

Computació Numèrica

Integració numèrica

M. Àngela Grau Gotés

Departament de Matemàtica Aplicada II
Universitat Politècnica de Catalunya · BarcelonaTech.

5 de maig de 2020

“Donat el caràcter i la finalitat exclusivament docent i eminentment il·lustrativa de les explicacions a classe d'aquesta presentació, l'autor s'acull a l'article 32 de la Llei de propietat intel·lectual vigent respecte de l'ús parcial d'obres alienes com ara imatges, gràfics o altre material contingudes en les diferents diapositives”



© 2019 by M. Àngela Grau Gotés.

Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional.

1 Sessió 11

- Fórmules de Newton-Côtes
 - Pràctica 26
 - Pràctica 27
- Integració Adaptativa
 - Pràctica 28
- Mètode de Romberg
 - Pràctica 29
 - Pràctica 30
- Mètodes de Montecarlo
 - Pràctica 31
- Integració Gaussiana
 - Pràctica 32
- Referències

Fórmules de Newton-Côtes

Exercici 1

Aplicació per dades discretes

Trobeu la distància que ha recorregut un mòbil a partir de les dades de la següent taula:

$t \text{ min}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$v \text{ m/s}$	1	8	4	3.5	5	1	0

- a) Representa gràficament les dades de la taula.
- b) Explica l'estratègia i dona el resultat pel mètode del punt mig.
- c) Explica l'estratègia i dona el resultat pel mètode dels trapezis.
- d) Explica l'estratègia i dona el resultat pel mètode de Simpson.

Exercici 2

Comproveu que:

$$\text{a) } S(f, h) = \frac{2}{3}R(f, h) + \frac{1}{3}T(f, h)$$

$$\text{b) } S(f, h) = \frac{4}{3}T\left(f, \frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3}T(f, h)$$

Pràctica 26

Aplicació per funcions

R(f,h) Escriviu un script per avaluar integrals mitjançant la fórmula composta del rectangle.

T(f,h) Escriviu un script per avaluar integrals mitjançant la fórmula composta dels trapezis. Consulteu l'ajuda de Matlab per la comanda trapz.

S(f,h) Escriviu un script per avaluar integrals mitjançant la fórmula composta de Simpson.

Les dades han d'ésser a , b , i n , així com una function que avaluï $f(x)$ per a qualsavol $x \in [a, b]$ i el resultat un valor aproximat de

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Pràctica 26

Joc de proves

Joc de proves per als programes d'integració numèrica.

$$\text{a) } I = \int_1^2 \ln(x) dx, \quad \int \ln(x) dx = x \ln(x) - x.$$

$$\text{b) } I = \int_0^{\pi/4} \cos^2(x) dx, \quad \int \cos^2(x) dx = \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2}.$$

Pràctica 27

Aplicació per dades discretes

Calculeu $\int_1^{1.8} f(x) dx$ per les dades de la següent taula:

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
$f(x)$	1.544	1.667	1.811	1.972	2.152	2.351	2.576	2.828	3.107

- a) Explica l'estratègia i dona el resultat pel mètode dels trapezis prenent $h = 0.4, 0.2, 0.1$.
- b) Explica l'estratègia i dona el resultat pel mètode de Simpson prenent $h = 0.4, 0.2, 0.1$.

Integració Adaptativa

Pràctica 28

MATLAB[®] : quadgui i integral

Joc de proves per als programes d'integració numèrica.

$$\text{a) } I = \int_1^2 \ln(x) dx = 2 \ln(2) - 1$$

$$\text{b) } I = \int_0^{\pi/4} \cos^2(x) dx = \left[\frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2} \right]_0^{\pi/4}$$

$$\text{c) } I = \int_{\frac{2}{7\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{3}{2} dx$$

Feu ús de la rutina quadgui de C. Moler

Feu ús de la rutina integral de MATLAB[®]

Feu ús de la rutina int de la *Toolbox Symbolic Math* de MATLAB[®]

