Teoria de la computació

Problemes

Departament de LSI

Setembre del 2005

Índex

Convencions

Representem per

- $\mathsf{factors}(L)$, on L és un llenguatge, el conjunt de tots els factors o submots de tots els mots del llenguatge L. És a dir:
  $\mathsf{factors}(L) = \{y \mid \exists x,z\ xyz \in L\}$.
- $\mathsf{L}(G)$, on G és una gramàtica, el llenguatge generat per G.
- $\mathsf{L}(M)$, on M és un autòmat, el llenguatge reconegut per M.
- $\mathsf{L}(r)$, on r és una expressió regular, el llenguatge associat a r.
- $\mathsf{max}(L)$, on L és un llenguatge, el conjunt dels mots de L que no són prefixos d'altres mots de L. És a dir:
  $\mathsf{max}(L) = \{x \in L \mid \forall y\ xy \in L \Rightarrow y = \lambda\}$.
- $\mathsf{max}(i, j)$, on i i j són nombres, el *màxim* dels nombres i i j.
- $\mathsf{mcd}(i, j)$ el *màxim comú divisor* dels nombres $i, j > 0$, és a dir el major nombre que divideix tant a i com a j.
- $\mathsf{mcm}(i, j)$ el *mínim comú múltiple* de i i j, és a dir, el menor nombre diferent de zero que és dividit tant per i com per j.
- $\mathsf{min}(i, j)$ el *mínim* dels nombres i i j.
- $\mathsf{prefixos}(w)$, on w és un mot, el conjunt de tots els prefixos de w. És a dir:
  $\mathsf{prefixos}(w) = \{x \mid \exists y\ xy = w\}$.
- $\mathsf{prefixos}(L)$, on L és un llenguatge, el conjunt de tots els prefixos de tots els mots de L. És a dir:
  $\mathsf{prefixos}(L) = \{x \mid \exists y\ xy \in L\}$.
- $\mathsf{sufixos}(L)$, on L és un llenguatge, el conjunt de tots els sufixos de tots els mots de L. És a dir:
  $\mathsf{sufixos}(L) = \{y \mid \exists x\ xy \in L\}$.
- $\mathsf{valor}_b(w)$, on b és un nombre natural i w és un mot sobre l'alfabet $\{0, 1, \ldots, b-1\}$, la funció numèrica que pren el valor 0 quan $w = \lambda$ i que pren altrament el valor del mot w interpretat com un nombre en base b.
- L^{C} o $\overline{L}$ el complementari del llenguatge L. És a dir: $L^{\mathsf{C}} = \{x \mid x \notin L\}$.
- w^{R}, on w és un mot, el revessat de w.
- L^{R}, on L és un llenguatge, el llenguatge format pels revessats dels mots de L. És a dir: $L^{\mathsf{R}} = \{x^{\mathsf{R}} \mid x \in L\}$.
- $A - B$ la diferència de conjunts, és a dir el conjunt $A \cap \overline{B}$.
- $\|C\|$ la cardinalitat del conjunt C.
- $|w|_y$ el nombre d'ocurrències del mot y com a submot de w, comptant-hi els encavalcaments si n'hi ha. És a dir:
  $|w|_y = \|\{x \mid \exists z\ xyz = w\}\|$.

Sigles:

- CFG: gramàtica incontextual
- CFL: llenguatge incontextual
- CNF: forma normal de Chomsky
- DCFL: llenguatge incontextual determinista
- DFA: autòmat finit determinista
- DPDA: autòmat amb pila determinista
- λNFA: autòmat finit indeterminista amb λ-transicions
- NFA: autòmat finit indeterminista
- NPDA: autòmat amb pila indeterminista
- PDA: autòmat amb pila

Capítol 1

Preliminars sobre llenguatges

1.1 Demostreu que no existeix cap mot $w \in \{a\, ,\, b\}^*$ tal que $aw = wb$.

1.2 Tan sols una, de les quatre equacions següents, és satisfeta per algun mot w. Quina és?

A) $baab\, w = w\, baba$.

B) $aabb\, w = w\, baab$.

C) $baba\, w = w\, aabb$.

D) $abab\, w = w\, abba$.

1.3 Si $w \in \{a\, ,\, b\}^*$ i $abw = wab$, demostreu que $w = (ab)^n$ per a algun nombre $n \geqslant 0$.

1.4

1. Trobeu tres mots $x, y, z \in \{0, 1\}^+$ tals que

$$\begin{cases} x < y < z & \text{en ordre lexicogràfic (alfabètic)} \\ y < z < x & \text{en ordre lexicogràfic per longitud} \\ y < x < z & \text{en ordre numèric.} \end{cases}$$

2. Demostreu, en canvi, que no hi ha tres mots $x, y, z \in \{0, 1\}^+$ tals que

$$\begin{cases} x < y < z & \text{en ordre lexicogràfic (alfabètic)} \\ y < z < x & \text{en ordre lexicogràfic per longitud} \\ z < x < y & \text{en ordre numèric.} \end{cases}$$

1.5 Distributivitat de la concatenació. Es tracta de determinar si les igualtats següents són certes o falses. En aquest últim cas, demostreu si és certa alguna de les inclusions i trobeu contraexemples per a les inclusions falses.

- Reunió: $A(B \cup C) = AB \cup AC$.
- Intersecció: $A(B \cap C) = AB \cap AC$.
- Diferència: $A(B - C) = AB - AC$.

1.6 Determineu si la igualtat següent

$$L\overline{L} = L\Sigma^* - LL$$

se satisfà per tot llenguatge $L \subseteq \Sigma^*$. En cas contrari, demostreu si és certa alguna de les inclusions i trobeu un contraexemple en cas contrari.

1.7 Commutativitat d'operacions. Es tracta de determinar si les igualtats següents són certes o falses. En aquest últim cas, demostreu si és certa alguna de les inclusions i trobeu contraexemples per a les inclusions falses.

- $(L^{\mathsf{R}})^{\mathsf{c}} = (L^{\mathsf{c}})^{\mathsf{R}}$.
- $(L^*)^{\mathsf{c}} = (L^{\mathsf{c}})^*$.
- $(L^{\mathsf{R}})^* = (L^*)^{\mathsf{R}}$.
- $(L^+)^{\mathsf{c}} = (L^{\mathsf{c}})^+$.

1.8 Considerem els llenguatges següents:

1) $L_1 = \{a^i b \mid i \geqslant 0\} \cup a^*$.
2) $L_2 = \{a^i b a^j \mid i, j \geqslant 0\}$.
3) $L_3 = \{a^i bb a^j \mid i, j \geqslant 0\}$.

Digueu quins d'ells satisfan la condició

$$\mathsf{prefixos}(L) = \mathsf{sufixos}(L).$$

1.9 Demostreu: $\lambda \in L \iff L\left(\overline{L} \cup \{\lambda\}\right) = \Sigma^*$.

1.10 Demostreu que $L^2 \subseteq L \iff L^+ = L$.

1.11 Per a cada un dels dos enunciats següents demosetreu que és cert o trobeu-ne un contraexemple.

1) $\forall L \quad L^2 \subseteq L \implies L \subseteq L^2$.
2) $\forall L \quad L \subseteq L^2 \implies L^2 \subseteq L$.

1.12 Trobeu algun llenguatge L sobre l'alfabet $\{a\,,b\}$ que satisfaci la condició $L\overline{L} = L^+$, però tal que $L \neq L^+$.

1.13 Demostreu l'equivalència següent:

$$(L\overline{L} = L \;\wedge\; L^+ = L) \iff (L\Sigma^* = L \;\wedge\; \lambda \notin L).$$

1.14

1. Trobeu un llenguatge $L \subseteq \{a\,,b\}^*$ que satisfaci l'equació $L = \overline{L} \cdot a$.
2. Demostreu que aquest llenguatge és únic.

1.15

1. Trobeu un llenguatge $L \subseteq \{a\,,b\}^*$ que contingui $\{a\,,b\}$ i que satisfaci l'equació $\overline{L} = L \cdot L \cup \{\lambda\}$.
2. Demostreu que, en canvi, no hi ha cap llenguatge $L \subseteq \{a\,,b\}^*$ que contingui els mots a i b i que satisfaci l'equació $L = \overline{L} \cdot \overline{L} \cup \{\lambda\}$.
3. Demostreu que cap llenguatge L no satisfà l'equació $L = L \cdot \overline{L} \cup \{\lambda\}$.

1.16 Demostreu que les tres equacions següents defineixen implícitament el mateix llenguatge. Quin és aquest llenguatge?

1. $L = \overline{\Sigma L}$.
2. $L = \overline{L} \cdot \overline{L} \cup \{\lambda\}$.
3. $L = (\Sigma L)^2 \cup \{\lambda\}$.

1.17 Donat un mot w sobre un alfabet qualsevol, es considera el llenguatge L_w format pels mots que contenen w. Demostreu les tres equacions següents:

1. $(L_w)^+ = L_w$.
2. $\mathsf{prefixos}(L_w) = \mathsf{sufixos}(L_w)$.
3. $\overline{L_w} \cdot L_w \cdot \overline{L_w} = L_w \iff w \neq \lambda$.

1.18 Sigui $\Sigma = \{a\,,b\}$. Per a tot mot $w \in \Sigma^*$ definim la funció

$$d(w) = |w|_a - |w|_b$$

i considerem el llenguatge següent:

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid \forall x \text{ submot de } w \;\; d(x) \leqslant 1\}.$$

Demostreu que es tracta del llenguatge dels mots sobre Σ que no contenen el submot aa.

1.19 Considerem l'operació següent definida sobre llenguatges inclosos en algun alfabet Σ:

$$A \setminus B = \{w \in \Sigma^* \mid \forall w' \in A \;\; w' \cdot w \in B\}.$$

Demostreu les dues inclusions següents:

1. $\forall L_1, L_2 \quad L_1 \cdot (L_1 \setminus L_2) \subseteq L_2$.
2. $\forall L_1, L_2 \quad L_2 \subseteq L_1 \setminus (L_1 \cdot L_2)$.

Capítol 2

Gramàtiques incontextuals

Als exercicis d'aquest capítol en què es demana de construir gramàtiques, cal entendre que la construcció ha d'anar acompanyada sempre d'un esbós de la demostració, en el qual cal incloure l'especificació dels llenguatges generats per cada una de les variables de la gramàtica.

