Teoria de la Computació

Tema 5: No regularitat

Teoria:

- `Vídeos 21 i 22`
- `Llibre TC (Propietats d'iteració) Secció 7.1`

Exercicis per a l'avaluació contínua:

1. Demostreu la no-regularitat dels següents llenguatges:

   (a) $\{a^n b^n | n \in \dot{2}\}$.
   (b) $\{a^n b^n | n \in \dot{3}\}$.
   (c) $\{a^n b^m | n \neq m\}$.
   (d) $\{a^{2n} b^n | n \in \dot{2}\}$.
   (e) $\{w \in \{a,b\}^* | \ |w|_a = |w|_b\}$.
   (f) $\{a^n b^m | n \leq m\}$.
   (g) $\{a^n b^m | n \geq m\}$.
   (h) $\{c^m a^n b^n | (n, m \geq 0)\}$.
   (i) $\{a,b\}^* \cup \{c^m a^n b^n | (m \geq 1) \wedge (n \geq 0)\}$.
   (j) $\{w \in \{a,b\}^* | w = w^R\}$.
   (k) $\{ww \in \{a,b\}^*\}$
   (l) $\{a^{n^2} | n \geq 0\}$.
   (m) $\{a^{2^n} | n \geq 0\}$.
   (n) $\{a^n | n$ apareix a la successió de Fibonacci$\}$.
   (o) $\{a^n | n$ és primer$\}$.
   (p) $\{a^n | n$ és parell o primer$\}$.
   (q) $\{abab^2ab^3 \dots ab^n | n \geq 0\}$.
   (r) $\{w_1\#w_2 | w_1, w_2 \in \{0,1\}^* \wedge (|w_1| < |w_2| \vee |w_1| \in \dot{2})\}$.
   (s) $\{u\#v | u, v \in \{a,b\}^* \wedge v$ és submot de $u\}$.
   (t) $\{w \in (a+b+c)^* \mid |w|_a \geq |w|_b \vee |w|_b \geq |w|_c\}$.
   (u) Qualsevol subconjunt infinit del llenguatge $\{a^n b^n\}$.
   (v) $\{w \in \{a,b\}^* \mid (|w| \in \dot{3} \Rightarrow |w|_a = |w|_b)\}$.
   (w) $\{w_1\#w_2 | w_1, w_2 \in \{0,1\}^* \wedge \mathtt{valor}_2(w_1) = \mathtt{valor}_2(w_2)\}$.
   (x) $\{w_1\#w_2 | w_1, w_2 \in \{0,1\}^* \wedge \mathtt{valor}_2(w_1) = 1 + \mathtt{valor}_2(w_2)\}$.
   (y) $\{w_1\#w_2\#w_3 | w_1, w_2, w_3 \in \{0,1\}^* \wedge \mathtt{valor}_2(w_1) + \mathtt{valor}_2(w_2) = \mathtt{valor}_2(w_3)\}$.
   (z) $\{xy \in \{a,b\}^* \mid |x|_a = 2|y|_b\}$

2. Considerem el llenguatge $L_k = \{w \in (0+1)^* | \texttt{valor}_2(w) \leq k\}$. Quins dels següents llenguatges són regulars per a qualsevol k:

   (a) L_k.
   (b) $\bigcup_{k\geq 1} L_k$.
   (c) $\{w\#w | w \in L_k\}$.
   (d) $\{1w\#1w | 1w \in L_k\}$.
   (e) $\{1w\#1w | w \in L_k\}$.
   (f) $\{w\#w | w \in L_k \ \wedge \ |w| \leq \texttt{valor}_2(w)\}$.
   (g) $\{w\#w | 1w \in L_k\}$.
   (h) $\{w_1\#w_2 | w_1, w_2 \in L_k \wedge \texttt{valor}_2(w_1) = \texttt{valor}_2(w_2)\}$.
   (i) $\{w_1\#w_2 | \exists k : (w_1, w_2 \in L_k \ \wedge \ \texttt{valor}_2(w_1) = \texttt{valor}_2(w_2))\}$.

3. Quins dels següents llenguatges podem assegurar que són no regulars sabent que A i B són no regulars i que σ és un morfisme.

