Tarea 2 de Análisis numérico

José Antonio García Ramirez

Febrero 5, 2018

Ejercicio 1.6. Número de condición

Use nuevamente el número de condición $k_i = \frac{\partial f}{x_i}\frac{x_i}{f}$ *para mostrar que la división* x_1/x_2 *está bien condicionada para* $i = 1, 2$.

Sabemos que los números de condición k_i son idénticos a la unidad (o a su inverso aditivo) pues si definimos la función $f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}$, tenemos que:

$$k_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{x_1}{f} = \frac{1}{x_2}\frac{x_1}{\frac{x_1}{x_2}} = \frac{1}{x_2}\frac{x_1 x_2}{x_1} = 1$$

Por otro lado tenemos que:

$$k_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{x_2}{f} = \frac{-x_1}{x_2^2}\frac{x_2}{\frac{x_1}{x_2}} = \frac{-x_1}{x_2^2}\frac{x_2^2}{x_1} = -1$$

Es decir que la división (al igual que la multiplicación estan bien condicionadas, como vimos en clase pues estas constantes son pequeñas).O dicho de otra manera la multiplicación no tiene problemas en la asociatividad tomemos los ejemplos $x/y = (x * (1/y))$ y $\frac{y}{x} = \frac{1}{\frac{x}{y}}$ con x y y como siguen:

```
x <- .Machine$double.xmax
x
```

```
## [1] 1.797693e+308
```

```
y <- x/10
all.equal( (x/y) ,(x*(1/y)) )
```

```
## [1] TRUE
```

```
all.equal((y/x) , (1/(x/y)) )
```

```
## [1] TRUE
```

Ejercicio 1.9. Evaluación de polinomios

Considere un polinomio expresado en las dos formas equivalentes

$$p(x) = a_0 + xa_1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-1} + xa_n)\dots)$$

Ahora realice:

1. *Suponga que los coeficientes* a_i *estan dados y determine el número de operaciones de punto flotante para evaluar ambas representaciones del polinomio en un punto* x.

2. *Defina 16 números enteros para ser usados como coeficientes de un polinomio de grado 15. Implemente ambas representaciones de la evaluación y realice un número grande de evaluaciones para graficar su polinomio para $x \in [-2, 2]$. Observe y comente sobre la cantidad de evaluaciones necesarias para que las diferencias se hagan notar en los tiempos de cálculo al usar una u otra representación*

Para la parte 1:

Tenemos que la cantidad de operaciones de punto flotante en la siguiente expresión:

$$p(x) = a_0 + xa_1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

De entrada, tiene n sumas (intermedias entre cada uno de los $n+1$ términos de la expresión). Por otra parte cada uno de los terminos requiere de un número diferente de multiplicaciones, el primer término a_0 no requiere de multiplicación (solo de acceso a memoria), el primer termino que contempla multiplicaciones entre puntos flotantes es a_1x el cual requiere de una sola multiplicación, el siguiente termino a_2x^2 requiere de 2 multiplicaciones, el siguiente termino a_3x^3 requiere de 3 multiplicaciones y de manera análoga llegamos a que el termino a_nx^n requiere de n multiplicaciones. Por lo anterior el número de multiplicaciones de punto flotante requeridas esta dado por:

$$\sum 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n$$

Es decir que es la suma de los primeros n números naturales, por lo que se requiere de $\frac{(n)(n+1)}{2}$ multiplicaciones de punto flotante.

Ahora, si a lo anterior sumamos las n adiciones de punto flotante obtenemos que el total de operaciones de punto flotante, en esta evaluación, es de $\frac{(n)(n+1)}{2} + n = \frac{(n^2+n)+2n}{2} = \frac{n^2+3n}{2}$

Ahora calculemos la cantidad de operaciones de punto flotante en la expresión:

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-1} + xa_n)\dots)$$

Prestemos atención a las constantes a_i. Para cada uno de estos coeficientes desde el subíndice cero hasta el {n-1} notemos que en la expresión tenemos inmediatamente después de ellos una suma (es decir si lo leemos de izquierda a derecha después del coeficiente en cuestión a la derecha tenemos una suma), por lo que se requieren de n sumas de números flotantes para esta evaluación. Por otro lado inmediatamente después de los símbolos de suma ('+') tenemos indicada una multiplicación (esto es más claro si leemos la expresión que queremos evaluar de derecha a izquierda, pues es más fácil ver que desde el termino $+a_nx$ ya se realizó una multiplicación, y continuando de esta manera vemos que después de cada símbolo '+' tenemos una expresión del tipo $x(a_i + \dots)$ Entonces las multiplicaciones están en biyección con las sumas requeridas teniendo así que el numero de operaciones de punto flotante para esta evaluación es de solo $2n$, n sumas y n multiplicaciones.

Lo siguiente es una implementación en el ambiente R que no hace uso de sus capacidades innatas de vectorización para evaluar las dos formas diferentes que hemos visto de evaluar el polinomio donde los coeficientes son $a_0 = 16, a_1 = 15, \dots, a_{15} = 1$.

```
coeficientes <- 16:1
pol.naive <- function(x, coeficientes)
{
  # x (double):punto a evaluar
  eval <- coeficientes[1]           #de la manera sencilla inicializamos con el
                                    #valor del termino constante
  for (j in 2:length(coeficientes))
    {                               #para cada uno de los coeficientes restantes
      eval <- eval + coeficientes[j]*x^{j-1}  #realizamos la potencia y
                                              #multiplicamos por el coeficiente
  }
  return(eval)                    #se regresa la evaluacion
}
```

```
pol.no.naive <- function(x, coeficientes)
{
  #x (double): punto a evaluar
  eval <- 0.
  eval <- x*coeficientes[length(coeficientes)]      #inicializamos al valor del ultimo coeficiente
                                  #multiplicado por el punto en donde se evalua el
                                  #polinomio
  for(j in (length(coeficientes) - 1):2)
  {
                                  #para los demas (excepto el ultimo coeficiente)
                                  #evaluamos utilizando el metodo de Horner
    eval <- eval + coeficientes[j]
    eval <- eval*x
  }
  eval <- eval + coeficientes[1]
  return(eval)
}
```

Y como vimos anteriormente la diferencia entre las complejidades de las dos formas de evaluar el polinomio difieren en un orden lineal (pues la primera es cuadrática mientras que la segunda es lineal) por lo que para cualquier valor (inclusive para un valor de 3) al evaluar la velocidad de las implementaciones obtenemos lo siguiente:

```
n <- 3
library(microbenchmark)   #paquete para medir tiempos
microbenchmark(Naive = mapply(pol.naive, seq(-2, 2, length = n), rep(coeficientes,n)) ,
No.Naive = mapply(FUN = pol.no.naive, seq(-2, 2, length = n), rep(coeficientes, n)), times = 10000)#en
```

```
## Unit: microseconds
##      expr     min      lq     mean   median      uq       max neval
##     Naive  88.252  94.086 110.4318  97.0040 101.380  4757.883 10000
##  No.Naive 111.591 118.154 144.0140 122.1655 128.001 38094.790 10000
```

En este caso $n = 3$ observamos que la primera implementación "compite en tiempo con la segunda". Ahora solo por diversión veamos que pasa para $n = 1000$

```
n <- 100
microbenchmark(Naive = mapply(pol.naive, seq(-2, 2, length = n), rep(coeficientes,n)) ,
No.Naive = mapply(pol.no.naive, seq(-2, 2, length = n), rep(coeficientes,n)), times = 10000)
```

```
## Unit: milliseconds
##      expr      min       lq     mean   median       uq      max neval
##     Naive 2.414133 2.694931 3.263499 2.857575 3.254339 42.27357 10000
##  No.Naive 3.206202 3.587467 4.421674 3.830522 4.669816 54.48099 10000
```

```
  #en las dos lineas anteriores ejecutamos 10000 las dos implementaciones con n=1000
polinomio.naive <- vector(mode='numeric', length=n)
polinomio.no.naive <- vector(mode='numeric', length=n)
soporte <- seq(-2, 2, length = n)
for(i in 1:length(soporte))
{
  polinomio.naive[i] <- pol.naive(soporte[i], coeficientes)
  polinomio.no.naive[i] <- pol.naive(soporte[i], coeficientes)
}
```

En este caso observamos que la segunda implementación es hasta 45% menos lenta en promedio que la

primera.

Finalmente visualizamos los resultados los cuales son tan parecidos que se enciman en la gráfica

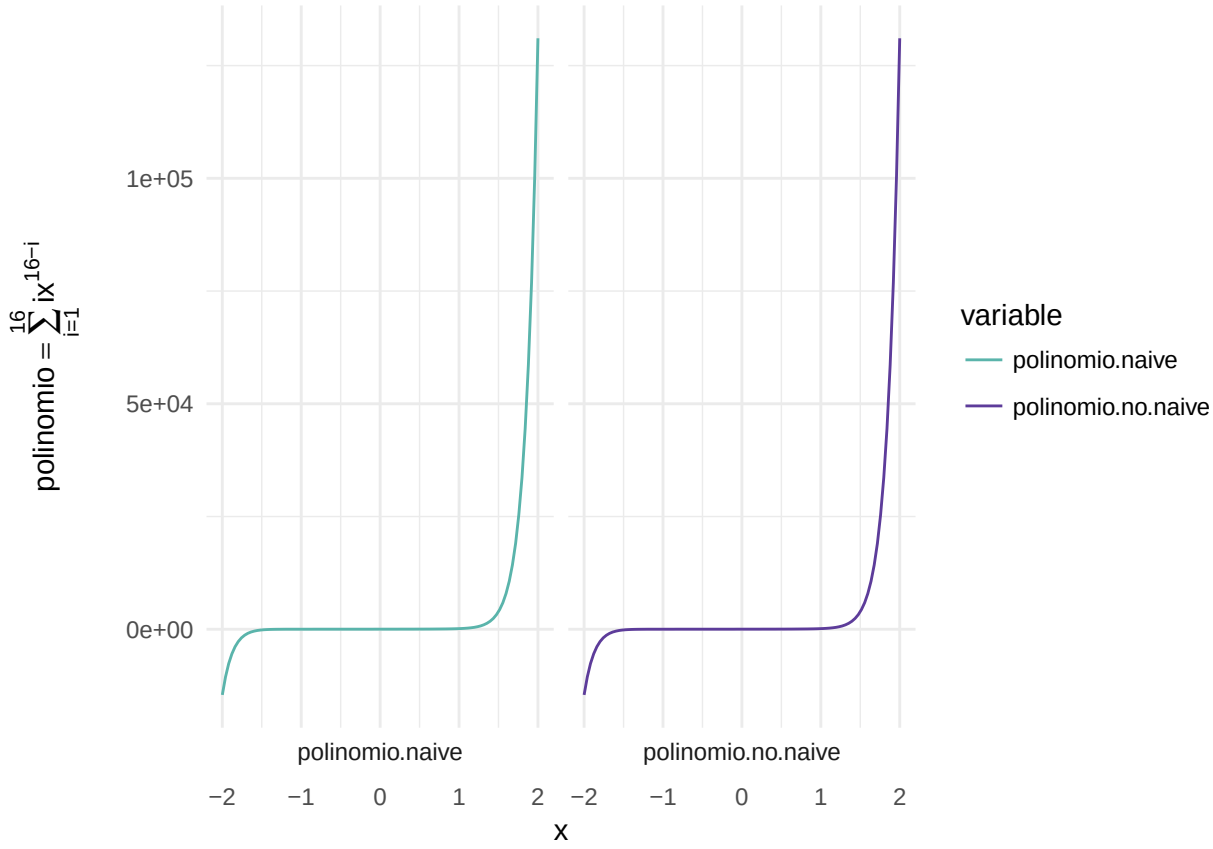
```
library(ggplot2)    #package para graficar
library(latex2exp)  #package para usar latex en las leyendas de los graficos
```

```
## Warning: package 'latex2exp' was built under R version 3.4.3
```

```
data <- data.frame(x = seq(-2, 2, length = n), polinomio.naive, polinomio.no.naive)
library(reshape)      #package para hacer largo el dataset
```

```
## Warning: package 'reshape' was built under R version 3.4.3
```

```
data <- melt(data, id = "x")
ggplot(data, aes(x = x, y=value)) + geom_line(aes(colour = variable)) +
facet_wrap(~variable,  nrow = 1, strip.position = "bottom") +  ylab(TeX('$ polinomio = \\sum_{i=1}^{16}
```



