	UE PM102 — Février 2024

Exercices et études de cas

Tous les travaux pratiques proposés peuvent se faire sur un Jupyter Notebook en important les librairies `numpy` et `matplotlib`.

1 Étude de sinusoïdes

1.1 Objectifs

- Manipuler des sinusoïdes, des exponentielles complexes et la Transformée de Fourier discrète en utilisant `numpy` en programmation Python
- Interpréter la représentation spectrale de sinusoïdes et de signaux simples

1.2 Sinusoïdes et Exponentielles Complexes

1. Une période d'un cosinus ou d'un sinus
   - Tracer une période du signal $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en ayant $N = 840$ échantillons sur cette période.
   - Créer un signal $f(x) = \alpha\cos(x) + \sqrt{1-\alpha^2}\sin(x)$ avec $\alpha \in [0, 1[$.
   - Tracer le signal sur le même graphe précédent. En quoi diffère-t-il des signaux précédents ?
   - Le décalage observé vis-à-vis de la référence $\cos(x)$ correspond à la phase. Quelle est la phase du signal $\sin(x)$? Quelle est la phase du signal $f(x)$?
2. Une exponentielle complexe
   - Tracer la partie réelle et la partie imaginaire d'une période du signal $\exp(jx)$ en prenant $N = 840$ échantillons sur cette période. $j = \sqrt{-1}$ est l'imaginaire pur de norme l'unité.
   - Créer un signal $g(x) = \exp(jx)\exp(2jx)$.
   - Tracer le signal sur le même graphe précédent. En quoi diffère-t-il du signal précédent ?
3. Sinus, cosinus et exponentielle complexe à M oscillations
   - Tracer les sinusoïdes à 2, 3 et 4 oscillations en prenant toujours $N = 840$ échantillons sur l'intervalle $[0, 2\pi[$.
   - Calculer et comparer les produits scalaires entre la sinusoïde à une oscillation avec chacune des sinusoïdes ci-haut sur l'intervalle $[0, 2\pi[$.
   - Générer les sinusoïdes à 5, 6, 7 et 8 oscillations et calculer leur produit scalaire. Vérifier qu'elles sont toutes orthogonales entre elle.
   - Pourquoi a-t-on choisi $N = 840$ comme nombre d'échantillons ?
   - Construire un signal à partir d'une combinaison linéaire des sinusoïdes ci-haut. Tracer ce signal et calculer son produit scalaire avec chacune des sinusoïdes. Commenter les résultats obtenus.

1.3 Transformée de Fourier discrète (TFD) pour caractériser les signaux

1. Calculer la transformée de Fourier discrète (TFD) de chacune des sinusoïdes et des exponentielles complexes précédentes ayant M oscillations allant de 1 à 8.
2. Tracer le module de chaque TFD et étudier la localisation du pic observé. Commenter.
3. On va maintenant fixer le nombre d'oscillations (par exemple $M = 3$). Générer un signal déphasé et calculer sa TFD. Vérifier que vous pouvez extraire la phase à partir de la TFD.
4. Généraliser votre observation pour un signal correspondant à la somme de deux (ou plus) signaux d'oscillations différentes. Pouvez-vous reconnaître le nombre d'oscillations à partir du signal temporel ? à partir de la TFD ?
5. Proposer un signal égal à une combinaison linéaire de deux (ou plus) signaux d'oscillations différentes avec différents coefficients de pondération. Pouvez-vous reconnaître le nombre d'oscillations à partir du signal temporel ? à partir de la TFD ?

1.4 Transformée de Fourier inverse

1. Créer un vecteur nul de $N = 840$ échantillons. Fixer le 12-ème échantillon à 1. Calculer la transformée de Fourier discrète inverse. Compter le nombre d'oscillations et commenter.

1.5 Des oscillations à la fréquence et à la période

Au lieu de compter le nombre d'oscillations complètes dans les signaux sinusoïdaux considérés pendant une fenêtre d'observation donnée, nous pouvons parler de la fréquence f_0 d'un signal périodique égale à l'inverse de sa période temporelle T_0.

Par ailleurs, au lieu de considérer un nombre d'échantillons N, on peut décrire la fenêtre d'observation par sa durée temporelle $T_{\text{obs}} = NT_e$ où $T_e = \frac{1}{f_e}$ est le temps d'échantillonnage et f_e la fréquence d'échantillonnage.

1. Calculer la fréquence d'échantillonnage désignée f_e et utilisée jusqu'ici.
2. Échantillonner un des signaux étudiés précédemment à $2f_e$ et calculer sa TFD. Qu'est-ce qui a changé par rapport à la TFD calculée à partir du signal échantillonné à f_e ?
3. Calculer la durée de la fenêtre d'observation T_{obs} utilisée jusqu'ici.
4. Générer un des signaux étudiés précédemment et échantillonnés à f_e durant une fenêtre d'observation de durée $2T_{\text{obs}}$. Calculer sa TFD. Qu'est-ce qui a changé ?

1.6 Des pièges

1. Le repliement
   - Créer un vecteur nul de $N = 840$ échantillons. Fixer le 6-ème échantillon à 1. Calculer la transformée de Fourier discrète inverse. Compter le nombre d'oscillations.
   - Refaire la même procédure en fixant cette fois le 836-ème échantillon à 1. Compter le nombre d'oscillations. Commenter.

On parle de repliement pour caractériser ce phénomène qui ne permet pas de différencier un signal avec 5 oscillations de celui avec 835 oscillations.

— Que se passe-t-il si on veut générer 420 oscillations ? 419 oscillations ?
Nous venons d'observer le théorème de Shannon. Avec N points, on ne peut observer de signaux ayant plus de $N/2$ oscillations sous peine d'erreurs d'interprétation.

