Introducció a llenguatges i autòmats

Teoria de la Computació

FIB

Antoni Lozano

Q1 2019–2020

TC, grup 22

- Problemes: Antoni Lozano
- Laboratori: Antoni Lozano
- Email: antoni@cs.upc.edu
- Despatx: 233, edifici Ω

- Avaluació:
  P = nota de pissarra (entre 0 i 2)
  L = nota de laboratori (entre 0 i 8, pes del 60% el 1r i el 40% el 2n)
  $C = P + L$ = nota de l'avaluació continuada F = nota de l'examen final (entre 0 i 10)

  Nota final de curs:

  - $= C$ si $C \geq 5$ i no s'assisteix a l'examen final
  - $= \max(F, 0.5 * F + 0.5 * C)$ en cas contrari

Exàmens

Calendari d'exàmens de laboratori (a l'aula):

1. 1r examen parcial: 8 de novembre
2. 2n examen parcial: 9 de gener

Examen final:

- 16 de gener de 15:00 a 18:00.

Introducció a llenguatges i autòmats

1. Teoria de llenguatges
2. Autòmats finits

Introducció a llenguatges i autòmats

Mots

Definicions bàsiques

- Un *alfabet* és un conjunt finit no buit.
- Un *símbol* és un element d'un alfabet.
- Un *mot* sobre un alfabet és una seqüència finita formada amb símbols pertanyents a l'alfabet

Exemples

- $\Sigma = \{0, 1\}$ és l'alfabet binari.
  0, 1, 01, 101, 1010000 són mots sobre Σ.
- $\Lambda = \{a, b, c, \ldots, z\}$ és l'alfabet llatí.
  suro, *alb*, *abracadabra*, *zzzzzzz* són mots sobre Λ.

Mots

Definicions bàsiques

- Un *alfabet* és un conjunt finit no buit.
- Un *símbol* és un element d'un alfabet.
- Un *mot* sobre un alfabet és una seqüència finita formada amb símbols pertanyents a l'alfabet

Exemples

- $\Sigma = \{0, 1\}$ és l'alfabet binari.
  0, 1, 01, 101, 1010000 són mots sobre Σ.
- $\Lambda = \{a, b, c, \ldots, z\}$ és l'alfabet llatí.
  suro, *alb*, *abracadabra*, *zzzzzzz* són mots sobre Λ.

Mida d'un mot

Definicions

- *Mida.* El nombre de símbols d'un mot.
  La mida d'un mot x es representa amb $|x|$.
  - $|abracadabra| = 11$
- *Nombre d'aparicions d'un símbol en un mot*.
  Es representa amb $|x|_a$ el nombre d'aparicions del símbol a en el mot x.
  - $|abracadabra|_a = 5$
  - $|abracadabra|_b = 2$
  - $|abracadabra|_c = 1$.

Propietat

Per a tot mot x sobre un alfabet Σ i per a tot símbol $a \in \Sigma$:

$$|x| = \sum_{a \in \Sigma} |x|_a.$$

Mida d'un mot

Definicions

- *Mida.* El nombre de símbols d'un mot.
  La mida d'un mot x es representa amb $|x|$.
  - $|abracadabra| = 11$
- *Nombre d'aparicions d'un símbol en un mot*.
  Es representa amb $|x|_a$ el nombre d'aparicions del símbol a en el mot x.
  - $|abracadabra|_a = 5$
  - $|abracadabra|_b = 2$
  - $|abracadabra|_c = 1$.

Propietat

Per a tot mot x sobre un alfabet Σ i per a tot símbol $a \in \Sigma$:

$$|x| = \sum_{a \in \Sigma} |x|_a.$$

Concatenació

Definició

- La *concatenació* de dos mots x i y sobre un alfabet Σ és un mot sobre Σ que es representa amb xy i consisteix en els símbols de x seguits dels símbols de y.

Exemple

- Sigui $x = abra$
- Sigui $y = cadabra$
- Llavors, $xy = abracadabra$

Propietat

- $|xy| = |x| + |y|$

Concatenació

Definició

- La *concatenació* de dos mots x i y sobre un alfabet Σ és un mot sobre Σ que es representa amb xy i consisteix en els símbols de x seguits dels símbols de y.

Exemple

- Sigui $x = abra$
- Sigui $y = cadabra$
- Llavors, $xy = abracadabra$

Propietat

- $|xy| = |x| + |y|$

Concatenació

Definició

L'element neutre per la concatenació és el mot de mida 0, que es representa amb λ (espai blanc en Racso).

Propietat

- $\lambda x = x\lambda = x$.

Concatenació

Definició

L'element neutre per la concatenació és el mot de mida 0, que es representa amb λ (espai blanc en Racso).

Propietat

- $\lambda x = x\lambda = x$.