Como comentario final, la segunda implementación requiere de menos operaciones lo que la hace más confiable en términos numéricos pues se realizan menos operaciones y en una implementación rigurosa en la líneas dentro de los for() (donde se evalúan los polinomios) se podría checar por under u overflow (en este ejercicio no fue implementado en vista de la manera en que se eligieron los coeficientes).

Ejercicio 2.4. Interpolando Temperaturas

Asuma que las predicciones diarias de temperatura son conocidas para dos horas representativas (por ejemplo al amanecer y después del mediodía) en un conjunto de varios días. Diseñe un pseudo-código por escrito en el

que describa cómo pueden ser calculadas las predicciones en intervalos de 1 hora, incluyendo la información sobre los datos de entrada y salida de cada parte del pseudo-código

En su diseño no es necesario que describa el pseudo-código para calcular la interpolación. Asuma que existe la función:

[evaly,execTime] = Interpolate(dataX,dataY,evalx)

que acepta los datos a interpolar y un vector de puntos a evaluar, y retorna un vector (evaly) de valores evaluados y la cantidad de segundos utilizada para calcular la interpolación (execTime).

El pseudo código que presento es el siguiente:

```
dataX                  #vector con las horas observadas
dataY                  #vector con las predicciones de temperatura
n = len(dataX)         #se obtienen las longitudes de los vectores
n2 = len(dataY)
if( n == n2)         #se checa si ambos vectores son de la misma longitud
{
  ordenar_en_X(dataX, dataY) #se ordenan las observaciones pareadas en
                             #considerando el orden de dataX
                             # en R seria dataX <- dataX[order(dataX)];
                             # dataY <- dataY[order(dataX)]
  checar_duplicados(dataX,dataY)  #se checa si hay observaciones
                                  #en caso de se encuentre
                                  #valores de dataY se eliminan
  n = len(dataX)    #se obtienen las longitudes de los vectores checados
  n2 = len(dataY)
  mini = min(dataX) #se obtiene el rango de interpolacion
  max = max(dataX)
  evalx = sequencia(desde =mini, hasta = max, incremento = 1) #se construye el vector
                                                              #sobre el que se va a
                                                              #evaluar desde el minimo,
                                                              #hasta el maximo de las
                                                              #horas incrementando
                                                              #en cada posicion una hora
  if(n ==n2)
  [evaly,execTime] = Interpolate(dataX,dataY,evalx) #se realiza la interpolacion

}
```

Como comentario adicional, en vista de que la temperatura ambiental suele ser una función con estacionalidad (es decir que tiene ciclos) con variaciones, la implementación que hace la función Interpolate() debe de cuidar tanto que la cuncion sí es continua, y que se repite con variaciones, como que la derivada es bien portada (en el caso general a menos que aparezcan fenómenos naturales que la alteren demasiado) y finalmente el espaciado en tre las observaciones digamos entre la segunda y la tercera son casi 18 hrs mientras la diferencia entre la primera y la segunda es de 6 hrs. Valdría la pena checar de los métodos vistos en clase cual logra un mejor desempeño para este particular espaciamiento de los x_i

Ejercicio 2.5. Interpolación de Hermite Generalizada

La generalización del método de interpolación de Hermite puede ser determinada a través de requerir que el polinomio interpolante p cumpla con las condiciones:

$$\begin{aligned} p(x_i) &= f(x_i) \\ p'(x_i) &= f'(x_i) \\ p''(x_i) &= f''(x_i) \qquad i = 1, \ldots, n \\ &\vdots \\ p^{(m)}(x_i) &= f^{(m)}(x_i) \end{aligned}$$

Revise el método de solución de la Sección 2.2 y transforme el problema generalizado de Hermite en un problema de resolver un sistema lineal de ecuaciones. ¿Qué grado deberá tener el polinomio considerado?, ¿Cómo se puede atacar la problematica de no conocer las derivadas?

En cuanto a el grado del polinomio tenemos que debe de cumplir las siguientes condiciones :

$$\begin{array}{ccc} p(x_1) = f(x_1) & \ldots & p(x_n) = f(x_n) \\ p'(x_1) = f'(x_1) & \ldots & p'(x_n) = f'(x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p^{(m)}(x_1) = f^{(m)}(x_1) & \ldots & p^{(m)}(x_n) = f^{(m)}(x_n) \end{array}$$

Es decir que requiere satisfacer nm condiciones por lo que el grado del polinomio sería $nm - 1$.

En cuanto a la problemática de no conocer las derivadas $f^{(i)}(x)$, de manera analoga a como lo hacemos con el método de Hermite podemos considerar las diferencias divididas[1] para aproximarlas.

Usando la notación del libro que aprece en el pie de página podemos escribir:

Al usar la notación $f[x_1] = f(x_i)$ como la diferencia dividida de orden cero, podemos definir recursivamente la primer diferencia dividida de f con respecto a x_i y x_j denotada como $f[x_i, x_j]$ como

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

La segunda diferencia dividida queda como:

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

Y similarmente la $(k-1)$-ésima diferencia finita se define como:

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

Podemos entonces atacar la problemática de no conocer las derivadas considerando lo siguiente:

$$\begin{array}{ccc} p(x_1) = f[x_1] & \ldots & p(x_n) = f[x_n] \\ p'(x_1) = f'[x_1, x_2] & \ldots & p'(x_{n-1}) = f'[x_{n-1}, x_n] \\ p''(x_1) = f'[x_1, x_2, x_3] & \ldots & p''(x_{n-2}) = f'[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] \\ \vdots & & \\ p^{(m-1)}(x_1) = f^{(m)}[x_1, \ldots, x_{n-1}] & p^{(m-1)}(x_2) = f[x_2, \ldots, x_n] & \\ p^{(m)}(x_1) = f^{(m)}[x_1, \ldots, x_n] & & \end{array}$$

Al igual que en el caso visto en clase, la aproximación de $p^{(m)}(x)$ por diferencias divididas tiene problemas en los puntos extremos pues mientras la diferencia dividida sube de orden deja de estar definida para los puntos extremos (pues se definieron las diferencias finitas hacia adelante) de manera análoga se pueden definir las diferencias hacia atrás y las centrales. Como comentario final los denominadores de las diferencias finitas pueden ser expresados en sumas y restas de los términos de $f[x_i], i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sin embargo al sustituir estos valores los coeficientes para cada $f[x_i]$ cambian y en casos particulares siguen sucesiones conocidas.

[1] véase Burden R., Faires D., Burden A;*Numerical Analysis*; 10ma edición, pag. 122

Ejercicio 2.1. Interpolación de Lagrange

Defina una función (en MATLAB, R, etc) para interpolar por el método de Lagrange y úsela para aproximar a la función $f : [0, 8] \leftarrow R, f(x) = sen(x)$ *utilizando* n *puntos igualmente espaciados. Repita este ejercicio para* $n = 2, 4, 7, 11, 16$ *y haga observaciones sobre la calidad en las aproximaciones.*

