



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ -
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Ρομποτική II: Ευφυή Ρομποτικά Συστήματα

8ο εξάμηνο, Ακαδημαϊκή περίοδος 2024-2025

Εξαμηνιαία Εργασία 2 – Μέρος Β

**Εκτίμηση θέσης και προσανατολισμού κινούμενου ρομπότ
σε γνωστό χάρτη
(Mobile robots: Localization)**

Φώτιος Κούτσικος : 03121082

Άγγελος Ευστρατίου : 03121113

1. Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία υλοποιείται αλγόριθμος τοπικοποίησης (localization) ενός ρομπότ διαφορικής οδήγησης, μέσω συνδυαστικής επεξεργασίας των δεδομένων από αισθητήρες sonar και IMU. Το ρομπότ έχει μοντελοποιηθεί και προσομοιωθεί στο περιβάλλον Gazebo, ενώ ο έλεγχος και η συλλογή μετρήσεων πραγματοποιούνται με χρήση του Robot Operating System (ROS).

Ο στόχος της εργασίας είναι το ρομπότ να εκτιμά με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια τη θέση (x,y) του και τον προσανατολισμό θ του μέσα σε ένα γνωστό περιβάλλον, κατά τη διάρκεια τυχαίας κίνησης. Για τον σκοπό αυτό, χρησιμοποιείται Επεκταμένο Φίλτρο Kalman (EKF), το οποίο επιτρέπει τη διόρθωση της κατάστασης και το συνδυασμό των δεδομένων από τους αισθητήρες (sensor fusion), σε πραγματικό χρόνο, ακόμα και σε μη γραμμικά μοντέλα συστήματος.

2. Θεωρητική Ανάλυση

2.1. Περιγραφή Συστήματος και Ρομποτικής Διάταξης

Η ρομποτική διάταξη που χρησιμοποιείται αποτελείται από ένα κινητό ρομπότ διαφορικής οδήγησης με δύο κινητήριους τροχούς διαμέτρου 20 cm. Το ρομπότ διαθέτει τοπικό σύστημα συντεταγμένων συμμετρικό ως προς το επίπεδο xy , ενώ οι βασικές γεωμετρικές του διαστάσεις δίνονται ως:

- $L_1 = 0.018$ m (μετατόπιση διαγώνιων αισθητήρων)
- $L_2 = 0.05$ m («πάχος» τροχού)
- $L_3 = 0.1$ m (απόσταση αισθητήρων από το κέντρο)
- $L_4 = 0.2$ m (διάμετρος τροχών και πλάτος ρομπότ)

Το σύστημα διαθέτει πέντε αισθητήρες υπερήχων (sonar) τοποθετημένους στις θέσεις: Αριστερά (L), Μπροστά Αριστερά (FL), Μπροστά (F), Μπροστά Δεξιά (FR), και Δεξιά (R) καθώς και ένα αισθητήρα IMU (Inertial Measurement Unit) 9 βαθμών ελευθερίας.

Το ρομπότ περιβάλλεται από τοίχους – εμπόδια που δημιουργούν ένα τετράγωνο χώρο γνωστών διαστάσεων (4m x 4m) μέσα στον οποίο θα εκτελέσει τυχαία κίνηση περιπλάνησης διάρκειας τριών (3) λεπτών.

Οι αισθητήρες υπερήχων (sonar) μετρούν την απόσταση από τα εμπόδια με μέγιστη δυνατότητα μέτρησης τα 2m, και θόρυβο που ακολουθεί **κανονική κατανομή** με τυπική απόκλιση **0.01m**. Οι αισθητήρες IMU 9 βαθμών ελευθερίας, μετρούν στροφικές ταχύτητες, γραμμικές επιταχύνσεις και την

περιστροφή γύρω από κάθε άξονα, με θόρυβο μέτρησης που ακολουθεί **κανονική κατανομή** με τυπική απόκλιση **0.002 m/s², 0.002 rad/s, και 0.002rad**, αντιστοίχως.

