# Análisis multivariado. Tarea 4

*José Antonio García Ramirez*

*Marzo 12, 2018*

## Ejercicio 1

El departamento de control de calidad de un fabricante de hornos de microondas es requerido por el gobierno federal para monitorear la cantidad de radiación emitida por los hornos que fabrican. Se realizaron mediciones de la radiación emitida por 42 hornos seleccionados al azar con las puertas cerradas y abiertas. Los datos están en el archivo *datosradiacion*

### a) Construye un elipse de confianza del 95% para $\mu$, considerando la transformación de las variables:

$$x_1 = \sqrt[4]{radiacion\_con\_puerta\_cerrada}$$

$$x_2 = \sqrt[4]{radiacion\_con\_puerta\_abierta}$$

Primero exporte los datos a formato .csv para que el código sea más portable y no dependa de la configuración de Java de la máquina, que involucra leer con archivos .xlsx con el package xlsx.

Luego leemos los datos y realizamos la transformación sugerida sobre las variables posteriormente realizamos los test de Shapiro-Wilks para descartar la no normalidad univariada de cada variable (aunque se cuenta con 42 observaciones y podríamos emplear los resultados asintóticos para las hipótesis de media y el TLC para el caso multivariado).

```r
setwd('C:\\Users\\fou-f\\Desktop\\MCE\\Second\\EstadisticaMultivariada\\Tarea4')
radiacion <- read.csv('datos_radiacion.csv')
colnames(radiacion) <- c('Puerta.cerrada', 'Puerta.abierta') #cambio de nombres de columnas
                                                            #para agilizar el tipeo de codigo
radiacion.sqrt <-apply(radiacion, 2, function(x){ x**(1/4) }) #realizo la transformación
radiacion.sqrt <- as.data.frame(radiacion.sqrt)
shapiro.test(radiacion.sqrt$Puerta.cerrada)
```

```
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  radiacion.sqrt$Puerta.cerrada
## W = 0.96481, p-value = 0.2188
```

```r
shapiro.test(radiacion.sqrt$Puerta.abierta)
```

```
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  radiacion.sqrt$Puerta.abierta
## W = 0.94282, p-value = 0.03589
```

Por los resultados de la prueba podemos ver que la variable transformada que mide el nivel de radiación con la puerta cerrada pasa la prueba de normalidad, sin embargo la otra variable tiene un p-value menor a 0.05, sin embargo al realizar un test de Kolmogorov sobre la variable transformada que mide el nivel de radiación con la puerta abierta sí se tiene evidencia para no descartar su normalidad.

```r
ks.test(radiacion.sqrt$Puerta.abierta, "pnorm", mean(radiacion.sqrt$Puerta.abierta),
        sd(radiacion.sqrt$Puerta.abierta ))
```

```
##
##  One-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data:  radiacion.sqrt$Puerta.abierta
## D = 0.19043, p-value = 0.09508
## alternative hypothesis: two-sided
```

Posteriormente calculamos el vector de medias y la matriz de covarianzas, esta última para invertirla y dar una expresión del elipsoide de confianza.

```r
alpha <- 1-.95
p <- dim(radiacion.sqrt)[2]
n <- dim(radiacion.sqrt)[1]
      #se calcula la media y la matriz de covarianza
media <- apply(radiacion.sqrt, 2, mean)
(media <- matrix(media, ncol = 1))
```

```
##           [,1]
## [1,] 0.5642575
## [2,] 0.6029812
```

```r
S <- cov(radiacion.sqrt)
(solve(S))
```

```
##                Puerta.cerrada Puerta.abierta
## Puerta.cerrada       203.4981      -163.9069
## Puerta.abierta      -163.9069       200.7691
```

Sabemos que el elipsoide de confianza esta dado por:

$$n(\bar{x}-\mu)^t S^{-1}(\bar{x}-\mu) \leq \frac{p(n-1)}{n-p} F_{p,n-p}(\alpha)$$

Y en nuestro caso queda (redondeando las operaciones a tres decimales):

$$\begin{aligned}
42(0.564-\mu_1, 0.6029-\mu_2)\begin{pmatrix} 203.018 & -163.906 \\ -163.906 & 200.77 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.564-\mu_1 \\ 0.6029-\mu_2 \end{pmatrix} &\leq \frac{2*41}{40} * 3.232 \\
\Leftrightarrow 42(0.564-\mu_1, 0.6029-\mu_2)\begin{pmatrix} 15.667-203.018x_1+163.906x_2 \\ 22.229+163.96x_1-200.77x_2 \end{pmatrix} &\leq 6.625 \\
\Leftrightarrow 42(22.24-31.334x_1-50.85x_2-327.812x_1x_2+200.77x_2^2+203.018x_1^2) &\leq .158
\end{aligned}$$

Entonces la elipse de confianza al 95% está dada por la forma cuadrática:

$$203.018x_1^2 - 31.334x_1 - 327.812x_1x_2 - 50.85x_2 + 200.77x_2^2 + 22.083 = 0 \tag{1}$$

## b) Prueba si $\mu = (.562, .589)$ está en la region de confianza.

Calculamos el estadistico basado en la muestra

```r
mu <- matrix(c(.562,.589), byrow = TRUE, ncol = 1)
(nivel <- qf(1-alpha, df1=p, df2=n-p)*(p*(n-1)/(n-p)))
```

```
## [1] 6.62504
```

```
(T.hotelling <- n*t(media-mu)%*%solve(S)%*%(media-mu))
```

```
##        [,1]
## [1,] 1.2573
```

Como el estadistico calculado $T^2 = 1.2573005$ es menor al cuantil teórico 6.6250403, aceptamos la hipótesis nula de la prueba, por lo que es factible que la media poblacional sea 0.562, 0.589.

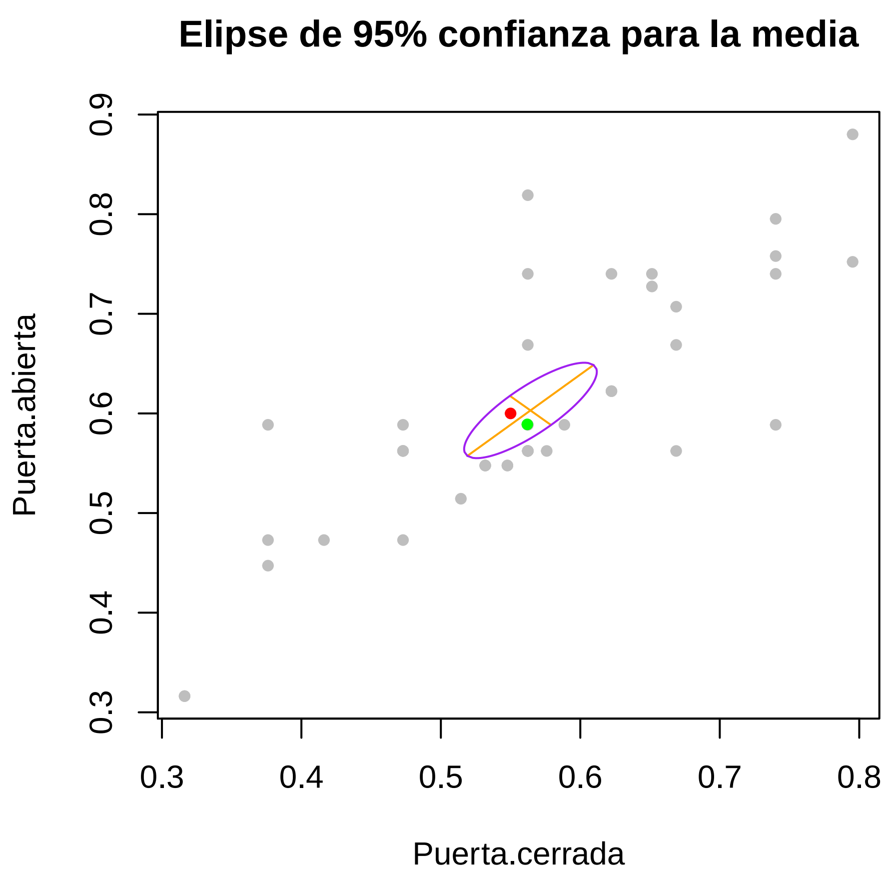
### c) Calcula los valores y vectores propios de S y obten la gráfica del elipsoide de confianza.

Defino una función que construye la elipse y dibuja los datos y la utilizo, posteriormente dibujo el punto propuesto en el inciso anterior con color verde y la media propuesta en el inciso siguiente en color rojo.

