

Capitolo 1

Atomo in un campo magnetico

Consideriamo un atomo di idrogeno o idrogenoide in un **campo magnetico omogeneo**. Trascurando i termini quadratici nel campo esterno l'**hamiltoniano** si può scrivere nella forma:

$$H = H_0 + H_{LS} + H_B \quad (1.1)$$

dove

$$H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V_c(r) \quad (1.2)$$

è l'hamiltoniano dell'atomo in assenza di campo esterno e nel limite in cui si trascurano le correzioni di struttura fine,

$$H_{LS} = \frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dV_c}{dr} \vec{L} \cdot \vec{S} \quad (1.3)$$

rappresenta l'**interazione spin-orbita**, e

$$H_B = \frac{e}{2mc} \left(\vec{L} + 2\vec{S} \right) \cdot \vec{B} \quad (1.4)$$

rappresenta l'**accoppiamento tra il momento magnetico dell'atomo e il campo esterno**.

In questa trattazione ometteremo di considerare esplicitamente la correzione relativistica di struttura fine all'energia cinetica dell'elettrone in quanto non gioca alcun ruolo rilevante. Si può pensare di includere questa interazione nella hamiltoniana H_0

1.1 Effetto Zeeman

Supponiamo che il **campo magnetico** sia così **debole** che l'interazione (H_0) tra il momento magnetico dell'atomo ed il campo esterno risulti piccolo rispetto alle distanze fra i livelli energetici dell'atomo nonché rispetto agli

intervalli della struttura fine dei livelli.

In questo caso il termine H_B dell'hamiltoniana si può considerare come una perturbazione e lo spostamento dei livelli ΔE sarà determinato dal valore medio della perturbazione sugli stati imperturbati dell'hamiltoniana $H_0 + H_{LS}$, ossia sugli autostati di J^2 , J_z , L^2 , S^2 :

$$\begin{aligned}\Delta E_B &= \langle \psi_{jm_j l} | H_B | \psi_{jm_j l} \rangle = \\ &= \frac{eB}{2mc} \langle \psi_{jm_j l} | (L_z + 2S_z) | \psi_{jm_j l} \rangle = \\ &= \frac{eB}{2mc} \langle \psi_{jm_j l} | (J_z + S_z) | \psi_{jm_j l} \rangle =\end{aligned}\quad (1.5)$$

dove si è scelto l'asse z orientato nella direzione del campo esterno.

Il valore medio di J_z coincide semplicemente con l'autovalore dato da $J_z = m_j$. Quanto al valore medio di S_z , questo può essere calcolato esplicitamente utilizzando le espressioni

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_{j=l+1/2, m_j=m+1/2} &= \sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}} Y_{lm} \chi_+ + \sqrt{\frac{l-m}{2l+1}} Y_{l, m+1} \chi_- \\ \mathcal{Y}_{j=l-1/2, m_j=m+1/2} &= -\sqrt{\frac{l-m}{2l+1}} Y_{lm} \chi_+ + \sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}} Y_{l, m+1} \chi_-\end{aligned}\quad (1.6)$$

Così per $j = l + 1/2$ si ottiene:

$$\begin{aligned}\langle S_z \rangle_{j=l+1/2, m_j=m+1/2} &= \frac{\hbar}{2} \left(\frac{l+m+1}{2l+1} - \frac{l-m}{2l+1} \right) = \frac{\hbar}{2} \frac{2m+1}{2l+1} = \\ &= \frac{\hbar m_j}{2l+1}\end{aligned}\quad (1.7)$$

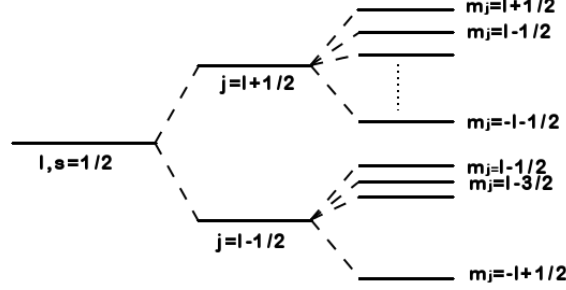
e per $j = l - 1/2$:

$$\begin{aligned}\langle S_z \rangle_{j=l-1/2, m_j=m+1/2} &= \frac{\hbar}{2} \left(\frac{l-m}{2l+1} - \frac{l+m+1}{2l+1} \right) = -\frac{\hbar}{2} \frac{2m+1}{2l+1} = \\ &= -\frac{\hbar m_j}{2l+1}\end{aligned}\quad (1.8)$$