2.1 Construïu gramàtiques per a cadascun dels llenguatges següents. Tingueu en compte que hi ha expressions més senzilles dels llenguatges considerats:

1. $\{xy \mid x, y \in \{a\,,\,b\}^* \ \wedge \ |x| \neq |y|\}$
2. $\{xyx^{\mathsf{R}} \ \mid \ x, y \in \{a\,,\,b\}^*\}$
3. $\{xyx^{\mathsf{R}} \ \mid \ x \in \{a\,,\,b\}^+ \wedge y \in \{a\,,\,b\}^*\}$
4. $\{xyy^{\mathsf{R}}z \ \mid \ x, y, z \in \{a\,,\,b\}^+\}$
5. $\{xwyw^{\mathsf{R}}z \ \mid \ w, x, y, z \in \{a\,,\,b\}^+\}$
6. $\{xy \ \mid \ x, y \in \{a\,,\,b\}^* \ \wedge \ |x|_a = |y|_b\}$
7. $\{w \in \{a\,,\,b\}^* \mid |w|_{ab} = |w|_{ba}\}$
8. $\{w \in \{a\,,\,b\}^* \mid \exists z \ |www| = |zz|\}$
9. El llenguatge format pels mots sobre $\{a\,,\,b\}$ que tenen algun sufix *propi* (és a dir, diferent de λ i del mateix mot) igual al revessat d'algun prefix propi.
10. El llenguatge format pels mots sobre $\{a\,,\,b\}$ en què tot prefix de longitud parella té el mateix nombre de a's que de b's.
11. El llenguatge format pels mots sobre $\{a\,,\,b\}$ en els quals hi ha almenys un submot que té quatre b's més que a's.

2.2 Demostreu que el llenguatge

$$L = \{u^{\mathsf{R}}xvyv^{\mathsf{R}}zu \ \mid x, y, z \in \{a, b\}^* \wedge \ u, v \in \{a, b\}^+ \ \wedge |x| = |z|\}$$

és generat per la gramàtica

$S \to aAa \mid bAb$
$A \to aAb \mid bAa \mid B$
$B \to aCa \mid bCb$
$C \to aC \mid bC \mid \lambda$

2.3 Expliciteu els llenguatges generats per les gramàtiques següents:

1. $S \to aXa \mid bYb$
   $X \to bYb \mid Z$
   $Y \to aXa \mid Z$
   $Z \to aZ \mid bZ \mid \lambda$
2. $S \to bS \mid Z$
   $Z \to Za \mid aSb \mid \lambda$

2.4 Demostreu que les dues gramàtiques següents generen el mateix llenguatge. De quin llenguatge es tracta?

G_1 $S \to AaA \mid BbB$
$A \to aAb \mid bAa \mid AA \mid a \mid \lambda$
$B \to aBb \mid bBa \mid BB \mid b \mid \lambda$

G_2 $S \to A \mid B$
$A \to CaA \mid CaC$
$B \to CbB \mid CbC$
$C \to aCb \mid bCa \mid CC \mid \lambda$

2.5 Siguin L_1 i L_2 els llenguatges generats, respectivament, per les dues gramàtiques següents:

$G_1)$ $S \to 2SS \mid 1S \mid 0$

$G_2)$ $S \to XSS \mid Y$
$X \to 1X \mid 2$
$Y \to 1Y \mid 0$

Hi ha alguna inclusió entre L_1 i L_2?

2.6 Construïu gramàtiques que generin els llenguatges següents:

1. $\{a^i b^j c^k \mid i, j \geqslant 0 \ \wedge \ i \leqslant j + 2k\}$
2. $\{xyz \mid x, y, z \in \{a, b\}^+ \ \wedge \ x = x^{\mathsf{R}} \ \wedge \ z = z^{\mathsf{R}} \wedge |x| = \dot{2} \ \wedge \ |z| = \dot{2}\}$
3. $\{xcy \mid x, y \in \{a\,, b\}^* \ \wedge \ |x|_a = 2|y|_b\}$
4. $\{xcy \mid x, y \in \{a\,, b\}^* \ \wedge \ |x|_{ab} = |y|_{ba}\}$

2.7 Doneu gramàtiques no ambigües per als llenguatges següents:

1. $\{w \in \Sigma^* \mid w = w^{\mathsf{R}} \wedge |w|_a > 0 \wedge |w|_b > 0\}$
2. $\{xcy \mid x, y \in \{a, b\}^* \wedge |x| = |y| \wedge \exists x_1, x_2 \in \{a, b\}^* \ x = x_1 aa x_2\}$
3. $\{xcy \mid x, y \in \{a, b\}^* \ \wedge \ |x|_a = |y|_b\}$
4. $\{xcy \mid x, y \in \{a, b\}^* \ \wedge \ y^{\mathsf{R}}$ és un sufix de $x\}$

2.8 Doneu gramàtiques per als llenguatges següents (representem $\{a\,, b\}$ com a Σ):

1. $\{ycz \mid y, z \in \Sigma^* \ \wedge \ |y|_a + |z|_b = \dot{2} \ \wedge \ |y| = |z|\}$
2. $\{xcy \mid x, y \in \Sigma^* \wedge x^{\mathsf{R}}$ és submot de $y \ \wedge \ x$ no conté $aba\}$
3. $\{w \mid w = w^{\mathsf{R}} \ \wedge \ \exists x, y \in \Sigma^* \ w = xabay\}$
4. $\{w \in \Sigma^* \mid w = w^{\mathsf{R}} \wedge 2|w|_a + |w|_b = \dot{3} + 1\}$
5. $\{w \in a^+ b^+ c^+ \mid |w| = \dot{2} \ \wedge \ |w|_a \geqslant |w|_b\}$
6. $\{a^i b^j c^k \mid (j = i + k) \ \wedge \ (i = \dot{3} + 2)\}$
7. $\{w_1 c w_2 \mid w_1, w_2 \in \Sigma^* \ \wedge \ |w_1| = |w_2| \ \wedge$ $w_1 w_2$ no conté dues a's seguides$\}$

2.9 Sigui L el llenguatge
$$\{a^{i+3} b^{2i+1} a^{2j+1} b^{3j} \mid i, j \geqslant 0\}$$
i G la gramàtica que té per produccions:

$S \to X \mid XS$
$X \to YZYZ$
$Y \to a \mid bbbYaa$
$Z \to baaa \mid bbZa.$

Demostreu que $\mathsf{L}(G) = (L^{\mathsf{R}}\, L^{\mathsf{R}})^+$.

2.10 Construïu gramàtiques que generin els complementaris respecte a $\{a\,, b\}^*$ dels llenguatges incontextuals següents:

1. $\{a^n b^n \mid n \geqslant 0\}$
2. $\{w \in \{a\,, b\}^* \mid w = w^{\mathsf{R}}\}$
3. $\{w \mid \exists x, y \ \ |x| = |y| \ \wedge \ w = xaay\}$
4. $\{a^i b^j c^k \mid 0 \leqslant i < j < k\}$

2.11 Llenguatges de Dyck i derivats. Construïu gramàtiques no ambigües per als llenguatges següents:

1. $\{w \in \{a\,, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b \ \wedge \ \forall x \in \mathsf{prefixos}(w) \ |x|_a \geqslant |x|_b\}$
2. $\{w \in \{a\,, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$
3. $\{w \in \{a\,, b\}^* \mid \forall x \in \mathsf{prefixos}(w) \ |x|_a \geqslant |x|_b\}$
4. $\{w \in \{a\,, b\}^* \mid |w|_a \geqslant |w|_b\}$
5. $\{w \in \{a\,, b\}^* \mid |w|_a > |w|_b + 2\}$
6. $\{w \in \{a\,, b\}^* \mid |w|_a \neq |w|_b\}$

2.12 Construïu una gramàtica que generi el llenguatge $\{a^n b^m \mid 2m < n < 3m\}$.

2.13 Doneu gramàtiques per als llenguatges següents:

1. $\{w \in \{a\,, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b \ \wedge \ |w| = \dot{3}\}$
2. El conjunt de palíndroms sobre l'alfabet $\{a\,, b\}$ que **no** contenen el submot $bbaa$

2.14 Demostreu que les tres gramàtiques següents generen el mateix llenguatge.

G_1: $S \to Zb$
$Z \to aZbZ \mid \lambda$

G_2: $S \to aSb \mid aSS \mid b$

G_3: $S \to aSS \mid b$

2.15 Construïu gramàtiques que generin els llenguatges següents:

1. $\{01^{i_1}01^{i_2}\ldots01^{i_n} \mid n \geqslant 1\ i_1,\ldots,i_n \geqslant 1\ \exists j\ 1 \leqslant j \leqslant n\quad i_j = j\}$
2. $\{a^{\alpha_1}ba^{\alpha_2}b\ldots a^{\alpha_n}b \mid n>1\ \alpha_1,\ldots,\alpha_n \geqslant 0\ \exists k:\ 1<k\leqslant n:\ \alpha_k = \sum_{j=1}^{k-1}\alpha_j\}$
3. $\{a^{i_1}ca^{i_2}c\ldots a^{i_k}cca^n \mid k \geqslant 1\ \ \forall j\ i_j > 0\ \exists j\ i_j = n\}$
4. $\{a^{n_1}ba^{n_2}b\ldots ba^{n_m} \mid \exists i,j : 1 \leqslant i < j \leqslant m :\ n_i = 2n_j\}$

2.16 Els llenguatges següents no són incontextuals. En canvi els seus complementaris sí que ho són. Construïu gramàtiques que els generin.

1. $\{a^nb^nc^n \mid n \geqslant 0\}$
2. $\{ww \mid w \in \{a\,,\,b\}^*\}$
3. $\{w\#w \mid w \in \{a\,,\,b\}^*\}$

2.17 Considerem la gramàtica següent:

$$S \to aSaS \mid b.$$

Sigui $\mathsf{f}(w) = |w|_a - 2|w|_b + 2$. Demostreu que aquesta gramàtica genera el conjunt de mots w tals que tot prefix x de w diferent del mateix w satisfà $\mathsf{f}(x) > 0$, tals que $\mathsf{f}(w) = 0$ i que no contenen dues b's seguides.

