Tarea1

José Antonio García Ramirez

Enero 29, 2018

Ejercicio 1.2. Sistema IEEE-754

Para el sistema IEEE-754 visto en clase, determine el valor de los siguientes números:

1. *El penúltimo número representable, y*
2. *El segundo número positivo más pequeño representable.*

¿Qué consecuencias buenas o malas habrá en la diferencia de espaciamiento entre los números del sistema?

Para el inciso 1:

Como vimos en clase, el número más grande (positivo) representable en la norma IEEE-754 tienen mantisa: $m = 1\ 1 \dots 1$ donde la unidad se repite 52 veces aparte de la inicial, además su exponente es 1023 por lo que este número (el de mayor tamaño representable) es de la forma:

$$x_{max} = \sum_{i=970}^{1022} 2^i \approx 1.8 \times 10^{308}$$

Para obtener el penúltimo número (positivo porque el caso negativo es análogo y solo requiere cambiar el signo de positivo a negativo) solo se requiere apagar (igualar a cero) el último bit de la mantisa (con lo que se le resta a x_{max} solo un término, el más pequeño) quedando esta de la forma $m = 1\ 1 \dots 10$ donde la unidad (aparte de la inicial fija) se repite 51 veces, así si llamamos x^* al número que pide el ejercicio éste es de la forma:

$$x^* = \left(\sum_{i=1}^{52} 2^{-i} \right) 2^{1023} = \sum_{i=971}^{1022} \approx 8.99 \times 10^{307}$$

Para el inciso 2:

También por lo visto en clase sabemos que el menor número representable tiene como mantisa $m = 10 \dots 0$ (donde el cero se repite 52 veces) y exponente -1023, éste número está dado por:

$$x_{min} = 2^{-1024}$$

Por lo que para obtener el segundo número positivo más pequeño solo requerimos prender el ultimo bit de la mantisa de x_{min}, quedando $m = 1\ 0 \dots 01$ (donde el cero se repite 51 veces. Así el número buscado es de la forma:

$$x^{**} = (2^{-1} + 2^{-53})2^{-1023} = 2^{-1024} + 2^{-1076}$$

Sobre las consecuencias buenas respecto al espaciamiento entre los números del sistema es que el permite cubrir un rango "bastante grande" pues como vimos en clase los números más grandes son del orden de 10^{308}, otro aspecto bueno es que la precisión alrededor del cero (es decir números pequeños) es grande y en la vecindad del cero (y la unidad) la densidad de los números del sistema se incrementa. En contrapunto lo malo del espaciamiento de los números en este sistema es que el redondeo absoluto en números alrededor del máximo representable en verdad es muy grande (rebasa el orden de 10^6) y como argumento final entre el cero y el mínimo número (positivo y su respectivo inverso aditivo) hay un vacío.

Ejercicio 1.3. Leyes asociativa y distributiva

Muestre un ejemplo en el que las leyes asociativa y distributiva no se cumplen, acorde a las expresiones (1.24) y (1.25).

Encuentre además las cotas para los números de punto flotante y tales que se cumpla $x \oplus y = x$

Para la primer parte basta considerar un numero que afecte el redondeo. Tomemos los números x, y y z como sigue, para mostrar que no se cumple la asociatividad:

```
z <- -2^{1023}        #numero muy grande en la aritmpetica de punto flotante
z
```

```
## [1] -8.988466e+307
```

```
x <- 1.8*10^{307}     #otro numero muy grande rayando en el maximo
y <- x*9              # un numero mayor al anterior rayando en el maximo de la aritmetica
( (x+y)+z == x+(y+z) )          #checamos si la asociatividad se cumple
```

```
## [1] FALSE
```

Y para mostrar que la distributividad tampoco se cumple consideremos:

```
z <- 2^{-1023}      #un numero muy pequeño
z
```

```
## [1] 1.112537e-308
```

```
x <- 1.8*10^{307}   #x,y como en el apartado anterior
y <- x*9
( (x+y)*z == (x*z)+(y*z) )        #checamos que la distributividad no se cumple
```

```
## [1] FALSE
```

```
                                  #(sin caer en el overflow)
```