Mètode de Romberg

Pràctica 29

Romberg

Mitjançant el mètode de Romberg, calculeu:

a) $\int_0^1 \sqrt{x} \sin(x) dx,$

b) $\int_0^1 \frac{2}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2},$

c) $\int_1^\infty e^{-x^2} dx,$

d) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx.$

Pràctica 29

Exemple

$$\int_0^{0.8} \frac{\sin t}{t} dt \approx 0.772095 \pm 0.0000005$$

h	T_1	T_2	T_3
0.8	0.758680		
0.4	0.768760	0.772120	
0.2	0.771262	0.772096	0.772095
0.1	0.771887	0.772095	0.772095

Taula: Mètode de Romberg

Pràctica 30

Romberg (II)

(I) Escriure una funció (ROMBERG8) per avaluar $I = \int_a^b f(x)dx$, les dades d'entrada han de ser els límits d'integració a i b , l'integrand $f(x)$. La fórmula d'integració és:

$$I \approx \frac{h}{5670} \left[217 \left(f(a) + f(b) \right) + 1024 \left(f\left(a + \frac{h}{8}\right) + f\left(a + \frac{3h}{8}\right) + f\left(a + \frac{5h}{8}\right) + f\left(a + \frac{7h}{8}\right) \right) + 352 \left(f\left(a + \frac{h}{4}\right) + f\left(a + \frac{3h}{4}\right) \right) + 436f\left(a + \frac{h}{2}\right) \right] + O(h^8).$$

(II) Escriure un script (ROMBERG8COMPOST) per avaluar integrals mitjançant la fórmula composta de ROMBERG8.

Feu un joc de proves prenent $f(x) = 1, x, \sin(x)$.

Pràctica 30

Exercici

Calculeu la integral $I = \int_{-1}^1 e^{-x^2} dx$

- a) Fent ús del mètode dels trapezis per $h = \frac{1}{2^k}$, $0 \leq k \leq 5$.
- b) Fent ús del mètode de Simpson prenent $h = \frac{1}{2^k}$, $0 \leq k \leq 5$.
- c) Fent ús del mètode de ROMBERG8COMPOST prenent $n = 1, 2, \dots, 6$ subintervalls.
- d) Doneu els decimals exactes i les xifres significatives del les vostres aproximacions, sabent que $\int_0^t e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(t)$.

Consulteu l'ajuda de Matlab per la funció `erf`

Mètodes de Montecarlo

Pràctica 31

Integració de Montecarlo

a) Calculeu $\int_0^1 x^2 dx$.

b) Calculeu $\int_0^1 (1 - x^2)^{(3/2)} dx$,

c) Com s'ha de pendre la mostra de gran per obtenir la mateixa exactitud que amb la fórmula dels trapezis?

Per trapezis useu $h = 0.1$, $h = 0.05$. Per MonteCarlo, la mostra de mida prou gran ($N > 1000$)

Integració Gaussiana

Pràctica 32

Fent ús d'una fórmula d'integració gaussiana de dos punts ($m = 2$), calculeu:

$$\text{a) } \int_{-1}^1 e^x dx, \quad \text{b) } \int_0^1 (7 + 14x^6) dx, \quad \text{c) } \int_0^3 x^2 e^x dx.$$

Pràctica 32

Integreu pel mètode de Gauss-Legendre de quatre punts ($m = 4$),

a) $\int_{-1}^1 \cos(x) dx$, c) $\int_0^1 \ln(x) \sin^2(x) dx$,

b) $\int_{-1}^1 e^x dx$, d) $\int_0^{\pi/3} \ln(1 + \cos(x)) dx$.


Pràctica 32

Calculeu les integrals següents per Gauss-Txebixev, amb punts $m = 2, 3, 4$ i 5 .

$$\text{a)} \int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \text{b)} \int_{-1}^1 \frac{\cos(\pi x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \text{c)} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

Guies de MATLAB

 MathWorks Documentation Center,
Matlab Users's Guide online

 MathWorks Documentation Center,
Matlab Functions's Guide online

 MathWorks Documentation Center,
Matlab Users's Guide in pdf

 MathWorks Documentation Center,
Tutorials

El manual de referència és

<http://www.mathworks.es/es/help/matlab/>