1. Doneu una gram`atica no amb´ıgua per a generar expressions amb operadors binaris de suma,resta, producte, divisi´o, i tamb´e admetent parentitzaci´o expl´ıcita, de manera que l’arbre sint`actic generat es correspongui a la preced´encia habitual que donem als operadors.

2. Sup´on que una gram´atica cumple que en cada parte derecha hay como mucho una variable,y que los lenguajes generados desde dos partes derechas cualesquiera de una misma variable s´on disjuntos. Demuestra que, bajo estas condiciones, la gram´atica no es ambigua.

3. Justifica la ambigu¨etat o no ambigu¨etat de les segu¨ents CFG's:

(a) $S \rightarrow (S)S|$

Lema: Si $S \overset{*}{\Rightarrow} w$, llavors tot prefix w' de w compleix $|w'|_(\geq |w'|_)$

Dem

$S \overset{K}{\Rightarrow} w$ ind. sobre K

$K = 1$ ✓

$K > 1$

Prop: G es inambigua

Dem: Sigui $S \overset{*}{\Rightarrow} w$

HI: [w té un sol arbre de derivació]

Inducció en $|w|$: Base $\rightarrow$ $|w| = 0$: $w = \lambda$

$|w| > 0 \Rightarrow w = (x)y$ on $S \overset{*}{\Rightarrow} x$ i $S \overset{*}{\Rightarrow} y$

$\Downarrow$ HI té un sol arbre

$\Downarrow$ HI té un sol arbre

(b) $S \rightarrow S(S)S|$

no ambigua

(c)

$S \rightarrow aSb|B$
$B \rightarrow bAa|bCb|\lambda$
$A \rightarrow aAbA|bAaA|\lambda$
$C \rightarrow Aaa|aAa|aaA$

(d)

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow aU_1|aS|bZ_1|bS \\
Z_1 &\rightarrow aU_2|bF \\
U_1 &\rightarrow bU_2 \\
U_2 &\rightarrow bF|b \\
F &\rightarrow aF|bF|a|b
\end{aligned}
$$

(e)

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow AaBA|ABaA|ACA|AbabA \\
B &\rightarrow bb \\
C &\rightarrow bB \\
A &\rightarrow aA|bA|\lambda
\end{aligned}
$$

(f)

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow aU_1|aS|bZ_1|bS \\
Z_1 &\rightarrow aU_2|bZ_2 \\
U_1 &\rightarrow bU_2 \quad U_2 \rightarrow bF \\
Z_2 &\rightarrow aF|bF \\
F &\rightarrow aF|bF|\lambda
\end{aligned}
$$

(g)

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow Z_1a|Z_2b \\
Z_1 &\rightarrow Z_1a|U_1b \\
Z_2 &\rightarrow U_2a|Z_3b \\
Z_3 &\rightarrow Fa|U_2 \\
U_1 &\rightarrow U_2|Fba \\
U_2 &\rightarrow Fb \\
F &\rightarrow Fa|Fb|\lambda
\end{aligned}
$$

$S \rightarrow$

4. Muestra que la gramática unión $G_1 \cup G_2$ de dos gramáticas no ambiguas G_1, G_2 sí podría ser ambigua.

$A \to a$ $\qquad$ $B \to a$ $\qquad$ $A \cup B$: $\quad S \to A \mid B$

$A \to a$

$B \to a$

$$\begin{array}{c} S \\ | \\ A \\ | \\ a \end{array} \qquad \begin{array}{c} S \\ | \\ B \\ | \\ a \end{array}$$

AMBIGUA

5. Muestra que la gramática concatenación $G_1 \cdot G_2$ de dos gramáticas no ambiguas G_1, G_2 sí podría ser ambigua.

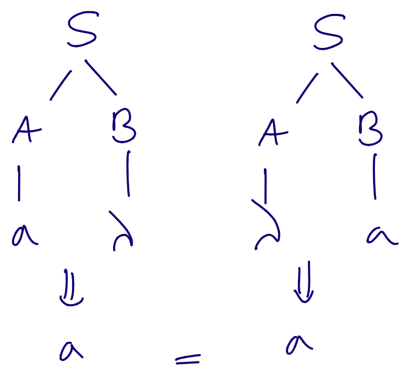
$G_1: \; A \to a \mid \lambda$

$G_2: \; B \to a \mid \lambda$

$G_1 \cdot G_2: \; S \to AB$

$A \to a \mid \lambda$

$B \to a \mid \lambda$



[ambigua]

