

Fourier et filtrage via l'astrophotographie

Élie Awwad, Cédric Ware

2024-02-04 version v0.04a

Table des matières

1	Vue d'ensemble	3
1.1	Objectifs	3
1.2	Déroulement	3
2	Transformée de Fourier, du continu au discret	5
2.1	But recherché : manipuler des fonctions (indénombrables) sur des machines (finies)	5
2.2	Transformation de Fourier et convolution de fonctions réelles	5
2.3	Modèle de l'échantillonnage	7
2.4	Guide pratique : transformation de Fourier discrète	10
3	Systèmes linéaires, invariants et continus dans le temps	12
3.1	Signaux et systèmes continus dans le temps	12
3.2	Systèmes linéaires, invariants et continus dans le temps	12
3.3	Réponse impulsionnelle des LTIS	12
3.4	Le filtrage linéaire	13
4	Modélisation d'une situation physique : photo et diffraction	15
4.1	Modélisation de la lumière provenant d'objets lointains	15
4.2	Observation et photographie d'objets lointains	16
4.3	Diffraction par l'ouverture de l'instrument	17

1 Vue d'ensemble

1.1 Objectifs

L'objectif est d'acquérir une facilité d'utiliser l'échantillonnage, le filtrage, et la transformée de Fourier pour représenter des problèmes physiques. À l'issue du module, vous serez capables de :

- Reconnaître des situations, ainsi que leurs limites, où la transformée de Fourier peut être utilisée pour décrire un système physique (système linéaire, spectre...) et pour effectuer un filtrage numérique d'un signal (transformée de Fourier discrète, convolution...)
- Appliquer le filtrage numérique au traitement d'images (transformée de Fourier 2D) via l'astrophotographie
- Expliquer les distorsions apportées à la grandeur mesurée par les éléments constitutifs de l'instrument de mesure (capteur) et par sa forme dans le cas d'un télescope.

1.2 Déroulement

- Jour 1 - Matinée
 - Présentation du module et vue d'ensemble des outils (Python, Jupyter Notebook, etc.)
 - Manipulation de signaux simples discrétisés et premières applications de la transformée de Fourier discrète (TFD) en une dimension (1D)
 - Familiarisation avec les notions de fréquence d'échantillonnage, pas d'échantillonnage, fenêtre d'observation et résolution fréquentielle
 - Limites de la TFD et pièges courants
- Jour 1 - Après-midi
 - Introduction au filtrage linéaire 1D, à la convolution
 - Manipulation de filtres simples, représentations temporelles et fréquentielles d'un filtre linéaire : réponse impulsionnelle et réponse fréquentielle
 - Filtrage de signaux par des filtres de différents types
 - Identification de filtres inconnus
- Jour 2 - Matinée
 - Identification de filtres inconnus
 - Interprétation de spectres (spectre d'amplitude, de puissance, phase spectrale)
 - Exploration des pièges du filtrage numérique
 - Manipulations de signaux numériques (interpolation, sous-échantillonnage, sur-échantillonnage)

-
- Jour 2 - Après-midi
 - Quiz (45 minutes)
 - Filtrage 2D, rappel sur la modélisation de la propagation et la diffraction de la lumière, la TF réalisée par une lentille
 - Démonstration du traitement d'un fichier représentant une image 2D
 - Filtrage d'image
 - Calculer (théorie approchée et simulation) la réponse impulsionnelle (diffraction) d'un télescope
 - Jour 3 - Matinée
 - Distinguer les photos de différents télescopes par le motif de diffraction de leur structure
 - Reconnaître les tâches de diffraction sur ces photos
 - Identifier l'optique d'un télescope et les éléments responsables des tâches de diffraction, et extraire des informations à partir d'images de télescopes (par exemple, la distance focale ou la taille des pixels)
 - Jour 3 - Après-midi
 - Quiz (45 minutes)
 - Diffraction avec une source de lumière polychromatique
 - Jour 4 - Matinée
 - Études de cas
 - Jour 5 - Matinée
 - Études de cas
 - Discussion, bilan
 - Jour 6 - Après-midi
 - Contrôle de connaissances (2 heures)

2 Transformée de Fourier, du continu au discret

2.1 But recherché : manipuler des fonctions (indénombrables) sur des machines (finies)

Représenter l'infinité des fonctions réelles sur du matériel discret et fini, ne serait-ce pas mission impossible ? Nous allons voir ci-dessous un modèle, dit de l'« échantillonnage », qui permet de le faire dans une certaine mesure. En résumé, à partir d'une fonction f , on prendra sa valeur en N points régulièrement espacés, et on construira une fonction \hat{f} échantillonnée et périodisée — qui ne contiendra que l'information de ces N échantillons, mais permettra d'approcher f et les opérations mathématiques associées.