Para la ultima parte del ejercicio basta tomar $y = eps$ con la definición de *eps* dada en clase, así tenemos que :

```
y <- .Machine$double.eps   #el eps del entorno R, es una porpiedad de la lista .Machine
x <- 10
(x+y == x)
```

```
## [1] TRUE
```

Esta cifra `.Machine$double.eps` es la cota máxima que pide el ejercicio pues cualquier numero menor que él satisface lo que se requiere, consideremos el siguiente ejemplo (del calculo explicito de esta cota de *eps* nos ocupamos en el siguiente ejercicio).

```
y <- .Machine$double.eps
y
```

```
## [1] 2.220446e-16
```

```
y <- 2.22e-17       #un numero 10 veces menor al anterior valor de y
y
```

```
## [1] 2.22e-17
```

```
x <- 10
(x+y == x)
```

```
## [1] TRUE
```

Ejercicio 1.7. Precisión de una computadora

El nivel de precisión de una computadora está definido como el número

$$eps = min_{x \in D, x \neq 0} | \frac{rd(x) - x}{x} |$$

en donde $D = [x_{min}, x_{negmax}] \cup \{0\} \cup [x_{posmin}, x_{max}]$ y $rd(.)$ *denota la función de redondeo.*

¿Cómo cree que podría determinarse esta constante experimentalmente? Defina un algoritmo para ello, impleméntelo y determine así el número eps de su computadora

Para facilitar el calculo fijemos x a la unidad y comencemos con un eps igual a la unidad, probemos cuando la suma de estas dos cantidades es mayor a la unidad y dividamos eps entre dos para obtenerlo.

```
eps <- 1              #conjetura inicial
x <- 1                #fijamos un valor, la unidad facilita el calculo
while( (x+(eps/2) > 1 ) ) #checamos cuando la conjetura deja de ser importante
{
 eps <- eps / 2           #si el aporte de eps es importante lo dividimos entre dos
}
eps                       #nuestro eps despues de las iteraciones necesarias
```

```
## [1] 2.220446e-16
```

El cual coincide con la constante $.Machine\$double.eps$ del lenguaje (y arquitectura de 64 bits) de R

```
.Machine$double.eps
```

```
## [1] 2.220446e-16
```

Ejercicio 1.4. Generando una APF

Invente su propio sistema de números de punto flotante utilizando base binaria y espacio de 2 Bytes (16 bits). Defina una longitud de mantisa y encuentre los números positivos de mayor y menor tamaño para este sistema. ¿Cuántos números distintos puede representar su sistema?

Consideremos un sistema en donde los números son "densos" en el rango que alcanzan, es decir que tengamos una gran cantidad de números del sistema en la recta (aunque el sistema sea de corto alcance es decir que su máximo y mínimo sean pequeños). Para la cual ocuparemos más lugares o una cantidad parecida para la mantisa (en proporción al estándar IEEE-754). Primero ocupemos el primer bit para guardar el signo (para que los números del sistema tengan inversos aditivos y se pueda restar). Definamos un tamaño de mantisa de 13, por ende, el exponente puede ocupar solo 2 posiciones más. Considerando estos dos bits (del exponente) tenemos el rango $\{0, 1, 2, 3\}$ consideremos un traslado $T = 1$ así el exponente se mueve en $\{-1, 0, 1, 2\}$ podemos ocupar el valor 2 del exponente para representar los casos especiales de infinito. Así el numero mayor que puede representar el sistema tienen una mantisa $m = 1 \ldots 1$ donde la unidad se repite 14 veces (contando la primera que es fija) y un exponente de 1. Así el número máximo positivo representable es:

$$x_{max} = \left(2^{-1} + 2^{-2} + \cdots + 2^{-14}\right) 2^1 = 2^0 + 2^{-1} + \cdots + 2^{-13} \approx 1.99878$$

La aproximación la calculamos a continuación

```
potencias <- -13:0
terminos <- 2^potencias     #aprovechamos la vectorizacion de las operaciones en R
x.max <- sum(terminos)
x.max
```

```
## [1] 1.999878
```

En cuanto al numero positivo de menor tamaño representable es el que tiene mantisa $m = 10\dots0$ donde el cero se repite 13 veces y un exponente de -1, con lo cual el número es de la forma:

$$x_{min} = (2^{-1})2^{-1} = 2^{-2} \approx 0.25$$

En cuanto a la cantidad de números representables en el sistema tenemos que la mantisa proporciona 2^{13} posibilidades y el exponente 2^2 posibilidades con lo que se tienen 2^{15} posibles números positivos y al considerar los negativos el sistema permite $2^{16} = 65,536$ números posibles.

