Álgebra Matricial

Tarea 6

J. Antonio García, jose.ramirez@cimat.mx

27 de noviembre de 2017

1. Sea V un espacio con producto interno. Demuestre la ley del paralelogramo:

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2, \forall x, y \in V$$

Tomemos

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= <x+y, x+y> = <x+y, x> + <x+y, y> \\ &= (<x,x> + <y,x>) + (<x,y> + <y,y>) \\ &= ||x||^2 + 2<y,x> + ||y||^2 \end{aligned} \tag{1}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} ||x-y||^2 &= <x-y, x-y> = <x-y, x> + <x-y, -y> \\ &= (<x,x> - <y,x>) + (-<x,y> + <y,y>) \\ &= ||x||^2 - 2<y,x> + ||y||^2 \end{aligned} \tag{2}$$

Sumando (1) y (2) tenemos el resultado.

2. Sea $S = \{(1,0,1), (0,1,1), (1,3,3)\} \subset R^3$. Encuentre $gen(S)$. Use el proceso de ortogonalizacion de Gram-Schmidt para obtener una base ortogonal, y luego una ortonormal de $gen(S)$.

Al colocar los vectores de S en las columnas de una matriz y recudir por Gauss, notamos que los vectores son l.i. por lo que generan R^3. Utilizanso el método de Gram-Schimdt tenemos (llamando $z_1 = (1,0,1)^t, z_2 = (0,1,1)^t, z_3 = (1,3,3)^t$:

$$o_1 = z_1$$

Con lo que podemos escribir el primer vector ortonormal como $q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^t$

Luego

$$\begin{aligned} o_2 &= z_2 - \frac{<z_2, o_1>}{<o_1, o_1>} o_1 \\ &= z_2 - \frac{1}{2} o_1 = \frac{1}{2}(-1,2,1)^t \\ &\Rightarrow q_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)^t \end{aligned}$$

Y finalmente

$$\begin{aligned} o_3 &= z_3 - \frac{<z_3, o_1>}{<o_1, o_1>} o_1 - \frac{<z_3, o_2>}{<o_2, o_2>} o_1 \\ &= z_3 - 2o_1 - \frac{4}{3} o_1 = \frac{1}{3}(1,1,-1) \\ &\Rightarrow q_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^t \end{aligned}$$

Y tenemos que $[q_1, q_2, q_3]$ son ortogonales y unitarios.

3. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Encuentre una matriz ortogonal P y una diagonal D tal que $A = PDP^t$.

Como la matriz es simétrica y definida positiva entonces existe la matriz P citada, desarrollando por el primer reglón $det(A - \lambda I_3)$ obtenemos que $\rho_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4$.
Usando división sintética encontramos que las raíces del polinomio característico son 1 (con multiplicidad dos) y 4. Por un resultado visto en clase sabemos que los vectores propios de una matriz simétrica son ortogonales por lo que los vectores propios asociados a los anteriores valores propios formarían una buena base codificada en la matriz P Sin embargo como la multiplicidad del valor propio 1 es dos, éste valor no proporciona dos valores propios adecuados, sin embargo al considerar el espacio nulo de $A - \lambda I_3$ obtenemos que los vectores $z_1 = (1 - 1, 1, 0)^t$ y $z_2 = (-1, 0, 1)^t$ generan dicha nulidad. Por otro lado al considerar de $A - 4\lambda$ obtenemos el vector propio $z_3 = (3, 1, 1)^t$.
Al considerar la matriz $[z_1, z_2, z_3]$ y reducir usando Gauss obtenemos que son l.i. por lo que podemos usar Gram-Schmidt para obtener vectores ortogonales a partir de ellos.

$$o_1 = z_1$$

Con lo que podemos escribir el primer vector ortonormal como $q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^t$ Luego

$$\begin{aligned} o_2 &= z_2 - \frac{< z_2, o_1 >}{< o_1, o_1 >} o_1 \\ &= z_2 - \frac{1}{2} o_1 = (-1, 0, 1) - \frac{1}{2}(-1, 1, 0)^t = (-1/2, -1/2, 1)^t \\ &\Rightarrow q_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2)^t \end{aligned}$$

Y finalmente

$$\begin{aligned} o_3 &= z_3 - \frac{< z_3, o_1 >}{< o_1, o_1 >} o_1 - \frac{< z_3, o_2 >}{< o_2, o_2 >} o_1 \\ &= z_3 + o_1 + \frac{2}{3} o_1 = \frac{1}{6}(10, 10, 10)^t \\ &\Rightarrow q_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^t \end{aligned}$$

Y tenemos que $P = [q_1, q_2, q_3]$ son ortogonales y unitarios. Escribiendo

$$\begin{aligned} PDP^{-1} &= \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 4/\sqrt{3} & 4/\sqrt{3} & 4/\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3/6 + 1/6 + 8/6 & -3/6 + 1/6 + 8/6 & -2/6 + 8/6 \\ -3/6 + 1/6 + 8/6 & 3/6 + 1/6 + 8/6 & -2/6 + 8/6 \\ -2/6 + 8/6 & -2/68/6 & 4/6 + 8/6 \end{pmatrix} = A \end{aligned}$$