Comme tout modèle, l'échantillonnage a un domaine de validité dont on ne sortira qu'à ses risques et périls :

- on n'a pas toute l'information de f , seulement les échantillons, donc avec une résolution et un domaine limités ;
- c'est la fonction échantillonnée et périodisée \hat{f} qu'on manipulera, pas f elle-même, les problèmes surviennent généralement quand on croit manipuler f ;
- le choix du nombre et de l'intervalle des échantillons est arbitraire, mais il aura son importance quand ce modèle sera utilisé pour représenter des situations physiques réelles.

2.2 Transformation de Fourier et convolution de fonctions réelles

Dans le cas des problèmes linéaires, une technique commune d'analyse consiste en un partitionnement des problèmes complexes en un ensemble de problèmes plus simples. La solution totale devient alors la somme des solutions simples. En particulier, les sinusoides ou exponentielles complexes fournissent souvent des solutions souvent simples. La transformation de Fourier consiste essentiellement à décomposer une fonction en sinusoides (voir encadré page suivante).

On cherche dans un premier temps à représenter des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} (que nous noterons $f, g...$) admettant une transformée de Fourier (que nous noterons $\mathcal{F}f, \mathcal{F}g...$ ou aussi d'une manière plus compacte $F, G...$) :

$$\mathcal{F}f(u) = F(u) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi ux} dx \quad (2.2a)$$

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} F(u)e^{2i\pi ux} du \quad (2.2b)$$



Principe de la transformation de Fourier

La série de Fourier décompose un signal périodique en plusieurs signaux sinusoïdaux. Considérons un signal temporel périodique $f(t)$ et soit $f_0 = 1/T_0$ la fréquence principale de $f(t)$, alors les fréquences des signaux sinusoïdaux seront $f_0, 2f_0, 3f_0$, etc. avec des amplitudes réelles ou complexes. La décomposition en séries de Fourier de $f(t)$ est :

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \exp(i2\pi nt/T_0)$$

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \exp(-i2\pi nt/T_0) f(t) dt$$

À un signal non périodique, on peut faire correspondre au lieu d'une série de Fourier une transformée de Fourier qui est une fonction continue de la variable fréquence u et on passe naturellement de la sommation discrète à la sommation continue par l'intégration, ce qui donne en substance le système d'équations (2.2).

La transformée de Fourier inverse de f, g est notée $\mathcal{F}^{-1}f, \mathcal{F}^{-1}g \dots$:

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{2i\pi ux} du. \quad (2.3)$$

f, g , etc. peuvent représenter un signal ou une réponse impulsionnelle d'un système... Chaque signal a donc deux représentations parfaitement réciproques et on peut traiter le signal en utilisant $f(x)$ ou $F(u)$ selon les facilités accordées par le domaine de travail.

Nous nous intéresserons au produit de convolution (noté $*$) entre de telles fonctions, ainsi qu'à son élément neutre δ (qui n'est pas une fonction mais une distribution, appelée distribution de Dirac) :

$$[f * g](x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x - y) dy \quad (2.4)$$

$$[f * \delta](x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \delta(x - y) dy = f(x) \text{ par définition de } \delta. \quad (2.5)$$

Une notation habituelle : $f(x) * g(x) = [f * g](x)$ permet en particulier d'écrire :

$$f(x) * \delta(x - x_0) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \delta(x - x_0 - y) dy = f(x_0) \quad (2.6)$$

sans avoir à expliciter une distribution $\delta_{x_0} : x \mapsto \delta(x - x_0)$. Par contre, les fonctions doivent opérer sur la même variable : écrire $f(x) * g(y)$ n'a pas de sens si x et y sont des variables indépendantes.

La convolution est une opération très courante en physique et en traitement de signaux car tout système dynamique linéaire réalise une convolution. Elle peut être vue comme l'effet que produit un instrument de mesure qui donne une image plus ou moins floue d'un phénomène mesuré.

Nous ne nous intéresserons pas aux conditions nécessaires sur les fonctions ni aux définitions rigoureuses de ce formalisme, en particulier les propriétés exactes de δ , sachant que le modèle

