Tarea 3 Análisis numérico

José Antonio García Ramirez

February 9, 2018

Ejercicio 2.7. Implementación de splines cúbicos

Implemente un código para el cálculo del spline cúbico pasando por una lista de n puntos de la forma (X, Y) usando condiciones de frontera libre en ambos lados. Use preferentemente versiones vectoriales para las evaluaciones de las operaciones que así lo permitan.

La siguiente es la implementación que realice para el spline cúbico, el parámetro $condicion.frontera$ indica que condición de frontera se usa, utilice un objeto de tipo closure que regresa una función que tiene como objetivo inicializar los parámetros a_i, b_i, c_i, d_i.

Considere cuatro casos:

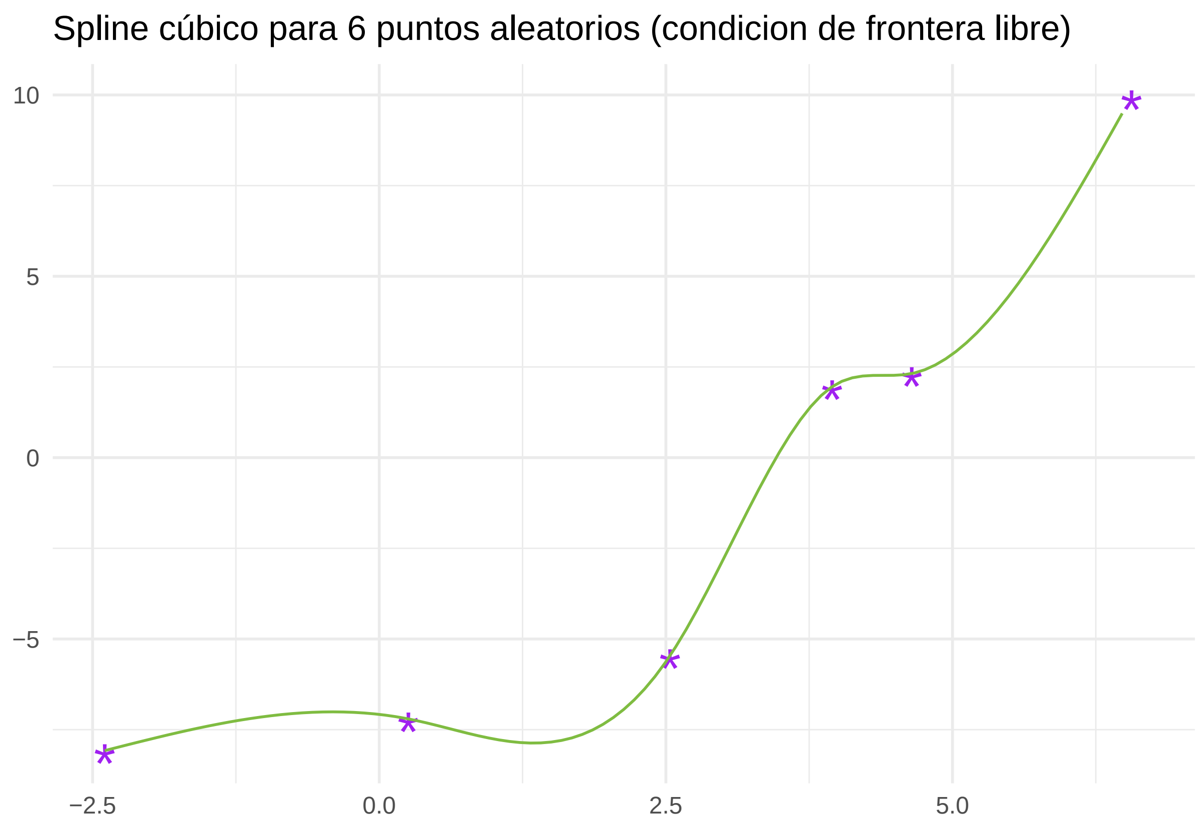
- condicion.frontera = 'libre' Cuando las condiciones de frontera son libres.
- condicion.frontera = 'fija' Cuando las condiciones de frontera están fijas.
- condicion.frontera = 'mix1' Cuando las condiciones de frontera son fijas en el primer punto y libres en el último.
- condicion.frontera = 'mix2' Cuando las condiciones de frontera son fijas en el último punto y libres en el primero.

```
Spline <- function(punto, dataX, dataY, condicion.frontera, dfx1, dfxn )
{
  # punto (numeric): vector a evaluar
  # dataX (numeric): dominio de los puntos a interpolar
  # dataY (numeric): valor de los puntos a interpolar
  # condicion.frontera (character): string indicando el tipo de condiciones de frontera a usar
  # dfx1 (numeric): valor conocido de la derivadad en el primer punto
  # dfxn (numeric): valor conocido de la derivadad en el último punto
  # salida :ESTE OBJETO REGRESA UNA FUNCION CON PARAMETROS FIJOS (los vectores) a,b,c,d
  x <- dataX
  y <- dataY
  n <- length(dataX) #obtenemos el numero de datos
  h <- x[2:n] - x[1:(n-1)]   # calculamos las diferencias entre puntos
  a <- y                     #calculamos el vector a
  t <-rep(0,n)               #reservamos espacio para el lado derecho del sistema
                             #de ecuaciones que se formara y para los vectores d y c
  b <- matrix( rep(0, n), nrow = 1)
  d <- matrix( rep(0, n), nrow = 1)
  for (i in 2:length(h))
  {
             #calculamos las entradas del lado derecho del sistema de ecuaciones
    t[i]<-(3 / h[i])*(a[i+1]-a[i]) - (3/h[i-1])*(a[i]-a[i-1])
  }
  M <- matrix( rep(0, (n-2)*(n)), nrow = n-2) #reservamos espacio para la matriz que
                                               #define el sistema de ecuaciones
  for (i in 1:(n-2))
  {
                     #inicializamos la matriz tridiagonalmente
