

Grau en Enginyeria Informàtica
Facultat d'Informàtica de Barcelona

Matemàtiques 1

Part II: Àlgebra Lineal

Exercicis i problemes

Setembre 2016

Departament de Matemàtica Aplicada 2
Universitat Politècnica de Catalunya

Els problemes d'aquesta col·lecció han estat recopilats per Anna de Mier i Montserrat Maureso. En part provenen de reculls de problemes elaborats pels membres del Departament de Matemàtica Aplicada 2 per a les diverses assignatures que s'han impartit al llarg dels anys. D'altres provenen de la bibliografia de l'assignatura o d'altres llibres, i n'hi ha que són de nova collita.

Aprofitem per fer constar i agrair la tasca del becari docent Gabriel Bernardino en la redacció de les solucions.

Anna de Mier
Montserrat Maureso
Setembre 2011

Versió revisada, setembre 2016

Índex

5	Matrius, sistemes i determinants	1
5.1	Àlgebra de matrius	1
5.2	Sistemes d'equacions	4
5.3	Determinants	6
6	Espais vectorials	8
7	Aplicacions lineals	16
8	Diagonalització	24
	Exercicis de repàs i consolidació	28

Matrius, sistemes i determinants

Si no especifiquem el contrari, el cos en el que treballem és \mathbb{R} .

5.1 Àlgebra de matrius

5.1 Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix},$$

calculeu: 1) $3A$; 2) $3A - B$; 3) AB ; 4) BA ; 5) $C(3A - 2B)$.

5.2 Calculeu els productes $(1 \ 2 \ -3) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ -3)$.

5.3 Donades A i B matrius tals que AB és una matriu quadrada, proveu que el producte BA està definit.

5.4 Per a les matrius A i B següents, doneu els elements c_{13} i c_{22} de la matriu $C = AB$ sense calcular tots els elements de C .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

5.5 Una empresa confecciona bosses i maletes en dues fàbriques diferents. La taula adjunta dóna la informació del cost total de fabricació en milers d'euros de cada producte a cada lloc:

	Fàbrica 1	Fàbrica 2
Bosses	135	150
Maletes	627	681

Responen les preguntes següents mitjançant operacions matricials.

- 1) Sabent que el cost de personal representa $2/3$ del cost total, trobeu la matriu que representa el cost de personal de cada producte en cada fàbrica.
- 2) Trobeu la matriu que representa els costos de material de cada producte en cada fàbrica, suposant que, a més dels costos de personal i de materials, hi ha un cost de 20.000 euros per cada producte a cada fàbrica.

5.6 En aquest exercici es vol trobar una fórmula per calcular les potències d'una matriu diagonal.

- a) Calculeu A^2 , A^3 i A^5 , sent

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- b) Quina matriu creieu que és A^{32} ?
- c) Sigui D una matriu $n \times n$ diagonal que té per elements a la diagonal $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Conjectureu quina és la matriu D^r , per a $r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 1$, i proveu la conjectura per inducció.

5.7 Doneu un exemple de dues matrius A i B de tipus 2×2 tals que $(AB)^t \neq A^t B^t$.

5.8 Siguin $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculeu $(AB)^t$ i $B^t A^t$. Observeu que, encara que A i B són matrius simètriques, el seu producte no ho és.

5.9 Siguin A i B dues matrius simètriques del mateix tipus. Proveu que AB és una matriu simètrica si, i només si, A i B commuten.

5.10 Siguin I la matriu identitat i O la matriu nul·la de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Trobeu matrius $A, B, C, D, E \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tals

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------------------|
| 1) $A^2 = I$ i $A \neq I, -I$; | 3) $C^2 = C$ i $C \neq I, O$; |
| 2) $B^2 = O$ i $B \neq O$; | 4) $DE = O$ però $E \neq D$ i $ED \neq O$. |

5.11 Esbrineu si les igualtats següents les satisfan totes les matrius $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En cas negatiu, doneu alguna condició sobre A i B per tal que es satisfacin.

- | | |
|------------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$; | 2) $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$. |
|------------------------------------|-----------------------------------|

5.12 Siguin A i B matrius quadrades del mateix tipus. Direm que A és *semblant* a B si existeix una matriu invertible P tal que $B = P^{-1}AP$. Si aquest és el cas, proveu:

- 1) B és semblant a A . En general direm que A i B són semblants.
- 2) *Ser semblants* és una relació d'equivalència.
- 3) A és invertible si, i només si, B és invertible.
- 4) A^t és semblant a B^t .
- 5) Si $A^n = \mathbf{0}$ i B és semblant a A , aleshores $B^n = \mathbf{0}$.

5.13 Trobeu una matriu escalonada per files equivalent a cadascuna de les matrius següents. Doneu el rang de cada matriu.

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 5 & 11 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad 4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.14 Trobeu la inversa de les matrius elementals següents.

$$1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 5) \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, k \neq 0$$

$$2) \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

5.15 Trobeu, si existeix, la inversa de cadascuna de les matrius següents, seguint el mètode de Gauss-Jordan.

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

- 4) $A = (a_{i,j})_{4 \times 4}$, tal que $a_{i,j} = 1$ si $|i - j| \leq 1$, i $a_{i,j} = 0$ altrament.
- 5) $A = (a_{i,j})_{4 \times 4}$, tal que $a_{i,j} = 2^{j-1}$ si $i \geq j$, i $a_{i,j} = 0$ altrament.
- 6) $A = (a_{i,j})_{4 \times 4}$, tal que $a_{i,i} = k$, $a_{i,j} = 1$ si $i - j = 1$, i $a_{i,j} = 0$ altrament.

5.2 Sistemes d'equacions

5.16 Quines de les equacions següents són lineals en x , y i z ?

- 1) $x + 3xy + 2z = 2$; 3) $x - 4y + 3z^{1/2} = 0$; 5) $z + x - y^{-1} + 4 = 0$;
 2) $y + x + \sqrt{2}z = e^2$; 4) $y = z \sin \frac{\pi}{4} - 2y + 3$; 6) $x = z$.

5.17 Trobeu un sistema d'equacions lineals que correspongui a cadascuna de les matrius ampliades següents.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

5.18 Responen raonadament les preguntes següents

- 1) Quin és el rang de la matriu associada a un sistema compatible determinat amb 5 equacions i 4 incògnites? I si el sistema és compatible indeterminat?
- 2) Quantes equacions com a mínim són necessàries per tenir un sistema compatible indeterminat amb 2 graus de llibertat i rang 3? Quantes incògnites tindrà aquest sistema?
- 3) Pot ser compatible determinat un sistema amb 7 equacions i 10 incògnites?
- 4) És possible que un sistema lineal amb menys equacions que incògnites sigui incompatible?
- 5) Inventeu un sistema compatible determinat, un sistema compatible indeterminat i un sistema incompatible, tots ells amb 3 incògnites i 4 equacions.

5.19 Resoleu els sistemes lineals següents amb coeficients a \mathbb{Z}_2 . Useu eliminació gaussiana i doneu la solució en forma paramètrica.

1) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$

5.20 Resoleu el sistemes lineals següents. Useu eliminació gaussiana i doneu la solució en forma paramètrica.

$$\begin{array}{ll}
 1) \left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = 8 \\ -x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - 7y + 4z = 10 \\ 3y - 2z = -1 \end{array} \right. & 3) \left\{ \begin{array}{l} x - y + 2z - w = -1 \\ 2x + y - 2z - 2w = -2 \\ -x + 2y - 4z + w = 1 \\ 3x - 3w = -3 \end{array} \right. \\
 2) \left\{ \begin{array}{l} x - y + 2z = 3 \\ 2x - 2y + 5z = 4 \\ x + 2y - z = -3 \\ 2y + 2z = 1 \end{array} \right. & 4) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 6 \end{array} \right.
 \end{array}$$

5.21 Resoleu el sistemes lineals homogenis següents. Useu l'eliminació gaussiana i doneu la solució en forma paramètrica.

$$\begin{array}{ll}
 1) \left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y + 2z = 0 \\ -2x + 5y + 2z = 0 \\ -7x + 7y + z = 0 \end{array} \right. & 3) \left\{ \begin{array}{l} x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 0 \end{array} \right. \\
 2) \left\{ \begin{array}{l} 2x - 4y + z + w = 0 \\ x - 5y + 2z = 0 \\ -2y - 2z - w = 0 \\ x + 3y + w = 0 \\ x - 2y - z + w = 0 \end{array} \right. & 4) \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_5 = 0 \\ 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

5.22 Discutiu els sistemes següents segons els valors dels paràmetres a \mathbb{R} .

$$\begin{array}{ll}
 1) \left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = a \\ x + z = b \\ 2x + y + 3z = c \\ bx + y + z = b^2 \end{array} \right. & 4) \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2 \end{array} \right. \\
 2) \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 1 \\ 3x - y - z = 1 \\ 6x - y + z = 3b \end{array} \right. & 5) \left\{ \begin{array}{l} x + y = k \\ ax + by = k^2 \\ a^2x + b^2y = k^3 \end{array} \right. \\
 3) \left\{ \begin{array}{l} ax + y - z + t - u = 0 \\ x + ay + z - t + u = 0 \\ -x + y + az + t - u = 0 \\ x - y + z + at + u = 0 \\ -x + y - z + t + au = 0 \end{array} \right. &
 \end{array}$$

5.3 Determinants

5.23 Suposant que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$, calculeu els determinants següents.

$$1) \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$3) \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$2) \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}$$

$$4) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}$$

5.24 Trobeu els valors de λ per als quals les matrius següents tenen determinant 0.

$$1) \begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 1 & \lambda-4 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} \lambda-6 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 4 & \lambda-4 \end{pmatrix}$$

5.25 Calculeu els determinants següents.

$$1) \begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 10 & -20 \end{vmatrix}$$

$$4) \begin{vmatrix} 4 & 16 & 0 \\ 12 & -8 & 8 \\ 16 & 20 & -4 \end{vmatrix}$$

$$7) \begin{vmatrix} 0 & -3 & 8 & 2 \\ 8 & 1 & -1 & 6 \\ -4 & 6 & 0 & 9 \\ -7 & 0 & 0 & 14 \end{vmatrix}$$

$$2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$5) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$3) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$6) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$8) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 0 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

5.26 Demostreu la propietat següent.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

5.27 Sigui A una matriu i sigui B una matriu que s'obté d' A sumant-li un múltiple d'una fila a una altra fila d' A . Demostreu que $\det(B) = \det(A)$.

5.28 Siguin A i B matrius quadrades d'ordre 3 tals que $\det(A) = 10$ i $\det(B) = 12$. Calculeu

- 1) $\det(AB)$, 2) $\det(A^4)$, 3) $\det(2B)$, 4) $\det(A^t)$, 5) $\det(A^{-1})$.

5.29 Comproveu que

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^3.$$

6

Espais vectorials

Un *espai vectorial sobre un cos* \mathbb{K} consisteix en

- 1) un conjunt no buit E ,
- 2) una operació interna $E \times E \rightarrow E$ anomenada suma i denotada per $+$, i
- 3) una aplicació $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$ anomenada producte per escalars i denotada \cdot ,

de manera que es satisfan les 8 propietats següents per a tot $u, v, w \in E$ i tot $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

- e1) $u + (v + w) = (u + v) + w$ (*associativa*);
- e2) $u + v = v + u$ (*commutativa*);
- e3) existeix un únic element $0_E \in E$ tal que $u + 0_E = u$ (*element neutre*);
- e4) per cada $u \in E$ existeix un únic $u' \in E$ tal que $u + u' = 0_E$ (*element oposat*);
- e5) $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$;
- e6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$;
- e7) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$;
- e8) $1u = u$, on 1 és el neutre del producte de \mathbb{K} .

(Nota: en la gran majoria dels casos, el cos \mathbb{K} serà \mathbb{R} ; altres cossos que podem considerar són \mathbb{Q} o \mathbb{Z}_p .)

Exercicis

6.1 Siguin $u = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$ i $w = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ vectors de \mathbb{R}^3 . Calculeu

- 1) $u - v$; 2) $5v + 3w$; 3) $5(v + 3w)$; 4) $(2w - u) - 3(2v + u)$.

6.2 Dibuixeu en el pla els vectors següents de \mathbb{R}^2 .

$$1) v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad 2) v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}; \quad 3) v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad 4) v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6.3 Per als vectors de l'exercici anterior, calculeu $v_1 + v_2$, $v_1 - v_3$ i $v_2 - v_4$ gràficament i comproveu les vostres respostes algebraicament.

6.4 Siguin u, v, w elements d'un espai vectorial i siguin α, β, γ elements del cos d'escalars amb α diferent de 0. Suposem que es compleix la relació $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$. Escriviu els vectors u , $u - v$ i $u + \alpha^{-1}\beta v$ en funció de v i w .

6.5 Sigui $P(\mathbb{R})_p$ el conjunt de tots els polinomis amb coeficients a \mathbb{R} i on totes les potències de x tenen grau parell. Esbrineu si $P(\mathbb{R})_p$ és un espai vectorial amb les operacions de suma i producte per escalar habituals. (Considerem que el polinomi 0 té grau 0.)

6.6 Considereu el conjunt $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ format per totes les funcions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Donades dues funcions $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, definim les funcions $f + g$ i λf com

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x). \end{aligned}$$

Demostreu que $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ amb aquestes operacions és un \mathbb{R} -espai vectorial.

6.7 Esbrineu quins dels conjunts següents són subespais vectorials sobre \mathbb{R} . (Justifiqueu les respostes.)

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x + \pi y = 0 \right\}, & E_5 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0, x - t = 0 \right\}, \\ E_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + z = \pi \right\}, & E_6 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2xy + y^2 = 0 \right\}, \\ E_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : xy = 0 \right\}, & E_7 &= \left\{ \begin{pmatrix} a + b \\ a - 2b \\ c \\ 2a + c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \\ E_4 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q} \right\}, & E_8 &= \left\{ \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ b + a \\ 2 + a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : a, b \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

6.8 Denotem per $P(\mathbb{R})$ l'espai vectorial dels polinomis amb coeficients reals i variable x . Esbrineu quins dels subconjunts següents són subespais vectorials de $P(\mathbb{R})$. (Justifiqueu les

respostes.)

$$\begin{aligned} F_1 &= \{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in P(\mathbb{R}) : a_2 = a_0\} \\ F_2 &= \{p(x) \in P(\mathbb{R}) : p(x) \text{ té grau } 3\} \\ F_3 &= \{p(x) \in P(\mathbb{R}) : p(x) \text{ té grau parell}\} \\ F_4 &= \{p(x) \in P(\mathbb{R}) : p(1) = 0\} \\ F_5 &= \{p(x) \in P(\mathbb{R}) : p(0) = 1\} \\ F_6 &= \{p(x) \in P(\mathbb{R}) : p'(5) = 0\} \end{aligned}$$

6.9 Considerem $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ l'espai vectorial de les matrius $n \times m$ amb coeficients reals. Esbrineu quins dels subconjunts següents són subespais vectorials de $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$. (Justifiqueu les respostes.)