	$f(x)$	$\mathcal{F}f(u) = F(u)$
Linéarité	$\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$	$\alpha F_1(u) + \beta F_2(u)$
Échelonnage, $a \in \mathbb{R}$	$f(ax)$	$\frac{1}{ a } F(u/a)$
Décalage, $x_0 \in \mathbb{R}$	$f(x - x_0)$	$\exp(-2\pi i u x_0) F(u)$
Décalage fréquentiel, $u_0 \in \mathbb{R}$	$\exp(+2i\pi u_0 t) f(t)$	$F(u - u_0)$
Décalage et échelonnage	$f(ax - x_0)$	$\frac{1}{ a } F(u/a) \exp(-2i\pi u x_0/a)$
Dualité, symétrie	$\mathcal{F}\mathcal{F}f = f^-$ où $f^-(x) = f(-x)$	
	$\mathcal{F}^{-1}f = \mathcal{F}f^-$	
	$\mathcal{F}f^- = (\mathcal{F}f)^-$	
Convolution	$(f_1 * f_2)$	$(\mathcal{F}f_1)(\mathcal{F}f_2)$
Produit	$(f_1 f_2)$	$(\mathcal{F}f_1 * \mathcal{F}f_2)$
Dérivation	$\frac{d}{dx}(f(x))$	$2\pi i u F(u)$
Dérivations successives	$\frac{d^n}{dx^n}(f(x))$	$(2\pi i u)^n F(u)$
Conjugaison	$f^*(x)$	$F^*(-u)$
Propriétés de la parité	paire	paire
	impaire	impaire
	réelle paire	réelle paire
	réelle impaire	imaginaire impaire
	imaginaire paire	imaginaire paire
	imaginaire impaire	réelle impaire
Théorème de Parseval	$\int_{\mathbb{R}} f(x) ^2 dx = \int_{\mathbb{R}} F(u) ^2 du$	
Dirac, peigne de Dirac	$\delta(x)$	1
	$\delta(x - x_0)$	$\exp(-2\pi i u x_0)$
	$\text{III}_L(x) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} \delta(x - qL)$	$\frac{1}{L} \text{III}_{1/L}(u)$
Fonction périodique de période L	$f(x) = g(x) * \text{III}_L(x)$ $g(x) = f(x) \Pi_L(x)$ $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \exp\left(i 2\pi \frac{n/L}{x}\right)$	$F(u) = \frac{1}{L} G(u) \text{III}_{1/L}(u)$ $c_n = \frac{1}{L} G\left(\frac{n}{L}\right)$

TABLE 2.1 – Propriétés élémentaires et quelques théorèmes de la TF

que nous utiliserons ci-dessous nous fournira un cadre qui ne nous permettra pas de sortir de leur domaine de validité. Même ainsi, nous verrons qu'il subsiste bien assez de pièges dans lesquels on sera susceptible de tomber !

Quelques propriétés élémentaires, définitions, transformées de Fourier utiles sont recensées dans la table 2.2.

Nous verrons dans la section suivante qu'un signal évalué en des points discrets et régulièrement espacés peut posséder une transformation de Fourier dite discrète obtenue en ne considérant le signal que sur un intervalle déterminé.

2.3 Modèle de l'échantillonnage

On suppose que l'ordinateur sait représenter une quantité finie de nombres réels ou complexes.¹ C'est insuffisant pour représenter toutes les fonctions possibles, mais le modèle que nous allons voir permet d'en représenter efficacement un certain type, ainsi que les transformées de Fourier

1. Ceci est déjà une approximation : les ordinateurs représentent les réels de façon approchée, ouvrant la porte à toutes sortes d'erreurs d'arrondi et autres artefacts. Nous ne nous en préoccupons pas ici.

correspondantes.

Nous allons représenter chaque fonction f par sa valeur en N points régulièrement espacés, soit N « échantillons » $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$, avec : $f_n = f(nx_e)$, où x_e est appelé « pas d'échantillonnage ». ² On appellera « fréquence d'échantillonnage » ν_e la quantité inverse du pas : $\nu_e = \frac{1}{x_e}$. On remarque qu'on ne pourra pas représenter f hors de ces points, en particulier hors de l'intervalle $\mathcal{I}_e = [0; Nx_e[$. Mais on pourra en représenter une version périodisée, qui coïncide avec f sur l'intervalle de mesure \mathcal{I}_e ; appelons-la \tilde{f} :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour tout } x \in \mathcal{I}_e \\ \tilde{f}(x - qNx_e) & \text{pour tout } q \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Enfin, la fonction périodisée est échantillonnée ; c'est cette fonction \hat{f} qui est véritablement représentée par les f_n :

$$\hat{f}(x) = \tilde{f}(x) \text{III}_{x_e}(x) \quad (2.8a)$$

$$= \sum_{q \in \mathbb{Z}} \tilde{f}(qx_e) \delta(x - qx_e) \quad (2.8b)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} f_n \text{III}_{Nx_e}(x - nx_e). \quad (2.8c)$$

Notez bien la différence entre les équations (2.8b) et (2.8c) : la première est une somme infinie de diracs, décalés tous les x_e , pondérés par la fonction périodisée \tilde{f} ; la deuxième est une somme finie de peignes de diracs, de période Nx_e mais décalés tous les x_e , pondérés par les échantillons de f . Le résultat est le même, mais l'expression (2.8c) montre directement le lien entre les échantillons et la fonction représentée.