    M[i, c(i, i+1 , i+2 ) ] <-  c(h[i], 2*(h[i]+h[i+1]), h[i+1])
  }
```

```r
  if(condicion.frontera == 'libre')
  {
    M1 <- matrix( c(1, rep(0, n-1)), nrow = 1)#primer reglon de la matriz para la condicion libre
    Mn <- matrix( c(rep(0, n-1), 1), nrow = 1)#ultimo reglon de la matriz para la condicion libre
    M <- rbind(M1, M, Mn) #concadenamos las matricez y los vectores que dependen de la condicion
    c <- solve(M, t) #obtenemos los coeficientes c_i
  }
  if(condicion.frontera == 'fija')
  {
    M1 <- matrix( c(2*h[1], h[1], rep(0, n-2)), nrow = 1)#primer reglon de la matriz para la condicion
    Mn <- matrix( c(rep(0, n-2), h[n-1], 2*h[n-1]   ), nrow = 1)#ultimo reglon de la matriz para la con
    M <- rbind(M1, M, Mn)#concadenamos las matricez y los vectores que dependen de la condicion
    t[1] <- (3/h[1])*(a[2]-a[1]) - 3*dfx1 # cambiamos el primer valor para la condicion fija
    t[n] <- 3*dfxn-(3/h[n-1])*(a[n]-a[n-1] )#cambiamos el primer valor para la condicion fija
    c <- solve(M, t)
  }
  ######
  if(condicion.frontera == 'mix1')
  {
    M1 <- matrix( c(2*h[1], h[1], rep(0, n-2)), nrow = 1)#primer reglon de la matriz para la condicion
    Mn <- matrix( c(rep(0, n-1), 1), nrow = 1)#ultimo reglon de la matriz para la condicion libre
    M <- rbind(M1, M, Mn)
        #cambiamos valores para la condicion fija en el primer valor y libre en el segundo
    t[1] <- (3/h[1])*(a[2]-a[1]) - 3*dfx1
    t[n] <- 0
    c <- solve(M, t)
  }
  if(condicion.frontera == 'mix2')
  {
    M1 <- matrix( c(1, rep(0, n-1)), nrow = 1)#primer reglon de la matriz para la condicion libre
    Mn <- matrix( c(rep(0, n-2), h[n-1], 2*h[n-1]   ), nrow = 1)#ultimo reglon de la matriz para la con
    M <- rbind(M1, M, Mn)
        #cambiamos valores para la condicion libre en el primer valor y fija en el segundo
    t[1] <- 0
    t[n] <- 3*dfxn-(3/h[n-1])*(a[n]-a[n-1] )
    c <- solve(M, t)
  }
  for(i in 1:(n-1))
  {
    # calculamos los vectores d y b
    b[i] <- (1 / h[i])*(a[i+1]-a[i])-(h[i]/3)*(c[i+1]+2*c[i])
    d[i] <- (1 / (3*h[i]))*(c[i+1]-c[i])
  }
  function(punto)       #regresamos una funcion que ya fijo los vectores a,b,c y d
  {
    # punto (numeric): punto a evaluar
    indice <- which( (punto < x) )[1] - 1 #buscamos el numero de spline que le corresponde al punto
    res <- a[indice] + b[indice]*(punto - x[indice])+ c[indice]*(punto - x[indice])**2 +
      d[indice]*(punto - x[indice])**3 #evaluamos el spline con los coeficientes conocidos
    return(res)
  }
}
```