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\} \\ M_2 &= \{A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R}) : A = A^t\} \\ M_3 &= \{A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R}) : a_{1i} = 0 \ \forall i \in [m]\} \\ M_4 &= \{A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R}) : a_{1i} = 1 \ \forall i \in [m]\} \\ M_5 &= \{A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R}) : AB = 0\} \text{ (on } B \text{ és una matriu fixa)} \end{aligned}$$

6.10 Considerem el conjunt $T \subset \mathbb{R}^4$. Proveu que el vector u es pot escriure com a combinació lineal dels vectors del conjunt almenys de dues maneres diferents.

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6.11 Per a quins valors del paràmetre a el vector u de \mathbb{R} es pot escriure com a combinació lineal dels vectors del conjunt T ?

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ a \end{pmatrix}, \quad T = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

6.12 Doneu els valors dels paràmetres a i b per als quals la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$ és combinació lineal de $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

6.13 Donats els vectors $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^3 , trobeu quina condició han de complir les components d'un vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ per a que pertanyi al subespai generat per $\{u, v\}$.

6.14 Doneu la forma genèrica dels polinomis de $P(\mathbb{R})$ que pertanyen al subespai vectorial generat pel conjunt $\{1+x, x^2\}$.

6.15 Siguin $F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ i $G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ subespais de \mathbb{R}^3 .

1) Demostreu que $F = G$.

2) Sigui $e = \begin{pmatrix} 9 \\ \sqrt{2}-1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Proveu que $e \in F$ i expresseu-lo com a combinació lineal dels conjunts de vectors que generen F .

6.16 Esbrineu si els conjunts de vectors següents són linealment independents a l'espai vectorial que s'indica.

1) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$ a \mathbb{R}^3 ;

4) $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$ a \mathbb{R}^4 ;

2) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ a \mathbb{R}^3 ;

5) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}$ a \mathbb{R}^5 .

3) $\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ a \mathbb{R}^3 ;

6.17 Esbrineu si els conjunts següents de vectors de l'espai tridimensional són coplanars, colineals, o cap de les dues coses.

1) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$;

3) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$;

2) $\left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$;

4) $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$.

6.18 A l'espai vectorial \mathbb{R}^4 considerem els vectors $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ a \\ -4 \end{pmatrix}$. Determineu a i b

per tal que siguin un conjunt linealment dependent, i en aquest cas expresseu el vector $0_{\mathbb{R}^4}$ com a combinació lineal no nul·la dels vectors.

6.19 Siguin E un \mathbb{R} -espai vectorial i u, v, w tres vectors qualssevol d' E . Demostreu que el conjunt $\{u-v, v-w, w-u\}$ és linealment dependent.

6.20 Demostreu que les matrius A , B i C següents formen un conjunt linealment independent a $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proveu que per a qualsevol valor de λ la matriu següent és combinació lineal d' A i B .

$$\begin{pmatrix} \lambda & 2 & -4 \\ 2 - \lambda & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

6.21 Demostreu que els polinomis $-1 + 2x + x^2$, $1 + x^2$ i $x + x^2$ són linealment dependents a l'espai $P(\mathbb{R})$.

6.22 Si $\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ és un conjunt de vectors linealment dependent d'un espai vectorial, és cert que qualsevol e_i es pot escriure com a combinació lineal dels altres vectors del conjunt? Demostreu-ho o doneu un contraexemple.

6.23 Esbrineu si les afirmacions següents sobre conjunts de vectors en un espai vectorial E són certes, demostrant-ho si és el cas i donant-ne un contraexemple altrament.

- 1) Si $\{e_1, \dots, e_r\}$ és un conjunt linealment independent i $v \neq e_i$ per a tot i , aleshores el conjunt $\{e_1, \dots, e_r, v\}$ és linealment independent.
- 2) Si $\{e_1, \dots, e_r\}$ és un conjunt linealment independent i $v \notin \langle e_1, \dots, e_r \rangle$, aleshores $\{e_1, \dots, e_r, v\}$ és linealment independent.
- 3) Si $\{e_1, \dots, e_r\}$ és un conjunt generador d' E i $v \neq e_i$ per a tot i , aleshores $\{e_1, \dots, e_r, v\}$ és un conjunt generador.
- 4) Si $\{e_1, \dots, e_r\}$ és un conjunt generador d' E i $e_r \in \langle e_1, \dots, e_{r-1} \rangle$, aleshores $\{e_1, \dots, e_{r-1}\}$ és un conjunt generador.
- 5) Tot conjunt amb un sol vector és linealment independent.

6.24 Considereu el conjunt de vectors $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

- 1) Demostreu que formen una base de \mathbb{R}^4 .

2) Trobeu les coordenades del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ en aquesta base.

3) Trobeu les coordenades d'un vector arbitrari $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ en aquesta base.

6.25 Sigui $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Comproveu que és una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Doneu les coordenades d' $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ en la base B .

6.26 Sigui $P_3(\mathbb{R})$ l'espai vectorial dels polinomis de grau com a molt 3. Demostreu que els polinomis $1+x$, $-1+x$, $1+x^2$ i $1-x+x^3$ formen una base de $P_3(\mathbb{R})$ i doneu les coordenades del polinomi $-5+6x+3x^2+x^3$ en aquesta base.

6.27 Considereu el subespai $F = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ a \mathbb{R}^3 . Trobeu una base de F i la condició que ha de satisfer un vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ per pertànyer a F .

6.28 Considereu els subespais següents de \mathbb{R}^4 .

$$F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Proveu que $F = G$ i que els conjunts de generadors donats són bases. Esbrineu si algun dels vectors $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{2}-1 \\ 1-\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertany a F i, si és el cas, doneu-ne les coordenades en les dues bases.

6.29 Sigui $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base d'un espai vectorial E . Demostreu que el conjunt $\{v_1 + 2v_2, 2v_2 + 3v_3, 3v_3 + v_1\}$ també és una base d' E .

6.30 Trobeu una base del subespai E de \mathbb{R}^5 i completeu-la a una base de \mathbb{R}^5 .

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 : x_3 = x_1 + x_2 - x_4, x_5 = x_2 - x_1 \right\}.$$

6.31 Considereu els vectors de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostreu que formen un conjunt linealment independent i trobeu un vector que juntament amb aquests tres formi una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

6.32 Per a quins valors de λ els vectors $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ generen un subespai vectorial de \mathbb{R}^4 de dimensió 2?

6.33 Doneu una base i la dimensió dels espais E , F i $E \cap F$ en els casos següents:

1) $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x = 2y = z \right\}$ i $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y = z, 3x + y + z = 0 \right\}$ com a subespais de \mathbb{R}^3 .

2) $E = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ i $F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$ com a subespais de \mathbb{R}^3 .

3) $E = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a+3b \\ 2a-b \\ c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ i $F = \left\{ \begin{pmatrix} -2a \\ b \\ 0 \\ 3b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ com a subespais de \mathbb{R}^4 .

4) $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a = b = c \right\}$ i $F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ com a subespais de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

6.34 Considereu els subespais E de l'exercici anterior (exercici 6.33). Per a cadascun d'ells, amplieu la base fins obtenir-ne una de l'espai vectorial on es troben.

6.35 Considereu l'espai $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de les matrius quadrades reals 2×2 i els subconjunts

$$S = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : A = A^t\} \text{ i } T = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : A = -A^t\}.$$

- 1) Proveu que S i T són subespais vectorials.
- 2) Calculeu una base i la dimensió de cadascun.
- 3) Demostreu que tota matriu $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es pot escriure com $M = A + B$, amb $A \in S$ i $B \in T$.

6.36 Trobeu dos subespais vectorials de \mathbb{R}^4 de dimensió dos tals que la seva intersecció sigui només un vector. Podeu fer el mateix a \mathbb{R}^3 ? Justifiqueu la resposta.

6.37 Siguin $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ i $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ bases de \mathbb{R}^3 .

- 1) Comproveu que efectivament són bases.

