Álgebra Matricial

Tarea 5

J. Antonio García, jose.ramirez@cimat.mx

27 de noviembre de 2017

1. Sea $A \in M_{3x3}(\mathbb{R})$ la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

   a) Determine todos los valores propios de A.

   b) Para cada valor propio de λ de A, encuentre el conjunto de vectores propios que le corresponden a λ.

   c) Si es posible, encuentre una base $\mathbb{R}^3$ que consista de vectores propios de A.

   d) Si tal base existe, determine una matriz invertible P y una matriz diagonal D tal que $A = PDP^{-1}$

a) Comenzamos calculando el polinomio característico de A, denotado por $p_A(\lambda)$:

$$p_A(\lambda) = det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -3 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1-\lambda & -1 \end{vmatrix}$$
$$= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$$

Y encontramos las raíces del polinomio -utilizando división sintética − las cuales son $1, 2$ y 3 es decir $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$

b) Conociendo los valores propios resolvemos los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos de la forma $A - \lambda_i I_3 = 0$ para obtener los vectores propios asociados a los valores propios.

1) Caso $\lambda = 1$

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Cuyas soluciones son de la forma $v_1 = x_1(1, 1, -1)^t$, el cual es nuestro primer vector propio.

2) Caso $\lambda = 2$

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cuyas soluciones son de la forma $v_2 = x_1(1, -1, 0)^t$, el cual es nuestro segundo vector propio.

3) Caso $\lambda = 3$

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cuyas soluciones son de la forma $v_3 = x_3(-1, 0, 1)^t$, el cual es nuestro último vector propio.

c) Consideramos la base formada por los tres vectores propios en columna :

$$P = [v_1, v_2, v_3] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

P tiene tres pivotes por lo que los vectores son l.i y forman una base

d) La matriz anterior P satisface que

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Sea la matriz $A \in M_{3x3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 8 & -5 & 0 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

Determine si A es diagonalizable y si lo es, encuentre una matriz invertible P y una matriz diagonal D tal que $A = PDP^{-1}$.

La matriz A es diagonalizable pues al obtener su polinomio característico obtenemos que sus raíces son 3 y -1, a pesar de que el valor propio 3 tiene multiplicidad algebraica igual a dos basta con exhibir que la multiplicidad geométrica del valor propio 3 es también dos lo cual permite construir una base de la nulidad de $A - 3I_3$ que formara parte de la matriz P.
Primero obtengo el polinomio característico de A:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & 0 \\ 8 & -5-\lambda & 0 \\ 6 & -6 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 \\ 8 & -5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 +^5 \lambda - 3\lambda - 9$$

Cuyas soluciones son 3 y -1.
Ahora al considerar la nulidad de $A - 3I_3$ tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 7-3 & -4 & 0 \\ 8 & -5-3 & 0 \\ 6 & -6 & 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 8 & -8 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De donde las soluciones de $A - 3I_3$ son de la forma $(x_1, x_1, x_3)^t = x_1(1,1,0)^t + x_3(0,0,1)^t$ que brinda una base del espacio propio al valor propio $\lambda = 3$, es decir $E_{\lambda=3}$
Por otro lado el valor propio -1 tiene el vector propio asociado $(1/2, 1, 3/4)^t$, lo cual se obtiene de lo siguiente:

$$A - (-1I_3) = \begin{pmatrix} 7+1 & -4 & 0 \\ 8 & -5+1 & 0 \\ 6 & -6 & 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Entonces la matriz que diagonaliza a A es $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3/4 \end{pmatrix}$ por lo que tenemos:

$$\begin{aligned} A = PDP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 0 \\ -3/4 & 3/4 & -1/2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} (-2) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 3/2 & 0 \\ -9/4 & 9/4 & -3/2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} (-2) \\ &= \begin{pmatrix} -7/2 & 4/2 & 0 \\ -4 & 5/2 & 0 \\ -12/4 & 12/4 & -3/2 \end{pmatrix} (-2) \end{aligned}$$

3. Dada

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2x2}\mathbb{R}$$

encuentre una expresión para A^n, donde n es un entero positivo.

