

Θεωρία και Εφαρμογές Γραφημάτων
Ακαδημαϊκό έτος 2021 – 2022
Προγραμματιστική άσκηση για την 2η απαλλακτική πρόοδο

Άσκηση: (1.25 μονάδες) Να υλοποιηθεί, με χρήση της βιβλιοθήκης `networkx`, αλγόριθμος που δέχεται ως είσοδο ένα δένδρο T και υπολογίζει ένα μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο (ΜΑΣ) του T .

Παράδοση: Την ημέρα εξέτασης της 2ης απαλλακτικής προόδου του μαθήματος, στο email `jtas@unipi.gr`.

Παραδοτέα: Ένα αρχείο `zip` με τον πηγαίο κώδικα και `screenshots` εκτέλεσης του προγράμματός σας.

Υποδείξεις: Ως γνωστό, κάθε δένδρο T περιέχει τουλάχιστον ένα φύλλο (μια κορυφή βαθμού 0 ή 1). Επιπλέον, εύκολα αποδεικνύεται ότι για κάθε φύλλο v του T υπάρχει ένα ΜΑΣ που περιέχει το v . Πράγματι, αν M ένα ΜΑΣ που δεν περιέχει το v , τότε θα περιέχει τον μοναδικό γείτονα u του v (αλλιώς το $M \cup \{v\}$ θα ήταν ανεξάρτητο σύνολο μεγαλύτερου μεγέθους από το M , άτοπο). Επομένως, το σύνολο M' που προκύπτει αφαιρώντας το u από το M και προσθέτοντας το v είναι ΜΑΣ.

Η ιδιότητα αυτή, οδηγεί στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πρόταση 1. Κάθε δένδρο με $m \neq 1$ δεσμούς έχει ένα ΜΑΣ που περιέχει όλα τα φύλλα του δένδρου.

Απόδειξη. Έστω δένδρο T με $m \neq 1$ δεσμούς και k φύλλα v_1, v_2, \dots, v_k και έστω M_0 ένα ΜΑΣ του T .

Ορίζουμε το σύνολο M_1 ως εξής: Αν $v_1 \in M_0$, τότε $M_1 = M_0$, αλλιώς το M_1 προκύπτει από το M_0 προσθέτοντας το v_1 στο M_0 και αφαιρώντας από αυτό τον γείτονα του v_1 (αν αυτός ανήκει στο M_0). Το M_1 είναι προφανώς ΜΑΣ του T . Εργαζόμαστε ομοίως για τα υπόλοιπα φύλλα, δημιουργώντας έτσι μια ακολουθία M_1, M_2, \dots, M_k από ΜΑΣ. Το M_k είναι προφανώς ΜΑΣ του T που περιέχει όλα τα φύλλα. \square

Η περίπτωση που το T έχει $m = 1$ δεσμό, δηλαδή δύο κορυφές που είναι φύλλα είναι τετριμμένη: Το T έχει δύο ΜΑΣ, το κάθε ένα από αυτά περιέχει μία μόνο κορυφή.

Αφού λοιπόν υπάρχει ΜΑΣ που περιέχει όλα τα φύλλα του T , όταν $m \neq 1$, μπορούμε να υπολογίσουμε ένα τέτοιο ΜΑΣ M ως εξής:

- Αρχικά το M είναι κενό και προσθέτουμε σε αυτό όλα τα φύλλα του T . Στη συνέχεια, διαγράφουμε από το T όλα τα φύλλα και τους γείτονές τους καθώς και τους δεσμούς στους οποίους συμμετέχουν, αφού οι γείτονες αυτοί δεν μπορούν να συμμετέχουν στο ΜΑΣ.
- Το υπογράφημα του T που προκύπτει από τη διαγραφή αυτή είναι γενικά ένα δάσος και όχι απαραίτητα ένα δένδρο. Παρόλα αυτά, μπορούμε να συνεχίσουμε με τον ίδιο τρόπο, διότι το ΜΑΣ ενός δάσους είναι απλά η ένωση ΜΑΣ των δένδρων του.
- Επομένως, μπορούμε να προσθέσουμε τα φύλλα του δάσους στο M και να αφαιρέσουμε αυτά και τους γείτονές τους από το γράφημα. (Στην περίπτωση που κάποιο δένδρο του δάσους έχει μόνο δύο κορυφές, προσθέτουμε μόνο μια (οποιαδήποτε) από αυτές στο M .) Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρις ότου το γράφημα να μην έχει άλλες κορυφές, οπότε έχουμε το ζητούμενο ΜΑΣ M .