2.2. Μοντέλο Κατάστασης Ρομποτικού Συστήματος

Για την εκτίμηση της πορείας του ρομπότ σε πραγματικό χρόνο, απαιτείται η διατύπωση ενός μοντέλου κατάστασης που περιγράφει πως εξελίσσεται η θέση και ο προσανατολισμός του συστήματος σε διακριτά χρονικά βήματα. Το ρομπότ που εξετάζουμε κινείται σε επίπεδο χώρο και διαθέτει αισθητήρα IMU, από τον οποίο λαμβάνονται μετρήσεις γραμμικής επιτάχυνσης και γωνιακής ταχύτητας.

Το διάνυσμα κατάστασης ορίζεται ως:

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ \theta_k \\ x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{bmatrix}$$

Όπου:

- x_k, y_k : η θέση του ρομπότ τη χρονική στιγμή k
- θ_k : ο προσανατολισμός του ρομπότ
- x_{k-1}, y_{k-1} : η θέση του ρομπότ τη χρονική στιγμή $k-1$ (προηγούμενη θέση ρομπότ)

Η επιλογή να συμπεριληφθούν οι προηγούμενες θέσεις (x_{k-1}, y_{k-1}) επιτρέπει τον υπολογισμό της ταχύτητας με διαφορικό τρόπο.

Το διάνυσμα εισόδου που παρέχεται από τις μετρήσεις του IMU αισθητήρα και περιλαμβάνει:

$$\mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} a_{x,k} \\ a_{y,k} \\ \omega_k \end{bmatrix}$$

Όπου:

- $a_{x,k}, a_{y,k}$: οι γραμμικές επιταχύνσεις στο **τοπικό** σύστημα.
- ω_k : η γωνιακή ταχύτητα

Οι επιταχύνσεις που παρέχονται από τον αισθητήρα IMU μετρούνται στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων (local frame) και πρέπει να μετατραπούν σε παγκόσμιο σύστημα μέσω του προσανατολισμού θ_k , πριν χρησιμοποιηθούν στο μοντέλο πρόβλεψης.

Συγκεκριμένα:

$$\begin{bmatrix} a_{x,k}^w \\ a_{y,k}^w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{x,k} \\ a_{y,k} \end{bmatrix}$$

Επομένως, η δυναμική του συστήματος, για χρονικό βήμα $\Delta t = 1$, θα περιγράφεται από τη συγκεκριμένη εξίσωση κατάστασης:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ \theta_{k+1} \\ x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k + \left[\frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta t} + (a_{x,k}^w + \delta a_{x,k}) \cdot \Delta t \right] \cdot \Delta t \\ y_k + \left[\frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta t} + (a_{y,k}^w + \delta a_{y,k}) \cdot \Delta t \right] \cdot \Delta t \\ \theta_k + (\omega_k + \delta \omega_k) \cdot \Delta t \\ x_k \\ y_k \end{bmatrix}$$

Αυτό ισοδύναμα μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} x_k + \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta t} + a_{x,k}^w \cdot \Delta t \right) \cdot \Delta t \\ y_k + \left(\frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta t} + a_{y,k}^w \cdot \Delta t \right) \cdot \Delta t \\ \theta_k + \omega_k \cdot \Delta t \\ x_k \\ y_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta a_{x,k} \cdot \Delta t^2 \\ \delta a_{y,k} \cdot \Delta t^2 \\ \delta \omega_k \cdot \Delta t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k) + \mathbf{w}_k$$

Όπου \mathbf{w}_k είναι το διάνυσμα θορύβου και ισούται με:

$$\mathbf{w}_k = \begin{bmatrix} \delta a_{x,k} \cdot \Delta t^2 \\ \delta a_{y,k} \cdot \Delta t^2 \\ \delta \omega_k \cdot \Delta t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Η μήτρα συνδιακύμανσης (covariance) του διανύσματος θορύβου \mathbf{w}_k στο μοντέλο κίνησης του οχήματος, ισχύει ότι:

$$\mathbf{C}_w = E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] = \begin{bmatrix} \Delta t^2 \sigma_a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta t^2 \sigma_a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta t^2 \sigma_\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Όπου:

