CIMAT Monterrey

Tarea 1

Rodríguez Mendoza Ana Beatriz

Inferencia Estadística

28 de agosto de 2018

Resuelve lo siguiente:

(a) Anastasio tiene 29 tarjetas numeradas del 1 al 29, con el número apareciendo sólo en uno de los lados de la tarjeta. Si Anastacio baraja las tarjetas varias veces de forma que los números quedan ocultos y al final toma la tarjeta que quedó en la parte de arriba, ¿Cuál es la probabilidad de que la tarjeta que Anastasio elige sea mayor a 13?

Sean los valores $x = \{1, 2, 3, ..., 29\}$ posibles resultados del experimento, igualmente probables e independientes entonces $x \sim U(29)$ i.e:

$$\begin{aligned} P(x > 13) &= 1 - P(x \leq 13) \\ &= 1 - \frac{13}{29} \\ &= 0.55 \end{aligned}$$

La probabilidad de que Anastasio elija una tarjeta mayor a 13 es 0.5.

(b) Escribe la función de densidad de una variable aleatoria que sigue una distribución uniforme $x \sim U(19, 20, 21, ..., 29)$. Calcule sus primeros tres momentos.

Si $x \sim U(19, ..., 29)$, función de densidad y momentos, como $n = 11$ equiprobables entonces

$$f(x) \begin{cases} \frac{1}{11} \text{ si } x \in \{19, 20, ..., 29\} \\ \quad 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Se tiene que $E(x^r) = \sum x^r f(x)$

Primer momento:

$$\begin{aligned} E(x^1) &= \sum_{x=19}^{29} x \left(\frac{1}{11}\right) = \frac{1}{11} \sum_{x=19}^{29} x = \frac{1}{11} \left[\sum_{x=1}^{29} x - \sum_{x=1}^{18} x\right] \\ &= \frac{1}{11} \left[\frac{29(30)}{2} - \frac{18(19)}{2}\right] = \frac{1}{11} [435 - 171] \\ &= \frac{264}{11} = 24 \end{aligned}$$

Segundo momento:

$$
\begin{aligned}
E\left(x^2\right) &= \sum_{x=19}^{29} x^2 \left(\frac{1}{11}\right) = \frac{1}{11} \sum_{x=19}^{29} x^2 = \frac{1}{11} \left[\sum_{x=1}^{29} x^2 - \sum_{x=1}^{18} x^2\right] \\
&= \frac{1}{11} \left[\frac{29\,(30)\,(59)}{6} - \frac{18\,(19)\,(37)}{6}\right] = \frac{8555 - 2109}{6} \\
&= \frac{6446}{6} = 1074.3
\end{aligned}
$$

Tercer momento:

$$
\begin{aligned}
E\left(x^3\right) &= \sum_{x=19}^{29} x^3 \left(\frac{1}{11}\right) = \frac{1}{11} \sum_{x=19}^{29} x^3 = \frac{1}{11} \left[\sum_{x=1}^{29} x^3 - \sum_{x=1}^{18} x^3\right] \\
&= \frac{1}{11} \left[\left(\frac{29\,(30)}{2}\right)^2 - \left(\frac{18\,(19)}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{11} \left[435^2 - 171^2\right] \\
&= \frac{159984}{11} = 14544
\end{aligned}
$$

(c) Eustaquio gira una ruleta que tiene los números enteros del 1 al 20. ¿Cuál es la varianza del resultado que Eustaquio obtiene?

Sea $x = \{1, 2, ..., 20\}$ posibles resultados independientes e igualmente probables $x \sim U\,(20)$ entonces:

$$
v\,(x) = \frac{n^2 - 1}{12} = \frac{20^2 - 1}{12} = 33.25
$$

La varianza del resultado Eustoquio es 33.25.

(d) ¿Cuál es el valor esperado del resultado de lanzar un dado balanceado?