Exponenciació

Definició

- Donat un mot x i un natural i, l'*exponenciació* es defineix com:

$$x^i = \begin{cases} \lambda, & \text{si } i = 0 \\ xx^{i-1}, & \text{si } i > 0. \end{cases}$$

Exemples

- $a^5 = aaaaa$
- $(ab)^3 = ababab$
- $(abracadabra)^0 = \lambda$

Propietat

Donat un mot x i un natural k,

$$|x^k| = k \cdot |x|.$$

Exponenciació

Definició

- Donat un mot x i un natural i, l'*exponenciació* es defineix com:

$$x^i = \begin{cases} \lambda, & \text{si } i = 0 \\ xx^{i-1}, & \text{si } i > 0. \end{cases}$$

Exemples

- $a^5 = aaaaa$
- $(ab)^3 = ababab$
- $(abracadabra)^0 = \lambda$

Propietat

Donat un mot x i un natural k,

$$|x^k| = k \cdot |x|.$$

Exponenciació

Definició

- Donat un mot x i un natural i, l'*exponenciació* es defineix com:

$$x^i = \begin{cases} \lambda, & \text{si } i = 0 \\ xx^{i-1}, & \text{si } i > 0. \end{cases}$$

Exemples

- $a^5 = aaaaa$
- $(ab)^3 = ababab$
- $(abracadabra)^0 = \lambda$

Propietat

Donat un mot x i un natural k,

$$|x^k| = k \cdot |x|.$$

Submots

Definicions

- Un mot y és *submot* d'un mot x si existeixen dos mots z_1, z_2 tals que $x = z_1 y z_2$.
- Quan $z_1 = \lambda$, es diu que y és un *prefix* de x,
- Quan $z_2 = \lambda$, es diu que y és un *sufix* de x.

Exemple

El mot *ab* és submot de *abracadabra* amb

- $z_1 = abracad$ i $z_2 = ra$, o bé
- $z_1 = \lambda$ i $z_2 = racadabra$

Submots

Definicions

- Un mot y és *submot* d'un mot x si existeixen dos mots z_1, z_2 tals que $x = z_1 y z_2$.
- Quan $z_1 = \lambda$, es diu que y és un *prefix* de x,
- Quan $z_2 = \lambda$, es diu que y és un *sufix* de x.

Exemple

El mot *ab* és submot de *abracadabra* amb

- $z_1 = abracad$ i $z_2 = ra$, o bé
- $z_1 = \lambda$ i $z_2 = racadabra$

Submots

Exemple: submots de *abracadabra*

- Mida 0: λ
- Mida 1: *a*, *b*, *r*, *c*, *d*
- Mida 2: *ab*, *br*, *ra*, *ac*, *ca*, *ad*, *da*
- Mida 3: *abr*, *bra*, *rac*, *aca*, *cad*, *dab*
- Mida 4: *abra*, *brac*, *raca*, *acad*, *cada*, *adab*, *dabr*
- Mida 5: *abrac*, *braca*, *racad*, *acada*, *cadab*, *adabr*, *dabra*
- Mida 6: *abraca*, *bracad*, *racada*, *acadab*, *cadabr*, *adabra*
- Mida 7: *abracad*, *bracada*, *racadab*, *acadabr*, *cadabra*
- Mida 8: *abracada*, *bracadab*, *racadabr*, *acadabra*
- Mida 9: *abracadab*, *bracadabr*, *racadabra*
- Mida 10: *abracadabr*, *bracadabra*
- Mida 11: *abracadabra*

Submots

Exemple: submots de *abracadabra*

- Mida 0: λ
- Mida 1: *a*, *b*, *r*, *c*, *d*
- Mida 2: *ab*, *br*, *ra*, *ac*, *ca*, *ad*, *da*
- Mida 3: *abr*, *bra*, *rac*, *aca*, *cad*, *dab*
- Mida 4: *abra*, *brac*, *raca*, *acad*, *cada*, *adab*, *dabr*
- Mida 5: *abrac*, *braca*, *racad*, *acada*, *cadab*, *adabr*, *dabra*
- Mida 6: *abraca*, *bracad*, *racada*, *acadab*, *cadabr*, *adabra*
- Mida 7: *abracad*, *bracada*, *racadab*, *acadabr*, *cadabra*
- Mida 8: *abracada*, *bracadab*, *racadabr*, *acadabra*
- Mida 9: *abracadab*, *bracadabr*, *racadabra*
- Mida 10: *abracadabr*, *bracadabra*
- Mida 11: *abracadabra*

Submots

Exemple: submots de *abracadabra*

- Mida 0: λ
- Mida 1: a, b, r, c, d
- Mida 2: ab, br, ra, ac, ca, ad, da
- Mida 3: abr, bra, rac, aca, cad, dab
- Mida 4: $abra$, $brac$, $raca$, $acad$, $cada$, $adab$, $dabr$
- Mida 5: $abrac$, $braca$, $racad$, $acada$, $cadab$, $adabr$, $dabra$
- Mida 6: $abraca$, $bracad$, $racada$, $acadab$, $cadabr$, $adabra$
- Mida 7: $abracad$, $bracada$, $racadab$, $acadabr$, $cadabra$
- Mida 8: $abracada$, $bracadab$, $racadabr$, $acadabra$
- Mida 9: $abracadab$, $bracadabr$, $racadabra$
- Mida 10: $abracadabr$, $bracadabra$
- Mida 11: $abracadabra$