Pruebo el spline cúbico para 6 puntos generados uniformemente en $-10, 10$

```r
n <- 6
dataX <- sort(runif(n , min=-10, max= 10 ))
dataY <- sort(runif(n , min=-10, max=10 ))
Spline.Cubico.Libre <- Spline(dataX=dataX, dataY = dataY, condicion.frontera = 'libre') #inicializo
                              #los parametros del spline con condiciones de frontera libres
#vetorizamos la funcion
Spline.Cubico.LibreV <- function(x)
{
    mapply(FUN=Spline.Cubico.Libre, x)
}
n <- 100
    #construyo un dataframe para realizar una visualizacion
puntos <- data.frame(X= dataX, Y = dataY)
library(ggplot2)
ggplot(data = puntos, aes(x=X, y=Y)) + geom_point(aes( colour=I('purple')), shape = "*", size = 7) +
  theme_minimal() + ggtitle('Spline cúbico para 6 puntos aleatorios (condicion de frontera libre)') +
  xlab('') + ylab('') +
stat_function(fun = Spline.Cubico.LibreV,  colour = '#7FBC41', xlim=c(min(dataX), max(dataX)+.1 ))
```

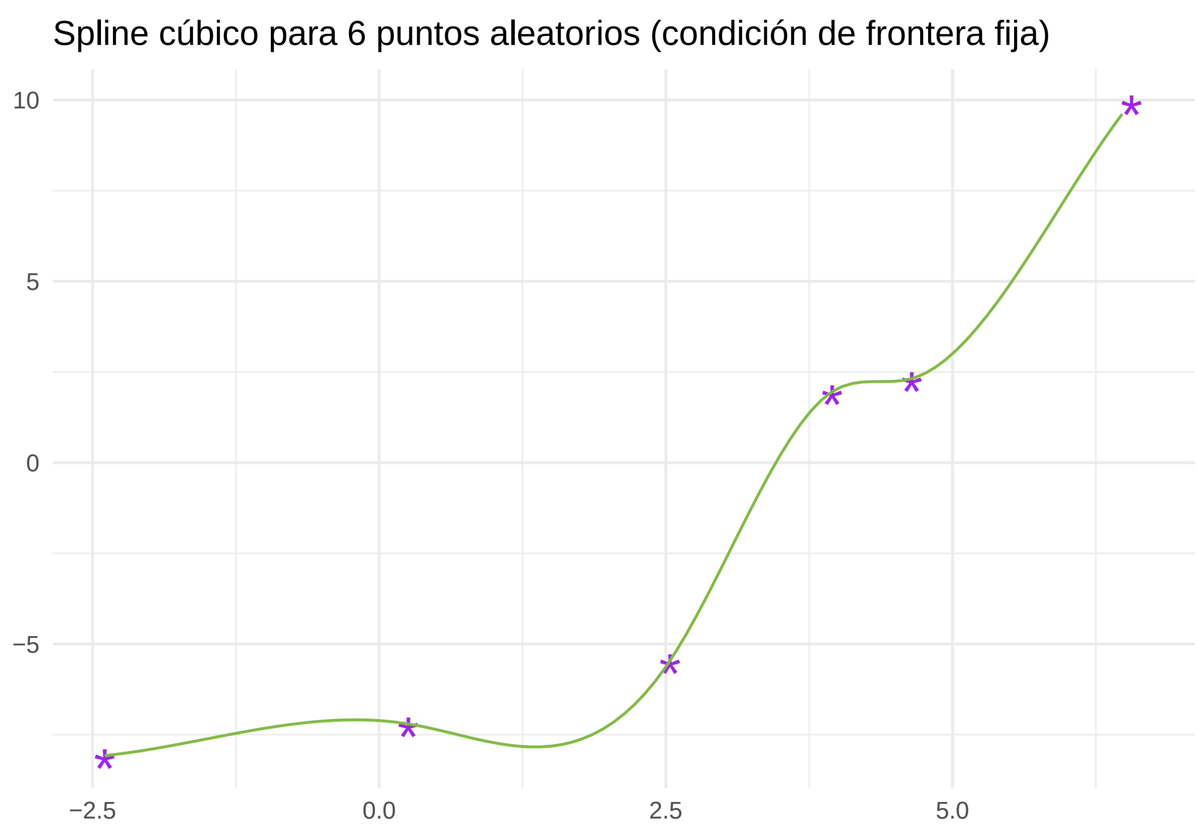


Ejercicio 2.8. Splines cúbicos con frontera fija

Modifique el código del ejercicio anterior para generar un programa que permita el uso de condiciones de frontera fija.

