Tarea 1
Inferencia Estadística.

Ejercicio 1.

a)

$X = \{\text{Valor de la carta tomada}\}$

$\mathbb{P}(X>13) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 13) = 1 - \frac{13}{29} = \frac{16}{29}$

b)

Sea $X \sim U(19, 20, \ldots, 29)$, su función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{11} & \text{para } x = 19, 20, \ldots, 29 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Primer momento: $\mathbb{E}[X] = \sum_{x=19}^{29} x \frac{1}{11} = \frac{19+20+\cdots+29}{11} = \frac{19+29}{2}$

$= 24$

Segundo momento: $\mathbb{E}[X^2] = \sum_{x=19}^{29} x^2 \frac{1}{11} = \frac{(19)^2 + \cdots + (29)^2}{11}$

$= \frac{(19)^2 + (19)(29) + (29)^2}{3} = \frac{1753}{3}$

Tercer momento $\mathbb{E}[X^3] = \frac{1}{3+1} \sum_{i=0}^{3} (19)^i (29)^{3-i}$

$= \frac{1}{4}\left[(29)^3 + (19)(29)^2 + (19)^2(29) + 19^3\right]$

$= \frac{1}{4}[57,696]$

$= 14,424$

c) El resultado que Eustakio obtiene puede ser descrito como $X \sim \mathcal{U}(1, \ldots 20)$

$$V[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

$$= 21 - \frac{1753}{3}$$

d) $X = \{$Valor obtenido al lanzar un dado

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{6}$$

Ejercicio 4

$X = \{$Número de manzanas frescas que tomó$\}$

exito= manzana fresca

número de observaciones $n=3$

número de observaciones posibles $N=12$

El problema se puede ser modelado con una distribución hipergeométrica: tenemos 3 observaciones de 16 posibles y la probabilidad de éxito cambia en "cada paso" (si sale una fresca la probabilidad de encontrar otra es menor) Por lo tanto

$X \sim Hiper(16, 12, 3)$

La función de probabilidad está dada por

$$f(x) = \frac{\binom{12}{x}\binom{16-12}{3-x}}{\binom{16}{3}}, \qquad 0 \leq x \leq 3$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{n \cdot K}{N} = \frac{3 \cdot 12}{16} = \frac{3 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3}} = 3$$

Problema 3

Sea

$p = 0.1$ la probabilidad de que un bit sea corrompido

$X = \{\text{Número de bits corrompidos}\}$

El problema nos dice que los errores son independientes ; la v.a X distribuye binomial con $n=12$ y $p=0.1$

$$\mathbb{P}[X \leq 2] = \mathbb{P}[X=0] + \mathbb{P}[X=1] + \mathbb{P}[X=2]$$

$$= \binom{12}{0}(1-p)^{12} + \binom{12}{1} p(1-p)^{11} + \binom{12}{2} p^2 (1-p)^{10}$$

$$= (.9)^{12} + \frac{12!}{(12-1)!\,1!}(.1)(.9)^{11} + \frac{12!}{(12-2)!\,2!}(.1)^2(.9)^{10}$$

$$= (.9)^{12} + 12(.1)(.9)^{11} + \frac{12 \cdot 11}{2}(.1)^2(.9)^{10}$$

$$= .8891$$

Ahora, la probabilidad de que un paquete contenga 3 o más bits corruptos es:

$$\mathbb{P}[X \geq 3] = 1 - \mathbb{P}[X < 3] = 1 - .8891 = 0.1109$$

Definamos

$Y = \{$Número de paquetes que tienen 3 o más bits corruptos$\}$

$p = 0.1109$ (la probabilidad de que un paquete contenga 3 o más bits corruptos)

