

Intervalos de confianza simultáneos para los componentes del vector de medias μ

- La región de confianza

$$n(\bar{\mathbf{x}} - \mu)' \mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \mu) \leq c^2,$$

donde c es constante que evalúa correctamente el comportamiento conjunto de los valores plausibles de μ .

- Sin embargo, también es de interés obtener intervalos de confianza sobre las medias de los componentes individuales.
- Al hacerlo, se asume o desearía que todas las afirmaciones de confianza sobre los componentes individuales del vector de medias μ se mantendrán *simultáneamente* con un nivel de confianza razonable. Estos intervalos se denominan *Intervalos de Confianza Simultáneos*.
- Un enfoque para construir estos intervalos es relacionarlos con la región de confianza conjunta basada en el estadístico T^2 .

Relaciones de Confianza Simultáneas

Supongamos $\mathbf{x} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ y sus componentes forman la combinación lineal

$$z = a_1x_1 + \cdots + a_px_p = \sum_{i=1}^p a_ix_i = \mathbf{a}'\mathbf{x}$$

De resultados anteriores sabemos que

$$\mu_z = E(z) = a_1\mu_1 + \cdots + a_p\mu_p = \sum_{i=1}^p a_i\mu_i = \mathbf{a}'\boldsymbol{\mu}$$

y

$$\sigma_z^2 = \text{Var}(z) = \mathbf{a}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{a}$$

y

$$z \sim N(\mu_z, \sigma_z^2) = N(\mathbf{a}'\boldsymbol{\mu}, \mathbf{a}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{a})$$

Relaciones de Confianza Simultáneas

Ahora, si tomamos una muestra $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ de la población $N_p(\mu, \Sigma)$ y construimos una muestra correspondiente de z 's, obtenidas como combinaciones lineales de cada \mathbf{x}_j

$$z_j = a_1 x_{j1} + \dots + a_p x_{jp} = \sum_{i=1}^p a_i x_{ji} = \mathbf{a}' \mathbf{x}_j$$

La media y la varianza muestral de los valores observados z_1, \dots, z_n son

$$\bar{z} = a_1 \bar{x}_1 + \dots + a_p \bar{x}_p = \sum_{i=1}^p a_i \bar{x}_i = \mathbf{a}' \bar{\mathbf{x}}$$

y

$$s_z^2 = \mathbf{a}' \mathbf{S} \mathbf{a}$$

donde $\bar{\mathbf{x}}$ y \mathbf{S} son el vector de medias muestrales y la matriz de covarianza muestral de las \mathbf{x}_j 's

Relaciones de Confianza Simultáneas

Podemos desarrollar intervalos de confianza simultáneos para $\mathbf{a}'\mu$ mediante elecciones adecuadas de \mathbf{a} . Para un \mathbf{a} fijo y σ_z^2 desconocida, un intervalo de confianza del $100(1 - \alpha)\%$ para $\mu_z = \mathbf{a}'\mu$ se basa en el cociente t de student, el cual está dado por

$$t = \frac{\bar{z} - \mu_z}{s_z / \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\mathbf{a}'\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{a}'\mu)}{\sqrt{\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a}}}$$

lo cual nos lleva a que

$$\bar{z} - t_{n-1}(\alpha/2) \frac{s_z}{\sqrt{n}} \leq \mu_z \leq \bar{z} + t_{n-1}(\alpha/2) \frac{s_z}{\sqrt{n}}$$

que se puede reescribir como

$$\mathbf{a}'\bar{\mathbf{x}} - t_{n-1}(\alpha/2) \frac{\sqrt{\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a}}}{\sqrt{n}} \leq \mu_z \leq \mathbf{a}'\bar{\mathbf{x}} + t_{n-1}(\alpha/2) \frac{\sqrt{\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a}}}{\sqrt{n}}$$

- Note que la desigualdad

$$\mathbf{a}'\bar{\mathbf{x}} - t_{n-1}(\alpha/2) \frac{\sqrt{\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a}}}{\sqrt{n}} \leq \mu_z \leq \mathbf{a}'\bar{\mathbf{x}} + t_{n-1}(\alpha/2) \frac{\sqrt{\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a}}}{\sqrt{n}}$$

