

# Álgebra Matricial

## Tarea 6

J. Antonio García, jose.ramirez@cimat.mx

27 de noviembre de 2017

1. Sea  $V$  un espacio con producto interno. Demuestre la ley del paralelogramo:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \forall x, y \in V$$

Tomemos

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x + y, x \rangle + \langle x + y, y \rangle \\ &= (\langle x, x \rangle + \langle y, x \rangle) + (\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle) \\ &= \|x\|^2 + 2\langle y, x \rangle + \|y\|^2\end{aligned}\tag{1}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\|x - y\|^2 &= \langle x - y, x - y \rangle = \langle x - y, x \rangle + \langle x - y, -y \rangle \\ &= (\langle x, x \rangle - \langle y, x \rangle) + (-\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle) \\ &= \|x\|^2 - 2\langle y, x \rangle + \|y\|^2\end{aligned}\tag{2}$$

Sumando (1) y (2) tenemos el resultado.

2. Sea  $S = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 3, 3)\} \subset R^3$ . Encuentre  $\text{gen}(S)$ . Use el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt para obtener una base ortogonal, y luego una ortonormal de  $\text{gen}(S)$ .

Al colocar los vectores de  $S$  en las columnas de una matriz y reducir por Gauss, notamos que los vectores son l.i. por lo que generan  $R^3$ . Utilizando el método de Gram-Schmidt tenemos (llamando  $z_1 = (1, 0, 1)^t$ ,  $z_2 = (0, 1, 1)^t$ ,  $z_3 = (1, 3, 3)^t$ ):

$$o_1 = z_1$$

Con lo que podemos escribir el primer vector ortonormal como  $q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)^t$

Luego

$$\begin{aligned}o_2 &= z_2 - \frac{\langle z_2, o_1 \rangle}{\langle o_1, o_1 \rangle} o_1 \\ &= z_2 - \frac{1}{2} o_1 = \frac{1}{2}(-1, 2, 1)^t \\ \Rightarrow q_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1)^t\end{aligned}$$

Y finalmente

$$\begin{aligned}o_3 &= z_3 - \frac{\langle z_3, o_1 \rangle}{\langle o_1, o_1 \rangle} o_1 - \frac{\langle z_3, o_2 \rangle}{\langle o_2, o_2 \rangle} o_2 \\ &= z_3 - 2o_1 - \frac{4}{3}o_2 = \frac{1}{3}(1, 1, -1)^t \\ \Rightarrow q_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)^t\end{aligned}$$

Y tenemos que  $[q_1, q_2, q_3]$  son ortogonales y unitarios.

3. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Encuentre una matriz ortogonal  $P$  y una diagonal  $D$  tal que  $A = PDP^t$ .

Como la matriz es simétrica y definida positiva entonces existe la matriz  $P$  citada, desarrollando por el primer reglón  $\det(A - \lambda I_3)$  obtenemos que  $\rho_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4$ .

Usando división sintética encontramos que las raíces del polinomio característico son 1 (con multiplicidad dos) y 4. Por un resultado visto en clase sabemos que los vectores propios de una matriz simétrica son ortogonales por lo que los vectores propios asociados a los anteriores valores propios formarían una buena base codificada en la matriz  $P$ . Sin embargo como la multiplicidad del valor propio 1 es dos, éste valor no proporciona dos valores propios adecuados, sin embargo al considerar el espacio nulo de  $A - \lambda I_3$  obtenemos que los vectores  $z_1 = (1 - 1, 1, 0)^t$  y  $z_2 = (-1, 0, 1)^t$  generan dicha nulidad. Por otro lado al considerar de  $A - 4\lambda$  obtenemos el vector propio  $z_3 = (3, 1, 1)^t$ .

Al considerar la matriz  $[z_1, z_2, z_3]$  y reducir usando Gauss obtenemos que son l.i. por lo que podemos usar Gram-Schmidt para obtener vectores ortogonales a partir de ellos.

$$o_1 = z_1$$

Con lo que podemos escribir el primer vector ortonormal como  $q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^t$  Luego

$$\begin{aligned} o_2 &= z_2 - \frac{\langle z_2, o_1 \rangle}{\langle o_1, o_1 \rangle} o_1 \\ &= z_2 - \frac{1}{2} o_1 = (-1, 0, 1) - \frac{1}{2}(-1, 1, 0)^t = (-1/2, -1/2, 1)^t \\ &\Rightarrow q_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2)^t \end{aligned}$$

Y finalmente

$$\begin{aligned} o_3 &= z_3 - \frac{\langle z_3, o_1 \rangle}{\langle o_1, o_1 \rangle} o_1 - \frac{\langle z_3, o_2 \rangle}{\langle o_2, o_2 \rangle} o_2 \\ &= z_3 + o_1 + \frac{2}{3} o_1 = \frac{1}{6}(10, 10, 10)^t \\ &\Rightarrow q_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^t \end{aligned}$$

Y tenemos que  $P = [q_1, q_2, q_3]$  son ortogonales y unitarios. Escribiendo

$$\begin{aligned} PDP^{-1} &= \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 4/\sqrt{3} & 4/\sqrt{3} & 4/\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3/6 + 1/6 + 8/6 & -3/6 + 1/6 + 8/6 & -2/6 + 8/6 \\ -3/6 + 1/6 + 8/6 & 3/6 + 1/6 + 8/6 & -2/6 + 8/6 \\ -2/6 + 8/6 & -2/6 + 8/6 & 4/6 + 8/6 \end{pmatrix} = A \end{aligned}$$