2.3.1 Transformée de Fourier d'un signal échantillonné

Nous avons vu que le processus d'échantillonnage est une multiplication du signal continu par un peigne de Dirac. La notation ci-dessus de la fonction échantillonnée permet d'obtenir deux expressions équivalentes de la transformée de Fourier de cette fonction. Si on prend la TF des termes de l'équation (2.8b), on obtient l'expression suivante :

$$\hat{F}(u) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} \tilde{f}(qx_e) \exp(-i2\pi qx_e u) \quad (2.9)$$

Cette expression montre que la TF d'une fonction échantillonnée est une fonction périodique de la variable u de période $\nu_e = \frac{1}{x_e}$. Elle n'est rien d'autre que le développement en série de Fourier de la TF de la fonction échantillonnée. D'autre part, en partant de l'équation (2.8a), on peut aussi voir $\hat{F}(u)$ comme une version périodisée de la TF de la fonction continue $\tilde{F}(u)$:

$$\hat{F}(u) = \tilde{F}(u) * \frac{1}{x_e} \text{III}_{1/x_e}(u) = \nu_e \sum_{q \in \mathbb{Z}} \tilde{F}(u - q\nu_e) \quad (2.10)$$

2. Le choix de N et de x_e est arbitraire, mais il aura son importance quand ce modèle sera utilisé pour représenter des situations physiques réelles. En particulier, si f représente un signal temporel, le pas d'échantillonnage sera exprimé en unités de temps (secondes) et la fréquence d'échantillonnage en unités de fréquence (hertz = s^{-1}) ; alors que si elle représente une forme spatiale, le pas s'exprimera en unités d'espace (mètres) et la fréquence en unités de fréquence spatiale (m^{-1}).

2.3.2 Transformée de Fourier Discrète

Nous verrons dans cette section que, dans les conditions définies par les équations (2.3) et (2.8a), la transformée de Fourier $\hat{F}(u)$ du signal $\hat{f}(x)$ est elle aussi une fonction échantillonnée de pas $\frac{\nu_e}{N}$ et périodique de période ν_e . Nous allons donc définir la transformation de Fourier discrète (TFD), qui, à un signal d'une variable discrète et mesuré avec un nombre fini d'échantillons, associe un signal d'une variable discrète de l'espace fréquentiel défini sur le même nombre d'échantillons. Nous verrons en particulier que sous certaines conditions, la TFD est une représentation correcte de la TF d'un signal continu, ce qui en fait un outil important pour l'estimation spectrale des signaux analogiques.

$$\hat{F}(u) = \frac{\nu_e}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F_m \text{III}_{\nu_e} \left(u - \frac{m\nu_e}{N} \right) \quad (\text{démontré encadré page suivante}) \quad (2.11a)$$

$$\text{avec : } F_m = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-2i\pi \frac{mn}{N}} \quad (2.11b)$$

$$\simeq \int_0^{Nx_e} f(x) e^{-2i\pi x \frac{m}{Nx_e}} \frac{dx}{x_e} \quad (\text{limite de la somme de Riemann en } N = +\infty) \quad (2.11c)$$

$$\approx \frac{1}{x_e} F \left(\frac{m\nu_e}{N} \right) \quad (\text{en négligeant } f \text{ à l'extérieur de } \mathcal{I}_e). \quad (2.11d)$$

On a trouvé une approximation de la transformée de Fourier de f sous forme d'échantillons, via un calcul faisable par ordinateur. L'équation (2.11b) est la définition de la **transformée de Fourier discrète**. On peut montrer qu'elle s'inverse :

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F_m e^{+2i\pi \frac{mn}{N}}. \quad (2.12)$$

- On peut donc représenter certaines fonctions par une liste de N échantillons (valeurs en des points régulièrement espacés de x_e).
- La transformée de Fourier discrète donne N échantillons assimilables aux valeurs de la transformée de Fourier en des points régulièrement espacés de $\frac{1}{Nx_e}$.
- Les fonctions représentées par ces échantillons sont des versions périodisées \hat{f} et \hat{F} .
- **Les pièges surviennent généralement quand on croit manipuler f et F , alors qu'on travaille en fait sur \hat{f} et \hat{F} .**



Démonstration de l'équation (2.11a) et inversion de la TFD

$$\begin{aligned}
 \hat{F}(u) &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cdot TF \left[\text{III}_{Nx_e}(x - nx_e) \right] \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cdot \frac{\nu_e}{N} \text{III}_{\frac{\nu_e}{N}}(u) e^{-2i\pi u n x_e} \\
 &= \frac{\nu_e}{N} \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-2i\pi u n x_e} \right)}_{G(u)} \text{III}_{\frac{\nu_e}{N}}(u) \\
 G\left(\frac{m\nu_e}{N}\right) &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-2i\pi \frac{m\nu_e}{N} n x_e} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-2i\pi \frac{mn}{N}} = F_m.
 \end{aligned}$$

Inversion de la TFD :

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=0}^{N-1} F_m e^{+2i\pi \frac{mn}{N}} &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n'=0}^{N-1} f_{n'} e^{2i\pi \frac{m(n-n')}{N}} \\
 &= \sum_{n'=0}^{N-1} f_{n'} \sum_{m=0}^{N-1} \left(e^{2i\pi \frac{n-n'}{N}} \right)^m \\
 \text{or : } \sum_{m=0}^{N-1} \left(e^{2i\pi \frac{n-n'}{N}} \right)^m &= \begin{cases} N & \text{si } n = n' \\ \frac{1-e^{2i\pi(n-n')}}{1-e^{2i\pi \frac{n-n'}{N}}} = 0 & \text{si } n \neq n' \end{cases} \\
 \text{donc : } \sum_{m=0}^{N-1} F_m e^{+2i\pi \frac{mn}{N}} &= N \cdot f_n.
 \end{aligned}$$