Para lo anterior, en lugar de despejar de (1) una variable en función de la otra, lo cual es posible rotando la cónica con una matriz pertinente que resulta ser la de los vectores propios de la matriz de covarianzas, el procedimiento con el que grafico es generar los ejes y la elipse considerando su forma canónica (con centro en el origen y sin rotación) posteriormente roto usando la matriz de vectores propios (la ortogonalidad de los ejes se preserva bajo rotaciones, además es un resultado que los vectores propios que definen los ejes de la elipse, son ortogonales) y por último translado los puntos con el vector de media muestral.

```
dibuja.elipse <- function(alpha, n, p, media, S, xlim, ylim)
{
  #alpha (numeric): nivel de signiificancia
  #n (numeric): numero de observaciones
  #p (numeric): numero de variables
  #media (vector): vector-columna de medias
  #S (matrix): matriz de covarianzas
  ejes <- eigen(S)
  eje_x <- ejes$vectors[,1]
  eje_y <- ejes$vectors[,2]
  nivel <- qf(1-alpha, df1 = p, df2 = n-p ) #cuantil de la distribucion f con confianza 1-alpha
  c <- ((p*(n-1))/(n*(n-p)) )*nivel #cuantil de la T de Hotelling
  longitud_x <- ejes$values[1]**.5*( c)**.5 #formulas vistas en clase
  longitud_y <- ejes$values[2]**.5*( c)**.5 #formulas vistas en clase
      #se dibujan los ejes
  g <- 100 #numero de puntos a dibujar, primero los genero centrados en el origen y
           #luego roto y translado
  x <- seq(-longitud_x, longitud_x, length=g)
  y <- seq(-longitud_y, longitud_y, length=g)
  ejes.puntos <- matrix(c(x, rep(0,g )), byrow = TRUE, nrow = 2)
  ejes.puntos <- (ejes$vectors)%*%ejes.puntos + matrix(rep(media, g), nrow = 2)
  plot(ejes.puntos[1,], ejes.puntos[2,], type='l', col='orange',
       main='Elipse de 95% confianza para la media',
       xlab=colnames(S)[1], ylab = colnames(S)[2], xlim=xlim, ylim=ylim)
  ejes.puntos <- matrix(c(rep(0,g ), y), byrow = TRUE, nrow = 2)
  ejes.puntos <- (ejes$vectors)%*%ejes.puntos + matrix(rep(media, g), nrow = 2)
  points(ejes.puntos[1,], ejes.puntos[2,], type='l', col='orange')
      #se genera el perimetro, primero centrado y luego se rota y translada
  y <- ((c-x**2/ejes$values[1])*ejes$values[2])**.5 #funcion inversa de elipse con
                                                     #centro en elorigen
  elipse.puntos <- matrix(c(x,y), ncol = g, byrow = TRUE)
  elipse.puntos <- ejes$vectors%*%(elipse.puntos) + matrix(rep(media, g), nrow = 2)
  points(elipse.puntos[1,], elipse.puntos[2,], col='purple', type='l')
  y <- -((c-x**2/ejes$values[1])*ejes$values[2])**.5
```

```r
  elipse.puntos <- matrix(c(x,y), ncol = g, byrow = TRUE)
  elipse.puntos <- ejes$vectors%*%(elipse.puntos) + matrix(rep(media, g), nrow = 2)
  points(elipse.puntos[1,], elipse.puntos[2,], col='purple', type='l')
}
dibuja.elipse(S=cov(radiacion.sqrt), alpha=alpha, n = dim(radiacion.sqrt)[1],
              p=dim(radiacion.sqrt)[2],
              media=matrix(apply(radiacion.sqrt,2, mean), ncol = 1),
              xlim=range(radiacion.sqrt[,1]), ylim=range(radiacion.sqrt[,2]))
points(radiacion.sqrt[,1], radiacion.sqrt[,2], col='gray', pch=20)
points(c(mu[1],.55),c(mu[2],.6), col=c('green','red'), pch=20)
```




**d) Realiza una prueba para la hipótesis $H_0 : \mu' = (.55, .60)$ en un nivel de significancia de $\alpha = .05$. Es consistente el resultado con la gráfica de la elipse de confianza del 95% para $\mu$ obtenida en el inciso anterior? Explica.**

Realizamos la prueba para $\mu'$, calculamos el estadistico:

```r
mu <- matrix(c(.55,.6), byrow = TRUE, ncol = 1)
(nivel <- qf(1-alpha, df1=p, df2=n-p)*(p*(n-1)/(n-p)))
```

```
## [1] 6.62504
```

```
(T.hotelling <- n*t(media-mu)%*%solve(S)%*%(media-mu))
```

```
##          [,1]
## [1,] 1.227116
```

Al igual que en el inciso anterior el estadistico calculado $T^2 = 1.2271163$ es menor al cuantil teórico 6.6250403, aceptamos la hipótesis nula de la prueba, por lo que es factible que la media poblacional sea 0.55, 0.6.

Éste resultado es consistente con la gráfica anterior pues este nuevo punto de media propuesto también esta dentro de la región de confianza, de hecho cualquier punto dentro de la región es un candidato plausible de ser la media poblacional.

### Ejercicio 2

Sabemos que $T^2$ es igual al $t$-valor cuadrado univariado más grande construido a partir de la combinación lineal $a^t x_j$ con $a = S^{-1}(\bar{x} - \mu_0)$ (ver notas de la semana6 2).

#### a) Usando los resultados del ejercicio anterior y la misma hipotesis nula $H_0$ del inciso (d), evalua $a$ para los datos transformados de radiaciones de los hornos.

Evaluamos $a$:

```
mu <- matrix(c(.55,.6), byrow = TRUE, ncol = 1)
(a <- solve(S)%*%(media-mu))
```

```
##                    [,1]
## Puerta.cerrada  2.412731
## Puerta.abierta -1.738364
```

#### b) Verifica que el valor $t^2$ calculado con esta $a$ es igual a la $T^2$ del ejercicio anterior.

Entonces estamos interesados en la media de la combinación lineal dada por:

$$z = a^t x = a_1 x_1 + a_2 x_2 = 2.412731 x_1 - 1.738364 x_2$$

Es decir que nuestra hipótesis nula $H_0 : \mu_x = (.55, .6)$ es quivalente a $H_0 : \mu_z = a^t \mu_x = a_1 \mu_{x_1} + a_2 \mu_{x_2} = 2.412731 \mu_{x_1} - 1.738364 \mu_{x_2} = (2.412731)(.55) - (1.738364)(.6) = 0.2839837$

Con una significancia de $\alpha = 0.05$, calculamos $t^2$ para $H_0 : \mu_z = a^t \mu_x = 0.2839837$, calculamos el estadístico $t^2 = (\frac{\sqrt{n}(\bar{z}-\mu_z)}{S_z})^2 = n\frac{(\bar{z}-\mu_z)^2}{S_z^2}$, donde sabemos que $S_z = a^t S_x a$ pero no es nesesario evaluarla de esa manera (por ello en el codígo siguiente la calculo como la varianza de las observaciones $z_i$).

```
z <- t(a)%*%t(as.matrix(radiacion.sqrt))
media.z <- mean(z)
(t2 <- n*(media.z-t(a)%*%mu)^2/var(t(z)))
```

```
##          [,1]
## [1,] 1.227116
```

Y sí efectivamente el estadístico $T^2$ que vale 1.2271163 es identico al estadístico $t^2$ que vale 1.2271163. Es importante destacar que ésta igualdad solo se da por la construcción de $a$ que se da en el ejercicio y que justamente esta construcción de $a$ es la que maximiza al estadístico $t^2$ igualándolo al estadistico $T^2$

## Ejercicio 3

Los datos en el archivo **datososos** representan las longitudes en centímetros de siete osos hembras a los 2, 3, 4 y 5 años de edad.

### a) Obtener los intervalos de confianza simultaneos $T^2$ del 95% para las cuatro medias poblacionales de la longitud por año.

Al igual que en el ejercicio 1 exporte los datos a un formato .csv por las mismas razones, portabilidad y agilidad en el código.

