

Группа: 101.1

К работе допущен: 26.09.2025 г.

Студент: Пухов Евгений

Работа выполнена: 10.10.2025 г.

Преподаватель: Ефремова Е. А.

Отчёт принят:

Лаборант: Василькова Е.

Рабочий протокол и отчёт по лабораторной работе № 2

«ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА»

1. Цель работы

Определить момент инерции и изучить его физические свойства.

2. Объект исследования

Момент инерции.

3. Задачи, решаемые при выполнении работы

- Провести многократные опыты с использованием маятника Обербека (без грузов; с дополнительными грузами на шкиве, на подвесе).
- Вычислить соответствующие массам угловые ускорения β_{m_i} .
- Построить зависимость $\beta(m)$.
- Вычислить значение момента инерции шкива со стержнями.
- Сравнить полученные для разных грузов и стержней моменты инерции и построить графики теоретически ожидаемой зависимости момента инерции от r^2

4. Схема установки

Экспериментальная установка состоит из следующих компонентов:

1. Маятник Обербека
2. Секундомер, автоматически отсекающий время.

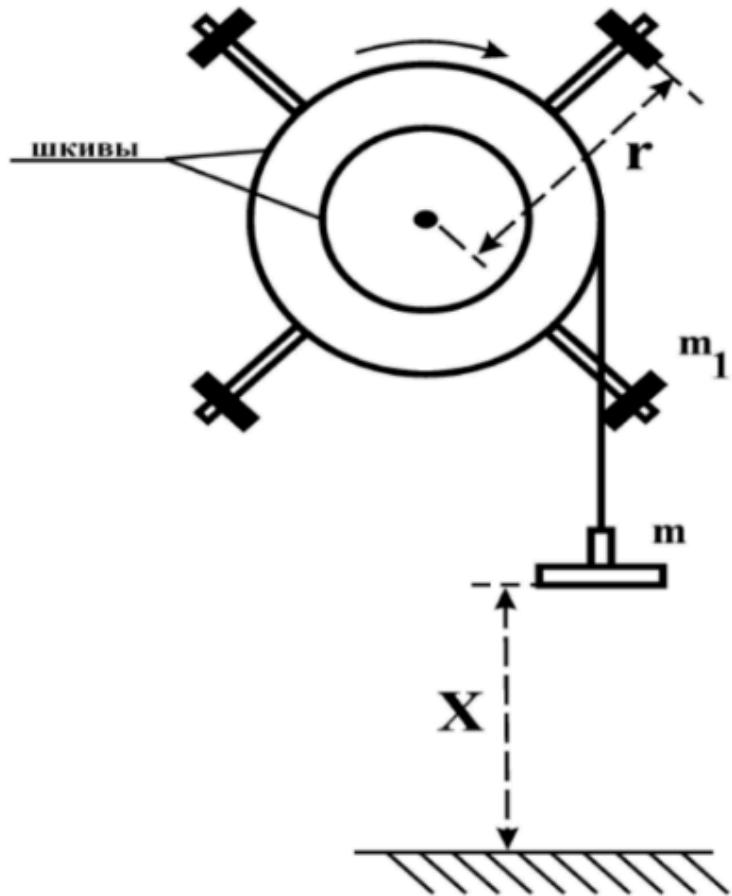


Рис. 1: Маятник Обербека

5. Измерительные приборы

Прибор	Тип прибора	Исследуемый диапазон	Погрешность измерения
Секундомер	Цифровой	[0;20] s	0.001 s
Штангенциркуль	Цифровой	[5; 10] см	0.05 см
Весы	Цифровой	[0;200] g	0.05 g

Табл. 1: Измерительные приборы.

6. Метод экспериментального исследования

Проведение многоократных измерений времени движения груза на подвесе.

7. Формулы

Момент инерции

$$I = mr^2 \quad (1)$$

где m - масса материальной точки, r - расстояние до нее

Основной закон динамики вращательного движения

$$M = I \frac{d\omega}{dt} \quad (2)$$

где M - момент силы, ω - угловая скорость, t - время.

8. Результаты прямых измерений и их обработка

Измерение времени движения маятника Обербека с разными параметрами. Проведем эксперимент в разных условиях (результаты отразим в Табл.2):

- без дополнительных грузов (эксперимент 1);
- с одним, двумя, тремя грузами на подвесе (2, 3, 4 соответственно);
- с грузами на стержнях на трех разных расстояниях от центра (5, 6, 7).