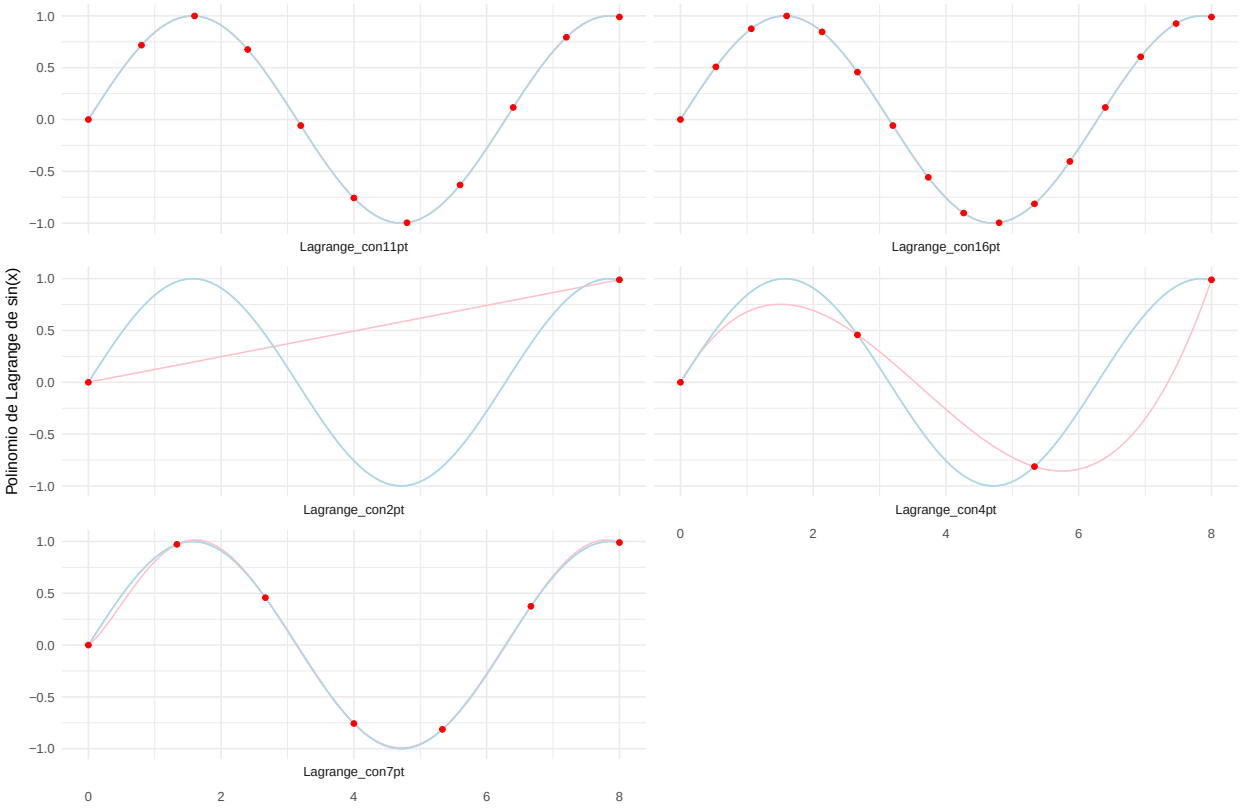
La implementación que hice para interpolar usando el método de Lagrande es la siguiente:

```
f <- function(x)
{               #declaramos un objeto de tipo 'closure' (una funcion
                #que regresa una funcion) para poder reutilizar el codigo
                #y de paso la vectorizamos
  #x (vector-double): punto en el cual evaluar la funcion
  mapply(sin, x)  #regresamos el valor de la funcion en el vector
}
oneLagrange_pol <- function(dataX, index, x)
{
  #dataX (vector-double): puntos donde se conoce la funcion
  #index (int): numero que indica que termino estamos calculando
  #x (double): punto en el que se evalua el polinomio
  L_i <- 1.                   #inicializamos el coeficiente del i-esimo termino
  for(i in 1:length(dataX))
  {
    if(i != index)
    {
                              #evaluamos el coeficiente de
      L_i <- L_i*( (x - dataX[i] )/(dataX[index] - dataX[i]) )
    }
  }
  return(L_i)  #regresamos el coeficiente index-esimo
}
Eval_pLagrange <- function(dataX, dataY, x)
{
  #dataX (vector-double): puntos donde se conoce la funcion
  #dataY (vector-double): puntos donde se conoce el valor de la funcion
  #x (double): punto en el que se evalua el polinomio
  f_aprox <- 0.         #inicializamos el polinomio
  for(i in 1:length(dataX))
  {
                    #calculamos iterativamente el polinomio de Laprange
    f_aprox <- f_aprox + dataY[i]*oneLagrange_pol(dataX, i, x)
  }
  return(f_aprox)  #regresamos el valor del polinomio en el punto
}
Lagrange <- function(dataX, dataY, m, a, b )
{
  #dataX (vector): puntos a evaluar donde se conoce la funcion
  #dataY (vector): valor de la funcion conocida en los puntos dataX
  #m (int):       numero de valores a evaluar
  #a,b (double): limite inferior y superior del dominio a interpolar

  soporte <- seq(a, b, length = m)   #construimos puntos para probar la
  f_soporte <- soporte*0             #reservamos memoria para guardar los
  for(i in 1:length(soporte))
  {
```

```
                          #para cada punto en el soporte se evalua el polinomio
    f_soporte[i] <- Eval_pLagrange(dataX, dataY , soporte[i]  )

  }
  return(f_soporte)       #regresamos el vector con los valores interpolados
}
```

La siguiente sección de código evalúa en el dominio que se pide para los polinomios de diferentes grados y manipula los datos para construir la gráfica.

```
m <- 100                          #Numero de puntos en el dominio
ns <- c(2,4,7,11,16)              #grados de los polinomios
                         #guardamos los puntos x, y f(x) con los que se construyen los polinomios para p
puntos <- lapply(ns, FUN = function(x){
  jj <-data.frame(x=seq(0,8, length = x),f =f(seq(0,8, length = x)))
  return(jj)})
puntos[[1]]$variable <- 'Lagrange_con2pt'
puntos[[2]]$variable <- 'Lagrange_con4pt'
puntos[[3]]$variable <- 'Lagrange_con7pt'
puntos[[4]]$variable <- 'Lagrange_con11pt'
puntos[[5]]$variable <- 'Lagrange_con16pt'
puntos <- do.call("rbind", puntos)
contraste <- data.frame(n = seq(0,8, length = m))
                          #se evaluan los polinomios de todos los grados en el dominio dado
a <- list()               #cada interpolación la guardamos en un indece de una lista
for(i in 1:length(ns))
{
  a[i] <- lapply(FUN = Lagrange, dataX=seq(0, 8, length=ns[i]) ,
                 dataY=f(seq(0, 8, length=ns[i])), m, a=0, b=8)
}
    #juntamos los resultados para poder construir la grafica que los compare
contraste$Lagrange_con2pt <- a[[1]]
contraste$Lagrange_con4pt <- a[[2]]
contraste$Lagrange_con7pt <- a[[3]]
contraste$Lagrange_con11pt <- a[[4]]
contraste$Lagrange_con16pt <- a[[5]]
library(reshape)
a <- melt(contraste, id = 'n')
ggplot(a, aes(x = n , y = value)) + stat_function(fun =sin,  colour = 'lightblue')+
  geom_line(aes(colour = variable)) +
  stat_function(fun =sin,  colour = 'lightblue')+
  facet_wrap(~variable,  ncol = 2, strip.position = "bottom") +
  theme_minimal() +
  scale_color_manual(values=c(rep('pink', 5), 'red'), guide=FALSE) +
  ylab("Polinomio de Lagrange de sin(x)") +
  geom_point(data = puntos, aes(x = x, y = f, colour = 'puntos conocidos')) +
  xlab('')
```



Como se observa en la gráfica anterior al evaluar el polinomio en n puntos igualmente espaciados en $[0, 8]$ podemos ver que a partir del polinomio de grado 7 (que requiere de siete puntos para interpolar) la diferencia entre la interpolación (color rosa) y la función sin(x) (dibujada con color azul claro) ya es pequeña. Para 11 y 16 puntos ambas gráficas se sobreponen.

La siguiente porción de código reutiliza los cálculos hechos para dibujar la tabla con el fin de obtener los máximos de los valores absolutos de la diferencia entre el valor interpolado y el 'exacto' (el que realiza la función sin(x) implementada en R) para cada uno de los puntos del dominio en donde se evaluó.

```
contraste$exacto <- f(contraste$n)
                        #en la siguiente linea calculamos el error maximo
                        # para cada interpolacion
r <- apply(contraste[, 2:6], 2, function(x)
  {
    x-contraste$exacto
})
r <- as.data.frame(r)
names(r) <- paste0('error_',names(contraste[, 2:6]))
contraste<- cbind(contraste, r)
library(xtable)       #package para generar tablas .tex
errores.maximos <- apply(contraste[, 8:12], 2, function(x){max(abs(x))} )
#xtable(as.data.frame(errores.maximos))
```

En la tabla siguiente vemos que la calidad de las estimaciones es aceptable a partir la interpolación con 11 puntos.

	errores.maximos
error_interpolacion_con2pt	1.59
error_interpolacion_con4pt	1.01
error_interpolacion_con7pt	0.09
error_interpolacion_con11pt	0.00
error_interpolacion_con16pt	0.00

Ejercicio 2.2. Interpolación de Newton y función de Runge

Considere la función de Runge $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ con $x \in [-1, 1]$ *y use una implementación de la interpolación de Newton (en MATLAB, R, etc.) para aproximar a esta función en* $[-1, 1]$ *utilizando* $5, 9, 13, 17$ *y* 21 *puntos igualmente espaciados. Observe como el grado polinomial afecta la calidad de la aproximación.*

Realice una aproximación similar usando el programa de interpolación de Lagrange del ejercicio anterior. ¿Son los resultados mejores, peores o equivalentes?

La implementación del método de Newton para interpolar que hicé es la siguiente, los coeficientes se obtienen al resolver un sistema de ecuaciones con la función solve() de R la cual es una interfase para la implementación en Fortran del famoso paquete LAPACK, en particular las *rutinas DGESV y ZGESV* las cuales efectuan una descomposición PLU para resolver sistemas lineales.

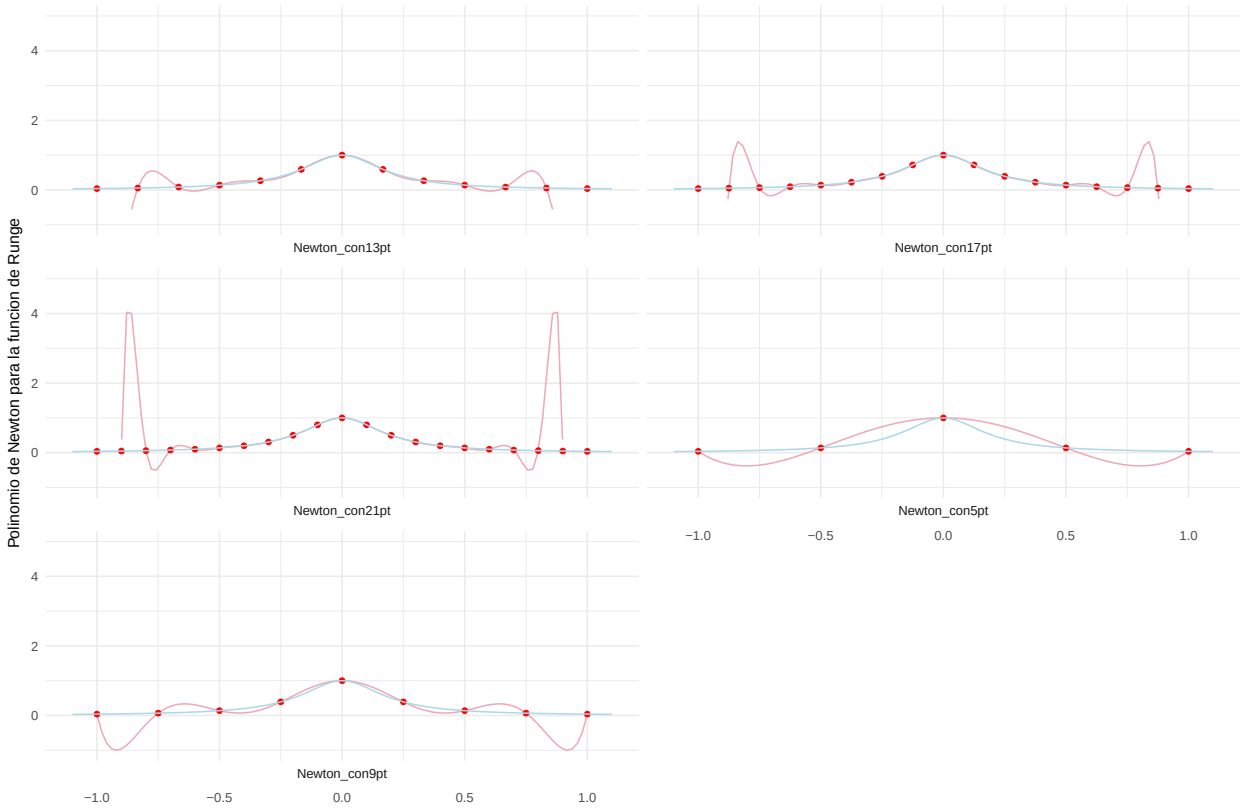
```
Runge <- function(x)
{               #declaramos una funcion para poder reutilizar el codigo
  #x (vector-double): punto en el cual evaluar la funcion
  return(1/(1+25*x^2))
}
Newton.one<- function(x, index, dataX)
{
  #dataX (vector-double): puntos donde se conoce la funcion
  #index (int): numero que indica que termino estamos calculando
  #x (double): punto en el que se evalua el polinomio
  val <- x-dataX[1:(index-1)] #evaluamos el coeficiente de Newton dorrespondiente al indice
  return(cumprod(val)[index-1]) #regresamos el coeficiente index-esimo
}
Newton.interpola <- function( n, dataX, dataY, x)
{
  #n (int) grado del polinomio
  #dataX (vector-double): puntos donde se conoce la funcion
  #dataY (vector-double): puntos donde se conoce el valor de la funcion
  #x (double): punto en el que se evalua el polinomio
          #Construimos la matriz para el metodo de Newton
  if(n < 2)
  {
    return('error') #un pequeño chequeo para ver que tenemos mas de un punto
  }

  M <- matrix(rep(0,n*n), byrow = FALSE, nrow = n)
  M[,1] <- 1
  for (i in 2:(n))
  {
    for(k in 2:i)
    {
      M[i,k] <- Newton.one(x = dataX[i], k , dataX)
    }
```

```
  }
  coeficientes <- solve(M, b = dataY) #obtenemos los coeficientes
  base <- (x - dataX[1:(n-1)])       #generamos la base de polinomios
  base.comp <- cumprod(base)
  resul <- coeficientes*c(1,base.comp) #construimos el polinomio interpolante
  return(sum(resul))      #regresamos la evaluacion del polinomio
}
Newton <- function(dataX, dataY, m, n, a, b)
{
  #dataX (vector-double): puntos donde se conoce la funcion
  #dataY (vector-double): puntos donde se conoce el valor de la funcion
  #m (int):       numero de valores a evaluar
  #n (int) grado del polinomio
  #a, b(double): limite inferior y superior respectivamente, en donde se interpola
  soporte <- seq(a, b, length = m)   #construimos puntos para probar la
  f_soporte <- soporte*0             #reservamos memoria para guardar los
  for(i in 1:length(soporte))
  {
                          #para cada punto en el soporte se evalua el polinomio
    f_soporte[i] <- Newton.interpola( n, dataX, dataY , soporte[i]  )
  }
  return(f_soporte)      #regresamos el vector con los valores interpolados
}
```