Submots

Exemple: submots de *abracadabra*

- Mida 0: λ
- Mida 1: *a*, *b*, *r*, *c*, *d*
- Mida 2: *ab*, *br*, *ra*, *ac*, *ca*, *ad*, *da*
- Mida 3: *abr*, *bra*, *rac*, *aca*, *cad*, *dab*
- Mida 4: *abra*, *brac*, *raca*, *acad*, *cada*, *adab*, *dabr*
- Mida 5: *abrac*, *braca*, *racad*, *acada*, *cadab*, *adabr*, *dabra*
- Mida 6: *abraca*, *bracad*, *racada*, *acadab*, *cadabr*, *adabra*
- Mida 7: *abracad*, *bracada*, *racadab*, *acadabr*, *cadabra*
- Mida 8: *abracada*, *bracadab*, *racadabr*, *acadabra*
- Mida 9: *abracadab*, *bracadabr*, *racadabra*
- Mida 10: *abracadabr*, *bracadabra*
- Mida 11: *abracadabra*

Submots

Exemple: submots de *abracadabra*

- Mida 0: λ
- Mida 1: *a*, *b*, *r*, *c*, *d*
- Mida 2: *ab*, *br*, *ra*, *ac*, *ca*, *ad*, *da*
- Mida 3: *abr*, *bra*, *rac*, *aca*, *cad*, *dab*
- Mida 4: *abra*, *brac*, *raca*, *acad*, *cada*, *adab*, *dabr*
- Mida 5: *abrac*, *braca*, *racad*, *acada*, *cadab*, *adabr*, *dabra*
- Mida 6: *abraca*, *bracad*, *racada*, *acadab*, *cadabr*, *adabra*
- Mida 7: *abracad*, *bracada*, *racadab*, *acadabr*, *cadabra*
- Mida 8: *abracada*, *bracadab*, *racadabr*, *acadabra*
- Mida 9: *abracadab*, *bracadabr*, *racadabra*
- Mida 10: *abracadabr*, *bracadabra*
- Mida 11: *abracadabra*

Submots

Exemple: submots de *abracadabra*

- Mida 0: λ
- Mida 1: *a*, *b*, *r*, *c*, *d*
- Mida 2: *ab*, *br*, *ra*, *ac*, *ca*, *ad*, *da*
- Mida 3: *abr*, *bra*, *rac*, *aca*, *cad*, *dab*
- Mida 4: *abra*, *brac*, *raca*, *acad*, *cada*, *adab*, *dabr*
- Mida 5: *abrac*, *braca*, *racad*, *acada*, *cadab*, *adabr*, *dabra*
- Mida 6: *abraca*, *bracad*, *racada*, *acadab*, *cadabr*, *adabra*
- Mida 7: *abracad*, *bracada*, *racadab*, *acadabr*, *cadabra*
- Mida 8: *abracada*, *bracadab*, *racadabr*, *acadabra*
- Mida 9: *abracadab*, *bracadabr*, *racadabra*
- Mida 10: *abracadabr*, *bracadabra*
- Mida 11: *abracadabra*

Submots

Exemple: submots de *abracadabra*

- Mida 0: λ
- Mida 1: *a*, *b*, *r*, *c*, *d*
- Mida 2: *ab*, *br*, *ra*, *ac*, *ca*, *ad*, *da*
- Mida 3: *abr*, *bra*, *rac*, *aca*, *cad*, *dab*
- Mida 4: *abra*, *brac*, *raca*, *acad*, *cada*, *adab*, *dabr*
- Mida 5: *abrac*, *braca*, *racad*, *acada*, *cadab*, *adabr*, *dabra*
- Mida 6: *abraca*, *bracad*, *racada*, *acadab*, *cadabr*, *adabra*
- Mida 7: *abracad*, *bracada*, *racadab*, *acadabr*, *cadabra*
- Mida 8: *abracada*, *bracadab*, *racadabr*, *acadabra*
- Mida 9: *abracadab*, *bracadabr*, *racadabra*
- Mida 10: *abracadabr*, *bracadabra*
- Mida 11: *abracadabra*

Submots

Exemple: submots de *abracadabra*

- Mida 0: λ
- Mida 1: *a*, *b*, *r*, *c*, *d*
- Mida 2: *ab*, *br*, *ra*, *ac*, *ca*, *ad*, *da*
- Mida 3: *abr*, *bra*, *rac*, *aca*, *cad*, *dab*
- Mida 4: *abra*, *brac*, *raca*, *acad*, *cada*, *adab*, *dabr*
- Mida 5: *abrac*, *braca*, *racad*, *acada*, *cadab*, *adabr*, *dabra*
- Mida 6: *abraca*, *bracad*, *racada*, *acadab*, *cadabr*, *adabra*
- Mida 7: *abracad*, *bracada*, *racadab*, *acadabr*, *cadabra*
- Mida 8: *abracada*, *bracadab*, *racadabr*, *acadabra*
- Mida 9: *abracadab*, *bracadabr*, *racadabra*
- Mida 10: *abracadabr*, *bracadabra*
- Mida 11: *abracadabra*

Submots

Exemple: submots de *abracadabra*

- Mida 0: λ
- Mida 1: *a*, *b*, *r*, *c*, *d*
- Mida 2: *ab*, *br*, *ra*, *ac*, *ca*, *ad*, *da*
- Mida 3: *abr*, *bra*, *rac*, *aca*, *cad*, *dab*
- Mida 4: *abra*, *brac*, *raca*, *acad*, *cada*, *adab*, *dabr*
- Mida 5: *abrac*, *braca*, *racad*, *acada*, *cadab*, *adabr*, *dabra*
- Mida 6: *abraca*, *bracad*, *racada*, *acadab*, *cadabr*, *adabra*
- Mida 7: *abracad*, *bracada*, *racadab*, *acadabr*, *cadabra*
- Mida 8: *abracada*, *bracadab*, *racadabr*, *acadabra*
- Mida 9: *abracadab*, *bracadabr*, *racadabra*
- Mida 10: *abracadabr*, *bracadabra*
- Mida 11: *abracadabra*

Submots

Exemple: submots de *abracadabra*

- Mida 0: λ
- Mida 1: *a*, *b*, *r*, *c*, *d*
- Mida 2: *ab*, *br*, *ra*, *ac*, *ca*, *ad*, *da*
- Mida 3: *abr*, *bra*, *rac*, *aca*, *cad*, *dab*
- Mida 4: *abra*, *brac*, *raca*, *acad*, *cada*, *adab*, *dabr*
- Mida 5: *abrac*, *braca*, *racad*, *acada*, *cadab*, *adabr*, *dabra*
- Mida 6: *abraca*, *bracad*, *racada*, *acadab*, *cadabr*, *adabra*
- Mida 7: *abracad*, *bracada*, *racadab*, *acadabr*, *cadabra*
- Mida 8: *abracada*, *bracadab*, *racadabr*, *acadabra*
- Mida 9: *abracadab*, *bracadabr*, *racadabra*
- Mida 10: *abracadabr*, *bracadabra*
- Mida 11: *abracadabra*

Submots

Exemple: submots de *abracadabra*

- Mida 0: λ
- Mida 1: *a*, *b*, *r*, *c*, *d*
- Mida 2: *ab*, *br*, *ra*, *ac*, *ca*, *ad*, *da*
- Mida 3: *abr*, *bra*, *rac*, *aca*, *cad*, *dab*
- Mida 4: *abra*, *brac*, *raca*, *acad*, *cada*, *adab*, *dabr*
- Mida 5: *abrac*, *braca*, *racad*, *acada*, *cadab*, *adabr*, *dabra*
- Mida 6: *abraca*, *bracad*, *racada*, *acadab*, *cadabr*, *adabra*
- Mida 7: *abracad*, *bracada*, *racadab*, *acadabr*, *cadabra*
- Mida 8: *abracada*, *bracadab*, *racadabr*, *acadabra*
- Mida 9: *abracadab*, *bracadabr*, *racadabra*
- Mida 10: *abracadabr*, *bracadabra*
- Mida 11: *abracadabra*

Submots

Exemple: submots de *abracadabra*

- Mida 0: λ
- Mida 1: *a*, *b*, *r*, *c*, *d*
- Mida 2: *ab*, *br*, *ra*, *ac*, *ca*, *ad*, *da*
- Mida 3: *abr*, *bra*, *rac*, *aca*, *cad*, *dab*
- Mida 4: *abra*, *brac*, *raca*, *acad*, *cada*, *adab*, *dabr*
- Mida 5: *abrac*, *braca*, *racad*, *acada*, *cadab*, *adabr*, *dabra*
- Mida 6: *abraca*, *bracad*, *racada*, *acadab*, *cadabr*, *adabra*
- Mida 7: *abracad*, *bracada*, *racadab*, *acadabr*, *cadabra*
- Mida 8: *abracada*, *bracadab*, *racadabr*, *acadabra*
- Mida 9: *abracadab*, *bracadabr*, *racadabra*
- Mida 10: *abracadabr*, *bracadabra*
- Mida 11: *abracadabra*

Submots

Definició

Un submot , prefix o sufix d'un mot x és propi si no coincideix ni amb λ ni amb x.

Exemple: prefixos propis de *abracadabra*

a, *ab*, *abr*, *abra*, *abrac*, *abraca*, *abracad*, *abracada*, *abracadab*, *abracadabr*

Submots

Definició

Un submot , prefix o sufix d'un mot x és propi si no coincideix ni amb λ ni amb x.

Exemple: prefixos propis de *abracadabra*

a, *ab*, *abr*, *abra*, *abrac*, *abraca*, *abracad*, *abracada*, *abracadab*, *abracadabr*

Ordenació canònica

Definició

L'ordenació canònica dels mots és l'ordenació per mida creixent, primer, i lexicogràfica, després. En el cas de l'alfabet $\Sigma = \{0, 1\}$ és:

$$\lambda \prec 0 \prec 1 \prec 00 \prec 01 \prec 10 \prec 11 \prec 000 \prec 001 \prec 010 \prec \dots$$

Llenguatges

Definició de llenguatge

Donat un alfabet Σ, un subconjunt de Σ^* s'anomena *llenguatge sobre Σ*.

