Capitolo 9 Operatore di parità[1]

Risulta spesso utile considerare l'operatore di parità P, definito come l'operatore unitario che effettua una **trasformazione di inversione spaziale**: $\vec{\boldsymbol{x}} \to -\vec{\boldsymbol{x}}$. L'azione dell'operatore di parità può dunque essere definita convenientemente a partire dagli autostati della posizione $\left|\vec{\boldsymbol{x}}'\right\rangle$, sui quali l'operatore agisce nel modo seguente:

$$P\left|\vec{\boldsymbol{x}}'\right\rangle = \left|-\vec{\boldsymbol{x}}'\right\rangle, \qquad PP^{+} = 1. \tag{9.1}$$

Poiché gli autostati della posizione costituiscono un insieme completo di stati di base, l'eq. (9.1) definisce **l'azione dell'operatore di parità su uno stato arbitrario** $|\alpha\rangle$:

$$|\alpha\rangle = \int \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}' \left|\vec{\boldsymbol{x}}'\right\rangle \left\langle \vec{\boldsymbol{x}}' \middle| \alpha \right\rangle, \tag{9.2}$$

$$\begin{aligned} P|\alpha\rangle &= \int \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}' P \left|\vec{\boldsymbol{x}}'\right\rangle \left\langle \vec{\boldsymbol{x}}' \middle| \alpha \right\rangle = \int \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}' \left|-\vec{\boldsymbol{x}}'\right\rangle \left\langle \vec{\boldsymbol{x}}' \middle| \alpha \right\rangle = \\ &= \int \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}' \left|\vec{\boldsymbol{x}}'\right\rangle \left\langle -\vec{\boldsymbol{x}}' \middle| \alpha \right\rangle . \end{aligned} \tag{9.3}$$

Da questa equazione vediamo tra l'altro che se $\psi_\alpha(\vec{\boldsymbol{x}}') = \left\langle \vec{\boldsymbol{x}}' \middle| \alpha \right\rangle$ è la F.d.O dello stato $|\alpha\rangle$, la f.d.o. dello stato trasformato per parità, $|\alpha'\rangle = P|\alpha\rangle$, è:

$$\psi_{\alpha'}(\vec{\boldsymbol{x}}') = \left\langle \vec{\boldsymbol{x}}' \middle| \alpha' \right\rangle = \left\langle \vec{\boldsymbol{x}}' \middle| P \middle| \alpha \right\rangle = \left\langle -\vec{\boldsymbol{x}}' \middle| \alpha \right\rangle = \psi_\alpha(-\vec{\boldsymbol{x}}'), \tag{9.4}$$

o anche più brevemente, nella rappresentazione delle coordinate

$$P\psi_\alpha(\vec{\boldsymbol{x}}') = \psi_\alpha(-\vec{\boldsymbol{x}}'). \tag{9.5}$$

Applicando due volte consecutive l'operatore di parità si deve ottenere la trasformazione identità, giacche una doppia inversione spaziale non può produrre alcun cambiamento. Pertanto

$$P^2 = 1. \tag{9.6}$$

[1] G4; S4.2

Poiché l'operatore di parità è per definizione anche unitario, $P^\dagger P = 1$, da confronto con la precedente equazione segue che

$$P = P^+, \tag{9.7}$$

ossia **l'operatore di parità è un operatore unitario**. Indichiamo con $|\alpha_\lambda\rangle$ un autostato dell'operatore parità corrispondente all'autovalore λ:

$$P\,|\alpha_\lambda\rangle = \lambda\,|\alpha_\lambda\rangle\,. \tag{9.8}$$

Applicando P^2 allo stato $|\alpha_\lambda\rangle$ e considerando l'eq.(9.6) troviamo

$$P^2 = |\alpha_\lambda\rangle = P\lambda\,|\alpha_\lambda\rangle = \lambda^2\,|\alpha_\lambda\rangle = |\alpha_\lambda\rangle\,, \tag{9.9}$$

ossia

$$\lambda^2 = 1. \tag{9.10}$$

Gli autovalori dell'operatore di parità possono dunque valere solo ± 1:

$$P\,|\alpha_\pm\rangle = \pm\,|\alpha_\pm\rangle\,. \tag{9.11}$$

Da questo segue anche per le corrispondenti autofunzioni dell'operatore di parità che

$$\psi_\pm\big(\vec{\boldsymbol{x}}'\big) = \big\langle\vec{\boldsymbol{x}}'\big|\alpha_\pm\big\rangle = \pm\big\langle\vec{\boldsymbol{x}}'\big|P\big|\alpha_\pm\big\rangle = \pm\psi_\pm\big(-\vec{\boldsymbol{x}}'\big), \tag{9.12}$$

ossia **le autofunzioni dell'operatore di parità corrispondenti agli autovalori** ± 1 **sono funzioni rispettivamente pari o dispari**.