Análogamente la siguiente sección de código evalúa en el dominio que se pide para los polinomios de diferentes grados y manipula los datos para construir la gráfica.

```
m <- 100
ns <- c(5, 9, 13, 17, 21)
              #en las siguientes lineas se guardan todos los puntos donde se conoce la funcion para pla
puntos2 <- lapply(ns, FUN = function(x){
  jj <-data.frame(x=seq(-1,1, length = x),f =Runge(seq(-1,1, length = x)))
  return(jj)})
puntos2[[1]]$variable <- 'Newton_con5pt'
puntos2[[2]]$variable <- 'Newton_con9pt'
puntos2[[3]]$variable <- 'Newton_con13pt'
puntos2[[4]]$variable <- 'Newton_con17pt'
puntos2[[5]]$variable <- 'Newton_con21pt'
puntos2 <- do.call("rbind", puntos2)
           #creamos una lista para guardar las evaluaciones de todos los polinomios con diferentes 'n'
contraste2 <- data.frame(n = seq(-1,1, length = m))
a2 <- list()
for(i in 1:length(ns))
{
              #evaluamos todos los puntos para cada polinomio de grado ns[i]
  dataX <- seq(-1,1,length=ns[i])
  dataY <- Runge(dataX)
  a2[[i]] <- Newton(dataX, dataY , m = m, n = ns[i] , a=-1, b=1  )
}
contraste2$Newton_con5pt <- a2[[1]]
contraste2$Newton_con9pt <- a2[[2]]
contraste2$Newton_con13pt <- a2[[3]]
contraste2$Newton_con17pt <- a2[[4]]
contraste2$Newton_con21pt <- a2[[5]]
```

```
library(reshape)   #package para manipulacion de data.frame
a3 <- melt(contraste2, id = 'n')
ggplot(a3, aes(x = n , y = value)) + geom_line(aes(colour = variable))+
  facet_wrap(~variable,  ncol = 2, strip.position = "bottom") + theme_minimal() +
  scale_color_manual(values=c(rep('pink2',5), 'red'), guide=FALSE) +
  ylab("Polinomio de Newton para la funcion de Runge")+
geom_point(data = puntos2, aes(x = x, y = f, colour = 'puntos conocidos'))+
  ylim(c(-1,5)) +xlim(c(-1.1,1.1))+
  stat_function(fun =Runge,  colour = 'lightblue') + xlab('')
```



En la gráfica anterior al evaluar el polinomio en m = 100 puntos igualmente espaciados en $[-1, 1]$ podemos ver que a partir del polinomio de grado 13 (que requiere de trece puntos para interpolar) la diferencia entre la interpolación y la función de Runge (dibujada con color azul claro) ya no es pequeña en el vecindario de los puntos fijos (en rojo) por lo que podríamos pensar que se está sobre ajustando la interpolación al emplear más puntos (o bien que la calidad de las estimaciones decaerá en los puntos 'lejanos' al cero. En la siguiente tabla se muestran los máximos de los valores absolutos de la diferencia entre el valor interpolado y el 'exacto' (el que se obtiene con la función de Runge y comparandolo con la implementación anterior que interpola usando el método de Lagrange).

```
contraste2$exacto <- Runge(contraste2$n)
                      #en la siguiente linea calculamos el error maximo
                      # para cada interpolacion
r2 <- apply(contraste2[, 2:6], 2, function(x)
  {
    x-contraste2$exacto
})
r2 <- as.data.frame(r2)
```

```
names(r2) <- paste0('error_',names(contraste2[, 2:6]))
contraste2<- cbind(contraste2, r2)
                        #evaluamos la interpolacion usando Lagrange
contraste <- data.frame(n = seq(-1,1, length = m))
a4 <- list()
for( i in 1:length(ns))
{
  dataX <- seq(-1, 1, length= ns[i] )
  dataY <- Runge(dataX)
  a4[[i]] <- Lagrange(dataX, dataY, m, a=-1, b=1 )  #evaluamos todos los
                                                    #puntos para el polinomio de grado ns[i]
}
contraste$Lagrange_con5pt <- a4[[1]]
contraste$Lagrange_con9pt <- a4[[2]]
contraste$Lagrange_con13pt <- a4[[3]]
contraste$Lagrange_con17pt <- a4[[4]]
contraste$Lagrange_con21pt <- a4[[5]]
contraste$exacto <- Runge(contraste$n)
r <- apply(contraste[, 2:6], 2, function(x)
  {
    x-contraste$exacto
})
r <- as.data.frame(r)
names(r) <- paste0('error_',names(contraste[, 2:6]))
                        #en la siguiente linea calculamos el error maximo
                        # para cada interpolacion
contraste <- cbind(contraste, r)
referencia <- cbind(contraste, contraste2)
j <- referencia[, c(8:12, 20:24)]
errores.maximos <- apply(j, 2, function(x){max(abs(x))} )
errores.maximos <- as.data.frame(errores.maximos)
#xtable(errores.maximos)
```

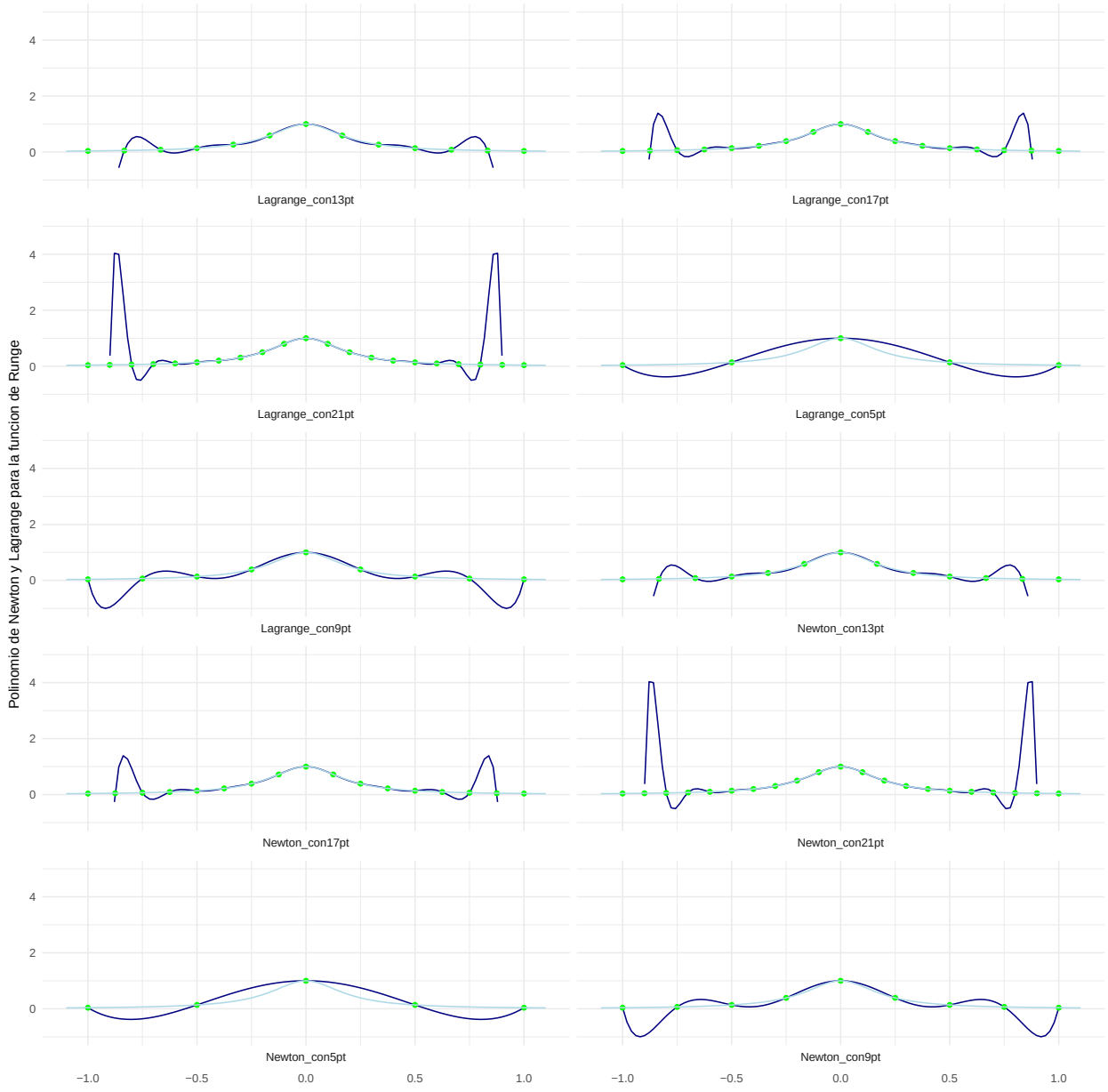
	errores.maximos
error_Lagrange_con5pt	0.44
error_Lagrange_con9pt	1.05
error_Lagrange_con13pt	3.61
error_Lagrange_con17pt	14.01
error_Lagrange_con21pt	58.41
error_Newton_con5pt	0.44
error_Newton_con9pt	1.05
error_Newton_con13pt	3.61
error_Newton_con17pt	14.01
error_Newton_con21pt	58.41

En la tabla anterior observamos que los errores máximos son los mismos, queriendo decir que son aproximaciones semejantes.