- Puede interpretarse como un intervalo de confianza sobre los componentes de $\boldsymbol{\mu}$. Por ejemplo, tomando \mathbf{a} a ser 1 en la i -ésima posición y ceros en las demás posiciones, dará el intervalo de confianza habitual sobre μ_i . En este caso $\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a} = s_{ii}$
- De esta forma eligiendo diferentes vectores de coeficientes \mathbf{a} se pueden construir varios intervalos de confianza sobre los componentes de $\boldsymbol{\mu}$, cada uno asociado con un nivel de confianza de $1 - \alpha$

Relaciones de Confianza Simultáneas

- Sin embargo, si tomamos todos los intervalos para μ_i , $i = 1, \dots, p$, cada uno con un nivel de confianza $1 - \alpha$ fijo, la confianza de todas los intervalos tomados en conjunto o simultáneamente ¡no es $1 - \alpha$!
- Intuitivamente, sería deseable asociar un nivel de confianza *colectivo* de $1 - \alpha$ con los intervalos de confianza y que pueda generarse para todas las elecciones de \mathbf{a} .
- Sin embargo, se debe pagar un precio por la conveniencia de considerar un número grande de niveles de confianza simultáneamente: intervalos más anchos (menos precisos) que los intervalos obtenidos para un valor específico de \mathbf{a} , los cuales está dados por:

$$\mathbf{a}'\bar{\mathbf{x}} - t_{n-1}(\alpha/2) \frac{\sqrt{\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a}}}{\sqrt{n}} \leq \mathbf{a}'\mu \leq \mathbf{a}'\bar{\mathbf{x}} + t_{n-1}(\alpha/2) \frac{\sqrt{\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a}}}{\sqrt{n}}$$

Relaciones de Confianza Simultáneas

- Dado un conjunto de datos $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ y un \mathbf{a} particular, el intervalo de confianza anterior es el conjunto de valores $\mathbf{a}'\mu$ para los cuales

$$|t| = \left| \frac{\sqrt{n}(\mathbf{a}'\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{a}'\mu)}{\sqrt{\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a}}} \right| \leq t_{n-1}(\alpha/2)$$

o equivalentemente

$$t^2 = \frac{n(\mathbf{a}'\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{a}'\mu)^2}{\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a}} = \frac{n(\mathbf{a}'(\bar{\mathbf{x}} - \mu))^2}{\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a}} \leq t_{n-1}^2(\alpha/2)$$

- Así que una región de confianza *simultánea* está dada por el conjunto de todos los valores $\mathbf{a}'\mu$ tal que t^2 es relativamente pequeño ¡para todas las elecciones de \mathbf{a} !

Relaciones de Confianza Simultáneas

- Es razonable esperar que la constante $t_{n-1}^2(\alpha/2)$ en la relación anterior será reemplazada por una constante c^2 mas grande, cuando las relaciones de confianza son construidas para muchas elecciones de \mathbf{a}
- Considerando los valores de \mathbf{a} para los cuales $t^2 \leq c^2$, es natural tratar de determinar

$$\max_{\mathbf{a}} t^2 = \max_{\mathbf{a}} \frac{n(\mathbf{a}'(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}))^2}{\mathbf{a}' \mathbf{S} \mathbf{a}}$$

- Ahora por un **lema de maximización**: Para un vector dado \mathbf{d} $p \times 1$, una matriz definida positiva \mathbf{B} $p \times p$, y un vector arbitrario no nulo(no cero) \mathbf{x} , se cumple

$$\max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{(\mathbf{x}' \mathbf{d})^2}{\mathbf{x}' \mathbf{B} \mathbf{x}} = \mathbf{d}' \mathbf{B}^{-1} \mathbf{d}$$

Con el máximo alcanzado cuando $\mathbf{x} = c \mathbf{B}^{-1} \mathbf{d}$ para cualquier constante c .

Lema de maximización:

$$\max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{(\mathbf{x}' \mathbf{d})^2}{\mathbf{x}' \mathbf{B} \mathbf{x}} = \mathbf{d}' \mathbf{B}^{-1} \mathbf{d}$$

Con el máximo alcanzado cuando $\mathbf{x} = c \mathbf{B}^{-1} \mathbf{d}$ para cualquier constante c .