6. Muestra que la gramática estrella G^* de una gramática no ambigua G sí podría ser ambigua.

$G = \langle V, \Sigma, P, S \rangle$

$V = \{S, A, B\}$ $\quad P = \{ S \to A \mid B \mid \lambda,$

$\Sigma = \{a, b\}$ $\quad A \to aSa,$

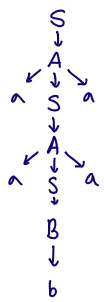
$\quad B \to b \}$

$S \to Sa \mid \lambda$

$S' \to SS' \mid \lambda$

$S \to Sa \mid \lambda$

aabaa:



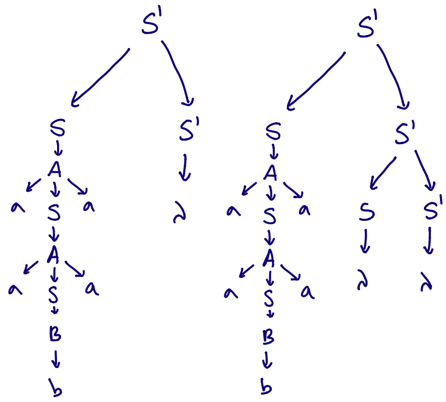
$G^* = \langle V', \Sigma, P', S' \rangle$

$V' = \{S', S, A, B\}$ $\quad P = \{ S' \to SS' \mid \lambda$

$\Sigma = \{a, b\}$ $\quad S \to A \mid B \mid \lambda,$

$\quad A \to aSa,$

$\quad B \to b \}$



aabaaλ

aabaa

aabaa$\lambda\lambda$

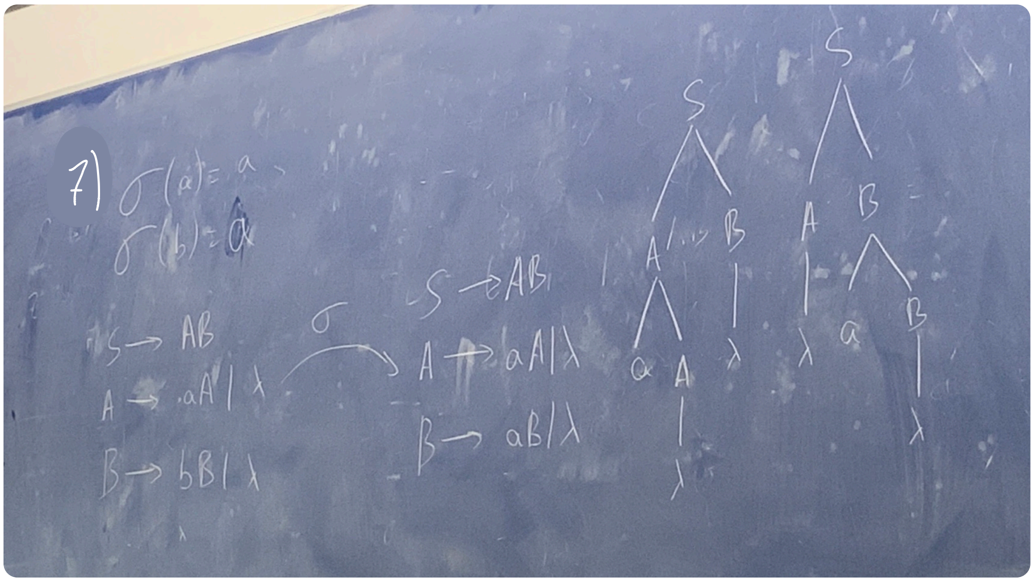
aabaa

$S \to a$

$S' \to SS' \mid \lambda$

$S \to a$

7. Muestra que la gram´atica imagen $\sigma(G)$ de una gram´atica no ambigua G por un morfismo σ s´ı podr´ıa ser ambigua.