2.18 Demostreu que les gramàtiques següents generen el mateix llenguatge.

$$G_1)\quad \begin{aligned} S &\to aBS \mid bAS \mid \lambda \\ A &\to bASa \mid a \\ B &\to aBSb \mid b \end{aligned}$$

$$G_2)\quad \begin{aligned} S &\to aXbS \mid bYaS \mid \lambda \\ X &\to aXbS \mid \lambda \\ Y &\to bYaS \mid \lambda \end{aligned}$$

2.19 Construïu una gramàtica que generi el llenguatge següent sobre l'alfabet $\{a\,,\,b\}$:

$$\{w \mid \exists u,v,t\quad w = utv\ \wedge\ |u| = |v|\ \wedge\ u \neq v\}.$$

2.20 Problema de la motxilla. Tenim una motxilla de capacitat N, i també k objectes que voldríem introduir a la motxilla. L'espai respectiu que ocupa cadascun d'aquests objectes és $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Volem un aprofitament màxim de la motxilla, és a dir, volem seleccionar un subconjunt $\{i_1, i_2, \ldots, i_l\}$ del total d'objectes $\{1, 2, \ldots, k\}$ tals que l'espai que ocupin sigui exactament la capacitat total de la motxilla; és a dir: $n_{i_1} + n_{i_2} + \ldots + n_{i_l} = N$.
Una entrada del problema de la motxilla es pot expressar en unari. Consisteix a codificar els nombres $N, n_1, n_2 \ldots, n_k$ com a mots de la forma $a^Nba^{n_1}ba^{n_2}b\ldots ba^{n_k}$. Els mots d'aquesta forma tals que N és igual a la suma d'alguns dels n_i són els que tenen solució per al problema de la motxilla. Per exemple, *aaaababaabaaa* i *aaaabababababaa* són mots amb solució, mentre que *aaaabaabaaabaaaaa* no ho és.
Heu de trobar una gramàtica que generi exactament les entrades del problema de la motxilla que tenen solució. Es tracta, en definitiva, del llenguatge

$$\{a^Nba^{n_1}b\ldots ba^{n_k} \mid k \geqslant 1\ \wedge\ N, n_1, \ldots, n_k > 0\ \wedge\ \exists l\ \exists i_1 \ldots i_l : 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_l \leqslant k : (\textstyle\sum_{j=1}^{l} n_{i_j}) = N\}$$

Capítol 3

Normalització i ambigüitat

3.1 Considerem el nombre n de derivacions necessàries per generar un cert mot $w \neq \lambda$ amb una gramàtica en CNF, és a dir $S \overset{n}{\Rightarrow} w \in \Sigma^*$. Quina relació hi ha entre n i $|w|$?

3.2 Amb els algorismes estudiats en el nostre curs, quines de les operacions següents, aplicades sobre gramàtiques en CNF, dóna sempre com a resultat gramàtiques en CNF?

- la reunió
- el tancament positiu de Kleene
- la concatenació

3.3 Amb els algorismes estudiats al nostre curs, quines de les operacions següents, aplicades a gramàtiques depurades (quasi-λ-exemptes, sense produccions unàries ni símbols inútils), dóna sempre com a resultat una gramàtica depurada?

- la reunió
- el tancament de Kleene
- la concatenació
- el revessament

3.4 Quins avantatges s'obtenen de passar a forma depurada una gramàtica que no ho està?

1. La gramàtica depurada no pot contenir més produccions que la gramàtica original i, en general, en conté menys.
2. La gramàtica depurada permet resoldre el problema de la pertinença d'un mot al llenguatge, perquè es pot calcular el nombre màxim de derivacions possibles en la generació de qualsevol mot.
3. La gramàtica depurada permet decidir si el llenguatge generat és o no inherentment ambigu.

3.5 Depureu la gramàtica següent

$$\begin{aligned}
&S \to X \mid Y\\
&X \to Xc \mid A\\
&A \to aAb \mid \lambda\\
&Y \to aY \mid B\\
&B \to bBc \mid \lambda,
\end{aligned}$$

que genera el llenguatge

$$\{a^i b^j c^k \mid i=j \vee j=k\}.$$

3.6 Depureu la gramàtica següent

$$\begin{aligned}
&S \to X \mid Y\\
&X \to A_0 B_0\\
&Y \to A_1 B_1\\
&A_0 \to aaA_0bb \mid \lambda\\
&A_1 \to aaA_1bb \mid ab\\
&B_0 \to bbB_0cc \mid \lambda\\
&B_1 \to bbB_1cc \mid bc\,,
\end{aligned}$$

que genera el llenguatge

$$\{a^i b^j c^k \mid j = i + k \;\wedge\; j = \dot{2}\}.$$

3.7 Depureu la gramàtica següent

$$\begin{aligned}
&S \to A \mid B\\
&A \to CaA \mid CaC\\
&B \to CbB \mid CbC\\
&C \to aCb \mid bCa \mid CC \mid \lambda\,,
\end{aligned}$$

que genera els mots que tenen un nombre de a's diferent del de b's.

3.8 Depureu la gramàtica següent

$$\begin{array}{lcl} S & \to & A \mid B \mid C \\ A & \to & SaSbS \mid \lambda \\ B & \to & SbSaS \mid \lambda \\ C & \to & Cc \mid \lambda, \end{array}$$

que genera el llenguatge

$$L = \{x \in \{a,b,c\}^* \mid |x|_a = |x|_b\}.$$

3.9 Depureu la gramàtica següent en què E és el símbol inicial i $\{+, \times, 0, \ldots, 9\}$ són els símbols terminals:

$$\begin{array}{lcl} E & \to & E+E \mid E \times E \mid N \\ N & \to & FM \mid 0 \\ M & \to & DM \mid \lambda \\ D & \to & 0 \mid F \\ F & \to & 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9, \end{array}$$

que genera expressions aritmètiques amb nombres naturals escrits en decimal.

3.10 Depureu la gramàtica següent

$$\begin{array}{l} S \to AC \mid aACc \\ A \to aAb \mid aaA \mid \lambda \\ C \to ccC \mid \lambda\,, \end{array}$$

que genera el llenguatge

$$\{w \in a^*b^*c^* \mid |w| = \dot{2} \wedge |w|_a \geqslant |w|_b\}.$$

3.11 Doneu una gramàtica inambigua i sense parèntesis innecessaris que generi les expressions aritmètiques amb enters d'una xifra sobre l'alfabet

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, +, *, (,)\}.$$

3.12 Donada la gramàtica de produccions

$$\begin{array}{l} S \to ASbS \mid bSAS \mid A \mid \lambda \\ A \to aA \mid a: \end{array}$$

1. Demostreu que és ambigua.
2. Determineu el llenguatge que genera.
3. Trobeu una gramàtica no ambigua equivalent.

3.13 Considerem una gramàtica qualsevol, que generi un llenguatge no buit i el símbol inicial de la qual sigui S. De les produccions següents, quines són tals que, si alguna d'elles forma part de la gramàtica, aleshores la gramàtica necessàriament és ambigua?

- $S \to SS$
- $S \to SaS$
- $S \to SaaS$
- $S \to aSaS$
- $S \to abSS$
- $S \to SabS$
- $S \to SaSb$

3.14 Quins dels següents enunciats són certs?

- Si una gramàtica és ambigua, llavors el llenguatge que genera és infinit.
- Si un llenguatge és inherentment ambigu, és infinit.
- Si un llenguatge és generat per més d'una gramàtica ambigua, aleshores és inherentment ambigu.
- Si una gramàtica conté una producció de la forma $A \to aA$, genera un llenguatge infinit.
- Una gramàtica depurada no pot ser ambigua.
- Una CFG inambigua no pot contenir símbols inútils.
- Tot llenguatge no buit té infinites gramàtiques ambigües sense símbols inútils que el generen.
- Tot llenguatge no buit té infinites gramàtiques sense símbols inútils que el generen i tals que *tots* els mots són generats almenys per dos arbres de derivació diferents.
- Tot llenguatge no buit té infinites gramàtiques sense símbols inútils que el generen i tals que *tots* els mots són generats per infinits arbres de derivació diferents.

- Tota gramàtica que genera un llenguatge finit en què cadascuna de les seves variables genera un llenguatge diferent és inambigua.
- Les variables d'una gramàtica inambigua que només conté símbols accessibles generen llenguatges disjunts dos a dos.

3.15 Les quatre gramàtiques següents generen, cada una d'elles, tots els mots que tenen tantes a's com b's. Quines són no ambigües?

A) $S \to aB \mid bA \mid \lambda$
$A \to bAA \mid aS$
$B \to aBB \mid bS$

B) $S \to aBS \mid bAS \mid \lambda$
$A \to bASa \mid a$
$B \to aBSb \mid b$

C) $S \to aBS \mid bAS \mid \lambda$
$A \to bAA \mid a$
$B \to aBB \mid b$

D) $S \to aXbS \mid bYaS \mid \lambda$
$X \to aXbS \mid \lambda$
$Y \to bYaS \mid \lambda$

3.16 Siguin G_1 i G_2 dues gramàtiques inambigües i sigui G la gramàtica que s'obté a partir d'elles en aplicar l'algorisme de la reunió vist al nostre curs. Quines de les afirmacions següents són certes?

1. Si el llenguatge generat per G és inambigu, aleshores $\mathsf{L}(G_1) \cap \mathsf{L}(G_2) = \varnothing$.
2. Si $\mathsf{L}(G_1) \cap \mathsf{L}(G_2) = \varnothing$, aleshores el llenguatge generat per G és inambigu.

[Fixeu-vos que ens estem referint a l'ambigüitat del llenguatge generat per G, no a la de G.]

3.17 És cert algun dels dos enunciats següents?

1. La reunió de dos llenguatges no inherentment ambigus és sempre un llenguatge no inherentment ambigu.
2. La reunió d'un llenguatge inherentment ambigu i d'un llenguatge no inherentment ambigu pot ser un llenguatge no inherentment ambigu.

3.18 Quines d'aquestes afirmacions són certes?

A) La depuració d'una gramàtica ambigua pot donar lloc a una gramàtica ambigua.
B) La depuració d'una gramàtica ambigua pot donar lloc a una gramàtica no ambigua.
C) La depuració d'una gramàtica no ambigua pot donar lloc a una gramàtica ambigua.
D) La depuració d'una gramàtica no ambigua pot donar lloc a una gramàtica no ambigua.

3.19 Considerem una gramàtica G on tots els símbols són *útils* i que conté la producció $A \to BB$. Quines de les condicions següents fan per si soles que G sigui ambigua?

1. G conté la producció $A \to \lambda$.
2. G conté les produccions $A \to \lambda$ i $B \to \lambda$.
3. $A \stackrel{*}{\Rightarrow} aba$ i $A \stackrel{*}{\Rightarrow} abaaba$.
4. $B \stackrel{*}{\Rightarrow} aba$ i $B \stackrel{*}{\Rightarrow} abaaba$.

Capítol 4

Exemples d'autòmats finits

Als exercicis d'aquest capítol en què es demana de trobar autòmats, cal entendre que la solució ha d'anar acompanyada sempre d'un esbós de la demostració. Quan la solució no provingui d'una construcció lligada a l'especificació, cal incloure la descripció dels llenguatges reconeguts per cada un dels estats de l'autòmat.

4.1 Trobeu DFA que reconeguin els llenguatges definits a l'exercici 2.1.

4.2 Trobeu DFA que reconeguin els llenguatges definits a continuació. Tot i que es recomana seguir un procés constructiu que passi pels NFA que es deriven dels enunciats, també és possible fer-ne una construcció directa. A no ser que s'especifiqui altrament, els llenguatges es consideren definits sobre l'alfabet $\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$.

