Capitolo 5 Autostati dell'operatore di posizione, misure di posizione e funzione d'onda[1]

Abbiamo assunto che le osservabili finora considerate abbiano uno spettro discreto di autovalori. In meccanica quantistica, tuttavia, vi sono **osservabili con autovalori continui**.
Un caso particolarmente importante di osservabile con spettro continuo è rappresentato dalla **posizione**. Consideriamo (per semplicità) una particella vincolata a muoversi in una dimensione e sia x l'asse lungo il quale è possibile il moto. Possiamo allora pensare di indicare con il simbolo $|x'\rangle$ **lo stato in cui la particella si trova nella posizione x**. Una misura di posizione per una particella che si trovi nello spazio $|x'\rangle$ fornisce (per definizione) con certezza il valore x'. In altri termini, lo stato $|x'\rangle$ deve essere un **autostato dell'operatore di posizione** corrispondente all'autovalore x'.

$$x\,|x'\rangle = x'\,|x'\rangle\,. \tag{5.1}$$

In questa equazione x' è semplicemente un numero mentre x rappresenta **l'operatore posizione**. Così come uno stato qualsiasi può essere sviluppato in serie di autostati di una grandezza con spettro discreto, allo stesso modo **uno stato può essere sviluppato**, questa volta in integrale, **secondo un sistema completo di autostati di una grandezza con spettro continuo**. Nel caso degli autostati dell'operatore posizione, questo sviluppo ha la forma

$$|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x'\,|x'\rangle\,\langle x'|\alpha\rangle\,. \tag{5.2}$$

Contrariamente al caso di variabili con spettro discreto, il modulo quadro $|\langle x'|\alpha\rangle|^2$ non può essere interpretato come probabilità che una particella nello stato $|\alpha\rangle$ venga a trovarsi nella posizione x'. Infatti, per una variabile continua, tale probabilità è nulla.
Il significato fisico dell'ampiezza $\langle x'|\alpha\rangle$ può essere derivato nel modo seguente.

[1] S1.6,1.7

Utilizzando lo sviluppo (5.2) calcoliamo il valore medio della posizione nello stato $|\alpha\rangle$

$$\langle\alpha|x|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x' \, \langle\alpha|x|x'\rangle \langle x'|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x' \, x' |\langle x'|\alpha\rangle|^2. \tag{5.3}$$

Da questa espressione vediamo che la quantità

$$|\langle x'|\alpha\rangle|^2 \mathrm{d}x' \tag{5.4}$$

rappresenta la probabilità che la particella nello stato $|\alpha\rangle$ si trovi posizionata in un intervallo di larghezza $\mathrm{d}x'$ attorno al punto x'.
Per un intervallo infinitesimo, **la probabilità che una particella nello stato $|\alpha\rangle$ si trovi compresa in un intervallo di larghezza $\mathrm{d}x'$ nell'intorno del punto x' è**:

$$P\left(x' - \frac{\mathrm{d}x'}{2}, x' + \frac{\mathrm{d}x'}{2}\right) = |\langle x'|\alpha\rangle|^2 \, \mathrm{d}x' \,. \tag{5.5}$$

Dall'equazione (5.2) risulta che questa probabilità è correttamente normalizzata La probabilità di registrare la particella in qualche punto compreso tra $-\infty$ e $+\infty$ è data da $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x' \, |\langle x'|\alpha\rangle|^2$. Dall'equazione (5.2) risulta che questa probabilità è correttamente normalizzata all'unità se lo stato $|\alpha\rangle$ è normalizzato:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x' \, |\langle x'|\alpha\rangle|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x' \, \langle\alpha|x'\rangle \langle x'|\alpha\rangle = \langle\alpha|\alpha\rangle = 1. \tag{5.6}$$

Solitamente il prodotto scalare $\langle x'|\alpha\rangle$ prende la denominazione di **funzione d'onda** $\psi_\alpha(x')$ per lo stato $|\alpha\rangle$

$$\langle x'|\alpha\rangle = \psi_\alpha(x') \tag{5.7}$$

L'equazione (5.6) esprime la **condizione di normalizzazione per la funzione d'onda**

$$\int_{\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x' \, |\psi_\alpha(x')|^2 = 1. \tag{5.8}$$

Utilizzando l'equazione (5.2), che definisce la relazione di completezza degli autostati della posizione, **è possibile esprimere una qualunque ampiezza $\langle\beta|\alpha\rangle$ in termini di un integrale di sovrapposizione delle funzioni d'onda per gli stati $|\beta\rangle$ ed $|\alpha\rangle$**:

$$\int_{\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x' \, \langle\beta|x'\rangle \langle x'|\alpha\rangle = \int_{\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x' \, \psi_\beta^*(x')\psi_\alpha(x'). \tag{5.9}$$