La función *Spline* que implemente ya considera este caso, lo pruebo con los mismos 6 puntos generados aleatoriamente de la figura anterior

```
        #aproximamos las derivadas de los puntos
derivadas <- diff(dataY)/diff(dataX)
dfx1 <- derivadas[1]
dfxn <- derivadas[5]
Spline.Cubico.Fijo <- Spline(dataX=dataX, dataY = dataY, condicion.frontera = 'fija',
                             dfx1=dfx1, dfxn=dfxn) #inicializo los parametros del spline con
                                                    #condiciones de frontera libres
#vetorizamos la funcion
Spline.Cubico.FijoV <- function(x)
{
    mapply(FUN=Spline.Cubico.Fijo, x)
}
library(ggplot2)
ggplot(data = puntos, aes(x=X, y=Y)) + geom_point(aes( colour=I('purple')), shape = "*", size = 7) +
  theme_minimal() + ggtitle('Spline cúbico para 6 puntos aleatorios (condición de frontera fija)') +
  xlab('') + ylab('') +
stat_function(fun = Spline.Cubico.FijoV,  colour = '#7FBC41', xlim=c(min(dataX), max(dataX)+.1 ))
```



Donde efectivamente logramos ver algunas diferencias en los splines primero y quinto (con respecto a la gráfica anterior).

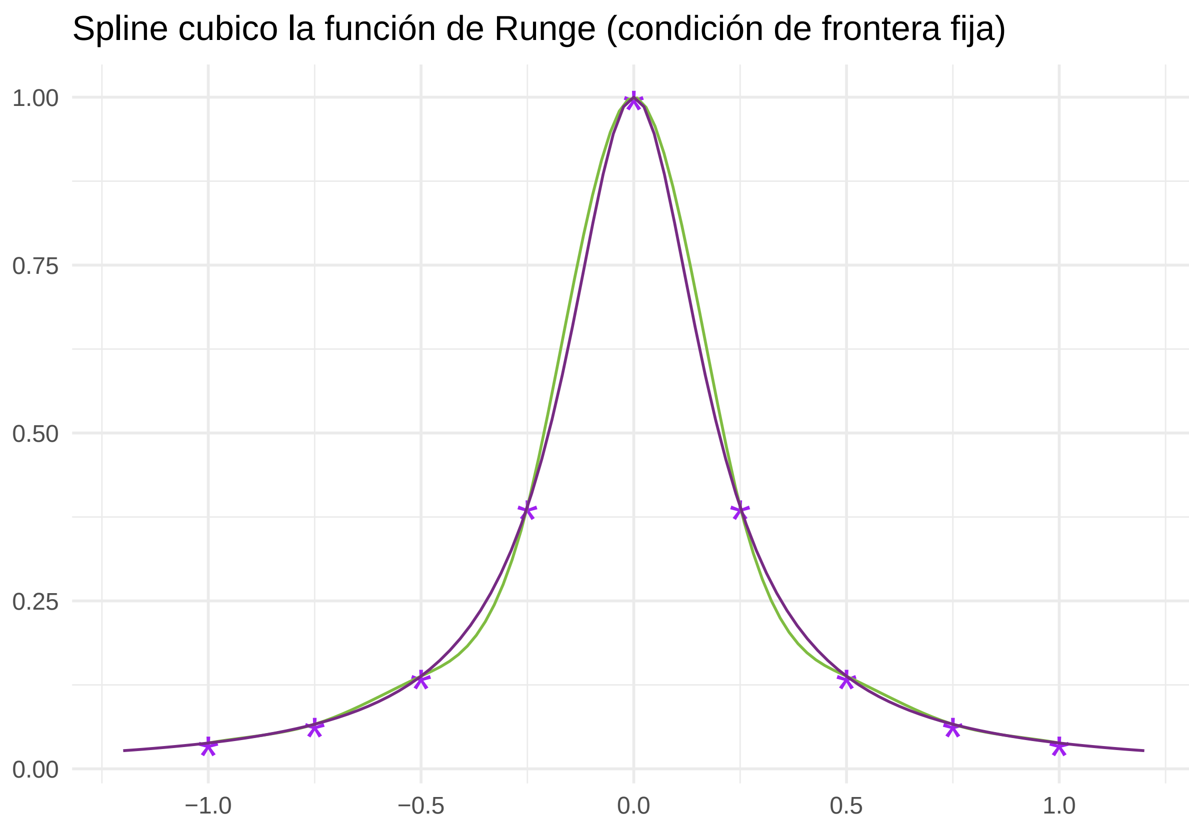
Ejercicio 2.9.Spline para la fución de Runge