- $\sigma_\alpha^2 = (0.002)^2 = 4 \cdot 10^{-6}$: η διακύμανση του Γκαουσιανού θορύβου στις μετρήσεις επιτάχυνσης του IMU αισθητήρα
- $\sigma_\omega^2 = (0.002)^2 = 4 \cdot 10^{-6}$: η διακύμανση του Γκαουσιανού θορύβου στις μετρήσεις γωνιακής ταχύτητας του IMU αισθητήρα

2.3. Μοντέλο Μετρήσεων Ρομποτικού Συστήματος

Στο ρομποτικό σύστημα που εξετάζεται, οι μετρήσεις προέρχονται από τον αισθητήρα IMU και τους αισθητήρες υπερήχων, οι οποίοι είναι τοποθετημένοι σε πέντε προκαθορισμένες γωνίες γύρω από το σώμα του ρομπότ.

Το συνολικό διάνυσμα μετρήσεων ορίζεται ως:

$$\mathbf{z}_k = \begin{bmatrix} \theta_k^{IMU} \\ r_{L,k} \\ r_{FL,k} \\ r_{F,k} \\ r_{FR,k} \\ r_{R,k} \end{bmatrix}$$

Όπου:

- θ_k^{IMU} : μέτρηση γωνίας προσανατολισμού από τον αισθητήρα IMU
- $r_{L,k}, r_{FL,k}, r_{F,k}, r_{FR,k}, r_{R,k}$: αποστάσεις που μετρούν οι αισθητήρες sonar προς τις κατευθύνσεις Left, Front-Left, Front, Front-Right και Right αντίστοιχα.

Το διάνυσμα των μετρήσεων μπορεί να εκφραστεί στη μορφή:

$$\mathbf{z}_k = \begin{bmatrix} \theta_k \\ \hat{r}_{L,k} \\ \hat{r}_{FL,k} \\ \hat{r}_{F,k} \\ \hat{r}_{FR,k} \\ \hat{r}_{R,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta\theta_k \\ \delta r_{L,k} \\ \delta r_{FL,k} \\ \delta r_{F,k} \\ \delta r_{FR,k} \\ \delta r_{R,k} \end{bmatrix}$$

Και ισοδύναμα:

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k$$

Όπου:

- Τα $\hat{r}_{i,k}$ με $i \in \{L, FL, F, FR, R\}$ είναι η προβλεπόμενη απόσταση του i -οστού αισθητήρα sonar με βάση την εκτιμώμενη κατάσταση του ρομπότ $\mathbf{x}_k = [x_k \ y_k \ \theta_k \ x_{k-1} \ y_{k-1}]^T$ και υπολογίζονται γεωμετρικά ως:

$$\hat{r}_{i,k} = \min\{\text{dist}(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \theta_k + \varphi_i), r_{\max}\}$$

Με $r_{\max} = 2 \text{ m}$, η μέγιστη δυνατότητα μέτρησης υπερήχων και προκαθορισμένες γωνίες $\varphi_i = 0^\circ, \pm 45^\circ, \pm 90^\circ$

- $\delta\theta_k, \delta r_{i,k}$: στοχαστικά σφάλματα μετρήσεων

Η μήτρα συνδιακύμανσης του θορύβου μετρήσεων \mathbf{v}_k είναι η εξής:

$$\mathbf{C}_v = E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T] = \begin{bmatrix} \sigma_\theta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_r^2 \end{bmatrix}$$

Όπου:

- $\sigma_\theta^2 = (0.002)^2 = 4 \cdot 10^{-6}$: η διακύμανση του Γκαουσιανού θορύβου στις μετρήσεις προσανατολισμού του IMU αισθητήρα
- $\sigma_r^2 = (0.01)^2 = 10^{-4}$: η διακύμανση του Γκαουσιανού θορύβου στις μετρήσεις των αισθητήρων υπερήχων

2.4. Επεκταμένο Φίλτρο Kalman (EKF)

Το Επεκταμένο Φίλτρο Kalman (Extended Kalman Filter – EKF) χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της κατάστασης μη γραμμικών συστημάτων. Στο παρόν ρομποτικό σύστημα, η δυναμική του μοντέλου και η συνάρτηση μέτρησης $h(\mathbf{x}_k)$ είναι μη γραμμικές, και συνεπώς απαιτείται γραμμικοποίηση τους σε κάθε χρονικό βήμα γύρω από την τρέχουσα εκτίμηση, προκειμένου να εφαρμοστούν οι εξισώσεις διόρθωσης.

