

Teoria de la Computació

Tema 1: Teoria de Llenguatges

Teoria:

- Vídeos 1, 2 i 3.
- Llibre TC (Llenguatges regulars i incontextuals) Capítol 1.

Exercicis per a l'avaluació contínua:

1. Formalitzeu els següents llenguatges utilitzant la notació clàssica de conjunts, com a parell variable de mot i propietat sobre aquest. Feu servir quantificadors universals i existencials, operadors booleans i les notacions sobre mides de mots que hem introduït.
 - (a) Llenguatge dels mots sobre $\{a, b\}$ que contenen el submot ab .
 - (b) Llenguatge dels mots sobre $\{a, b\}$ tals que a la dreta de cada submot ab hi ha algun submot ba .
 - (c) Llenguatge dels mots sobre $\{a, b\}$ que contenen el submot ab i el submot ba .
 - (d) Llenguatge dels mots sobre $\{a, b, c\}$ tals que entre cada dues b 's hi ha alguna a .
 - (e) Llenguatge de mots sobre $\{a, b\}$ tal que tota ocurrència de b està en posició parell (el primer símbol d'un mot ocupa la posició 1).
 - (f) Llenguatge dels mots sobre $\{a, b\}$ amb algun prefix amb més b 's o igual que a 's.
 - (g) Llenguatge dels mots sobre $\{a, b\}$ tals que qualsevol prefixe seu té més b 's o igual que a 's.
 - (h) Llenguatge dels mots sobre $\{a, b\}$ amb algun prefix de mida parell amb més b 's o igual que a 's.
 - (i) Llenguatge dels mots sobre $\{a, b\}$ tals que qualsevol prefixe seu de mida parell té més b 's o igual que a 's.
 - (j) Llenguatge dels mots sobre $\{a, b\}$ que tenen un prefix i un sufix idèntics de mida major que 0 i menor que la mida del propi mot.
2. Argumenteu si són certes (amb una justificació) o falses (amb un contraexemple) les següents afirmacions sobre mots x, y, z y llenguatges A, B, C en general.
 - (a) $xy = yx$.
 - (b) $xy = xz \Rightarrow y = z$.
 - (c) $A(BC) = (AB)C$.
 - (d) $AB = BA$.
 - (e) $A \neq \emptyset \wedge AB = AC \Rightarrow B = C$.
 - (f) $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset \wedge AB = CD \wedge (\forall u \in A, v \in C : |u| = |v|) \Rightarrow A = C \wedge B = D$.
 - (g) $(A \cup B)C = AC \cup BC$ i $A(B \cup C) = AB \cup AC$.

- (h) $(A \cap B)C \subseteq AC \cap BC$ i $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$.
- (i) $(A \cap B)C \supseteq AC \cap BC$ i $A(B \cap C) \supseteq AB \cap AC$.
3. Argumenteu si són certes (amb una justificació) o falses (amb un contraexemple) les següents afirmacions en general.
- (a) $L^* = \{a, b\}^* \Rightarrow \{a, b\} \subseteq L$.
- (b) $L_1^* L_2^* \subseteq (L_1 L_2)^*$.
- (c) $L_1^* L_2^* \supseteq (L_1 L_2)^*$.
- (d) $L_1^+ \cup L_2^+ = \{a, b\}^+ \wedge L_1^+ \cap L_2^+ = \emptyset \Rightarrow L_1 = \emptyset \vee L_2 = \emptyset$.
- (e) $(L_1^* \cup L_2^*) \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$.
- (f) $(L_1^* \cup L_2^*) \supseteq (L_1 \cup L_2)^*$.
- (g) $(L_1 \cap L_2)^* \subseteq (L_1^* \cap L_2^*)$.
- (h) $(L_1 \cap L_2)^* \supseteq (L_1^* \cap L_2^*)$.
- (i) $L_1^* \subseteq L_2^* \Rightarrow L_1 \subseteq L_2$.
- (j) $\overline{L^*} \subseteq \overline{L} \subseteq \overline{L^*}$.
- (k) $\overline{L^*} \supseteq \overline{L} \supseteq \overline{L^*}$.
- (l) $L_1 \neq \emptyset \wedge L_2 \neq \emptyset \wedge L_1 \cap L_2 = \emptyset \Rightarrow L_1^* \neq L_2^*$.
- (m) $L^+ L^+ \subseteq L^+$.
- (n) $L^+ L^+ \supseteq L^+$.
- (o) $(L^2)^* \subseteq (L^*)^2$.
- (p) $(L^2)^* \supseteq (L^*)^2$.
- (q) $L \subseteq L^2 \Leftrightarrow (\lambda \in L) \vee (L = \emptyset)$.
- (r) $L^2 \subseteq L \Leftrightarrow L = L^+$.
- (s) $(\lambda \in L) \wedge (L^2 \subseteq L) \Leftrightarrow L = L^*$.
- (t) $L = L^2 \Rightarrow (L = L^*) \vee (L = \emptyset)$.
4. Argumenteu si són certes (amb una justificació) o falses (amb un contraexemple) les següents afirmacions en general.
- (a) $(xy)^R = y^R x^R$.
- (b) $(L_1 L_2)^R = L_2^R L_1^R$.
- (c) $(L_1 \cup L_2)^R = L_1^R \cup L_2^R$.
- (d) $(L_1 \cap L_2)^R = L_1^R \cap L_2^R$.
- (e) $\overline{L^R} = \overline{L^R}$.
- (f) $(L^*)^R = (L^R)^*$.
- (g) $(L_1 L_2)^R = L_1^R L_2^R \Rightarrow L_1 = L_2$.
5. Quines de les següents definicions de la funció σ defineixen un morfisme (és a dir, compleixen $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ per a mots x, y qualssevol).

