Tema 2

Representación de números naturales

Juan J. Navarro
juanjo@ac.upc.edu
Tel: 93 4016983
Despacho D6-205

Tema 2

Introducción

Sistemas convencionales en base b:

- Decimal
- Binario
- Hexadecimal

Cambios de base

Información digital

Información Digital: Información (datos) codificados mediante un vector de dígitos

$$x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_2, x_1, x_0$$

Dígito: elemento de un conjunto de símbolos finito.

(decimal: 10 símbolos, $\mathbf{x_i} \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$)

BIT (**BI**nary dig**iT**) Dígito binario: elemento de un conjunto de dos símbolos, $\mathbf{x_i} \in \{0, 1\}$

Información digital

Codificar con un vector de n bits:

- *n* bits pueden codificar 2^n símbolos diferentes.
- *M* símbolos requieren n bits, con $n \geq \log_2 M$.

M = 3

Hacen falta 2 bits

Posible tabla de codificación:

Símbolo	x_1	x_0
	0	0
	0	1
	1	0
-	1	1

Codificación de información

Un elemento concreto, de un conjunto de *M* elementos, se codifica como un vector (tira, secuencia) de *n* bits, con $n \geq \log_2 M$:

$$X = (x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_2, x_1, x_0)$$

Codificaciones Standard:

Caracteres alfanuméricos → código ASCII de 8 bits (1 byte) ¡Ver tabla en internet!

Subconjunto finito de:

- Números naturales → Sistema convencional en base 2 (binario)
- Números enteros → Complemento a 2
- Números reales → ANSI/IEEE Floating Point Standard

Interpretación de un vector de bits

¿Qué representa el vector X = 1 1 0 0 0 1 1 0 1 1 1 0 1 1 0 1 ?

Respuesta: depende de la regla de interpretación.

Interpretado como un número
- natural (codificado en binario): X_u = 50.925
- entero (codificado en complemento a 2): X_s = -47.379
- real (codificado en coma flotante SISA-F): X_f = -0,019134

Interpretado como una instrucción de lenguaje máquina
- SISA-I: $X_{sisa\text{-}I}$ = instrucción ilegal
- SISA-F: $X_{sisa\text{-}F}$ = STF -19(R3), F3

Interpretado como una cadena de 2 caracteres consecutivos
- ASCII: X_{ascii} = caracter ilegal, carácter ilegal

¿Cómo representamos los números N?

Naturales = {0, 1, 2, 3, ...} (*Unsigned integers*)

¿435 = 354 ? **Respuesta:** *NO, aunque las dos representaciones usan los mismos símbolos, {3, 4, 5}*

Vale por 30 Vale por 300

Representamos un número mediante un vector de símbolos (cifras, dígitos) $X = (x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_2, x_1, x_0)$ con $x_i \in \{0, 1, 2, ... 8, 9\}$

pesa 100 pesa 10

(El dígito x_i pesa 10^i)

Sistema convencional en base b

Representación/Codificación de un subconjunto de naturales en el s.c.b. **b**

Naturales = {0, 1, 2, 3, ...} (*Unsigned integers*)

Sistema de numeración (reglas para la representación):

Sea el vector de dígitos $X = (x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_2, x_1, x_0)$ con $x_i \in \{0, 1, 2, ... b-1\}$

El valor que representa el vector X interpretándolo como un número natural codificado en el **sistema convencional en base b** es:

$$X_u = x_{n-1}b^{n-1} + x_{n-2}\, b^{n-2} + ... + x_2\, b^2 + x_1\, b^1 + x_0\, b^0 = \sum_{(i=0,...,n-1)} x_i\, b^i$$

(Rango de la representación para n dígitos: $0 \leq X_u \leq b^n - 1$)

Sistema convencional en base 2

Codificación de un subconjunto de los números naturales en el s.c.b. **2 (binario)**

Naturales = {0, 1, 2, 3, ...} (*Unsigned integers*)

Sistema de numeración (reglas para la representación):

Sea el vector de bits $\mathbf{X = (x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_2, x_1, x_0)}$ con $\mathbf{x_i \in \{0, 1\}}$

El valor que representa el vector X interpretándolo como un número natural codificado en el **sistema convencional en base 2** es:

$$X_u = x_{n-1}2^{n-1} + x_{n-2}\,2^{n-2} + \ldots + x_2\,2^2 + x_1\,2^1 + x_0\,2^0 = \sum_{(i=0,\ldots,n-1)} x_i\,2^i$$

(Rango de la representación para n bits: $0 \le X_u \le 2^n - 1$)

Sistema convencional en base 16

Codificación de un subconjunto de los números N en el s.c.b. **16 (hexadecimal)**

Naturales = {0, 1, 2, 3, ...} (*Unsigned integers*)

Sistema de numeración (reglas para la representación):

Sea el vector de dígitos $\mathbf{X = (x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_2, x_1, x_0)}$ con $\mathbf{X_i \in \{0, \ldots, 9, A, \ldots, F\}}$

El valor que representa el vector X interpretándolo como un número natural codificado en el **sistema convencional en base 16** es:

$$X_u = x_{n-1}16^{n-1} + x_{n-2}\,16^{n-2} + \ldots + x_2\,16^2 + x_1\,16^1 + x_0\,16^0 = \sum_{(i=0,\ldots,n-1)} x_i\,16^i$$

(Rango de la representación para n dígitos: $0 \le X_u \le 16^n - 1$)

Convenio para el vector de dígitos

$\mathbf{X = (x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_2, x_1, x_0)}$

Simplificación (cuando no haya dudas):

$\mathbf{X = x_{n-1}\,x_{n-2} \ldots x_2\,x_1\,x_0}$ v.g: X = 10010001

¿Pero los dígitos de X son binarios, decimales o hexadecimales?