Exemple

- $\emptyset$
- $\{\lambda\}$
- $\Sigma^k = \{x \in \Sigma^* \mid |x| = k\}$
- $\Sigma^{\leq k} = \{x \in \Sigma^* \mid |x| \leq k\}$
- $\{x \in \Sigma^* \mid |x|_{\mathrm{a}} = |x|_{\mathrm{b}}\}$
- $\{x \in \Sigma^* \mid |x|_{\mathrm{a}} > |x|_{\mathrm{b}}\}$
- $\Sigma^* = \{\lambda, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{aa}, \mathrm{ab}, \dots\}$

Llenguatges

Definició de llenguatge

Donat un alfabet Σ, un subconjunt de Σ^* s'anomena *llenguatge sobre Σ*.

Exemple

- $\emptyset$
- $\{\lambda\}$
- $\Sigma^k = \{x \in \Sigma^* \mid |x| = k\}$
- $\Sigma^{\leq k} = \{x \in \Sigma^* \mid |x| \leq k\}$
- $\{x \in \Sigma^* \mid |x|_{\mathrm{a}} = |x|_{\mathrm{b}}\}$
- $\{x \in \Sigma^* \mid |x|_{\mathrm{a}} > |x|_{\mathrm{b}}\}$
- $\Sigma^* = \{\lambda, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{aa}, \mathrm{ab}, \ldots\}$

Llenguatges

Definició de llenguatge

Donat un alfabet Σ, un subconjunt de Σ^* s'anomena *llenguatge sobre Σ*.

Exemple

- $\emptyset$
- $\{\lambda\}$
- $\Sigma^k = \{x \in \Sigma^* \mid |x| = k\}$
- $\Sigma^{\leq k} = \{x \in \Sigma^* \mid |x| \leq k\}$
- $\{x \in \Sigma^* \mid |x|_{\mathrm{a}} = |x|_{\mathrm{b}}\}$
- $\{x \in \Sigma^* \mid |x|_{\mathrm{a}} > |x|_{\mathrm{b}}\}$
- $\Sigma^* = \{\lambda, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{aa}, \mathrm{ab}, \dots\}$

Llenguatges

Definició de llenguatge

Donat un alfabet Σ, un subconjunt de Σ^* s'anomena *llenguatge sobre* Σ.

Exemple

- $\emptyset$
- $\{\lambda\}$
- $\Sigma^k = \{x \in \Sigma^* \mid |x| = k\}$
- $\Sigma^{\leq k} = \{x \in \Sigma^* \mid |x| \leq k\}$
- $\{x \in \Sigma^* \mid |x|_{\mathrm{a}} = |x|_{\mathrm{b}}\}$
- $\{x \in \Sigma^* \mid |x|_{\mathrm{a}} > |x|_{\mathrm{b}}\}$
- $\Sigma^* = \{\lambda, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{aa}, \mathrm{ab}, \dots\}$

Llenguatges

Definició de llenguatge

Donat un alfabet Σ, un subconjunt de Σ^* s'anomena *llenguatge sobre* Σ.

Exemple

- $\emptyset$
- $\{\lambda\}$
- $\Sigma^k = \{x \in \Sigma^* \mid |x| = k\}$
- $\Sigma^{\leq k} = \{x \in \Sigma^* \mid |x| \leq k\}$
- $\{x \in \Sigma^* \mid |x|_{\mathtt{a}} = |x|_{\mathtt{b}}\}$
- $\{x \in \Sigma^* \mid |x|_{\mathtt{a}} > |x|_{\mathtt{b}}\}$
- $\Sigma^* = \{\lambda, \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{aa}, \mathtt{ab}, \ldots\}$

Llenguatges

Definició de llenguatge

Donat un alfabet Σ, un subconjunt de Σ^* s'anomena *llenguatge sobre Σ*.

Exemple

- $\emptyset$
- $\{\lambda\}$
- $\Sigma^k = \{x \in \Sigma^* \mid |x| = k\}$
- $\Sigma^{\leq k} = \{x \in \Sigma^* \mid |x| \leq k\}$
- $\{x \in \Sigma^* \mid |x|_{\mathrm{a}} = |x|_{\mathrm{b}}\}$
- $\{x \in \Sigma^* \mid |x|_{\mathrm{a}} > |x|_{\mathrm{b}}\}$
- $\Sigma^* = \{\lambda, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{aa}, \mathrm{ab}, \dots\}$

Llenguatges

Definició de llenguatge

Donat un alfabet Σ, un subconjunt de Σ^* s'anomena *llenguatge sobre Σ*.