- Ahora bien, si en el lema tomamos $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, $\mathbf{d} = (\bar{\mathbf{x}} - \mu)$ y $\mathbf{B} = \mathbf{S}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{a}} t^2 &= \max_{\mathbf{a}} \frac{n(\mathbf{a}'(\bar{\mathbf{x}} - \mu))^2}{\mathbf{a}' \mathbf{S} \mathbf{a}} \\ &= n \max_{\mathbf{a}} \frac{(\mathbf{a}'(\bar{\mathbf{x}} - \mu))^2}{\mathbf{a}' \mathbf{S} \mathbf{a}} \\ &= n(\bar{\mathbf{x}} - \mu)' \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \mu) = T^2 \end{aligned}$$

y el máximo ocurre cuando $\mathbf{a} \propto \mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \mu)$

Relaciones de Confianza Simultáneas

Resultado: Sea $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ una muestra aleatoria obtenida de una población $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ con $\boldsymbol{\Sigma}$ positiva definida. Entonces, simultáneamente para todo \mathbf{a} , el intervalo

$$\left(\mathbf{a}' \bar{\mathbf{X}} - \sqrt{\frac{(n-1)p}{n(n-p)} F_{p, n-p}(\alpha) \mathbf{a}' \mathbf{S} \mathbf{a}}, \mathbf{a}' \bar{\mathbf{X}} + \sqrt{\frac{(n-1)p}{n(n-p)} F_{p, n-p}(\alpha) \mathbf{a}' \mathbf{S} \mathbf{a}}, \right)$$

Contendrá $\mathbf{a}' \boldsymbol{\mu}$ con probabilidad $1 - \alpha$.

Estos intervalos simultáneos se denominan intervalos T^2 , ya que la probabilidad de cobertura es determinada por la distribución T^2

Relaciones de Confianza Simultáneas

- Nótese que las elecciones sucesivas de $\mathbf{a}' = [100\dots 0]$, $\mathbf{a}' = [010\dots 0]$, ..., $\mathbf{a}' = [000\dots 1]$ para los intervalos T^2 , nos permiten obtener los intervalos de confianza para las medias de los componentes, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$, esto es

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 - \sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{11}}{n}} &\leq \mu_1 \leq \bar{x}_1 + \sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{11}}{n}} \\ \bar{x}_2 - \sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{22}}{n}} &\leq \mu_2 \leq \bar{x}_2 + \sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{22}}{n}} \\ &\vdots \\ \bar{x}_p - \sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{pp}}{n}} &\leq \mu_p \leq \bar{x}_p + \sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{pp}}{n}}\end{aligned}$$

que se mantendrán simultáneamente con probabilidad $1 - \alpha$

- También se pueden hacer elecciones con mas juicio de \mathbf{a}' para los intervalos T^2 , que nos permite probar contrastes especiales sin modificar el coeficiente $1 - \alpha$.
- Por ejemplo si queremos contrastar $\mu_1 - \mu_2$, elegimos \mathbf{a}' como $\mathbf{a}' = [1, -1, 0, \dots, 0]$, este caso $\mathbf{a}' \mathbf{S} \mathbf{a} = s_{11} - 2s_{12} + s_{22}$. Entonces intervalos para diferencias como $\mu_1 - \mu_2$ tienen la forma

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{11} - 2s_{12} + s_{22}}{n}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + \sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{11} - 2s_{12} + s_{22}}{n}}$$

que de igual manera se mantendrán simultáneamente con probabilidad $1 - \alpha$

Ejemplo 1: Intervalos de Confianza Simultáneos

Usando la muestra original de datos bivariados, construir intervalos de confianza simultáneos del 90% para las medias de las variables x_1 y x_2 :

x_{j1}	x_{j2}
1.43	-0.69
1.62	-5.00
2.46	-1.13
2.48	-5.20
2.97	-6.39
4.03	2.87
4.47	-7.88
5.76	-3.97
6.61	2.32
6.68	-3.24
6.79	-3.56
7.46	1.61
7.88	-1.87
8.92	-6.60
9.42	-7.64