Use alguno de los códigos implementados para el cálculo de splines y construya una aproximación a la función de Runge $f(x) = \frac{1}{1+25*x^2}$ con $x \in [-1, 1]$.

Realice esta aproximación usando puntos igualmente espaciados y comente sobre la cantidad de puntos que, según su criterio, son suficientes para lograr buenas aproximaciones.

Como se conoce la función podemos conocer su derivada, aunque la aproxime con diferencias finitas, decidí emplear el spline cúbico con condiciones de frontera fijas. En la siguiente gráfica la función de Runge se presenta en color morado y el spline en verde.

```
#defino la funcion de Runge
Runge <- function(x) { (1/(1+25*x^2)) }
n <- 9      #fijo el número de puntos
dataX <- seq(-1, 1, length = n) #puntos igualmente espaciados
dataY <- Runge(dataX)
        #aproximamos las derivadas de los puntos
derivadas <- diff(dataY)/diff(dataX)
dfx1 <- derivadas[1]
dfxn <- derivadas[n-1]
Spline.Cubico.Fijo <- Spline(dataX=dataX, dataY = dataY, condicion.frontera = 'fija',
                             dfx1=dfx1, dfxn=dfxn) #inicializo los parametros del spline con
                                                   #condiciones de frontera libres
#vetorizamos la funcion
Spline.Cubico.FijoV <- function(x)
{
    mapply(FUN=Spline.Cubico.Fijo, x)
}
puntos <- data.frame(X = dataX, Y = dataY)
ggplot(data = puntos, aes(x=X, y=Y)) + geom_point(aes( colour=I('purple')), shape = "*", size = 7) +
  theme_minimal() + ggtitle('Spline cubico la función de Runge (condición de frontera fija)') +
  xlab('') + ylab('') +
stat_function(fun = Spline.Cubico.FijoV,  colour = '#7FBC41', xlim=c(min(dataX), max(dataX)+.1 )) +
stat_function(fun = Runge,  colour = '#762A83', xlim=c(-1.2, 1.2 ), show.legend = TRUE)
```



Con solo 9 puntos considero que obtuve una buena aproximación visual, al usar 10 puntos el spline se construye sin considerar al cero y eso empeora la aproximación alrededor del cero. Al usar 9 puntos igualmente espaciados sí contemplamos al cero.

Ejercicio 2.10. Utilizando los Splines cúbicos

Diseñe alguna silueta utilizando splines cúbicos. Trate de combinar ambas versiones para las condiciones de frontera.

Decidí utilizar la segunda silueta de mi tarea anterior.