2.4 Guide pratique : transformation de Fourier discrète

Domaine temporel	Domaine fréquentiel	Notes
$x_n = x(t_n)$ $= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \exp(i2\pi f_k t_n)$ $= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \exp(i2\pi \frac{kn}{N})$	$X_k = X(f_k)$ $= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-i2\pi f_k t_n)$ $= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-i2\pi \frac{kn}{N})$	$f_k t_n = k \Delta f n \Delta t = \frac{kn}{N}$
$x_n \exp(i2\pi \frac{mn}{N})$	$X_{(k-m) \bmod N}$	Décalage fréquentiel circulaire
$x_{(n-m) \bmod N}$	$X_k \exp(-i2\pi \frac{mk}{N})$	Décalage temporel circulaire
$x_n * y_n$	$X_k Y_k$	Convolution
$x_n y_n$	$X_k * Y_k$	$x_n * y_n = \sum_{l=0}^{N-1} x_l y_{(n-l) \bmod N}$
δ_n	1	
$\frac{1}{N}$	δ_k	
$\cos(2\pi \frac{mn}{N})$	$\frac{1}{2} (\delta_{(k-m) \bmod N} + \delta_{(k+m) \bmod N})$	

TABLE 2.2 – Tableau récapitulatif sur la TFD

3 Systèmes linéaires, invariants et continus dans le temps

Nous rappelons dans ce chapitre les bases du filtrage linéaire et citons des exemples uni-dimensionnels avec des filtres à variable temporelle. Or, les notions introduites en une dimension restent valables pour le filtrage de signaux bi-dimensionnelles représentant par exemple une image.

3.1 Signaux et systèmes continus dans le temps

Le traitement du signal a pour objet l'étude des signaux dans leur relation avec les systèmes qui les transmettent. Afin de résoudre un problème physique, nous devons proposer un modèle pour deux phénomènes :

- Les systèmes physiques sont décrits par des équations mathématiques, par exemple des équations différentielles à coefficients constants. Un système est une opération pour laquelle existe une relation de cause à effet. La cause est le signal d'entrée, et l'effet est le signal de sortie. Un système peut être avec ou sans mémoire, inversible ou pas, stable ou instable, linéaire ou non-linéaire, etc.
- Les signaux physiques sont décrits par des fonctions mathématiques. Un exemple de signal physique est la température qui dépend du temps mais aussi de l'espace $T = f(t, x, y, z)$. La sortie d'un appareil de mesure physique analogique fournit en général une fonction continue du paramètre intéressant. On décrira ainsi ce signal par une fonction continue. Si par contre, on relève une courbe, point par point, le signal obtenu est discontinu (échantillonné) et est représenté sous forme de distributions de points, comme on l'a expliqué au chapitre 2.

3.2 Systèmes linéaires, invariants et continus dans le temps

Un système linéaire, invariant et continu dans le temps (*Linear Time Invariant Systems* en anglais) vérifie les propriétés suivantes :

$$x(t) \rightarrow y(t) \quad (3.1)$$

$$x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0) \quad (3.2)$$

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \rightarrow a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) \quad (3.3)$$

Ce cas particulier des systèmes est intéressant car beaucoup de systèmes physiques peuvent être modélisés par des LTIS ou au moins approximés par des LTIS de façon à avoir un point d'origine pour l'étude, même si le modèle précis n'est pas un LTIS.

3.3 Réponse impulsionnelle des LTIS

La convolution, définie par l'équation (2.2), est une opération extrêmement courante en physique car tout système dynamique linéaire réalise une convolution. En électronique par exemple,

une impulsion brève en entrée d'un amplificateur ne donnera jamais en sortie une impulsion infiniment brève mais un signal de durée étalée non nulle.

Considérons un système ayant comme entrée $x(t)$ et comme sortie $y(t)$. Soit $h(t)$ la réponse de ce système à l'impulsion unité $\delta(t)$:

$$\delta(t) \rightarrow h(t) \quad (3.4)$$

$h(t)$ est aussi appelée **réponse impulsionnelle**.

On peut montrer que la réponse du système à une entrée quelconque $x(t)$ est :

$$y(t) = h(t) * x(t) = x(t) * h(t) \quad (3.5)$$

Dans le domaine de Fourier, cette opération de convolution devient un produit simple entre $H(f)$ la transformée de Fourier de $h(t)$ et $X(f)$ celle de $x(t)$:

$$Y(f) = H(f)X(f) \quad (3.6)$$

3.4 Le filtrage linéaire

Parmi les filtres à variable temporelle, nous trouvons des filtres utilisés à des fins de traitements comme la séparation des signaux dont les supports spectraux sont disjoints. Par exemple, ce sont des filtres qui permettent de séparer les différents signaux que peut recevoir une antenne de réception 4G ou les différents signaux que peut recevoir une photodiode au bout d'une liaison en fibre optique.