La siguiente sección manipula los datos para construir la gráfica.

```
puntos3 <- puntos2
puntos3$variable <- gsub('Newton', 'Lagrange',puntos3$variable)
puntos4 <- rbind(puntos2, puntos3)
a3 <- melt(referencia, id = 'n')
```

```
a3$variable <- factor(a3$variable,levels(a3$variable)[c(1:5,12:16,6:11,17:21)] )
suba3 <- subset(a3, variable %in% c('Lagrange_con5pt', 'Lagrange_con9pt', 'Lagrange_con13pt',
                                    'Lagrange_con17pt', 'Lagrange_con21pt', 'Newton_con5pt',
                                    'Newton_con9pt', 'Newton_con13pt',
                                    'Newton_con17pt', 'Newton_con21pt'))
suba3$numero_puntos <- as.factor(rep(ns, each = 100))
ggplot(data = suba3,aes(x = n , y = value)) + geom_line(aes(colour = numero_puntos))+
  facet_wrap(~variable,  ncol = 2, strip.position = "bottom") + theme_minimal() +
  scale_color_manual(values=c(rep('navy', 5), rep('green', 5),'red'),  guide=FALSE) +
  ylab("Polinomio de Newton y Lagrange para la funcion de Runge")+
geom_point(data = puntos4, aes(x = x, y = f, colour = 'puntos conocidos'))+
  ylim(c(-1,5)) +xlim(c(-1.1,1.1))+stat_function(fun =Runge,  colour = 'lightblue') + xlab('')
```



Nuevamente comprobamos que los polinomios de Lagrange y de Newton son muy parecidos en el intervalo de

interpolación.

Ejercicio 2.3. Comparando interpolaciones

Defina dos siluetas simples que puedan representarse como un conjunto de 2 a 5 funciones en R^2, use al menos una silueta con solo 3 puntos y otra con al menos 10 puntos. Implemente un programa que utilice interpolación de Lagrange y de Newton y compare los resultados de ambas aproximaciones en términos de 'calidad visual' (subjetivo), eficiencia en tiempo de calculo y complejidad de la implementación.

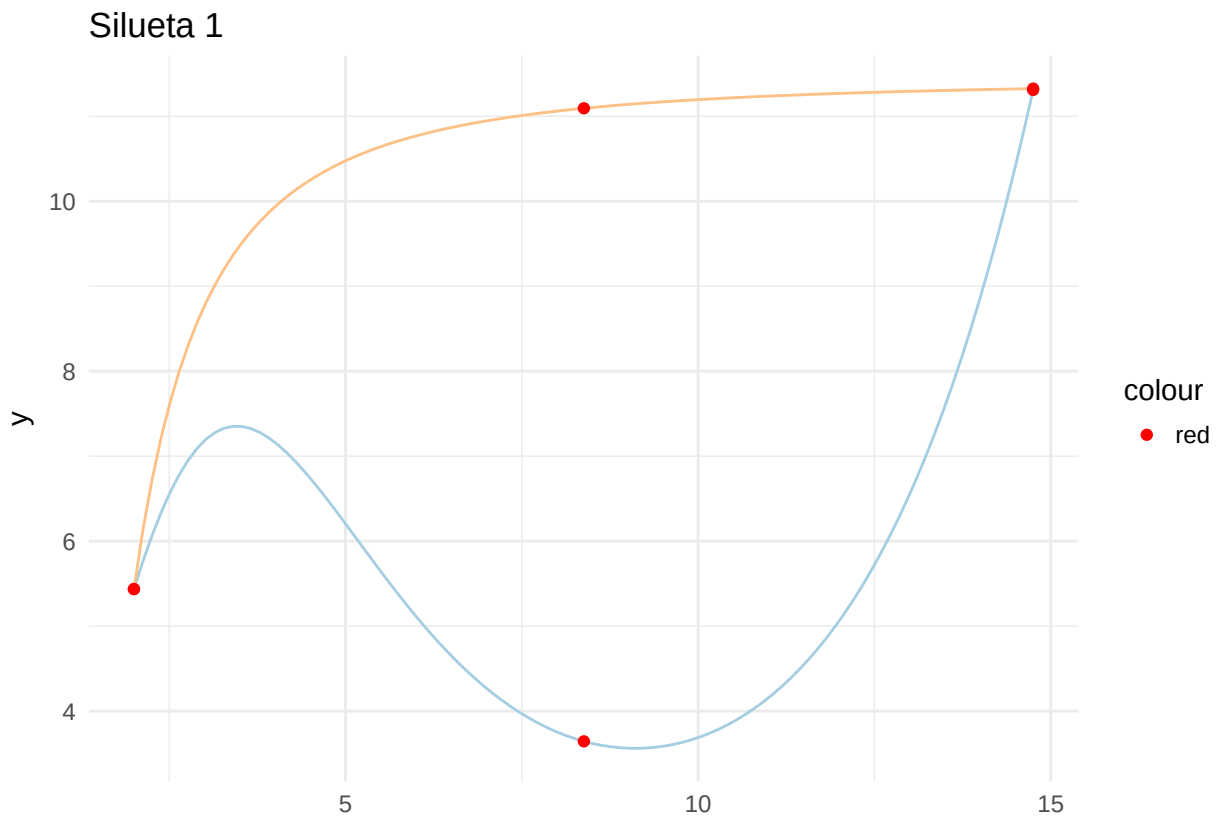
La primera silueta con la trabajé fue la siguiente, la realicé con dos funciones, los 3 puntos que elegí para interpolar son $x = 2, 8.38, 14.75$, para cada función los marco con color rojo.

El código para realizar la silueta 1 es el siguiente:

```
#primeras funciones para la silueta
f1 <- function(x)      #funcion en color azul en la grafica
{
  y <- mapply(FUN = function(x){exp(sin(x**(2/3)))*x},x )
  return(y)
}
f2 <- function(x)   #funcion en color azul en la grafica
{
  y <- mapply(FUN = function(x){11.435814 + (-24/x**2)},x )
  return(y)

}
```

Esta es la primer silueta con la que trabajé

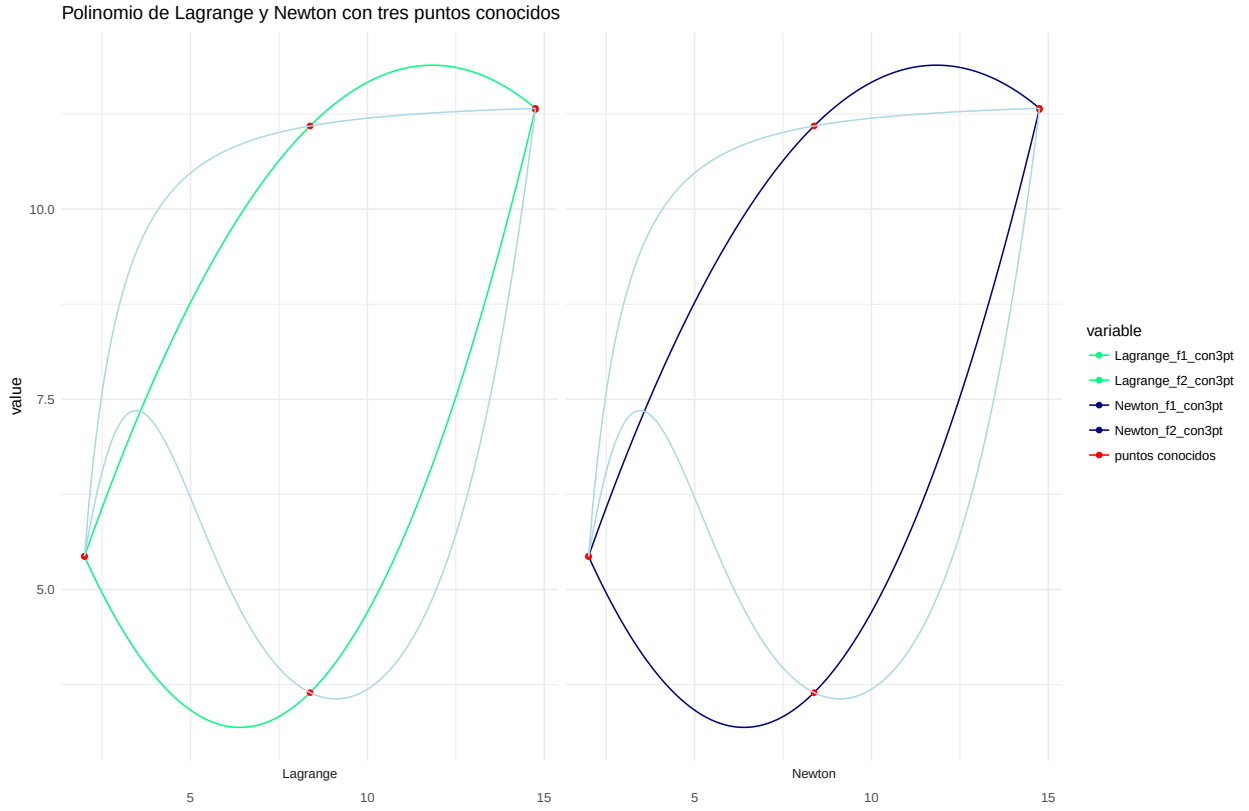
```
# en la siguiente lineas aproxime la interseccion de las funciones para generar
#contornos cerrados, el mismo procedimiento se siguió en la segunda silueta.
x1 <- uniroot(function(x){ f2(x)-f1(x)}, interval = c(14,15))$root
x <- round(seq(2, x1, length = 3), 2)
puntos2 <-  puntos1 <- as.data.frame(x = x)
puntos1$f <- f1(puntos1$x)
puntos2$f <- f2(puntos2$x)
puntos <- rbind(puntos2, puntos1)
            #se dibuja
ggplot(data = data.frame(x = c(0, x1)), aes(x)) +stat_function(fun = f1, colour ='#A6CEE3',
xlim = c(2,x1) ) + stat_function(fun = f2, colour = '#FDC086',xlim = c(2,x1)) +
  theme_minimal() + ggtitle("Silueta 1") + xlim(c(2,x1)) +
  geom_point(data = puntos, aes(x = x, y = f, colour = 'red')) +
  xlab('') + scale_color_manual(values=c('red'))
```