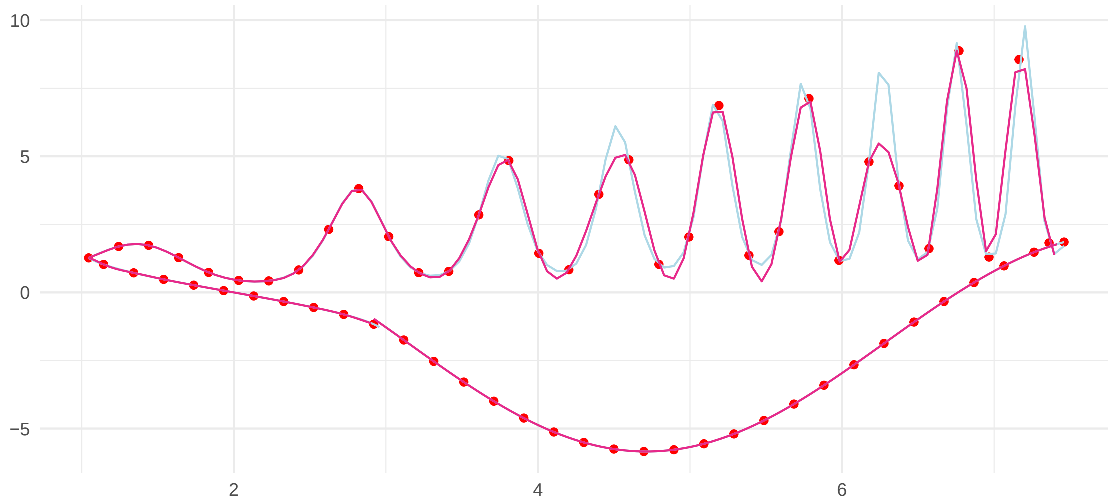
```
#funciones para dibujar la silueta
f3 <- function(x)
{
  y <- mapply(FUN= function(x){.5*exp(sin(x**2))*x}, x)
  return(y)
}
f4 <- function(x)
{
  return(asin(2-x))
}
f5 <- function(x)
{
  return(4*sin(x)-1.843606)
}
n <- 66 # numero de puntos a evaluar
```

```r
# en la siguiente lineas aproxime la interseccion de las funciones para generar
#contornos cerrados
x <- seq(1, 7.460007, length = 100)
x2 <- uniroot(function(x){ f3(x)-f4(x)}, interval = c(1, 2))$root
x3 <- tail(x[!is.na(f4(x))],1)
dataX <- seq( x2, 7.460007 , length=n )
    #evaluo los puntos en las funciones que corresponden a cada seccion de la silueta
inpares <- (1:(n/2))*2 -1
dataY <- vector(mode='numeric', length=n)
dataY[inpares] <- f3(dataX[inpares])
index <- which(dataX <= x3)
index1 <- index[!(index %in% inpares)]
dataY[index1] <- f4(dataX[index1])
index <- which(dataX > x3)
index2 <- index[!(index %in% inpares)]
dataY[index2] <- f5(dataX[index2])
puntos <- data.frame(X = dataX, Y = dataY)
###
derivadasf3 <- diff(dataY[inpares])/diff(dataX[inpares]) #aproximo las derivadas
derivadasf4 <- diff(dataY[index1])/diff(dataX[index1]) #aproximo las derivadas
derivadasf5 <- diff(dataY[index2])/diff(dataX[index2]) #aproximo las derivadas
#spline del tipo mix 1 para cada seccion
Spline.Cubico.Mix.f3 <- Spline(dataX=c(dataX[inpares],7.460007),
                               dataY = c(dataY[inpares],f3(7.460007)),
                            condicion.frontera = 'mix1',dfx1=derivadasf3[1], dfxn=0)
#inicializo los parametros del spline con condiciones de frontera mezcladas
#vetorizamos la funcion
Spline.Cubico.Mix.f3V <- function(x) { mapply(FUN=Spline.Cubico.Mix.f3, x) }
Spline.Cubico.Mix.f4 <- Spline(dataX=c(1.045050,dataX[index1]),dataY=c(f4(1.045050),dataY[index1]),
                            condicion.frontera = 'mix1',dfx1=derivadasf4[1], dfxn=0) #inicializo los pa
#vetorizamos la funcion
Spline.Cubico.Mix.f4V <- function(x) { mapply(FUN=Spline.Cubico.Mix.f4, x) }
#Spline.Cubico.Mix.f4V(dataX[index1])
Spline.Cubico.Mix.f5 <- Spline(dataX=c(2.920191,dataX[index2]),
                               dataY=c(f5(2.920191), dataY[index2]),
                            condicion.frontera = 'mix1',dfx1=derivadasf5[1], dfxn=0) #inicializo los pa
#vetorizamos la funcion
Spline.Cubico.Mix.f5V <- function(x) { mapply(FUN=Spline.Cubico.Mix.f5, x) }
#################
#spline del tipo mix 2 para cada seccion
Spline.Cubico.Mix2.f3 <- Spline(dataX=c(dataX[inpares],7.460007),
                               dataY = c(dataY[inpares],f3(7.460007)),
                                condicion.frontera = 'mix2',dfx1=0, dfxn=derivadasf3[32]) #inicializo l
#del spline con condiciones de frontera mezcladas
#vetorizamos la funcion
Spline.Cubico.Mix2.f3V <- function(x) { mapply(FUN=Spline.Cubico.Mix2.f3, x) }
Spline.Cubico.Mix2.f4 <- Spline(dataX=c(1.045050,dataX[index1]),
                                dataY=c(f4(1.045050),dataY[index1]),
                                condicion.frontera = 'mix2',dfx1=0, dfxn=derivadasf4[9]) #inicializo lo
#del spline con condiciones de frontera mezcladas
#vetorizamos la funcion
Spline.Cubico.Mix2.f4V <- function(x) { mapply(FUN=Spline.Cubico.Mix2.f4, x) }
Spline.Cubico.Mix2.f5 <- Spline(dataX=c(2.920191,dataX[index2]),
```