эксперимент	Опыт 1	Опыт 2	Опыт 3	Опыт 4	Опыт 5	Ср. значение
1	6.197	6.051	6.816	6.372	6.324	6.352
2	4.390	4.422	4.485	4.447	4.204	4.390
3	3.339	3.047	3.255	2.985	3.222	3.170
4	2.797	2.812	2.813	2.867	2.699	2.798
5	5.144	5.155	4.911	-	-	5.070
6	4.506	4.495	4.519	-	-	4.507
7	3.857	3.860	3.852	-	-	3.856

Табл. 2: Результаты прямых измерений

Измерение прочих необходимых данных

Величина	Значение 1	значение 2	значение 3	ср.знач
Масса груза	49.65	49.65	49.65	49.65
Масса подвеса	50.00	50.00	50.00	50.00
Диаметр шкива	6.34	-	-	6.34

Табл. 3: Результаты прочих данных

9. Расчет результатов косвенных измерений

Вычисление углового ускорения и построение зависимости $\beta(m)$

Используя кинематическую связь линейного и углового ускорения

$$a = \beta R \quad (3)$$

где R - радиус шкива маятника и формулу для расчета ускорения для прямолинейного движения

$$a = \frac{2x}{2t} \quad (4)$$

где x - пройденный грузом путь, получим формулу для расчета углового ускорения

$$\beta = \frac{2x}{Rt^2} \quad (5)$$

Вычислим значения угловых ускорений для опытов проведенных с разными массами на подвесе и занесем значения в табл. 4.

Масса, г	Пройденный путь, см	Радиус, см	Время, с	Время в квадрате, s^2	Угловое ускорение, s^{-2}
50.0	50	3.17	6.352	40.348	0.782
99.65	50	3.17	4.39	19.272	1.637
149.3	50	3.17	3.170	10.049	3.139
198.95	50	3.17	2.798	7.829	4.029

Табл. 4: построение зависимости $\beta(m)$

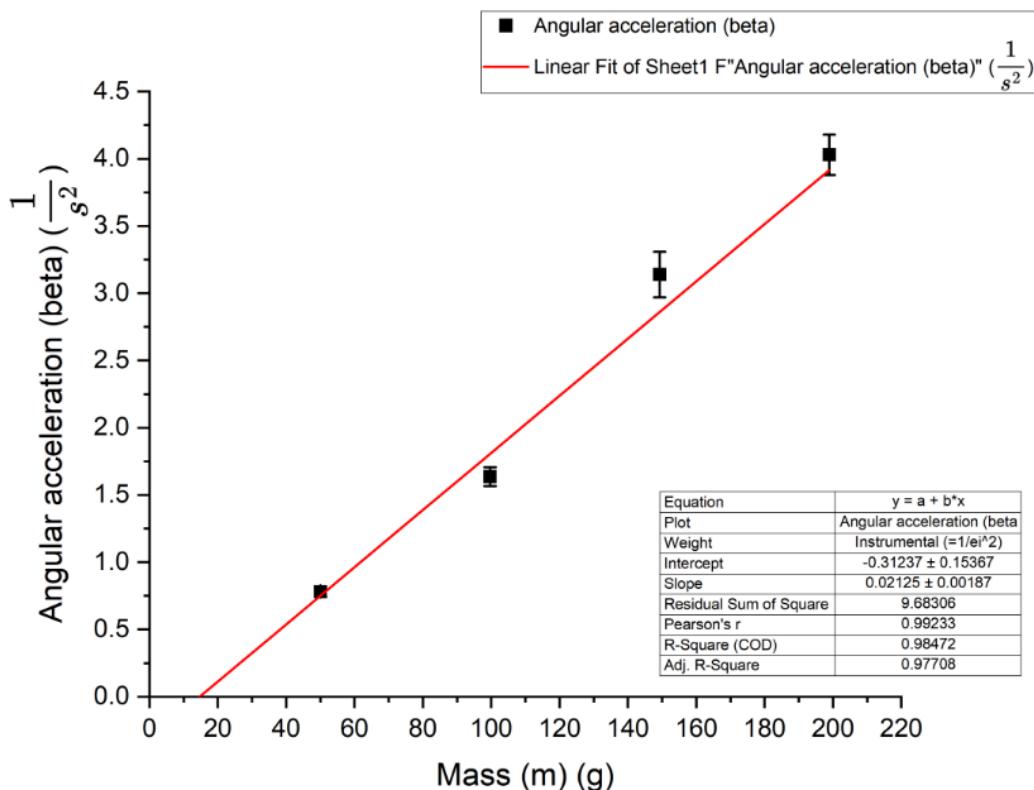


Рис. 2: построение зависимости $\beta(m)$

Построив график зависимости $\beta(m)$ можно понять, что у нас аппроксимация линейной функции, заметим, что $m(\beta = 0) = 18.65$ г.

