2, 4, 5, 7

Ejercicio 2

Este evento se puede modelar como una binomial negativa, donde:

$X = \#$ de artículos producidos hasta obtener 3 artículos defectuosos.

$p = 0.15$

$X \sim BN(3, 0.15)$

⇒ ¿Cuál es la probabilidad de que una máquina produzca 5 o más art. antes de ser detenida?

$$\mathbb{P}(X \geq 5) = 1 - \mathbb{P}[X<5] = 1 - \mathbb{P}[X=4] - \mathbb{P}[X=3]$$

ahora

$$\mathbb{P}[X=4] = \binom{3}{2} p^3 (1-p) = \left(\frac{3!}{2!(3-2)!}\right)(.15)^3(.85)$$

$$= 3(0.003375)^3(0.85) = 0.0086$$

$$\mathbb{P}[X=5] = \binom{4}{2} p^3 (1-p)^2 = \left(\frac{4!}{2!(4-2)!}\right)(0.15)^3(0.85)^2$$

$$= \frac{4 \cdot 3}{4}(0.003375)^3(0.85)^2 = 0.0073$$

$$\mathbb{P}[X \geq 5] = 1 - 0.0086 - 0.0073$$

$$= 1 - 0.0159$$

$$= 0.9840$$ → La probabilidad es 0.9840

¿Cuál será el número promedio de artículos que una máquina producirá antes de ser detenida? R= 20 artículos

$$\mathbb{E}[X] = \frac{3}{0.15} = 20$$

Ejercicio 3

Este evento se puede modelar como una binomial negativa de

$X = \#$ de pacientes analizados hasta tener 3 con resultado positivo

$p = 0.40$

$r = 3$

Es decir, $X \sim BN(3, .4)$

¿Cuál es la probabilidad de que deban ser analizados 10 trabajadores para poder encontrar a 3 con resultado positivo?

$$\mathbb{P}[X = 10] = \binom{9}{2}(1-p)^7 p^3 = \frac{9!}{2!(9-2)!}(.40)^3(.6)^7$$

$$= \frac{9 \cdot 8}{2}(0.064)(0.027)$$

$$= 0.644$$

Ejercicio 7

$Y = \#$ de meteoros que una persona ve en un cuarto de hora

$\lambda = 6$

$$f_Y(y) = \frac{6^y e^{-6}}{y!} \quad \text{con} \quad y = 0, 1, \ldots$$

Encontrar:

La probabilidad de que una persona vea en un cuarto de hora determinado al menos la mitad de los meteoros que esperaría ver

¿Cuántos meteoros esperaría ver? $\mathbb{E}[Y] = \lambda = 6$

$$\mathbb{P}[Y \geq \tfrac{6}{2}] = \mathbb{P}[Y \geq 3] = 1 - \mathbb{P}[Y < 3]$$

$$= 1 - \mathbb{P}[Y=0] - \mathbb{P}[Y=1] - \mathbb{P}[Y=2]$$

$$= 1 - \frac{6^0 e^{-6}}{0!} - \frac{6^1 e^{-6}}{1!} - \frac{6^2 e^{-6}}{2!}$$

$$= 1 - e^{-6}\left[-1 - 6 - \frac{36}{2}\right]$$

$$= 1 - e^{-6}(26)$$

$$= 1 - 0.61$$

$$= 0.938$$

Ejercicio 8

Las calificaciones están descritas por la densidad de probabilidad

$$f_Y(y) = 6y(1-y) \qquad 0 \leq y \leq 1$$

Cualquier calificación menor a 0.4 es reprobatoria

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante repruebe

$$\mathbb{P}[Y < 0.4] = \int_0^{0.4} 6y(1-y)\,dy \qquad 0.352$$

$$= 6\left[\int y\,dy - \int y^2\,dy\right]\Big|_0^{0.4}$$

$$= 3y^2 - 2y^3 \Big|_0^{.4}$$

$$= 3(0.4)^2 - 2(0.4)^3 + 0$$

$$= 0.352$$

La probabilidad es 0.352

Si 6 estudiantes toman el examen, ¿cuál es la probabilidad de que exáctamente 2 reprueben? R= 0.327

Sea X una v.a que cuenta el número de estudiantes que reprueban

Esto se podría modelar como una Binomial con p = 0.352 y n=6

$$\mathbb{P}[X=2] = p^2(1-p)\binom{6}{2} = 15(0.352)^2(1-0.352)^4$$

$$= 0.327$$

Ejercicio 6

Considera X una v.a. con función de distribución F y función de densidad f, y sea A un intervalo de la línea real $\mathbb{R}$

Definimos

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea $Y = \mathbb{1}_A(X)$. Encuentre $F_Y(y)$

Y es una variable aleatoria que toma dos valores: 0 y 1.

$$\mathbb{P}[Y=1] = \mathbb{P}[X \in A] = \int_{a_1}^{a_n} f(x)\,dx = F(a_n) - F(a_1)$$

con a_1 el límite inferior de A
y a_n el límite superior de A

$$\mathbb{P}[Y=0] = \mathbb{P}[X \notin A] = \int_{-\infty}^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_n}^{\infty} f(x)\,dx =$$

$$= F(a_1) + 1 - F(a_n)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} F(a_n) - F(a_1) & \text{si } y = 1 \quad (x \in A) \\ F(a_1) + 1 - F(a_n) & \text{si } y = 0 \quad (x \notin A) \\ 0 & \text{si } y \neq 0, 1 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y < 0 \\ F(a_1) + 1 - F(a_n) & \text{si} \quad 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si} \quad y \geq 1 \end{cases}$$

31/Agosto/18
Tarea 2
Inferencia Estadística.

Ejercicio 1

Sea $X = \{\text{Número total de hijos}\}$

p = Probabilidad de tener una niña

$q = 1-p$ = Probabilidad de tener un niño

Como $p = q = \frac{1}{2}$; Este problema lo podemos modelar con una distribución geométrica

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X>4] &= 1 - \mathbb{P}[X \leq 4] \\
&= 1 - \mathbb{P}[X=3] - \mathbb{P}[X=2] - \mathbb{P}[X=1] - \mathbb{P}[X=4] \\
&= 1 - q^2p - qp - q^0p - q^3p \\
&= 1 - q^2p - qp - p - q^3p = 1 - p(q^2+q+1+q^3)
\end{aligned}$$

Como $p=q$ para este ejercicio:

$$\mathbb{P}[X>4] = 0.0625$$

Para obtener el valor esperado del número de hijos (familia

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p} = 2$$