Tarea 5 inferencia

Román Castillo C.

EJERCICIO 1

Repaso de la sección "Esperanza condicional"

EJERCICIO 2

Ejercicio #1 diapositiva 164

Para E=1 y n=3 despejamos $Z_{\alpha/2}$:

$$Z_{\alpha/2} = \sqrt{3 \cdot (1)^2} = 1.73$$

Para E=1 y n=4 despejamos $Z_{\alpha/2}$:

$$Z_{\alpha/2} = \sqrt{4 \cdot (1)^2} = 2$$

Para E=0.5 y n=16 despejamos $Z_{\alpha/2}$:

$$Z_{\alpha/2} = \sqrt{16 \cdot (0.5)^2} = 2$$

Para E=0.1 y n=385 despejamos $Z_{\alpha/2}$:

$$Z_{\alpha/2} = \sqrt{385 \cdot (0.1)^2} = 1.96$$

Ejercicio #2 diapositiva 207 Comprobamos que la matriz informativa de Fisher sea correcta

$$I_n(\mu,\sigma) = -\begin{bmatrix} E_\theta(\frac{\partial^2 l}{\partial \mu^2}) & E_\theta(\frac{\partial^2 l}{\partial \sigma \partial \mu}) \\ E_\theta(\frac{\partial^2 l}{\partial \mu \partial \sigma}) & E_\theta(\frac{\partial^2 l}{\partial \sigma^2}) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{I}(\mu,\sigma) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

Realizamos las derivadas parciales comenzando con μ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \mu} &= \tfrac{1}{\sigma^2}\textstyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) \\ \frac{\partial^2 \mathcal{I}}{\partial \mu^2} &= \tfrac{1}{\sigma^2}\textstyle\sum_{i=1}^{n}(-1) = -\tfrac{n}{\sigma^2} \\ -\mathbb{E}(\frac{\partial^2 \mathcal{I}}{\partial \mu^2}) &= \tfrac{n}{\sigma^2} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{I}}{\partial \mu \partial \sigma} &= -\tfrac{2}{\sigma^3}\textstyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) \\ -\mathbb{E}(\frac{\partial^2 \mathcal{I}}{\partial \mu \partial \sigma}) &= 0 \end{aligned}$$

Ahora comenzando con σ

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \sigma} &= -\frac{n}{2}\cdot\frac{2\sigma}{\sigma^2}+\frac{4\sigma}{4\sigma^4}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 \\
&= -\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 \\
\frac{\partial^2 \mathcal{I}}{\partial \sigma^2} &= \frac{n}{\sigma^2}-\left(\frac{3}{\sigma^4}\right)\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 \\
&= \frac{n}{\sigma^2}-\frac{3n\sigma^2}{\sigma^4} \\
&= \frac{-2n}{\sigma^2} \\
-\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \mathcal{I}}{\partial \sigma^2}\right) &= \frac{2n}{\sigma^2} \\
\frac{\partial^2 \mathcal{I}}{\partial \sigma \partial \mu} &= \left(\frac{6}{\sigma^4}\right)\sum_{i=1}^n (x_i-\mu) \\
-\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \mathcal{I}}{\partial \sigma \partial \mu}\right) &= 0
\end{aligned}
$$

$$
I_n(\mu,\sigma)=\begin{bmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{\sigma^2} \end{bmatrix}
$$