Anteriormente calculamos los estadísticos:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 5.26 \\ -3.09 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 7.12 & -0.72 \\ -0.72 & 12.43 \end{bmatrix} \rightarrow S^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1412 & 0.0082 \\ 0.0082 & 0.0809 \end{bmatrix}$$

y

$$\frac{(n-1)p}{n-p} F_{p, n-p}(\alpha) = 5.95$$

Ejemplo 1: Intervalos de Confianza Simultáneos

Nuestras elecciones de \mathbf{a}' son $[1 \ 0]$ y $[0 \ 1]$, que producen los intervalos T^2 :

$$\bar{x}_1 - \sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{11}}{n}} \leq \mu_1 \leq \bar{x}_1 + \sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{11}}{n}}$$

o

$$5.26 - \sqrt{5.95} \sqrt{\frac{7.12}{15}} \leq \mu_1 \leq 5.26 + \sqrt{5.95} \sqrt{\frac{7.12}{15}}$$

o

$$3.579 \leq \mu_1 \leq 6.941$$

$$i.e \mu_1 = 5.26 \pm 1.681, i.e \mu_1 = (3.579, 6.941)$$

Ejemplo 1: Intervalos de Confianza Simultáneos

y

$$\bar{x}_2 - \sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{22}}{n}} \leq \mu_2 \leq \bar{x}_2 + \sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{22}}{n}}$$

o

$$-3.09 - \sqrt{5.95} \sqrt{\frac{12.43}{15}} \leq \mu_2 \leq -3.09 + \sqrt{5.95} \sqrt{\frac{12.43}{15}}$$

o

$$-5.310 \leq \mu_2 \leq -0.870$$

$$i.e \mu_2 = -3.09 \pm 2.220, i.e \mu_2 = (-5.310, -0.870)$$

que se mantendrán simultáneamente con probabilidad $1 - \alpha$

Ejemplo 2: Intervalos de Confianza Simultáneos

Usando la muestra original de datos bivariados, construiremos intervalos de confianza simultáneos del 90% para la suma y la diferencia entre las medias de las dos variables x_1 y x_2 :

x_{j1}	x_{j2}
1.43	-0.69
1.62	-5.00
2.46	-1.13
2.48	-5.20
2.97	-6.39
4.03	2.87
4.47	-7.88
5.76	-3.97
6.61	2.32
6.68	-3.24
6.79	-3.56
7.46	1.61
7.88	-1.87
8.92	-6.60
9.42	-7.64

De nuevo, usaremos los estadísticos ya calculados

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 5.26 \\ -3.09 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 7.12 & -0.72 \\ -0.72 & 12.43 \end{bmatrix} \rightarrow S^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1412 & 0.0082 \\ 0.0082 & 0.0809 \end{bmatrix}$$

y

$$\frac{(n-1)p}{n-p} F_{p, n-p}(\alpha) = 5.95$$

Ejemplo 2: Intervalos de Confianza Simultáneos

Nuestras opciones de \mathbf{a}' son $[1, 1]$ y $[1, -1]$, por lo que los intervalos T^2 son:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p, n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{11} - 2s_{12} + s_{22}}{n}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + \sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p, n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{11} - 2s_{12} + s_{22}}{n}}$$

O

$$5.26 - (-3.09) - \sqrt{5.95} \sqrt{\frac{7.12 - 2(0.72) + 12.43}{15}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 5.26 - (-3.09) + \sqrt{5.95} \sqrt{\frac{7.12 - 2(0.72) + 12.43}{15}}$$

O

$$5.645 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 11.235$$

$$i.e \mu_1 - \mu_2 = 8.35 \pm 2.885, i.e \mu_1 - \mu_2 = (5.645, 11.235)$$

Ejemplo 2: Intervalos de Confianza Simultáneos

y para la suma:

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - \sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{11} - 2s_{12} + s_{22}}{n}} \leq \mu_1 + \mu_2 \leq \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{11} - 2s_{12} + s_{22}}{n}}$$

O

$$5.26 + (-3.09) - \sqrt{5.95} \sqrt{\frac{7.12 - 2(0.72) + 12.43}{15}} \leq \mu_1 + \mu_2 \leq 5.26 + (-3.09) + \sqrt{5.95} \sqrt{\frac{7.12 - 2(0.72) + 12.43}{15}}$$

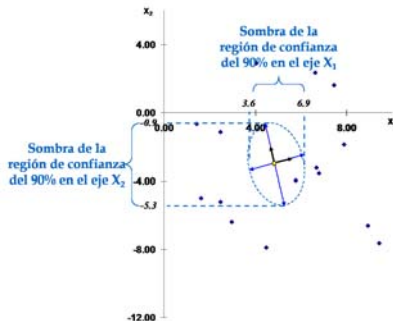
O

$$-0.715 \leq \mu_1 + \mu_2 \leq 5.055$$

$$i.e \mu_1 + \mu_2 = 2.17 \pm 2.885, i.e \mu_1 + \mu_2 = (-0.715, 5.055)$$

que se mantendrán simultáneamente con probabilidad $1 - \alpha$

Ejemplo 2: Intervalos de Confianza Simultáneos



Observe que las proyecciones de la elipse sobre los ejes forman los intervalos de confianza simultáneos