- 2) Doneu la matriu del canvi de la base B a la base B' ($P_{B'}^B$) i la matriu del canvi de B' a B ($P_B^{B'}$).
- 3) Calculeu les coordenades en les bases B i B' del vector que en base canònica té coordenades $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

6.38 Sigui $B = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ una base de $P_2(\mathbb{R})$, l'espai dels polinomis de grau ≤ 2 . Considerem els polinomis $u(x) = x^2 + x + 2$, $v(x) = 2x^2 + 3$ i $w(x) = x^2 + x$. Si en la base B les coordenades de $u(x)$, $v(x)$ i $w(x)$ són

$$u(x)_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(x)_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w(x)_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

respectivament, doneu les coordenades dels vectors de B en base canònica $\{x^2, x, 1\}$.

6.39 Siguin

$$\begin{aligned} B &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ B' &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

dues bases de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Doneu les matrius de canvi de base $P_{B'}^B$ i $P_B^{B'}$.

6.40 Considereu els conjunts B i B' i comproveu que són bases de \mathbb{R}^3 .

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad B' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sigui u un vector de \mathbb{R}^3 que en la base B té coordenades $u_B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ i en la base B' , $u_{B'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

Expresseu x, y i z en funció de x', y' i z' , i viceversa.

6.41 Sigui E un \mathbb{R} -espai vectorial de dimensió 2 i sigui $B = \{e, f\}$ una base d' E . Definim $u = 3e - f$ i $v = e + f$.

- 1) Proveu que $B' = \{u, v\}$ és també una base d' E .
- 2) Trobeu les coordenades de u, v, e i f en les bases B i B' .
- 3) Sigui w el vector de coordenades $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en la base B' . Trobeu les seves coordenades en la base B .

7

Aplicacions lineals

Exercicis

7.1 Determineu quines de les aplicacions següents són lineals:

- 1) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, on $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y$;
- 2) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, on $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 y^2$;
- 3) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, on $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 7 \\ 2y \\ x + y + z \end{pmatrix}$;
- 4) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, on $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y - x \\ x + y \end{pmatrix}$;
- 5) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, on $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ z \\ x \end{pmatrix}$.

7.2 Determineu quines de les aplicacions $f: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ són lineals:

- 1) $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = 0$;
- 2) $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + (a_1 + a_2)x + (2a_0 - 3a_1)x^2$;
- 3) $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1(1 + x) + a_2(1 + x)^2$.

7.3 Determineu quines de les aplicacions següents són lineals:

- 1) $f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, on $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$;
- 2) $f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, on $f(A) = AB$, essent $B \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ una matriu fixada;
- 3) $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, on $f(A) = \det(A)$.

7.4 Estudieu si existeix algun endomorfisme $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(u_i) = v_i, i = 1, 2, 3$, on:

- 1) $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$$2) \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ i } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$3) \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ i } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

7.5 Sigui $f: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ l'aplicació lineal definida per: $f(1) = 1 + x$, $f(x) = 3 - x^2$ i $f(x^2) = 4 + 2x - 3x^2$. Quina és la imatge del polinomi $a_0 + a_1x + a_2x^2$? Calculeu $f(2 - 2x + 3x^2)$.

7.6 Sigui $f: E \rightarrow F$ una aplicació lineal qualsevol.

- 1) Proveu que l'antiimatge del vector zero de F és un subespai de E . Se'n diu el nucli de f i es denota per $\text{Ker } f$.
- 2) És un subespai l'antiimatge d'un vector no nul qualsevol de F ?

7.7 Determineu si les aplicacions lineals següents són o no bijectives usant la informació que es dóna:

- 1) $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, amb $\text{Ker } f = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$;
- 3) $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, amb $n < m$;
- 2) $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, amb $\dim(\text{Im } f) = n - 1$;
- 4) $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, amb $\text{Im } f = \mathbb{R}^n$.

7.8 Siguin E i F dos espais vectorials de dimensió n i m , respectivament. Sigui $f: E \rightarrow F$ una aplicació lineal. Proveu que

- 1) si f és injectiva, llavors $n \leq m$;
- 2) si f és exhaustiva, llavors $n \geq m$;
- 3) si $n \neq m$, llavors f no és un isomorfisme.

7.9 Per a cadascuna de les aplicacions lineals següents, doneu la matriu associada a l'aplicació en les bases canòniques; doneu la dimensió i una base del nucli i de la imatge de l'aplicació; digueu si l'aplicació és injectiva, exhaustiva, bijectiva o cap de les tres; i determineu l'aplicació inversa, en el cas que existeixi:

$$1) \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ on } f(x) = ax, a \in \mathbb{R} \text{ fix};$$

$$2) \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ on } f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3y \\ 2x + 7y \end{pmatrix};$$

$$3) \quad f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ on } f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + z + 2t \\ y - z + t \\ x - 2y + 2z \end{pmatrix};$$

- 4) $f: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$, on $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2)x + (a_2 - a_0)x^2$;
- 5) $f: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$, on $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = 3a_0 + (a_0 - a_1)x + (2a_0 + a_1 + a_2)x^2$;
- 6) $f: \mathbb{Z}_2^2 \rightarrow \mathbb{Z}_2^3$, on $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x - y \end{pmatrix}$;
- 7) $f: \mathbb{Z}_2^3 \rightarrow \mathbb{Z}_2^3$, on $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ y + z \\ z \end{pmatrix}$;
- 8) $f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$, on $f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + d \\ b + c \end{pmatrix}$;
- 9) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y & y - z \\ z - y & x - z \end{pmatrix}$.

7.10 Trobeu el nucli de l'aplicació lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, on $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y - z \\ z - x \end{pmatrix}$, calculeu $f \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i les antiimatges, si en tenen, dels vectors $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

7.11 Sigui B una matriu invertible $n \times n$. Demostreu que l'aplicació $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ definida per $f(A) = AB$ és un endomorfisme bijectiu.

7.12 Per a les aplicacions lineals següents f_1 i f_2 , digueu si l'aplicació composició $f = f_2 \circ f_1$ és injectiva, exhaustiva, bijectiva.

- 1) $f_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ i $f_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, on $f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ x + y \\ x + 2z - y \end{pmatrix}$ i $f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3z \\ y + 4z \end{pmatrix}$;
- 2) $f_1: P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ i $f_2: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$, on $f_1(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_2 + a_3x + a_0x^2$ i $f_2(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_1 + a_2) + (a_0 + a_2)x + (a_0 + a_1)x^2$;
- 3) $f_1: \mathbb{Z}_2^2 \rightarrow \mathbb{Z}_2^3$ i $f_2: \mathbb{Z}_2^3 \rightarrow \mathbb{Z}_2^3$, on $f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x + y \\ y \end{pmatrix}$ i $f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + z \\ x + y + z \\ y + x \end{pmatrix}$.

7.13 Sigui E un \mathbb{R} -espai vectorial i $B = \{u, v, w, t\}$ una base d'aquest. Sigui f un endomorfisme d' E tal que:

$$f(u) = u + 2w, \quad f(v) = v + w, \quad f(w) = 2u + v + w, \quad f(t) = 2u + 2v + 4w.$$

Escriuiu la matriu d' f en la base B , i trobeu una base i la dimensió de la imatge d' f .

7.14 Sigui $f: E \rightarrow F$ una aplicació lineal tal que $f(e_1 - e_2) = u_1$, $f(e_2 - e_3) = u_1 - u_2$ i $f(2e_3) = 2u_1 + 2u_3$, on $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ és una base E i $B' = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ és una base F . Doneu la dimensió de la imatge d' f .

