Teoria de la Computació

Tema 6: Màquines de Turing. Decidibilitat, semi-decidibilitat, computabilitat.

Teoria:

- `Vídeos 27 i 28 (Màquines de Turing).`
- `Vídeos 29, 30 i 31 (Decidibilidad, semi-decidibilidad, computabilidad).`

Exercicis per a l'avaluació contínua:

1. Escrivid TM sencillas para los siguientes lenguajes:
   (a) $\{a^n b^n c^n | n \geq 0\}$.
   (b) $\{w_1 \# w_2 | w_1, w_2 \in \{0,1\}^* \wedge \texttt{valor}_2(w_1) = \texttt{valor}_2(w_2) + 1\}$.
   (c) $\{ww | w \in \{0,1\}^*\}$.
   (d) $\{0^{2^n} | n \geq 0\}$
2. Escrivid 2-TM (o 3-TM o 4-TM en caso de necesidad) sencillas para los siguientes lenguajes:
   (a) $\{a^n b^n c^n | n \geq 0\}$.
   (b) $\{w_1 \# w_2 | w_1, w_2 \in \{0,1\}^* \wedge \texttt{valor}_2(w_1) = \texttt{valor}_2(w_2) + 1\}$.
   (c) $\{ww | w \in \{0,1\}^*\}$.
   (d) $\{0^{2^n} | n \geq 0\}$
   (e) $\{0^{n^2} | n \geq 0\}$
3. Argumenta a grandes rasgos que las máquinas de Turing no-deterministas no son más expresivas que las máquinas de Turing deterministas.
4. Considera el modelo de máquina que definimos a grandes rasgos así: una variante de los autómatas con pila donde, en vez de una pila, tenemos dos pilas, las transiciones dependen del contenido de la cima de ambas pilas, y en la acción de cada transición se puede o bien borrar el elemento de la cima o bien añadir nuevos elementos, todo ello en ambas pilas. Justifica a grandes rasgos que este modelo puede simular una máquina de Turing, y que, por tanto, es Turing-completo.
5. Considera el modelo de máquina que definimos a grandes rasgos así: una variante de los autómatas con pila donde, en vez de una pila, tenemos una cola, las transiciones dependen del contenido del inicio de la cola, y en la acción de cada transición se puede borrar el elemento del inicio, y también añadir nuevos elementos al final de la cola. Justifica a grandes rasgos que este modelo puede simular una máquina de Turing, y que, por tanto, es Turing-completo.
6. Demuestra que los lenguajes decidibles son cerrados por las siguientes operaciones:
   (a) Intersección.

(b) Complementario.
(c) Resta (de conjuntos).
(d) Reverso.
(e) Concatenación.
(f) Estrella.
(g) Morfismo inverso.
(h) Shiftado.

7. Demuestra que los lenguajes decidibles no son cerrados por morfismo directo.

8. Demuestra que los lenguajes semi-decidibles son cerrados por las siguientes operaciones:

   (a) Intersección.
   (b) Concatenación.
   (c) Reverso.
   (d) Estrella.
   (e) Morfismo directo.
   (f) Morfismo inverso.
   (g) Shiftado.

9. Demuestra que los siguientes conjuntos son semi-decidibles:

   (a) $\{\langle x, y\rangle | M_x(y)\downarrow\}$.
   (b) $\{x | \exists y : M_x(y)\downarrow\}$.
   (c) $\{\langle u, v, R\rangle \mid u \to_R^* v\}$.
   (d) $\{G \in \texttt{CFG} \mid G \text{ ambigua}\}$.
   (e) $\{\langle G_1, G_2\rangle \mid G_1, G_2 \in \texttt{CFG} \ \wedge\ \mathcal{L}(G_1) \cap \mathcal{L}(G_2) \neq \emptyset\}$.

10. Sea B un conjunto semi-decidible y sea C un conjunto que cumple $C = \{x \mid \exists y : \langle x, y\rangle \in B\}$. Demuestra que C es semi-decidible.

11. Sea C un conjunto infinito. Demuestra que C es decidible si y solo si existe una función computable, total, inyectiva y creciente cuya imagen es C.

12. Sea C un conjunto infinito. Demuestra que C es semi-decidible si y solo si existe una función computable total e inyectiva cuya imagen es C.

13. Sea f una función computable e inyectiva. Es f^{-1} computable e inyectiva?

14. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función estríctamente decreciente. Podemos asegurar que es computable?

15. Sean A y B dos conjuntos tales que $(A \cup B) - (A \cap B)$ es decidible y A es decidible. Eso implica que B es decidible?

16. Sean A y B dos conjuntos tales que $(A \cup B) - (A \cap B)$ es decidible y A es semi-decidible. Eso implica que B es semi-decidible?