1. El llenguatge format pels mots en què l'antepenúltim símbol és una b.

2. El llenguatge format pels mots que tenen algun parell de a's separades per una cadena de longitud $3i$, on $i \geqslant 0$.

3. El llenguatge format pels mots en els quals tot parell de a's adjacents vagi seguit immediatament d'un parell de b's adjacents.

4. El llenguatge format pels mots que no contenen cap prefix en a^+b^+de longitud parella.

5. El llenguatge format pels mots sobre $\{a, b, c\}$ en què tota a va seguida (no necessàriament immediatament) d'almenys dues b's (no necessàriament consecutives).

6. El llenguatge format pels mots en què cada b va precedida i seguida immediatament d'almenys una a.

7. El llenguatge format pels mots que tenen una a com a antepenúltim símbol i una b com a penúltim símbol.

8. El llenguatge format pels mots en què tot prefix de longitud superior o igual a 3 té un nombre parell de a's o un nombre parell de b's.

9. El llenguatge format pels mots tals que si comencen per aa, llavors no contenen dues b's seguides.

10. El llenguatge format pels mots sobre l'alfabet $\{a\,, b\,, c\}$ en què tota subcadena ab va seguida (no necessàriament immediatament) d'almenys una c; en el benentès que una mateixa c val per totes les ab que la precedeixen.

11. El llenguatge format pels mots que contenen la subcadena aaa però que no contenen la subcadena bbb.

12. El llenguatge format pels mots tals que entre cada dues a's hi ha, com a mínim, dues b's.

13. $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a = \dot{2}+1 \;\wedge\; |w|_b+2|w|_c = \dot{3}\}$

14. El llenguatge format pels mots sobre l'alfabet $\{a, b, c\}$ que contenen una única ocurrència del submot abc.

15. El llenguatge format pels mots tals que si no contenen la cadena bb, no contenen tampoc la cadena bab.

16. El llenguatge format pels mots que tenen longitud més gran o igual que 5 i tals que el seu prefix de longitud 4 té tantes a's com b's.

17. El llenguatge format pels mots sobre $\{a, b, c\}$ tals que si comencen per a, aleshores contenen el submot aba i si comencen per b, aleshores tenen un parell de b's separades per un nombre parell de símbols.

18. El llenguatge format pels mots que comencen per ab, acaben per ba i no contenen el submot bab.

19. El llenguatge format pels mots tals que tot submot de longitud 3 conté exactament dues a's.

20. El llenguatge format pels mots sobre l'alfabet $\{0, 1\}$ que contenen algun submot w de longitud tres tal que $\mathsf{valor}_2(w)$ sigui múltiple de 3.

21. El llenguatge format pels mots tals que si la lletra a apareix en una posició múltiple de 3, aleshores el mot ha de tenir longitud senar.

22. El llenguatge format pels mots tals que si acaben en ba, aleshores no comencen per aab.

23. El llenguatge format pels mots cada un dels quals conté com a submots tots els mots de longitud 2 que tenen com a mínim una a.

24. El llenguatge format pels mots tals que després de qualsevol ocurrència del submot bb, el nombre de a's que queden fins al final del mot és un nombre parell.

25. El llenguatge format pels mots tals que tot submot bb ha d'anar precedit immediatament d'un prefix de longitud parella (altrament dit, tot prefix acabat en bb ha de ser de longitud parella) i ha d'anar seguit, no necessàriament immediatament, del submot ab.

26. El llenguatge format pels mots tals que dues a's qualssevol situades en posicions parelles estan separades per un mot que no conté dues b's seguides.

27. El llenguatge format pels mots de $\{a, b, c\}^*$ tals que tots els submots que comencen i acaben per b i que només contenen aquestes dues b's compleixen la propietat següent: o bé no contenen cap c, o bé el nombre de a's que hi apareixen és múltiple de 3.

28. El llenguatge format pels mots sobre l'alfabet $\{a, b, c\}$ tals que qualsevol submot que sigui de la forma $a\{b, c\}^*a$ o bé té un nombre parell de b's o bé té un nombre senar de c's.

4.3 Construïu els DFA mínims que reconeixen els llenguatges definits a continuació. A no ser que s'especifiqui altrament, els llenguatges es consideren definits sobre l'alfabet $\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$.

1. El llenguatge format pels mots que acaben en bbb i que no contenen ni la cadena aba ni la cadena bab.

2. El llenguatge format pels mots sobre $\Sigma = \{0, 1\}$ que no contenen cap prefix de Σ^+ que codifiqui en binari un múltiple de 3.

3. El llenguatge format pels mots que contenen la subcadena aba però no contenen la bab.

4. El llenguatge format pels mots en què tot sufix de longitud senar té un nombre de a's igual al de b's més un.

5. El llenguatge format pels mots tals que tot submot bab va precedit immediatament o seguit immediatament per almenys una a.

6. El llenguatge format pels mots que tenen un nombre senar de a's, un nombre parell de b's i acaben amb ab.

7. El llenguatge format pels mots tals que tot prefix que acaba per b conté un nombre parell de a's i tot sufix que comença per a conté un nombre parell de b's.

8. El llenguatge format pels mots de $\{0, 1\}^*$ que tenen un prefix diferent de λ el revessat del qual és un múltiple de cinc en binari.

9. El llenguatge format pels mots sobre l'alfabet $\{0, 1\}$ que tenen algun prefix, el revessat del qual és congruent amb 2 o amb 3, mòdul 5. (El residu de dividir per 5 ha de ser 2 o 3.)

10. El llenguatge format pels mots tals que tot submot acabat en ba ha de contenir un nombre parell d'ocurrències de ab.

11. El llenguatge format pels mots tals que si contenen el submot ab no poden contenir el submot bb; i si contenen el submot ba no poden contenir el submot aa.

12. El llenguatge format pels mots tals que tot sufix de longitud parella que contingui dues a's seguides ha d'anar precedit immediatament per almenys una b.

13. El llenguatge format pels mots sobre l'alfabet $\{0,1\}$ tals que si contenen algun prefix el valor binari del qual sigui un múltiple de tres menys un, també contenen algun sufix que té per valor binari un múltiple de tres més un.

14. El llenguatge format pels mots sobre $\{0,1\}^*$ tals que tots els submots delimitats per zeros codifiquen en binari nombres que no són múltiples de tres.

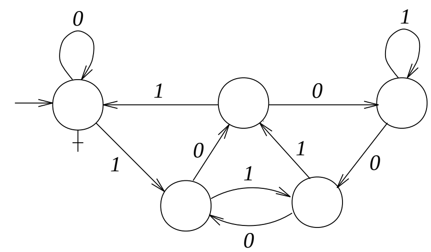
15. El llenguatge format pels mots sobre l'alfabet $\{0,1\}$ en què qualsevol prefix que tingui valor binari múltiple de tres menys un ha d'anar seguit (no necessàriament immediatament) d'algun sufix que tingui valor binari múltiple de tres més un.

16. El llenguatge format pels mots sobre l'alfabet $\{0,1\}$ tals que tot sufix que conté un nombre parell de 0's també conté un nombre parell de 1's.

17. El llenguatge format pels mots tals que tot submot bb que estigui precedit (no necessàriament immediatament) per algun submot aa, però que no ho estigui per cap submot ba, ha d'anar seguit immediatament de a.

18. El llenguatge format pels mots sobre sobre l'alfabet $\{a,b,c\}$ en què qualsevol submot de la forma $c\{a,b\}^*c$ satisfà les dues condicions següents: té longitud parella i, si conté un nombre de a's parell, aleshores el nombre de c's que precedeix el submot considerat (sense comptar, doncs, la c inicial del submot) és senar. [*Suggeriment:* Tracteu d'unificar els estats pou en el moment de la determinització; us estalviareu molta feina.]

4.4 Sigui L el llenguatge sobre $\{0,1\}^*$ reconegut pel següent DFA, que es dóna en forma mínima:



Construïu el mínim DFA que reconeix el llenguatge $\mathsf{prefixos}(\overline{L}) \cdot L$.

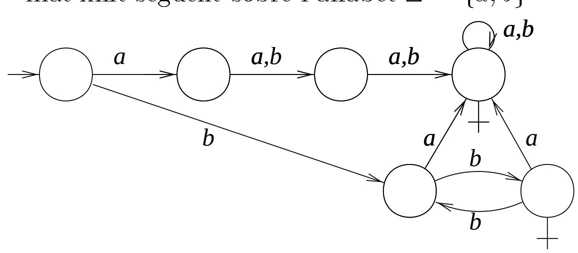
4.5 Construïu el mínim DFA que reconeix el llenguatge format pels mots sobre l'alfabet $\{a,b\}$ que contenen un nombre parell de vegades (comptant les encavalcades) el submot aba. (p. ex. els mots $ababaaba$ i $abababa$ contenen tots dos tres vegades aba.)

4.6 Quants estats té el mínim autòmat determinista que accepta λ i tots els nombres escrits en binari que són múltiples de deu?

4.7 Quants estats té el DFA mínim que accepta λ i tots els mots sobre l'alfabet $\Sigma = \{0,1,2,3,4\}$ que interpretats com a nombres naturals escrits en base 5 són múltiples de 5? Formalment,

$$L = \{w \in \{0,1,2,3,4\}^* \mid \mathsf{valor}_5(w) = \dot{5}\}.$$

4.8 Sigui L el llenguatge reconegut per l'autòmat finit següent sobre l'alfabet $\Sigma = \{a,b\}$



Sigui

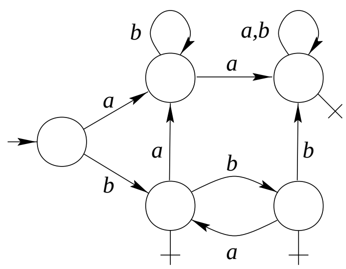
$$L' = \{x \in \Sigma^* \mid \forall y \in \Sigma^* \ |y| = \dot{2}+1 \Rightarrow xy \in L\}.$$

Trobeu el mínim DFA que reconeix L'.

4.9 Per a cada nombre natural $n \geqslant 1$, definim L_n com el llenguatge format pels mots sobre $\{0,1\}$ tals que la seva codificació binària és potència de 2^n. *(Compte, que diem potència de* 2^n*, no pas* 2^n*.)* Quants estats té l'autòmat mínim que reconeix L_n ?

4.10 Trobeu el DFA mínim que reconeix el conjunt $L \subseteq \{a\,,b\}^*$ definit per l'equació següent: $bL = bLa\{ab^*\}^* \cup \{b\}$.

