Sistemes d'equacions lineals

1 Matlab®

1 Calculeu el determinant, la transposta, la inversa, els valors propis i els vectors propis de la matriu A definida per:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

2 Representeu gràficament la corba $y = f(x)$ definida per

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < -10\,, \\ x^3, & -10 \leq x < 2\,, \\ 0, & x \geq 2\,. \end{cases}$$

Codi de Matlab® per definir la funció $y = f(x)$ i la representació gràfica.

3 Representeu gràficament la corba $y = \cos(x^3/20)$ prenent 100 punts equiepaiats a l'interval $[-6, 6]$.

4 Codi que llegeixi un nombre ($N > 0$) pel teclat:

- ⋆ I determini si és parell. Doneu missatge informant del resultat.
- ⋆ I escrigui tots els nombres parells menors que el nombre.
- ⋆ I escrigui tots els nombres senars menors que el nombre. Cal que $N > 1$.

2 Sistemes d'equacions lineals. Mètodes directes.

5 Trobeu la descomposició LU de la matriu del sistema d'equacions lineals A i després resoleu el sistema d'equacions lineals $Ax = b$ següents:

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right), \qquad (A\,|\,b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -2 & 2 & 4 & 0 \\ 12 & -8 & 4 & 10 & -10 \\ 3 & -13 & 3 & 3 & -39 \\ -6 & 4 & 2 & -18 & -16 \end{array}\right),$$

6 Calculeu la inversa de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 216 \end{pmatrix}.$$

pel mètode de Gauss-Jordan i després a partir de la descomposició LU.

7 Trobeu la descomposició QR de la matriu del sistema d'equacions lineals A i després resoleu el sistema d'equacions lineals $Ax = b$ següents:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 6x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & & & = & 7 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ -x_1 & & & - & x_3 & + & 3x_4 & = & -2 \end{array} \right. ;$$

3 Nombre de condició d'una matriu.

8 Resoleu el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & - & 4y & = & 1 \\ -2.998x & + & 6.001y & = & 2 \end{array} \right.$$

per qualsevol mètode que conegeu. Compareu la solució amb la del sistema obtingut substituin la segona equació per $-2.998x + 6y = 2$. Com són les dues solucions? És un problema estable?

9 Fent ús de les normes $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$, i $||\cdot||_\infty$, calculeu $||x - x^*||$ i $||Ax^* - b||$ en el cas següent:

$$(A|\,b) = \left(\begin{array}{rrrcr} 3.3330 & 15920 & -10.333 & | & 15913 \\ 2.2220 & 16.710 & 9.6120 & | & 28.544 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 & | & 8.4254 \end{array} \right) \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x^* = \begin{pmatrix} 1.2001 \\ 0.99991 \\ 0.92538 \end{pmatrix}.$$

10 Resoleu sistema $Ax = b$ si

$$(A|\,b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 7 & 8 & 7 & 32 \\ 7 & 5 & 6 & 5 & 23 \\ 8 & 6 & 10 & 9 & 33 \\ 7 & 5 & 9 & 10 & 31 \end{array} \right)$$

Comproveu, després, que $(6\,, -7.2\,, 2.9\,, -0.1)^t$ i $(1.50\,, 0.18\,, 1.19\,, 0.89)^t$ donen residus molt petits. Estimeu el nombre de condició de la matriu.

11 Feu una predicció de com petits canvis en el terme independent b afecten a la solució x del sistema d'equacions $Ax = b$. Poseu a prova la vostra predicció per a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2.01 \end{pmatrix}$$

i per als casos $b = (4, 4)^t$ i $b = (3, 5)^t$.

12 Feu una predicció de com petits canvis en A afecten a la solució x del sistema d'equacions $Ax = b$. Poseu a prova la vostra predicció per a $b = (100, 1)^t$ i les matrius següents

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0.01 \end{pmatrix}.$$

Sabeu donar una explicació del que s'observa?

13 Demostreu per als nombres de condició de dues matrius A i B: $\kappa(AB) \le \kappa(A)\kappa(B)$.

14 Demostreu que el nombre de condició d'una matriu A verifica: $\kappa(\lambda A) = \kappa(A) \quad (\lambda \ne 0)$.

4 Sistemes d'equacions lineals. Mètodes iteratius.

15 Escriviu un programa que implementi els algoritmes de Jacobi i Gauss - Seidel. Introduiu un test de convergència. Proveu-lo per a diferents sistemes.

16 Resoleu pel mètode de Jacobi i de Gauss-Seidel els sistemes $Ax = b$ donat per

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ 15 \end{pmatrix}$$

prenent $x^{(0)} = (0\,,0\,,0\,,0)^\top$ i una tolerància $0.5 \cdot 10^{-12}$. Quantes iteracions calen?

17 Demostreu que el mètode de Jacobi convergeix i, en canvi el de Gauss-Seidel no convergeix, pel sistema següent:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1\,. \end{cases}$$

18 Estudieu la convergència dels mètodes de Jacobi i de Gauss-Seidel per a la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, \qquad |\rho| < 1.$$

19 Considereu el sistema $Ax = b$ on $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Per a quins valors de a convergeix el mètode de Jacobi?

5 Sistemes d'equacions lineals. Mètode dels mínims quadrats.

20 Determineu la solució d'error quadràtic mínim per al sistema lineal següent:

$$\begin{cases} \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & & & = & 2 \\ x & & & + & z & + & 2t & = & 3 \\ x & + & y & & & + & t & = & 4 \\ & - & y & + & 2z & & & = & 2 \\ -x & + & y & - & z & + & t & = & 1 \end{array} \end{cases}.$$

21 Els pesos atòmics de l'oxigen i del nitrogen són aproximadament $O = 16$ i $N = 14$; utilitzeu els pesos moleculars dels sis òxids de nitrogen de la taula per tal d'ajustar els pesos atòmics per mínims quadrats

Compost	NO	N_2O	NO_2	N_2O_3	N_2O_5	N_2O_4
Pes molecular	30.006	44.013	46.006	76.012	108.010	92.011

22 Determineu una funció quadràtica que satisfaci al màxim (error quadràtic mínim) la taula següent:

X	8	10	12	16	20	40
Y	0.88	1.22	1.64	2.72	3.96	11.96

6 D'examen.

23 Determineu el radi espectral de les matrius d'iteració dels mètodes de Jacobi i de Gauss-Seidel per resoldre el sistema lineal $Ax = b$ de valors:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Trobeu la solució del sistema lineal $Ax = b$ aplicant el mètode més ràpid (dels tres anteriors) fins que la diferència entre una iteració i la següent sigui inferior a $0.5 \cdot 10^{-8}$, comenceu amb $x^{(0)} = 0$. Quantes iteracions són necessàries?

24 Per als sistema d'equacions lineals:

$$\left\{ \begin{aligned} 3x - y + z &= 1 \\ x + 4y - z &= 3 \\ x - y - 5z &= -2 \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} 3x + y - z &= \;\; 2 \\ x + 5y - z &= \;\; 1 \\ -x + y - 4z &= -3 \end{aligned} \right.$$

a) Formula el mètode de Jacobi i el mètode de Gauss-Seidel. Estudia la convergència de cada mètode.

b) Calculeu les 10 primeres iteracions per cada mètode partint de $x^0 = 0$

c) Calcula la solució exacta fent ús de funcions de `MATLAB`.

d) Estimeu els errors absolut i relatiu corresponents a la darrera iteració calculada. Quantes xifres significatives heu obtingut?