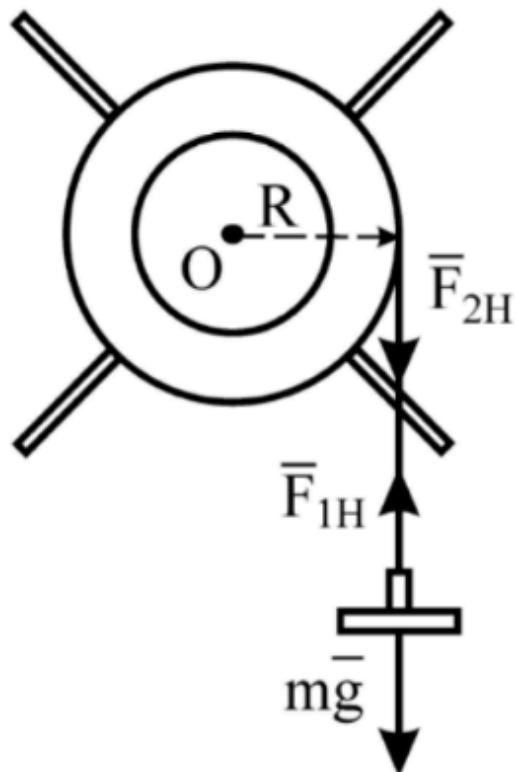


Рис. 3: Динамика маятника Обербека

Для описания движения системы маятника и груза на подвесе применимы и основное уравнение динамики вращательного движения (формула (2)) и основное уравнение поступательного движения, запишем его в проекции на ось, направленную вдоль движения груза:

$$ma = mg - F_{1H} \quad (6)$$

Будем пользоваться моделью невесомой и нерастяжимой нити: $|F_{1H}| = |F_{2H}|$

Относительно оси О, проходящей перпендикулярно плоскости рисунка сила натяжения создает вращательный момент $M = F_{1H}R$. Также вращению препятствует момент силы трения в подшипниках M_{fr} . Перепишем (2) в наших терминах:

$$F_{1H}R - M_{fr} = I \frac{d\omega}{dt}, \quad \beta = \frac{d\omega}{dt} \quad (7)$$

Решив систему уравнений (6) и (7), учитывая (3) и выразив I получим:

$$I = \frac{mgR - M_{fr}}{\beta} - mR^2 \quad (8)$$

В этом уравнении нам известны все величины кроме M_{fr} , найдем его экспериментально. Выразим β из (8):

$$\beta = \frac{mgR - M_{fr}}{I + mR^2} \quad (9)$$

при $\beta = 0, m = m(\beta = 0)$, которую мы уже нашли ранее:

$$M_{fr} = m(\beta = 0)gR \quad (10)$$

Объединив (5), (8) и (10), получим формулу для расчета момента инерции маятника Обербека:

$$I = \frac{(m - m_0)gR^2t^2}{2x} - mR^2 \quad (11)$$

Учитвая, что для маятника Обербека справедливо $\frac{gt^2}{2x} \gg \frac{m}{m - m_0}$ получим

$$I = \frac{(m - m_0)gR^2t^2}{2x} \quad (12)$$

или

$$I = k(m - m_0)t^2 \quad (13)$$

где $k = \frac{gR^2}{2x}$ - пройденный путь

Вычислим моменты инерции маятника для четырех грузов на стержнях на расстояниях от центра $r_1 = 32.04$; $r_2 = 27.04$; $r_3 = 21.04$ см :

Расстояние	k	Время	Время в квадрате	Момент инерция
32.04	3.94319	5.070	25.7049	13242.588
27.04	3.94319	4.507	20.31305	10464.827
21.04	3.94319	3.856	14.86874	7660.039