Ejemplo 2: Intervalos de Confianza Simultáneos

Para este ejemplo, obtener los intervalos de confianza para μ_1 y μ_2 de forma separada es decir de manera univariada:

$$\bar{x}_1 - t_{n-1}(\alpha/2)\sqrt{\frac{s_{11}}{n}} \leq \mu_1 \leq \bar{x}_1 + t_{n-1}(\alpha/2)\sqrt{\frac{s_{11}}{n}}$$

o

$$5.26 - 1.761\sqrt{\frac{7.12}{15}} \leq \mu_1 \leq 5.26 + 1.761\sqrt{\frac{7.12}{15}}$$

o

$$4.047 \leq \mu_1 \leq 6.473$$

$$i.e \mu_1 = 5.26 \pm 1.213, i.e., \mu_1 = (4.047, 6.473)$$

Ejemplo 2: Intervalos de Confianza Simultáneos

y

$$\bar{x}_2 - t_{n-1}(\alpha/2) \sqrt{\frac{s_{22}}{n}} \leq \mu_2 \leq \bar{x}_2 + t_{n-1}(\alpha/2) \sqrt{\frac{s_{22}}{n}}$$

o

$$-3.09 - 1.761 \sqrt{\frac{12.43}{15}} \leq \mu_2 \leq -3.09 + 1.761 \sqrt{\frac{12.43}{15}}$$

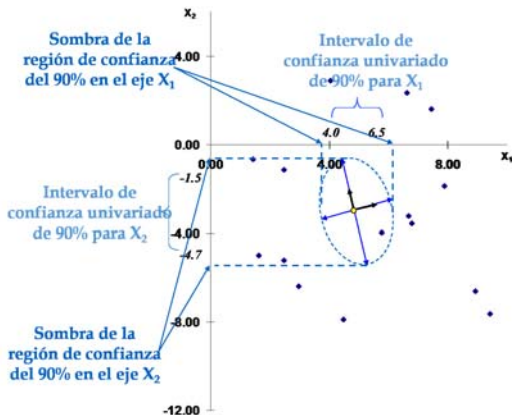
o

$$-4.690 \leq \mu_2 \leq -1.487$$

$$i.e \mu_2 = -3.09 \pm 1.603, i.e., \mu_2 = (-4.690, -1.487)$$

Estos intervalos no garantizan que simultáneamente tendrán un nivel de confianza del $1 - \alpha$, ¿Por qué?

Ejemplo 2: Intervalos de Confianza Simultáneos



Note que los intervalos univariados son más cortos - ¡no consideran la covarianza entre x_1 y x_2 !

Método de Bonferroni de comparaciones múltiples

- Los intervalos T^2 son demasiado anchos si se aplican únicamente a las medias de cada uno de los p componentes
- Frecuentemente el objetivo consiste en estudiar un pequeño número de intervalos de confianza individuales. En estas situaciones es posible considerar otras opciones en lugar de los intervalos simultáneos T^2 para obtener intervalos mas estrechos.
- Un método alternativo para comparaciones multiples es el llamado *método de Bonferroni*, porque se desarrolla a partir de una desigualdad de probabilidad que lleva ese nombre.
- Supongamos que antes de recolectar los datos, se requieren intervalos de confianza sobre m combinaciones $\mathbf{a}'_1\mu, \mathbf{a}'_2\mu, \dots, \mathbf{a}'_m\mu$

Método de Bonferroni de comparaciones múltiples

Desigualdad de Bonferroni:

Sea C_i un intervalo de confianza para el valor $\mathbf{a}_i'\boldsymbol{\mu}$ con $P(C_i \text{ sea verdadera}) = 1 - \alpha_i$, $i = 1, \dots, m$. Entonces

$$P(\text{todos los } C_i \text{ sean verdaderos}) \geq 1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m)$$

- Permite a un investigador controlar la tasa de error global $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m)$, independientemente de la estructura de correlación entre las variables.
- Desarrollemos estimaciones de intervalos simultáneos para el conjunto de los componentes μ_i de $\boldsymbol{\mu}$.
- Debido a que no tenemos información sobre la importancia relativa de los componentes μ_i , cada α_i se obtiene dividiendo el nivel global α entre el número de intervalos de confianza a probar, m .