Como se esta volviendo repetitivo (y tal vez me sirva en el examen) construyo una función que evalue el estadistico $T^2$ sobre una muestra, otra que lo calcule teoricamente para contrastarlo con el muestral y otra que estime los $T^2$-intervalos simultaneos.

```
T.hotelling <- function(data, alpha)
{
  #data (data.frame): Conjunto de datos cuyas observaciones son una m.a con distribucion
  #                   normal multivariada
  #alpha (numeric): Nivel de significancia requerido
  n <- dim(data)[1]
  p <- dim(data)[2]
  T.hotelling.escalar <- ((p*(n-1)) / (n-p))*qf(1-alpha, df1=p, df2=n-p)
  return(T.hotelling.escalar)
}
T.hotelling.muestral <- function(data, mu)
{
  #data (data.frame): Conjunto de datos cuyas observaciones son una m.a con distribucion
  #                   normal multivariada
  # mu (vector numeric): vector columna de dimension p con la media a testear
  n <- dim(data)[1]
  p <- dim(data)[2]
  medias <- matrix(apply(data, 2, mean), byrow = TRUE, ncol = 1)
  S <- cov(data)
  T.muestral <- n*t(medias-mu)%*%solve(S)%*%(medias-mu)
  return(T.muestral)
}
T2.intervalos <- function(S,media, alpha, a, n, p)
{
  #alpha (numeric): nivel de signiificancia
  #n (numeric): numero de observaciones
  #p (numeric): numero de variables
  #media (vector): vector-columna de medias
  #S (matrix): matriz de covarianzas
  nivel <- sqrt(((p*(n-1)/(n*(n-p))))*(qf(1-alpha, df1 = p, df2=n-p)))
  errores <- nivel*sqrt(t(a)%*%S%*%a)
  #errores <- nivel*sqrt(ss) #es importante el orden
  inf.intervalos <- media - errores
  sup.intervalos <- media + errores
  intervalos <- as.data.frame(cbind(inf.intervalos,media, sup.intervalos))
  colnames(intervalos) <- paste0(c('lim.inferior.T2intervalo.media.al',
                                 'media.muestral',
                                 'lim.superior.T2intervalo.media.al'),
                               c(as.character(1-alpha), '',as.character(1-alpha)  ))
```

```r
  #row.names(intervalos) <- colnames(data)
  return(intervalos)
}
```

Aunque la muestra es pequeña probamos la normalidad univariada de cada variable, con el test de Shapiro-Wilks.

```r
osos <- read.csv('datos_osos.csv')
colnames(osos) <- paste0(rep("Longitud", 4), 2:5)
apply(osos, 2, shapiro.test)
```

```
## $Longitud2
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  newX[, i]
## W = 0.93317, p-value = 0.5782
##
##
## $Longitud3
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  newX[, i]
## W = 0.89901, p-value = 0.325
##
##
## $Longitud4
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  newX[, i]
## W = 0.89612, p-value = 0.3081
##
##
## $Longitud5
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  newX[, i]
## W = 0.91, p-value = 0.3959
```

Por los resultados del test no rechazamos la hipótesis de que los variables provengan de una normal univariada.

Por lo que asumimos normalidad y podemos usar el estadistico $T^2$, para calcular los intervalos simultáneos para las medias (a.k.a. $T^2$-intervalos). Los cuales se presentan en la siguiente tabla:

```r
media <- matrix(apply(osos, 2, mean), ncol = 1)
n <- dim(osos)[1]
p <- dim(osos)[2]
a <- matrix(c(1,0,0,0), ncol=1 )
media1 <- t(a)%*%media
intervalos.osos1 <- T2.intervalos(S=cov(osos), media= media1, alpha=0.05,
                                  a = a, n=n, p=p)
a <- matrix(c(0,1,0,0), ncol=1 )
media2 <- t(a)%*%media
```

```
intervalos.osos2 <- T2.intervalos(S=cov(osos), media= media2, alpha=0.05,
                                  a = a, n=n, p=p)
a <- matrix(c(0,0,1,0), ncol=1 )
media3 <- t(a)%*%media
intervalos.osos3 <- T2.intervalos(S=cov(osos), media= media3, alpha=0.05,
                                  a = a, n=n, p=p)
a <- matrix(c(0,0,0,1), ncol=1 )
media4 <- t(a)%*%media
intervalos.osos4 <- T2.intervalos(S=cov(osos), media= media4, alpha=0.05,
                                  a = a, n=n, p=p)

intervalos.osos <- rbind(intervalos.osos1,intervalos.osos2, intervalos.osos3,
                         intervalos.osos4)
#library(xtable)
#xtable(intervalos.osos)
```

| | lim.inferior.T2intervalo.media.al0.95 | media.muestral | lim.superior.T2intervalo.media.al0.95 |
|---|---|---|---|
| Longitud2 | 130.69 | 143.29 | 155.89 |
| Longitud3 | 127.02 | 159.29 | 191.55 |
| Longitud4 | 160.31 | 173.14 | 185.98 |
| Longitud5 | 155.37 | 177.14 | 198.91 |

**b) Respecto al inciso (a), obtener los intervalos de confianza simultaneos $T^2$ del 95% para los tres aumentos anuales sucesivos en la longitud media.**

Notemos que podemos utilizar los vectores $a_1^* = (0, 0, -1, 1)$, $a_2^* = (0, -1, 1, 0)$ y $a_3^* = (-1, 1, 0, 0)$ para obtener los incrementos entre los años 4 a 5, 3 a 4 y de 2 a 3. Reutilizando la función que tengo para los $T^2$-intervalos.

```
a <- matrix(c(0,0,-1,1), ncol = 1 )
media1 <- t(a)%*%media
intervalos.incremento.osos.4a5 <- T2.intervalos(S=cov(osos), media= media1, alpha=0.05,
                                  a = a, n=n, p=p)
a <- matrix(c(0,-1,1,0), ncol = 1 )
media2 <- t(a)%*%media
intervalos.incremento.osos.3a4 <- T2.intervalos(S=cov(osos), media= media2, alpha=0.05,
                                  a = a, n=n, p=p)
a <- matrix(c(-1,1,0,0), ncol = 1 )
media3 <- t(a)%*%media
intervalos.incremento.osos.2a3 <- T2.intervalos(S=cov(osos), media= media3, alpha=0.05,
                                  a = a, n=n, p=p)
incrementos <- rbind(intervalos.incremento.osos.2a3, intervalos.incremento.osos.3a4,
                     intervalos.incremento.osos.4a5)
row.names(incrementos) <- c('incremento.osos.2a3', 'incremento.osos.3a4',
                            'incremento.osos.4a5')
#xtable(incrementos)
```

Los intervalos de confianza de 95% para la media de los incrementos anuales sucesivos, son reportados en la siguiente tabla:

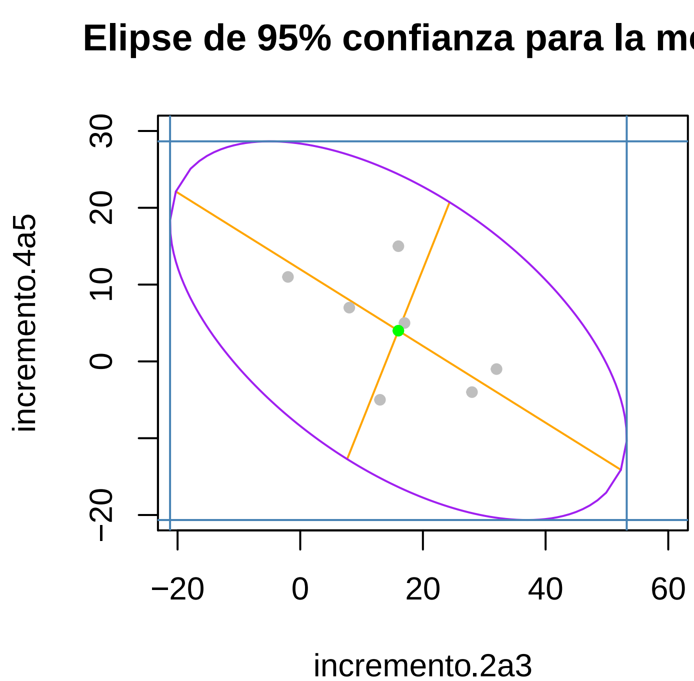
Nótese que los tres intervalos contienen al cero, así que se podría concluir que en promedio los osos no crecen año con año, suponemos que esto se debe al pequeño tamaño de muestra.

| | lim.inferior.T2intervalo.media.al0.95 | media.muestral | lim.superior.T2intervalo.media.al0.95 |
|---|---|---|---|
| incremento.osos.2a3 | -21.23 | 16.00 | 53.23 |
| incremento.osos.3a4 | -22.73 | 13.86 | 50.45 |
| incremento.osos.4a5 | -20.65 | 4.00 | 28.65 |