Ejercicio 1.5. Sistema decimal

Escriba ahora un sistema decimal (b=10) con una mantisa de 4 cifras y un exponente de 3 cifras. Esto aunado al signo en la representación da un total de 8 'trozos' de información a ser guardados para los elementos de la aritmética. De esta manera, la construcción es más intuitiva que en los sistemas binarios. ¿Por qué cree entonces que no se usa el sistema decimal en los sistemas de cómputo?

A pesar de que al aumentar la base (en este caso tomar 10 como base) aumenta el número de posibles números en el sistema, pudiendo con ello incrementar el rango del sistema es decir incrementar el número máximo representable además de que la mantisa puede generar más posibilidades de números (en este caso en particular 10^4). Sin embargo al tomar una base de 10 se requiere representar a los elementos $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ que ocupan los lugares (bits) de memoria del número en el sistema. El sistema decimal requiere de la distinción de los elementos $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ lo cual se podría identificar con intervalos de intensidad o duración del impulso eléctrico sin embargo en la práctica eso presentaría problemas de interpretación debido a factores físicos y si esto es implementable provocaría errores tan solo en la codificación de los números por ello no se utiliza el sistema decimal en los sistemas de cómputo prefiriendo al binario que solo requiere codificar $\{0, 1\}$ lo cual es posible con la presencia o ausencia de cualquier impulso eléctrico .

Ejercicio 1.8. Aproximación de Taylor

Considere la aproximación a la función exponencial dada por la suma de Taylor

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Escriba un pequeño programa que calcule esta suma utilizando una cantidad diferente de términos en la aproximación para $n \in \{1, 2, \dots, 20\}$ y considere los cálculos para valores de $x \in \{-10, -1, 1, 10\}$:

1. *Compare en una tabla la calidad de los resultados con el resultado de la función* 'exp(x)' *de MATLAB (en mi caso utilice R) para los 20 niveles de aproximación.*
2. *Explique los malos resultados para valores negativos de x y modifique su algoritmo de cálculo para que la calidad de los resultados no dependa del signo de x. Repita la comparación del inciso (a) con el algoritmo modificado.*

Para la parte 1:

En las siguientes líneas implementé el programa que se requiere. No se encontró lo que comenta el ejercicio, malas aproximaciones para valores negativos.

```
exp.Taylor <- function(n, x)
{
  #n (int):      nivel de aproximación
  #x (double):  punto sobre el cual se aproxima en la recta real
  indices <- 0:n                                #generamos los indices sobre los que
                                                #se genera la suma
  factoriales <- mapply(FUN = factorial, indices) #obtenemos el factorial de cada
```

```r
                                                  #termino de la suma
  resul <- (x^indices)/factoriales              #evaluamos cada termino de la suma
  return(sum(resul))                      # se regresa la suma de los 'n' termminos
}
tabla <- data.frame(n = 1:20)           #generamos los 20 niveles y en las lineas
                                     #siguientes evaluamos la funcion que implementamos
                                      #en los puntos y sus respectivos valores 'exactos'
                                      #en los puntos -10, -1, ,1 y 10
tabla$alrededor_neg10 <- mapply(exp.Taylor, tabla$n, rep(-10, dim(tabla)[1]))
tabla$exacto_neg10 <- exp(-10)          #comparamos contra el valor 'exacto'
tabla$alrededor_neg1 <- mapply(exp.Taylor, tabla$n, rep(-1, dim(tabla)[1]))
tabla$exacto_neg1 <- exp(-1)
tabla$alrededor_1 <- mapply(exp.Taylor, tabla$n, rep(1, dim(tabla)[1]))
tabla$exacto_1 <- exp(1)
tabla$alrededor_10 <- mapply(exp.Taylor, tabla$n, rep(10, dim(tabla)[1]))
tabla$exacto_10 <- exp(10)
                                    #calculamos el error como la diferencia entre
                                    #lo calculado por la funcion exp.Taylor() y la
                                    #la implementacion exp() de R
tabla$error_neg10 <-tabla$alrededor_neg10 - tabla$exacto_neg10
tabla$error_neg1 <-tabla$alrededor_neg1 - tabla$exacto_neg1
tabla$error_1 <-tabla$alrededor_1 - tabla$exacto_1
tabla$error_10 <-tabla$alrededor_10 - tabla$exacto_10
library(xtable)                   #package para generar las tablas en latex desde R
row.names(tabla) <- NULL
tabla.error <- xtable(tabla[,c("n", "error_neg10", "error_neg1", "error_1", "error_10"  )])
#print(tabla.error, type="latex")
```