- (a) $\sigma(a_1 a_2 \cdots a_n) = a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_n a_n$.
- (b) $\sigma(a_1 a_2 a_3 \cdots a_n) = a_1 a_2 a_2 a_3 a_3 \cdots \overbrace{a_n \cdots a_n}^n$.
- (c) $\sigma(w) = w$.
- (d) $\sigma(w) = \lambda$.
- (e) $\sigma(w) = a^{|w|}$.
- (f) $\sigma(w) = w^R$.
- (g) $\sigma(w) = \sigma_1(\sigma_2(w))$ per a morfismes σ_1, σ_2 .
6. Argumenteu si són certes (amb una justificació) o falses (amb un contraexemple) les següents afirmacions en general, on σ és un morfisme.
- (a) $\sigma(L_1 L_2) = \sigma(L_1) \sigma(L_2)$.
- (b) $\sigma(L^n) = \sigma(L)^n$.
- (c) $\sigma(L_1 \cup L_2) = \sigma(L_1) \cup \sigma(L_2)$.
- (d) $\sigma(L^*) = \sigma(L)^*$.
- (e) $\sigma(L^R) = \sigma(L)^R$.
- (f) $\sigma(\overline{L}) = \overline{\sigma(L)}$.
- (g) $\sigma(L) = L \Rightarrow \forall x \in L : \sigma(x) = x$.
7. Argumenteu si són certes (amb una justificació) o falses (amb un contraexemple) les següents afirmacions en general.
- (a) $|L_1| \cdot |L_2| = |L_1 \cdot L_2|$.
- (b) $(\forall a, b \in \Sigma : (a \neq b \Rightarrow \sigma(a) \neq \sigma(b))) \Rightarrow |\sigma(L)| = |L|$, on σ és un morfisme.
- (c) $|L^R| = |L|$.
- (d) $|L^n| = |L|^n$.
8. Donat un llenguatge L , *shiftar* L dona lloc a un nou llenguatge, que denotem $S(L)$, i que conté als mots que s'obtenen agafant cada mot de L i rotant-lo de totes les maneres possibles, formalment: $S(L) = \{vu \mid uv \in L\}$. Argumenteu si són certes (amb una justificació) o falses (amb un contraexemple) les següents afirmacions en general.
- (a) $S(L)^* \subseteq S(L^*)$.
- (b) $S(L)^* \supseteq S(L^*)$.
- (c) $\overline{S(L)} = S(\overline{L})$.
- (d) $S(L^R) = S(L)^R$.
- (e) $S(L_1 \cup L_2) = S(L_1) \cup S(L_2)$.
- (f) $S(L_1 \cap L_2) = S(L_1) \cap S(L_2)$.
- (g) $S(L_1 L_2) = S(L_1) S(L_2)$.
- (h) $S(\sigma(L)) = \sigma(S(L))$, on σ és un morfisme.
9. Demostreu que no hi ha cap mot w que satisfaci $aw = wb$, essent a i b símbols de l'alfabet.
10. Demostreu que, per a qualsevol alfabet Σ , hi ha un únic llenguatge L que satisfà $L = \overline{\Sigma L}$. Quin és aquest llenguatge?