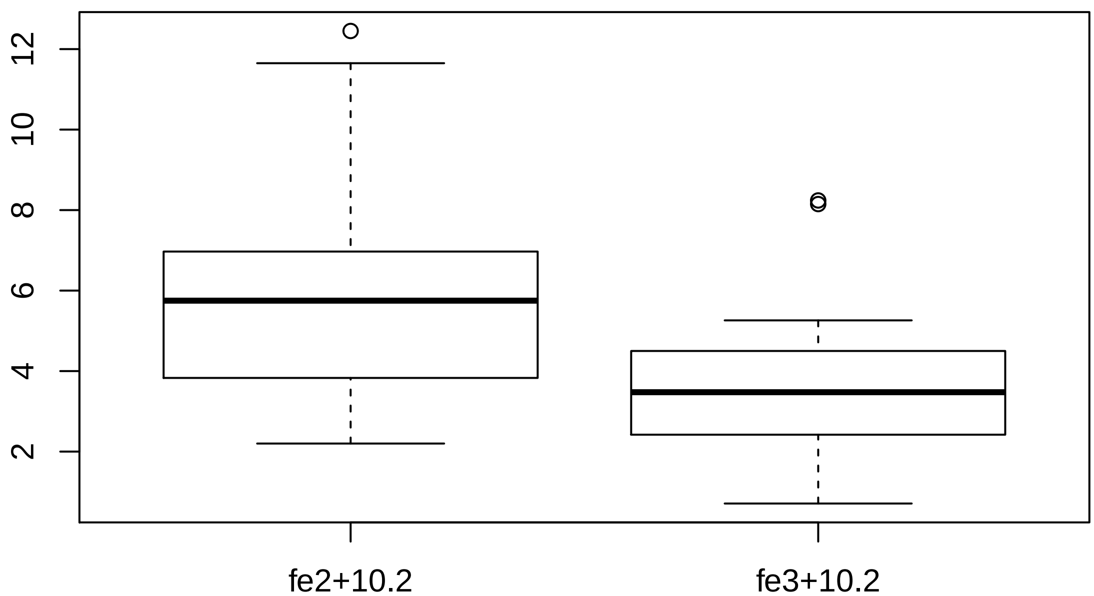
Ejercicio #4 diapositiva 220

Cargamos los datos necesarios

```
library(readr)
iron <- read_delim("iron.TXT",
    "\t", escape_double = FALSE, col_names = FALSE,
    trim_ws = TRUE)
```

```
## Parsed with column specification:
## cols(
##   X1 = col_character(),
##   X2 = col_double()
## )
```

```
tratFe<-unique(iron$X1)
boxplot(X2~X1, data=iron)
```



```r
TFe2<-iron$X2[iron$X1==tratFe[1]]
TFe3<-iron$X2[iron$X1==tratFe[2]]
t.test(TFe2,TFe3)
```

```
##
##  Welch Two Sample t-test
##
## data:  TFe2 and TFe3
## t = 2.7404, df = 30.971, p-value = 0.01009
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  0.5722899 3.9032657
## sample estimates:
## mean of x mean of y
##  5.936667  3.698889
```

Ejercicio #5 diapositiva 221

Cargamos los datos necesarios

```r
library(readr)
calcio <- read_delim("calcio.txt", "\t",
    escape_double = FALSE, col_names = FALSE,
    trim_ws = TRUE)
```

```
## Parsed with column specification:
## cols(
##   X1 = col_character(),
##   X2 = col_character(),
##   X3 = col_character()
## )
```

Ejercicio #6 diapositiva 233

VALOR ESPERADO ES σ^2

Sea $S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-1}$. Determinamos primero su valor esperado. Recordemos que $\mathbb{E}(S_1^2) = \mathbb{E}(S_2^2) = \sigma^2$ entonces:

$$\mathbb{E}(S_p^2) = \frac{n_1-1}{n_1+n_2-1}\mathbb{E}(S_1^2) + \frac{n_1-1}{n_1+n_2-1}\mathbb{E}(S_2^2) = \frac{n_1+n_2-1}{n_1+n_2-1}\sigma^2 = \sigma^2$$

DISTRIBUCIÓN DE VARIANZA POOL

Con respecto a la distribución de $\frac{(n_1+n_2-2)S_p^2}{\sigma^2}$, podemos observar:

$$\frac{(n_1+n_2-2)S_p^2}{\sigma^2} = \frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2} + \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}$$

Es decir se puede descomponer como la suma de χ^2 con (n_1-1) y (n_2-1) grados de libertad respectivamente. Por tanto, S_p^2 es una variable χ^2 con la suma de grados de libertad de las χ^2 originales (n_1+n_2-2)