Como los resultados de x de lanzar un dado se distribuyen uniformemente con $n = 6$:

$$
E\,(x) = \frac{6 + 1}{2} = 3.5
$$

El valor que se espera al lanzar un dado es 3.5.

La compañía CIE ha desarrollado un nuevo producto. La demanda de tal artículo es desconocida, pero se asume que es una variable aleatoria distribuida uniformemente en $\{0, 1, ..., N\}$. Los dispositivos deben ser hechos por adelantado; cada uno vendido produce una ganancia de g pesos y cada uno de los que se queda sin vender produce una pérdida de p pesos. ¿Cuántos de estos artículos tienen que producirse para maximizar la ganancia esperada?

Si se tiene x una variable aleatoria $\sim U\{0, 1, 2, ..., N\}$ y nombramos:

$$\begin{aligned} n&: \text{Número de productos vendidos} \\ x&: \text{Número de productos de la demanda} \\ g&: \text{Ganancia en pesos} \\ p&: \text{Perdida en pesos} \\ h(x)&: \text{Función de la ganancia} \end{aligned}$$

Se tienen dos cosas:

$$h(x) \begin{cases} x \geq n & ng \\ x < n & gx - (n-x)p \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(h(x)) &= \sum_{x=0}^{N} h(x) f(x) = \frac{1}{N+1} \left(\sum_{x=0}^{N} h(x) \right) \\ &= \frac{1}{N+1} \left[\sum_{x=0}^{n-1} [gx - (n-x)p] + \sum_{x=n}^{N} ng \right] \\ &= \frac{1}{N+1} \left[g \sum_{x=0}^{n-1} x - p \sum_{x=0}^{n-1} (n-x) \right] + \frac{1}{N+1} \left[\sum_{x=0}^{N} ng - \sum_{x=0}^{n-1} ng \right] \\ &= \frac{1}{N+1} \left[\frac{gn(n-1)}{2} - p \sum_{x=0}^{n-1} n + p \sum_{x=0}^{n-1} x \right] + \frac{ng(N+1)}{N+1} - \frac{n^2 g}{N+1} \\ &= \frac{gn(n-1)}{2(N+1)} - \frac{n^2 p}{N+1} + \frac{pn(n-1)}{2(N+1)} + ng - n^2 \cdot \frac{g}{N+1} \\ &= n^2 \cdot \frac{g}{2(N+1)} - n \cdot \frac{g}{2(N+1)} - n^2 \cdot \frac{p}{N+1} + n^2 \cdot \frac{p}{2(N+1)} - n \cdot \frac{p}{2(N+1)} + ng - n^2 \cdot \frac{g}{N+1} \\ &= n^2 \left[-\frac{g}{2(N+1)} - \frac{p}{2(N+1)} \right] - n \left[\frac{g}{2(N+1)} + \frac{p}{2(N+1)} - g \right] \\ &= H(x) \end{aligned}$$

Para maximizar hacemos $H'(x) = 0$

$$H'(x) = n\left[\frac{-g}{N+1} - \frac{p}{N+1}\right] - \left[\frac{g}{2(N+1)} + \frac{p}{2(N+1)} - g\right] = 0$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow n\left[\frac{-g}{N+1} - \frac{p}{N+1}\right] &= \left[\frac{g}{2(N+1)} + \frac{p}{2(N+1)} - g\right] \\
\Rightarrow n &= \frac{\left(\frac{1}{N+1}\left[\frac{g}{2} + \frac{p}{2} - g(N+1)\right]\right)}{\left(\frac{1}{N+1}\right)[-g-p]} \\
&= \frac{g + p - 2gN - 2g}{2[-g-p]} \\
&= \frac{p - 2gN - g}{2[-g-p]} \\
&= \frac{g(1+2N) - p}{2[g+p]}
\end{aligned}$$

Por lo tanto tiene más que producirse $\frac{g(1+2N)-p}{2[g+p]}$ artículos para maximizar la ganancia.