**c) Obtener la elipse de confianza $T^2$ del 95% para el aumento medio de la longitud de 2 a 3 años y el aumento medio de la longitud de 4 a 5 años.**

Reutilizo la función que implemente en el ejercicio 1 para dibujar las elipses de confianza de medias. La media muestral de los incrementos se muestra en verde en la siguiente gráfica.

```
a <- t(matrix(c(-1,1,0,0, 0,0,-1,1), ncol = 4, byrow = TRUE ))
incrementos.osos <-  as.matrix(osos)%*%a
incrementos.osos <- as.data.frame(incrementos.osos)
colnames(incrementos.osos) <- c('incremento.2a3', 'incremento.4a5')
S_z <- t(a)%*%cov(osos)%*%a
colnames(S_z) <- c('incremento.2a3', 'incremento.4a5')
media.z <- matrix(apply(incrementos.osos, 2, mean))
dibuja.elipse(S=S_z, alpha=0.05, n=dim(osos)[1], p=dim(osos)[2],
              media=media.z, xlim=c(-20,60),
              ylim=c(-20,30))
points(incrementos.osos[,1], incrementos.osos[,2], col='gray', pch=20)
points(media.z[1], media.z[2], col ='green', pch=20)
abline(v = incrementos$lim.inferior.T2intervalo.media.al0.95[1], col ='steelblue' )
abline(v = incrementos$lim.superior.T2intervalo.media.al0.95[1], col ='steelblue' )
abline(h = incrementos$lim.inferior.T2intervalo.media.al0.95[3], col ='steelblue' )
abline(h = incrementos$lim.superior.T2intervalo.media.al0.95[3], col ='steelblue' )
```




Podemos apreciar el gran tamaño de esta elipse ello es consecuencia de la gran varianza en el incremento del año 2 al 3, lo que induce altos valores propios en la matriz de covarianzas, por lo que es natural ver una elipse tan grande (aunado al bajo número de observaciones).

Nótese también que la proyección de la elipse en los ejes cartesianos corresponde a los $T^2$-intervalos simultáneos para las $a_i$ propuestas.

**d) Construir los intervalos de confianza de 95% de Bonferroni para el conjunto formado por las cuatro longitudes medias y los tres aumentos anuales sucesivos en la longitud media, compara los resultados con los obtenidos en (a) y (b).**

Implemento una función que estime los intervalos de Bonferroni

```
Bonferroni.intervalos <- function(S,media, alpha, n, p, a)
{
  #alpha (numeric): nivel de significancia conjunto
  #n (numeric): numero de observaciones
  #p (numeric): numero de variables OJO DEBE DE SER LA DIMENSION DEL VECTOR ALEATORIO NORMAL MULTIVARIA
  #media (vector): vector-columna de medias ORIGINALES MUESTRALES
  #S (matrix): matriz de covarianzas ORIGINAL MUEsTRAL
  #a (vector): vector columna que expresa combinacion lineal
  media <- t(media)%*%a
  ss <- t(a)%*%S%*%a
  nivel <- qt(1-(alpha/(2*p)), df = n-1, lower.tail =TRUE)
  errores <- nivel*sqrt(ss/n)
  inf.intervalos <- media - rep(errores, length(media))
  sup.intervalos <- media + rep(errores, length(media))
  alpha_ <- alpha/(2*p)
  a <- round(1-alpha_,3)
  a <- as.character(a)
  intervalos <- as.data.frame(cbind(inf.intervalos,media, sup.intervalos))
  colnames(intervalos) <- paste0(c('lim.inferior.Bonferri.media.al',
                                  'media.muestral',
                                  'lim.superior.Bonferri.media.al'),
                                c(a,'',a  ))
  return(intervalos)
}
```

Y la utilizo para estimar los intervalos de Bonferri para las 4 longitudes medias

```
medias.osos.len <- matrix(apply(osos, 2, mean))
S <- cov(osos)
n <- dim(osos)[1]
p <- dim(osos)[2]
alpha <- 0.05
a <- as.matrix(c(1,0,0,0), ncol=1)
intervalos.bonferri.len1 <- Bonferroni.intervalos(S,medias.osos.len, alpha=alpha,n=n,p=p, a=a  )
a <- as.matrix(c(0,1,0,0), ncol=1)
intervalos.bonferri.len2 <- Bonferroni.intervalos(S,medias.osos.len, alpha=alpha,n=n,p=p, a=a  )
a <- as.matrix(c(0,0,1,0), ncol=1)
intervalos.bonferri.len3 <- Bonferroni.intervalos(S,medias.osos.len, alpha=alpha,n=n,p=p, a=a  )
a <- as.matrix(c(0,0,0,1), ncol=1)
intervalos.bonferri.len4 <- Bonferroni.intervalos(S,medias.osos.len, alpha=alpha,n=n,p=p, a=a  )
intervalos.bonferri.len <- rbind(intervalos.bonferri.len1, intervalos.bonferri.len2,
                                intervalos.bonferri.len3, intervalos.bonferri.len4)
row.names(intervalos.bonferri.len) <- colnames(osos)
```

```
#xtable(intervalos.bonferri.len)
```

En la siguiente tabla se reportan los intervalos de Bonferroni para las longitudes medias, notemos en este caso que efectivamente los de Bonferroni son más estrechos.

| | lim.inferior.Bonferri.media.al0.994 | media.muestral | lim.superior.Bonferri.media.al0.994 |
|---|---|---|---|
| Longitud2 | 138.09 | 143.29 | 148.48 |
| Longitud3 | 145.98 | 159.29 | 172.59 |
| Longitud4 | 167.85 | 173.14 | 178.43 |
| Longitud5 | 168.17 | 177.14 | 186.12 |

Y realizamos lo análogo para los tres aumentos anuales sucesivos en la longitud media

```
a <- t(matrix(c(-1,1,0,0), ncol = 4, byrow = TRUE ))
intervalos.bonferri.incremento1 <- Bonferroni.intervalos(S,medias.osos.len, alpha=alpha,n=n,p=3, a=a  )
a <- as.matrix(c(0,-1,1,0), ncol=1)
intervalos.bonferri.incremento2 <- Bonferroni.intervalos(S,medias.osos.len, alpha=alpha,n=n,p=3, a=a  )
a <- as.matrix(c(0,0,-1,1), ncol=1)
intervalos.bonferri.incremento3 <- Bonferroni.intervalos(S,medias.osos.len, alpha=alpha,n=n,p=3, a=a  )
intervalos.bonferri.incremento <-rbind(intervalos.bonferri.incremento1,
        intervalos.bonferri.incremento2,
        intervalos.bonferri.incremento3)
row.names(intervalos.bonferri.incremento) <- c('incremento.2a3',
                                               'incremento.3a4',
                                               'incremento.4a5')
#xtable(intervalos.bonferri.incremento)
```

En la siguiente tabla se reportan los intervalos de Bonferroni para los incrementos anuales, notemos también que estos intervalos son más estrechos que los $T^2$-intervalos correspondientes y a pesar de que dos de ellos contienen al cero podemos ver que estan más orientados hacia el lado positivo, además por ser intervalos de menor significancia tienen mayor confianza por lo que habría evidencia para pensar que el crecimiento anual es positivo en promedio, sobre todo en el primer incremento de 2 a 3 años.

| | lim.inferior.Bonferri.media.al0.992 | media.muestral | lim.superior.Bonferri.media.al0.992 |
|---|---|---|---|
| incremento.2a3 | 1.67 | 16.00 | 30.33 |
| incremento.3a4 | -0.23 | 13.86 | 27.94 |
| incremento.4a5 | -5.49 | 4.00 | 13.49 |

**Ejercicio 4**

Los datos del archivo **costofliving.txt** enumeran algunas estadísticas del costo de vida para cada uno de los 50 estados de los USA. Los tres costos son: alquileres de apartamentos, costo de casas y el índice de costo de vida.

## a) Realiza una regresión lineal multivariada para explicar estas tres métricas en términos de las poblaciones estatales e ingresos medios. ¿Son útiles estas variables independientes para explicar conjuntamente las variables de costo?