Dans une première approximation, tous les canaux de transmission et tous les appareils de mesure jouent également le rôle de filtre. Dans toute mesure physique, l'instrument de mesure est incapable de rendre compte des variations trop rapides du signal à mesurer $e(t)$. Il en est ainsi de la résolution limitée des appareils de mesures qui ne peuvent pas discerner deux impulsions rapprochées. Le produit de convolution peut traduire cet aspect. En effet, le signal $s(t)$ mesuré à chaque instant t :

$$s(t) = e(t) * h(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t - \tau)e(\tau)d\tau \quad (3.7)$$

représente une moyenne de $e(\tau)$ pondérée au voisinage de chaque point τ par $h(t - \tau)$. Généralement $s(t)$ présente des fluctuations moins rapides que celles de $e(t)$.

Un filtre modifie l'amplitude et la phase des composantes sinusoïdales contenues dans un signal. Cette modification peut être désirée dans certaines applications ou être nuisible dans d'autres. Un filtre sans distorsion est un filtre qui apporte un simple gain a et un simple retard t_0 à toutes les composantes fréquentielles du signal d'entrée comprises dans une certaine largeur de bande spectrale, appelée **bande passante**. Ce filtre idéal, sans distorsion, peut porter différents noms selon la forme de sa bande passante :

- Filtre passe-bas idéal :

$$H(f) = a\Pi_{2B}(f) \exp(-2\pi i f t_0) \quad (3.8)$$

$$h(t) = 2aB \operatorname{sinc}(2B(t - t_0)) \quad (3.9)$$

- Filtre passe-bande idéal :

$$H(f) = a[\Pi_{2B}(f - f_0) + \Pi_{2B}(f + f_0)] \exp(-2\pi i f t_0) \quad (3.10)$$

$$h(t) = 4aB \operatorname{sinc}(2B(t - t_0)) \cos(2\pi f_0(t - t_0)) \quad (3.11)$$

- Filtre passe-haut idéal :

$$H(f) = a(1 - \Pi_{2B}(f)) \exp(-2\pi i f t_0) \quad (3.12)$$

$$h(t) = a[\delta(t - t_0) - 2B \operatorname{sinc}(2B(t - t_0))] \quad (3.13)$$

D'un point de vue pratique, à cause de la nature idéalisée de ces fonctions de transfert, les filtres réalisables ne peuvent satisfaire les spécifications précédentes que d'une façon approchée. Ces spécifications sont données avec des limites de tolérance, à l'aide d'un gabarit que doit satisfaire $|H(f)|$ et $\angle(H(f))$.

Il existe de nombreuses classes de fonctions $H(f)$ permettant une synthèse approchée de ces filtres parmi lesquelles les filtres de Butterworth, de Chebycheff, etc. Chacune de ces classes répond à des critères d'approximation souhaités comme l'ondulation en bande passante, la largeur de la bande de transition et l'ondulation dans la bande atténuée. Lorsque les contraintes imposées à un filtre analogique sont complexes, on préfère en général échantillonner et numériser les signaux pour leur appliquer des filtres numériques.

Enfin, les filtres réalisables peuvent introduire des distorsions d'amplitude (respectivement de phase) dans leur bande passante. Ainsi, les différentes composantes sinusoïdales d'un signal filtré ne sont pas amplifiées ou atténuées de la même manière (respectivement subissent des retards différents).

4 Modélisation d'une situation physique : photo et diffraction

4.1 Modélisation de la lumière provenant d'objets lointains

La lumière sera modélisée par une fonction \mathcal{E} de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{C} admettant la décomposition suivante, dite « décomposition en ondes planes monochromatiques » :

$$\mathcal{E}(\vec{r}, t) = \int \mathcal{E}_\nu(\vec{r}) e^{2i\pi\nu t} d\nu \quad (4.1a)$$

$$\mathcal{E}_\nu(\vec{r}) = \iint E_\nu(\vec{u}) e^{-2i\pi\vec{u}\cdot\vec{r}} du_x du_y \quad \text{avec : } |\vec{u}| = \frac{\nu}{c} = \frac{1}{\lambda}. \quad (4.1b)$$

On y reconnaît le champ électrique (plus précisément son amplitude complexe) dans une superposition d'ondes électromagnétiques. Physiquement, \vec{r} a une dimension d'espace et t a une dimension de temps. La constante c est la vitesse de la lumière, qui pour chaque onde relie ν (fréquence optique, i.e. vitesse de vibration dans le temps) à λ (longueur d'onde, i.e. période spatiale de l'onde).¹

On remarque que l'équation (4.1b) n'intègre que sur 2 composantes u_x et u_y . Ce n'est pas une erreur : la 3^e composante u_z du vecteur \vec{u} est imposée par sa norme. À part cela, le système d'équations (4.1) ressemble beaucoup à une transformation de Fourier, ce qui aura son importance par la suite dans le phénomène de diffraction.