4.11 Sigui L el llenguatge reconegut pel DFA següent:



Considerem el llenguatge

$$M=\{w\in L \mid \forall x,y\in\{a\,,\,b\}^{+}\ w\in xy \implies x\notin L\}$$

Construïu el DFA mínim que reconeix M.

4.12 Sigui $k>0$ un enter qualsevol. Considerem, per a cada k, el llenguatge següent:

$$A_k=\{w\in\{a,b\}^* \mid |w|_{ab}+|w|_{ba}=k\}.$$

Quants estats té el DFA mínim que reconeix A_k?

4.13 Sigui $k>0$ un enter qualsevol. Considerem, per a cada k, el llenguatge L_k format pels mots sobre l'alfabet $\{a,b\}$ en què cada b va precedida i seguida immediatament per almenys k a's a cada banda. És a dir, formalment,

$$L_k=\{w \mid \forall x,y\ \ w=xby \Longrightarrow (x\in\{a,b\}^*a^k \ \wedge\ y\in a^k\{a,b\}^*)\}.$$

Quants estats té el DFA mínim que reconeix L_k?

4.14 Sigui

$$L_{i,j}=\{a^k \mid k \text{ és múltiple de } i \text{ i de } j\}$$

un llenguatge sobre l'alfabet $\Sigma=\{a\}$. Quants estats té el DFA mínim que reconeix $L_{i,j}$? [*Suggeriment:* Estudieu el problema en algun cas particular de i i j i generalitzeu el resultat.]

4.15 Trobeu el DFA mínim que accepta els mots de $1\{0,1\}^*$ que, interpretats com a nombres en binari, es poden descompondre en sumes de potències parelles de 2, de manera que en la descomposició no aparegui la mateixa potència dues o més vegades.
[*Aclariment:* Els primers mots del llenguatge considerat són els dels valors numèrics segënts:

$$\{2^0,2^2,2^2+2^0,2^4,2^4+2^0,2^4+2^2,\\ 2^4+2^2+2^0,2^6,\ldots\}.$$

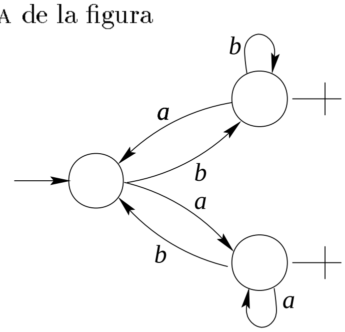
En canvi, no estan inclosos els mots que tenen per valor 2^0+2^0 ni $2^2+2^2+2^2$.]

4.16 Sigui $L\subseteq\{a\,,\,b\}^*$ un llenguatge regular, l'autòmat mínim del qual, $M=\langle Q,\Sigma,\delta,q_0,F\rangle$, té dos estats. Suposem, a més, que:

1. $\forall q\in Q\ \ \delta(q,a)\neq\delta(q,b)$.
2. $ab\in L$.
3. $abab\notin L$.

Demostreu que $abba\notin L$, $\lambda\notin L$ i que $baba\notin L$.

4.17 (22/11/00) Construïu el DFA mínim que accepta els mots de $\{a\,,\,b\}^*$ tals que tot sufix diferent de λ pertany al llenguatge reconegut pel DFA de la figura



4.18 Quants estats té el DFA mínim que accepta els mots sobre l'alfabet $\{a,b,c\}$ que contenen almenys 100 de cada un d'aquests tres símbols?

4.19 Considereu el conjunt de tots els DFA amb les següents restriccions:

- Estan definits sobre un alfabet uniliteral.
- Tenen tres estats.
- Tenen exactament un estat acceptador.
- L'estat acceptador no és l'estat inicial.
- Són DFA mínims.

És a dir, són de la forma

$$M=\langle\{q_1,q_2,q_3\},\{a\},\delta,q_1,\{q_3\}\rangle$$

i són mínims. Quants d'aquests autòmats hi ha?

4.20 (12/11/03) Sigui $n>0$. Quins dels llenguatges regulars següents són reconeguts per algun DFA que tingui menys de 2^{n+1} estats?

- $\{xay \mid x,y\in\{a\,,\,b\}^* \ \wedge\ |y|=n\}$
- $\{xay \mid x,y\in\{a\,,\,b\}^* \ \wedge\ |y|\geqslant n\}$
- $\{xay \mid x,y\in\{a\,,\,b\}^* \ \wedge\ |y|\leqslant n\}$

Capítol 5

Autòmats finits generals

5.1 Siguin A i B dos llenguatges regulars qualssevol i siguin Q_A i Q_B els conjunts d'estats dels seus respectius DFA mínims. Considerem el DFA mínim que reconeix el llenguatge concatenat AB. Sigui Q el conjunt d'estats d'aquest autòmat. ¿Podem afirmar que

$$\mathsf{min}\{\|Q_A\|, \|Q_B\|\} \leqslant \|Q\| \leqslant \mathsf{max}\{\|Q_A\|, \|Q_B\|\}?$$

5.2 Sigui $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ un DFA mínim. Demostreu que si hi ha algun estat $q \in F$ tal que

$$\forall a \in \Sigma \quad \delta(q, a) = q\,,$$

llavors aquest estat és l'únic acceptador amb aquest comportament.

5.3 Sigui L un llenguatge regular qualsevol i sigui M el DFA mínim que reconeix L. Quines de les afirmacions següents són certes?

- Tots els estats de M són *accessibles*. (Un estat és accessible si algun mot permet passar de l'estat inicial a l'estat considerat.)
- Tots els estats de A són *fecunds*. (Un estat és fecund si algun mot permet passar d'aquest estat a algun estat acceptador.)
- Per a tot llenguatge L' tal que $L \subseteq L'$, el nombre d'estats de l'autòmat mínim que reconeix L' no pot ser inferior al nombre d'estats de M.

5.4 Sigui $M = \langle Q, \Sigma, \delta, I, F\rangle$ un NFA qualsevol i sigui $L = \mathsf{L}(M)$. Considerem el llenguatge

$$L' = \{x \in \Sigma^* \mid \exists u, v \;\; x = uv \;\wedge\; u \in L\}$$

i l'autòmat $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', I, F\rangle$ on, $\forall a \in \Sigma$:

$$\delta'(q, a) = \begin{cases} \delta(q, a) \cup \{q\} & \text{si } q \in F \\ \delta(q, a), & \text{altrament.} \end{cases}$$

Demostreu que $L' = \mathsf{L}(M')$.

5.5 Sigui L un llenguatge regular i $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ el mínim DFA que el reconeix. Es defineixen

$$A_1 = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F_1\rangle,$$

amb $F_1 = \{q \in F \mid \forall w \in \Sigma^* \; \delta(q, w) \in F\}$ i

$$A_2 = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F_2\rangle,$$

amb $F_2 = \{q \in F \mid \forall a \in \Sigma \; \delta(q, a) = q\}$. Considerem $L_3 = \{x \in L \mid \forall y \in \Sigma^* \; xy \in L\}$. Demostreu que $\mathsf{L}(A_1) = \mathsf{L}(A_2) = L_3$.

5.6 Sigui $N = \langle Q, \Sigma, \delta, I, F\rangle$ un NFA tal que $I \cap F = \varnothing$. Sigui $L = \mathsf{L}(N)$. Construïm a partir de N l'autòmat $M = \langle Q \cup \tilde{Q}, \Sigma, \tilde{\delta}, I, \tilde{F}\rangle$ on $\tilde{Q}$, $\tilde{F}$ i $\tilde{\delta}$ es defineixen a continuació:

- $\tilde{Q} = \{\tilde{q} \mid q \in Q\}$.
- $\tilde{F} = \{\tilde{q} \mid q \in F\}$.
- $\forall q \in Q \; \forall a \in \Sigma \quad \tilde{\delta}(q, a) =$

$$\begin{cases} \delta(q, a) & \text{si } q \in Q - F \\ \delta(q, a) \cup \{\tilde{p} \mid p \in \delta(I, a)\} & \text{si } q \in F \end{cases}$$

- $\forall \tilde{q} \in \tilde{Q} \;\; \forall a \in \Sigma \quad \tilde{\delta}(\tilde{q}, a) =$

$$\begin{cases} \{\tilde{p} \mid p \in \delta(q, a)\} & \text{si } \tilde{q} \in \tilde{Q} - \tilde{F} \\ \{\tilde{p} \mid p \in \delta(q, a)\} \cup \{p \mid p \in \delta(I, a)\} & \text{si } \tilde{q} \in \tilde{F} \end{cases}$$

Quin és el llenguatge $\mathsf{L}(M)$?

5.7 Sigui $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ un DFA amb tots els estats accessibles. Considerem la propietat següent, que es refereix a estats $p, q \in Q$:

$$p \neq q \;\wedge\; \forall n \geqslant 0 \; \exists w \in \Sigma^n \;\; pw \in F \iff qw \in F$$

Quines de les afirmacions següents són certes?

- Si M és mínim, no existeix cap parell d'estats, p i q, que satisfacin aquesta propietat.
- Si dos estats, p i q satisfan aquesta propietat, tots dos són acceptadors.

- Si no hi ha cap parell d'estats que satisfacin aquesta propietat, M és mínim.

5.8 Sigui A el llenguatge regular reconegut per un cert NFA M. Quines de les afirmacions següents se satisfan per a tot llenguatge B tal que $B \subseteq A$? Doneu contraexemples per a les que no se satisfan.

- B és reconegut per un NFA que té com a estats acceptadors un subconjunt dels de M.
- B és reconegut per un NFA que té com a funció de transició una restricció de la de M. És a dir, una funció obtinguda a partir de la de M eliminant-hi algunes transicions.
- B és reconegut per un NFA que té com a estats un subconjunt dels de M, i on s'han eliminat les transicions que corresponen als estats que han desaparegut.

5.9 Sigui $A = \langle Q, \Sigma, \delta, I, F\rangle$ un NFA en el qual s'ha establert una ordenació dels estats, de la forma $Q = \{q_0, q_1 \ldots q_k\}$. Se sap que per a tot mot acceptat per l'autòmat, $a_1 \ldots a_n \in \mathsf{L}(A)$, existeix un camí acceptador $(q_{i_0}, q_{i_1}, \ldots q_{i_n})$ els estats del qual apareixen en ordre estrictament creixent, és a dir que $i_0 < i_1 < \cdots < i_n$.

1. És cert que el graf de A no pot contenir cap cicle?
2. És cert que el llenguatge reconegut per A ha de ser finit?

5.10 Sigui $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ un DFA mínim. Quines de les afirmacions següents són certes?