La siguiente gráfica muestra la interpolación del contorno y los tres puntos elegidos usando el método de Lagrange y el de Newton.

```
m <- 100
tiempo.lagrange <- Sys.time()       #medimos el tiempo de ejecución
contraste1 <- data.frame(n = seq(2,x1, length = m))   #al igual que en ocaciones anteriores
                              #guardamos las evaluaciones para poder grafica posteriormente
      #generamos los 3 puntos en base para interpolar
dataX <- seq(2, x1, length = 3)
dataY <- f1(dataX)
        #evaluamos todos los puntos
contraste1$Lagrange_f1_con3pt <- Lagrange(dataX, dataY, m, a=2, b=x1 )
contraste1$origen <- 'Lagrange'
contraste2 <- data.frame(n = seq(2,x1, length = m))
contraste2$Lagrange_f2_con3pt <- Lagrange(dataX, f2(dataX), m, a=2, b=x1 )
         #evaluamos todos los puntos
contraste2$origen <- 'Lagrange'
tiempo.lagrange <- Sys.time() - tiempo.lagrange
tiempo.lagrange <- as.numeric(round(tiempo.lagrange, 7))
############### Repetimos lo anterior para el metodo de newton
tiempo.newton <- Sys.time()
contraste3 <- data.frame(n = seq(2,x1, length = m))
        #evaluamos todos los puntos
contraste3$Newton_f1_con3pt <- Newton(seq(2,x1, length = 3), f1(seq(2,x1, length = 3)),
m, 3, a=2, b=x1)
contraste3$origen <- 'Newton'
contraste4 <- data.frame(n = seq(2,x1, length = m))
```

```
contraste4$Newton_f2_con3pt <- Newton(seq(2,x1, length = 3), f2(seq(2,x1, length = 3)), m,
3, a=2, b=x1)
contraste4$origen <- 'Newton'
tiempo.newton <- Sys.time() - tiempo.newton
tiempo.newton <- as.numeric(round(tiempo.newton, 7))
  #manipulamos los datos para construir la grafica
a1 <- melt(contraste1, id = c('n', 'origen'))
a2 <- melt(contraste2, id = c('n', 'origen'))
a3 <- melt(contraste3, id = c('n', 'origen'))
a4 <- melt(contraste4, id = c('n', 'origen'))
a <- rbind(a1, a2, a3, a4)
ggplot(a, aes(x = n , y = value)) + geom_line(aes(colour = variable))+
  theme_minimal() +  geom_point(data = puntos, aes(x = x, y = f, colour = 'puntos conocidos') ) +
  stat_function(fun = f1, colour ='lightblue', xlim = c(2,x1), show.legend = 'f1(x)' ) +
  stat_function(fun = f2, colour = 'lightblue', xlim = c(2,x1), show.legend = 'f2(x)')+
scale_color_manual(values=c(rep('springgreen1',2), rep('navy',2), 'red'))+
  ggtitle("Polinomio de Lagrange y Newton con tres puntos conocidos") +
  xlab('') +
  facet_wrap(~origen,  nrow =1 , strip.position = "bottom")
```




```
t <- tiempo.lagrange/tiempo.newton
```

Visualmente ambas aproximaciones son pésimas, pues existen puntos donde los puntos interpolados distan mucho de su valor real como por ejemplo alrededor del 5.

En cuanto tiempo de ejecución tenemos que la interpolación usando Lagrange tardó 0 mientras que el cálculo usando el método de Newton requirió de 0.0155909, es decir que el método de Lagrange es 0 veces más rápido (en este caso) que el de Newton.

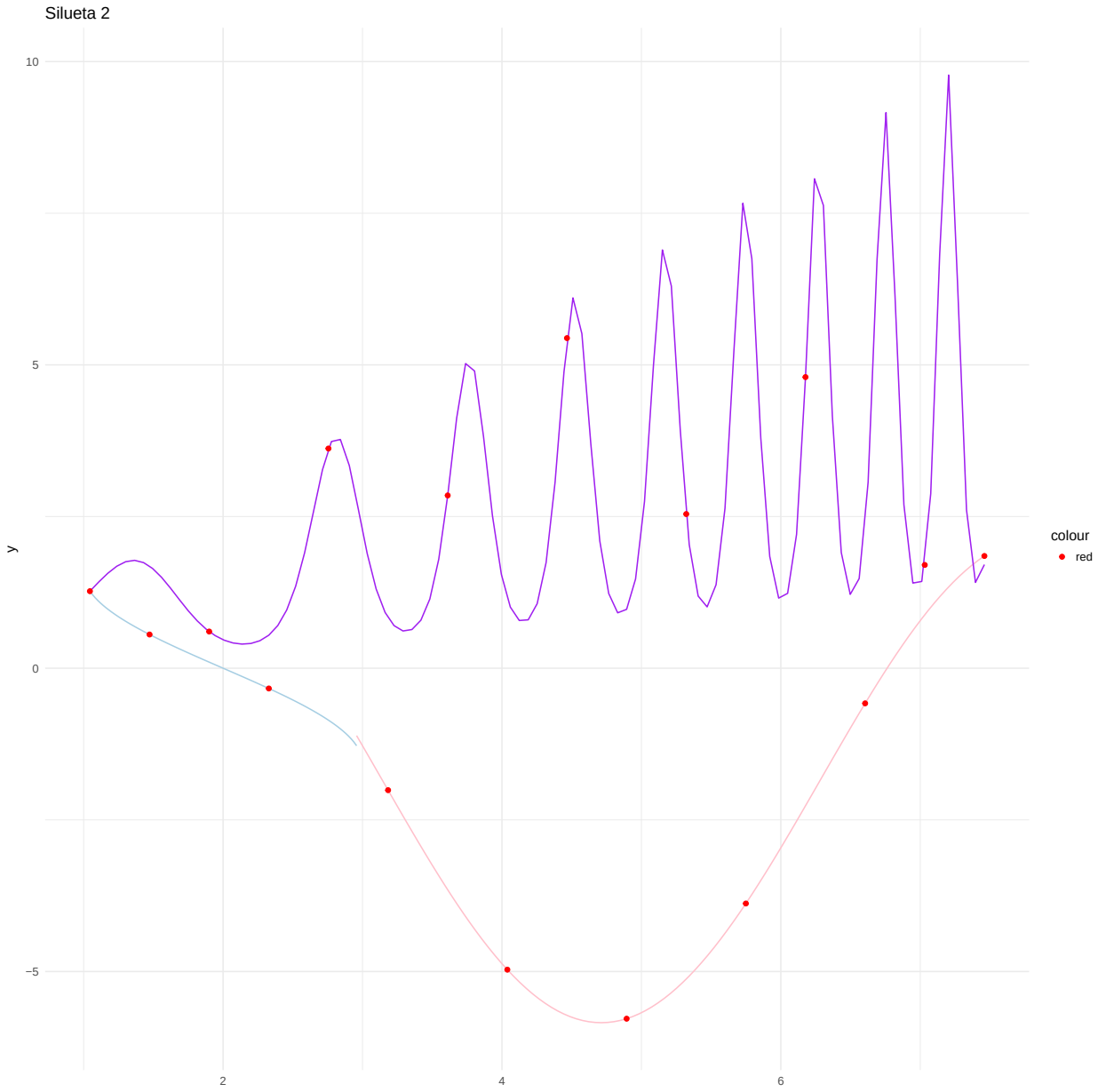
La segunda silueta con la trabajé fue la siguiente, la realicé con tres funciones, los 10 puntos que elegí para interpolar son 16 puntos equidistantes comenzando en $x = 1.04505$ y terminando en 7.460007, para cada función los marco con color rojo.

El código para realizar la silueta 2 es el siguiente:

```
f3 <- function(x)
{
  y <- mapply(FUN= function(x){.5*exp(sin(x**2))*x}, x)
  return(y)
}
f4 <- function(x)
{
  return(asin(2-x))
}
f5 <- function(x)
{
  return(4*sin(x)-1.843606)
}
```

Esta es la segunda silueta con la que trabajé, el código es un poco extenso pues se define por trozos la silueta.

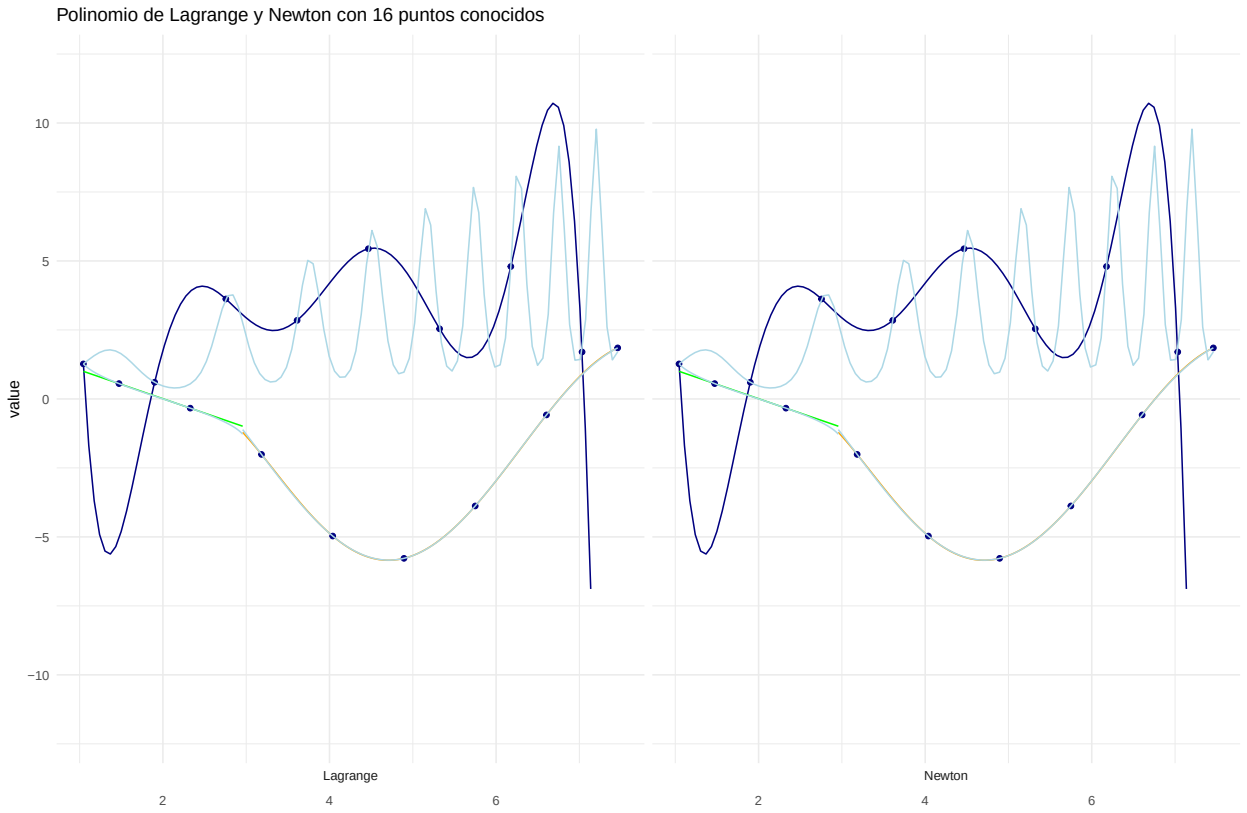
```
# en la siguiente lineas aproxime la interseccion de las funciones para generar
#contornos cerrados pero las comento porque son puntos poco comodos
x <- seq(1, 7.460007, length = 100)
x2 <- uniroot(function(x){ f3(x)-f4(x)}, interval = c(1, 2))$root
x3 <- tail(x[!is.na(f4(x))],1)
x4 <- uniroot(function(x){ -f3(x)+f5(x)}, interval = c(3, 7.460007))$root
n <- 16 ###queremos 16 puntos equidistantes
xx <- seq( x2, 7.460007 , length=n )
index <- seq(1,n,2)
x <- xx[index]
############################
        #guardo los puntos base para interpolar
puntos1 <- as.data.frame(x = x)
puntos1$f <- f3(puntos1$x)
x <-  xx[seq(2,n,2)][ (xx[seq(2,n,2)]) <= x3]
puntos2 <- as.data.frame(x = x)
puntos2$f <- f4(puntos2$x)  #aseguro dos en puntos cuando menos en cada funcion que
                            #define la curva
x <- xx[seq(2,n,2)][ (xx[seq(2,n,2)]) > x3]
puntos3 <- as.data.frame(x = x)
puntos3$f <- f5(puntos3$x)
puntos <- rbind(puntos2, puntos1, puntos3)
ggplot(data = data.frame(x = c(0, x2)), aes(x)) +
  stat_function(fun = f4, colour ='#A6CEE3', xlim = c(x2, x3) ) +
  stat_function(fun = f5, colour = 'pink', xlim = c(x3, 7.460007)) +
  stat_function(fun = f3, colour = 'purple',xlim = c(x2, 7.460007)) +
  theme_minimal() + ggtitle("Silueta 2") + xlim(c(x2,7.460007)) +
  geom_point(data = puntos, aes(x = x, y = f, colour = 'red')) +
  xlab('') + scale_color_manual(values=c('red'))
```