Le vecteur \vec{u} représente également la direction de propagation de l'onde plane qui lui est associée. On peut l'indexer par 2 angles θ_x, θ_y , avec : $u_x = |\vec{u}| \sin \theta_x \simeq \theta_x / \lambda$ (en se restreignant aux angles petits devant 1). L'équation (4.1b) peut alors s'écrire :

$$\mathcal{E}_\nu(\vec{r}) = \mathcal{E}_\nu(x, y, z) = \iint \hat{E}_\nu(\theta_x, \theta_y) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(\theta_x x + \theta_y y)} e^{-i\phi(z)} d\theta_x d\theta_y. \quad (4.2)$$



Le modèle est-il suffisant ?

Comme tout modèle, celui-ci a un domaine de validité. Si vous pensez qu'il est incomplet voire incorrect, vous n'avez pas entièrement tort, mais la question est plutôt de savoir si son domaine de validité nous suffit ou si nous aurons besoin d'un modèle plus compliqué.

- Le modèle suffit à représenter la lumière provenant d'objets lointains à $z \simeq -\infty$. Ce sera sans problème le cas pour des objets astronomiques, et même aussi pour la plupart des photos à plus de quelques mètres. (Voir polycopié de COM101 pour la distance suffisante.) Cela explique aussi le choix particulier de l'axe z : c'est la direction dans laquelle on regarde (vers $z = -\infty$).
- En termes d'angles et d'approximation du sinus de θ_x et θ_y , l'étendue angulaire du

1. On trouvera aussi des décompositions sur les variables $\omega = 2\pi\nu$ (pulsation de l'onde) et $\vec{k} = 2\pi\vec{u}$ (vecteur d'onde). Le principe est le même à des facteurs $\sqrt{2\pi}$ près dont nous ne nous soucierons pas.

soleil ou de la lune vus depuis la terre est inférieure à 10^{-2} rad. Même avec un champ visuel dix fois plus large, à 10^{-1} rad, l'erreur relative entre θ et $\sin \theta$ est de l'ordre de 10^{-3} .

- On ne représente que la propagation dans le vide avec $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, ou éventuellement dans un milieu isotrope uniforme d'indice $n > 1$ en remplaçant c par c/n .
- On ne représente pas le caractère vectoriel du champ \mathcal{E} , autrement dit la polarisation de la lumière. On peut étendre le modèle en considérant séparément la polarisation selon x et la polarisation selon y .
- Le champ $\mathcal{E}(\vec{r}, t)$ est en fait réel, pas complexe. Cela veut dire qu'on devrait considérer les ondes monochromatiques de fréquence ν et $-\nu$ ensemble.
- On ne représente pas les effets quantiques (faibles puissances, i.e. faible flux de photons) ni les effets non-linéaires (fortes puissances dans un matériau dont l'indice n ne serait plus constant, ce qui invalide le théorème de superposition).

4.2 Observation et photographie d'objets lointains

On considère que les objets sont suffisamment loin pour que toute leur lumière nous parvienne sous forme d'ondes planes. Autrement dit, toute la lumière qui provient d'une certaine direction est une onde plane qui se propage vers nous dans cette direction, et peut être entièrement modélisée par $\hat{E}(\theta_x, \theta_y)$. Le champ de vision d'un instrument est l'étendue angulaire qu'il parvient à capter, donc le domaine de θ_x, θ_y .

Prendre une photo revient à enregistrer l'intensité lumineuse en fonction de la direction (θ_x, θ_y) dont elle est issue. Cela nécessite de collecter la lumière de chaque onde plane en un certain point d'un capteur. Il existe pour ce faire divers systèmes optiques à base de miroirs (télescopes) ou de lentilles (lunettes astronomiques ou télescopes réfracteurs).

Idéalement, on souhaite que la lumière arrivant sur l'instrument dans le plan $z = 0$ soit collectée sur un capteur plan, selon des coordonnées X, Y , de façon à obtenir :

$$E_{\nu}^{\text{capté}}(X, Y) \propto \hat{E}_{\nu} \left(\frac{X}{f}, \frac{Y}{f} \right) \quad (4.3a)$$

$$I_{\nu}^{\text{captée}}(X, Y) \propto |E_{\nu}^{\text{capté}}(X, Y)|^2, \quad (4.3b)$$

où le rapport f entre X et θ_x est une longueur constante appelée la « focale » de l'instrument.²

Les capteurs sont sensibles à une certaine gamme de fréquences optiques ou de longueurs d'ondes. Ils enregistreront donc toute l'intensité des différentes fréquences dans cette gamme. L'intensité totale sera la somme des intensités.³ En supposant que le capteur a une sensibilité

2. Toute déviation à ce modèle sera désignée sous le nom d'« aberration ». Il en existe divers types, que nous n'étudierons pas en détail. On ne se préoccupera pas non plus des constantes de proportionnalité globales.

