Teoria de la Computació

Tema 2: Autòmats Finits

Teoria:

- `Vídeos del 4 al 13`
- `Llibre TC (Llenguatges regulars i incontextuals) Capítols 4 i 5.`

Exercicis per a l'avaluació contínua:

1. Obtén los DFA's mínimos A_1, A_2 para $L_1 = \{xaay \mid x, y \in \{a,b\}^*\}$ y $L_2\{xbby \mid x, y \in \{a,b\}^*\}$, respectivamente, y calcula explícitamente el DFA intersección $A_1 \cap A_2$.
2. Obtén los DFA's mínimos A_1, A_2 para $L_1 = \{xaay \mid x, y \in \{a,b\}^*\}$ y $L_2 = \{xbby \mid x, y \in \{a,b\}^*\}$, respectivamente, y calcula explícitamente el DFA unión $A_1 \cup A_2$.
3. Obtén los DFA's mínimos A_1, A_2 para $L_1 = \{xay \mid x, y \in \{a,b\}^*\}$ y $L_2 = \{xbbby \mid x, y \in \{a,b\}^*\}$, respectivamente, y calcula explícitamente el DFA unión $A_1 \cup A_2$.
4. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{aaw \mid w \in \{a,b\}^*\}$, y calcula explícitamente $\overline{A}$.
5. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid \texttt{valor}_2(w) \in \dot{3}\}$, y calcula explícitamente $\overline{A}$.
6. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w| \in \dot{3} + 1\}$, y calcula explícitamente $\overline{A}$.
7. Obtén los DFA's mínimos A_1, A_2 para $L_1 = \{xaya \mid x, y \in \{a,b\}^*\}$ y $L_2 = \{bxby \mid x, y \in \{a,b\}^*\}$, respectivamente, y calcula explícitamente el λ-NFA concatenación $A_1 \cdot A_2$, determinízalo y minimízalo.
8. Obtén los DFA's mínimos A_1, A_2 para $L_1 = \{xaay \mid x, y \in \{a,b\}^*\}$ y $L_2 = \{bxb \mid x \in \{a,b\}^*\}$, respectivamente, y calcula explícitamente el NFA concatenación $A_1 \cdot A_2$, determinízalo y minimízalo.
9. Obtén los DFA's mínimos A_1, A_2 para $L_1 = \{xaya \mid x, y \in \{a,b\}^*\}$ y $L_2 = \{bxb \mid x \in \{a,b\}^*\}$, respectivamente, y calcula explícitamente el NFA concatenación $A_1 \cdot A_2$, determinízalo y minimízalo.
10. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{xay \in \{a,b\}^* \mid |y| = 1\}$, y calcula explícitamente el NFA estrella A^*, determinízalo y minimízalo.
11. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{xaby \in \{a,b\}^* \mid |y| = 1\}$, y calcula explícitamente el NFA estrella A^*, determinízalo y minimízalo.
12. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{axaby \in \{a,b\}^* \mid |y| = 1\}$, y calcula explícitamente el NFA estrella A^*, determinízalo y minimízalo.
13. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \forall w_1, w_2 (w = w_1 a w_2 \Rightarrow |w_1|_b \in \dot{2})\}$, y calcula explícitamente el NFA reverso A^R, determinízalo y minimízalo.

14. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \forall w_1, w_2(w = w_1 a w_2 \Rightarrow |w_1|_b \in \dot{2}+1)\}$, y calcula explícitamente el NFA reverso A^R, determinízalo y minimízalo.

15. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \forall w_1, w_2(w = w_1 a w_2 \Rightarrow |w_1| \in \dot{2})\}$, y calcula explícitamente el NFA reverso A^R, determinízalo y minimízalo.

16. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{axbya \mid x, y \in \{a,b\}^*\}$, y dado el morfismo definido por $\sigma(a) = aa$, $\sigma(b) = ba$, calcula explícitamente el NFA imagen $\sigma(A)$, determinízalo y minimízalo.

17. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{axbyc \mid x, y \in \{a,b,c\}^*\}$, y dado el morfismo definido por $\sigma(a) = ab$, $\sigma(b) = b$, $\sigma(c) = \lambda$, calcula explícitamente el NFA imagen $\sigma(A)$, determinízalo y minimízalo.

18. Obtén el DFA mínimo A para $L = \{xbcya \mid x, y \in \{a,b,c\}^*\}$, y dado el morfismo definido por $\sigma(a) = bbb$, $\sigma(b) = a$, $\sigma(c) = \lambda$, calcula explícitamente el NFA imagen $\sigma(A)$, determinízalo y minimízalo.