$X = 10010001_2$ $X_u = 145$

$X = 10010001_{16}$ (X = 0x10010001) $X_u = 268500993$

$X = 10010001_{10}$ $X_u = 10010001$

(X_u siempre se expresa en decimal)

Ejemplos de codificación

Vector de bits *X*	Valor X_u
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	10
1011	11
1100	12
1101	13
1110	14
1111	15

Ejemplo: X = 1011

$X_u = 1{*}2^3 + 0{*}2^2 + 1{*}2^1 + 1{*}2^0 =$

$= 8 + 0 + 2 + 1 = 11$

Encontrar X_u a partir de X (cambio de base de binario a decimal)

Dado $X = (x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_2, x_1, x_0)$ con $x_i \in \{0, 1\}$

encontrar

$$X_u = x_{n-1}2^{n-1} + x_{n-2}\, 2^{n-2} + ... + x_2\, 2^2 + x_1\, 2^1 + x_0\, 2^0 = \sum_{(i=0,...,n)} x_i\, 2^i =$$

Si hacemos estas operaciones en decimal obtendremos la representación del valor Xu en decimal

- Ejercicio:
  - X = 1011 — X_u = 11
  - X = 11011100 — X_u = 220
  - X = 0011000111110101 — X_u = 12.789

Ejercicio 1

1. Obtened el valor, Z_u, del número natural representado en binario por el siguiente vector de bits, Z (para cada uno de los apartados):
   1. Z = 1101
   2. Z = 11000100
   3. Z = 00101111
   4. Z = 10110101
   5. Z = 1111

Encontrar X a partir de X_u (cambio de base de decimal a binario)

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & c \end{array} \Rightarrow D = c * d + r = D$$

$X = (x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_2, x_1, x_0)$ con $x_i \in \{0, 1\}$

$$X_u = x_{n-1}2^{n-1} + x_{n-2}\, 2^{n-2} + ... + x_2\, 2^2 + x_1\, 2 + x_0 =$$

$$X_u = (x_{n-1}2^{n-2} + x_{n-2}\, 2^{n-3} + ... + x_2\, 2 + x_1)\, 2 + x_0$$

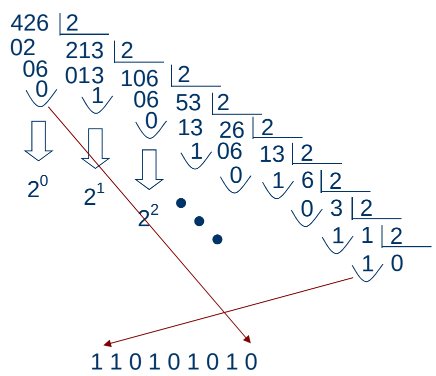
$$\underbrace{(x_{n-1}2^{n-2} + x_{n-2}\, 2^{n-3} + ... + x_2\, 2 + X_1)}_{\text{cociente de dividir } X_u \text{ por } 2} \quad x_0$$

resto de dividir X_u por 2

- El bit de menor peso es el resto de dividir por 2 el valor del número que se desea representar en binario
- Repetir el proceso con el cociente para encontrar el resto de bits

Ejemplo

Dado X_u = 426 encontrar $X = (x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_2, x_1, x_0)$ que lo representa en binario



Ejercicio 1

1. Obtened el vector X de 8 bits que representa en binario cada uno de los siguientes números naturales (expresad X también en hexadecimal). Indicad los casos en que el número no pueda representarse en binario con 8 bits:

    1. $X_u = 35$
    2. $X_u = 79$
    3. $X_u = 145$
    4. $X_u = 284$
    5. $X_u = 14$

Solución Ejercicio 1

1. Obtened el vector X de 8 bits que representa en binario cada uno de los siguientes números naturales (expresad X también en hexadecimal). Indicad los casos en que el número no pueda representarse en binario con 8 bits:

    1. $X_u = 35$ — X = 00100011
    2. $X_u = 79$ — X = 01001111
    3. $X_u = 145$ — X = 10010001
    4. $X_u = 284$ — no representable con 8 bits (100011100)
    5. $X_u = 14$ — X = 00001110

Uso de hexa para vectores de bits

- La palabra del SISA-I es de 16 bits
- ¿Rango de representación de naturales con 16 bits?
- $0 \leq X_u \leq 2^{16}-1 \quad => \quad 0 \leq X_u \leq 65.536$

- Es engorroso escribir vectores de 16 bits (peor de 32 o 64)
- Usaremos notación hexadecimal para los vectores binarios de bits (es más compacta)

Binario ⇔ Hexadecimal

$X = (x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_2, x_1, x_0)$ con $x_i \in \{0, 1\}$

$$X_u = x_{n-1}2^{n-1} + x_{n-2}\,2^{n-2} + ... + x_2\,2^2 + x_1\,2^1 + x_0\,2^0 =$$

$$= \underbrace{(x_{n-1}2^3 + x_{n-2}\,2^2 + x_{n-3}\,2^1 + x_{n-3})}_{h_k}\,16^k + ...$$

$$... + \underbrace{(x_7 2^3 + x_6\,2^2 + x_5\,2^1 + x_4)}_{h_1}\,16 + \underbrace{(x_3 2^3 + x_2\,2^2 + x_1\,2^1 + x_0)}_{h_0}$$

$$X = \underbrace{1\ 0\ 0\ 1}_{9}\,\underbrace{0\ 0\ 1\ 1}_{3}\,\underbrace{1\ 0\ 1\ 1}_{B}\,\underbrace{1\ 0\ 1\ 0}_{A}$$

X = 0x93BA