Табл. 5: построение зависимости $I(r)$

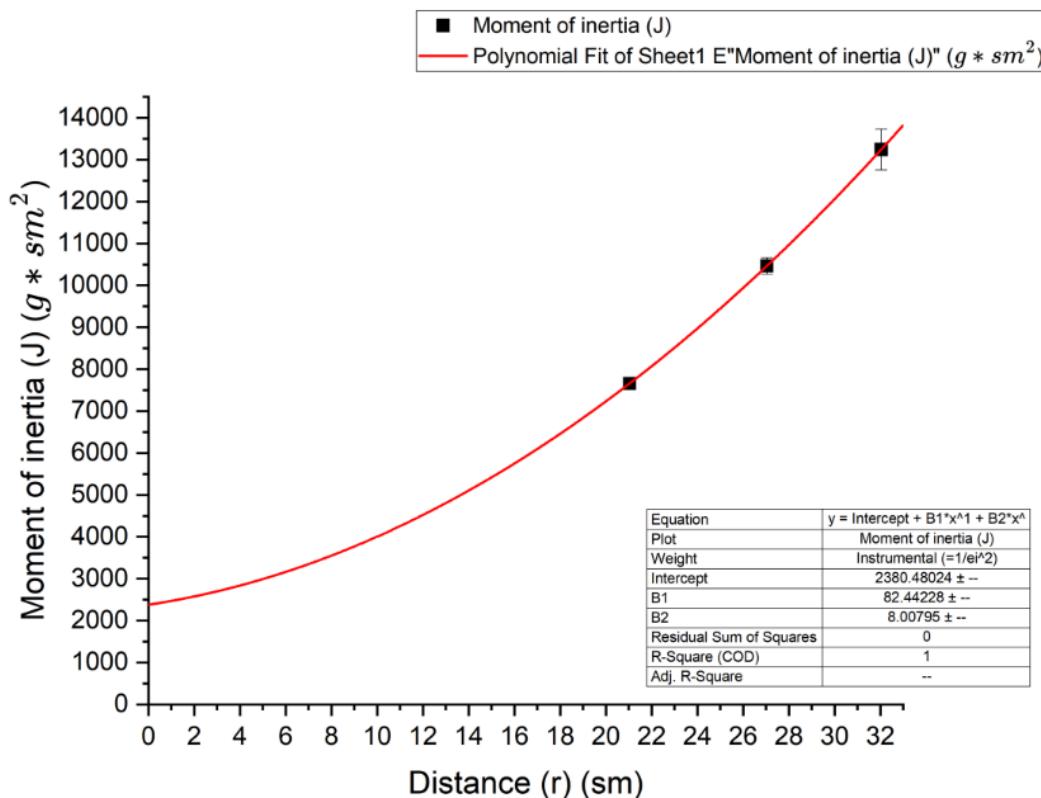


Рис. 4: построение зависимости $I(r)$

Заметим, что аппроксимация нашей функции носит квадратичный характер.

Вычисление значения момента инерции маятника со стержнями.

Чтобы вычислить момент инерции шкива со стержнями I_0 , добавим в табл. 4 формулу (11), вычисляющую момент инерции по массе груза на подвесе и времени его движения.

Масса, g	Пройденный путь, sm	Радиус, sm	Время, s	Время в квадрате, s^2	Угловое ускорение, s^{-2}	Момент инерции, $g^* \text{sm}^2$
50.0	50	3.17	6.352	40.348	0.782	1246.94143
99.65	50	3.17	4.390	19.272	1.637	1538.86879
149.30	50	3.17	3.170	10.049	3.139	1246.94143
198.95	50	3.17	2.798	7.829	4.029	1391.48548

Табл. 6: Вычисление момента инерции маятника со стержнями I_0

Среднее значение составит $\langle I_0 \rangle = 1367.884 \text{ г}^* \text{см}^2$

10. Расчет Погрешность измерений

σ_i - СКО для времени, полученного в эксперименте i

$$\sigma_1 = 0.129s$$

$$\sigma_2 = 0.049s$$

$$\sigma_3 = 0.067s$$

$$\sigma_4 = 0.027s$$

$$\sigma_5 = 0.080s$$

$$\sigma_6 = 0.007s$$

$$\sigma_7 = 0.002s$$

Полная Погрешность времени Δt_i :

$$\Delta t_1 = \sqrt{\Delta t^2 + \sigma_1^2} = \sqrt{0.001^2 + 0.129^2} = 0.129s$$

$$\Delta t_2 = \sqrt{\Delta t^2 + \sigma_1^2} = \sqrt{0.001^2 + 0.049^2} = 0.049s$$

$$\Delta t_3 = \sqrt{\Delta t^2 + \sigma_1^2} = \sqrt{0.001^2 + 0.067^2} = 0.067s$$

$$\Delta t_4 = \sqrt{\Delta t^2 + \sigma_1^2} = \sqrt{0.001^2 + 0.027^2} = 0.027s$$

$$\Delta t_5 = \sqrt{\Delta t^2 + \sigma_1^2} = \sqrt{0.001^2 + 0.080^2} = 0.080s$$

$$\Delta t_6 = \sqrt{\Delta t^2 + \sigma_1^2} = \sqrt{0.001^2 + 0.007^2} = 0.007s$$

$$\Delta t_7 = \sqrt{\Delta t^2 + \sigma_1^2} = \sqrt{0.001^2 + 0.002^2} = 0.002s$$