A) Si $\exists q \in Q$ i $\exists w \in \Sigma^+$ tals que $q \cdot w = q$, aleshores $\mathsf{L}(M)$ és infinit.
B) Si $\forall x, y \in \mathsf{L}(M)$ $(x \neq y \Longrightarrow q_0 x \neq q_0 y)$, aleshores $\mathsf{L}(M)$ és finit.
C) Si $\exists q \in F$ tal que $\forall w \in \Sigma^+$ $qw \notin F$, aleshores cap mot de $\mathsf{L}(M)$ no pot ser prefix propi de cap altre mot de $\mathsf{L}(M)$.
D) Si $\exists q \in F$ tal que $\forall w \in \Sigma^*$ $qw = q$, aleshores $\mathsf{L}(M)^{\mathrm{c}}$ és finit.

5.11 Sigui $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ un DFA mínim. Sigui $N = \|Q\| - \|F\| + 1$. Demostreu que el DFA mínim que reconeix $\mathsf{L}(M)\cdot\Sigma^*$ té un nombre d'estats menor o igual que N.

5.12 Sigui $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ un DFA mínim qualsevol. Construïm a partir de M l'NFA $\widetilde{M} = \langle Q, \Sigma, \widetilde{\delta}, q_0, F \cup \{q_0\}\rangle$, fent $\forall a \in \Sigma$

$$\widetilde{\delta}(q,a) = \begin{cases} \delta(q,a) & \text{si } q \in Q - F \\ \delta(q,a) \cup \delta(q_0,a) & \text{si } q \in F, \end{cases}$$

és a dir, fem que l'estat inicial sigui acceptador i afegim transicions des dels estats acceptadors als successors de l'inicial. ¿És cert que $\mathsf{L}(\widetilde{M}) = (\mathsf{L}(M))^*$?

5.13 Sigui $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ un DFA mínim qualsevol on $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$. Sigui $L = \mathsf{L}(M)$. Definim per a cada i $M_i = \langle Q, \Sigma, \delta, q_i, F\rangle$. Demostreu que $\bigcup_{i=0}^{n} \mathsf{L}(M_i) = \mathsf{sufixos}(L)$.

5.14 Sigui $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ un DFA. Diem que un estat $q \in Q$ té un *bucle* si per a algun símbol $a \in \Sigma$ es té $q \cdot a = q$. Diem que un tuple d'estats $(q_1, \ldots, q_k)$ té un *cicle* si existeixen $a_1, \ldots, a_k \in \Sigma$, amb $k \geqslant 1$, tals que

$$q_1 \cdot a_1 \ldots a_k = q_2 \cdot a_2 \ldots a_k = \cdots = q_k \cdot a_k = q_1.$$

¿És certa alguna de les afirmacions següents?

1. Tot llenguatge regular pot ser reconegut per algun DFA sense bucles.
2. Tot llenguatge regular pot ser reconegut per algun DFA sense cicles.

Capítol 6

Expressions i gramàtiques regulars

6.1 Construïu els DFA mínims que reconeixen els llenguatges definits per les expressions regulars següents:

1. $\big((01^*01)^*0^*1\big)^*$
2. $\big(\lambda + (a+b)^*b\big)(aa)^*(a+b+aa)$
3. $(b+aa+ab)^*(a+b+aa)$
4. $b^*a(bb+bab^*a)^*ba(bb)^*$
5. $\big(0+1(01^*0)^*1\big)^*$
6. $\lambda + \big(0+11+10(00+1)^*01\big)^*0$
7. $\big(0+1\,(01^*0+11)^*\,10\big)^*$
8. $\big((a^*b)^*a^*c\big)^*\,b^*(ab^*)^*$
9. $\big(0+1\,(11+101+01^*0)^*\,100\big)^*$
10. $(a+b(bb+bab+ab^*a)^*baa)^*$
11. $\big(ab+aa\,((\lambda+ba^*)ab)^*\,aa\big)^*\,a$
12. $a^*b(aa^*b+ba^*b)^*aa^*$
13. $((a+b)^*+c)\cdot(a\cdot c)^*\cdot b+a$
14. $a+b(bb+bab+ab^*a)^*b^*aa$
15. $((a+b)^*a+\lambda)(a+ba)$
16. $(a(ab)^*(aab)^*)^*$
17. $(aa+b)^*(bb+a)^*$
18. $(\lambda+b)a^*(\lambda+b)$
19. $(aba+ab)^*(bab+ba)^*$
20. $\lambda+(aa(ba+bba)^*a+b+ab)^*\,ab^*$

6.2 Demostreu que les tres expressions regulars següents representen el mateix llenguatge: el conjunt de nombres naturals escrits en binari, sense zeros a l'esquerra.

1. $0+1(0+1)^*$
2. $0+1^++1(0+1)^*01^*$
3. $(10^*)^*(0+1)$

6.3 Demostreu les equivalències següents entre expressions regulars:

1. $a^*(b+ca^*)^* = (a+b^*c)^*b^*$.
2. $(bb+ba+a)^*baa^* = a^*b(aa^*b+ba^*b)^*aa^*$.
3. $(\Lambda+(a+b)^*baa)a^* = \Lambda+a+(a+b)^*aa$.
4. $(\Lambda+b)a^*(b+bba^*)^* = b^*(a+bb+bbb)^*b^*$.

6.4 Considerem els llenguatges associats a les dues expressions regulars següents:

$$r_1 = (0+110+1010)^*1$$
$$r_2 = 0^*1(10^*1+010^+1)^*.$$

Demostreu que $\mathsf{L}(r_1) \subsetneq \mathsf{L}(r_2)$.

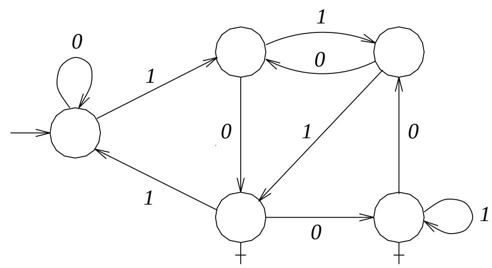
6.5 Construïu gramàtiques regulars que generin els llenguatges següents:

1. El conjunt dels nombres binaris múltiples de 3, més λ.
2. El conjunt de mots sobre $\{a, b\}^*$ que *no* contenen la subcadena aba.
3. $(0+1)^*(010)^+(0^*1^*)^*$.
4. El conjunt de mots sobre $\{0,1\}$ que tenen almenys dos zeros consecutius.
5. El conjunt de mots que contenen un nombre parell de vegades el submot aba (comptant els encavalcaments).

6.6 Construïu gramàtiqus lineals dretes que generin els *revessats* de cada un dels llenguatges definits pels DFA següents:

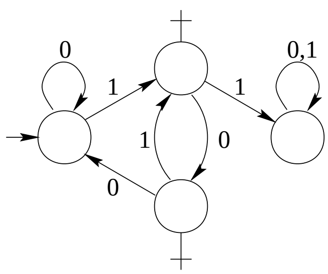
1.

M:

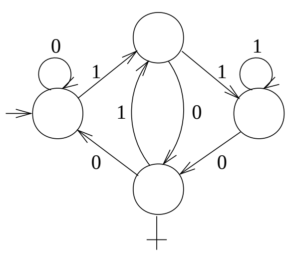


2.

M:



6.7 Donat l'autòmat següent, M:



definim L com el llenguatge format pels mots que no tenen cap prefix (ni propi ni impropi) que pertanyi a $\mathsf{L}(M)$. Doneu una expressió regular de L.

6.8 Les gramàtiques següents no són regulars, perquè la lateralitat de les seves produccions no és única. Tot i això, els llenguatges que generen sí que són regulars. Quins són els DFA mínims que reconeixen aquests llenguatges?

1. $S \to A \mid B$
   $A \to aA \mid bC$
   $C \to aC \mid bA \mid \lambda$
   $B \to Ea \mid Ba \mid Fb$
   $E \to Bb \mid \lambda$
   $F \to Fa \mid Eb \mid Bb$

2. $S \to bS \mid aA$
   $A \to bS \mid aX$
   $X \to aX \mid bX \mid cZ$
   $Z \to Za \mid Bb$
   $B \to Za \mid Yb$
   $Y \to Ya \mid Yb \mid \lambda$

3. $S \to A \mid B$
   $A \to C \mid \lambda$
   $B \to B0 \mid D1 \mid \lambda$
   $C \to 0A \mid 1C$
   $D \to E0 \mid B1$
   $E \to D0 \mid E1$

4. $S \to aAb \mid \lambda$
   $A \to aA \mid Ab \mid bBa \mid \lambda$
   $B \to bB \mid Ba \mid S$

5. $S \to AD$
   $A \to aB$
   $B \to bC$
   $C \to aC \mid bC \mid \lambda$
   $D \to aD \mid bE$
   $E \to aF \mid bE$
   $F \to aD \mid bE \mid \lambda$

6.9 Quin llenguatge satisfà l'equació següent?

$$L = a^{+}(\lambda + Lb)$$

Capítol 7

Morfismes

Els tres primers exercicis fan referència a propietats dels morfismes com a meres aplicacions entre conjunts.

7.1 Sigui $h\colon \Sigma_1^* \longrightarrow \Sigma_2^*$ un morfisme qualsevol i siguin $L, L_1, L_2 \subseteq \Sigma_1^*$. Demostreu:

$h(L) = \varnothing \iff L = \varnothing$

$L_1 \subseteq L_2 \implies h(L_1) \subseteq h(L_2)$

$h(L_1 \cup L_2) = h(L_1) \cup h(L_2)$

$h(L_1 \cap L_2) \subseteq h(L_1) \cap h(L_2)$

$L \subseteq h^{-1}(h(L))$

7.2 Sigui $h\colon \Sigma_1^* \longrightarrow \Sigma_2^*$ un morfisme qualsevol i siguin $L, L_1, L_2 \subseteq \Sigma_2^*$. Demostreu:

$h^{-1}(\varnothing) = \varnothing$

$L_1 \subseteq L_2 \implies h^{-1}(L_1) \subseteq h^{-1}(L_2)$

$h^{-1}(L_1 \cup L_2) = h^{-1}(L_1) \cup h^{-1}(L_2)$

$h^{-1}(L_1 \cap L_2) = h^{-1}(L_1) \cap h^{-1}(L_2)$

$h\left(h^{-1}(L)\right) \subseteq L$

$h^{-1}\left(\overline{L}\right) = \overline{h^{-1}(L)}$

7.3 Sigui $h\colon \Sigma_1^* \longrightarrow \Sigma_2^*$ un morfisme qualsevol.

1. Doneu contraexemples que posin de manifest que no pot establir-se amb caràcter general cap de les dues inclusions entre $h\left(\overline{L}\right)$ i $\overline{h(L)}$, on $L \subseteq \Sigma_1^*$.