n	error_neg10	error_neg1	error_1	error_10
1	-9.00	-0.37	-0.72	-22015.47
2	41.00	0.13	-0.22	-21965.47
3	-125.67	-0.03	-0.05	-21798.80
4	291.00	0.01	-0.01	-21382.13
5	-542.33	-0.00	-0.00	-20548.80
6	846.56	0.00	-0.00	-19159.91
7	-1137.57	-0.00	-0.00	-17175.78
8	1342.59	0.00	-0.00	-14695.62
9	-1413.14	-0.00	-0.00	-11939.89
10	1342.59	0.00	-0.00	-9184.16
11	-1162.62	-0.00	-0.00	-6678.95
12	925.05	0.00	-0.00	-4591.27
13	-680.85	-0.00	-0.00	-2985.37
14	466.22	0.00	-0.00	-1838.30
15	-298.49	-0.00	-0.00	-1073.58
16	179.45	0.00	-0.00	-595.63
17	-101.69	-0.00	0.00	-314.49
18	54.50	0.00	0.00	-158.29
19	-27.71	0.00	0.00	-76.09
20	13.40	0.00	0.00	-34.98

Sin embargo, sí se encontró que en general el error es mayor cuando nos alejamos del cero, como es de esperarse en vista de que en la aritmética de punto flotante tiene mayor precisión para números pequeños. También de la tabla anterior podemos notar que el error al evaluar la función alrededor de $\{-10, 10\}$ sí se incrementa.

Para la parte 2:

Al analizar la siguiente sección de los resultados

```
tabla.error.redondeo <- xtable(tabla[,c("n", "alrededor_neg10", "exacto_neg10",
                                        "error_neg10", "alrededor_10",
                                        "exacto_10", "error_10"  )])

#print(tabla.error.redondeo, type="latex")
```

n	alrededor_neg10	exacto_neg10	error_neg10	alrededor_10	exacto_10	error_10
1	-9.00	0.00	-9.00	11.00	22026.47	-22015.47
2	41.00	0.00	41.00	61.00	22026.47	-21965.47
3	-125.67	0.00	-125.67	227.67	22026.47	-21798.80
4	291.00	0.00	291.00	644.33	22026.47	-21382.13
5	-542.33	0.00	-542.33	1477.67	22026.47	-20548.80
6	846.56	0.00	846.56	2866.56	22026.47	-19159.91
7	-1137.57	0.00	-1137.57	4850.68	22026.47	-17175.78
8	1342.59	0.00	1342.59	7330.84	22026.47	-14695.62
9	-1413.14	0.00	-1413.14	10086.57	22026.47	-11939.89
10	1342.59	0.00	1342.59	12842.31	22026.47	-9184.16
11	-1162.62	0.00	-1162.62	15347.52	22026.47	-6678.95
12	925.05	0.00	925.05	17435.19	22026.47	-4591.27
13	-680.85	0.00	-680.85	19041.10	22026.47	-2985.37
14	466.22	0.00	466.22	20188.17	22026.47	-1838.30
15	-298.49	0.00	-298.49	20952.89	22026.47	-1073.58
16	179.45	0.00	179.45	21430.83	22026.47	-595.63
17	-101.69	0.00	-101.69	21711.98	22026.47	-314.49
18	54.50	0.00	54.50	21868.17	22026.47	-158.29
19	-27.71	0.00	-27.71	21950.38	22026.47	-76.09
20	13.40	0.00	13.40	21991.48	22026.47	-34.98