8. Muestra que la gram´atica reverso G^R una gram´atica no ambigua G tampoco es ambigua.

9. Escribe el DFA m´ınimo para $\{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a \in 2\dot{}\}$, y haz la intersecci´on expl´ıcita de ese DFA con la CFG $S \to aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \lambda$.

10. Escribe el DFA mínimo para $\{wa \mid w \in \{a,b\}^*\}$, y haz la intersección explícita de ese DFA con la CFG $S \rightarrow aSbS \mid bSaS \mid \lambda$.

11. Escribe el DFA mínimo para $\{aw \mid w \in \{a,b\}^*\}$, y haz la intersección explícita de ese DFA con la CFG $S \rightarrow aSbS \mid bSaS \mid \lambda$.

12. Realizad la eliminaci´on de λ-producciones, producciones unarias, y s´ımbolos no-u´tiles, de las gram´aticas siguientes:

(a)

$$S \rightarrow (S)S|\lambda$$

PAS 1: Eliminar λ-prod

$S' \rightarrow S \mid \lambda$

$S \rightarrow (S)S \mid (S) \mid ()S \mid ()$

PAS 2: Eliminació var. unitaries

$S' \rightarrow \lambda \mid (S)S \mid (S) \mid ()S \mid ()$

$S \rightarrow (S)S \mid (S) \mid ()S \mid ()$

PAS 3: Eliminar inútils

Accessibles $= \{S', S\}$ per S' es inicial, $S \in$ part dreta de $P_{S'}$

Fructífers $= \{S', S\}$ per $\exists$ camí $S' \rightsquigarrow ()$, $\exists$ camí $S \rightsquigarrow ()$

$S' \rightarrow \lambda \mid (S)S \mid (S) \mid ()S \mid ()$

$S \rightarrow (S)S \mid (S) \mid ()S \mid ()$

(b)

$$S \rightarrow SS|(S)|\lambda$$

$S' \rightarrow S \mid \lambda$

$S \rightarrow (S)(S) \mid (S) \mid ()() \mid ()$

(c)

$$S \rightarrow AA$$

$$A \rightarrow AA|\lambda$$

$S \rightarrow S \mid \lambda$

(d)

$$\begin{aligned} S &\to A \\ A &\to B \\ B &\to c \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} S &\to AB \\ A &\to a|\lambda \\ B &\to b|\lambda \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} S &\to AB \\ A &\to aAb|\lambda \\ B &\to bBc|\lambda \end{aligned} \quad \to \quad \left\{ \begin{aligned} S' &\to S \mid \lambda \\ S &\to AB \mid A \mid B \\ A &\to aAb \mid ab \\ B &\to bBc \mid bc \end{aligned} \right. \quad \to \quad \left\{ \begin{aligned} S' &\to \lambda \mid AB \mid aAb \mid ab \mid bBc \mid bc \\ &\cancel{S \to AB \mid aAb \mid ab \mid bBc \mid bc} \\ A &\to aAb \mid ab \\ B &\to bBc \mid bc \end{aligned} \right.$$

$$\boxed{\begin{aligned} S' &\to \lambda \mid AB \mid aAb \mid ab \mid bBc \mid bc \\ A &\to aAb \mid ab \\ B &\to bBc \mid bc \end{aligned}}$$

(g)

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow BC|\lambda \\
A &\rightarrow aA|\lambda \\
B &\rightarrow bB \\
C &\rightarrow c
\end{aligned}
$$

(h)

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow X|Y \\
X &\rightarrow Xc|A \\
A &\rightarrow aAb|\lambda \\
Y &\rightarrow aY\,|B \\
B &\rightarrow bBc|\lambda
\end{aligned}
$$

(i)

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow A|B|C \\
A &\rightarrow SaSbS|\lambda \\
B &\rightarrow SbSaS|\lambda \\
C &\rightarrow Cc|\lambda
\end{aligned}
$$

13. Sea G una CFG y sea C su conjunto de variables no-accesibles. Sea G^0 la gram´atica obtenida al borrar de G las variables de C junto con las reglas donde aparecen. Demuestra que el conjunto de variables accesibles de G^0 es, de hecho, el conjunto de todas las variables de G^0.