Βήμα Πρόβλεψης (Prediction)

Η πρόβλεψη της επόμενης κατάστασης $k+1$ βασίζεται στο μοντέλο κίνησης:

$$\mathbf{x}_{k+1|k} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k) + \mathbf{w}_k$$

Και η μήτρα συνδιακύμανσης του θορύβου πρόβλεψης είναι:

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k^T + \mathbf{C}_w$$

Όπου

- $\mathbf{A}_k = \nabla f|_{x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k}$: η γραμμικοποίηση του μητρώου μετάβασης
- \mathbf{P}_k : η μήτρα συνδιακύμανσης του θορύβου βέλτιστης εκτίμησης κατάστασης την τρέχουσα χρονική στιγμή k

Βήμα Ανανέωσης (Correction)

Κατά την παραλαβή νέας μέτρησης \mathbf{z}_{k+1} , γίνεται πρόβλεψη της αναμενόμενης μέτρησης από την εκτιμώμενη κατάσταση:

$$\hat{\mathbf{z}}_{k+1} = h(\mathbf{x}_{k+1|k})$$

Και από αυτό προκύπτει το υπόλοιπο (innovation):

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1}$$

Δεδομένου ότι η συνάρτηση μέτρησης $h(\mathbf{x})$ είναι μη γραμμική λόγω των μετρήσεων sonar, για να εφαρμοστεί το EKF, η h γραμμικοποιείται γύρω από την προβλεπόμενη κατάσταση $\mathbf{x}_{k+1|k}$ με υπολογισμό:

$$\mathbf{H}_{k+1} = \nabla h|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_{k+1|k}} = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_{k+1|k}}$$

Η μήτρα \mathbf{H}_{k+1} περιέχει τις μερικές παραγώγους κάθε προβλεπόμενης κατάστασης ως προς τις μεταβλητές κατάστασης.

Ο συνδυασμός των δύο βημάτων πρόβλεψης και διόρθωσης του EKF, επιτρέπει στο ρομπότ να ενσωματώνει δυναμικά τη μοντελοποιημένη κίνησή του με πραγματικά δεδομένα αισθητήρων, οδηγώντας σε πιο ακριβή εκτίμηση της θέσης και του προσανατολισμού του σε κάθε χρονική στιγμή.

Υπολογισμός Κέρδους Kalman

Το κέρδος Kalman υπολογίζεται ως:

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{H}_{k+1}^T (\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{C}_v)^{-1}$$

Και είναι το μητρώο βέλτιστων κερδών ανάδρασης.

Ενημέρωση Κατάστασης και Συνδιακύμανσης

Η εκτιμώμενη κατάσταση και συνδιακύμανση ενημερώνονται ως εξής:

$$\mathbf{x}_{k+1|k+1} = \mathbf{x}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{y}_{k+1}$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{H}_{k+1})\mathbf{P}_{k+1|k}$$