La siguiente gráfica muestra la interpolación del contorno (ligeramente más complicado que la silueta 1) y los diez puntos elegidos usando el método de Lagrange y el de Newton.

```
m <- 100
n <- 16
epsilon <- 10e-3
###################### evaluo con lagrange
tiempo.lagrange <- Sys.time()  #mido el tiempo de ejecución
            #guardo las evaluaciones en el intervalo a interpolar pero dividido en tres regiones
contraste1 <- data.frame(n = seq(x2, 7.460007, length = m))
contraste1$Lagrange_f3_con16pt <-  Lagrange(puntos1$x, f3(puntos1$x), m, a=x2, b=7.460007 )
contraste1$origen <- 'Lagrange'
contraste2 <- data.frame(n = seq(x2, x3, length = m))
                     #evaluamos todos los puntos,
contraste2$Lagrange_f4_con16pt <- Lagrange(puntos2$x, f4(puntos$x), m, a=x2, b=x3)
```

```
contraste2$origen <- 'Lagrange'
contraste3 <- data.frame(n = seq(x3, 7.460007, length = m))
contraste3$Lagrange_f5_con16pt <- Lagrange(puntos3$x, f5(puntos3$x) , m, a=x3, b=7.460007)
contraste3$origen <- 'Lagrange'
tiempo.lagrange <- Sys.time() - tiempo.lagrange
tiempo.lagrange <- as.numeric(round(tiempo.lagrange, 7))
############### evaluo con newton
tiempo.newton <- Sys.time()
contraste4 <- data.frame(n = seq(x2, 7.460007, length = m))
contraste4$Newton_f3_con16pt <- Newton(puntos1$x, f3(puntos1$x),
                                       m, n/2, a=x2, b=7.460007)
contraste4$origen <- 'Newton'
contraste5 <- data.frame(n = seq(x2, x3, length = m))
contraste5$Newton_f4_con16pt <- Newton(puntos2$x, f4(puntos2$x),
                                        m, dim(puntos2)[1],  a=x2, b=x3)
contraste5$origen <- 'Newton'
contraste6 <- data.frame(n = seq(x3, 7.460007, length = m))
contraste6$Newton_f5_con16pt <- Newton( puntos3$x, f5(puntos3$x), m, dim(puntos3)[1], a=x3, b=7.460007)
contraste6$origen <- 'Newton'
tiempo.newton <- Sys.time() - tiempo.newton
tiempo.newton <- as.numeric(round(tiempo.newton, 7))
#####manipulacion de datos y construccion de grafica
a1 <- melt(contraste1, id = c('n', 'origen'))
a2 <- melt(contraste2, id = c('n', 'origen'))
a3 <- melt(contraste3, id = c('n', 'origen'))
a4 <- melt(contraste4, id = c('n', 'origen'))
a5 <- melt(contraste5, id = c('n', 'origen'))
a6 <- melt(contraste6, id = c('n', 'origen'))
a <- rbind(a1, a2, a3, a4, a5, a6)
ggplot(a, aes(x = n , y = value)) + geom_line(aes(colour = variable))+
  theme_minimal() +  geom_point(data = puntos, aes(x = x, y = f, colour = 'puntos conocidos')) +
  stat_function(fun = f3, colour ='lightblue', xlim = c(x2,7.460007), show.legend = 'f3(x)') +
  stat_function(fun = f4, colour = 'lightblue', xlim = c(x2,x3), show.legend = 'f4(x)') +
  stat_function(fun = f5, colour = 'lightblue', xlim = c(x3,7.460007), show.legend = 'f5(x)') +
  scale_color_manual(values=c( rep(c('navyblue', 'green', 'orange'),3),'red'), guide=FALSE) +
  ggtitle("Polinomio de Lagrange y Newton con 16 puntos conocidos") +  xlab('') + ylim(c(-12,12))+
  facet_wrap(~origen,  nrow =1 , strip.position = "bottom")
```




```
t <- tiempo.lagrange/tiempo.newton
```

Visualmente ambas aproximaciones también son pésimas, pues existen puntos donde los puntos interpolados distan mucho de su valor real como por ejemplo alrededor del 6.5 de la parte superior de la silueta.

En cuanto tiempo de ejecución tenemos que la interpolación usando Lagrange tardó 0.0156288 mientras que el cálculo usando el método de Newton requirió de 0.0262542, es decir que el método de Lagrange es 0.5952876 veces más rápido (en este caso) que el de Newton.

Concluimos que la interpolación de Newton es cuando menos más rápida, pero hay que tener en cuenta que ello depende en gran medida de la función solve() y de que si tuviéramos que realizar una interpolación sin una implementación de resolución sistemas lineales podríamos usar el método de Lagrange, lo que lo hace menos complejo de implementar.

Interpolación de Hermite

Implemente rutinas en MATLAB/R para una función de interpolación utilizando el método de Hermite. Utilice la aproximación a las derivadas por diferencias hacia adelante $\frac{dy}{dx} \approx \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}$ *para todos los puntos* $x_i, i = 1, \ldots, n-1$. *Consulte las predicciones diarias de temperatura en un servicio de Internet para los siguientes días y a dos horas representativas. Pruebe su código de interpolación de Hermite realizando las predicciones de la temperatura en intervalos de 1 hora. Construya los resultados y represéntelos de forma gráfica en el espacio tiempo-temperatura.*

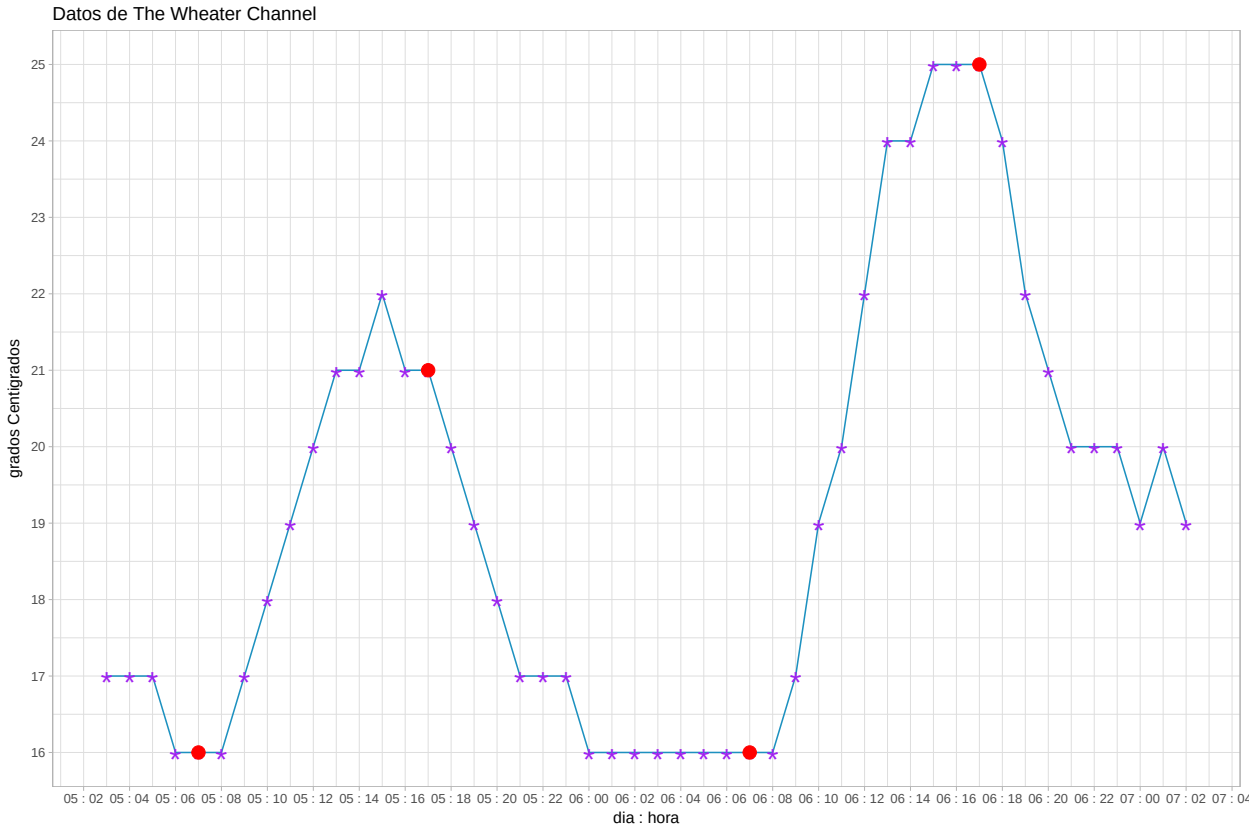
Use comandos para lograr un gráfico que muestre los bloques de 24 horas, y que incluya la descripción y unidades en los ejes. Además, use las opciones que ofrece para graficar como asteriscos los datos originales tomados de Internet.