Método de Bonferroni de comparaciones múltiples

- Así, tenemos que los intervalos individuales t tienen la forma

$$\bar{x}_i \pm t_{n-1} \left(\frac{\alpha_i}{2} \right) \sqrt{\frac{s_{ii}}{n}}, \quad i = 1, \dots, m, \quad \text{con } \alpha_i = \frac{\alpha}{m}$$

- Ahora bien, ya que

$$P \left(\bar{x}_i \pm t_{n-1} \left(\frac{\alpha}{2m} \right) \sqrt{\frac{s_{ii}}{n}} \text{ contiene a } \mu_i \right) = 1 - \frac{\alpha}{m}, \quad i = 1, \dots, m$$

- De la desigualdad de Bonferroni tenemos que

$$\begin{aligned} P \left(\bar{x}_i \pm t_{n-1} \left(\frac{\alpha}{2m} \right) \sqrt{\frac{s_{ii}}{n}} \text{ contiene a } \mu_i, \text{ para todo } i \right) \\ \geq 1 - \left(\frac{\alpha}{m} + \frac{\alpha}{m} \cdots + \frac{\alpha}{m} \right) = 1 - \alpha. \end{aligned}$$

Método de Bonferroni de comparaciones múltiples

- Por tanto, con un nivel de confianza global mas grande o igual a $1 - \alpha$, podemos construir los $m = p$ intervalos de confianza de Bonferroni:

$$\begin{aligned}\bar{X}_1 - t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2p}\right)\sqrt{\frac{s_{11}}{n}} &\leq \mu_1 \leq \bar{X}_1 + t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2p}\right)\sqrt{\frac{s_{11}}{n}} \\ \bar{X}_2 - t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2p}\right)\sqrt{\frac{s_{22}}{n}} &\leq \mu_2 \leq \bar{X}_2 + t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2p}\right)\sqrt{\frac{s_{22}}{n}} \\ &\vdots \\ \bar{X}_p - t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2p}\right)\sqrt{\frac{s_{pp}}{n}} &\leq \mu_p \leq \bar{X}_p + t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2p}\right)\sqrt{\frac{s_{pp}}{n}}\end{aligned}$$

- Comparados con los intervalos simultáneos T^2 , los percentiles $t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2p}\right)$ reemplazan a $\sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)}$

Ejemplo 3: Obtención de intervalos simultáneos mediante Método de Bonferroni

Utiliza la muestra original de datos bivariados para construir intervalos de confianza simultáneos del 90% de Bonferroni para las medias de las variables x_1 y x_2 .

x_{j1}	x_{j2}
1.43	-0.69
1.62	-5.00
2.46	-1.13
2.48	-5.20
2.97	-6.39
4.03	2.87
4.47	-7.88
5.76	-3.97
6.61	2.32
6.68	-3.24
6.79	-3.56
7.46	1.61
7.88	-1.87
8.92	-6.60
9.42	-7.64

De nuevo, usaremos los estadísticos ya calculados

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 5.26 \\ -3.09 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 7.12 & -0.72 \\ -0.72 & 12.43 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3: Obtención de intervalos simultáneos mediante Método de Bonferroni

- Tenemos que $\frac{\alpha}{2p} = \frac{.1}{4} = .025$, entonces $t_{n-1}(\frac{\alpha}{2p}) = t_{14}(.025) = \pm 2.145$.
- El intervalo para μ_1 está dado por

$$\bar{x}_1 - t_{n-1}(\alpha/2p) \sqrt{\frac{s_{11}}{n}} \leq \mu_1 \leq \bar{x}_1 + t_{n-1}(\alpha/2p) \sqrt{\frac{s_{11}}{n}}$$

o

$$5.26 - 2.145 \sqrt{\frac{7.12}{15}} \leq \mu_1 \leq 5.26 + 2.145 \sqrt{\frac{7.12}{15}}$$