Exemple

- $\emptyset$
- $\{\lambda\}$
- $\Sigma^k = \{x \in \Sigma^* \mid |x| = k\}$
- $\Sigma^{\leq k} = \{x \in \Sigma^* \mid |x| \leq k\}$
- $\{x \in \Sigma^* \mid |x|_{\mathrm{a}} = |x|_{\mathrm{b}}\}$
- $\{x \in \Sigma^* \mid |x|_{\mathrm{a}} > |x|_{\mathrm{b}}\}$
- $\Sigma^* = \{\lambda, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{aa}, \mathrm{ab}, \dots\}$

Llenguatges

Definició de llenguatge

Donat un alfabet Σ, un subconjunt de Σ^* s'anomena *llenguatge sobre* Σ.

Exemple

- $\emptyset$
- $\{\lambda\}$
- $\Sigma^k = \{x \in \Sigma^* \mid |x| = k\}$
- $\Sigma^{\leq k} = \{x \in \Sigma^* \mid |x| \leq k\}$
- $\{x \in \Sigma^* \mid |x|_{\mathtt{a}} = |x|_{\mathtt{b}}\}$
- $\{x \in \Sigma^* \mid |x|_{\mathtt{a}} > |x|_{\mathtt{b}}\}$
- $\Sigma^* = \{\lambda, \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{aa}, \mathtt{ab}, \ldots\}$

Exercicis

- Formalitzeu la conjectura de Goldbach fent servir lògica de primer ordre.
- Definiu cada conjunt formalment (i sense punts suspensius) i doneu-ne també una breu descripció amb paraules:
  (a) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11 \ldots\}$
  (b) $\{1, 3, 7, 15, 31, 63 \ldots\}$
  (c) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13 \ldots\}$
  (d) $\{1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots\}$
- Digueu quines sentències són certes i quines són falses amb una breu explicació.
  (a) $\{1, 2\} \subseteq \{2, 1, 0\}$
  (b) $\emptyset \subseteq \emptyset$
  (c) $\emptyset \subsetneq \emptyset$
  (d) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
  (e) $\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$
  (f) $\emptyset = \{\emptyset\}$

Exercicis

- Quins són els conjunts $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ i $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$?
- Demostreu, per a tot parell de conjunts A i B, que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
- Justifiqueu les igualtats següents per a qualssevol conjunts A, B, C:
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
    $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
    $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,
    $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.
- Demostreu que, per a tot parell de conjunts A i B, es compleix

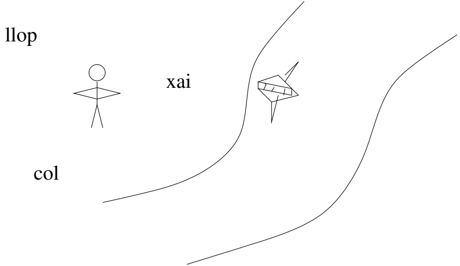
$$A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B).$$

- Dels dos conjunts $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ i $\mathcal{P}(A \cup B)$, quin està inclòs en quin? Demostreu una de les inclusions i fabriqueu un exemple en què l'altra no es compleixi (és a dir, un *contraexemple*). Quina condició han de complir A i B perquè sigui certa la igualtat?

Introducció a llenguatges i autòmats

EL LLOP, EL XAI I LA COL

Un home vol travessar un riu portant —per raons desconegudes— un llop, un xai i una col a l'altra riba i, per fer-ho, disposa d'una barca tan petita que només hi cap ell i, com a màxim, un dels tres organismes en cada viatge.



Definició

Un *autòmat finit determinista* (DFA, de l'anglès *deterministic finite automaton*) és un quíntuple $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, on:

- Q és un conjunt finit no buit els elements del qual s'anomenen *estats*,
- Σ és un alfabet,
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ és una funció total, anomenada *de transició*,
- $q_0 \in Q$ s'anomena *estat inicial* i
- $F \subseteq Q$ s'anomena *conjunt d'estats finals*.

Exemple. Taula i diagrama de transicions

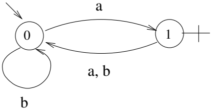
Sigui $M_1 = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un autòmat finit amb:

- $Q = \{0, 1\}$,
- $\Sigma = \{a, b\}$,
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ tal que

$$\begin{array}{ll} \delta(0, a) = 1 & \delta(0, b) = 0 \\ \delta(1, a) = 0 & \delta(1, b) = 0 \end{array}$$

- $q_0 = 0$,
- $F = \{1\}$.

δ	a	b
0	1	0
1	0	0



Funció de transició estesa

Sigui $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un autòmat finit. La *funció de transició estesa* de M és la funció $\tilde{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$ tal que, per a $q \in Q$ i $x \in \Sigma^*$:

$$\tilde{\delta}(q, x) = \begin{cases} q, & \text{si } x = \lambda, \\ \tilde{\delta}(\delta(q, a), y), & \text{si } x = ay, \text{amb } a \in \Sigma. \end{cases}$$

Sobre el DFA M_1 de l'exemple anterior, podem observar que:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}(q_0, aba) &= \tilde{\delta}(\delta(q_0, a), ba) = \tilde{\delta}(1, ba) = \\ &= \tilde{\delta}(\delta(1, b), a) = \tilde{\delta}(0, a) = \\ &= \tilde{\delta}(\delta(0, a), \lambda) = \tilde{\delta}(1, \lambda) = 1 \end{aligned}$$

En canvi, és fàcil veure que $\tilde{\delta}(q_0, ab) = 0$. En el primer cas, M_1 arriba a un estat final, mentre que en el segon arriba a un estat no final.