Sabemos que si una matriz A es diagonalizable podemos calcular $A^n = PD^nP^{-1}$ donde D es una matriz con los valores propios de A, y como esto es más fácil de operar procederé a encontrar la matriz de cambio de base P.
Primero obtengo $p_A(\lambda) = det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$, de donde A tiene dos valores propios diferentes por lo que es diagonalizable.
Los vectores propios de A son:
$(-2, 1)^t$ para el balor propio -1 y $(1, 1)^t$ para el valor propio 5.
Por lo que podemos tomar la matriz de cambio de base $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, cuya inversa P^{-1} está dada por $\frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, y calcular:

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 05^n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \frac{-1}{3} \\ &= \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n+1} \\ -5^n & -2 * 5^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 2(-1)^{n+1} - 5^n & 2(-1)^{n+2} - 2 * 5^n \\ (-1)^n - 5^n & (-1)^{n+1} - 2 * 5^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Sea $A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$ con valores propios distintos $\lambda_1, \cdots \lambda_r$ y multiplicidades correspondientes $m_1, \ldots m_r$. Suponga que B es una matriz en $M_{nxn}\mathbb{R}$, triangular superior y similar a la matriz A. Demuestre que las entradas diagonales de B son $\lambda_1, \cdots \lambda_r$ y que cada λ_j aparece m_j veces, $1 \leq j \leq r$.

Sabemos que si dos matrices son similares, con la definición de similaridad que hemos empleado en la segunda parte del curso en el sentido de que $A \sim B$ si y solo si $A = PBP^{-1}$, comparten su polinomio característico es decir $p_A(\lambda) = det(A - \lambda I_n) = p_B(\lambda) = det(B - \lambda I_n)$.
Calculemos explícitamente el polinomio característico de B:

$$p_B(\lambda) = det(B - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & b_{13} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} - \lambda & b_{23} & \ldots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} - \lambda & \ldots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Si desarrollamos el determinante anterior (y todos los siguientes) sobre la primer columna obtenemos :

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) =& (b_{11} - \lambda) \begin{vmatrix} b_{22} - \lambda & b_{23} & \ldots & b_{2n} \\ 0 & b_{33} - \lambda & \ldots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & b_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \\ =& (b_{11} - \lambda)(b_{22} - \lambda) \begin{vmatrix} b_{33} - \lambda & b_{34} & b_{35} & \ldots & b_{3n} \\ 0 & b_{44} - \lambda & b_{45} & \ldots & b_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & b_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \\ =& \ldots \\ =& (b_{11} - \lambda)(b_{22} - \lambda)(b_{33} - \lambda) \ldots (b_{nn} - \lambda) \\ =& \prod_{i=1}^{n} (b_{ii} - \lambda) \end{aligned}$$

Hasta aquí tenemos que el polinomio característico de B, y también de A, esta dado por $\prod_{i=1}^{n}(b_{ii} - \lambda)$ además sabemos que $p_A(\lambda)$ tiene como raíces a los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ (con sus respectivabas multiplicidades, es decir que los puntos donde se anula $\prod_{i=1}^{n}(b_{ii} - \lambda)$ son $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, por lo que las entradas b_{ii} son $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ (con sus respectivas multiplicidades).

5. Suponga que $A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$ tiene dos valores propios distintos λ_1, λ_2 y que $dim(E_{\lambda_1}) = n-1$. Demuestre que A es diagonalizable.