ESTIMADOR DE MÍNIMA VARIANZA Hallamos la varianza de S_p^2, anteriormente habiamos dicho que $\frac{(n_1+n_2-2)S_p^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1+n_2-2)$ entonces con respecto a la varianza:

$$\mathbb{V}(\frac{(n_1+n_2-2)S_p^2}{\sigma^2}) = \frac{(n_1+n_2-2)^2}{\sigma^4}\mathbb{V}(S_p^2) = 2(n_1+n_2-2)$$

$$\mathbb{V}(S_p^2) = \frac{2\sigma^4}{n_1+n_2-2}$$

Ahora para determinar si se trata del estimador de mínima varianza, determinamos la cota inferior de Cramér-Rao

$$\mathcal{I}(\mu_X, \mu_Y, \sigma^2) = -\frac{n_1+n_2-2}{2}\log 2\pi - \frac{n_1+n_2-2}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X) + \sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_Y)\right]$$

Al derivar

$$\frac{\partial\mathcal{I}}{\partial\sigma^2} = -\frac{n_1+n_2-2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X) + \sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_Y)\right]$$

###EJERCICIO 3

Definimos la varianza como:

$$Var(Y) = E(Y^2) + [E(Y)]^2$$

La ley de esperanza total dice que:

$$E(Y) = E[E(Y|X)]$$

Al sustituir en la varianza se obtiene:

$$Var(Y) = E[E(Y^2|X)] - \{E[E(Y|X)]\}^2$$

Si sumamos y restamos $E\{[E(Y|X)]^2\}$ se obtiene:

$$Var(Y) = E[E(Y^2|X)] - E\{[E(Y|X)]^2\} + E\{[E(Y|X)]^2\} - \{E[E(Y|X)]\}^2$$

Al agrupar el primer par de elementos se observa aplicando nuestra definición de varianza:

$$E[E(Y^2|X)] - E\{[E(Y|X)]^2\} = E[E(Y^2|X) - [E(Y|X)]^2] = E\{Var(Y|X)\}$$

En el segundo par también se observa:

$$E\{[E(Y|X)]^2\} - \{E[E(Y|X)]\}^2 = Var\{E(Y|X)\}$$

Entonces al sustituir resultados se obtiene:

$$Var(Y) = E\{Var(Y|X)\} + Var\{E(Y|X)\}$$

EJERCICIO 4

Sabemos que $E(X|Y=y) = c$ así que aplicando la regla de la esperanza iterada se sabe que $E(X) = E\{E(X|Y)\}$. Dado lo anterior se despeja que $E(X) = c$. Ahora consideramos a $E(XY)$, aplicamos la esperanza sobre ella, dado que suponemos que se da un valor de $Y = y$, esta la podemos considerar como una constante, y al sustituir entonces:

$$E(XY) = E[E(XY|Y)] = E[YE(X|Y)] = E[Yc] = cE(Y) = E(X)E(Y)$$

Ahora al sustituir en ρ se obtiene:

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov_{XY}}{\sigma_X\sigma_y} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sigma_X\sigma_y} = 0$$

Por tanto las variables no están correlacionadas.

EJERCICIO 5

Sea A una matriz de constantes (nxp) y X (pxm)una matriz aleatoria, cuyo producto se encuentra bien definido.

Calculamos $E(AX)$, aplicando propiedades de la esperanza con las constantes.

$$E(AX) = E(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} X_{k,j})$$

$$E(AX) = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} E(X_{k,j})$$

Al reacomodar la factorización se obtiene:

$$E(AX) = AE(X) = A\mu$$

Sabemos que $V(X) = E\{(X-\mu)(X-\mu)'\} = \Sigma$

Por su parte ahora calculamos $V(AX)$

$$V(AX) = E\{(AX - A\mu)(AX - A\mu)'\}$$

Al factorizar por la izquierda y derecha se obtiene:

$$V(AX) = AE\{(X-\mu)(X-\mu)'\}A' = A\Sigma A'$$

El resultado anterior es aplicable para un vector, ya que son matrices de $(mx1)$

EJERCICIO 6

PARTE A.