7.15 Per als següents subespais E i F de \mathbb{R}^4 , esbrineu si existeix una aplicació lineal $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $f(u) = 0$ per a tot $u \in E$ i $f(v) = v$ per a tot $v \in F$.

$$1) \ E = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ i } F = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$2) \ E = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ i } F = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

7.16 Sigui f un endomorfisme de \mathbb{R}^3 amb matriu associada

$$\begin{pmatrix} (m-2) & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2(m+1) & m+1 \end{pmatrix}.$$

Determineu la dimensió de la imatge segons els valors de m .

7.17 Siguin E i F dos \mathbb{K} -espais vectorials, $f: E \rightarrow F$ una aplicació lineal, i v_1, v_2, \dots, v_n vectors d' E . Discutiú les afirmacions següents: demostreu les certes i doneu contraexemples per a les falses.

- 1) Si v_1, v_2, \dots, v_n són linealment independents, aleshores $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ són linealment independents.
- 2) Si $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ són linealment independents, aleshores v_1, v_2, \dots, v_n són linealment independents.
- 3) Si v_1, v_2, \dots, v_n és un conjunt de generadors d' E , aleshores $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ és un conjunt de generadors de F .
- 4) Si $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ és un conjunt de generadors de F , aleshores v_1, v_2, \dots, v_n és un conjunt de generadors d' E .
- 5) Si v_1, v_2, \dots, v_n és un conjunt de generadors d' E , aleshores $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ és un conjunt de generadors de $\text{Im } f$.

7.18 Doneu les matrius associades a les aplicacions lineals següents respecte de les bases canòniques:

$$1) \ f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tal que } f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ i } f \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$2) \ f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4 \text{ tal que } f \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ i } f \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$3) \ f: \mathbb{Z}_2^3 \rightarrow \mathbb{Z}_2^2 \text{ tal que } f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ i } f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7.19 Sigui f un endomorfisme de $P_2(\mathbb{R})$ donat per $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = 3a_0 + (a_0 - a_1)x + (2a_0 + a_1 + a_2)x^2$. Doneu la matriu d' f en la base $B = \{1 + x^2, -1 + 2x + x^2, 2 + x + x^2\}$.

7.20 Sigui $B_E = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base d'un \mathbb{R} -espai vectorial E i sigui $B_F = \{v_1, v_2\}$ una base d'un \mathbb{R} -espai vectorial F . Considerem l'aplicació lineal $f: E \rightarrow F$ definida per

$$f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = (x - 2z)v_1 + (y + z)v_2.$$

Trobeu la matriu associada a f en les bases:

- 1) $B_E = \{e_1, e_2, e_3\}$ i $B_F = \{v_1, v_2\}$.
- 2) $B_E = \{e_1, e_2, e_3\}$ i $B'_F = \{2v_1, 2v_2\}$.
- 3) $B'_E = \{e_1 + e_2 + e_3, 2e_1 + 2e_3, 3e_3\}$ i $B_F = \{v_1, v_2\}$.
- 4) $B'_E = \{e_1 + e_2 + e_3, 2e_1 + 2e_3, 3e_3\}$ i $B'_F = \{2v_1, 2v_2\}$.

7.21 Considerem l'endomorfisme $f_N: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definit per $f_N(A) = NA$ on

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Trobeu la matriu associada a f_N en la base canònica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 2) Calculeu $\ker f_N$ i $\text{Im } f_N$.
- 3) Trobeu la matriu associada a f_N en la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

7.22 Sigui $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matriu associada a un endomorfisme f de \mathbb{R}^3 en la base canònica.

- 1) Trobeu els subespais $\text{Ker } f$ i $\text{Im } f$.
- 2) Trobeu una base B de \mathbb{R}^3 per a la qual la matriu associada f és $M_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7.23 Siguin $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vectors de \mathbb{R}^4 i E el subespai generat per $B_E = \{u_1, u_2\}$.

Siguin $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vectors de \mathbb{R}^3 i F el subespai generat per $B_F = \{v_1, v_2\}$. Definim $f: E \rightarrow F$ tal que $f(x_1u_1 + x_2u_2) = (x_1 - x_2)v_1 + (x_1 + x_2)v_2$.

1) Trobeu la matriu d' f en les bases B_E i B_F .

2) És f injectiva? És exhaustiva?

3) Siguin $B'_E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ i $B'_F = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$. Proveu que són bases d' E i F respectivament i doneu la matriu d' f en aquestes noves bases.

7.24 Usant la matriu de l'aplicació lineal, doneu la reflexió del vector $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ respecte

1) l'eix x ;

2) l'eix y .

7.25 Usant la matriu de l'aplicació lineal, doneu la reflexió del vector $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ respecte

1) el pla xy ;

2) el pla yz ;

3) el pla xz .

7.26 Usant la matriu de l'aplicació lineal, doneu la projecció ortogonal del vector $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ sobre

1) l'eix x ;

2) l'eix y .

7.27 Usant la matriu de l'aplicació lineal, doneu la projecció ortogonal del vector $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ sobre

1) el pla xy ;

2) el pla yz ;

3) el pla xz .

7.28 Trobeu la imatge del vector $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^2 quan es fa un gir d'angle

- 1) $\theta = 30^\circ$; 2) $\theta = -60^\circ$; 3) $\theta = 45^\circ$; 4) $\theta = 90^\circ$.

7.29 Trobeu la imatge del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ si es fa girar, en sentit contrari al de les agulles del rellotge,

- 1) 30° respecte l'eix x ; 3) 90° respecte l'eix z ;
2) 45° respecte l'eix y ; 4) -60° respecte l'eix z .

7.30 Doneu la matriu de la composició de les aplicacions lineals de \mathbb{R}^2 següents:

- 1) una rotació de 30° en sentit contrari al de les agulles del rellotge, seguida d'una reflexió respecte a l'eix y ;
2) una projecció ortogonal sobre l'eix y , seguida d'una contracció de factor $k = 1/2$;
3) una dilatació de factor $k = 2$, seguida d'una rotació de 45° en sentit contrari al de les agulles del rellotge, seguida d'una reflexió respecte a l'eix y .

7.31 Doneu la matriu de la composició de les aplicacions lineals de \mathbb{R}^3 següents:

- 1) una reflexió respecte el pla yz , seguida d'una projecció ortogonal sobre el pla xz ;
2) una rotació de 45° en sentit contrari al de les agulles del rellotge respecte l'eix y , seguida d'una dilatació de factor $k = \sqrt{2}$;
3) una rotació de 30° en sentit contrari al de les agulles del rellotge respecte l'eix x , seguida d'una rotació de 30° en sentit contrari al de les agulles del rellotge respecte l'eix z , seguida d'una contracció de factor $k = 1/3$.

7.32 Siguin $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ i $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aplicacions lineals. Determineu si $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ quan:

- 1) f_1 és la projecció ortogonal sobre l'eix y i f_2 és la projecció ortogonal sobre l'eix x ;
2) f_1 és la rotació en sentit contrari al de les agulles del rellotge d'angle θ_1 i f_2 és la rotació en sentit contrari al de les agulles del rellotge d'angle θ_2 ;
3) f_1 és la reflexió respecte l'eix x i f_2 és la reflexió respecte l'eix y ;
4) f_1 és la projecció ortogonal sobre l'eix y i f_2 és la rotació en sentit contrari al de les agulles del rellotge d'angle θ .

7.33 Siguin $f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ i $f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ aplicacions lineals. Determineu si $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ quan:

- 1) f_1 és una dilatació de factor k i f_2 és una rotació en sentit contrari al de les agulles del rellotge respecte l'eix z d'angle θ ;
- 2) f_1 és una rotació en sentit contrari al de les agulles del rellotge respecte l'eix x d'angle θ_1 i f_2 és la rotació en sentit contrari al de les agulles del rellotge respecte l'eix z d'angle θ_2 .