   (a) $\bar{A}$.
   (b) $A \cup B$.
   (c) $A \cap B$.
   (d) $A \cdot B$.
   (e) A^R.
   (f) A^*.
   (g) $S(A)$ (recordeu la definició de shiftar un llenguatge dels exercicis del primer tema).
   (h) $\sigma(A)$.
   (i) $\sigma^{-1}(A)$.

4. Determineu quin llenguatge genera cadascuna de les següents CFG's, i justifiqueu si aquest llenguatge és regular o no.

   (a)
$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & AB|CD \\ A & \rightarrow & 0A0|0 \\ B & \rightarrow & 1B1|\lambda \\ C & \rightarrow & 0C0|\lambda \\ D & \rightarrow & 1D1|\lambda \end{array}$$

   (b)
$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & aA|bB|\lambda \\ A & \rightarrow & Sa|Sb \\ B & \rightarrow & Sb \end{array}$$

   (c)
$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & AB \\ A & \rightarrow & 0A0|1 \\ B & \rightarrow & 1B1|0 \end{array}$$

(d)

$$S \rightarrow 0S0|0S1|\lambda$$

(e)

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow 0A0|0A1|\lambda \\ B &\rightarrow 0B|1B|\lambda \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A|B \\ A &\rightarrow 0S0|1S1|\lambda \\ B &\rightarrow 0S1|1S0|\lambda \end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A|B \\ A &\rightarrow 0A0|1A1|\lambda \\ B &\rightarrow 0B1|1B0|\lambda \end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSa|bSb|X \\ X &\rightarrow aXb|bXa|a|b|\lambda \end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned} S &\rightarrow WXW' \\ X &\rightarrow aX|bX|\lambda \\ W &\rightarrow aW|bW|\lambda \\ W' &\rightarrow W'a|W'b|\lambda \end{aligned}$$

Autómatas con pila y jerarquía de Chomsky

`[Vídeos del 23 al 26]`

1. Muestra un ejemplo de lenguaje inambiguo que no sea DCFL.
2. Muestra un ejemplo de DCFL que no sea regular.
3. Muestra que los lenguajes inambiguos y los DCFL no son cerrados por morfismo directo.
4. Muestra que los lenguajes inambiguos y los DCFL no son cerrados por intersección.
5. Muestra que los DCFL no son cerrados por reverso.
6. Muestra que los lenguajes inambiguos y los DCFL no son cerrados por concatenación.
7. Muestra que los lenguajes inambiguos y los DCFL no son cerrados por estrella.
8. Sigui A regular, B CFL, C DCFL i σ un morfisme. Quins dels següents llenguatges podem assegurar que són regulars, quins podem assegurar que són DCFL, i quins podem assegurar que són CFL? Raoneu les respostes, i doneu contraexemples quan sigui necessari.

   (a) $\sigma^{-1}(B) \cap A$.

(b) $\overline{\sigma^{-1}(C)}$.

(c) C^R.

(d) $S(C)$ (recordeu la definició de shiftar un llenguatge donada en els problemes del primer tema).

(e) $S(A)$.

(f) $(\overline{A \cap C} \cup B)$.

(g) $(\sigma(B) \cap B)C$.

(h) $(\overline{A} - \sigma(B) \cap \overline{C})$.

(i) $(\sigma^{-1}(\sigma(B)) \cap B)C$.

(j) $\overline{(\overline{\sigma(A)} \cap C)}\sigma(B \cap A)$.

(k) $\sigma(\sigma^{-1}(B) \cap A)\sigma^{-1}(C)$.

9. Propón un algoritmo de coste razonable para saber, dado un DFA A y una CFG G, si se cumple $\mathcal{L}(G) \subseteq \mathcal{L}(A)$.

10. Propón un algoritmo de coste razonable para saber, dado un DFA A y una CFG G, si G genera infinitas palabras no aceptadas por A.

11. Propón un algoritmo de coste razonable para saber, dado un DFA A y una CFG G, si G genera alguna palabra de tamaño par no aceptada por A.