La probabilidad de encontrar insectos se condiciona a que hay al menos uno en las hojas seleccionadas, es decir que nos interesa $P(X = i|X > 0)$. Entonces para un población Poisson calculamos:

$$\begin{aligned} P(X > 0) &= 1 - e^{\mu} \\ P(X = i) &= \tfrac{\mu^i e^{-\mu}}{i!} \\ P(X = i|X > 0) &= \tfrac{\mu^i e^{-\mu}}{i!(1-e^{\mu})} \end{aligned}$$

PARTE B.

En el ejercicio anterior obtuvimos $f(x|\theta)$, se muestrearon n hojas, observando y_i insectos en cada una. El total de insectos podemos representarlo como:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\mu^{y_i} e^{-\mu}}{y_i!(1-e^{\mu})}$$

Determinamos $\mathcal{I}(\mu)$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\mu) &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} [y_i \log \mu - \mu - \log(y_1!) - \log(1-e^{\mu})] \\ &= \log(\mu) \textstyle\sum_{i=1}^{n} y_i - n\mu - \sum_{i=1}^{n} \log(y_1!) - n \log(1-e^{\mu}) \end{aligned}$$

Derivamos:

$$\frac{[\mathcal{I}(\mu)}{d\mu} = \frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n} y_i - n\frac{e^{-\mu}}{(1-e^{\mu})}$$

Al igual cero despejamos:

$$\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n} y_i = n\left[1 + \frac{e^{-\mu}}{(1-e^{\mu})}\right]$$

$$\mu = \overline{x}\left[1 - e^{-\mu}\right]$$

PARTE C.

Realizamos una simulación para estimar μ

```
precision<-0.001
xbarra<-3.2
mu<-0
y<-1
i<-0
while(abs(y)>precision){
i<-i+1
y<-mu- xbarra*exp(-mu)-xbarra
mu<-mu+0.0001
}

mu
```

```
## [1] 3.3154
```

EJERCICIO 7

PARTE A. Hallamos el MLE para θ, la función de verosimilitud es:

$$\mathcal{L}(\theta) = \frac{1}{\theta^n}\exp\left[-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i\right]$$

y la función de logverosimilitud es:

$$\mathcal{I}(\theta) = -n\log(\theta) - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Derivamos con respecto a θ:

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i)$$

Igualamos a cero y despejamos:

$$\frac{n}{\theta} = \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i)$$

$$\theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)$$

Entonces: $\hat{\theta}_{MLE} = \overline{x}$

Con los datos calculamos $\overline{x}$=

```
fallasAireAc<-c(97,51,11,4,141,18,142,68,77,
80,1,16,106,206,82,54,31,216,
46,111,39,63,18,191,18,163,24)
lambda<-mean(fallasAireAc)
```

Ahora para discutir el ajuste de los datos realizamos la tabla de frecuencia solicitadas con las observadas y las teóricas. Dado que las frecuencias son calculas usando el MLE, están corresponden a ser el mismo estimador para las frecuecias.

```
My.breaks<-c(0,50,100,200,max(fallasAireAc))
tablaFallasAire<-cut(fallasAireAc, breaks=My.breaks)
tabla<-as.data.frame(table(tablaFallasAire))
teoricos<-pexp(My.breaks[-1],lambda^{-1})-pexp(My.breaks[-5],lambda^{-1})
teoricos<-round(teoricos*length(fallasAireAc),1)
tabla<-cbind(tabla,teoricos)
names(tabla)<-c("Rango","F.Obs","F.Teo")
tabla
```

```
##       Rango F.Obs F.Teo
## 1    (0,50]    11  12.9
## 2  (50,100]     8   6.7
## 3 (100,200]     6   5.3
## 4 (200,216]     2   0.4
```

"A ojo", podemos decir que las frecuencias observadas son "parecidas" a las teoricas, podríamos aplicar una prueba de hipótesis chi^2 para determinar el ajuste.