8

Diagonalització

Exercicis

(Tots els espais vectorials d'aquest capítol són de dimensió finita.)

8.1 Sigui f un endomorfisme d'un \mathbb{K} -espai vectorial E i $u \in E$ un vector propi de f de valor propi $\lambda \in \mathbb{K}$. Demostreu que:

- 1) $-u$ és un vector propi de f de valor propi λ ;
- 2) u és un vector propi de f^2 de valor propi λ^2 .

8.2 Demostreu que una matriu quadrada A i la seva transposada A^t tenen els mateixos valors propis.

8.3 Sigui J la matriu de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ formada íntegrament per uns. Trobeu una base de \mathbb{R}^5 que estigui formada per un vector propi de J de valor propi 5 i per quatre vectors propis de valor propi 0.

8.4 Sigui E un \mathbb{R} -espai vectorial i f i g dos endomorfismes d' E amb els mateixos valors propis. Demostreu:

- 1) f és bijectiu si i només si 0 no és valor propi d' f ;
- 2) f és bijectiu si i només si g és bijectiu.

8.5 Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si existeixen $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ i $x \in \mathbb{R}^n$ tals que $A^{m-1}x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ i $A^m x = 0_{\mathbb{R}^n}$, comproveu que $A^{m-1}x$ és vector propi d' A .

8.6 Calculeu el polinomi característic, els valors propis i els subespais de vectors propis de les matrius següents. Determineu quines són diagonalitzables i doneu, quan sigui possible, una base en la que diagonalitzin i la matriu diagonal associada.

$$\begin{array}{lll}
1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, & 5) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}, & 8) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 12 & -13 & 6 \end{pmatrix}, \\
2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, & 6) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, & 9) \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \\
3) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, & 7) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \\
4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & &
\end{array}$$

8.7 Trobeu els valors i vectors propis dels endomorfismes següents. En cas que siguin diagonalitzables, doneu una base en què diagonalitzin i la matriu diagonal associada.

$$1) f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ on } f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 4z \\ 3x - 4y + 12z \\ x - 2y + 5z \end{pmatrix}.$$

$$2) f: P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R}), \text{ on}$$

$$f(a + bx + cx^2) = (5a + 6b + 2c) - (b + 8c)x + (a - 2c)x^2.$$

$$3) f: P_3(\mathbb{R}) \longrightarrow P_3(\mathbb{R}), \text{ on}$$

$$f(a + bx + cx^2 + dx^3) = (a + b + c + d) + 2(b + c + d)x + 3(c + d)x^2 + 4dx^3.$$

8.8 Trobeu els valors i vectors propis de l'endomorfisme $f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definit per

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c & a + c \\ b - 2c & d \end{pmatrix}.$$

8.9 Demostreu que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ és una matriu triangular superior, amb els elements de la diagonal principal diferents dos a dos, aleshores A és diagonalitzable.

8.10 Discutiu la diagonalització de les matrius següents sobre \mathbb{R} en funció dels seus paràmetres:

$$\begin{array}{lll}
1) \begin{pmatrix} a & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} & 4) \begin{pmatrix} c & 2a & 0 \\ b & 0 & a \\ 0 & 2b & -c \end{pmatrix}, & 6) \begin{pmatrix} 2a-1 & 1-a & 1-a \\ a-1 & 1 & 1-a \\ a-1 & 1-a & 1 \end{pmatrix}, \\
2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 2 \end{pmatrix}, & & 7) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \\
3) \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & 5) \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}, &
\end{array}$$

8.11 Sigui $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicació lineal. Siguin F i G els subespais vectorials de \mathbb{R}^3 definits com segueix:

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + z = 0 \right\} \quad \text{i} \quad G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Considereu les tres hipòtesis següents sobre f , F i G :

$$(I) \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$(II) \quad f^2 = f;$$

$$(III) \quad f(F \cap G) \subset F \cap G \text{ i } f(F \cap G) \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Demostreu que:

- 1) si f compleix (I), aleshores 0 i 1 són valors propis d' f ;
- 2) si f compleix (II), aleshores els únics possibles valors propis d' f són 0 i 1;
- 3) $F \cap G = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$;
- 4) si f compleix (III), aleshores $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ és un vector propi de valor propi diferent de zero;
- 5) si f compleix (I), (II) i (III), aleshores f és diagonalitzable; trobeu una base en què f diagonalitzi.

8.12 Raoneu si existeix algun endomorfisme $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que verifiqui les condicions que s'especifiquen a continuació. En cas que existeixi, determineu-lo, calculeu el seu polinomi característic i digueu si és o no diagonalitzable.

- 1) Tal que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ són vectors propis de valor propi 1 i $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és un vector propi de valor propi 0.
- 2) Tal que $f^{-1}(0) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 5x + y - 2z = 0 \right\}$ i $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és un vector propi de valor propi $-1/2$.
- 3) Tal que $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- 4) Tal que $f^{-1}(0) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ i $F = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z \}$ sigui el subespai vectorial dels vectors propis de valor propi 2.

8.13 Considereu l'endomorfisme f de \mathbb{R}^3 definit per $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - y \\ x + y + z \\ 2z \end{pmatrix}$, on a és un paràmetre real.

- 1) Doneu la dimensió de $\text{Im } f$ segons els valors de $a \in \mathbb{R}$.
- 2) Siguin F i G els subespais de \mathbb{R}^3 definits per

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - ay + z = 0 \right\} \quad \text{i} \quad G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid bx + y + bz = 0 \right\},$$

on b és un altre paràmetre real. Trobeu els valors de a i b per tal que G sigui igual a la imatge de F per f .

- 3) És f diagonalitzable per a $a = 3$?
- 4) Doneu condicions sobre a per tal que f tingui tots els seus valors propis reals.

8.14 Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 1) Quina relació hi ha entre els valors propis d' A i els d' A^k ? I entre els vectors propis?
- 2) Demostreu que si la matriu A es pot escriure com $A = PDP^{-1}$, on P és una matriu invertible, aleshores $A^k = PD^kP^{-1}$.
- 3) Fent ús de l'apartat anterior, calculeu

$$\text{i) } \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^{100}, \quad \text{ii) } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{2001}, \quad \text{iii) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 9 \\ 5 & 13 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 7 \\ 9 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{70}.$$

8.15 Un OVNI surt d'un planeta en el qual tenen el seu origen els vectors v_1, v_2, v_3 . Aquests vectors són utilitzats com base d'un sistema de coordenades de l'univers (\mathbb{R}^3). Després d'arribar al punt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ la nau es deixa portar per una estranya força tal que cada dia la transporta de la situació v a la Av , on

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 1) On estarà al cap de 10 dies?
- 2) Arribarà algun dia a la Terra, que està situada al punt $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ segons les seves coordenades?

Exercicis de repàs i consolidació

Matrius, sistemes i determinants

B.1 Donades A i B matrius diagonals del mateix tipus, proveu que $AB = BA$.

B.2 Siguin A i B dues matrius triangulars superiors (inferiors) del mateix tipus. Proveu que AB és una matriu triangular superior (inferior).

B.3 Proveu que si A és una matriu $m \times n$, aleshores AA^t i A^tA són matrius simètriques.

B.4 Sigui A una matriu $n \times n$ simètrica i tal que $A^2 = A$. Proveu que si per algun i es té $a_{ii} = 0$, aleshores tots els elements de la fila i i tots els elements de la columna i són zeros.

B.5 Trobeu el conjunt de les matrius $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tals $A^2 = I$.

B.6 Siguin A , B i C matrius. Proveu que

- 1) si A és equivalent per files a B , aleshores B és equivalent per files a A ;
- 2) si A és equivalent per files a B i B és equivalent per files a C , aleshores A és equivalent per files a C .