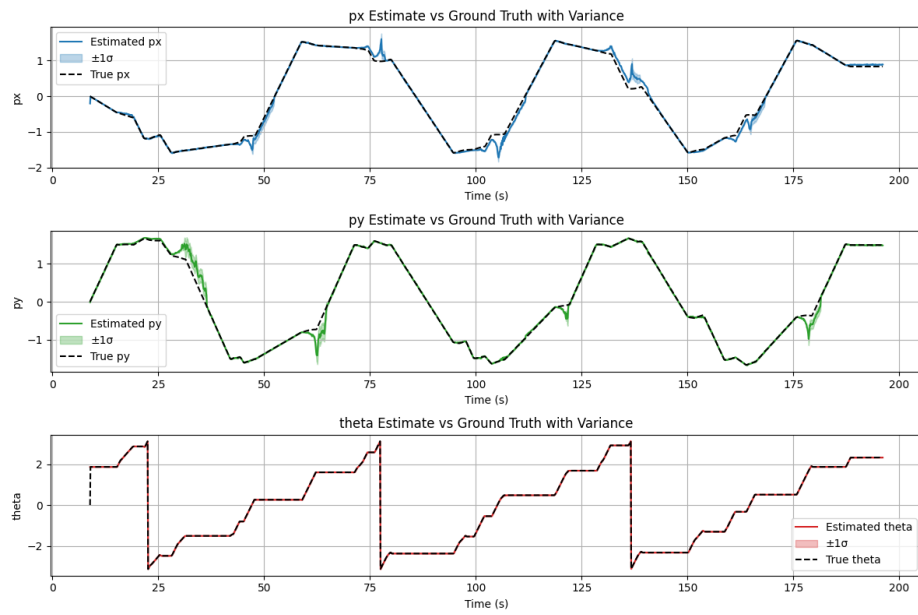
3. Προσομοίωση

Στα αρχεία κώδικα που παρατίθενται στον φάκελο, έχουν υλοποιηθεί όλοι οι αλγόριθμοι για την πραγματοποίηση της απαιτούμενης εργασίας και η καταγραφή τιμών για διάφορα πειράματα. Συγκεκριμένα, στο αρχείο *ekf.py* έχει γίνει η υλοποίηση του Επεκταμένου Φίλτρου Kalman, το οποίο εκτιμάει την κατάσταση του ρομπότ (θέση και προσανατολισμός) κατά την διάρκεια της 3-λεπτης κίνησής του, η οποία γίνεται με βάση το αρχείο *random_walker.cpp*. Στο αρχείο *localization.py* γίνεται η συλλογή των δεδομένων από τα αισθητήρια μέσα και η προσθήκη θορύβου, παράλληλα με την εκτέλεση του EKF. Χρήσιμες συναρτήσεις για την εκτέλεση της εργασίας βρίσκονται στο αρχείο *utils.py*, ενώ υλοποιήσεις των logs και των plots στα *logger.py* και *plotter.py*.

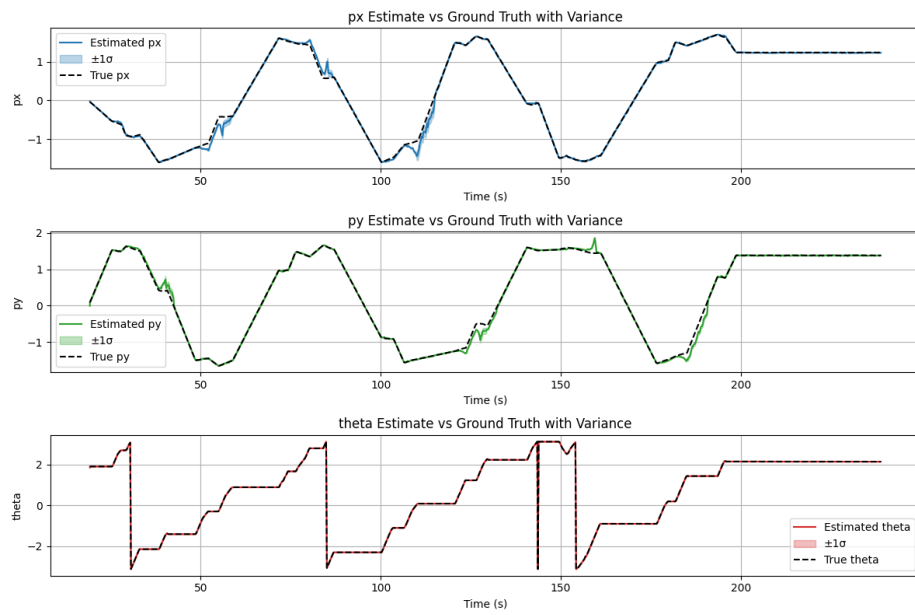
Η εκτέλεση των προγραμμάτων ελέγχου του ρομπότ έγινε στο περιβάλλον ROS (Robot Operating System) σε συνεργασία με το περιβάλλον προσομοίωσης Gazebo.