2. Un nombre non-entier d'oscillations
   — Tout ce qui a été vu jusqu'à maintenant s'appuie sur un nombre d'oscillations entier : ainsi les signaux sinus, cosinus et exponentielle complexe sont alors périodiques et on peut, en les concaténant, obtenir des signaux plus longs mais tout aussi continus. Si cette hypothèse n'est pas respectée, les interprétations peuvent être plus difficiles.
   — Tracer la partie réelle et imaginaire de la fonction $g(x) = \exp(8.5jx)$ sur l'intervalle $[0, 2\pi[$ avec $N = 840$ échantillons.
   — Calculer la TFD de $g(x)$. Tracer son module. Est-il facile d'interpréter le résultat ?
   — Si on somme deux signaux à nombre non-entier d'oscillations, est-il facile de voir dans l'espace de Fourier qu'il y a bien deux valeurs d'oscillations ?
3. Signaux à valeurs réelles
   — Calculer la TFD d'un signal à valeur réelle (un sinus ou un cosinus par exemple).
   — Faut-il connaître toutes les valeurs du signal dans l'espace de Fourier pour le caractériser ?
   — Les valeurs dans l'espace de Fourier sont-elles réelles ou complexes ?
4. Résolution fréquentielle
   — De combien doit-on séparer deux signaux en terme de nombres d'oscillations pour pouvoir observer deux valeurs distinctes dans l'espace de Fourier ?
   — Comment peut-on améliorer la résolution fréquentielle ?

1.7 Bonus : reconnaître la TFD d'un signal

1. Associer chaque signal à gauche à sa TFD à droite dans la figure 1 ci-dessous.

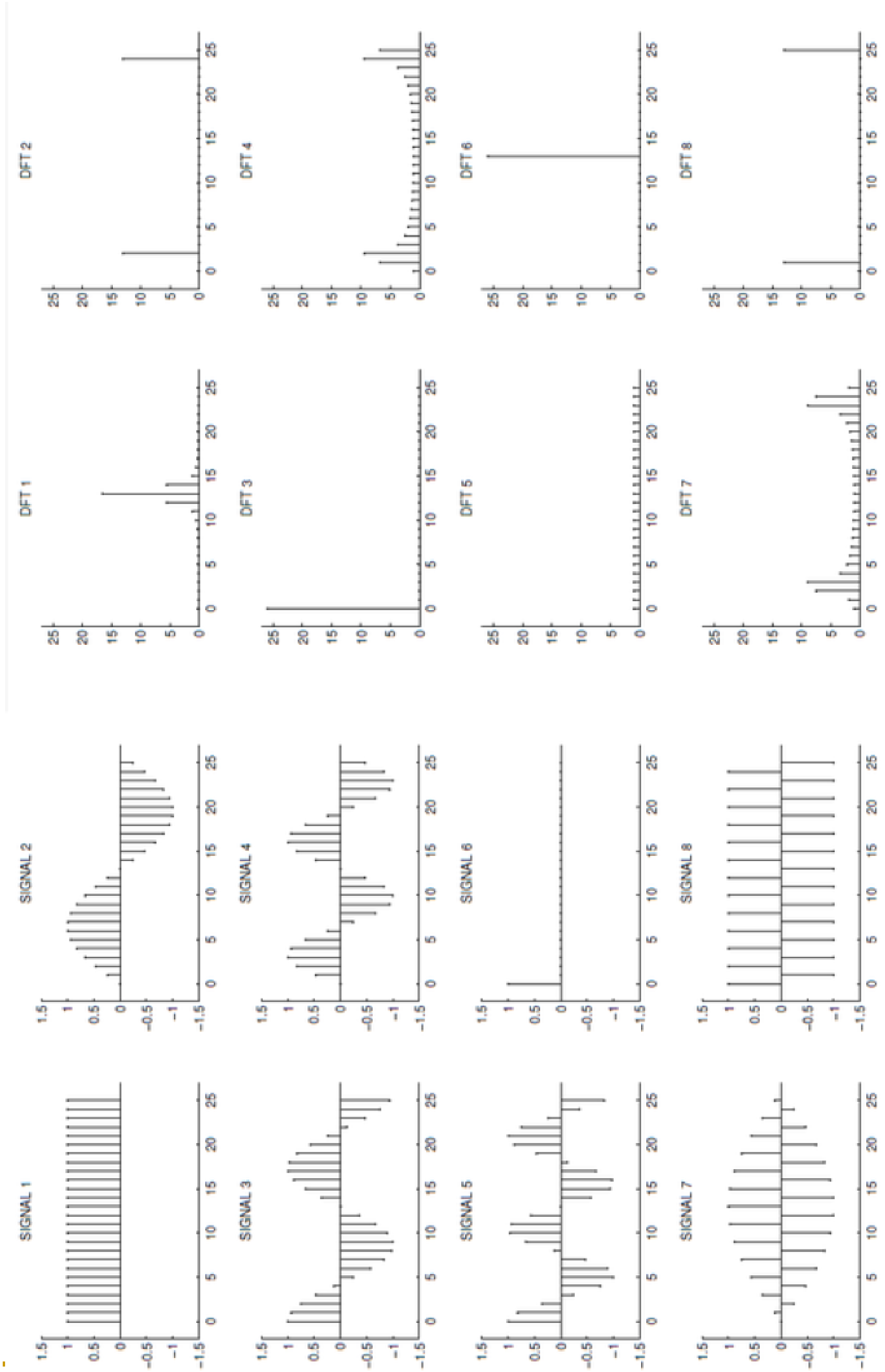

FIGURE 1 – Quelle TFD pour quel signal ?