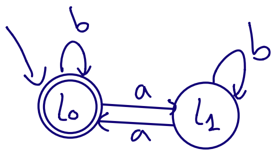
Lema de Arden: $\left[X = B + AX \wedge \lambda \notin A \Rightarrow X = A^*B\right]$

1. Trobeu expressions regulars que representin els següents llenguatges transformant un DFA en una expressió regular segons el mètode basat en el lema d'Arden.

   (a) Mots sobre $\{a, b\}$ amb un nombre parell de a's.



$$L_1 = L_0 a + L_1 b = L_0 a b^*$$

$$L_0 = L_1 a + L_0 b + \Lambda$$
$$= L_0 a b^* a + L_0 b + \Lambda$$
$$= L_0 (a b^* a + b) + \Lambda$$
$$= (a b^* a + b)^*$$

10

intento 1

$L_1 = aL_0 + bL_3$

$L_1 = aL_0 + b(aL_2 + bL_1)$

$L_1 = aL_0 + baL_2 + bbL_1$

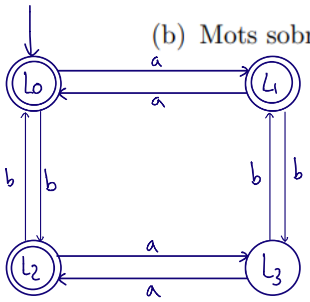
$L_1 = aL_0 + ba(aa)^*(bL_0 + abL_1) + bbL_1$

$L_1 = aL_0 + ba(aa)^* b L_0 + ba(aa)^* ab L_1 + bbL_1$

$L_1 = (a + ba(aa)^* b)L_0 + (ba(aa)^* ab + bb)L_1$

$L_1 = (ba(aa)^* ab + bb)^* (a + ba(aa)^* b) L_0$

   (b) Mots sobre $\{a, b\}$ amb o bé un nombre parell de a's, o bé un nombre parell de b's.



$L_3 = aL_2 + bL_1$

$L_2 = bL_0 + aL_3$

$L_2 = bL_0 + a(aL_2 + bL_1)$

$L_2 = bL_0 + aaL_2 + abL_1$

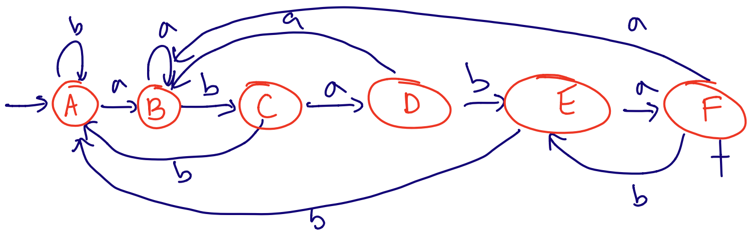
$L_2 = (aa)^*(bL_0 + abL_1)$

$L_2 = (aa)^* (b + ab(ba(aa)^* ab + bb)^* (a + ba(aa)^* b)) L_0$

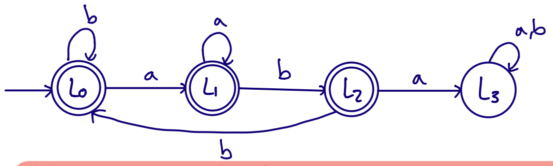
$L_0 = \lambda + aL_1 + bL_2$

$L_0 = \big(a(ba(aa)^* ab + bb)^* (a + ba(aa)^* b) + b(aa)^* (b + ab(ba(aa)^* a$

   (c) Mots sobre $\{a, b\}$ acabats en $ababa$.



babba



$$\left(b^* a^* (bb)^*\right)^* \quad X = B +$$

(d) Mots sobre $\{a, b\}$ que no contenen el submot aba.

$$L_0 = (a^+bb + b)L_0 + a^+ba(a+b)^* + a^+b + a^+ + \Lambda = (a^+bb + b)^* \left(a^+ba(a+b)^* + a^+b + a^+ + \Lambda\right)$$

$$L_0 = aL_1 + bL_0 + \Lambda = a^+bbL_0 + a^+ba(a+b)^* + a^+b + a^+ + bL_0 + \Lambda$$

$$L_1 = aL_1 + bL_2 + \Lambda = aL_1 + b(bL_0 + a(a+b)^* + \Lambda) + \Lambda = a^*\left(bbL_0 + ba(a+b)^* + b + \Lambda\right)$$