1. Demostreu la no-regularitat dels següents llenguatges:

(a) $\{a^n b^n | n \in \dot{2}\}$.
(b) $\{a^n b^n | n \in \dot{3}\}$.
(c) $\{a^n b^m | n \neq m\}$.
(d) $\{a^{2n} b^n | n \in \dot{2}\}$.
(e) $\{w \in \{a, b\}^* | \ |w|_a = |w|_b\}$.
(f) $\{a^n b^m | n \leq m\}$.
(g) $\{a^n b^m | n \geq m\}$.
(h) $\{c^m a^n b^n | (n, m \geq 0)\}$.
(i) $\{a, b\}^* \cup \{c^m a^n b^n | (m \geq 1) \wedge (n \geq 0)\}$.
(j) $\{w \in \{a, b\}^* | w = w^R\}$.
(k) $\{ww \in \{a, b\}^*\}$
(l) $\{a^{n^2} | n \geq 0\}$.
(m) $\{a^{2^n} | n \geq 0\}$.
(n) $\{a^n | n$ apareix a la successió de Fibonacci$\}$.
(o) $\{a^n | n$ és primer$\}$.
(p) $\{a^n | n$ és parell o primer$\}$.
(q) $\{abab^2ab^3 \dots ab^n | n \geq 0\}$.
(r) $\{w_1 \# w_2 | w_1, w_2 \in \{0, 1\}^* \wedge (|w_1| < |w_2| \vee |w_1| \in \dot{2})\}$.
(s) $\{u \# v | u, v \in \{a, b\}^* \wedge v$ és submot de $u\}$.
(t) $\{w \in (a + b + c)^* \mid |w|_a \geq |w|_b \vee |w|_b \geq |w|_c\}$.
(u) Qualsevol subconjunt infinit del llenguatge $\{a^n b^n\}$.
(v) $\{w \in \{a, b\}^* \mid (|w| \in \dot{3} \Rightarrow |w|_a = |w|_b)\}$.
(w) $\{w_1 \# w_2 | w_1, w_2 \in \{0, 1\}^* \wedge \texttt{valor}_2(w_1) = \texttt{valor}_2(w_2)\}$.
(x) $\{w_1 \# w_2 | w_1, w_2 \in \{0, 1\}^* \wedge \texttt{valor}_2(w_1) = 1 + \texttt{valor}_2(w_2)\}$.
(y) $\{w_1 \# w_2 \# w_3 | w_1, w_2, w_3 \in \{0, 1\}^* \wedge \texttt{valor}_2(w_1) + \texttt{valor}_2(w_2) = \texttt{valor}_2(w_3)\}$.
(z) $\{xy \in \{a, b\}^* \mid |x|_a = 2|y|_b\}$

Com operaciones cerradas en los lenguajes regulares.

a) $L = \{a^m b^m | m \in \dot{2}\}$ Supomemos que $L \in REG$ (por red. al absurdo)

$L \in REG \Rightarrow \bar{L} \in REG \qquad \bar{L} = \{a^m b^m | m \notin \dot{2}\}$

$$\left.\begin{array}{l} (L \in REG \wedge \bar{L} \in REG) \Rightarrow (L \cup \bar{L}) \in REG \\ L \cup \bar{L} = \{a^m b^m | m \in \dot{2}\} \cup \{a^m b^m | m \notin \dot{2}\} = \{a^m b^m | m \geq 0\} \end{array}\right\} \Rightarrow \{a^m b^m | m \geq 0\} \in REG$$

contradicción!!

c) $L = \{a^n b^m | n \neq m\}$ → Por Red. al Absurdo supomemos que $L \in REG$. $\boxed{L \in REG \Rightarrow \bar{L} \in REG}$

$\bar{L} = \overline{\{a^n b^m | n \neq m\}} = \{a^n b^m | n = m\} = \{a^n b^n\} \in REG$ $\boxed{L \notin REG}$

contradiccióm!!

d) $L = \{a^{2m} b^m\}$ → Por Red. al Absurdo supomemos que $L \in REG$. $(L_1 \in REG \wedge L_2 \in REG) \Rightarrow L_1 \cdot L_2 \in REG$
$\equiv$
$L \in REG$

$$\left.\begin{array}{l} L = \{a^{2m} b^m\} \in REG \\ B = \{b^m\} \in REG \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} L \cdot B \in REG \\ L \cdot B = \{a^{2m} b^m\} \cdot \{b^m\} = \{a^{2m} \cdot b^{2m}\} \overset{(n = 2m)}{=} \{a^n b^n\} \in REG \end{array}$$

contradicción!!