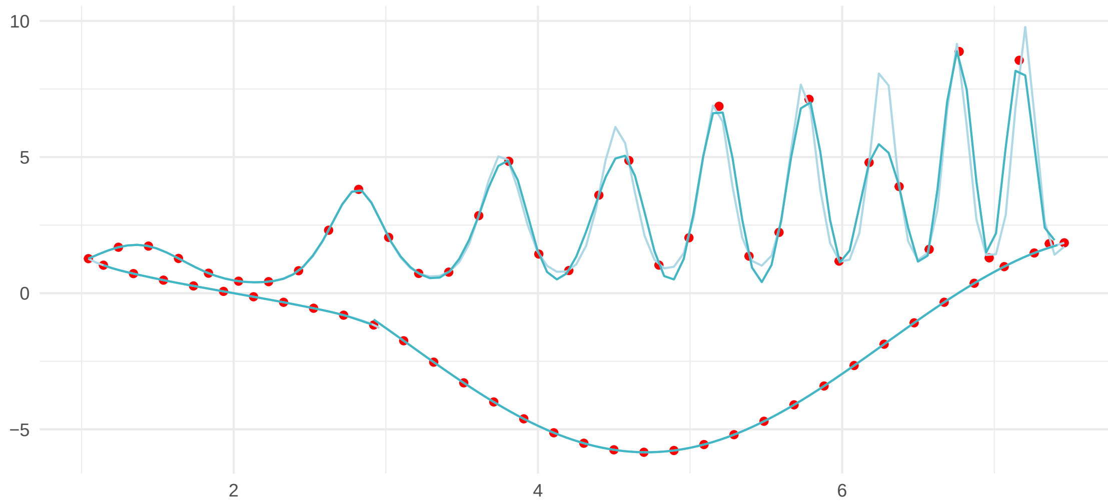
```r
                              dataY=c(f5(2.920191), dataY[index2]),
                               condicion.frontera = 'mix2',dfx1=0, dfxn=derivadasf5[22]) #inicializo l
#del spline con condiciones de frontera mezcladas
#vetorizamos la funcion
Spline.Cubico.Mix2.f5V <- function(x) { mapply(FUN=Spline.Cubico.Mix2.f5, x) }

p1 <- ggplot(puntos, aes(x = X , y = Y)) + theme_minimal() + geom_point(aes(colour = 'puntos conocidos'
stat_function(fun = f3, colour ='lightblue', xlim = c(x2,7.460007)) +
stat_function(fun = f4, colour = 'lightblue', xlim = c(x2,x3)) +
stat_function(fun = f5, colour = 'lightblue', xlim = c(x3,7.460007)) +
stat_function(fun = Spline.Cubico.Mix.f3V, colour = '#E7298A',
              xlim = c(1.045050,7.460007)) +
stat_function(fun = Spline.Cubico.Mix.f4V, colour ='#E7298A', xlim = c(1.045050,3)) +
stat_function(fun = Spline.Cubico.Mix.f5V, colour = '#E7298A', xlim =
                c(2.920191,7.460007)) +
  scale_color_manual(values='red', guide=FALSE) +
ggtitle("Spline cubico con 66 puntos condiciones de frontera mix1") +xlab('')+ylab('')
p2 <- ggplot(puntos, aes(x = X , y = Y)) + theme_minimal() + geom_point(aes(colour = 'puntos conocidos'
stat_function(fun = f3, colour ='lightblue', xlim = c(x2,7.460007)) +
stat_function(fun = f4, colour = 'lightblue', xlim = c(x2,x3)) +
stat_function(fun = f5, colour = 'lightblue', xlim = c(x3,7.460007)) +
stat_function(fun = Spline.Cubico.Mix2.f3V, colour = '#41B6C4', xlim = c(x2,7.460007))+
stat_function(fun = Spline.Cubico.Mix2.f4V, colour ='#41B6C4', xlim = c(1.143742,3)) +
stat_function(fun = Spline.Cubico.Mix2.f5V, colour = '#41B6C4', xlim =
                c(2.920191,7.460007)) +
scale_color_manual(values='red', guide=FALSE) +
ggtitle("Spline cubico con 66 puntos condiciones de frontera mix2")+xlab('')+ylab('')
p3 <- ggplot(puntos, aes(x = X , y = Y)) + theme_minimal() + geom_point(aes(colour = 'puntos conocidos'
stat_function(fun = f3, colour ='lightblue', xlim = c(x2,7.460007) ) +
stat_function(fun = f4, colour = 'lightblue', xlim = c(x2,x3)) +
stat_function(fun = f5, colour = 'lightblue', xlim = c(x3,7.460007)) +
stat_function(fun = Spline.Cubico.Mix.f3V, colour = '#E7298A',
              xlim = c(1.045050,7.460007)) +
stat_function(fun = Spline.Cubico.Mix.f4V, colour ='#E7298A', xlim = c(1.045050,3)) +
stat_function(fun = Spline.Cubico.Mix.f5V, colour = '#E7298A', xlim =
                c(2.920191,7.460007)) +
stat_function(fun = Spline.Cubico.Mix2.f3V, colour = '#41B6C4', xlim = c(x2,7.460007))+
stat_function(fun = Spline.Cubico.Mix2.f4V, colour ='#41B6C4', xlim = c(1.143742,3)) +
stat_function(fun = Spline.Cubico.Mix2.f5V, colour = '#41B6C4', xlim =
                c(2.920191,7.460007)) +
  scale_color_manual(values='red', guide=FALSE) +
  ggtitle("Comparacion de spline mix1 vs mix2")+xlab('')+ylab('')
```

```r
ggpubr::ggarrange(p1, p2,p3,  nrow = 3)
```