Notamos que el error de aproximación sí disminuye al aumentar el número de términos en el caso de evaluar la función alrededor del 10, mientras que para -10 el error también disminuye en valor absoluto, pero como aproximación el error oscila entre negativo y positivo por lo que se induce que al reducir el orden del error de la aproximación se obtengan mejores resultados, es decir que nuestro dominio este más cerca del cero. Para lo cual consideramos evaluar la función $1/exp(x)$ así se cumplen dos cosas: primero distinguir los casos negativos y en segundo lugar hacer más pequeño el dominio. La serie de Taylor de la función para los casos negativos es $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i x^i$

```
exp.recorte.Taylor <- function(n, x)
{
  #n (int):     nivel de aproximación
  #x (double):  punto sobre el cual se aproxima en la recta real
  indices <- 0:n                                 #generamos los indices sobre los que
                                                 #se genera la suma
  factoriales <- mapply(FUN = factorial, indices) #obtenemos el factorial de cada
                                                  #termino de la suma
  if(x >= 0)
  {
    resul <- (x^indices)/factoriales              #evaluamos cada termino de la suma
    return(sum(resul))                         # se regresa la suma de los 'n' termminos
  } else{                                    #usamos la nueva parametrizacion exp(1/x)
                                             #usamos el vector 'mascara' para evaluar la
                                             #serie donde se alternan valores positivos con
```

```
                                        #negativos
    #mascara <- rep(c(1,-1), round(length(indices)/2))
    resul <- (((-1*x)^indices)/factoriales)
    resul <- 1/sum(resul)  #se regresa el reciprocuo
    return(resul)#para regresar a la parametrizacion inicial
  }

}

tabla <- data.frame(n = 1:20)           #generamos los 20 niveles y en las lineas
tabla$alrededor_neg10 <- mapply(exp.recorte.Taylor, tabla$n, rep(-10, dim(tabla)[1]))
tabla$exacto_neg10 <- exp(-10)
tabla$alrededor_neg1 <- mapply(exp.recorte.Taylor, tabla$n, rep(-1, dim(tabla)[1]))
tabla$exacto_neg1 <- exp(-1)
tabla$alrededor_neg5 <- mapply(exp.recorte.Taylor, tabla$n, rep(-5, dim(tabla)[1]))
tabla$exacto_neg5 <- exp(-5)
####
tabla$error_neg10 <-tabla$alrededor_neg10 - tabla$exacto_neg10
tabla$error_neg1 <-tabla$alrededor_neg1 - tabla$exacto_neg1
tabla$error_neg1 <-tabla$alrededor_neg1 - tabla$exacto_neg1
tabla$error_neg5 <-tabla$alrededor_neg5 - tabla$exacto_neg5
row.names(tabla) <- NULL
tabla.error <- xtable(tabla[,c("n", "error_neg10", "error_neg1", "error_neg5"   )])
#print(tabla.error, type="latex")
```

Con lo que obtenemos los siguientes resultados:

n	error_neg10	error_neg1	error_neg5
1	0.09	0.13	0.16
2	0.02	0.03	0.05
3	0.00	0.01	0.02
4	0.00	0.00	0.01
5	0.00	0.00	0.00
6	0.00	0.00	0.00
7	0.00	0.00	0.00
8	0.00	0.00	0.00
9	0.00	0.00	0.00
10	0.00	0.00	0.00
11	0.00	0.00	0.00
12	0.00	0.00	0.00
13	0.00	0.00	0.00
14	0.00	0.00	0.00
15	0.00	0.00	0.00
16	0.00	0.00	0.00
17	0.00	0.00	0.00
18	0.00	0.00	0.00
19	0.00	0.00	0.00
20	0.00	0.00	0.00

Por lo que al utilizar el mismo algoritmo pero con una serie de Taylor diferente para los números negativos, se obtiene una mejor precisión en comparación de la estimación anterior (en los casos nagativos).