Encontré dos maneras de probar esto:
La primera de manera análoga al ejercicio 2: Dado que el vector $dim(\lambda_1) = n - 1$ entonces E_{λ_1} tiene una base

formada por $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$, por otro lado sabemos que λ_2 (con multiplicidad algebraica uno al igual que su multiplicidad geométrica) tiene un vector propio asociado w. Basta tomar la matriz $P = [v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, w]$ para diagonalizar A.
La segunda: Por una proposición vista en clase sabemos que la multiplicidad geométrica de un vector propio es menor o igual a su multiplicidad algebraica, por lo que $dim(E_{\lambda_1}) \leq m_{\lambda_1}$, por otro lado el polinomio característico de A se puede escribir como: $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_{\lambda_1}}(\lambda - \lambda_2)$, como λ_1 es distinto a λ_2 tenemos que la multiplicidad algebraica de λ_1 es igual a su multiplicidad geométrica, también las multiplicidades de λ_2 son iguales a la unidad, y por otro corolario visto en clase sabemos que la condición de diagonalidad es equivalente a que las multiplicidades, geométrica y algebraica, coincidan en todos los valores propios de la matriz.

6. Sea A una matriz que es diagonalizable e invertible. Demuestre que A^{-1} también es diagonalizable.

Como A es diagonalizable sabemos que existen matrices P y D tales que:

$$A = PDP^{-1}$$

Además como A es invertible la matriz A^{-1} existe y la calculamos

$$A^{-1} = \left(PDP^{-1}\right)^{-1} = (P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$$

Como nota, sabemos que P es un cambio de base, es decir que representa a una transformación lineal biyectiva, por lo que es invertible y en algún ejercicio de este bonito curso hemos calculado la inversa de una matriz diagonal $D^{-1} = (d_{ii}^{-1}$.

7. Sea $A \in M_{r\times r}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{r-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{r-1} \end{pmatrix}$$

Donde $a_0, a_1, \cdots, a_{r-1}$ son escalares arbitrarios. Demuestre que el polinomio característico de A es

$$(-1)^r(a_0 + a_1t + \cdots + a_{r-1}t^{r-1} + t^r)$$

Utilizaré el hint que se proporciona y lo probaré por inducción:

a) Base de inducción. Supongamos $n == 1$, entonces la matriz A es de la forma $\big((-a_0)\big)$
Entonces su polinomio característico es $(-a_0 - \lambda) = (-1)^1(a_0 + \lambda)$
Por lo que el enunciado se cumple.

b) Paso inductivo. Supongamos que se cumple para $k < r$ y veamos que pasa con $k = r$.
Calculemos $p_A(\lambda)$ como el $det(A_\lambda I_n)$ sobre el primer reglón:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \ldots & -a_0 \\ 1 & -\lambda & 0 & \ldots & -a_1 \\ 0 & 0 & -\lambda & \ldots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -a_{r-1} - \lambda \end{vmatrix}$$
$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \ldots & -a_1 \\ 0 & -\lambda & \ldots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -a_{r-1} - \lambda \end{vmatrix} - a_0(-1)^{r+1} \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

En la última expresión el segundo determinante es igual a uno pues se tiene una matriz superior (cuyo determinante es igual al producto de sus diagonales, que son 1), tenemos hasta el momento que:

$$p_A(\lambda) = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \ldots & -a_1 \\ 0 & -\lambda & \ldots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -a_{r-1} - \lambda \end{vmatrix} - a_0(-1)^{r+1}$$

Ahora empleamos la hipótesis de inducción sobre el subdeterminante de la última expresión para obtener:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= -\lambda\left((-1)^{r-1}(a_1 + a_2\lambda + \cdots + a_{r-1}\lambda^{r-2} + \lambda^{r-1})\right) - a_0(-1)^{r+1} \\ &= \lambda(-1)^r(a_1 + a_2\lambda + \cdots + a_{r-2}\lambda^{r-1} + \lambda^{r-1}) + a_0(-1)^r \\ &= (-1)^r(a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_{r-1}\lambda^{r-1} + \lambda^r) + a_0(-1)^r \\ &= (-1)^r(a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_{r-1}\lambda^{r-1} + \lambda^r + a_0) \end{aligned}$$