Primero realizo un ajuste de regresión múltiple multivariado con ambas variables explicativas y las tres variables de respuestas. Y estimo los errores para poder estimar a su vez las varianzas muestrales, para realizar las posteriores pruebas de hipótesis usando la prueba de máxima verosimilitud ajustada. #En vista de que la muestra es de 51 observaciones supongo normalidad para la media.

```r
costos <- read.table(file='costofliving.txt', header = TRUE )
Z <- costos[, c('pop', 'income') ]
Z <- as.matrix(Z)
n <- dim(costos)[1]
Z <- cbind(matrix(rep(1, n)), Z)
r <- dim(Z)[2]
Y <- costos[, c('rent', 'house', 'COL') ]
Y <- as.matrix(Y)
B_hat <- solve(t(Z)%*%Z)%*%t(Z)%*%Y #primer ajuste usando todas
                                    #las variables
errores <- Y - Z%*%B_hat
sigma <- (t(errores)%*%errores)/(n) #el estimador MLE entre 'n'
```

Ahora construyo la matriz de diseño, y realizo el ajuste de mínimos cuadrados para la hipótesis nula:

$$H_0 : \hat{\beta}_{pop} = 0$$

```r
Z <- costos[, c('income') ]
Z <- as.matrix(Z)
n <- dim(costos)[1]
Z <- cbind(matrix(rep(1, n)), Z)
r <- dim(Z)[2]
Y <- costos[, c('rent', 'house', 'COL') ]
Y <- as.matrix(Y)
B_hat <- solve(t(Z)%*%Z)%*%t(Z)%*%Y #primer ajuste usando solo
                                    #la variable 'income'
errores <- Y - Z%*%B_hat
sigma_pop <- (t(errores)%*%errores)/(n) #el MLE divido entre 'n'
```

Ya que calcule las matrices de covarianza de máxima verosimilitud calculo el estadístico que utiliza la prueba de razón de verosimilitud ajustado:

$$-(n - r - \frac{1}{2}(m - r + q + 1)) \ln \left( \frac{|\hat{\Sigma}|_{MLE}}{|\hat{\Sigma}|_{-pop}} \right) \sim \chi^2_{m(r-q)(\alpha)}$$

```r
q <- 1
m <- dim(Y)[2] #numero de varibles respuesta en el modelo completo
LRT.ajustado.pop  <- log(det(sigma)/det(sigma_pop))*(-1)*(n-r-.5*(m-r+q+1))
test1 <- qchisq(1-.05, df=m*(r-q))
```

Entonces el estadistico del test de máxima verosimilitud ajustado tiene un valor de 11.9469954 mientras que su valor crítico es 7.8147279 entonces el estadistico calculado es menor que el valor critico con confianza de 95% por lo que no rechazamos $H_0$ es decir que la variable 'pop' no es significativa en el modelo con ambas variables explicando las variables de costo.

Luego construyo la matriz de diseño, y realizo el ajuste de mínimos cuadrados para la hipótesis nula:

$$H_0 : \hat{\beta}_{income} = 0$$

```r
Z <- costos[, c('pop') ]
Z <- as.matrix(Z)
n <- dim(costos)[1]
Z <- cbind(matrix(rep(1, n)), Z)
r <- dim(Z)[2]
```

```
Y <- costos[, c('rent', 'house', 'COL') ]
Y <- as.matrix(Y)
B_hat <- solve(t(Z)%*%Z)%*%t(Z)%*%Y #primer ajuste usando
                                    #solo la variable 'pop'
errores <- Y - Z%*%B_hat
sigma.income<-(t(errores)%*%errores)/(n) #el MLE divido entre 'n'
```

Luego calculo el estadístico que utiliza la prueba de razón de verosimilitud ajustado:

```
q <- 1 #numero de variables que utiliza la hipotesis nula
m <- dim(Y)[2] #numero de varibles respuesta en el modelo completo
LRT.ajustado.income  <- log(det(sigma)/det(sigma.income))*
                        (-1)*(n-r-.5*(m-r+q+1))
test2 <- qchisq(1-.05, df=m*(r-q))
```

Entonces el estadistico del test de máxima verosimilitud ajustado tiene un valor de 19.5646745 mientras que su valor crítico es 7.8147279 entonces el estadistico calculado es menor que el valor critico con confianza de 95% por lo que no rechazamos la hipótesis nula, por lo que la importancia de la variable 'income' en el modelo con ambas variables no es significativa para explicar las otras tres variables.

Hasta aquí hemos determinado que ambas variables no son significativas (una a una) para el modelo conjunto, que considera las tres variables de costos.

### b) Ajusta tres modelos de regresión lineal de manera separada y verifica la utilidad de las variables independientes en cada uno ellos. Compara los resultados con los obtenidos en el inciso (a)

En vista de que el método *lm* implementado en el kernel base de R utiliza la función *lm.fit* la cual estima modelos lineales múltiples y multivariados por medio de mínimos cuadrados, la uso para este inciso (en vista que la implementación propia sería sencilla para este conjunto de datos de baja dimensión y un número de registros pequeño en comparación de los que se encuentra uno en la práctica).

Además, sabemos que la regresión multivariada se realiza con regresiones múltiples.

```
Z <- costos[, c('pop','income') ]
Z <- as.matrix(Z)
Y <- costos[, c('rent', 'house', 'COL') ]
modelo.uni <- lm(rent~Z, data =Y)
summary(modelo.uni)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = rent ~ Z, data = Y)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -206.10  -95.66  -49.76   89.30  548.41
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) 5.440e+02  6.211e+01   8.759 1.61e-11 ***
## Zpop        8.236e-03  3.122e-03   2.638  0.01121 *
## Zincome     3.954e+00  1.142e+00   3.462  0.00114 **
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
```

```
## Residual standard error: 149.4 on 48 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.2711, Adjusted R-squared:  0.2407
## F-statistic: 8.924 on 2 and 48 DF,  p-value: 0.0005065
```

De la salida de la función podemos ver que la regresión para la variable 'rent' considera de manera aislada como significativas con una confianza al menos de 95%, al intercepto y las otras variables 'income' y 'pop' por lo que las consideramos significativas.

La probabilidad de cometer un error (de tipo 1) al rechazar la hipótesis nula (que consiste en que las dos variables y el intercepto no son significativos, es decir diferentes a cero) dado que es cierta es baja, así que rechazamos la hipótesis de que en las variables y el intercepto no son significativos de manera conjunta en esta regresión (Eso se ve en el valor reportado para el estadistico $F$) a pesar del bajo valor del coeficiente $R^2$ ajustado.

Solo por curiosidad calculamos los intervalos de confianza al 95% de los parámetros que estimamos (estos son calculados de manera aislada es decir no son intervalos conjuntos) usando el estadistico $t$

```r
confint(modelo.uni)
```

```
##                    2.5 %       97.5 %
## (Intercept) 4.191231e+02 668.88088698
## Zpop        1.958206e-03   0.01451324
## Zincome     1.657398e+00   6.25022929
```

Y efectivamente ningún intervalo de los coeficientes contiene al cero, lo que explica porque son significativos.

Procedemos con la regresión para la variable 'house'.

```r
Z <- costos[, c('pop','income') ]
Z <- as.matrix(Z)
Y <- costos[, c('rent', 'house', 'COL') ]
modelo.uni <- lm(house~Z, data =Y)
summary(modelo.uni)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = house ~ Z, data = Y)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -158.30  -58.89  -22.76   43.04  359.10
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) 46.721108  35.721748   1.308   0.1971
## Zpop         0.003567   0.001796   1.987   0.0527 .
## Zincome      3.037709   0.656892   4.624 2.86e-05 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 85.92 on 48 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.3357, Adjusted R-squared:  0.308
## F-statistic: 12.13 on 2 and 48 DF,  p-value: 5.453e-05
```

Nuevamente, de la salida de la función podemos ver que la regresión para la variable 'house' considera de manera aislada como significativas con una confianza al menos de 95% solo a la variable 'income' y la variable 'pop' y el intercepto tienen un $p$-value del estadistico $t$ mayor a 0.05 por lo que no son suficientemente significativos. La prueba $F$ para significancia conjunta reporta un $p$- valor muy cercano a cero por lo que no rechazamos la hipótesis de que de manera conjunta no son significativos los coeficientes. (Eso también se ve reflejado bajo valor del coeficiente $R^2$ ajustado.

Solo por curiosidad calculamos los intervalos de confianza al 95% de los parámetros que estimamos, con los mismo detalles que mencionete en el punto anterior.

```r
confint(modelo.uni)
```

```
##                     2.5 %       97.5 %
## (Intercept) -2.510228e+01 1.185445e+02
## Zpop        -4.330736e-05 7.177647e-03
## Zincome      1.716939e+00 4.358480e+00
```

Y efectivamente el coeficiente relacionado a la variable 'income' es el único que tiene un intervalo que no contiene al cero, lo que explica porque es significativo de manera aislada.

