

Teoria de la Computació

Tema 7: Indecidibilitat, no-semi-decidibilitat, no-computabilitat.

Teoria:

- Vídeos 32, 33 i 34.

Exercicis per a l'avaluació contínua:

1. Clasifica como decidibles, no decidibles pero semi-decidibles, o no semi-decidibles, los siguientes conjuntos.
 - (a) $\{p \mid \mathcal{L}_p \text{ es finito}\}.$
 - (b) $\{p \mid \mathcal{L}_p \text{ es infinito}\}.$
 - (c) $\{p \mid M_p(p) = p\}.$
 - (d) $\{p \mid \exists y : M_y(p) = p\}.$ DECIDIBLE
 - (e) $\{p \mid |\text{Dom}(\varphi_p)| \geq 10\}.$
 - (f) $\{p \mid |\text{Dom}(\varphi_p)| \geq 0\}.$
 - (g) $\{p \mid |\text{Im}(\varphi_p)| \geq 10\}.$
 - (h) $\{p \mid |\text{Im}(\varphi_p)| \geq 0\}.$
 - (i) $\{p \mid |\text{Im}(\varphi_p)| < |\text{Dom}(\varphi_p)| < \infty\}.$
 - (j) $\{p \mid |\text{Dom}(\varphi_p)| < |\text{Im}(\varphi_p)| < \infty\}.$
 - (k) $\{p \mid \varphi_p \text{ es inyectiva y total}\}.$
 - (l) $\{p \mid \varphi_p \text{ es exhaustiva y total}\}.$
 - (m) $\{p \mid \varphi_p \text{ es creciente y total}\}.$
 - (n) $\{p \mid \varphi_p \text{ es total y estrictamente decreciente}\}.$
 - (o) $\{p \mid \varphi_p \text{ es inyectiva parcial}\}.$
 - (p) $\{p \mid \varphi_p \text{ es exhaustiva parcial}\}.$
 - (q) $\{p \mid \varphi_p \text{ es creciente parcial}\}.$
 - (r) $\{p \mid \varphi_p \text{ es estrictamente decreciente parcial}\}.$
2. Clasifica como decidibles, no decidibles pero semi-decidibles, o no semi-decidibles, los siguientes conjuntos.
 - (a) $\{\langle p, q \rangle \mid \forall z : ((M_p(z) \downarrow \wedge M_q(z) \uparrow) \vee (M_p(z) \uparrow \wedge M_q(z) \downarrow))\}.$
 - (b) $\{\langle p, z \rangle \mid \exists y : M_p(y) = z\}.$
 - (c) $\{\langle p, z \rangle \mid \exists y : M_p(y) \neq z\}.$
 - (d) $\{p \mid \mathcal{L}_p \text{ es incontextual}\}.$
 - (e) $\{p \mid \mathcal{L}_p \text{ no es incontextual}\}.$
 - (f) $\{p \mid \text{Dom}(\varphi_p) \in \text{Dec}\}.$

- (g) $\{p | \text{Dom}(\varphi_p) \notin \text{Dec}\}.$
- (h) $\{p | \text{Dom}(\varphi_p) \notin \text{semi-DEC}\}.$
- (i) $\{p | \text{Im}(\varphi_p) \in \text{Dec}\}.$
- (j) $\{p | \text{Im}(\varphi_p) \notin \text{Dec}\}.$
- (k) $\{p | \text{Im}(\varphi_p) \in \text{semi-DEC}\}.$
- (l) $\{p | \text{Im}(\varphi_p) \notin \text{semi-DEC}\}.$
- (m) $\{p | p \leq 100 \wedge \text{Dom}(\varphi_p) \in \text{Dec}\}.$
- (n) $\{p | p \geq 100 \wedge \text{Dom}(\varphi_p) \in \text{semi-DEC}\}.$
- (o) $\{p | \forall y > p : \varphi_y \text{ es biyectiva}\}.$
- (p) $\{p | \forall y < p : \varphi_y \text{ es biyectiva}\}.$
- (q) $\{p | \exists y > p : \varphi_y \text{ es biyectiva}\}.$
- (r) $\{p | \exists y < p : \varphi_y \text{ es biyectiva}\}.$
- (s) $\{p | \exists y : \text{Dom}(\varphi_p) \subseteq \text{Dom}(\varphi_y)\}.$
- (t) $\{p | \exists y : \text{Dom}(\varphi_p) \supseteq \text{Dom}(\varphi_y)\}.$
- (u) $\{p | \text{Dom}(\varphi_p) \subseteq \dot{\mathbb{N}}\}.$
- (v) $\{p | \text{Dom}(\varphi_p) \supseteq \dot{\mathbb{N}}\}.$

3. Clasifica como decidibles, no decidibles pero semi-decidibles, o no semi-decidibles, los siguientes conjuntos.

(a) $K \times K.$

(b) $\bar{K} \times K.$

(c) $\bar{K} \times \bar{K}.$

(d) $\overline{K \times K}.$

DEC i semi-DEC cerrados por \cap i \cup

DEC cerrados por complementario

$(x, y) \rightarrow \text{not}(x \notin K \wedge y \in K) \rightarrow x \in K \vee y \notin K$

$(x \in K) \rightarrow \text{semi-DEC}$

$y \notin K \Rightarrow y \in \bar{K} \rightarrow \text{no semi-DEC}$

\bar{K}

input y: {

if (not mxxsteps == inputsteps) accept;

}

input y: { sum mxx }

input y:

$$\begin{aligned}
\text{(b)} \quad f(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \forall n : M_n(x) \downarrow \\ \uparrow & \text{si } \nexists n : M_n(x) \downarrow \end{cases} \\
\text{(c)} \quad f(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \exists n : M_x(n) \downarrow \\ \uparrow & \text{si } \nexists n : M_x(n) \downarrow \end{cases} \\
\text{(d)} \quad f(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \forall n : M_x(n) \downarrow \\ \uparrow & \text{si } \nexists n : M_x(n) \downarrow \end{cases}
\end{aligned}$$

9. La función característica de un conjunto C se define como:

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in C \\ 0 & \text{si } x \notin C \end{cases}$$

Demuestra que C es decidable si y solo si su función característica χ_C es computable.

10. Justifica si los siguientes conjuntos de parejas son funciones, y si son funciones computables.

- (a) φ_3 .
- (b) $\{\langle x, y \rangle \mid M_x(x) = y\}$.
- (c) $\{\langle x, y \rangle \mid M_x(x) \leq y\}$.
- (d) $\{\langle x, y \rangle \mid M_x(x) \geq y\}$.
- (e) $\{\langle x, y \rangle \mid M_x(x) = M_y(y)\}$.
- (f) $\{\langle x, y \rangle \mid M_x(x) \text{ para en } y \text{ pasos o más}\}$.
- (g) $\{\langle x, y \rangle \mid M_x(x) \text{ para en exactamente } y \text{ pasos}\}$.
- (h) $\{\langle x, 1 \rangle \mid M_x(x) \downarrow\} \cup \{\langle x, 0 \rangle \mid M_x(x) \uparrow\}$.
- (i) $\{\langle x, 1 \rangle \mid M_x(x) \downarrow\}$.
- (j) $\{\langle x, 0 \rangle \mid M_x(x) \uparrow\}$.
- (k) $\{\langle x, y \rangle \mid y = |\{z \mid M_x(z) \downarrow\}|\}$.