Ejercicio 1.6. Número de condición

Use nuevamente el número de condición $k_i = \frac{\partial f}{x_i}\frac{x_i}{f}$ *para mostrar que la división* x_1/x_2 *está bien condicionada para* $i = 1, 2$.

Sabemos que los números de condición k_i son idénticos a la unidad (o a su inverso aditivo) pues si definimos la función $f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}$, tenemos que:

$$k_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{x_1}{f} = \frac{1}{x_2}\frac{x_1}{\frac{x_1}{x_2}} = \frac{1}{x_2}\frac{x_1 x_2}{x_1} = 1$$

Por otro lado tenemos que:

$$k_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{x_2}{f} = \frac{-x_1}{x_2^2}\frac{x_2}{\frac{x_1}{x_2}} = \frac{-x_1}{x_2^2}\frac{x_2^2}{x_1} = -1$$

Es decir que la división (al igual que la multiplicación estan bien condicionadas, como vimos en clase).O dicho de otra manera la multiplicación no tiene problemas en la asociatividad tomemos el ejemplo $x/y = (x * (1/y))$ y $\frac{y}{x} = \frac{1}{\frac{x}{y}}$ con x y y como siguen:

```r
x <- .Machine$double.xmax
x
```

```
## [1] 1.797693e+308
```

```r
y <- x/10
all.equal( (x/y) ,(x*(1/y)) )
```

```
## [1] TRUE
```

```r
all.equal((y/x) , (1/(x/y)) )
```

```
## [1] TRUE
```

Ejercicio 1.9. Evaluación de polinomios

Considere un polinomio expresado en las dos formas equivalentes

$$p(x) = a_0 + xa_1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-1} + xa_n)\ldots)$$

Ahora realice:

1. *Suponga que los coeficientes* a_i *estan dados y determine el número de operaciones de punto flotante para evaluar ambas representaciones del polinomio en un punto* x.
2. *Defina 16 números enteros para ser usados como coeficientes de un polinomio de grado 15. Implemente ambas representaciones de la evaluación y realice un número grande de evaluaciones para graficar su polinomio para* $x \in [-2, 2]$. *Observe y comente sobre la cantidad de evaluaciones necesarias para que las diferencias se hagan notar en los tiempos de cálculo al usar una u otra representación*

Algunas funciones que pueden ser útiles: linspace, tic, toc, plot, for, function.

Para la parte 1:

Tenemos que la cantidad de operaciones de punto flotante en la siguiente expresión:

$$p(x) = a_0 + xa_1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

De entrada, tiene n sumas (intermedias entre cada uno de los $n+1$ términos de la expresión). Por otra parte cada uno de los terminos requiere de una numero diferente de multiplicaciones, el primer término a_0 no requiere de multiplicación (solo de acceso a memoria), el primer termino que contempla multiplicaciones entre puntos flotantes es a_1x el cual requiere de una sola multiplicación, el siguiente termino a_2x^2 requiere de 2 multiplicaciones, el siguiente termino a_3x^3 requiere de 3 multiplicaciones y de manera análoga llegamos a que el termino a_nx^n requiere de n multiplicaciones. Por lo anterior el número de multiplicaciones de punto flotante requeridas esta dado por:

$$\sum 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n$$

Es decir que es la suma de los primeros n números naturales menos dos (ya que el dos no aparece en nuestra secuencia por lo que se requiere de $\frac{(n)(n+1)}{2}$ multiplicaciones de punto flotante.