B.7 Comproveu que el sistema següent és compatible indeterminat i té 2 graus de llibertat.

$$\begin{cases} 4x - y + z + 2t + 2u &= 1 \\ y + z - 2u &= 1 \\ 2x + z + t &= 1 \\ x - y + t + 2u &= 0 \\ 5x + y + 3z + 2t - 2u &= 3 \end{cases}$$

Responen les preguntes següents.

- 1) Quin és el nombre màxim d'equacions independents?
- 2) Esbrineu si la segona equació és combinació lineal de les altres. Feu el mateix per a la quarta.

- 3) Esbrineu si hi ha alguna solució del sistema en la qual $x = 2\pi$. El mateix per a $y = 2\sqrt{3}$.
- 4) Esbrineu si hi ha alguna solució del sistema en la qual $x = 0$ i $y = 2\sqrt{3}$. El mateix per a $z = 2\pi$ i $t = 2\sqrt{3}$.

B.8 Sigui A una matriu i sigui B una matriu que s'obté d' A multiplicant una fila d' A per una constant c . Demostreu que $\det B = c \det A$.

B.9 Resoleu el sistema lineal següent. Useu l'eliminació gaussiana i doneu la solució en forma paramètrica.

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 3y = 0 \\ 2x + 4y = 2 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases} & 3) \begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ 2x - 2y + 2z - 4w = 12 \\ -x + y - z + 2w = -4 \\ -3x + y - 8z - 10w = -29 \end{cases} \\
 2) \begin{cases} -x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + z = -2 \\ 5x + 4y + 2z = 4 \end{cases} & 4) \begin{cases} x + 6y - z - 4w = 0 \\ -2x - 12y + 5z + 17w = 0 \\ 3x + 18y - z - 6w = 0 \\ 5x + 30y - 6z - 23w = 0 \end{cases}
 \end{array}$$

B.10 Discutiu els sistemes següents, segons els valors a \mathbb{R} dels paràmetres.

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{cases} x + y + mz = m \\ x + my + z = m \\ mx + y + z = m \end{cases} & 3) \begin{cases} ax + 3y = 2 \\ 3x + 2y = a \\ 2x + ay = 3 \end{cases} \\
 2) \begin{cases} (a-1)x - ay = 2 \\ 6ax - (a-2)y = 5-a \end{cases} & 4) \begin{cases} ax + 2y + 3z + u = 6 \\ x + 3y - z + 2u = b \\ 3x - ay + z = 2 \\ 5x + 4y + 3z + 3u = 9 \end{cases}
 \end{array}$$

Espais vectorials

B.11 Considereu l'espai vectorial $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ definit al problema 6.6. Esbrineu quins dels subconjunts següents són subespais vectorials de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. (Justifiqueu les respostes.)

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(1) = f(2)\} \\
 F_2 &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(1) = f(2) + 1\} \\
 F_3 &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(1) = 0\} \\
 F_4 &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(-x) = f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}\} \\
 F_5 &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f \text{ és contínua}\}
 \end{aligned}$$

B.12 Demostreu que el conjunt de solucions d'un sistema d'equacions lineals amb n incògnites és un subespai vectorial de \mathbb{R}^n si i només si el sistema és homogeni.

B.13 A l'espai vectorial \mathbb{R}^3 considerem els subespais

$$F = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ i } G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ a \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Determineu per a quins valors de a es té $F = G$.

B.14 Siguin E un \mathbb{R} -espai vectorial i u, v, w tres vectors que compleixen la relació $2u + 2v - w = -4u - 5v + w$. Demostreu que $\{u, v, w\}$ formen un conjunt linealment dependent.

B.15 Siguin E un espai vectorial i v_1, v_2, v_3 vectors d' E . Demostreu que les afirmacions següents són equivalents.

- a) $\{v_1, v_2, v_3\}$ és linealment independent.
- b) $\{v_1 + v_2, v_2, v_2 + v_3\}$ és linealment independent.
- c) $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$ és linealment independent.

B.16 Demostreu que el conjunt $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ és una base de \mathbb{R}^4 . Escriviu el vector $\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ com a combinació lineal dels vectors d'aquesta base.

B.17 Sigui F el subespai de \mathbb{R}^4 donat per

$$F = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 42 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \\ 37 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

- 1) Trobeu una base de F .
- 2) Comproveu que $e = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 2 \\ 79 \end{pmatrix} \in F$ i calculeu les coordenades de e en la base de l'apartat anterior.
- 3) Trobeu una base de F que contingui e .

B.18 Sigui $\{u, v\}$ una base de \mathbb{R}^2 . Proveu que el conjunt $\{\alpha u + \beta v : \alpha + \beta = 0\}$ és un subespai vectorial. Descriviu aquest subespai geomètricament i trobeu-ne una base.

B.19 Sigui E un espai vectorial. Demostreu:

- 1) Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ és un conjunt generador d' E tal que en treure-li qualsevol dels e_i ja no és generador, aleshores $\{e_1, \dots, e_n\}$ és una base d' E .
- 2) Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ és un conjunt independent d' E tal que en afegir-li qualsevol altre vector d' E el resultat esdevé un conjunt dependent, aleshores $\{e_1, \dots, e_n\}$ és una base d' E .

B.20 Trobeu una base i la dimensió dels subespais següents.

$$1) E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x = y = 2z \right\}.$$

$$2) E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x = y - 3z, z = t \right\}.$$

$$3) E_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ a } (\mathbb{Z}_5)^3.$$

$$4) E_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ a } (\mathbb{Z}_5)^3.$$

$$5) E_1 \cap E_2.$$

$$6) E_3 \cap E_4.$$

B.21 Considereu els subespais E_1 , E_2 , E_3 i E_4 de l'exercici anterior. Per a cadascun d'ells, amplieu la base fins obtenir-ne una de l'espai on es troben.

B.22 Sigui $F = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 2b-a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Q} \right\}$. Demostreu que és un subespai vectorial de \mathbb{Q}^3 , i trobeu-ne una base i la dimensió.

Responen les mateixes preguntes si enlloc de considerar \mathbb{Q} prenem \mathbb{Z}_2 .

B.23 Diem que una matriu $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ és *màgica* si la suma dels elements de cada fila, de cada columna i de cada diagonal principal és sempre la mateixa. Demostreu que el conjunt de les matrius màgiques és un subespai de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Per $n = 2, 3$ trobeu-ne una base i la dimensió.

B.24 Siguin $B = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ i $B' = \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$ bases de \mathbb{R}^3 .

- 1) Comproveu que efectivament són bases.

- 2) Doneu la matriu del canvi de la base B a la base B' ($P_{B'}^B$) i la matriu del canvi de B' a B ($P_B^{B'}$).
- 3) Calculeu les coordenades en les bases B i B' del vector v que en base canònica té coordenades $\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$.

B.25 Sigui E un espai vectorial sobre \mathbb{R} de dimensió 3 i sigui $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base d' E . El vector v té coordenades $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ en aquesta base. Calculeu les coordenades de v en la base:

$$\begin{aligned} u_1 &= e_1 + e_2 + e_3 \\ u_2 &= e_1 - e_2 \\ u_3 &= e_2 - e_3 \end{aligned}$$

(No cal que demostreu que és una base.)

B.26 Siguin

$$\begin{aligned} B &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ B' &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 11 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

dues bases de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Doneu les matrius de canvi de base $P_{B'}^B$ i $P_B^{B'}$.

Aplicacions lineals

B.27 Sigui $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de \mathbb{R}^3 , on $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ i $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$. Hi ha alguna aplicació lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, i $f(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$? En cas afirmatiu, doneu la imatge del vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ per aquesta aplicació f .