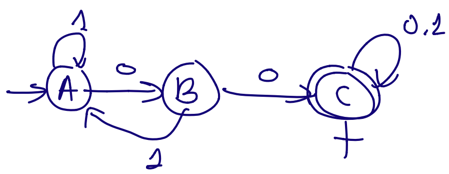
$$L_2 = bL_0 + aL_3 + \Lambda = bL_0 + a(a+b)^* + \Lambda$$

$$L_3 = (a+b)L_3 = (a+b)^*$$

a ojo: $\underset{L_0}{b^*} \cdot \underset{L_1}{a^+} \cdot \underset{L_2 L_3}{ba} \cdot \underset{L_3}{(a+b)^*}$

(e) Mots sobre $\{a, b, c\}$ tals que, entre cada dues a's hi ha almenys una b.

(f) Mots sobre $\{0, 1\}$ amb almenys dos 0's consecutius.



$$A = B1 + A1 + \Lambda = (B1 + \Lambda) + A1 = (B1 + \Lambda)1^*$$

$$B = A0 = (B1 + \Lambda)1^*0 = B11^*0 + 1^*0 = (1^*0)(11^*0)^*$$

$$C = B0 + C(0+1) = B0(0+1)^* =$$

$$C = 1^*0(11^*0)^* 0 (0+1)^*$$

2. Donada una expressió regular, com construirieu una altra expressió regular, de manera senzilla, que generi el llenguatge revers de la primera?

3. Donada una expressió regular r i un morfisme σ, com construirieu una altra expressió regular, de manera senzilla, que generi $\sigma(\mathcal{L}(r))$?

4. Demostreu les equivalències següents entre expressions regulars:

   (a) $a^*(b + ca^*)^* = (a + b^*c)^*b^*$

   (b) $(bb + ba + a)^*baa^* = a^*b(aa^*b + ba^*b)^*aa^*$

5. Donades dues expressions regulars r_1 i r_2, com decidirieu:

   (a) $\mathcal{L}(r_1) = \mathcal{L}(r_2)$.

   (b) $\mathcal{L}(r_1) \subseteq \mathcal{L}(r_2)$.

   (c) $\mathcal{L}(r_1) = \emptyset$.

(d) $|\mathcal{L}(r_1)| = \infty$.

(e) $|\mathcal{L}(r_1) \cap \mathcal{L}(r_2)| = 0$.

(f) $|\mathcal{L}(r_1) \cap \mathcal{L}(r_2)| = \infty$.

6. (Lema d' Arden (bis)) Demostra que BA^* és solució de l'equació $X = XA + B$, que tota solució d'aquesta equació conté BA^*, i que en el cas de que A no contingui λ, aleshores BA^* n'és l'única solució.

$$BA^+ = BA^*A + B$$

$$BA^* = BA^+ + B$$

$$BA^* = B(A^+ + \Lambda)$$

$$BA^* = BA^*$$

7. Aprofitant el resultat de l'exercici anterior, obteniu una expressió regular pel complementari de les paraules que representen un múltiple de 3 (és a dir, $\overline{\{w \in \{0,1\}^* \mid \mathtt{valor}_2(w) \in \dot{3}\}}$). Per a això, escriu l'autòmat mínim per aquest llenguatge, crea una variable X_q per a cada estat q, i crea equacions amb la idea de que la solució de cada X_q sigui el llenguatge dels mots que ens porten des de l' estat inicial a l'estat q.

8. Utilitza el mètode de l'exercici anterior per obtenir expressions regulars dels llenguatges següents. Compara-les amb expressions regulars que s'obtenen aplicant el lema d'Arden tal i com s'explica en els vídeos.

   (a) Mots sobre $\{a, b\}$ amb un nombre parell de a's.

   (b) Mots sobre $\{a, b\}$ amb o bé un nombre parell de a's, o bé un nombre parell de b's.

   (c) Mots sobre $\{a, b\}$ acabats en $ababa$.