j) $\{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R\}$ $\qquad w = w_1 w_2 = w_1 \cdot w_1^R$

$|w_1| = N \wedge w = w_1 \cdot w_1^R \Rightarrow |w| = 2N \geq N$

sea $w = xyz$ con $|xy| \leq N$ y $|y| \geq 1$ tenemos
α: si $|xy| = N \qquad z = (xy)^R$
β: si $|xy| < N \qquad z = t \cdot (xy)^R$ (t es un palíndrom)
$|t| = 2(N - |xy|)$

$\forall i \ xy^i z$ no es del llenguatge:

α: (i≠1) $\quad xy^i \neq (xy)^R$

β: $\quad xy^i z \neq xy^i \cdot t \cdot (xy)^R$
$|xy^i| \neq |(xy)^R|$

Pumping lemma:

L es un llenguatge. $L \notin REG$ si:

$\forall N \geq 1 \; (\exists w \in L \;\; |w| \geq N) \wedge (\forall x,y,z \; (w = xyz \;\wedge\; |xy| \leq N \;\wedge\; |y| \geq 1) \Rightarrow (\exists i \geq 0 \;\; xy^iz \notin L))$

1a) $\{a^n b^n \mid n \in \dot{Z}\} \notin REG$

factoritzem $w \in L$ en $w = xyz$, $w = a^{2N} b^{2N}$, $N \geq 1$

$|w| = 4N \geq N$

$|xy| \leq N$

$|y| \geq N$

$x = a^j$

$y = a^k$

$z = a^{2N-j-k} \cdot b^{2N}$

$i = 0 \Rightarrow w' = xy^0z = xz = a^j a^{2N-j-k} \cdot b^{2N} = a^{2N-k} \cdot b^{2N} \Rightarrow w' \notin L$

1d) $\{a^{2n} b^n \mid n \in \dot{Z}\}$

$N \geq 1$

$w = a^{4N} b^{2N}$

$w = xyz$

$|xy| \leq N$

$|y| \leq 1$

$|x| = j$

$|y| = k$

$j + k \leq N$

$\exists_{i \neq 1} \;\; xy^iz = a^j (a^k)^i a^{4 \cdot N - j - k} \cdot b^{2N} = a^{4N - k(i-1)} b^{2N}$

si b^{2N} $\Downarrow$ a^{4N}

$\underbrace{4N - k(i-1) \neq 4 \cdot N}$ $\Downarrow$ $xy^iz \notin L$

1j) $\{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R\}$ tomas $w = \underbrace{a^N}_{xy} \underbrace{b a^N}_{z}$

bombear as, provocara que no sea un palíndromo

1u) $L \subseteq \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

L infinit $\Rightarrow L \notin REG$

perque L es infinit

$\forall N \; \exists w \in L \;\; |w| \geq 2N \geq N$

$w = a^M b^M$ on $M \geq N$ entonces $\forall x,y,z \;\; w = xyz \wedge |xy| \leq N \wedge |y| \geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow w' = xy^iz = a^j \cdot (a^k)^i \cdot a^{M-j-k} \cdot b^M \Rightarrow a$

1z) $\{xy \in \{ab\}^* \mid |x|_a = 2|y|_b\}$

$w = a^{2N} \cdot b^N$

$|xy| \leq N$

$|i| \geq 1$

$x = a^j$

$y = a^k$

$z = b^{N-j-k} \cdot a^{2N+1}$

2a) $L_K = \{ w \in (0+1)^* \mid value_2(w) \leq K \}$ numero en binario menor que K

$$L_K = \underbrace{\{0\}^*}_{REG} \cup \left(\underbrace{\{0\}^*}_{REG} \cdot \{ w \in 1(0+1)^* \mid \underbrace{value_2(w) \leq K}_{\text{Llenguatge Finit} \Rightarrow REG} \} \right)$$

$\boxed{\text{Unions i concatenacions son operadors tancades en els Regulars, per tant } L_K \in REG}$

2b)

$$\bigcup_{K \geq 1} L_K = \{ w \in (0+1)^* \mid \exists_K \ w \in L_K \} = (0+1)^*$$