Полная Погрешность прочих величин

$$\Delta m = 0.05 \text{ g}$$

$$\Delta x = 0.5 \text{ sm}$$

$$\Delta R = 0.05 \text{ sm}$$

Расчет Погрешности косвенных измерений

Погрешность $\Delta\beta_i$:

$$\Delta\beta_i = \sqrt{\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta}{\partial R}\Delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta}{\partial t_i}\Delta t_i\right)^2}$$

$$\Delta\beta_i = \sqrt{\left(\frac{2}{Rt_i^2}\Delta x\right)^2 + \left(-\frac{4x}{R^2t_i^2}\Delta R\right)^2 + \left(-\frac{4x}{Rt_i^3}\Delta t_i\right)^2}$$

$$\Delta\beta_1 = \sqrt{\left(\frac{2}{3.17 \cdot 6.352^2} \cdot 0.5\right)^2 + \left(-\frac{4 \cdot 50}{3.17 \cdot 6.352^2} \cdot 0.05\right)^2 + \left(-\frac{4 \cdot 50}{3.17 \cdot 6.352^3} \cdot 0.129\right)^2}$$

$$= 0.04s$$

$$\Delta\beta_2 = \sqrt{\left(\frac{2}{3.17 \cdot 4.390^2} \cdot 0.5\right)^2 + \left(-\frac{4 \cdot 50}{3.17 \cdot 4.390^2} \cdot 0.05\right)^2 + \left(-\frac{4 \cdot 50}{3.17 \cdot 4.390^2} \cdot 0.049\right)^2}$$

$$= 0.07 s$$

$$\Delta\beta_3 = \sqrt{\left(\frac{2}{3.17 \cdot 3.170^2} \cdot 0.5\right)^2 + \left(-\frac{4 \cdot 50}{3.17 \cdot 3.170^2} \cdot 0.05\right)^2 + \left(-\frac{4 \cdot 50}{3.17 \cdot 3.170^2} \cdot 0.067\right)^2}$$

$$= 0.17 s$$

$$\Delta\beta_4 = \sqrt{\left(\frac{2}{3.17 \cdot 6.352^2} \cdot 0.5\right)^2 + \left(-\frac{4 \cdot 50}{3.17 \cdot 6.352^2} \cdot 0.05\right)^2 + \left(-\frac{4x}{3.17 \cdot 6.352^3} \cdot 0.049\right)^2}$$

$$= 0.15 s$$

Погрешность ΔI_i :

$$\Delta I_i = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial m}\Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial m_0}\Delta m_0\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial R}\Delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial t_i}\Delta t_i\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial x}\Delta x\right)^2}$$

$$\Delta I_i = \sqrt{\left(\frac{gR^2t_i^2}{2x}\Delta m\right)^2 + \left(-\frac{gR^2t_i^2}{m_0}\Delta m_0\right)^2 + \left(\frac{(m-m_0)gRt_i^2}{x}\Delta R\right)^2 + \left(\frac{(m-m_0)gR^2t_i}{x}\Delta t_i\right)^2 + \left(-\frac{(m-m_0)gR^2t_i^2}{2x^2}\Delta x\right)^2}$$

$$\Delta I_1 = 484.85 \text{ g} \cdot \text{sm}^2$$

$$\Delta I_1 = 198.29 \text{ g} \cdot \text{sm}^2$$

$$\Delta I_1 = 143.41 \text{ g} \cdot \text{sm}^2$$

11. Окончательные результаты

$$I_0 = (1.37 \pm 0.06) \cdot 10^3 \text{ g} \cdot \text{sm}^2$$

12. Выводы и анализ результатов

При проведении лабораторной работы был экспериментально подтвержден линейный характер зависимости углового ускорения от массы груза на подвесе. Это позволило нам определить некую условную массу, сообщающую отрицательный момент вращения маятнику (мы назвали его моментом трения). В дальнейшем это позволило нам выразить уравнение для расчета момента инерции маятника и установить и экспериментально подтвердить его квадратичную зависимость от расстояния до материальных точек на его стержнях. Также это позволило нам вычислить момент инерции шкива со стержнями. Расчет погрешностей показал, что измерения были выполнены качественно и результатам эксперимента можно доверять.