In questo modo, sostituendo i precedenti risultati nell'equazione (1.5) otteniamo, per gli **spostamenti** dei livelli dovuti al campo magnetico la formula

$$\Delta E_B = \mu_B B m_j \left(1 \pm \frac{1}{2l+1} \right), \quad j = l \pm 1/2 \quad (1.9)$$

detta **formula di Landè** ($\mu_B = e\hbar/2mc$ è il magnetone di Bohr). Così **il campo magnetico rimuove completamente la degenerazione dei livelli rispetto alle correzioni del momento angolare totale**, come indicata nello schema sottostante:



La separazione dei livelli indotta dal campo magnetico è nota come **effetto Zeeman**.

Talvolta si parla anche di effetto Zeeman **anomalo**. Questa denominazione impropria è dovuta storicamente al fatto che, ci si aspettava una separazione dei livelli determinata da $\Delta E_B = \mu_B B m$ in luogo della (1.9).

1.2 Effetto Paschen-Back

In **campi magnetici intensi**, in cui $\mu_B B$ è paragonabile agli intervalli della struttura fine o è addirittura più grande, la separazione dei livelli non segue quella prevista dalla formula (1.9). Questo fenomeno è detto **effetto Paschen-Back**.

Il calcolo dell'energia di separazione è assai semplice nel caso in cui la **separazione dei livelli è grande rispetto agli intervalli della struttura fine**, ma sempre piccola, s'intende, rispetto alle distanze dei livelli in assenza di campo esterno.

In queste caso è possibile trascurare, in prima approssimazione, l'accoppiamento spin-orbita e considerare $H_0 + H_B$ come hamiltoniana impterturbata. Questa hamiltoniana commuta con gli operatori L_z ed S_z , proiezioni del momento angolare orbitale e dello spin nella direzione individuata dal campo esterno, che rappresentano pertanto **due buoni numeri quantici**.

Lo spostamento dei livelli allora può essere facilmente calcolato:

$$\begin{aligned} \Delta E_B &= \langle \phi_{lm_l m_s} | H_B | \phi_{lm_l m_s} \rangle = \\ &= \frac{eB}{2mc} \langle \phi_{lm_l m_s} | (L_z + 2S_z) | \phi_{lm_l m_s} \rangle \end{aligned} \quad (1.10)$$

ossia

$$\Delta E_B = \mu_B B (m_l + 2m_s) \quad (1.11)$$

La degenerazione dei livelli che si aveva come l'hamiltoniana H_0 è ora ridotta dal campo magnetico agli stati che hanno lo stesso valore di $(m_l + 2m_s)$.

La struttura fine si sovrappone alla separazione nel campo magnetico. Essa viene determinata dal valore medio dell'operatore H_{LS} rispetto agli stati con m_l ed m_s determinati:

$$\begin{aligned}\Delta E_{LS} &= \langle \phi_{lm_l m_s} | H_{LS} | \phi_{lm_l m_s} \rangle = \\ &= \frac{1}{2mc^2} \left\langle \frac{1}{r} \frac{dV_c}{dr} \right\rangle \langle lm_L m_S | \vec{L} \cdot \vec{S} | lm_L m_S \rangle\end{aligned}\quad (1.12)$$

Utilizzando l'identità:

$$\begin{aligned}\vec{L} \cdot \vec{S} &= L_x S_x + L_y S_y + L_z S_z = \\ &= \frac{1}{4} (L_+ + L_-) (S_+ + S_-) - \frac{1}{4} (L_+ - L_-) (S_+ - S_-) + L_z S_z = \\ &= \frac{1}{2} (L_+ S_- + L_- S_+) + L_z S_z\end{aligned}\quad (1.13)$$

otteniamo

$$\Delta E_{LS} = \frac{\hbar^2}{2mc^2} \left\langle \frac{1}{r} \frac{dV_c}{dr} \right\rangle m_l m_s \quad (1.14)$$