Η προσομοίωση του συστήματος πραγματοποιήθηκε για τρεις διαφορετικές συχνότητες δειγματοληψίας των αισθητήρων: **2 Hz**, **5 Hz** και **10 Hz**. Στόχος είναι να αξιολογηθεί η ακρίβεια του EKF στην εκτίμηση της κατάστασης του ρομπότ καθώς και η συμπεριφορά των μετρήσεων των αισθητήρων υπερήχων σε διαφορετικούς ρυθμούς ανάγνωσης.

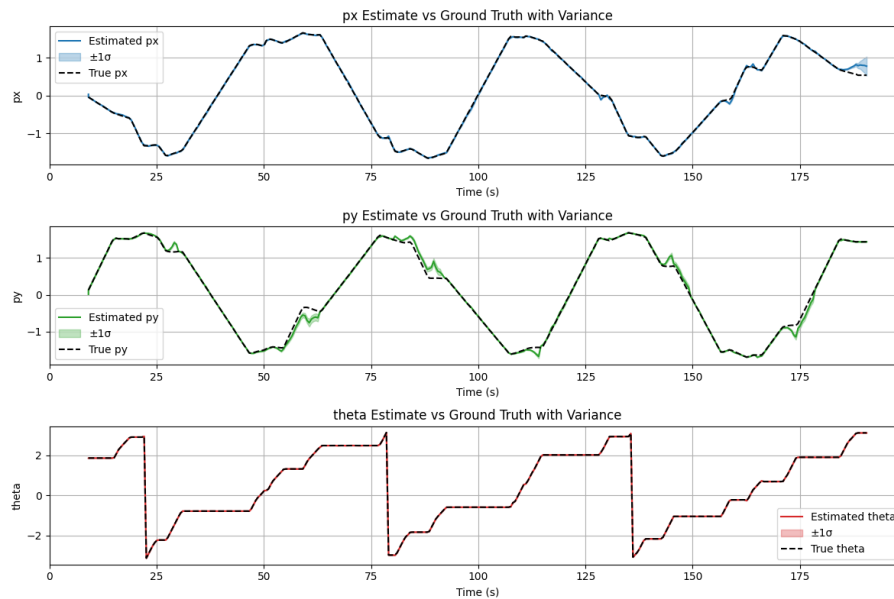
Στα παρακάτω διαγράμματα απεικονίζεται η εκτιμώμενη κατάσταση του ρομπότ (p_x, p_y, θ) με το EKF σε σύγκριση με την πραγματική τροχιά, για κάθε μία από τις τρεις περιπτώσεις. Σε κάθε περίπτωση, εμφανίζεται και η διακύμανση της εκτίμησης (± 1 standard deviation).



Εικόνα 1: Εκτίμηση κατάστασης για $\text{sampling rate} = 2 \text{ Hz}$



Εικόνα 2: Εκτίμηση κατάστασης για $\text{sampling rate} = 5 \text{ Hz}$



Εικόνα 3: Εκτίμηση κατάστασης για $\text{sampling rate} = 10 \text{ Hz}$

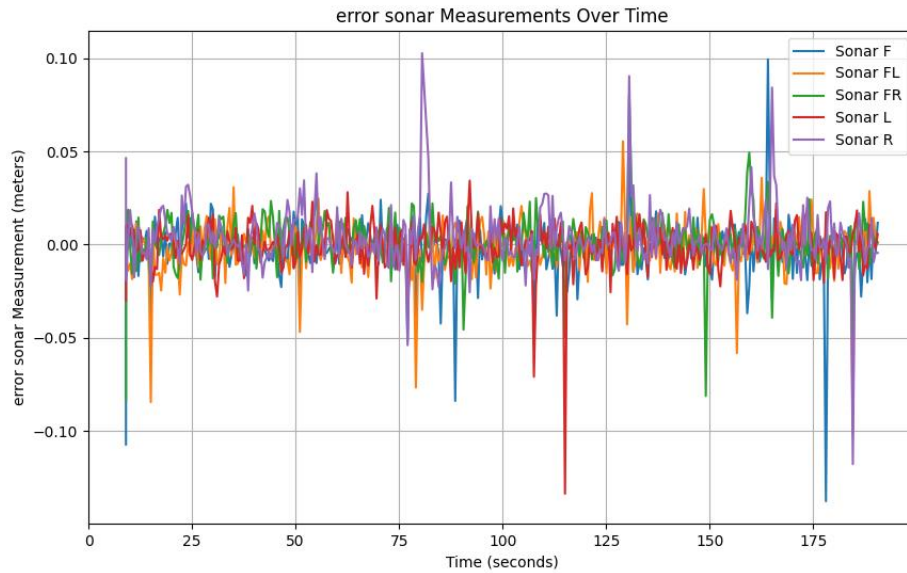
Όπως γίνεται αντιληπτό, η εκτίμηση κατάστασης που προκύπτει από τον αλγόριθμό μας, συμπίπτει στο μεγαλύτερο μέρος της κίνησης με την πραγματική κατάσταση του ρομπότ. Οι μεγαλύτερες αποκλίσεις εντοπίζονται σε στιγμές απότομων μεταβολών, κυρίως λόγω καθυστέρησης προσαρμογής του EKF. Ωστόσο, ακόμα και σε αυτές τις περιπτώσεις, η εκτιμώμενη κατάσταση παραμένει εντός του αποδεκτού εύρους αβεβαιότητας, γεγονός που επιβεβαιώνει τη συνέπεια και την ευρωστία του φίλτρου.

