Inferencia Estadística

Tarea 4

02/10/2018

Escriba de manera concisa y clara sus resultados, justificando los pasos necesarios. Serán descontados puntos de los ejercicios mal escritos y que contenga ecuaciones sin una estructura gramatical adecuada. Las conclusiones deben escribirse en el contexto del problema. Todos los programas y simulaciones tienen que realizarse en `R`.

1. Supongamos que realizamos una serie de experimentos Bernoulli con, posiblemente, distintas probabilidades de éxito. ¿Bajo que condiciones la proporción de éxitos, con una estadarización adecuada, tenderá en distribución a una normal?

2. En este ejercicio corroborará mediante simulaciones el Teorema Clásico de Límite Central (TCLC).

   a) Escriba la siguiente función en `R`. Simule una muestra de tamaño n de una variable aleatoria $Exponencial(\lambda)$ y calcule el estadístico $Z_n \equiv \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \lambda^{-1})}{\lambda^{-1}}$. Repita lo anterior m veces. La función deberá tomar como parámetros n, m y λ y regresar un vector de tamaño n conteniendo la muestra de Z_n.

   b) Para $n = 5, 10, 100, 500, 1000, 10000$, $m = 1000$ y $\lambda = 1$, utilice la función del inciso anterior para obtener muestras de Z_n. Grafíque las muestras anteriores en un histograma (un histograma para cada n). ¿Qué observa? ¿Qué tiene que ver su resultado con el TCLC?

   c) Para cada una de las muestras generadas en el inciso anterior, encuentre el Q-Q plot y el P-P plot normales. Comente sus resultados.

3. En este ejercicio volverá a trabajar con el TCLC.

   a) Escriba una función análoga a la pedida en el inciso $2a$) para una distribución $Binomial(p, N)$. La función deberá tomar los mismos parámetros a los pedidos en el inciso $2a$), con excepción al parámetro λ que tendrá que ser sustituido p y N.

   b) Para $p = 1/2$ y $N = 15$, repita los incisos $2b$) y $2c$) para el caso Binomial de este ejercicio.

   c) Para $p = 0.1$, $N = 15$, $n = 5, 10, 20, 100$ y $m = 1000$, genere muestras de Z_n y grafíque estás muestras en un histograma (un histograma para cada n). ¿Qué observa? Explíque.

   d) Repita el inciso anterior para $p = 0.99$. Compare su resultado con lo obtenido en el inciso anterior.

4. Supongamos que $X_0, X_1, \ldots$ es una sucesión de experimentos Bernoulli independientes con probabilidad de éxito p. Supongamos también que X_i es la indicadora del éxito de su equipo en el i-ésimo juego de un rally de fútbol. Su equipo anota un punto cada vez que tiene un éxito seguido de otro. Denotemos por $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_{i-1}X_i$ al número de puntos que su equipo anota al tiempo n.

a) Encuentre la distribución asintótica de S_n.

b) Simule una sucesión de $n = 1000$ v.a. como arriba y calcule S_{1000} para $p = 0.4$. Repita este proceso 100 veces y grafíque la distribución empirica de S_{1000} que se obtiene de la simulacion y empalmela con la distribución asintótica teórica que obtuvo. Comente sus resultados.

5. Sea (X, Y) un vector aleatorio con la siguiente densidad

$$f(x,y) = \begin{cases} \pi^{-1} & x^2 + y^2 \leq 1 \\ \\ 0 & x^2 + y^2 > 1 \end{cases}.$$

Demuestre que X y Y no están correlacionadas, pero que no son independientes.

6. Sean X_1 y X_2 v.a.i. que tienen una distribución normal estándar. Obtenga la densidad conjunta de (Y_1, Y_2), donde $Y_1 = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ y $Y_2 = X_1/X_2$. ¿Son Y_1 y Y_2 independientes?

7. El número de carros que pasa un cruce durante una hora tiene distribución de Poisson de parámetro λ. El número de personas en cada carro tiene distribución de Poisson de parámetro ν. Si Y es el total de personas que pasan por el cruce durante una hora, calcule $E(Y)$ y $\text{Var}(Y)$.

8. Sea p la probabilidad de que un chinche caiga con la punta hacia abajo al lanzarlo una vez. Una persona lanza un chinche hasta que la punta caiga hacia abajo por primera vez. Sea X el número de lanzamientos. Luego lanza de nuevo el chinche otras X veces. Sea Y el número de veces que la punta del chinche cae hacia abajo en la segunda serie de lanzamientos. Halle la distribución de Y.

9. Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de una distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$ y sea $R = X_n - X_1$, donde X_i es el i-ésimo estadístico de orden. Encuntre la densidad de R y muestre que la distribución límite de $2n(1 - R)$ es la distribución χ_4^2.

Entrega: 16/10/2018.