2. Demostreu que els enunciats següents són equivalents:

   (a) h és injectiu.

   (b) $\forall L \subseteq \Sigma_1^* \quad h\left(\overline{L}\right) \subseteq \overline{h(L)}$.

   (c) $\forall L \subseteq \Sigma_1^* \quad h^{-1}(h(L)) = L$.

   (d) $\forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma_1^* \quad h(L_1 \cap L_2) = h(L_1) \cap h(L_2)$.

3. Demostreu que els enunciats següents són equivalents:

   (a) h és exhaustiu.

   (b) $\forall L \subseteq \Sigma_1^* \quad h\left(\overline{L}\right) \supseteq \overline{h(L)}$.

   (c) $\forall L \subseteq \Sigma_2^* \quad h\left(h^{-1}(L)\right) = L$.

   (d) $\forall L \subseteq \Sigma_2^* \quad h^{-1}(L) = \varnothing \implies L = \varnothing$.

7.4 Trobeu l'antiimatge $h^{-1}(L)$ en els casos en què el llenguatge L i el morfisme h estan definits així:

1. $L = (10+0)^*$, $h(a) = 01$ i $h(b) = 0$.

2. $L = 1010$, $h(a) = \lambda$ i $h(b) = 01$.

3. $L = (a^*bab^*)^+$, $h(0) = ab$ i $h(1) = aab$.

4. $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid \mathsf{valor}_2(w) = \dot{3}\}$, $h(a) = 01$ i $h(b) = 1001$.

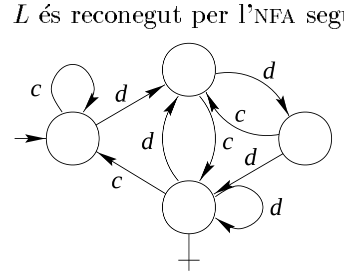
5. $L = \{a^{3n}b^m \mid n, m \geqslant 0\}$, $h(0) = aa$ i $h(1) = ba$.

6. $L = \big\{w \bigm| |w|_a = |w|_b \wedge (\forall x, y \;\; w \neq xbby)\big\}$, $f(0) = ba$ i $f(1) = ab$.

7. $L = b^*\left(a^*b\right)^* a^* + (aa)^+$, $h(0) = aa$ i $h(1) = aba$.

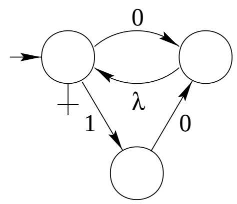
8. $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid \mathsf{valor}_2(w) = \dot{5}\}$, $h(a) = 1$, $h(b) = 1010$ i $h(c) = 10101$.

9. L és reconegut per l'NFA següent:

   i el morfisme és $h(a) = cd$ i $h(b) = ccd$.

10. L és reconegut per l'NFA següent:



i el morfisme és $h(a) = 01$ i $h(b) = 0$.

11. L està format pels mots sobre $\{a, b\}$ que contenen el submot aba, mentre que $h(0) = ba$ i $h(1) = ab$.

12. $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^{\mathsf{R}}\}$, $h(a) = 01$ i $h(b) = 10$.

7.5 Sigui L el llenguatge definit per l'expressió regular $ab(a + c)^* + cb(a + c)^*$ i considerem el morfisme $h\colon \{a, b, c\}^* \to \{0,1\}^*$ definit per $h(a) = 1$, $h(b) = 011$ i $h(c) = 0$. Quin és el mínim DFA que reconeix $(h(L))^{\mathsf{R}}$?

7.6 Considereu el llenguatge

$$L = \{(01)^n 10^n (01)^n \mid n \geqslant 1\}$$

i els dos morfismes $h_1, h_2\colon \{a, b, c\}^* \longrightarrow \{0,1\}^*$ definits així: $h_1(a) = 01$, $h_1(b) = 10$ i $h_1(c) = 0$; $h_2(a) = 0$ i $h_2(b) = h_2(c) = 11$.

Quin és el llenguatge $h_2\big(h_1^{-1}(L)\big)$?

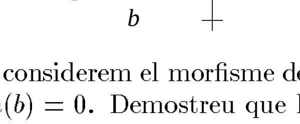
7.7 Sigui L el llenguatge generat per la gramàtica:

$$S \to Ba \mid Sa$$
$$B \to Aa$$
$$A \to Ab \mid Bb \mid Sb \mid \lambda$$

i considerem el morfisme definit per $h(0) = aa$ i $h(1) = b$. Demostreu que la gramàtica següent genera el llenguatge $h^{-1}(L)$.

$$S \to 0X \mid 1S$$
$$X \to 0X \mid 1S \mid \lambda.$$

7.8 Sigui L el llenguatge reconegut per l'autòmat finit següent,



i considerem el morfisme definit per $h(a) = 01$ i $h(b) = 0$. Demostreu que la gramàtica següent genera el llenguatge $h(L)$

$$S \to 0A \mid 01A$$
$$A \to 00A \mid 01A \mid 001A \mid \lambda.$$

7.9 Considerem dos morfismes h_1 i h_2 de la forma $h_1\colon \{a, b, c\}^* \longrightarrow \{a, b\}^*$ i $h_2\colon \{a, b, c\}^* \longrightarrow \{0, 1\}^*$. El morfisme h_2 ve definit per $h_2(a) = 0$ i $h_2(b) = h_2(c) = 1$. Com hem de definir h_1 perquè se satisfaci la igualtat

$$h_2\left(h_1^{-1}(L) \cap a^*bc^*\right) = \{0^n 1^n \mid n \geqslant 1\},$$

on $L = \{a^n b a^n \mid n \geqslant 0\}$?

7.10 Sigui $h\colon \{a, b\}^* \longrightarrow \{c\}^*$ el morfisme definit per $h(a) = cc$ i $h(b) = ccccc$. Sigui $L = (a(b + ab)^*)^*$. Quin és el llenguatge $h(L)$?

7.11 Sigui $L = \big\{ww \mid w \in \{a, b, c\}^*\big\}$ i sigui $h\colon \{a, b, c\}^* \longrightarrow \{0,1\}^*$ el morfisme definit pels valors $h(a) = 0$, $h(b) = 1$ i $h(c) = 01$. Quin és el llenguatge $h(L) \cap 0^*1^*$?

7.12 Donats els alfabets

$$\Sigma_1 = \left\{ \begin{array}{|c|}\hline a \\ \hline a \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline b \\ \hline a \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline b \\ \hline b \\ \hline \end{array} \right\} \quad \text{i} \quad \Sigma_2 = \{a\,,\, b\}$$

definim els morfismes següents:

$$h_{\text{sup}}\left(\begin{array}{|c|}\hline a \\ \hline a \\ \hline \end{array}\right) = a \qquad h_{\text{sup}}\left(\begin{array}{|c|}\hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array}\right) = a$$
$$h_{\text{sup}}\left(\begin{array}{|c|}\hline b \\ \hline a \\ \hline \end{array}\right) = b \qquad h_{\text{sup}}\left(\begin{array}{|c|}\hline b \\ \hline b \\ \hline \end{array}\right) = b$$
$$h_{\text{inf}}\left(\begin{array}{|c|}\hline a \\ \hline a \\ \hline \end{array}\right) = a \qquad h_{\text{inf}}\left(\begin{array}{|c|}\hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array}\right) = b$$
$$h_{\text{inf}}\left(\begin{array}{|c|}\hline b \\ \hline a \\ \hline \end{array}\right) = a \qquad h_{\text{inf}}\left(\begin{array}{|c|}\hline b \\ \hline b \\ \hline \end{array}\right) = b.$$

Quin llenguatge és

$$h_{\text{sup}}(h_{\text{inf}}^{-1}(\{w \in \Sigma_2^* \mid |w|_a \text{ és parell}\}))?$$

7.13 Sigui L el llenguatge generat per la gramàtica

$$S \to A \mid B \mid C$$
$$A \to aB \mid bS \mid \lambda$$
$$B \to bA \mid bSc \mid bAc$$
$$C \to bCc \mid aB$$

i el morfisme $h\colon \{a\,,\, b\}^* \longrightarrow \{0,1\}^*$ definit per

$$h(a) = 0 \quad h(b) = 1 \quad h(c) = \lambda.$$

Trobeu el mínim DFA que reconeix $h(L)$?

7.14 Construïu el DFA mínim que reconeix l'antiimatge $h^{-1}(L)$ en els casos en què el llenguatge L i el morfisme h estan definits així:

1. $L = \{w \in \{0\,,1\}^* \mid \mathsf{valor}_2(w) = \dot{5}\}$, $h(a) = 0000$ i $h(b) = 11$.

2. L està format pels mots sobre $\{\mathrm{a}\,,\mathrm{b}\}$ que no contenen el submot $bbaa$ i acaben en bba; $h(0) = ba$ i $h(1) = bbab$.

3. $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid \mathsf{valor}_2(w) = \dot{6}\}$, $h(a) = 1$, $h(b) = 01001$ i $h(c) = 101$.

4. L està generat per la gramàtica

$$\begin{array}{l} S \to 0S \mid 1A \mid \lambda \\ A \to 0B \mid 1C \\ B \to 0C \mid 1S \\ C \to 0D \mid 1B \\ D \to 0A \mid 1D\,; \end{array}$$

   $h(a) = 010$ i $h(b) = 111$.

5. L està generat per la gramàtica

$$\begin{array}{l} S \to Ad \mid Ca \mid De \\ A \to Sc \mid Bd \mid Da \\ B \to Ac \mid De \mid Ea \\ C \to Sb \mid Ae \mid Dc \\ D \to Ab \mid Cd \mid Ec \\ E \to Ae \mid Bb \mid Dd \mid \lambda\,; \end{array}$$

   $h(0) = adc$, $h(1) = acd$, $h(2) = cc$ i $h(3) = dd$.

7.15 Quina de les afirmacions següents és certa per a qualsevol morfisme h?

A) $\forall x \;\; h(x^{\mathsf{R}}) = h(x)^{\mathsf{R}}$
B) $(\forall x \;\; h(x^{\mathsf{R}}) = h(x)^{\mathsf{R}}) \Longrightarrow (\forall x \;\; (|h(x)| \leqslant |x|))$
C) $(\forall x \;\; h(x^{\mathsf{R}}) = h(x)^{\mathsf{R}}) \Longleftrightarrow (\forall x \;\; (|h(x)| = |x|))$
D) $(\forall x \;\; h(x^{\mathsf{R}}) = h(x)^{\mathsf{R}}) \Longleftarrow (\forall x \;\; (|h(x)| \leqslant |x|))$

7.16 Sigui $h\colon \{0,1\}^* \longrightarrow \{a\,,b\}^*$ un morfisme qualsevol. Sabent que $h(001) = abab$, quin és el valor de $h(010)$?