$n = 6$

$$\mathbb{P}[Y \geq 1] = 1 - \mathbb{P}[Y=0]$$

$$= 1 - \binom{6}{0} p^0 (1-p)^6 = 1 - \frac{6!}{(6-0)!0!}(0.1109)^0(0.8891)^6$$

$$= 1 - (0.8891)^6$$

$$= 0.4939$$

Por lo que la probabilidad de que al menos un paquete tenga 3 o más bits corruptos es de 0.4939

¿Cuál es la probabilidad de que Y excederá su media por más de dos desviaciones estándar?

$$\mu_Y = \mathbb{E}[Y] = np = 6(0.1109) = 0.6654$$

$$\sigma_Y^2 = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = npq = 6(.1109)(0.8891)$$

$$= 0.5916$$

$$\sigma_Y = 0.7691$$

$$\mathbb{P}[Y > (\mu_Y + 2\sigma_Y)] = \mathbb{P}[Y > 2.09] = 1 - \mathbb{P}[Y \leq 2]$$

Como estamos en un caso discreto y estamos contando el número de paquetes con 3 o más bits corruptos

$$1 - \mathbb{P}[Y \leq 2.09] = 1 - \left(\mathbb{P}[Y=0] + \mathbb{P}[Y=1] + \mathbb{P}[Y=2]\right)$$

$$= 1 - \binom{6}{0} p^0 (1-p)^6 - \binom{6}{1} p\,(1-p) + \binom{6}{2} p^2 (1-p)^4$$

$$= 1 - (0.8891)^6 - \frac{6!}{5!\;1!}(0.1109)(.8896)^6$$

$$- \frac{[illegible]!}{2!}(0.1109)^2 (0.8896)^4$$

$$= 0.4939 - 6(0.1109)(0.8896)^5$$

$$- \frac{6 \cdot 5}{2}(0.1109)^2 (0.8896)^4$$

Ejercicio 2

Sea $X = \{\text{Demanda por el artículo}\}$

$X \sim \mathcal{U}(0,1,\dots,N)$

$S = \{\text{Artículos producidos}\}$

Como X varía entre 0 y N, entonces S también está entre 0 y N

Ahora plantearemos cómo se ve la utilidad

$$\text{Utilidad}(X) = \begin{cases} gX - z(S-X) & \text{si } X \leq S \\ \text{(La demanda es menor o igual a lo producido)} & \\ Sg & \text{si } X > S \\ \text{(La demanda es mayor a lo producido)} & \end{cases}$$

$$E[\text{Utilidad}(X)] = \sum_{i=0}^{S} p_i\left(g x_i - z(S-x_i)\right) + \sum_{i=S+1}^{N} Sg\,p_i$$

$$= \sum_{i=0}^{S} \frac{1}{N+1}\left(g x_i - z(S-x_i)\right) + \sum_{i=S+1}^{N} Sg\frac{1}{N+1}$$

$$= g\sum_{i=0}^{S} x_i \frac{1}{N+1} - \sum_{i=0}^{S} \frac{zS}{N+1} + \sum_{i=0}^{S} x_i \frac{z}{N+1} + \frac{Sg}{N+1}(N-S)$$

$$= \frac{g}{N+1}\,\frac{S(S+1)}{2} + \frac{z(S+1)}{N+1} + \frac{z}{N+1}\,\frac{S(S+1)}{2} + \frac{Sg}{N+1}(N-S)$$

$$\frac{\partial \mathbb{E}[u]}{\partial s} = \left[\frac{g}{2(N+1)} + \frac{z}{2(N+1)}\right]\left[2s+1\right] + \frac{z}{N+1}$$

$$+ \frac{(N-s)g}{N+1} - \frac{sg}{N+1} = 0$$

Igualamos a cero y despejamos s

$$\frac{(2s+1)(g+z)}{2} + z + (Ng - 2sg) = 0$$

$$2s(g+z) + (g+z) + 2z + 2Ng - 4sg = 0$$

$$s[2(g+z) - 4g] = 2Ng - 2z - z - g$$

$$s = \frac{2Ng - 3z - g}{2g - 2z}$$