El servicio web que utilice es el de la página de The Wheater Channel (anexo los datos consultados en el apéndice). Obtuve pronósticos para cada hora desde las 3am del 5 de febrero hasta las 2am del miércoles

ambos para 2018. Para interpolar decidí trabajar con los puntos correspondientes a las 5pm y 7am (horas importantes en mi día a día).

La siguiente es una gráfica de los datos que me proporcionó la pagina web, los puntos fijos con los que voy a interpolar están en rojo:

```
data <- read.csv('C:\\Users\\fou-f\\Desktop\\MCE\\Second\\AnalisisNumericoYOptimizacion\\clima.csv')
library(lubridate)  #package para manejar horas
inicio <- ymd_hms('2018-02-05 03:00:00') #fijo la primer observacion que tengo como punto inicial
datos.clima <- data.frame(fecha=inicio + hours(0:47)) #genero las dateTime
datos.clima$temp <- data$temp                         #copio los valores conocidos
datos.clima$index <- 2:49                    #reparametrizo por
#estabilidad numerica
puntos <- datos.clima[ c(5,15,29,39) ,]          #selecciono los puntos a fijar
ggplot(datos.clima, aes(fecha, temp)) + geom_line(aes(colour = I('#1D91C0'))) +
   geom_point(aes(fecha, temp, colour=I('purple')), shape = "*", size = 7)+
  theme_light()+ ggtitle('Datos de The Wheater Channel' )+
  xlab('dia : hora') +ylab('grados Centigrados') +
  geom_point(data= puntos,aes(fecha, temp, colour=I('red')), size = 4) +
  scale_y_continuous(breaks = seq(12, 28, by = 1)) +
  scale_x_datetime(date_breaks = '2 hour', date_labels = "%d : %H" )
```



La siguiente es mi implementación del Método de Hermite que hace uso de un objeto de tipo closure (que dudo que exista en MATLAB) para evitar usar ciclos for

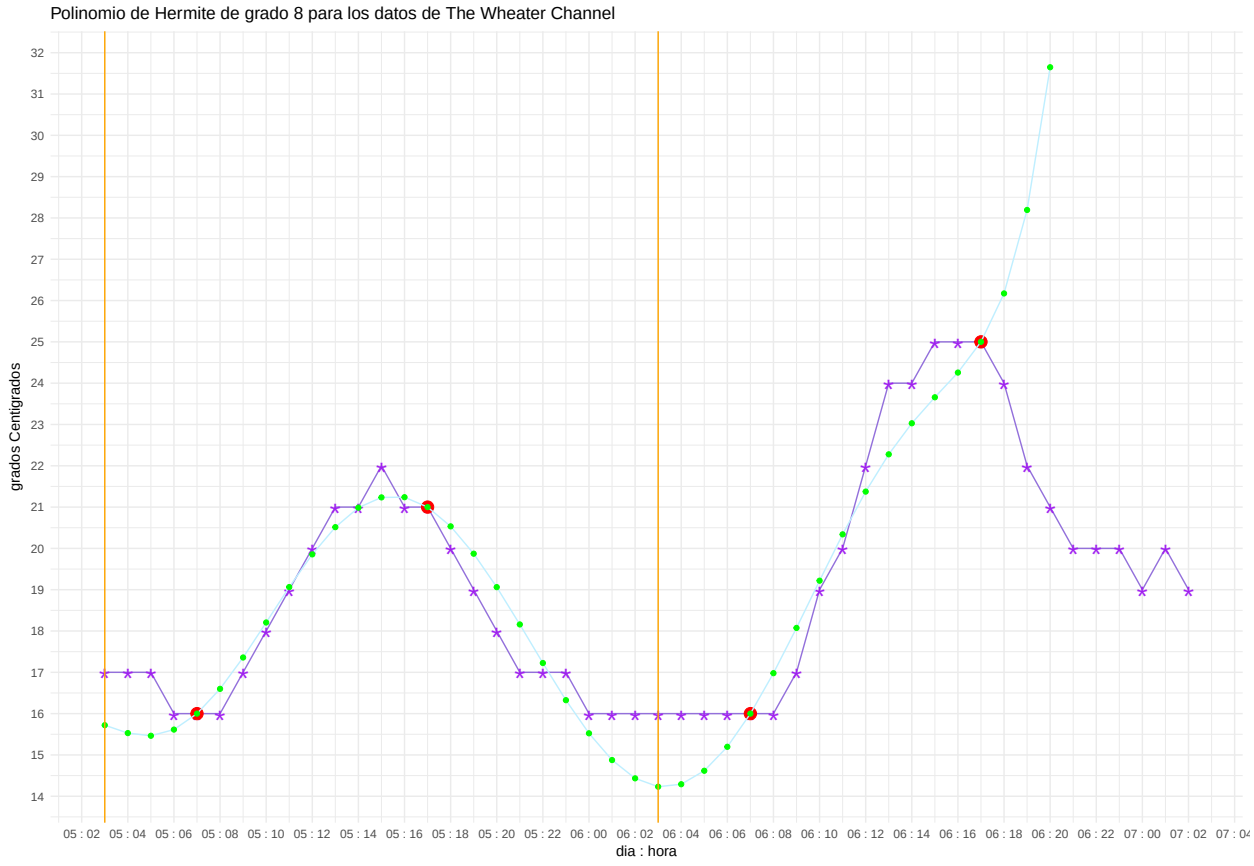
```
diferencias.adelante <- function(dataX, dataY)
{
  #dataX : puntos fijos para construir el polinomio
  #dataY : valores conocidos para dataX
```

```
  n <- length(dataX)
  diferencias <- diff(dataY)/diff(dataX)  #diferencias hacia adelante
  ultimo <- diferencias[n-1] #la ultima diferencia la evaluamos hacia atras
  return(c(diferencias, ultimo)) #regresamos el vector con las diferencias
}
HermiteNo <- function(dataX, dataY, x)
{
  #dataX (vector) : puntos fijos para construir el polinomio
  #dataY (vector) : valores conocidos para dataX
  #x: punto a interpolar
    n <- length(dataX)
    M1 <- matrix(rep(0, 2*n*n ), nrow = n)  #construimos una matriz que iguale a la funcion
    M1[,1] <- 1
    for(i in 2:(n*2)) #hay que tener cuidado con los subindices
    {
      M1[,i] <- dataX**(i-1)
    }
    M2 <- matrix(rep(0, 2*n*n ), nrow = n)#construimos una matriz que iguale a la primer
    M2[,1] <- 0
    M2[,2] <- 1
    for(i in 3:(n*2))
    {
      M2[,i] <- (i-1)*dataX**(i-2)#hay que tener cuidado con los subindices
    }
            #construimos el vector b, con la dataY y las primeras diferencias
    b1 <- dataY
    b2 <- diferencias.adelante(dataX, dataY)
    b <- c(b1, b2)
            #pegamos las matrices
    M <- rbind(M1, M2)
    coeficientes <- solve(M, b) #obtenemos los coeficientes
    res <- pol.no.naive(x, coeficientes)
  return(res)
}
Hermite.closure <- function(dataX, dataY) #objeto de tipo closure para fijar parametros
{
  #dataX (vector) : puntos fijos para construir el polinomio
  #dataY (vector) : valores conocidos para dataX
  #ESTE OBJETO REGRESA UNA FUNCION CON PARAMETROS FIJOS
  function( x  )
  {
    HermiteNo(dataX, dataY , x)
  }
}
```

En la siguiente porción de código uso mi objeto de tipo closure y evaluó el polinomio en el dominio, al final construyo una grafica para contrastar el polinomio de interpolación y el pronóstico del clima.

```
dataX <- puntos$index
dataY <- puntos$temp
Hermite <- Hermite.closure(dataX, dataY)  #fijamos los parametros de la funcion
                                          #con el bonito objeto tipo 'closure'
dominio <- seq(min(datos.clima$index), max(datos.clima$index), by= 1)
dominio <- as.data.frame(dominio)
```

```
dominio$Hermite <- mapply(FUN = Hermite, dominio) #evaluamos en el dominio
                      #construimos la grafica
tiempo <- range(datos.clima$fecha)
dominio$tiempo <- seq(tiempo[1], tiempo[2], length = dim(dominio)[1]) #evaluamos el
                    #graficamos
ggplot(data = datos.clima, aes(fecha, temp)) +geom_line(data = datos.clima,
                                                 aes(colour = I('mediumpurple'))) +
  geom_point(aes(fecha, temp, colour=I('purple')), shape = "*", size = 7) +
  theme_minimal() +
  ggtitle('Polinomio de Hermite de grado 8 para los datos de The Wheater Channel') +
  xlab('dia : hora') + ylab('grados Centigrados') +
  geom_point(data= puntos,aes(fecha, temp, colour=I('red')), size = 4) +
  geom_line(data= subset(dominio, Hermite < 33),aes(tiempo, Hermite,
                                                    colour=I('lightblue1'))) +
  geom_point(data= subset(dominio, Hermite < 33),aes(tiempo, Hermite,
                                                     colour=I('green'))) +
  scale_y_continuous(breaks = seq(12, 33, by = 1)) +
  scale_x_datetime(date_breaks = '2 hour', date_labels = "%d : %H" ) +
  geom_vline(xintercept = c(datos.clima$fecha[1], datos.clima$fecha[25]),
             color = I('orange') )
```



Como podemos observar en la última grafica la condición de aproximar la primer derivada en el ultimo punto con la derivada del penúltimo afecta gravemente la forma del polinomio con el que interpolamos en el exterior del intervalo de interés. Las líneas amarillas indican el lunes 5 (3 am) y el martes 6 (3am).

A manera de conclusión podría decir que este tipo de polinomios son prácticos (sin caer en ser buenos) porque

el clima tiene estacionalidad y no suela tener bruscos cambios en su derivada que es justamente lo que los polinomios de interpolación de Permite cuidan.

Como dato curioso concluyo que el día lunes 5 a las 11pm hubo una temperatura de 15 grados (lo curioso es que el polinomio interpolo mejor que el pronóstico).

Como comentario final intenté incrementar el número de puntos en la interpolación, pero solve no lo resolvía por lo que después de muchos intentos con mi actual implementación no pude incrementar en número de puntos la interpolación solo cambiarlos trasladándolos una hora hacia la derecha. Solo muestro la gráfica, oculto el código.

```
print(intento_final)
```

Anexo

Datos con los que se trabajó. En la web (capturado y guardado en un pdf) y capturados a mano