o

$$3.782 \leq \mu_1 \leq 6.738$$

$$i.e \mu_1 = 5.26 \pm 1.478, i.e., \mu_1 = (3.782, 6.738)$$

Ejemplo 3: Obtención de intervalos simultáneos mediante Método de Bonferroni

- El intervalo para μ_2 está dado por

$$\bar{x}_2 - t_{n-1}(\alpha/2p)\sqrt{\frac{s_{22}}{n}} \leq \mu_2 \leq \bar{x}_2 + t_{n-1}(\alpha/2p)\sqrt{\frac{s_{22}}{n}}$$

o

$$-3.09 - 2.145\sqrt{\frac{12.43}{15}} \leq \mu_2 \leq -3.09 + 2.145\sqrt{\frac{12.43}{15}}$$

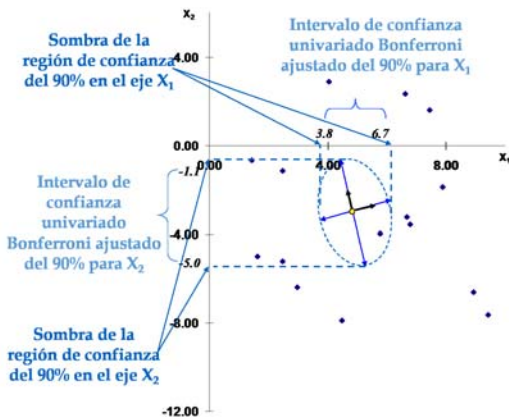
o

$$-5.043 \leq \mu_2 \leq -1.137$$

$$i.e. \mu_2 = -3.09 \pm 1.953, i.e., \mu_2 = (-5.043, -1.137)$$

- Estos intervalos no garantizan mantenerse simultáneamente con probabilidad $1 - \alpha$. ¿Por qué?

Ejemplo 3: Obtención de intervalos simultáneos mediante Método de Bonferroni



Obsérvese que los intervalos univariados ajustados de Bonferroni son aún más cortos - ¡no consideran la covarianza entre x_1 y x_2 !

Inferencia sobre el vector de medias de la población para muestras grandes

- Cuando la muestra es muy grande ($n \gg p$) no necesitamos confiar en la normalidad multivariada de la población para hacer inferencias sobre el vector de medias μ (¿por qué no?).
- Como consecuencia del TCL sabemos que

$$n(\overline{\mathbf{X}} - \mu)' \mathbf{S}^{-1} (\overline{\mathbf{X}} - \mu) \sim \chi_p^2$$

- Por tanto podemos decir que

$$P \left[n(\overline{\mathbf{X}} - \mu)' \mathbf{S}^{-1} (\overline{\mathbf{X}} - \mu) \leq \chi_p^2(\alpha) \right] \doteq 1 - \alpha$$

donde $\chi_p^2(\alpha)$ es el percentil superior del $100(\alpha)\%$ de la distribución χ_p^2 .

Inferencia sobre el vector de medias de la población para muestras grandes

- Este resultado conduce directamente a obtener intervalos de confianza simultáneos y pruebas de hipótesis para el vector de medias μ , para una muestra grande ($n \gg p$)
- Sea $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ una muestra aleatoria de una población con media μ y matriz de covarianza Σ positiva definida, que sigue alguna distribución arbitraria.
- Cuando $n - p$ es grande, la hipótesis

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

se rechaza a favor de

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

a un nivel de significancia α si

$$n(\bar{\mathbf{x}} - \mu)' \mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \mu) > \chi_p^2(\alpha)$$

Inferencia sobre el vector de medias de la población para muestras grandes

- La diferencia entre la prueba de la teoría normal (muestras pequeñas) y la prueba para muestras grandes es el valor crítico de la distribución:

$$\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p, n-p}(\alpha) \text{ vs } \chi_p^2(\alpha)$$

- De hecho, a medida que $n-p$ crece, la distribución del estadístico de prueba de la teoría normal (muestras pequeñas) casi seguramente se aproxima a la distribución del estadístico de prueba de muestra grande:

$$\frac{(n-1)p}{n(n-p)} F_{p, n-p}(\alpha) \xrightarrow[n-p \rightarrow \infty]{} \chi_p^2(\alpha)$$

- Por lo tanto, nunca es completamente inapropiado utilizar la prueba de la teoría normal (muestra pequeña), *sólo es mas conservador*.