Πιο συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι ο προσανατολισμός θ εκτιμάται με ιδιαίτερη ακρίβεια συγκριτικά με την πραγματική τιμή, γεγονός που οφείλεται στο ότι το EKF λαμβάνει άμεσα μετρήσεις γωνιακής ταχύτητας από τον αισθητήρα IMU. Έτσι, στο μοντέλο κατάστασής μας, η γωνία ενσωματώνεται από τη γωνιακή ταχύτητα, χωρίς να εξαρτάται από υψηλότερες παραγώγους ή θορυβώδεις υπολογισμούς. Αντιθέτως, οι θέσεις p_x και p_y , προκύπτουν μέσω δεύτερης ολοκλήρωσης των επιταχύνσεων, γεγονός που τις καθιστά πιο επιρρεπείς σε σφάλματα συσσώρευσης, ιδίως σε στιγμές όπου η πορεία αλλάζει κατεύθυνση.

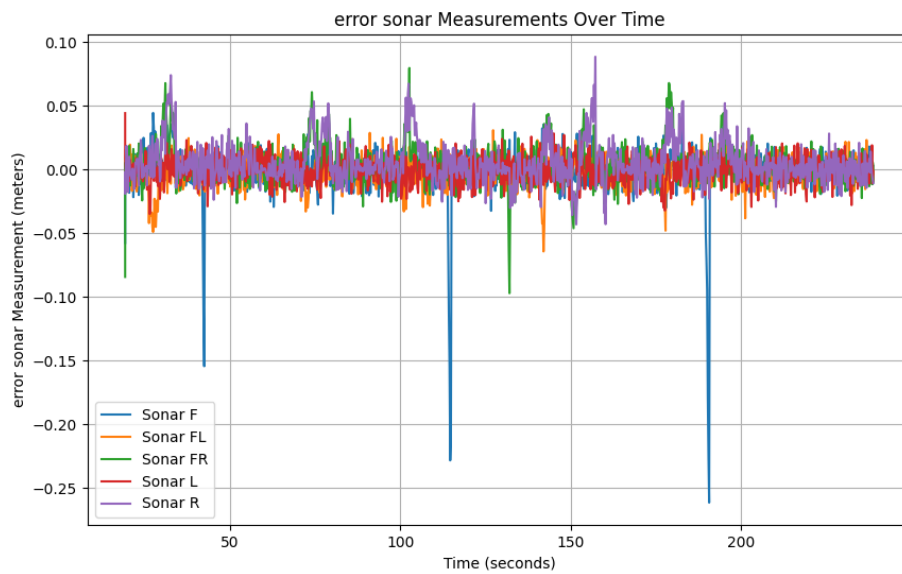
Τα τοπικά ακρότατα που εμφανίζονται στις καμπύλες θέσης, συμπίπτουν με χρονικές στιγμές όπου το ρομπότ εκτελεί απότομη μεταβολή στην κίνηση στον κάθε άξονα, γεγονός που πιθανώς οφείλεται στην τυχαιότητα της κίνησης που εκτελείται.

