Capitolo 17 Momento angolare orbitale[1]

Abbiamo introdotto il momento angolare definendolo come il generatore delle rotazioni infinitesime. Ma quando il momento di spin è nullo (o comunque può essere ignorato) il momento angolare per una particella coincide con il **momento angolare orbitale**, definito da:

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} \tag{17.1}$$

Per il momento angolare orbitale, le **regole di commutazione** fondamentali,

$$[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk} L_k, \tag{17.2}$$

seguono direttamente dalle regole di commutazione degli operatori di posizione ed impulso. Si ha, ad esempio,

$$\begin{aligned} [L_x, L_y] &= [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z] = \\ &= [yp_z, zp_x] + [zp_y, xp_z] = \\ &= yp_x[p_z, z] + p_y x[z, p_z] = \\ &= -i\hbar(yp_x - xp_y) = i\hbar L_z, \end{aligned} \tag{17.3}$$

e analoghe per le altre componenti.
Possiamo mostrare esplicitamente come l'operatore momento angolare, definito dall'eq. (17.2), coincida, per particelle di spin nullo, con il **generatore delle rotazioni infinitesime**.
Applichiamo infatti l'operatore:

$$\left(1 - \frac{i}{\hbar}\delta\varphi L_z\right) \tag{17.4}$$

su un autostato arbitrario della posizione, e mostriamo come lo stato risultante sia ancora un autostato della posizione ma ruotato, rispetto allo stato di partenza, di un angolo $\delta\varphi$ attorno all'asse z. Questo risultato segue dalla

[1] S3.6, LL26, G11

considerazione che l'impulso è il generatore delle traslazioni infinitesime. Si ha infatti:

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{i}{\hbar}\delta\varphi L_z\right)|x',y',z'\rangle &= \underbrace{\left[1-\frac{i}{\hbar}\delta\varphi\left(x'p_y-y'p_x\right)\right]}_{\substack{(1-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot d\vec{x})\\ d\vec{x}=(-y\delta\varphi,\ x\delta\varphi,\ 0)}}|x',y',z'\rangle = \\ &= |x'-y'\delta\varphi, y'+x'\delta\varphi, z'\rangle, \end{aligned} \tag{17.5}$$

che è quello che volevamo dimostrare.

$$\text{N.B.}\quad R_z(\delta\varphi)=\begin{pmatrix}1 & -\delta\varphi & 0\\ \delta\varphi & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{17.6}$$

Lo stesso risultato può essere convenientemente espresso utilizzando, per definire l'autostato della posizione, un sistema di coordinate polari:

$$\left(1-\frac{i}{\hbar}\delta\varphi L_z\right)|r,\theta,\varphi\rangle = |r,\theta,\varphi+\delta\varphi\rangle. \tag{17.7}$$

Proponiamoci ora di derivare l'**espressione dell'operatore L_z nella rappresentazione delle coordinate**.
Utilizzando sempre un sistema di coordinate polari, e tenendo conto dell'eq. (17.7), troviamo:

$$\begin{aligned}\langle r,\theta,\varphi|\left(1-\frac{i}{\hbar}\delta\varphi L_z\right)|\alpha\rangle &= \langle r,\theta,\varphi|\left(1+\frac{i}{\hbar}\delta\varphi L_z\right)^{+}|\alpha\rangle = \\ &= \langle r,\theta,\varphi-\delta\varphi|\alpha\rangle = \\ &= \langle r,\theta,\varphi|\alpha\rangle - \delta\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\langle r,\theta,\varphi|\alpha\rangle. \end{aligned} \tag{17.8}$$

per l'arbitrarietà dello stato $|\alpha\rangle$, questo risultato implica:

$$\langle r,\theta,\varphi|L_z|\alpha\rangle = -i\hbar\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\langle r,\theta,\varphi|\alpha\rangle, \tag{17.9}$$

ossia nella rappresentazione delle coordinate

$$L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{17.10}$$

Allo stesso stato si può giungere, altrettanto facilmente, utilizzando l'espressione nella rappresentazione delle coordinate dell'operatore impulso. Si ha infatti:

$$L_z = xp_y - yp_x = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right). \tag{17.11}$$