Ahora si a lo anterior sumamos las n adiciones de punto flotante obtenemos que el total de operaciones de punto flotante, en esta evaluación, es de $\frac{(n)(n+1)}{2} + n = \frac{(n^2+n)+2n}{2} = \frac{n^2+3n}{2}$

Ahora calculemos la cantidad de operaciones de punto flotante en la expresión:

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-1} + xa_n) \dots)$$

Prestemos atención a las constantes a_i. Para cada uno de estos coeficientes desde el subíndice cero hasta el {n-1} notemos que en la expresión tenemos inmediatamente después de ellos una suma (es decir si lo leemos de izquierda a derecha después del coeficiente en cuestión a la derecha tenemos una suma), por lo que se requieren de n sumas de números flotantes para esta evaluación. Por otro lado inmediatamente después de los símbolos de suma ('+') tenemos indicada una multiplicación (esto es más claro si leemos la expresión que queremos evaluar de derecha a izquierda, pues es más fácil ver que desde el termino $+a_nx$ ya se realizó una multiplicación, y continuando de esta manera vemos que después de cada símbolo '+' tenemos una expresión del tipo $x(a_i + \dots)$ Entonces las multiplicaciones están en biyección con las sumas requeridas teniendo así que el numero de operaciones de punto flotante para esta evaluación es de solo $2n$, n sumas y n multiplicaciones.

Lo siguiente es una implementación en el ambiente R que no hace uso de sus capacidades innatas de vectorización para evaluar las dos formas diferentes que hemos visto de evaluar el polinomio donde los coeficientes son $a_0 = 16, a_1 = 15, \dots, a_{15} = 1$.

```
coeficientes <- 16:1
pol.naive <- function(x)
{
  # x (double):punto a evaluar
  eval <- coeficientes[1]           #de la manera sencilla inicializamos con el
                                    #valor del termino constante
  for (j in 2:length(coeficientes))
    {                               #para cada uno de los coeficientes restantes
      eval <- eval + coeficientes[j]*x^{j-1}  #realizamos la potencia y
                                              #multiplicamos por el coeficiente
  }
  return(eval)                     #se regresa la evaluacion
}

pol.no.naive <- function(x)
{
  #x (double): punto a evaluar
  eval <- 0.
  eval <- x*coeficientes[16]       #inicializamos al valor del ultimo coeficiente
```

```r
                                  #multiplicado por el punto en donde se evalua el
                                  #polinomio
  for(j in (length(coeficientes) - 1):2)
  {
                                  #para los demas (excepto el ultimo coeficiente)
                                  #evaluamos utilizando el metodo de Horner
    eval <- eval + coeficientes[j]
    eval <- eval*x
  }
  eval + coeficientes[1]
  return(eval)
}
```

Y como vimos anteriormente la diferencia entre las complejidades de las dos formas de evaluar el polinomio difieren en un orden lineal (pues la primera es cuadrática mientras que la segunda es lineal) por lo que para cualquier valor (inclusive para un valor de 3) al evaluar la velocidad de las implementaciones obtenemos lo siguiente:

```r
n <- 3
library(microbenchmark)   #paquete para medir tiempos
microbenchmark(Naive = mapply(pol.naive, seq(-2, 2, length = n)) ,
No.Naive = mapply(pol.no.naive, seq(-2, 2, length = n)), times = 10000)
```

```
## Unit: microseconds
##      expr    min     lq     mean median     uq      max neval
##     Naive 25.527 27.351 38.75096 28.445 30.268 44156.01 10000
##  No.Naive 22.975 24.798 31.12485 25.528 27.351  5264.05 10000
```

```r
      #en las lineas anteriores ejecutamos 10000 las dos implementaciones con n=3
```

En este caso $n = 3$ observamos que la segunda implementación es hasta 25% menos lenta que la primera. Ahora solo por diversión veamos que pasa para $n = 1000$

```r
n <- 1000
microbenchmark(Naive = mapply(pol.naive, seq(-2, 2, length = n)) ,
No.Naive = mapply(pol.no.naive, seq(-2, 2, length = n)), times = 10000)
```