Capítol 8

Regularitat vs. no-regularitat

8.1 Classifiqueu com a regulars o no regulars els llenguatges següents:

- $\{xyz \mid x, y, z \in (a+b)^+ \wedge x = z^{\mathsf{R}}\}$
- $\{xyz \mid x, y, z \in (a+b)^+ \wedge x = y^{\mathsf{R}}\}$
- $\{xyz \mid x, y, z \in (a+b)^+ \wedge |x| = |z|\}$
- $\{xyz \mid x, y, z \in (a+b)^+ \wedge |x| = |y| = |z|\}$
- $\{w \mid \exists u \in \Sigma^* \ (uu = www)\}$
- $\{w \mid \exists u \in \Sigma^* \ (uuuu = www)\}$
- $\{w \mid \exists u, v \in \Sigma^* \ (uvw = wvu)\}$
- $\{w \mid \exists u, v \in \Sigma \ (u \neq v) \wedge (uww = wwv)\}$
- $\{w \mid \exists u \in \Sigma^* \ (u = ww) \wedge (u = uu)\}$
- $\{w\#w^{\mathsf{R}} \mid w \in (0+1)^+\}$
- $\{wxw^{\mathsf{R}} \mid x \in (0+1+\#)^* \wedge w \in (0+1)^+\}$
- $\{x\#y\#z \mid x, y, z \in (0+1)^*\}$
- $\{a^n b^m \mid n > m \vee n < m\}$
- $\{a^n b^m \mid n \geqslant m \vee n \leqslant m\}$
- $\{a^n b^m \mid n > m \wedge n < m\}$
- $\{a^n b^m \mid n \geqslant m \wedge n \leqslant m\}$

8.2 Sigui L un llenguatge regular. Quins dels llenguatges següents poden no ser regulars?

1. $\{x \in (a+b)^* \mid \exists y \in L \ |x| - |y| \leqslant 2\}$
2. $\{x \in (a+b)^* \mid \exists y \in L \ y = x^{\mathsf{R}}\}$
3. $\{x \in (a+b)^* \mid \exists y \in (a+b)^* \ xy \in L\}$
4. $\{xy \mid x \in L \wedge y \notin L\}$
5. $\{x^{\mathsf{R}} \mid x \in L\}$
6. $\{xx^{\mathsf{R}} \mid x \in L \wedge x^{\mathsf{R}} \in L\}$
7. $\{x \mid x \in L \wedge x^{\mathsf{R}} \in L\}$
8. $\{w \mid ww^{\mathsf{R}}ww^{\mathsf{R}} \in L\}$
9. $\{w \mid www^{\mathsf{R}}w^{\mathsf{R}} \in L\}$
10. $\{w \mid ww^{\mathsf{R}}w^{\mathsf{R}}w \in L\}$
11. $\{w \mid ww^{\mathsf{R}}ww \in L\}$
12. $\{x \ \mid \ \exists y \ |x| = |y| \ \wedge \ xy \in L\}$
13. $\{x \ \mid \ \exists y \ x = y^{\mathsf{R}} \ \wedge \ xy \in L\}$
14. $\{x \ \mid \ \exists y \ x = yy^{\mathsf{R}} \ \wedge \ x \in L\}$
15. $\{x \ \mid \ \exists y \ x = y \ \wedge \ xy \in L\}$
16. $\{x \ \mid \ \exists y \ x = yy^{\mathsf{R}} \ \wedge \ xy \in L\}$
17. $\{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* \ yx \in L\}$
18. $\{x \in \Sigma^* \mid \forall y \in \Sigma^* \ xy \in L\}$
19. $\{x \mid \exists y \quad x = yy \ \wedge \ xy \in L\}$
20. $\{x \mid \exists y \quad y = xx \ \wedge \ xy \in L\}$

8.3 Sigui L_1 un llenguatge regular i L_2 un llenguatge incontextual, però no regular. Definim el llenguatge següent:

$$L = \{xyz \mid \ x \in \mathsf{prefixos}(L_1) \ \wedge \ \exists u \in L_1 \\ |u| = |y| \ \wedge \ z \in L_2\}.$$

1. Demostreu que L és CFL, qualssevol que siguin L_1 i L_2.
2. Poseu un exemple de L_1 (diferent de $\varnothing$) i L_2 per als quals L resulta regular.

8.4 Siguin $f, g\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ dues funcions enteres tals que els conjunts:

$$A = \{0^{f(n)} \mid n \geqslant 0\} \text{ i } B = \{0^{g(n)} \mid n \geqslant 0\}\,.$$

són regulars. Considereu també els conjunts:

$$L_1 = \{0^{f(n)+g(m)} \mid n, m \geqslant 0\} \text{ i}$$
$$L_2 = \{0^{f(n)\times g(n)} \mid n \geqslant 0\}\,.$$

Què podeu dir sobre la regularitat de L_1 i L_2?

8.5 Demostreu que els llenguatges següents són no regulars.

1. $\{0101^2 \ldots 01^n \mid n \geqslant 1\}$
2. $\{a^\alpha b^\beta c^\gamma \;\mid\; \alpha, \beta, \gamma \geqslant 0 \;\wedge\; \alpha = \beta + \gamma\}$
3. $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a \leqslant |w|_b \vee |w|_a \leqslant |w|_c\}$
4. $\{w_1\#w_2 \mid w_1, w_2 \in (0+1)^* \wedge (|w_1| < |w_2| \vee |w_1| \text{ parell})\}$
5. $\{u\#v \;\mid\; u, v \in \{a, b\}^* \wedge u \text{ és un submot de } v\}$
6. $\{w \in (a+b+c)^* \mid |w|_a \geqslant |w|_b \vee |w|_c \geqslant |w|_b\}$
7. $\{a^i b^j c^k \mid i \leqslant j \vee i \leqslant k \vee j \leqslant k\}$
8. El llenguatge format pels mots sobre l'alfabet $\{a\,,\, b\}$ que contenen algun prefix no nul de longitud parella amb el mateix nombre de a's que de b's.
9. El llenguatge $\{a^{n^3} \mid n \geqslant 0\}$, format per mots uniliterals de longitud igual a un cub perfecte.

8.6 Demostreu que qualsevol subconjunt infinit del llenguatge $\{a^n b^n \mid n > 0\}$ és no regular.

8.7 Sigui $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una funció estrictament creixent, és a dir, que $\forall n \in \mathbb{N}\; f(n) < f(n+1)$. Considerem els llenguatges

$$L_1 = \{b^{f(n)} \mid n \geqslant 0\} \text{ i}$$
$$L_2 = \{a^n b^{f(n)} \mid n \geqslant 0\}.$$

Demostreu que L_2 no és mai regular, però que L_1 pot ser-ho i pot no ser-ho.

8.8 Considerem el llenguatge

$$L = \{ww^{\mathsf{R}} \mid w \in 1\{0, 1\}^*\}$$

i, per a cada $k \geqslant 1$, els llenguatges

$$L_k = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w = w^{\mathsf{R}} \wedge \mathsf{valor}_2(w) \leqslant k\}.$$

Quins dels llenguatges que definim a continuació són regulars, per a qualsevol k?

1. $L \cap L_k$
2. $L - L_k$
3. $L_k \cup L_{k+1}$
4. $\bigcup_{k \geqslant 1} L_k$

8.9 Donat el llenguatge

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i \geqslant j \;\wedge\; j \geqslant k\}$$

digueu quina de les transformacions següents dóna lloc a un llenguatge no regular.

A) $L \cap b^* c^*$
B) $L \cap a^* c^*$
C) $\overline{L} \cap b^* c^*$
D) $\overline{L} \cap a^* b^*$

8.10 Considereu el llenguatge

$$L = \big\{w \in \{a, b, c\}^* \;\big|\; |w|_a + |w|_b \leqslant |w|_c\big\}.$$

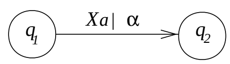
Quina de les transformacions següents dóna lloc a un llenguatge regular?

A) $\overline{L} \cap \big\{w \in \{a, b, c\}^* \;\big|\; |w|_a \leqslant |w|_c\big\}$
B) $L \cap \big\{w \in \{a, b, c\}^* \;\big|\; |w|_a \geqslant |w|_c\big\}$
C) Aplicar a L el morfisme h definit per $h(a) = \lambda$, $h(b) = b$ i $h(c) = c$.
D) Aplicar a L el morfisme h definit per $h(a) = a$, $h(b) = b$ i $h(c) = \lambda$.

Capítol 9

Autòmats amb pila

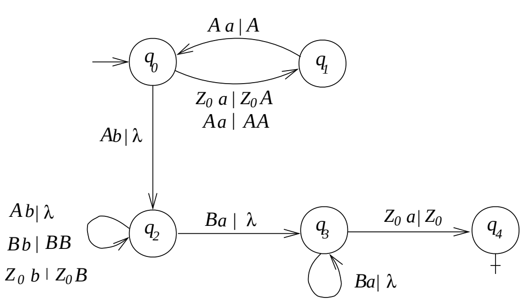
En els exercicis d'autòmats amb pila, la notació



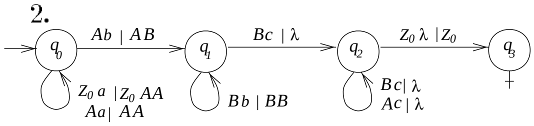
simbolitza una transició $\delta(q_1, a, X) = (q_2, \alpha)$ que també se sol expressar en la forma $Xq_1a \vdash \alpha q_2$. A més, es considera que els mots de la pila, com α, es llegeixen de baix cap a dalt (el símbol de més a la dreta de α queda situat a la part superior de la pila). El símbol de fons de pila és Z_0.

9.1 Trobeu els llenguatges reconeguts pels PDA en cada un dels casos següents:

1.



2.



9.2 Construïu PDA per a cada una dels llenguatges següents:

1. El llenguatge format pels mots sobre l'alfabet $\{a, b\}$ en què no hi ha cap prefix, excepte λ, que contingui igual nombre de a's que de b's.

2.

9.3 Quins dels llenguatges següents són DCFL?

1. $\{w \in (a+b)^* \,|\, |w|_a > |w|_b\} \cup \{w \in (a+b)^* \,|\, |w|_a < |w|_b\}$
2. $\{0^i1^j2^k | i = j\} \cup \{0^i1^j2^k | j = k\}$
3. $\{uv \,|\, |u| = |v| \ \wedge\ u \in (b+c)^* \ \wedge\ v \in a(b+c)^*\}$
4. $\{uv \,|\, |u| = |v| \ \wedge\ u, v \in (a+b+c)^*\}$