Funció de transició estesa

Sigui $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un autòmat finit. La *funció de transició estesa* de M és la funció $\tilde{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$ tal que, per a $q \in Q$ i $x \in \Sigma^*$:

$$\tilde{\delta}(q, x) = \begin{cases} q, & \text{si } x = \lambda, \\ \tilde{\delta}(\delta(q, a), y), & \text{si } x = ay, \text{amb } a \in \Sigma. \end{cases}$$

Sobre el DFA M_1 de l'exemple anterior, podem observar que:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}(q_0, aba) &= \tilde{\delta}(\delta(q_0, a), ba) = \tilde{\delta}(1, ba) = \\ &= \tilde{\delta}(\delta(1, b), a) = \tilde{\delta}(0, a) = \\ &= \tilde{\delta}(\delta(0, a), \lambda) = \tilde{\delta}(1, \lambda) = 1 \end{aligned}$$

En canvi, és fàcil veure que $\tilde{\delta}(q_0, ab) = 0$. En el primer cas, M_1 arriba a un estat final, mentre que en el segon arriba a un estat no final.

Definició de llenguatge reconegut

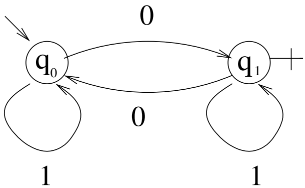
Sigui $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA amb funció de transició estesa $\tilde{\delta}$. Diem que M accepta un mot $x \in \Sigma^*$ si $\tilde{\delta}(q_0, x) \in F$. El *llenguatge reconegut* per M es defineix com

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \tilde{\delta}(q_0, x) \in F\}.$$

És a dir, $L(M)$ és el llenguatge format pels mots sobre Σ que són acceptats per M.

Exemple 1

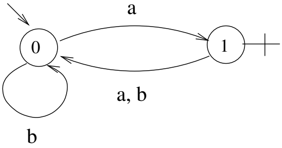
El llenguatge dels mots sobre $\{0, 1\}$ amb un nombre senar de zeros. És reconegut per l'autòmat:



Exemple 2

El llenguatge de l'autòmat vist abans

δ	a	b
0	1	0
1	0	0



és:

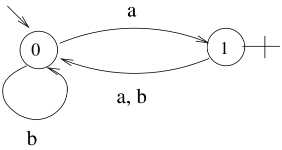
$$\{xa^{2k+1} \mid x \text{ no acaba en } a \ \wedge \ k \geq 0\}.$$

Exemple 2

El llenguatge de l'autòmat vist abans

δ

	a	b
0	1	0
1	0	0



és:

$$\{xa^{2k+1} \mid x \text{ no acaba en } a \ \wedge\ k \geq 0\}.$$

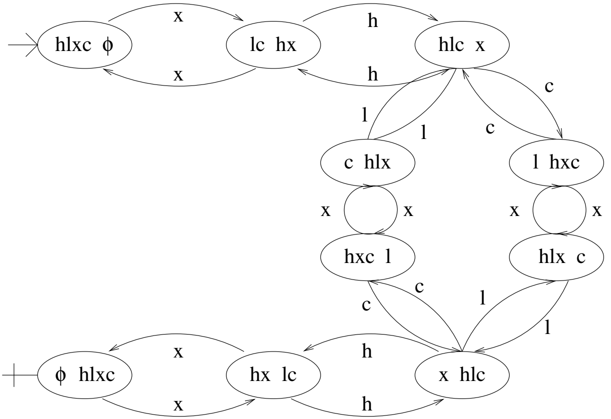
Exemple 3

Solucions del problema EL LLOP, EL XAI I LA COL.

- $Q = \{(\mathtt{hlxc}, \emptyset), (\mathtt{hlc}, \mathtt{x}), (\mathtt{hlx}, \mathtt{c}), (\mathtt{hxc}, \mathtt{l}), (\mathtt{hx}, \mathtt{lc})$

  $(\emptyset, \mathtt{hlxc}), (\mathtt{x}, \mathtt{hlc}), (\mathtt{c}, \mathtt{hlx}), (\mathtt{l}, \mathtt{hxc}), (\mathtt{lc}, \mathtt{hx})\}$

  representen la presència dels quatre elements del puzzle a cadascuna de les dues ribes.
- L'alfabet és $\Sigma = \{c, l, x, h\}$
- cada símbol representa una acció que fa passar d'un estat a un altre



Solucions mínimes: *xhlxchx* i *xhcxlhx*.

Exemple 4

DFA M que reconeix el llenguatge dels mots sobre $\{a, b\}$ que tenen almenys una a.