19. Sea A el DFA mínimo que reconoce a los números binarios múltiples de 3. Calcula $\sigma^{-1}(A)$ tomando como σ los morfismos:

    (a) $\sigma(a) = 01$, $\sigma(b) = 0$, $\sigma(c) = \lambda$.
    (b) $\sigma(a) = 10$, $\sigma(b) = 0$, $\sigma(c) = \lambda$.
    (c) $\sigma(a) = 00$, $\sigma(b) = 11$, $\sigma(c) = \lambda$.
    (d) $\sigma(a) = 001$, $\sigma(b) = 101$, $\sigma(c) = 0$.

20. Diseña un algoritmo de coste razonable para encontrar los estados no accesibles de un DFA de entrada.

21. Diseña un algoritmo de coste razonable para decidir si un DFA de entrada acepta alguna palabra.

22. Diseña un algoritmo de coste razonable para decidir si un DFA de entrada acepta infinitas palabras.

23. Cuál es el coste del algoritmo de determinización de NFA's en DFA's.

24. Cuál es el coste temporal de las siguentes operaciones de DFA's:

    (a) intersección.
    (b) unión.
    (c) complementario.
    (d) concatenación (incluyendo determinización).
    (e) estrella (incluyendo determinización).
    (f) reverso (incluyendo determinización).
    (g) aplicación de morfismo (incluyendo determinización).
    (h) aplicación de morfismo inverso.

25. Por qué en nuestra definición de A^* añadimos un nuevo estado inicial, que es también aceptador, en el caso particular en que se cumpla $\lambda \notin \mathcal{L}(A)$? En este caso, no bastaría con poner el propio estado inicial de A como aceptador?

26. Cuál es el coste del algoritmo de minimización con una implementación razonable.

27. Propón un algoritmo de coste razonable para saber si dos DFA's de entrada reconocen el mismo lenguaje.

28. Propón un algoritmo de coste razonable para saber, si dados dos DFA's de entrada, el lenguaje generado por el primero está incluido en el lenguaje generado por el segundo.

29. Justifiqueu la veracitat o falsetat de les següents afirmacions per a DFAs mínims A, A_1, A_2, NFAs B, B_1, B_2, B_3 i morfisme σ. En cas que les operacions que apareixen hagin estat definides només per a DFAs, assumiu la seva extensió natural a NFAs.

    (a) $A_1 \cap A_2$ és DFA mínim.
    (b) $A_1 \cup A_2$ és DFA mínim.
    (c) $\bar{A}$ és DFA mínim.
    (d) $\sigma(A)$ és DFA.
    (e) $\sigma^{-1}(A)$ és DFA mínim.
    (f) $\bar{\bar{A}} = A$.
    (g) $(B^R)^R = B$.
    (h) $(B^*)^* = B^*$.
    (i) $(B_1B_2)B_3 = B_1(B_2B_3)$.
    (j) $(B_1B_2)^R = B_2^R B_1^R$.
    (k) $(B^R)^* = (B^*)^R$.
    (l) En el cas en que A^R també sigui DFA, llavors podem concloure que és mínim.

30. Decimos que un NFA es de aceptación única si para cada palabra aceptada existe una única ejecución aceptadora. Demuestra que, para un NFA de aceptación única A, A^R es un NFA de aceptación única.

31. Dado un lenguaje L, definimos $\texttt{Prefijos}(L)$ como el lenguaje $\{w | \exists x : (wx \in L)\}$. Dado un DFA A, cómo se puede construir un DFA $\texttt{Prefijos}(A)$ que cumpla $\mathcal{L}(\texttt{Prefijos}(A)) = \texttt{Prefijos}(\mathcal{L}(A))$.

32. Dado un lenguaje L, definimos $\texttt{Sufijos}(L)$ como el lenguaje $\{w | \exists x : (xw \in L)\}$. Dado un DFA A, cómo se puede construir un DFA $\texttt{Sufijos}(A)$ que cumpla $\mathcal{L}(\texttt{Sufijos}(A)) = \texttt{Sufijos}(\mathcal{L}(A))$.

33. Donat un llenguatge L, definim $\texttt{FirstHalf}(L) = \{x \,|\exists y : (|x| = |y| \wedge xy \in L)\}$. Demostreu que si L és regular, aleshores $\texttt{FirstHalf}(L)$ és regular.

34. Dado un natural n definimos $L_n = \{w \in \{0,1\}^* | \exists k : (\texttt{valor}_2(w) = k \cdot 2^n)\}$. Justifica que cualquier L_n es regular. Cuantos estados tiene el DFA mínimo que reconoce L_n?

35. Sigui $B_n = \{a^k \mid k \text{ és un múltiple de } n\}$. Demostreu que per a cada $n \geq 1$, el llenguatge B_n és regular.

36. Sigui $C_n = \{x \in \{0,1\}^* \mid \texttt{valor}_2(x) \text{ és un múltiple de } n\}$. Demostreu que per a cada $n \geq 1$, el llenguatge C_n és regular.

37. Cuantos estados tiene el DFA mínimo que reconoce las palabras sobre $\{a, b, c\}$ que contienen al menos 100 ocurrencias de cada uno de estos tres símbolos.