Τέλος, παρατηρείται ότι η συχνότητα δειγματοληψίας παίζει ρόλο στην απόδοση του EKF. Σε μεγαλύτερες συχνότητες (π.χ. 10 Hz), η πρόβλεψη γίνεται σε μικρότερα χρονικά διαστήματα και οι μετρήσεις εισάγονται πιο συχνά, με αποτέλεσμα το φίλτρο να απαιτεί μικρότερη προβλεπτική παρέμβαση. Συνεπώς, η εκτίμηση προσαρμόζεται πιο γρήγορα και οι αποκλίσεις περιορίζονται σημαντικά.

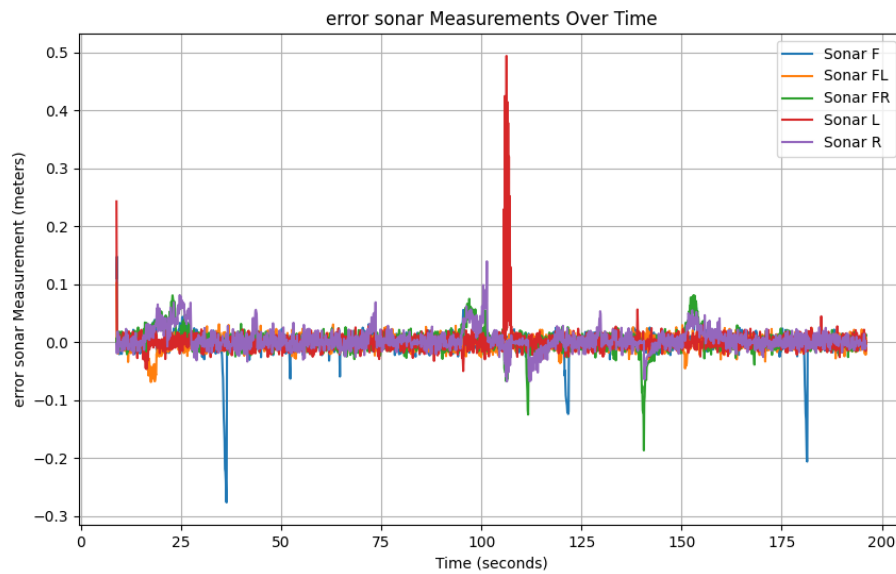
Παράλληλα με την εκτίμηση κατάστασης, αξιολογήθηκε και η συμπεριφορά των αισθητήρων υπερήχων κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης. Τα αντίστοιχα διαγράμματα απεικονίζουν τη διαφορά μεταξύ των πραγματικών και των μετρούμενων αποστάσεων σε κάθε κατεύθυνση (L, FL, F, FR, R).



Εικόνα 4: Σφάλμα αισθητήρων sonar για sampling rate = 2 Hz



Εικόνα 5: Σφάλμα αισθητήρων sonar για sampling rate = 5 Hz



Εικόνα 6: Σφάλμα αισθητήρων sonar για $\text{sampling rate} = 10 \text{ Hz}$

Τα σφάλματα των αισθητήρων υπερήχων παραμένουν σε γενικές γραμμές μικρά και εντός των αναμενόμενων ορίων. Οι αποκλίσεις αυξάνονται ελαφρώς όταν το ρομπότ πλησιάζει εμπόδια ή στρίβει, αλλά δεν επηρεάζουν ουσιαστικά την ακρίβεια του EKF.

Επίσης, διαπιστώνουμε ότι τα σφάλματα για συχνότητες 2 Hz και 5 Hz παραμένουν εντός του διαστήματος $\pm 0.05 \text{ m}$, ενώ στην περίπτωση των 10 Hz κυμαίνονται μέχρι και $\pm 0.1 \text{ m}$. Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι, αν και η συχνότερη ενημέρωση του EKF (στα 10 Hz) μπορεί να βελτιώνει την εκτίμηση θέσης, ενδέχεται να ενισχύει και την επίδραση του στιγμιαίου θορύβου των μετρήσεων sonar, οδηγώντας σε μεγαλύτερη απόκλιση στις επιμέρους προβλεπόμενες αποστάσεις.