14. Sea G una CFG y sea C su conjunto de símbolos no-fructíferos. Sea G^0 la gramática obtenida al borrar de G los símbolos de C junto con las reglas donde aparecen. Demuestra que el conjunto de símbolos fructíferos de G^0 es, de hecho, el conjunto de todas las variables de G^0.

15. Sea G una CFG y sea C su conjunto de símbolos no-accesibles. Supongamos que todos los símbolos de G son fructíferos. Sea G^0 el resultado de borrar de G los símbolos de C junto con las reglas donde aparecen. Demuestra que el conjunto de símbolos fructíferos de G^0 es, de hecho, el conjunto de todas las variables de G^0.

16. Da un ejemplo de gramática en la que, tras borrar un cierto símbolo útil, y todas las reglasen las que aparece, aún así el lenguaje generado se preserva.

17. Cu´al es el coste temporal y espacial de eliminar las λ-producciones de una CFG.

18. Cu´al es el coste temporal y espacial de eliminar las producciones unarias de una CFG.

19. Cuál es el coste temporal y espacial de eliminar los símbolos no útiles de una CFG.

20. Cu´al es el coste temporal y espacial de pasar una CFG a CNF?

21. Cu´al es el coste del algoritmo propuesto en el curso para decidir si una gram´atica genera unacierta palabra, si se realiza una implementaci´on razonable del mismo? Cu´al es el coste si se supone G fija, y que la entrada s´olo contiene w?

22. Sea n el nu´mero de pasos de derivaci´on necesarios para generar una cierta palabra w con una cierta gram´atica G en forma normal de Chomsky. Podemos establecer alguna relaci´on entre n y $|w|$?

23. Justifiqueu la veracitat o falsetat de les següents afirmacions per a CFGs G, G_1, G_2, G_3.

(a) $(G^R)^R = G$.

(b) $(G_1 \cup G_2)^R = G_1^R \cup G_2^R$.

(c) $(G^R)^* = (G^*)^R$.

(d) $(G_1 \cup G_2)G = (G_1G) \cup (G_2G)$.

(e) $\sigma(G_1 \cup G_2) = \sigma(G_1) \cup \sigma(G_2)$.

(f) $G_1(G_2G_3) = (G_1G_2)G_3$.

(g) $(G_1G_2)^R = G^R_2 \, G^R_1$.

24. Prop´on un algoritmo de coste razonable para saber si una CFG de entrada genera algunapalabra.

caso base

- simbolo → ret false
- expresion

$(b)^*$ b

```
bool eses_infinito() {
    si (expresion envuelta en *) ret true;

    si (expression == simbolo) ret false;

    si la siguiente capa es suma de expresiones
    for i entre 1 y total de expresiones
        bool result = result and expresion_i;
        ret result.
}
```

25. Prop´on un algoritmo de coste razonable para saber si una CFG de entrada genera infinitaspalabras.

26. Prop´on un algoritmo de coste razonable para saber si una CFG de entrada genera algunapalabra de tamañ˜o par.

27. Prop´on un algoritmo de coste razonable para saber si una CFG de entrada genera infinitaspalabras de taman˜o par.

28. Propón un algoritmo de coste razonable para saber, dada una CFG G de entrada y un natural n, cuantos árboles de derivación distintos de palabras de tamaño n genera G.

29. Sigui L un llenguatge incontextual infinit. Demostra que hi ha una CFG G tal que $L(G) = L$ i totes les variables de G generen un llenguatge infinit.

L incontextual infinit $\Rightarrow \exists$ CFG $G \mid L(G) = L$

Dem que $\exists$ CFG G $L(G) = L \mid$ totes les variables de G generen un llenguatge infinit

$$\left.\begin{array}{l} L_A = \{a\} \\ L_B = \{b^k \mid k \in \mathbb{N}\} = b^* \end{array}\right\} ab^* \qquad \left[\begin{array}{l} S \to AB \\ B \to bB \mid \lambda \end{array}\right]$$

Variables pueden generar