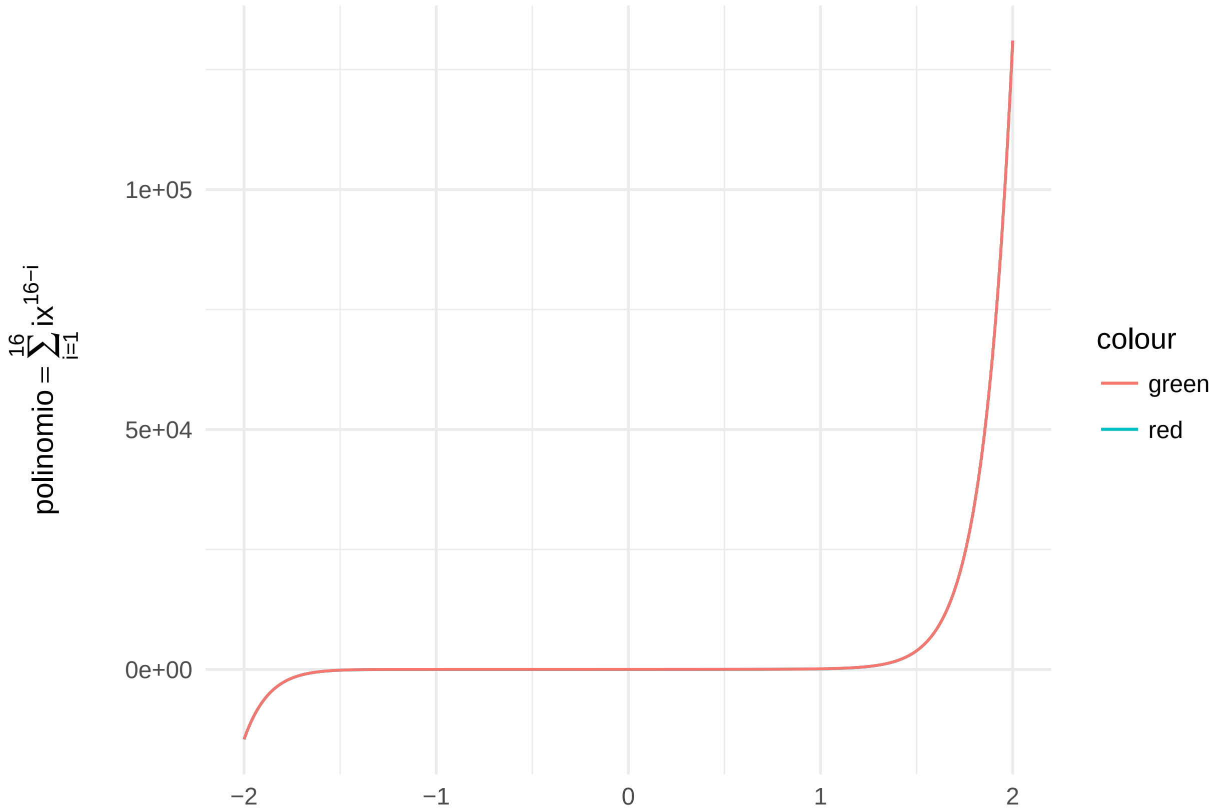
```
## Unit: milliseconds
##      expr      min       lq     mean   median       uq      max neval
##     Naive 3.220059 3.472777 4.045196 3.750840 4.374066 47.80456 10000
##  No.Naive 2.164333 2.340105 2.780817 2.488891 2.993962 45.45862 10000
```

```r
  #en las dos lineas anteriores ejecutamos 10000 las dos implementaciones con n=1000
polinomio.naive <- mapply(pol.naive, seq(-2, 2, length = n)) #evaluacion para
                                                              #graficar
polinomio.no.naive <- mapply(pol.no.naive, seq(-2, 2, length = n))
```

En este caso observamos que la segunda implementación es hasta 43% menos lenta que la primera.

Finalmente visualizamos los resultados los cuales son tan tarecidos que se enciman en la gráfica

```r
library(ggplot2)   #package para graficar
library(latex2exp)  #package para usar latex en las leyendas de los graficos
data <- data.frame(x = seq(-2, 2, length = n), polinomio.naive, polinomio.no.naive)
ggplot(data, aes(x = x, y=x)) + geom_line(aes(y=polinomio.no.naive, colour = 'red' )) +
  geom_line(aes(y = polinomio.naive, colour = 'green')) + theme_minimal() +xlab('')+
  ylab(TeX('$ polinomio = \\sum_{i=1}^{16}ix^{16-i} $'))
```


1e+05
5e+04
0e+00
−2
−1
0
1
2
polinomio = $\sum_{i=1}^{16} ix^{16-i}$
colour
green
red