Similmente, lo sviluppo di un vettore di stato $|\alpha\rangle$ in autostati di un osservabile con spettro discreto A,

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle \langle a'|\alpha\rangle \equiv \sum_{a'} C_{a'} \, |a'\rangle \,, \tag{5.10}$$

può essere espresso in termini di uno **sviluppo della funzione d'onda ψ_α in "autofunzioni" dell'operatore** A. Moltiplicando la precedente equazione a sinistra per il bra $\langle x'|$ si ottiene infatti:

$$\psi_\alpha(x') = \sum_{a'} C_{a'} u_{a'}(x'), \tag{5.11}$$

dove si sono introdotte le **autofunzioni** dell'operatore A corrispondenti agli autovalori a':

$$u_{a'}(x') = \langle x'|a'\rangle \,. \tag{5.12}$$

5.1 Normalizzazione degli autostati dell'operatore di posizione e funzione Delta di Dirac[2]

Più complessa che nel caso dello spettro discreto è la questione della **normalizzazione degli autostati di osservabili con spettro continuo** ed in particolare, dunque, dell'operatore di posizione. Per dedurre la condizione di normalizzazione moltiplichiamo a sinistra l'equazione (5.2) per un autostato della posizione:

$$\langle x'|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x'' \,\langle x'|x''\rangle \,\langle x''|\alpha\rangle \,. \tag{5.13}$$

Questa equazione deve valere per $\langle x'|\alpha\rangle$ arbitrari e deve quindi essere un'identità. A tale scopo è necessario, anzitutto, che il coefficiente di $\langle x''|\alpha\rangle$, cioè l'ampiezza $\langle x'|x''\rangle$ si annulli per tutti gli $x' \neq x''$. Per $x' = x''$, questa ampiezza deve diventare infinita; viceversa l'integrale in $\mathrm{d}x''$ semplicemente nullo. In tal modo, l'ampiezza $\langle x'|x''\rangle$ è una funzione della differenza $x' - x''$, che si annulla allorché questa differenza è diversa da zero e diventa infinita allorché questa è nulla. Indichiamo questa funzione con $\delta(x' - x'')$

$$\langle x'|x''\rangle = \delta(x' - x''). \tag{5.14}$$

Il modo in cui la funzione $\delta(x' - x'')$ diventa infinita per $x' - x'' = 0$ è determinato dall'equazione (5.13) che possiamo scrivere in forma generale come

$$f(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x - x_0) f(x). \tag{5.15}$$

È ovvio che a questo scopo si deve avere in particolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x - x_0) = 1. \tag{5.16}$$

[2] S1.6,1.7,LL5

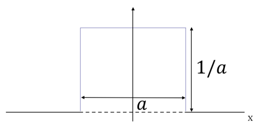
La funzione così definita si chiama **funzione δ di Dirac**. Riepiloghiamo le formule che la definiscono

$$\delta(x) = 0 \quad \text{per } x \neq 0; \tag{5.17}$$

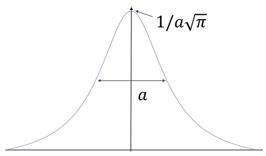
$$\delta(0) = \infty; \tag{5.18}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x) = 1. \tag{5.19}$$

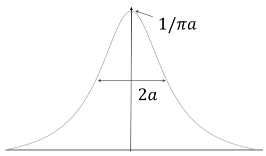
È ovvio che come limiti di integrazione nell'ultima equazione si possono prendere due altri valori qualsiasi tra cui è compreso il punto $x = 0$. Presentiamo qui alcune possibili definizioni della δ di Dirac come limite di funzioni ordinarie

- $\lim\limits_{a\to 0}$ 

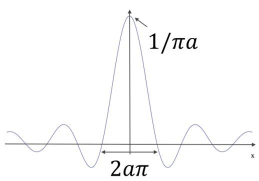
$= \begin{cases} 1/a \text{ per } |x| \leq a/2 \\ 0 \text{ per } |x| > a/2 \end{cases}$

- $\lim\limits_{a\to 0} \dfrac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-x^2/a^2} =$ 

(gaussiana)

- $\lim\limits_{a\to 0} \dfrac{1}{\pi} \dfrac{a^2}{x^2 + a^2} =$ 

(lorentziana)

