Санкт-Петербургский национальный исследовательский Академический университет имени Ж.И. Алфёрова Российской академии наук

Группа: 101.1	К работе допущен: 26.09.2025 г.
Студент: Пухов Евгений	Работа выполнена: 10.10.2025 г.
Преподаватель: Ефремова Е. А.	Отчёт принят:
Лаборант: Василькова Е.	

Рабочий протокол и отчёт по лабораторной работе № 1

«МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ИССЛЕДОВАНИЕ ЕЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ»

---

1. Цель работы

Измерение случайной величины и определение ее характеристик.

2. Объект исследования

Случайная величина ии ее распределение.

3. Задачи, решаемые при выполнении работы

- Провести многократные измерения заданного промежутка времени.
- Вычислить среднее значение и дисперсию полученной выборки результатов измерений.
- Построить гистограмму плотности относительной частоты попадания результатов

измерения в выбранный интервал времени.

- Выполнить сравнение гистограммы с нормальным распределением, имеющим те же среднее и дисперсию, что и полученная в эксперименте случайная выборка.
- Вычислить случайную и полную погрешности измерения заданного промежутка времени для нескольких значений доверительной вероятности.

4. Схема установки

Экспериментальная установка состоит из следующих компонентов:

1. Секундомер.
2. Помощник, записывающий время.

5. Измерительные приборы

Прибор	Тип прибора	Исследуемый диапазон	Погрешность прибора
Сеукундомер	Цифровой	5с	0.01 с

6. Метод экспериментального исследования

Проведение многократных измерений промежутка времени.

7. Формулы

Среднее значение заданной велечины

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j, \quad n - \text{количество измерение} \tag{1}$$

Стандартная ошибка среднего:

$$SE\left(\bar{X}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{2}$$

Оценка стандартного отклонения:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} \left(X_j - \bar{X}\right)} \tag{3}$$

Полная стандартное отклонение:

$$\sigma = \sqrt{\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2} \tag{4}$$

- σ_1 - стандартное отклонение случайной велечины
- σ_2 - стандартное отклонение систематической ошибки (ошибки прибора)

Оценка для стандартного отклонения случайной велечины:

$$\hat{\sigma}_1 = t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} \tag{5}$$

где $t_{\alpha/2,n-1}$ - коэффицент Стьюдента с α - уровнем доверия

Относительная частота:

$$n_i = \frac{\nu_i}{n \cdot \Delta x} \tag{6}$$

Классический гауссиан:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{7}$$

Функция апроксимации гистограммы:

$$H(x) = A\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{8}$$

где A - параметр масштаба плотности.

8. Результаты прямых измерений и их обработки

Алгоритм измерений :

Один участник эксперимента фиксировал начало и конец пятисекундного интервала с помощью секундомера и подавал команды второму участнику на запуск и остановку измерения. Процедура повторялась 100 раз для получения статистически достоверных данных.

9. Расчет результатов косвенных измерений

Алгоритм построение гистограммы :

Возьмём наш dataset и разобьём его на набор бинов относительных частот с помощью функции **plt.hist** из библиотеки **matplotlib**, указав параметр **density=True**. Это позволяет получить оценку эмпирической плотности распределения данных (6)

После построения гистограммы вычислим основные статистики выборки — выборочное среднее и выборочное стандартное отклонение (1), (3)

Используя эти оценки, можно построить теоретическую плотность нормального распределения (7) и наложить её на ту же область определения, что и гистограмма. Эта кривая показывает, насколько выборка согласуется с гипотезой нормальности при параметрах, оценённых непосредственно из данных.

Кроме того, можно выполнить **аппроксимацию (фит)** эмпирической плотности с помощью нелинейной регрессии. Для этого подбираем параметры A, μ и σ в модели (8)

В итоге визуализация включает:

1. **Гистограмму относительных частот**, отражающую структуру данных.
2. **Теоретическую кривую нормального распределения** с параметрами, вычисленными из выборки.
3. **Gaussian Fit**, полученный методом оптимизации и показывающий наиболее точную гладкую аппроксимацию распределения.