Inferencia sobre el vector de medias de la población para muestras grandes

- También podemos construir intervalos de confianza simultáneos dada una muestra grande ($n \gg p$) para el vector de medias μ .
- Sea $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ una muestra aleatoria de una población con media μ , matriz de covarianza Σ positiva definida, que sigue alguna distribución arbitraria. Cuando $n - p$ es grande

$$\mathbf{a}'\bar{\mathbf{x}} \pm \sqrt{\chi_p^2(\alpha)} \sqrt{\frac{\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a}}{n}}$$

Contendrá a $\mathbf{a}'\mu$, para cada \mathbf{a} , con probabilidad aproximada de $1 - \alpha$.

- En consecuencia, podemos construir los siguientes intervalos de confianza simultáneos de $100(1 - \alpha)\%$ para las μ_i :

$$\bar{x}_i \pm \sqrt{\chi_p^2(\alpha)} \sqrt{\frac{S_{ii}}{n}}, \quad i = 1, \dots, p$$

Inferencia sobre el vector de medias de la población para muestras grandes

- Además, para todos los pares $(\mu_i, \mu_k), i, k = 1, \dots, p$, tenemos que las elipses centradas en la media muestral

$$n[\bar{x}_i - \mu_i, \bar{x}_k - \mu_k] \begin{bmatrix} s_{ii} & s_{ik} \\ s_{ik} & s_{kk} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{x}_i - \mu_i \\ \bar{x}_k - \mu_k \end{bmatrix} \leq \chi_p^2(\alpha)$$

Contienen a (μ_i, μ_k) con probabilidad $1 - \alpha$.

Ejemplo: Inferencia sobre el vector de medias de la población para muestras grandes

- Supongamos que recolectamos una muestra aleatoria de 107 observaciones en $p = 5$ dimensiones y obtuvimos el siguiente resumen estadístico de los datos:

Variable	Sample Mean (\bar{x}_i)	Sample Standard Deviation ($\sqrt{s_{ii}}$)
X_1	58.6	4.44
X_2	19.3	2.39
X_3	101.5	8.87
X_4	67.0	3.99
X_5	42.5	4.69

- Construya los cinco intervalos de confianza simultáneos del 90 % para las medias de los componente individuales μ_i , $i = 1, \dots, 5$.

Ejemplo: Inferencia sobre el vector de medias de la población para muestras grandes

Tenemos una muestra grande ($n = 107 \gg p = 5$), por lo que usaremos el enfoque de una muestra grande para construir los intervalos de confianza simultáneos del 90% para los componentes individuales de μ .

$$\begin{aligned}\mu_1 : \bar{x}_1 \pm \sqrt{\chi_p^2(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{11}}{n}} &= 58.6 \pm \sqrt{9.236} \frac{4.44}{\sqrt{107}} \\ 58.6 \pm 6.034 &= (52.565, 64.635)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_2 : \bar{x}_2 \pm \sqrt{\chi_p^2(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{22}}{n}} &= 19.3 \pm \sqrt{9.236} \frac{2.39}{\sqrt{107}} \\ 19.3 \pm 3.248 &= (16.052, 22.548)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_3 : \bar{x}_3 \pm \sqrt{\chi_p^2(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{33}}{n}} &= 101.5 \pm \sqrt{9.236} \frac{8.87}{\sqrt{107}} \\ 101.5 \pm 12.056 &= (89.444, 113.556)\end{aligned}$$

Ejemplo: Inferencia sobre el vector de medias de la población para muestras grandes

$$\mu_4 : \bar{x}_4 \pm \sqrt{\chi_p^2(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{44}}{n}} = 67.0 \pm \sqrt{9.236} \frac{3.99}{\sqrt{107}}$$

$$67.0 \pm 5.423 = (61.577, 72.423)$$

$$\mu_5 : \bar{x}_5 \pm \sqrt{\chi_p^2(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{55}}{n}} = 42.5 \pm \sqrt{9.236} \frac{4.69}{\sqrt{107}}$$

$$42.5 \pm 6.374 = (36.126, 48.874)$$

Si usamos estos intervalos para probar la hipótesis nula

$$H_0 : \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 \\ 25 \\ 111 \\ 59 \\ 34 \end{bmatrix}$$

a un nivel de significancia de $\alpha = 1 - 0.90 = 0.10$, rechazaríamos la hipótesis nula (¿por qué?).