B.28 Esbrineu quins dels espais vectorials següents són isomorfs a \mathbb{R}^6 : $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_6[x]$, $\mathcal{M}_{6 \times 1}(\mathbb{R})$, $W = \{(x_1, x_2, x_3, 0, x_5, x_6, x_7) : x_i \in \mathbb{R}\}$.

B.29 Sigui $f: \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ definida per $f(A) = A - A^t$. Determineu el subespai antiimatge del vector zero per f i la seva dimensió.

B.30 Sigui $B = \{u, v, w\}$ una base d'un \mathbb{K} -espai vectorial E , i sigui f un endomorfisme d' E tal que:

$$f(u) = u + v, \quad f(w) = u, \quad \text{Ker } f = \langle u + v \rangle.$$

Doneu una base i la dimensió dels subespais $\text{Im} f$ i $\text{Im} f^2$

B.31 Sigui f un endomorfisme de \mathbb{R}^3 tal que $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $f^{-1}(0) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - 3y + 2z = 0 \right\}$. Trobeu

- 1) la matriu associada a f en la base canònica;
- 2) la dimensió de $f^{-1}(0)$ i de la imatge de f ;
- 3) l'expressió explícita de la imatge d'un vector qualsevol;
- 4) si és injectiu, exhaustiu, bijectiu, o cap de les tres coses.

B.32 Siguin f_r els endomorfismes de \mathbb{R}^3 definits per

$$f_r \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y + 2z \\ x + y \\ x + 2y + rz \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

- 1) Trobeu el valor de r per al qual $\text{Im} f_r$ té la dimensió més petita possible.
- 2) Pels valors de r obtinguts a l'apartat anterior, doneu una base i la dimensió del subespai antiimatge del vector zero per f_r .
- 3) Donat $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}$, vegeu si existeix algun t tal que $f_r^{-1}(0) = \langle v \rangle$.
- 4) Sigui $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, calculeu $f_r(w)$ i $f_r^{-1}(f_r(w))$.

B.33 Siguin E i F dos \mathbb{K} -espais vectorials i $f: E \rightarrow F$ una aplicació lineal. Siguin v_1, v_2 dos vectors d' E . Demostreu les proposicions següents:

- 1) si v_1 i v_2 són linealment dependents, aleshores $f(v_1)$ i $f(v_2)$ també ho són;
- 2) si $f(v_1)$ i $f(v_2)$ són linealment independents, aleshores v_1 i v_2 també ho són;
- 3) suposem que f és injectiva, si $f(v_1)$ i $f(v_2)$ són linealment dependents, aleshores v_1 i v_2 també ho són.

B.34 Sigui E un \mathbb{R} -espai vectorial i siguin v_1, v_2, \dots, v_n vectors d' E . Considereu l'aplicació $f: \mathbb{R}^n \rightarrow E$ donada per $f(x_1, x_2, \dots, x_n)^t = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$. Proveu les proposicions següents.

- 1) f és injectiva si, i només si, els vectors v_1, v_2, \dots, v_n són linealment independents.

- 2) f és exhaustiva si, i només si, els vectors v_1, v_2, \dots, v_n generen E .
- 3) f és bijectiva si, i només si, els vectors v_1, v_2, \dots, v_n són una base d' E .

B.35 Donada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matriu associada a $f : \mathbb{Z}_2^3 \rightarrow \mathbb{Z}_2^2$ en les bases $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ de \mathbb{Z}_2^3 i $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ de \mathbb{Z}_2^2 .

- 1) Trobeu la matriu associada a f en les bases canòniques de \mathbb{Z}_2^3 i \mathbb{Z}_2^2 .
- 2) Trobeu la matriu associada a f en les bases $B'_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ de \mathbb{Z}_2^3 i $B'_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ de \mathbb{Z}_2^2 .
- 3) Sigui $v \in \mathbb{Z}_2^3$ de coordenades $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en la base B_1 . Doneu les coordenades d' $f(v)$ en la base B'_2 .

B.36 Sigui f un endomorfisme de \mathbb{R}^3 , que en la base $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, té per matriu associada:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & -3 \\ -8 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

- 1) Trobeu la matriu associada a f en la base canònica.
- 2) Esbrineu si f és injectiu, exhaustiu o bijectiu.
- 3) Trobeu l'antiimatge del vector $w = au_1 + bu_2 - bu_3$ segons els valors reals de a i b . Doneu el resultat en base canònica.

B.37 Donada una base $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ d'un \mathbb{Z}_2 -espai vectorial E , definim una aplicació lineal $f : E \rightarrow E$ tal que:

$$f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4) = (x_1 + x_2)e_1 + (x_3 + x_4)e_2.$$

- 1) Doneu la matriu associada a f en la base B .
- 2) Demostreu que $f \neq f^2$ i que $f^2 = f^3 \neq 0$.
- 3) Busqueu una base i la dimensió dels subespais $\text{Im} f, \text{Im} f^2$.

- 4) Comproveu que els vectors $e_4, e_1 + e_2, e_2 + e_4, e_1 + e_2 + e_3$ formen una base d' E i escriviu la matriu associada a f en aquesta base.

B.38 Doneu la matriu de la composició de les aplicacions lineals de \mathbb{R}^2 següents:

- 1) una reflexió respecte l'eix x , seguida d'una dilatació de factor $k = 3$;
- 2) una rotació de 60° en sentit contrari al de les agulles del rellotge, seguida d'una projecció ortogonal sobre l'eix x , seguida d'una simetria central.

B.39 Doneu la matriu de la composició de les aplicacions lineals de \mathbb{R}^3 següents:

- 1) una projecció ortogonal sobre el pla xy , seguida d'una reflexió respecte al pla yz , seguida d'una contracció de factor $k = 3$;
- 2) una reflexió respecte al pla xy , seguida d'una reflexió respecte al pla xz , seguida d'una d'una rotació de 60° en sentit contrari al de les agulles del rellotge respecte l'eix z .

Diagonalització

B.40 Sigui $f: E \rightarrow E$ un endomorfisme bijectiu. Demostreu que f diagonalitza en la base B si, i només si, f^{-1} diagonalitza en la base B . Quina relació hi ha entre els valors propis d' f i els d' f^{-1} ?

B.41 Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriu tal que $A^2 = A$, i sigui $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriu qualsevol. Demostreu que tot valor propi d' AB és valor propi d' ABA .

B.42 Per a cadascun dels endomorfismes següents, trobeu el polinomi característic, els valors propis i els subespais propis. Determineu si són o no diagonalitzables.

1) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x + 3y \end{pmatrix}.$

2) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3y \\ -z \end{pmatrix}.$

3) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 3y \\ 0 \end{pmatrix}.$

4) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -8x - 2y + 36z \\ -2x + 4z \end{pmatrix}.$

5) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z \\ 3x + 2y + 3z \\ x + z \end{pmatrix}.$

$$6) f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x + 5y + 6z + 7t \\ 3x + 8z + 9t \\ 4x + 10t \end{pmatrix}.$$

$$7) f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ x_2 + \dots + x_n \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

B.43 Considerem l'endomorfisme f de \mathbb{R}^4 que en la base canònica té per matriu associada

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 1) Calculeu el polinomi característic i els valors propis.
- 2) Trobeu una base de \mathbb{R}^4 formada per vectors propis.
- 3) Doneu la matriu P del canvi de la base de l'apartat 2) a la base canònica. Calculeu P^{-1} .
- 4) Escriviu la matriu diagonal associada a f respecte a la base de l'apartat 2) i comproveu que és igual a $P^{-1}AP$.

B.44 Sigui $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriu no nul·la fixada i $f_C: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una aplicació definida per $f_C(A) = CA - AC$, per a tota matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 1) Comproveu que f_C no és injectiva.
- 2) Si $C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$. Per a quins valors dels paràmetres reals a, c i d l'endomorfisme f_C és diagonalitzable?