2c) $\{ w \# w \mid w \in L_K \}$ $\left[L_K = \{ w \in (0+1)^* \mid value_2(w) \leq K \} \right]$

$w = 0^N 1$

$a = w \# w = 0^N 1 \# 0^N 1$

$a = xyz$ $|x| = j$

$|xy| \leq N$ $|y| = K$

$|y| \geq 1$

$$w' = xy^i z = 0^j \cdot (0^K)^i \cdot 0^{N-j-K} \cdot 1 \# 0^N \cdot 1 =$$

$$= 0^j \cdot 0^{Ki} \cdot 0^{N-j-K} \cdot 1 \# 0^N 1 \underset{(i=0)}{=} 0^{N-K} 1 \# 0^N 1 \notin L_K$$

2d) $\{ 1w \# 1w \mid 1w \in L_K \}$

Añadir 1 delante $\rightarrow$ finito

$|w|$ = finito porque $\in L_K$ (maximo K)

Todo es finito, se puede hacer un automata para cada palabra posible (finitas) y por lo tanto hay un automata ($\cup$ de todos) que lo reconoce.

2e) $\{1w\#1w \mid w \in L_k\}$

$w = 10^{N-1} \# 10^{N-1}$

$|x| = j$

$|y| = k$

$z = 0^{N-j-k} \# 10^N$

$|xy| \leq N$

$w' = xy^iz \underset{(i=0)}{=} xz$

$x0^{N-k} \# 10^N$

2g) $\{w\#w \mid \underbrace{1w}_{} \in L_k\}$

mida finita $\Rightarrow |w| =$ numero finit $\Rightarrow |w\#w|$ es finit $\Rightarrow$ es regular

3c) $L_1, L_2 \notin REG \Rightarrow L_1 \cap L_2 \notin REG$

$L_1 = \{a^m b^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ si $0 \in \mathbb{N} \Rightarrow L_1 \cap L_2 = \{\lambda\} \in REG$

$L_2 = \{a^m b^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ si $0 \notin \mathbb{N} \Rightarrow L_1 \cap L_2 = \{\emptyset\} \in REG$

3d) $L_1 = \{a^m b^m \mid m \in \mathbb{N}\} + \Lambda$

$L_2 = \{a^m b^m \mid m \in \mathbb{N}\} + \Lambda$

Per red. abs:

supos L_2 REG: $\underset{REG}{L_2} \cap \underset{REG}{\overline{\{\lambda\}}} = \underset{REG}{\overline{L_1}}$ pero L_1 no es regular $\Rightarrow$ contradicció

$= \{a,b\}^*$

4. Determineu quin llenguatge genera cadascuna de les següents CFG's, i justifiqueu si aquest llenguatge és regular o no.

(a)

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & AB|CD \\ A & \rightarrow & 0A0|0 \\ B & \rightarrow & 1B1|\lambda \\ C & \rightarrow & 0C0|\lambda \\ D & \rightarrow & 1D1|\lambda \end{array}$$

(B==D)

$\equiv$

S → AB|CB

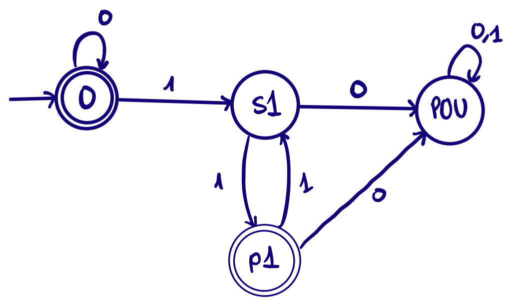
A → 0A0|0 → número impar de 0

C → 0C0|λ → número par de 0

B → 1B1|λ → número par de 1

Unión = cualquier # de 0

$L = \{0^K \cdot 1^t \mid \exists K,t \; ((K>0 \wedge K \notin \dot{2}) \vee (K \geq 0 \wedge K \in \dot{2})) \wedge (t \geq 0 \wedge t \in \dot{2})\} = \{0^K \cdot 1^t \mid \exists K,t \; K \geq 0, t \geq 0 \wedge t \in \dot{2}\}$



Si un DFA puede generar un lenguaje, entonces ese lenguaje es regular.