---

3. Un conjunto de bits se envían sobre un canal de comunicación en paquetes de 12. Si la probabilidad de que un bit sea corrompido sobre el canal es 0.1 y los errores son independientes, ¿Cuál es la probabilidad de que no más de dos bits de un paquete se corrompan? Si 6 paquetes de bits se envían sobre el canal, ¿cuál es la probabilidad de que al menos un paquete contenga 3 o más bits corruptos? Finalmente, si X denota el número de paquetes conteniendo 3 o más bits corruptos, ¿cuál es la probabilidad de que X excederá su media por más de dos desviaciones estándar?

éxito es igual a que un bit sea corrompido y no afecta a los siguientes, entonces x = número de bits corruptos, en un paquete de 12 observaciones entonces $x \sim B(12, 0.1)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow P(\text{éxito}) &= 0.1 \\
P(x \leq 2) &= P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) \\
&= \binom{12}{0}(0.1)^0(0.9)^{12} + \binom{12}{1}(0.1)^1(0.9)^{11} + \binom{12}{2}(0.1)^2(0.9)^{10} \\
&= 1(1)(0.28) + 12(0.1)(0.31) + 66(0.01)(0.35) \\
&= 0.28 + 0.37 + 0.23 = 0.882
\end{aligned}$$

La probabilidad de que máximo dos bits de un paquete se corrompan es muy alta, 0.9.

Sea x el número de bits corruptos y 12 bits en un paquete y sea $X \sim (12, 0.1)$

$$P_1 (x \geq 3) = 1 - P (x \leq 2)$$

por el caso anterior

$$= 1 - (0.88) = 0.12$$

La probabilidad de que existan 3 o más bits en un paquete es de 0.12, ahora, si tiene 6 paquetes y es el número de paquetes que tiene 3 o más bits corruptos, entonces $y \sim B (6, 0.12)$:

$$\begin{aligned} P (y \geq 1) &= 1 - [P (x = 0)] \\ &= 1 - \binom{6}{0} (0.12)^0 (0.88)^6 \\ &= 1 - 1 (1) (0.46) \\ &= 0.52 \end{aligned}$$

La probabilidad de que más de un paquete tenga 3 o más bits corruptos es 0.5.

Si x es el número de paquetes conteniendo 3 o más bits, $x \sim B (6, 0.12)$

$$\begin{aligned} v (x) &= npq \\ &= 6 (0.12) (0.88) \\ &= 0.63 \end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{0.63} = 0.8$$

$$E (x) = np = 6 (0.12) = 0.72$$

$$\mu + 2\sigma = 0.72 + 1.6 = 2.32 \approx 3 \text{ (redondeo al valor superior)}$$

$$\Rightarrow P (x > 3) = P (x = 4) + P (x = 5) + P (x = 6)$$

$$P(x=4)+P(x=5)+P(x=6)=\binom{6}{4}(0.12)^4(0.88)^2+\binom{6}{5}(0.12)^5(0.88)^1+\binom{6}{6}(0.12)^6(0.88)^0$$
$$=0.002+0.0001+0.000003$$
$$=0.002$$

La probabilidad de que el número de paquetes con 3 o más bits corruptos sea dos veces la desviación estándar arriba de la media arriba de la media es cero (0.002).

Una caja contiene 12 manzanas frescas y 4 que están podridas. Si elige 3 al azar y X denota el número de manzanas frescas que tomó, encuentre la función de densidad de X y su esperanza.

Como $x=$ número de manzanas frescas, con $N=16$ que son el total de manzanas, solo se eligen 3 $(n=3)$ y hay 12 manzanas frescas $(k=12)$ entonces $x\sim \text{Hiper}(16,12,3)$ con función de densidad:

$$f(x)=\frac{\binom{12}{x}\binom{16-12}{3-x}}{\binom{16}{3}}$$

y su esperanza:

$$E(x)=\frac{3\cdot 12}{16}=2.5$$

El valor esperado es que salgan 3 manzanas frescas.
