI_{n-1}, \quad n \geq 2 \quad \text{on } I_1 = 1/e.$$

Discutiu la estabilitat de la recurrència.

3 Propagació de l'error

- 13** Per a calcular el punt mig de dos punts a i b a la recta real, podem utilitzar les dues expressions següents:

$$0.5(a + b) \quad \text{i} \quad a + 0.5(b - a)$$

Calculeu les dues quan $a = 0.982$ i $b = 0.987$, amb una aritmètica de tres xifres bo i tallant. Repetiu els càlculs ara arrodonint. Comenteu els resultats obtinguts.

- 14** Calculeu: $\sum_{k=1}^6 \frac{1}{3^k}$ i $\sum_{k=1}^6 \frac{1}{3^{(7-k)}}$

a) Fent ús de l'aritmètica de tres xifres arrodonint.

b) Fent ús de l'aritmètica de quatre xifres arrodonint.

c) Per què donen diferent? Calculeu en cada cas l'error relatiu percentual.

- 15** Calculeu $\frac{1}{(\sqrt{3} + 2)^4}$ tenint accés al valor aproximat de 1.7321 per $\sqrt{3}$. Calculeu l'error comès si es fa el càlcul directe o avaluant l'expressió $97 - 56\sqrt{3}$.

- 16** Determineu l'error màxim en el càlcul de $y = \frac{x_1 x_2^2}{\sqrt{x_3}}$ amb $x_1 = 2.0 \pm 0.1$, $x_2 = 3.0 \pm 0.2$ i $x_3 = 1.0 \pm 0.1$. Quina de les dades contribueix més a l'error en y ? Per què?