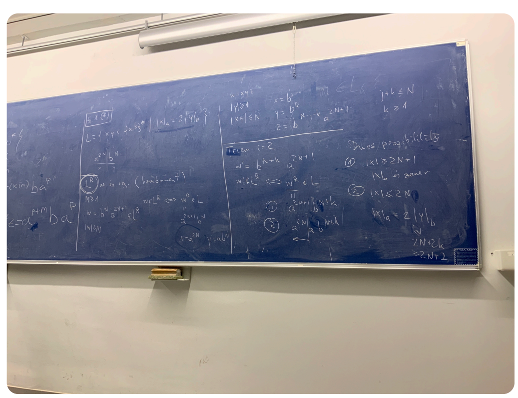
$L = \{0^K \cdot 1^t \mid K \geq 0 \wedge t \geq 0 \wedge t \in \dot{2}\}$

PROPOSICIÓ (LEMA DE BOMBAMENT). *En un llenguatge regular L, tot mot w de longitud no inferior a un determinat valor N, propi de L, admet una factorització $w = xyz$ que satisfà*

1. $|xy| \leqslant N$
2. $|y| \geqslant 1$
3. $\forall i \geqslant 0 \;\; xy^iz \in L$

Factoritzem $w \in L$ en $w = xyz$, $w = 0^N \cdot 1^{2N}$

$\lvert w \rvert = 3N$	$x = 0^j$
$\lvert xy \rvert \leqslant N$	$y = 0^K$
$\lvert y \rvert \leqslant 1$	$z = 0^{N-j-K} \cdot 1^{2N}$



1Z

1m) $L = \{a^m \mid m$ apareix en Fib. succ$\}$

lema $\equiv \forall K \quad K \leq F_K$

$\uparrow$ termino Kesimo de la suesión

Donat $N \geq 1$, triem $w = a^{F_{N+3}}$

$|w| \geq F_{N+1} \geq N$

Considerem $w = xyz$ on

$|xy| \leq N$, $|y| \geq 1$

$$\begin{cases} x = a^j \\ y = a^k \\ z = a^{F_{N+3} - j - k} \end{cases}$$

Triem $i = 2$

$w' = xy^2z = a^{F_{N+3} + k}$

$$F_{N+3} \underset{k \geq 1}{<} F_{N+3} + k \underset{k \leq m}{\leq} F_{N+3} + N \underset{\text{lema}}{\leq} F_{N+3} + F_{N+1} \underset{F_{N+2} > F_{N+1}}{<} F_{N+3} + F_{N+2} = F_{N+4}$$

$$|||$$

$$F_{N+3} < \underbrace{F_{N+3} + k}_{} < F_{N+4}$$

Resultado está entre dos terminos de la sucesion de Fibonacci.

Push-Down Automatons

4. Muestra que los lenguajes inambiguos y los DCFL no son cerrados por intersección.

4) DCFL son lenguajes reconocidos por un DPDA.

DCFL son inambiguos

$L_1 = \{a^n b^m c^m \mid m \geq 0 \wedge m \geq 0\} \in DCFL$ contar as y restar bs

$L_2 = \{a^n b^m c^m \mid m \geq 0 \wedge m \geq 0\} \in DCFL$ contar bs y restar cs

$L_1 \cap L_2 = \{a^n b^m c^n \mid m \geq 0\} \notin DCFL$ porque no hay un PDA que lo reconozca

Si pones 2 simbolos con cada a, aceptas mates $\{a^m b^i c^j \mid i+j = 2m\}$

No se puede diferenciar el numero de bs del numero de cs

$$\underbrace{|w|_a = |w|_b}_{\text{condicion } L_1} \overbrace{ = |w|_c}^{\text{condicion } L_2}$$

L_1	L_2
$S \to XC \mid \lambda$	$S \to AX \mid \lambda$
$X \to aXb \mid \lambda$	$A \to aA \mid \lambda$
$C \to cC \mid \lambda$	$X \to bXc \mid \lambda$

1. Muestra un ejemplo de lenguaje inambiguo que no sea DCFL.

$L = \{ w \mid \exists_x \; w = xx^R \}$ $\Sigma = \{a, b\}$

$S \to aSa \mid bSb \mid$

$a^n b^n c^n$