Para concluir este incisos procedemos con la regresión para la variable 'COL'.

```r
Z <- costos[, c('pop','income') ]
Z <- as.matrix(Z)
Y <- costos[, c('rent', 'house', 'COL') ]
modelo.uni <- lm(COL~Z, data =Y)
summary(modelo.uni)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = COL ~ Z, data = Y)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -17.964  -9.202  -4.365   6.258  62.750
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) 8.340e+01  6.022e+00  13.850  < 2e-16 ***
## Zpop        1.526e-04  3.027e-04   0.504 0.616599
## Zincome     4.351e-01  1.107e-01   3.929 0.000273 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 14.48 on 48 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.2441, Adjusted R-squared:  0.2126
## F-statistic: 7.751 on 2 and 48 DF,  p-value: 0.00121
```

Nuevamente, de la salida de la función podemos ver que la regresión para la variable 'COL' considera de manera aislada como significativas con una confianza al menos de 95% solo a la variable 'income' y al intercepto sin embargo la variable'pop' tiene un $p$-value del estadistico $t$ mayor a 0.05 por lo que no es suficientemente significativa.

La prueba $F$ para significancia conjunta reporta un $p$- valor muy cercano a cero por lo que no rechazamos la hipótesis de que de manera conjunta no son significativos los coeficientes, pese a que de manera individual no son significativos todos, notemos que el valor del coeficiente $R^2$ es mayor al del ejercicio anterior.

Solo por curiosidad calculamos los intervalos de confianza al 95% de los parámetros que estimamos, con los mismo detalles que mencionete en el punto anterior.

```r
confint(modelo.uni)
```

```
##                     2.5 %       97.5 %
```

```
## (Intercept) 71.2942676625 9.550993e+01
## Zpop        -0.0004560928 7.612001e-04
## Zincome      0.2124468072 6.577521e-01
```

Y efectivamente el coeficiente relacionado a la variable 'pop' es el único que tiene un intervalo que contiene al cero, lo que explica porque no es significativo de manera aislada.

En conclusión, si ni siquiera tenemos significancia conjunta en los parámetros estimados por regresión múltiple es igualmente probable no tenerla en la regresión multivariada. Sin embargo podemos tener significancia conjunta sin tener significancia univariada (debido a los diferentes estadísticos que definene esta decisión, pues unos consideran la covarianza entre variables y otros no).

## Ejercicio 5

Muchos inversionistas están buscando dividendos que se pagarán de los beneficios futuros. Los datos del archivos **cash hi tech.txt** enumeran una serie de características sobre su situación financiera, hasta septiembre del 2010, de varias empresas de tecnologías e información. Las variables resultado a explicar son los dividendos actuales y futuros (current y 60% payout).

### a) Desarrolla un modelo de regresión multivariada partir de la capitalización de mercado (market cap), efectivo neto (net cash) y flujo de efectivo (cash floow) y analiza el efecto que tienen conjuntamente respecto a los dividendos.

Después de leer correctamente los datos, y renombrar las variables, para agilizar el código (sin cambiar su significado) al igual que en el ejercicio anterior utilizare el test de máxima verosimilitud para comparar los modelo, en este primer caso considero la hipótesis nula de que los tres vectores de coeficientes de las tres variables son cero y para ello estimo este modelo cuya varianza generalizada denoto por $|\hat{\Sigma}_{MLE}|$ y para ser congruentes con la notación que empleamos llamo $|\hat{\Sigma}_1|$ a la varianza generalizada del modelo "nulo" es decir que solo considera al intercepto, así pues el estadístico que calculo es:

$$-(n-r-\frac{1}{2}(m-r+q+1))\ln\left(\frac{|\hat{\Sigma}|_{MLE}}{|\hat{\Sigma}|_1}\right)\sim\chi^2_{m(r-q)(\alpha)}$$

```r
inversiones <- read.table('cash hi tech.txt', header =FALSE,
                          sep ='\t', skip = 2, dec=c(',','.'))
colnames(inversiones) <- c('Company', 'Marketcap.Mil', 'Net.cash.Mil',
                           'Cashflo.2009',
                           'Cashflow.porcentaje.capital',
                           'Cash.mas.cashflow.porcentaje.capital',
                           'Current.Dividend',
                           'Dividend.al.60.poyout')
inversiones.limpio <- apply(inversiones[, 2:dim(inversiones)[2]], 2,
                  function(x)
                  {
                    as.numeric(as.character(x))
                    })
inversiones.limpio <- as.data.frame(inversiones.limpio)
inversiones.limpio <- cbind(inversiones[,1], inversiones.limpio)
colnames(inversiones.limpio)[1] <- 'Company'
Z <- inversiones.limpio[, c('Marketcap.Mil', 'Net.cash.Mil', 'Cashflo.2009')]
r <- dim(Z)[2]+1
Y <- inversiones.limpio[, c('Current.Dividend',
                            'Dividend.al.60.poyout')]
```

```r
modelo1 <- lm(as.matrix(Y)~as.matrix(Z))
n <- dim(inversiones.limpio)[1]
Sigma <- (t(modelo1$residuals)%*%modelo1$residuals)/n #estimador MLE
modelo.nulo <- lm(as.matrix(Y) ~ 1)
Sigma.nulo <- t(modelo.nulo$residuals)%*%modelo.nulo$residuals/n
q <- 3 #numero de vectores que utiliza la hipotesis nula
m <- dim(Y)[2] #numero de varibles respuesta en el modelo completo
LRT.ajustado  <- log(det(Sigma)/det(Sigma.nulo))*(-1)*(n-r-.5*(m-r+q+1))
test2 <- qchisq(1-.05, df=m*(r-q))
```

Entonces el estadistico del test de máxima verosimilitud ajustado tiene un valor de 11.9214373 mientras que su valor crítico es 5.9914645 entonces el estadístico calculado no es menor que el valor critico con confianza de 95% por lo que no rechazamos la hipótesis nula, por lo que no existe evidencia para la significancia conjunta de las variables en el modelo.

En la siguiente salida podemos ver que de para ambas regresiones múltiples, en particular para la variable 'Curent.Dividend' ningún coeficiente es significativo univariadamente y tampoco se tiene significancia conjunta en las tres variables. Lo que podría explicar la no significancia conjunta en el caso multivariado.

```r
summary(modelo1)
```

```
## Response Current.Dividend :
##
## Call:
## lm(formula = Current.Dividend ~ as.matrix(Z))
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -0.9046 -0.4708 -0.2848  0.1002  2.2458
##
## Coefficients:
##                             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)                 0.229346   0.427962   0.536   0.6027
## as.matrix(Z)Marketcap.Mil -0.006406   0.011164  -0.574   0.5776
## as.matrix(Z)Net.cash.Mil  -0.006747   0.049795  -0.135   0.8947
## as.matrix(Z)Cashflo.2009   0.156719   0.072278   2.168   0.0529 .
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.9958 on 11 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.3318, Adjusted R-squared:  0.1496
## F-statistic: 1.821 on 3 and 11 DF,  p-value: 0.2016
##
##
## Response Dividend.al.60.poyout :
##
## Call:
## lm(formula = Dividend.al.60.poyout ~ as.matrix(Z))
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -1.7960 -0.7866 -0.3777  0.8996  2.9271
##
## Coefficients:
##                            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
```

```
## (Intercept)               5.90231    0.71007   8.312 4.53e-06 ***
## as.matrix(Z)Marketcap.Mil -0.04337    0.01852  -2.341  0.03909 *
## as.matrix(Z)Net.cash.Mil   0.04209    0.08262   0.509  0.62052
## as.matrix(Z)Cashflo.2009   0.39621    0.11992   3.304  0.00703 **
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 1.652 on 11 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.5574, Adjusted R-squared:  0.4367
## F-statistic: 4.617 on 3 and 11 DF,  p-value: 0.0252
```

**b) También verifica el uso de otras variables explicativas basadas en funciones no lineales tales como la proporción entre el flujo de efectivo y la capitalización.**