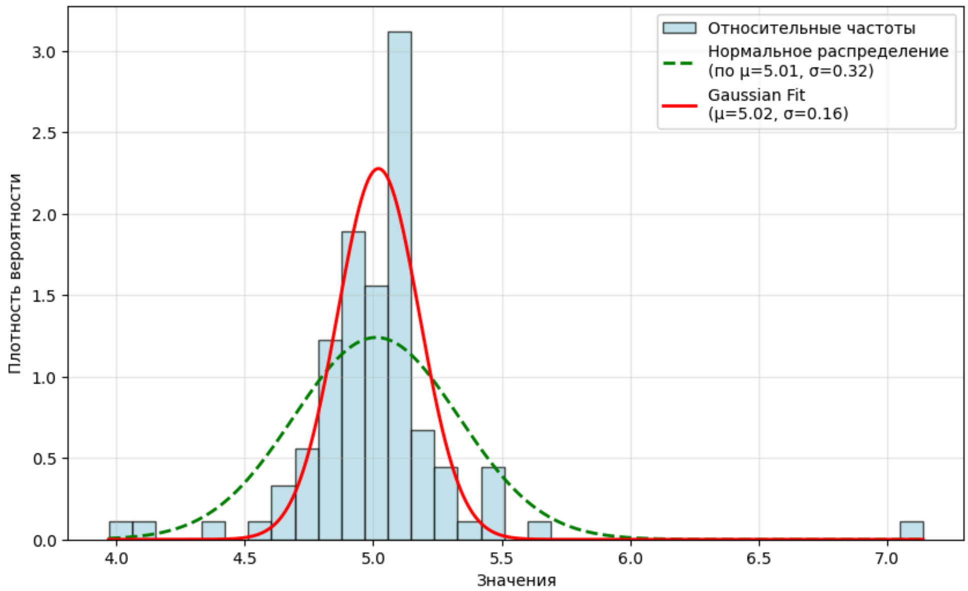

Рис. 1: Гистограмма плотности относительной частоты и графики нормального распределения

Качественное сравнение построенных гистограммы и кривых нормального распределения и прочая обработка результатов.

Оценка для значения (*истинное значение*) $\hat{t} = 5.01$.

Давайте расмотрим интервалы значений зависящие от сигмы и вероятность попадания в них, по следующей формуле

$$\mathbb{P}([t_1, t_2]) = \mathbb{P}(t_1 < t < t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{9}$$

где $f(t)$ - плотность гаусса

$$\left[\hat{t} - \sigma, \hat{t} + \sigma\right] = [4.689, 5.33], P = 0.68$$

$$\left[\hat{t} - 2\sigma, \hat{t} + 2\sigma\right] = [4.37, 5.649], P = 0.95$$

$$\left[\hat{t} - 3\sigma, \hat{t} + 3\sigma\right] = [4.05, 5.97], P = 0.99$$

Давайте посмотрим количество попаданий n_I в интервал I.

	интервал, с	n_I	$\frac{n_I}{n}$	$\mathbb{P}(I)$
$\hat{t} \pm \sigma$	[4.689, 5.33]	87	0.87	0.68
$\hat{t} \pm 2\sigma$	[4.37, 5.649]	96	0.96	0.95
$\hat{t} \pm 3\sigma$	[4.05, 5.97]	97	0.97	0.99

Табл. 1: Гистограмма плотности относительной частоты и графики нормального распределения

10. Расчет погрешности

Давайте расчитаем стандартную ошибку среднего по формуле (2)

$$\mathrm{SE} = 0.032$$

Теперь давайте рассчитаем оценку для ошибки случайной велечены для доверительного значения $[0.7, 0.9, 0.99]$ по формуле (5), а также оценку для полной погрешности по формуле (4)

Доверительное значение α	Оценка ошибки случайной велечены $\hat{\sigma}_1$	Оценка полной ошибки $\hat{\sigma}$
0.7	0.032	0.035
0.9	0.05	0.054
0.99	0.08	0.085

Табл. 2: Оценка ошибки в зависимости от доверительного значения

11. Окончательные результаты

$$t = \begin{cases} 5.01 \pm 0.04s, & \alpha = 0.7 \\ 5.01 \pm 0.05s, & \alpha = 0.9 \\ 5.01 \pm 0.09s, & \alpha = 0.99 \end{cases}$$

12. Выводы и анализ результатов

1. Статистическая оценка по выборке:

$$\mu_{\text{stat}} = 5.01, \quad \sigma_{\text{stat}} = 0.32.$$

2. Аппроксимация гистограммы гауссовой функцией (Gaussian Fit):

$$\mu_{\text{fit}} = 5.02, \quad \sigma_{\text{fit}} = 0.16.$$

Разница между средними составляет всего

$$|\mu_{\text{fit}} - \mu_{\text{stat}}| = 0.01,$$

что меньше экспериментальной погрешности (0.02). Следовательно, оба подхода дают согласованные оценки истинного значения величины, и центр распределения

Выборочное стандартное отклонение

$$\sigma_{\text{stat}} = 0.32$$

отражает фактический разброс данных, включающий:

- случайные шумы
- нестабильность измерительного прибора
- возможные выбросы

Значение

$$\sigma_{\text{fit}} = 0.16$$

получено в результате подгонки гладкой гауссовой кривой к гистограмме. Аппроксимация стремится наиболее точно описать центральную область распределения и игнорирует особенности хвостов. Если данные обладают расширенными хвостами или выбросами, то оптимальная гауссиана становится уже, чем реальное распределение.

Отношение

$$\frac{\sigma_{\text{stat}}}{\sigma_{\text{fit}}} \approx 2$$

указывает, что экспериментальные данные не идеально подчиняются нормальному закону и содержат дополнительный разброс.

Параметр σ_{fit} отражает форму аппроксимации, но не статистический характер разброса наблюдений. Поэтому при оценке погрешности измерений используется именно

$$\sigma_{\text{stat}} = 0.32.$$