Sigui $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un autòmat finit amb:

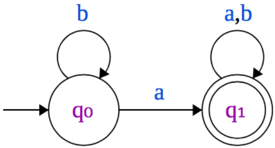
- $Q = \{q_0, q_1\}$,
- $\Sigma = \{a, b\}$,
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ tal que

$$\begin{array}{ll} \delta(q_0, a) = q_1 & \delta(q_0, b) = q_0 \\ \delta(q_1, a) = q_1 & \delta(q_1, b) = q_1 \end{array}$$

- $F = \{q_1\}$.

Exemple 4

DFA *M* amb el diagrama i la taula de transicions en el format del RACSO.



The previous DFA can be described with the basic format as follows:

	a	b	
q0	q1	q0	
q1	q1	q1	+

Exercicis trivials

Descriviu DFAs per als llenguatges següents:

- $\emptyset$
- $\{\lambda\}$
- $\{a, b\}^*$
- $\{a, b\}^{\leq 2}$
- $\{a, b\}^3$

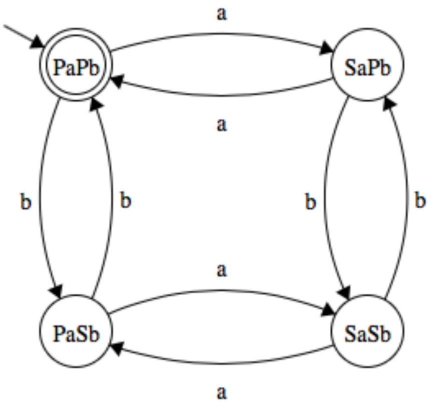
Exercicis (RACSO)

Trobeu DFAs mínims per als llenguatges següents:

2. $\{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = \dot{2} \ \wedge \ |w|_b = \dot{2}\}$
4. $\{w \in \{a,b\}^* \mid \exists x \ \ w = xa\}$
8. $\{w \in \{a,b\}^* \mid \forall x, y \ \ w = xay \Rightarrow |x|_b = \dot{2}\}$
15. $\{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_{bbb} = 0\}$
20. $\{w \in \{0,1\}^* \mid \mathbf{value}_2(w) \in \dot{2}\}$
21. $\{w \in \{0,1\}^* \mid \mathbf{value}_2(w) \in \dot{3}\}$

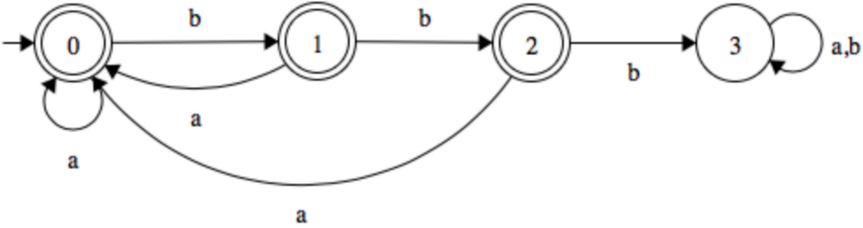
Exercici 2

$$\{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = \dot{2} \ \wedge \ |w|_b = \dot{2}\}$$



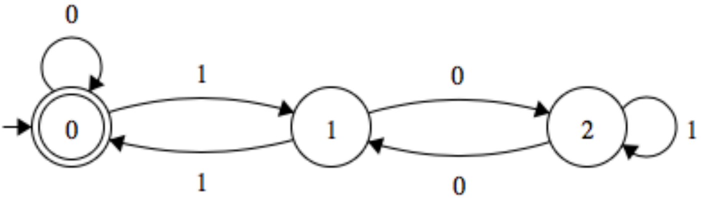
Exercici 15

$$\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_{bbb} = 0\}$$



Exercici 21

$$\{w \in \{0,1\}^* \mid \mathbf{value}_2(w) \in \dot{3}\}$$

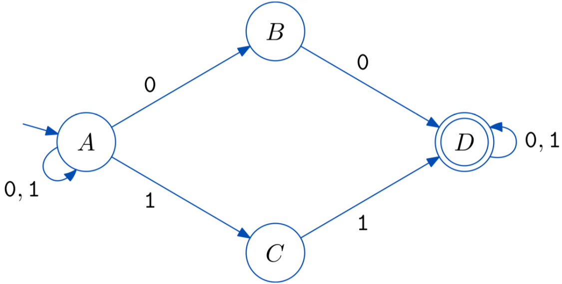


Exercicis sobre NFA

- Informalment, un NFA (*nondeterministic finite automaton*) és un autòmat finit que pot tenir
  - més d'un estat inicial
  - més d'una transició amb el mateix símbol des d'un estat concret

  Es diu que un NFA accepta una entrada *w* sempre que existeixi un camí des d'un estat inicial fins a un d'acceptador amb els símbols de *w*.

  Digueu quin és el llenguatge acceptat per l'NFA següent i construïu un DFA equivalent.



Exercicis sobre NFA

- Digueu quin és el llenguatge acceptat per l'NFA següent i construïu un DFA equivalent.