De manera análoga a los incisos anteriores, considerare introducir las variables 'Cashflow.porcentaje.capital' y 'Cash.mas.cashflow.porcentaje.capital'. En este caso considero la hipótesis nula de que los dos vectores de coeficientes de las dos variables son cero y para ello estimo este modelo cuya varianza generalizada denoto por $|\hat{\Sigma}_{MLE}|$ y para ser congruentes con la notación que empleamos llamo $|\hat{\Sigma}_{sin.proporciones}|$ a la varianza generalizada del modelo del inciso anterior (que ya vimos que sus coeficientes no son significativos), así pues el estadístico que calculo es:

$$-(n - r - \frac{1}{2}(m - r + q + 1)) \ln \left( \frac{|\hat{\Sigma}|_{MLE}}{|\hat{\Sigma}|_{sin.proporciones}} \right) \sim \chi^2_{m(r-q)(\alpha)}$$

```r
Z2 <- inversiones.limpio[, c('Marketcap.Mil', 'Net.cash.Mil',
                              'Cashflo.2009',
                            'Cashflow.porcentaje.capital',
                            'Cash.mas.cashflow.porcentaje.capital' )]
r <- dim(Z2)[2]+1
modelo.saturado <- lm(as.matrix(Y)~as.matrix(Z2))
n <- dim(inversiones.limpio)[1]
Sigma.saturado <- (t(modelo.saturado$residuals)%*%
              modelo.saturado$residuals)/n #estimador MLE
q <- 3 #numero de variables que utiliza la hipotesis nula
m <- dim(Y)[2] #numero de varibles respuesta en el modelo completo
LRT.ajustado  <- log(det(Sigma.saturado)/det(Sigma))*(-1)*(n-r-.5*(m-r+q+1))
test2 <- qchisq(1-.05, df=m*(r-q))
```

Entonces el estadistico del test de máxima verosimilitud ajustado tiene un valor de 78.5048636 mientras que su valor crítico es 12.5915872 entonces el estadístico calculado no es menor que el valor critico con confianza de 95% por lo que no rechazamos la hipótesis nula, por lo que no existe evidencia para la significancia conjunta de las variables que representan proporciones en el modelo.

En la siguiente salida podemos ver que para ambas regresiones múltiples, en particular para la variable 'Curent.Dividend' ningún coeficiente es significativo univariadamente y tampoco se tiene significancia conjunta en las tres variables. Lo que podría explicar la no significancia conjunta en el caso multivariado.

```r
summary(modelo.saturado)
```

```
## Response Current.Dividend :
##
## Call:
## lm(formula = Current.Dividend ~ as.matrix(Z2))
##
```

```
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -0.9642 -0.5588 -0.3364  0.2757  2.1261
##
## Coefficients:
##                                                  Estimate Std. Error
## (Intercept)                                       1.21431    1.46939
## as.matrix(Z2)Marketcap.Mil                       -0.01775    0.01917
## as.matrix(Z2)Net.cash.Mil                         0.03965    0.08683
## as.matrix(Z2)Cashflo.2009                         0.18994    0.10916
## as.matrix(Z2)Cashflow.porcentaje.capital         -0.01490    0.12853
## as.matrix(Z2)Cash.mas.cashflow.porcentaje.capital -0.02875    0.04565
##                                                  t value Pr(>|t|)
## (Intercept)                                        0.826    0.430
## as.matrix(Z2)Marketcap.Mil                        -0.926    0.379
## as.matrix(Z2)Net.cash.Mil                          0.457    0.659
## as.matrix(Z2)Cashflo.2009                          1.740    0.116
## as.matrix(Z2)Cashflow.porcentaje.capital          -0.116    0.910
## as.matrix(Z2)Cash.mas.cashflow.porcentaje.capital  -0.630    0.545
##
## Residual standard error: 1.067 on 9 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.3719, Adjusted R-squared:  0.02293
## F-statistic: 1.066 on 5 and 9 DF,  p-value: 0.4386
##
##
## Response Dividend.al.60.poyout :
##
## Call:
## lm(formula = Dividend.al.60.poyout ~ as.matrix(Z2))
##
## Residuals:
##       Min        1Q    Median        3Q       Max
## -0.038424 -0.007904  0.004278  0.009095  0.036928
##
## Coefficients:
##                                                    Estimate Std. Error
## (Intercept)                                       0.0141731  0.0363713
## as.matrix(Z2)Marketcap.Mil                        0.0002828  0.0004746
## as.matrix(Z2)Net.cash.Mil                        -0.0026589  0.0021492
## as.matrix(Z2)Cashflo.2009                         0.0014732  0.0027021
## as.matrix(Z2)Cashflow.porcentaje.capital          0.5974618  0.0031813
## as.matrix(Z2)Cash.mas.cashflow.porcentaje.capital  0.0004932  0.0011300
##                                                  t value Pr(>|t|)
## (Intercept)                                        0.390    0.706
## as.matrix(Z2)Marketcap.Mil                         0.596    0.566
## as.matrix(Z2)Net.cash.Mil                         -1.237    0.247
## as.matrix(Z2)Cashflo.2009                          0.545    0.599
## as.matrix(Z2)Cashflow.porcentaje.capital         187.802   <2e-16 ***
## as.matrix(Z2)Cash.mas.cashflow.porcentaje.capital   0.436    0.673
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.02642 on 9 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9999, Adjusted R-squared:  0.9999
```

```
## F-statistic: 1.944e+04 on 5 and 9 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Para la regresión múltiple para la variable 'Dividend.al.60.payout' la variable que mide el porcentaje de capital 'Cashflow.porcentaje.capital' es muy significativa y que en esta regresión múltiple se tiene un buen ajuste pues el coeficiente $R^2$ ajustado mayor a 0.99, lo que siguiere la idea de considerar un modelo con solo las dos variables que representan proporciones y ver si es significativo, para ello lo comparo contra el modelo "nulo" definido y calculado en el primer inciso, es decir el estadístico que calculare para contrastar la significancia conjunta de estas dos variables es :

$$-(n-r-\frac{1}{2}(m-r+q+1))\ln\left(\frac{|\hat{\Sigma}|_{solo.proporciones}}{|\hat{\Sigma}|_1}\right)^{-1} \sim \chi^2_{m(r-q)(\alpha)}$$

```r
Z3 <- inversiones.limpio[, c('Cashflow.porcentaje.capital',
                             'Cash.mas.cashflow.porcentaje.capital' )]
r <- dim(Z3)[2]+1
modelo.aumentado <- lm(as.matrix(Y)~as.matrix(Z3))
n <- dim(inversiones.limpio)[1]
Sigma.umentado <- (t(modelo.aumentado$residuals)%*%
                      modelo.aumentado$residuals)/n #estimador MLE
q <- 2 #numero de variables que utiliza la hipotesis nula
m <- dim(Y)[2] #numero de varibles respuesta en el modelo completo
LRT.ajustado  <- (log(det(Sigma.umentado)/det(Sigma.nulo)))**(-1)*(-1)*
                       (n-r-.5*(m-r+q+1))
test2 <- qchisq(1-.05, df=m*(r-q))
```

Entonces el estadistico del test de máxima verosimilitud ajustado tiene un valor de 1.1979203 mientras que su valor crítico es 5.9914645 entonces el estadístico calculado es menor que el valor critico con confianza de 95% por lo que rechazamos la hipótesis nula, por lo que sí existe evidencia para la significancia conjunta de las variables que representan proporciones en el modelo.

Entonces sabemos que las proporciones son conjuntamente significativas en el modelo para las tres variables de predicción, sin embargo en la comparación anterior notamos comportamientos diferentes para los parámetros estimados multivariadamente en ambas variables de proporción. Con base en lo anterior consideramos un test donde la hiótesis nula establezca que el vector de parámetros de la variable 'Cashflow.porcentaje.capital' no es significativo, es decir el estadístico que calculare para contrastar la significancia conjunta de esta variable es:

$$-(n-r-\frac{1}{2}(m-r+q+1))\ln\left(\frac{|\hat{\Sigma}|_{solo.proporciones}}{|\hat{\Sigma}|_{Cashflow.porcentaje.capital}}\right) \sim \chi^2_{m(r-q)(\alpha)}$$

