

INTERPOLACIÓ POLINOMIAL

1 Interpolació.

1 Calculeu $f(3)$ per interpolació quadràtica de la taula 4.1 utilitzant els punts 1, 2 i 4 en un primer càlcul i, després, els punts 2, 4, i 5, i compareu-ne els resultats. Calculeu $f(3)$ per interpolació cúbica.

Taula 4.1				
x_k	1	2	4	5
y_k	0	2	12	21

2 Trobeu el polinomi d'interpolació a la taula 4.2 emprant el mètode de les diferències dividides de Newton.

Taula 4.2					
x_k	0	1	2	4	8
y_k	1	5	10	24	50

3 Feu un esquema de diferències dividides, per calcular el polinomi de grau 4 que satisfà la taula (4.1)

Taula 4.1					
x_k	-4	-1	0	2	5
y_k	1245	33	5	9	1335

4 Donada la taula de la funció $f(x) = e^x$ (taula 4.2)

a) Trobeu valors aproximats de $\sqrt[3]{e}$ per interpolació lineal i cúbica, emprant els mètodes de Lagrange i de Newton.

b) Doneu fites respectives dels errors deguts a la interpolació. Compareu les fites amb l'error exacte, sabent que $\sqrt[3]{e} = 1.395612425\dots$

Taula 4.2				
x_k	0.0	0.2	0.4	0.6
f_k	1.0000	1.2214	1.4918	1.8221

5 Interpolació inversa.

Trobeu una solució de l'equació $x - e^{-x} = 0$, sabent que

$$e^{-0.50} = 0.60653, \quad e^{-0.55} = 0.57695, \quad \text{i} \quad e^{-0.60} = 0.54881.$$

6 Fenòmen de Runge.

Construiu una taula per a la funció

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

en $x = -0.9 \div 0.9 (0.2)$. Calculeu els polinomis interpoladors de grau 3, 6 i 9 per la taula construïda. Representeu gràficament $f(x)$ i els polinomis obtinguts. Avalueu l'error que es comet en $x = -1 \div 1, (0.2)$. Què s'observa? .

7 Comproveu que la funció següent

$$S(x) = \begin{cases} 1 + x - x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 1 - 2(x-1) - 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3, & 1 \leq x < 2, \\ 4(x-2) + 9(x-2)^2 - 3(x-2)^3, & 2 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

és l'spline cúbic natural que interpola en els punts $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$, i $(3, 10)$.

2 Ajust de corbes - Mètode dels mínims quadrats.**8** Empreu una tècnica de mínims quadrats per ajustar la taula de dades:

X	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75
Y	0.40	0.50	0.90	1.28	1.60	1.66	2.02

a funcions del tipus:

1. $y = a_0 + a_1x$. Determineu a_0 i a_1 , doneu l'equació de la funció obtinguda i calculeu el vector residu en la solució.
2. $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$. Determineu a_0 , a_1 , a_2 , a_3 i a_4 , doneu l'equació de la funció obtinguda i calculeu el vector residu en la solució.
3. $y = ax^\alpha$. Determineu a i α , doneu l'equació de la funció obtinguda i calculeu el vector residu en la solució.
4. Quin dels tipus sembla el més adient. Per què?

9 La taula següent ens dona el nombre de bacteris per unitat de volum en funció del temps transcorregut:

Hores x	0	1	2	3	4	5	6
Bacteris y	32	47	65	92	132	190	275

Calculeu una corba del tipus $y = ab^x$ que approximi aquest núvol de punts. Feu una predicció del nombre de bacteris al cap de 7 hores. Cal que feu us de la rutina `svd` del `Matlab` que dona la descomposició en valors singulars.

- 10 La intensitat de radiació d'una font radioactiva ve donada per

$$I = I_0 e^{\alpha t}$$

Determineu les constants α i I_0 sabent que s'han fet les mesures següents:

t	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
I	3.16	2.38	1.75	1.34	1.00	0.74	0.56

3 D'examen.

- 11 Les dades de la taula següent estan relacionats amb l'esperança de vida al nèixer dels ciutadans de dos països

<i>any</i>	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
<i>Grecia</i>	72.3	73.6	75.1	77.0	77.6	77.9	79.2	80.4
<i>Espanya</i>	73.3	75.3	76.2	76.8	78.0	79.0	80.2	81.6

Es demana:

- (a) Useu el polinomi interpolador de grau 7 per estimar l'esperança de vida els anys 1970, 1992, 2007 per cada país. Compareu els valors obtinguts, amb les xifres oficials per cada país, que són:

<i>any</i>	1970	1992	2007	2015
<i>Grècia</i>	70.9	77.4	79.4	81.6
<i>Espanya</i>	72.0	77.4	80.9	83.4

- (b) Feu una gràfica on apareguin les dades (representats per una rodona) i les totes solucions trobades per país.

Comentari: Numèricament és millor que considereu la taula inicial amb abscisses $0, 1, \dots, 7$, o que centreu les dades. Altrement els resultats no són correctes!!

- 12 Trobeu un polinomi de grau 2 que aproximi la funció 2^x en els punts $x_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Representeu gràficament el polinomi obtingut, els punts i la corba 2^x .

