Álgebra Matricial

Examen I - Prof. Baydia Nath - Rodrigo Masias

(CIMAT)

Rojas B, Radel

10 de octubre de 2017

Ejercicio 1: Supongamos que un investigador toma datos $x_1, \cdots, x_n$ iid mediciones de la radicación de fondo en Monterrey. Supongamos que también estas observaciones siguen una distribución de Rayling con parámetros τ con pdf dada por

$$f(x) = \tau x e^{\frac{-1}{2}\tau x^2}$$

estimar el valor de τ con el método de la máxima verosimilitud

Solución:

$$\begin{aligned}
L(\tau) &= \prod_{i=1}^{n} = \tau x e^{\frac{-1}{2}\tau x^2} = \tau^n x^n e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n}\tau x^2}{2}} \\
l(\tau) &= n log(\tau x) - \frac{\sum_{i=1}^{n}\tau x^2}{2} \\
\frac{\partial l}{\partial \tau} &= 0 \Rightarrow \tau = \frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} x^2}
\end{aligned} \tag{1}$$

Ejercicio 2: La distribución de pareto con parámetro α tiene un rango$[1, \infty)$ y pdf

$$f(x) = \alpha / x^{\alpha}$$

se tienen los datos x= 5,2,3 de esta distribución. Estimar el valor de α con el método de máxima verosimilitud

Solución:

$$
\begin{aligned}
L(\alpha) &= \prod_{i=1}^{3} \frac{\alpha}{x^{\alpha}} \\
l(\alpha) &= \sum_{i=1}^{3} log(\alpha) - \alpha log(x) \\
\frac{\partial l}{\partial \alpha} &= 0 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{log(30)}
\end{aligned} \tag{2}
$$

Ejercicio 3: Los datos bivariados (4,10, (-1,3), (0,2) se supone que surgen del modelos $y_i = b|x_i - 3| + e_i$ donde de b es un constante y e_i son los errores.

1. Que suposiciones son necesarios en e_i para que tenga sentido hacer un ajuste por mínimos cuadrados de una curva $y = b|x - 3|$ a los datos.
2. Dados los datos anterior, determinar la estimación por mínimos cuadrados para b

Solución a: Se deben cumplir supuestos de normalidad $y_i \sim N(0, \sigma^2)$ además los e_i deben ser id.

Solución b: Considerando el modelo indicado $y_i - b|x_i - 3| = e_i$ se determina $b = 14/13$

Ejercicio 4: Estimar el valor de a, de la siguiente ecuación con mínimos cuadrados $y_i = \frac{a}{x_i} + u_i$ donde $u_i \sim N(0, \sigma^2)$

Solución: $E(U_i) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \frac{a}{x_i})^2 = 0 \Rightarrow$ Tomando $f(a) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \frac{a}{x_i})^2$ se tiene $\frac{\partial f}{\partial a} = 0 \Rightarrow a = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}}$

Ejercicio 5: Sea un conjunto A,B,C,D tales que se cumple $P(A) = 1/2, P(B) = \mu, P(C) = 2\mu, P(D) = 1/2 - 3\mu$. Sean a,b,c,d el numero de los estudiantes que reciben A,B,C,D. Estimar μ con MLE dado a,b,c,d.Dado

1. Dado $\hat{\mu}$, a estimación presente de μ, que son los valores esperanzas de a y b.
2. si se tiene $\hat{a} = E(a)$, $\hat{b} = E(b)$

Solución: