**Agenda**

* Motivación
* VAR y PLS
* VAR-PLS
* Ejemplo
* Resultados
* Conclusiones

**Motivación**

Phillip Hans Franses (2006) propuso una metodología para realizar pronósticos conjuntos de manera óptima a través de una representación autorregresiva de orden p, esto para pasos adelante. Lo relevante de la metodología fue plantear un modelo denominado “Mínimos Cuadrados Parciales (PLS) Autorregresivo” ().

Este modelo se encuentra situado entre un que pronóstico todos los pasos adelante y también para diferentes modelos en diferentes horizontes, de tal forma que formuló esos tres modelos para realizar pronósticos, los cuales se representan de la siguiente manera:

(1)

(2)

(3)

El representa la forma clásica de realizar los pasos adelante cuyos parámetros son estimados generalmente por Mínimos Cuadrados Ordinarios (OLS), El es una alternativa al caso anterior ya que OLS minimiza la suma cuadrada de pero no garantiza que lo sea para errores a futuro. También, realizarlo de esta manera permite contar con diferentes modelos para diferentes horizontes de pronóstico y asimismo para series de tiempo estacionarias, el pronóstico de un converge rápidamente a la media incondicional (obviamente la rapidez depende directamente de .

Para más detalles sobre la literatura de modelos de esta naturaleza se puede consultar a Pesaran & Pick (2010), Marcellino, Stock & Watson (2004), Carreiro, Kapetorios & Marcellino (2010), Tiao & Xu (1993) entre muchos otros.

Ahora, es claro que existen correlaciones adyacentes entre las series de tiempo, la cual estos dos modelos no explotan. Dicho en otras palabras, se conoce que y están correlacionadas, más aún y también lo están, de esta manera, una alternativa viable es predecir conjuntamente con la ayuda de , siendo así PLS una técnica atractiva dado la naturaleza de la problemática en que nos situamos (más adelante detallaremos cómo se realiza el procedimiento).

Así, Franses propone colocar la información de en una matriz X (predictores) y en Y (predichos), realizando finalmente el ejercicio de regresión a través de PLS, de tal manera que el proceso de construcción de variables latentes y cargas asociadas contengan la información relevante que tiene X en Y.

En el ejercicio empírico realizado compara los modelos (1), (2) y (3) y fue realizado para la serie del índice de producción industrial de Estados Unidos mediante dos procesos:

* Muestreo recursivo: Se realiza el pronóstico de horizonte trabajando con , donde realizando . Así se reincorpora a los datos originales y se realiza el siguiente hasta así hasta que , restimando el modelo en cada recursión.
* Campana de tiempo fija: Trabajar con una fija de tal manera que para cada pronóstico de horizonte se reincorpore la real y se pierda , estimando el modelo cada ocasión que se realice el pronóstico.

Para el ejemplo, se estimó un donde la componente obtenida por PLS resultó equivalente al (Hank & Friedman (1991)) de tal manera que el modelo PLS autorregresivo planteado fue un .

Los resultados mostraron que para la muestra recursiva, el fue superior 4 veces que los otros dos modelos (la componente 1) y para la campana de tiempo fija, el fue mejor en 3 de los 5 horizontes de pronóstico, siendo el superior en las restantes 2, esto considerando la raíz cuadrada del error cuadrático medio.

Lo anterior implica que un modelo PLS planteado como un fenómeno autorregresivo puede llegar a ser competitivo respecto a modelos clásicos existentes en la literatura.

Ahora, lo que proponemos en este trabajo son extensiones naturales que se devengan de lo realizado por Franses, las cuales resumimos en los siguientes puntos:

1. Extensión multivariada dada la flexibilidad de los modelos Vectores Autorregresivos (VAR), generando un modelo denominado VAR-PLS
2. Introducir a este concepto variables determinísticas (dummies, tendencias, etc.) y exógenas
3. Construcción de intervalos de predicción vía Bootstrap
4. Construir un modelo VAR con capacidad predictiva y asimismo pronosticar con el VAR-PLS observando el grado de competitividad que tiene éste respecto a un modelo enfocado a predecir.

Estos puntos serán desarrollados en los siguientes temas, no obstante en la siguiente sección se da una ligera revisión de los elementos importantes que rescataremos de un modelo VAR y la construcción del ejercicio de PLS, para posteriormente agrupar las similitudes que dan cabida al VAR-PLS. Después explicaremos a detalle el ejemplo para el caso de la predicción del índice nacional de precios al consumidor a través de un planteamiento clásico de la fuente inflacionaria, explicando los resultados finalizando con las conclusiones.

**Vectores Autorregresivos y Mínimos Cuadrados Parciales**

Un proceso es definido como:

(4)

: Matrices de coeficientes para

Proceso ruido blanco con matriz de covarianza positiva definida

Matriz de potenciales regresores determinísticos

Vector columna de regresores determinísticos apropiados

Notemos que el puede ser definido como un de la forma

(5)







Si los valores propios de son menores que uno, entonces el proceso es estable.

Una parte importante de la especificación del modelo está dada en encontrar el orden del a estimar. El procedimiento general consiste en ordenar los y elegir el valor de que minimiza algún criterio de selección. La selección del criterio para el tienen la forma

(6)

Donde , es una secuencia indexada por el número de realizaciones de y es la función de penalización por la longitud del modelo l . Los cuatro criterios de información más utilizados son los criterios de Akaike (AIC), Schwarz-Bayesiano (BIC), Hannan-Quinn (HQ) y el Error Final de Predicción (FPE):

(7a)

(7b)

(7c)

(7d)

El criterio AIC sobrestima asintóticamente el orden con probabilidad positiva, mientras que el BIC y HQ estima consistentemente el orden bajo ciertas condiciones favorables si el verdadero valor de p es menor o igual que

Notemos que al igual que el caso univariado, podemos con (4) pronosticar recursivamente de la siguiente manera:

(8)

La estimación de es generalmente realizada por OLS y haciendo y bajo ciertas condiciones de generalidad de comportamiento estacionario y ergodicidad en los modelos VAR (Hamilton (1994) o Lutkepohl (1991)), es consistente y distribuido asintóticamente con matriz de covarianza

(9)

Donde

(10)

es el residual de mínimos cuadrados en el tiempo

El elemento de es asintóticamente normalmente distribuido con errores estándar dados por la raíz cuadrada de los elementos de la diagonal de . Entonces, las pruebas son válidas asintóticamente para los coeficientes estimados.

Una situación de interés radica en la presencia de una o más raíces unitarias en las . Esto ha dado pie a toda una teoría económica, que se basa en la conceptualización de modelar el comportamiento de largo plazo y analizar la dinámica temporal de un conjunto de series. En otras palabras, el concepto de cointegración.

Definamos dos conceptos importantes que formalizan las ideas expresadas anteriormente:

**Cointegración:** Las componentes del vector se dice que son cointegradas de orden , denotado por si a) todos los componentes de son ; y b) existe un vector tal que . El vector es llamado vector de cointegración

**Corrección de error:** El vector bivariado con vector de cointegración , entonces existe una representación de corrección de error de

(11a)

(11b)

Notemos que el modelo puede expresarse como:

(12)

Y asimismo:

(13)

La primera representación es conocida como Modelo de Vector de Corrección de Error (VECM) transitorio y la segunda VECM de largo plazo.

De esta manera, la matriz tiene los siguientes puntos de interés:

1. *,* todas las combinaciones deben ser estacionarias; el VECM es un modelo VAR en niveles
2. , no existe una combinación lineal estacionaria tal que sea estacionaria, excepto la solución trivial, i.e. es un modelo en primeras diferencias
3. 0< , en este caso con dimensión y es estacionaria. Cada columna de representa una relación de largo plazo

Si el objetivo es pronosticar, aún en el caso de variables integradas y cointegradas, hacerlo mediante la representación es bastante conveniente (ver Lutkepohl 2006) y dado que el objetivo de este trabajo es obtener un método alterno de pronóstico, especificaremos un planteamiento apropiado de predicción, denotando las características estocásticas de las series con el fin de quedarnos con expresiones que cumplan las condiciones 1 y 3.

**Mínimos Cuadrados Parciales**

El planteamiento de PLS se puede ver desde diferentes ópticas. Desde la perspectiva de interés en este trabajo, podemos relacionar la expresión lineal del Vector Autorregresivo (expresión 5) visto como un modelo lineal de la forma clásica:

(14)

Donde es , es una matriz , es una matriz de y es una matriz de . Consideremos la matriz de variables dependientes, de independientes, los parámetros que establecen la relación entre y y como el término de error.

Aunado a esto y bajo la concepción que plantea Franses, de explotar las correlaciones existentes entre y , la diferencia entre (5) y (14) radicará únicamente que mientras en (5) lo hacemos a través de OLS en (14) a través PLS, con lleva consigo un proceso de descomposición de que maximiza la covarianza existente una matriz con

El procedimiento básico consiste en maximizar

& (15)

Dónde:

&

Nótese que representa una combinación lineal de las variables pudiendo ser más o menos importante alguna de éstas (generalidad) y maximizar la covarianza o covarianza al cuadrado es indistinto pues no interesa el signo sino la maximización en sí. Finalmente y son las matrices muestrales de varianza y covarianza.

Notemos que si y entonces:

Se asegura que cada una de las direcciones encontradas está descorrelacionadas:

&

Es esta la versión que tradicionalmente se maneja en la literatura

Alternativas a estos valores dan soluciones a problemas específicos de PLS o Correlación Canónica (CCA)

De esta manera, maximizando (14)

Multiplicando por la primera ecuación y por la segunda tenemos que:

Dado que las expresiones anteriores tienen las mismas componentes entonces , por lo que haciendo esto en la segunda ecuación de primer orden tenemos que:

Lo anteriores a la primera ecuación de primer orden:

En términos de y tenemos que:

Donde son los valores propios asociados a la matriz

Y w el vector propio

Similarmente para obtenemos que

De esta manera obtenemos los scores para y :

Normalizando los scores

Los scores de no son necesarios para realizar la regresión, pero generalmente se guardan para fines interpretativos. De esta manera y son iniciadas con y respectivamente. De tal forma obtenemos los loadings para y :

Con esto las matrices son “desinfladas” quitando el efecto relacionado a la variable latente anterior como:

Este proceso se repite hasta que y

Agrupamos cada y en matrices obtenemos:

Así realizamos la regresión de en , usamos los scores calculando los coeficientes de regresión como en (14) pre-multiplicando con la matriz () obteniendo finalmente:

(16)

Donde

**VAR-PLS**

Al igual cómo lo propone Franses trabajaremos con matrices en estructura de rezagos según cada una de las variables, sin embargo, en nuestro caso agruparemos en la matriz la información observada en el pasado como en y en lo observado en tiempo estimando el modelo (16) a través del proceso de construcción de variables latentes. Adicionalmente en nuestro trabajo se pueden introducir efectos de variables exógenas o determinísticas colocadas en , modificando  y 

Finalmente proponemos utilizar la representación que da cabida a un modelo VAR, de tal manera que sea el proceso generador de datos y la en sí, la metodología VAR, la que dictamine el orden del proceso autorregresivo que será utilizado en la regresión PLS.