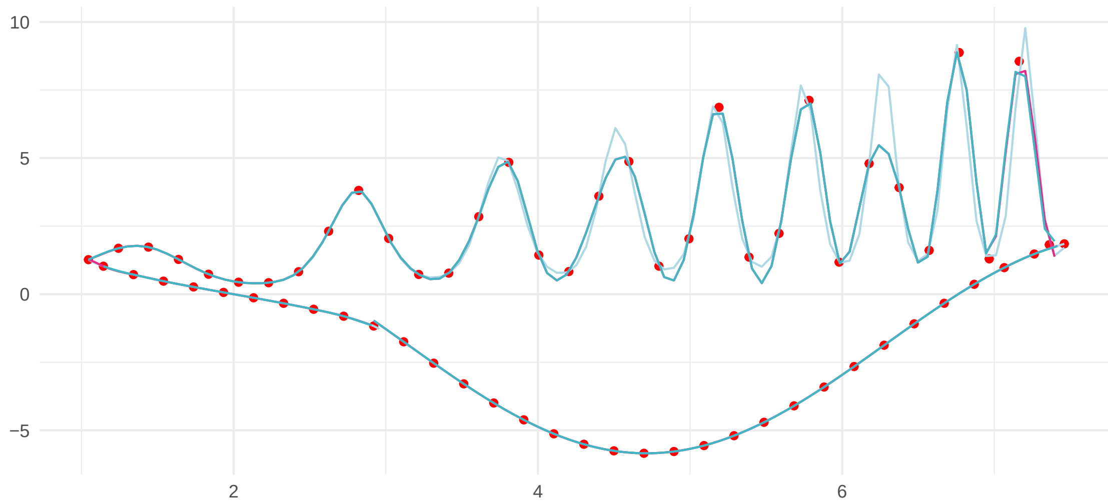
Spline cubico con 66 puntos condiciones de frontera mix1



Spline cubico con 66 puntos condiciones de frontera mix2



Comparacion de spline mix1 vs mix2



En todas las graficas la silueta se presenta con color azul claro.

El spline cúbico con la combinación ‘mix1’ que fija la condición de frontera en el primer punto y deja libre la condición en el último punto, se ilustra en la gráfica superior.

Mientras que la combinación ‘mix2’ se encuentra en la parte de en medio.

Al sobreponer ambos splines (en la última gráfica) vemos que la diferencia se aprecia más en el último spline porque el spline en azul que corresponde al que fija la condición de frontera en el último punto es diferente a la del spline rosa que corresponde al spline con frontera libre en el último punto, fuera de esto los splines coinciden y aproximan bien (visualmente) a la silueta 2, hecho que los interpoladores anteriores no lograron. Y por el buen comportamiento de la derivada de la silueta en el primer spline las diferencias entre ambos splines ‘mix1’, y ‘mix2’ (aunado a el elevado número de puntos) son demasiado pequeñas confundiendose de hecho en la última gráfica.