Dimostriamo ora che **se una particella è soggetta ad un campo di forze esterne il cui potenziale è una funzione pari delle coordinate, allora l'Hamiltoniano che descrive la particella commuta con l'operatore di parità**:

$$[H,P] = 0 \qquad \text{se } V\big(-\vec{\boldsymbol{x}}'\big) = V\big(\vec{\boldsymbol{x}}'\big). \tag{9.13}$$

Per dimostrarlo utilizziamo la rappresentazione delle coordinate. Data una qualunque funzione $\psi\big(\vec{\boldsymbol{x}}'\big)$ si ha:

$$\begin{aligned} PH\psi\big(\vec{\boldsymbol{x}}'\big) &= P\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + V(x')\right)\psi\big(\vec{\boldsymbol{x}}'\big) = \\ = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + V(-x')\right)\psi\big(-\vec{\boldsymbol{x}}'\big) &\overbrace{=}^{V(-\vec{\boldsymbol{x}}')=V(\vec{\boldsymbol{x}}')} HP\psi\big\{\vec{\boldsymbol{x}}'\big\}, \end{aligned} \tag{9.14}$$

avendo utilizzato per il termine cinetico (con notazione per semplicità unidimensionale)

$$P\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x) = P\psi'(x) = \psi'(-x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}-x}\psi(-x) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P\psi(x), \tag{9.15}$$

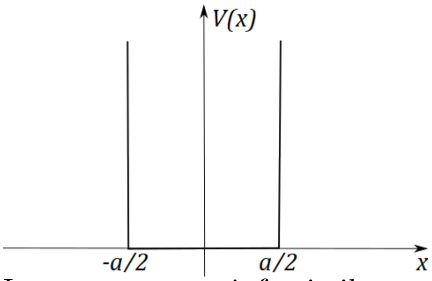
$$\to P\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) = P\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi'(x) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P\psi'(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}P\psi(x). \tag{9.16}$$

Sappiamo anche che se l'operatore di parità commuta con l'Hamiltoniano del sistema, allora P ed H ammettono una base di autostati in comune. Si conclude pertanto che **se il potenziale è una funzione pari delle coordinate, allora gli autostasti dell'Hamiltoniano possono sempre essere scelti come autostati anche dell'operatore di parità, e le corrispondenti autofunzioni risultano essere funzioni pari o dispari delle coordinate**.

$$H\psi_n(\vec{\boldsymbol{x}}) = E_n\psi_n(\vec{\boldsymbol{x}}), \qquad \psi_n(-\vec{\boldsymbol{x}}) = \pm\psi_n(\vec{\boldsymbol{x}}). \tag{9.17}$$

Esempio

Come esempio di quanto discusso consideriamo il caso di una buca di potenziale infinita unidimensionale centrata nell'origine delle coordinate.



$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0, \\ 0 & -a/2 > x > a/2, \\ \infty & \text{fuori.} \end{cases} \tag{9.18}$$

(buca di potenziale infinita)

In questo caso, infatti, il potenziale è una funzione pari delle coordinate e l'operatore hamiltoniano commuta con l'operatore di parità (1-dimensionale)

$$[H, P] = 0 \tag{9.19}$$

Le autofunzioni di questa hamiltoniana si possono ottenere dalle autofunzioni calcolate nel caso della buca di potenziale infinita tra $x = 0$ ed $x = a$ semplicemente traslando di $-a/2$ il valore della coordinata. Pertanto si trova

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}\right)\left(x - \frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{a}}\,\mathrm{Im}(e^{\frac{in\pi x}{a}} e^{-\frac{in\pi}{2}}) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{a}}\left[\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{9.20}$$

Si presentano allora due casi, a seconda che n sia pari o dispari:

$$\begin{cases} \psi_n(x) = (-1)^{n/2}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), & n = 2, 4, 6, \ldots \\ \psi_n(x) = (-1)^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right), & n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases} \tag{9.21}$$

Senza perdere di generalità possiamo omettere in queste espressioni i fattori di fase irrilevanti e scrivere dunque:

$$\begin{cases} \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), & n = 2, 4, 6, \ldots \\ \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right), & n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases} \tag{9.22}$$

Vediamo dunque che **le autofunzioni dell'hamiltoniana** sono funzioni pari o dispari delle coordinate, ossia **risultano simultaneamente autofunzioni dell'operatore di parità**.