- $\lim\limits_{a\to 0} \dfrac{\sin(x/a)}{\pi x} =$ 

Dall'ultima definizione segue anche la rappresentazione integrale della δ di Dirac:

$$\delta(x) = \lim_{a\to 0} \frac{\sin x/a}{\pi x} = \lim_{a\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} \mathrm{d}k\, e^{ikx}, \tag{5.20}$$

ossia

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{ikx}. \tag{5.21}$$

5.2 Operatori nella rappresentazione delle coordinate

In precedenza abbiamo discusso come una qualsiasi ampiezza $\langle\beta|\alpha\rangle$ possa esprimersi in termini di un integrale di sovrapposizione delle funzione d'onda ψ_β e ψ_α degli stati $|\beta\rangle$ e $|\alpha\rangle$. Esaminiamo ora come gli **elementi di matrice** $\langle\beta|A|\alpha\rangle$ possano essere scritti usando le funzioni d'onda ψ_β e ψ_α. Si ha evidentemente:

$$\begin{aligned}\langle\beta|A|\alpha\rangle &= \int \mathrm{d}x' \int \mathrm{d}x''\, \langle\beta|x'\rangle\, \langle x'|A|x''\rangle\, \langle x''|\alpha\rangle = \\ &= \int \mathrm{d}x' \int \mathrm{d}x''\, \psi^*_\beta(x')\, \langle x'|A|x''\rangle\, \psi_\alpha(x''). \end{aligned} \tag{5.22}$$

L'ampiezza $\langle\beta|A|\alpha\rangle$ è dunque completamente determinata in termini di un integrale contenente le funzioni d'onda ψ_β e ψ_α e gli elementi di matrice $\langle x'|A|x''\rangle$. Questi sono detti **elementi di matrice dell'operatore A nella rappresentazione delle coordinate e sono, in generale, una funzione delle due variabili x' e x''**. Una notevole semplificazione si ha quando l'osservabile A è una funzione dell'operatore posizione X. Consideriamo per esempio il caso in cui

$$A = x^2. \tag{5.23}$$

Abbiamo allora:

$$\langle x'|x^2|x''\rangle = \langle x'|\left(x''^2\,|x''\rangle\right) = x''^2\delta(x'-x'') = x'^2\delta(x'-x''), \tag{5.24}$$

dove si è usato il fatto che $|x''\rangle$ è un autostato dell'operatore x corrispondente all'autovalore x'' e la condizione di normalizzazione degli autostati di posizione. Sostituendo questo risultato nell'equazione (5.22) l'integrale doppio si riduce ad un integrale semplice in virtù delle proprietà della funzione δ:

$$\begin{aligned}\langle\beta|x^2|\alpha\rangle &= \int \mathrm{d}x' \int \mathrm{d}x''\, \psi^*_\beta(x')x'^2\delta(x'-x'')\psi_\alpha(x'') = \\ &= \int \psi^*_\beta(x')x'^2\psi_\alpha(x'). \end{aligned} \tag{5.25}$$

In generale per un operatore funzione del solo operatore posizione x si ha:

$$\langle\beta|f(x)|\alpha\rangle = \int \mathrm{d}x'\, \psi^*_\beta(x')f(x')\psi_\alpha(x'). \tag{5.26}$$

Si noti che $f(x)$ primo membro di queste equazioni è un operatore, mentre $f(x')$ nel secondo membro non è un operatore.

5.3 Regole di commutazione per gli operatori di posizione [3]

Le proprietà dell'operatore posizione sin qui considerate possono essere facilmente generalizzate al caso di tre dimensioni spaziali. Possiamo indicare con il simbolo $|\vec{\mathbf{x}}'\rangle$ **il vettore di stato di una particella che si trovi nel punto di coordinate** $\vec{\mathbf{x}}' = (x', y', z')$. Una misura di posizione per una particella che si trovi nello stato $|\vec{\mathbf{x}}'\rangle$ fornisce con certezza i valori x', y' e z' per le tre coordinate spaziali rispettivamente. In altri termini il vettore di stato $|\vec{\mathbf{x}}'\rangle$ è autostato simultaneo delle osservabili x, y e z:

$$x\,|\vec{\mathbf{x}}'\rangle = x'\,|\vec{\mathbf{x}}'\rangle\,, \quad y\,|\vec{\mathbf{x}}'\rangle = y'\,|\vec{\mathbf{x}}'\rangle\,, \quad z\,|\vec{\mathbf{x}}'\rangle = z'\,|\vec{\mathbf{x}}'\rangle\,. \tag{5.27}$$

Sappiamo che per poter considerare un autostato simultaneo di x, y, e z dobbiamo assumere che le tre componenti del vettore posizione possano essere misurate simultaneamente con un grado di precisione arbitrario. Dobbiamo perciò avere

$$[x_i, x_j] = 0, \tag{5.28}$$

dove x_1, x_2 ed x_3 stanno per x, y e z rispettivamente.

[3] S1.6