```r
Z4 <- inversiones.limpio[, c('Cashflow.porcentaje.capital')]
r <- 1+1
modelo.simple <- lm(as.matrix(Y)~as.matrix(Z4))
n <- dim(inversiones.limpio)[1]
Sigma.simple <- (t(modelo.simple$residuals)%*%
                      modelo.simple$residuals)/n #estimador MLE
q <- 1 #numero de variables que utiliza la hipotesis nula
m <- dim(Y)[2] #numero de varibles respuesta en el modelo completo
LRT.ajustado  <- log(det(Sigma.umentado)/det(Sigma.simple))*(-1)*(n-r-.5*(m-r+q+1))
test2 <- qchisq(1-.05, df=m*(r-q))
```

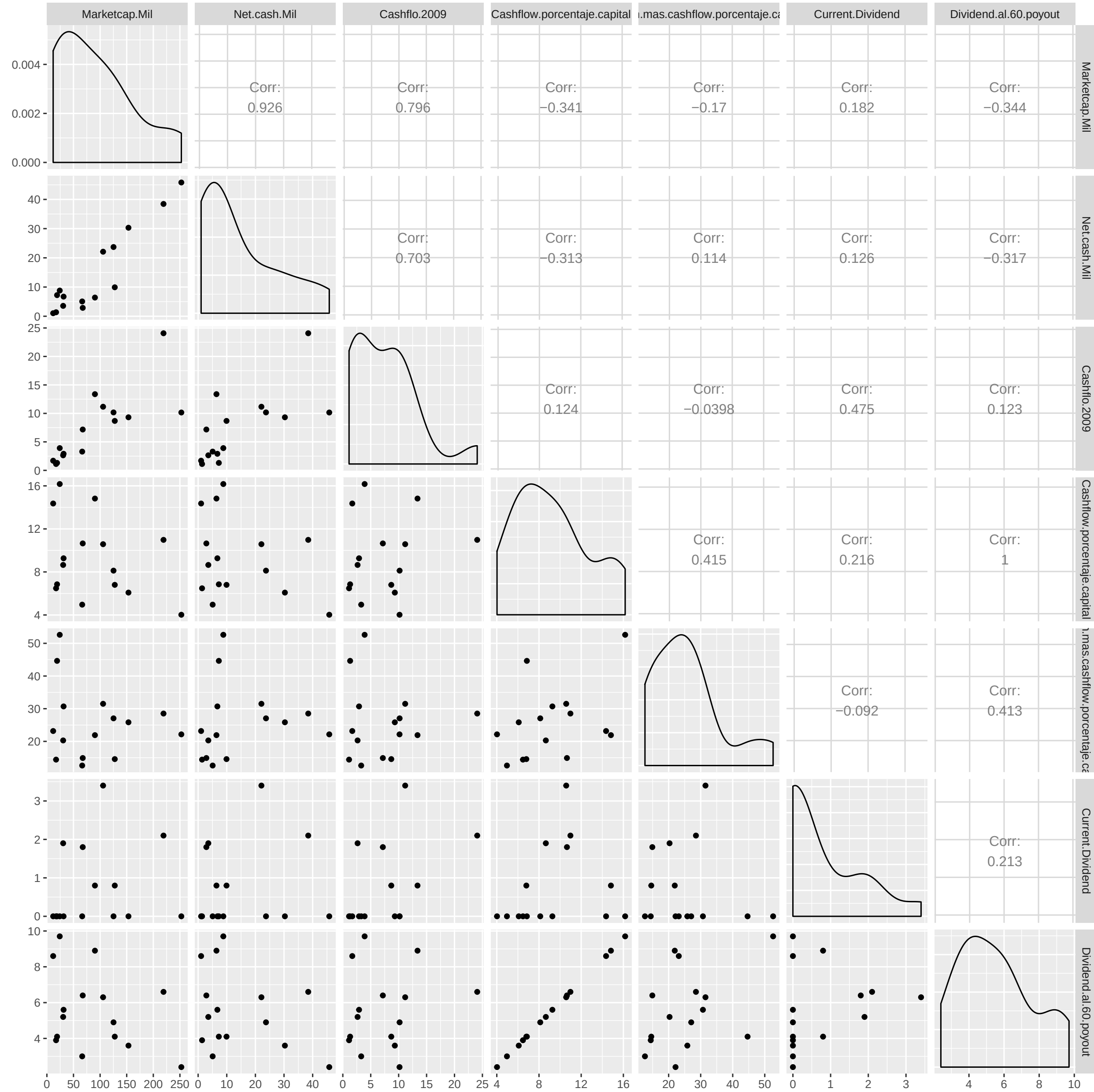
Entonces el estadistico del test de máxima verosimilitud ajustado tiene un valor de 1.9887614 mientras que su valor crítico es 5.9914645 entonces el estadístico calculado es menor que el valor critico con confianza de 95% por lo que rechazamos la hipótesis nula, así que la variable 'Cashflow.porcentaje.capital' es significativa de manera conjunta en la regresión multivariada mientras que al considerarla con la otra variable de proporcion no se mantiene esta propiedad. Por ello decidimos examinar los resultados de esta última regresión multivariada, que se muestran a continuación:

```r
summary(modelo.simple)
```

```
## Response Current.Dividend :
##
## Call:
## lm(formula = Current.Dividend ~ as.matrix(Z4))
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -1.1602 -0.6075 -0.4469  0.6136  2.5955
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)    0.13125    0.78934   0.166    0.870
## as.matrix(Z4)  0.06363    0.07966   0.799    0.439
##
## Residual standard error: 1.094 on 13 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.04678,    Adjusted R-squared:  -0.02654
## F-statistic: 0.638 on 1 and 13 DF,  p-value: 0.4388
##
##
## Response Dividend.al.60.poyout :
##
## Call:
## lm(formula = Dividend.al.60.poyout ~ as.matrix(Z4))
##
## Residuals:
##       Min        1Q    Median        3Q       Max
## -0.050799 -0.014015  0.008136  0.014145  0.036272
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   0.004841   0.018773   0.258    0.801
## as.matrix(Z4) 0.599664   0.001895 316.516   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.02602 on 13 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9999, Adjusted R-squared:  0.9999
## F-statistic: 1.002e+05 on 1 and 13 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Es de notar el buen ajuste que se realiza para la variable 'Dividend.al.60.poyout', por lo que decidimos quedarnos con este modelo por parsimonia. En la siguiente graficá es evidente la relación lineal entre las variables que destacamos con este modelo final.

```r
library(GGally)
ggpairs(data = inversiones.limpio[, 2:8])
```




Sabemos que el máximo de la verosimilitud se da en $(2\pi)^{-nm/2}|\hat{\Sigma}|^{-n/2}e^{-n*m/2}$, por lo que la decisión de quedarnos con el último modelo planteado se reduce a comparar el termino $(2\pi)^{-n3/2}|\hat{\Sigma}_{solo.proporciones}|^{-n/2}e^{-n3/2}$ contra $(2\pi)^{-n2/2}|\hat{\Sigma}_{solo.proporciones}|^{-n/2}e^{-n2/2}$de los modelos con coeficientes-vectores significativos simultaneamente, pese a que el término anterior para el modelo con las dos variables de proporción es

```
(2*pi)^(-n*m/2)*exp(-n*m/2)*det(Sigma.umentado)^(-n/2)
```

```
## [1] 2418527
```

Y el valor del mismo término para el modelo final es

```
(2*pi)^(-n*m/2)*exp(-n*m/2)*det(Sigma.simple)^(-n/2)
```

```
## [1] 697803.9
```

Y su cociente es

```
(2*pi)^(-n*m/2)*exp(-n*m/2)*det(Sigma.simple)^(-n/2)/
(2*pi)^(-n*m/2)*exp(-n*m/2)*det(Sigma.umentado)^(-n/2)
```

```
## [1] 1.488266e+36
```

Es decir que es miles de veces más probable que el modelo corresponda al modelo final, para este tamaño de muestra pues si $n$ aumenta esta diferencia crece exponencialmente, debido a la elegancia de poder explicar tres respuestas con la mitad de variables (es decir solo una) y por su verosimilitud decidí quedarme con el último modelo.

Finalmente validaremos algunos supuestos de nuestro modelo:

Media cero en los errores para cada respuesta $E(\epsilon_{(i)}) = 0$

```
errores <- modelo.simple$residuals
round(apply(errores, 2, mean), 5)
```

```
##      Current.Dividend Dividend.al.60.poyout
##                     0                     0
```

Los errores entre diferentes respuestas estan correlacionados:

```
cov(errores)
```

```
##                       Current.Dividend Dividend.al.60.poyout
## Current.Dividend           1.111449663         -0.0066635041
## Dividend.al.60.poyout     -0.006663504          0.0006286898
```

Los errores se distribuyen normalmente multivariados:

```
library(mvnormtest)
mshapiro.test(t(errores))
```

```
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  Z
## W = 0.86284, p-value = 0.02653
```

Lo cual no se logró.

Como comentario final me gustaría decir que intente checar los supuestos del modelo final, pero no me han quedado claro los conceptos, por ejemplo me parece que hay que checar homocedasticidad o que la matriz de covarianzas es constante y eso no se como hacerlo. Porque me queda claro que verificar los supuestos para cada regresión múltiple (en mi caso de las dos finales) no es suficiente.