3. Pour faire simple, les ondes de fréquences optiques différentes ne sont pas cohérentes entre elles. Si on voulait les décrire plus précisément, on devrait tenir compte de leur phase relative qui varierait en $e^{2i\pi(\Delta\nu)t}$, donc très rapidement vu l'ordre de grandeur de ν (10^{14} – 10^{15} Hz dans le visible). Le capteur, beaucoup plus lent, serait sensible à la moyenne temporelle de l'intensité, qui revient en fait à la somme des intensités aux différentes fréquences.

uniforme, on pourra donc généralement écrire :

$$I_{\text{captée}}(X, Y) = \int_{\nu_1}^{\nu_2} I_{\nu}^{\text{captée}}(X, Y) d\nu. \quad (4.4)$$

4.3 Diffraction par l'ouverture de l'instrument

L'instrument étant de taille finie, il ne peut pas capter toute la lumière du plan $z = 0$. De plus, la structure des divers instruments peut comporter diverses obstructions (typiquement des miroirs secondaires et leurs supports). On les modélisera sous la forme d'une fonction de transmittivité $\mathcal{T}(x, y)$ (de transformée de Fourier notée $T(u_x, u_y)$) qui multiplie le champ en $z = 0$:

$$\mathcal{E}'_{\nu}(x, y, z = 0) = \mathcal{T}(x, y) \mathcal{E}_{\nu}(x, y, z = 0) \quad (4.5a)$$

ce qui donnerait très envie d'utiliser les propriétés de la transformée de Fourier et exprimer ce produit dans le domaine dual :

$$E'_{\nu}(\vec{u}) \stackrel{?}{=} T * E_{\nu}(\vec{u}) \quad (4.5b)$$

$$I'_{\nu}^{\text{captée}}(X, Y) \stackrel{?}{=} \left| \hat{T} * \hat{E}_{\nu} \left(\frac{X}{f}, \frac{Y}{f} \right) \right|^2 \quad (4.5c)$$

Ce calcul fonctionnerait si le champ \mathcal{E} était cohérent. Mais ce n'est généralement pas le cas : la lumière provenant de différents angles a été émise par des objets différents, situés à des distances astronomiques les uns des autres ! On devrait donc, en toute rigueur, tenir compte d'une phase aléatoire rapidement variable sur chaque onde plane, ce qui complexifie le modèle.

Toutefois, on peut tenir le raisonnement suivant : chaque onde plane individuelle est cohérente avec elle-même, donc on peut écrire l'équation (4.5a) pour une seule onde plane de vecteur \vec{u}_0 :

$$\mathcal{E}'_{\nu}(x, y, z = 0) = \mathcal{T}(x, y) E_{\nu}(\vec{u}_0) e^{-2i\pi(u_0x + u_0y)} \quad (4.6a)$$

$$= \mathcal{T}(x, y) E_{\nu}(\vec{u}_0) \iint \delta(\vec{u} - \vec{u}_0) e^{-2i\pi(u_x x + u_y y)} du_x du_y \quad (4.6b)$$

et pour cette onde plane individuelle on peut utiliser la TF pour écrire :

$$E'_{\nu}(\vec{u}) = T * E_{\nu}(\vec{u}_0) \delta(\vec{u} - \vec{u}_0) \quad (4.6c)$$

$$= E_{\nu}(\vec{u}_0) T(\vec{u} - \vec{u}_0) \quad (4.6d)$$

$$I'_{\nu}^{\text{captée}}(X, Y) = I_{\nu}^{\text{captée}}(X_0, Y_0) \left| \hat{T} \left(\frac{X - X_0}{f}, \frac{Y - Y_0}{f} \right) \right|^2. \quad (4.6e)$$

En d'autres termes, là où chaque onde plane convergeait en un seul point du capteur, l'onde plane perturbée par \mathcal{T} génère une intensité proportionnelle à \hat{T}^2 centrée au point (X_0, Y_0) correspondant à \vec{u}_0 .

Si maintenant on considère l'ensemble de toutes les ondes planes arrivant sur l'instrument, vu qu'elles sont incohérentes entre elles, on peut additionner les intensités qu'elles génèrent :

$$I'_{\nu}^{\text{captée}}(X, Y) = \iint \left| \hat{T} \left(\frac{X - X_0}{f}, \frac{Y - Y_0}{f} \right) \right|^2 I_{\nu}^{\text{captée}}(X_0, Y_0) dX_0 dY_0 \quad (4.7a)$$

$$= \left| \hat{T} \left(\frac{X}{f}, \frac{Y}{f} \right) \right|^2 * I_{\nu}^{\text{captée}}(X, Y). \quad (4.7b)$$

Au final, on obtient quand même une convolution de l'image idéale par $|\hat{T}|^2$, mais elle se fait en intensité et non en champ.