Esprimiamo questo risultato utilizzando un sistema di coordinate polari. Dalle relazioni

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2} \\ \theta = \arctan\left(\sqrt{(x^2+y^2)/z^2}\right) \\ \varphi = \arctan(y/x) \end{cases} \tag{17.12}$$

si derivano, con una semplice algebra, le relazioni[2]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial r}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\partial\theta}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} = \\ \qquad = \sin\theta\cos\varphi\dfrac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\cos\varphi\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} - \dfrac{\sin\varphi}{r\,\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}; \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\partial\theta}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} = \\ \qquad = \sin\theta\sin\varphi\dfrac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\sin\varphi\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \dfrac{\cos\varphi}{r\,\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}; \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial r}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\partial\theta}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} = \\ \qquad = \cos\theta\dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}. \end{cases} \tag{17.13}$$

Dall'espressione (17.11) dell'operatore L_z si ottiene pertanto

$$\begin{aligned} L_z &= -i\hbar\left[r\sin\theta\cos\varphi\left(\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\sin\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \right.\right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos\varphi}{r\,\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) - r\sin\theta\sin\varphi\left(\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \right. \\ &\quad \left.\left. \cos\theta\cos\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{r\,\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right], \end{aligned} \tag{17.14}$$

ossia

$$L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{17.15}$$

in accordo con quanto ricavato precedentemente.
In modo analogo si possono derivare le **espressioni degli operatori nella rappresentazione delle coordinate**. Risulta conveniente, a tale scopo, derivare prima queste espressioni per gli operatori $L_\pm$:

$$\begin{aligned} L_\pm &= L_x \pm iL_y = (yp_z - zp_y) \pm i(zp_x - xp_z) = \\ &= \mp i(x \pm iy)p_z \pm iz(p_x \pm ip_y) = \\ &= \mp\hbar\left[(x \pm iy)\frac{\partial}{\partial z} - z\left(\frac{\partial}{\partial x} \pm i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right], \end{aligned} \tag{17.16}$$

[2] $\partial/\partial x \arctan x = 1/(1+x^2)$

da cui, sostituendo le coordinate polari:

$$\begin{aligned} L_\pm &= \mp\hbar \left[r\sin\theta\; e^{\pm i\varphi}\;\left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \right. \\ &\left. -r\cos\theta\left(\sin\theta\; e^{\pm i\varphi}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} e^{\pm i\varphi}\frac{\partial}{\partial\theta} \pm \frac{ie^{\pm i\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right] = \\ &= \mp\hbar e^{\pm i\varphi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} \mp i\;\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \end{aligned} \tag{17.17}$$

ossia, infine

$$L_\pm = \hbar e^{\pm i\varphi}\left[\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\;\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]. \tag{17.18}$$

Da questo risultato è poi immediato ricavare le espressioni degli operatori L_x ed L_y nella rappresentazione delle coordinate. Ricordando le relazioni:

$$L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-) \qquad L_y = \frac{1}{2i}(L_+ + L_-), \tag{17.19}$$

si ottiene

$$L_x = i\hbar\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \tag{17.20}$$

$$L_y = i\hbar\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right). \tag{17.21}$$

Risulta infine utile determinare l'**espressione, nella rappresentazione delle coordinate, del quadrato del momento angolare orbitale**. È conveniente partire dalla relazione (refeq:cap16$_7$) che si scrive, nel caso del momento angolare orbitale,

$$L_-L_+ = L^2 - L_z^2 - \hbar L_z. \tag{17.22}$$

Ricavando L^2 da questa relazione e sostituendovi le espressioni (17.10) e (17.18) per L_z ed $L_\pm$, otteniamo:

$$\begin{aligned}
L^2 &= L_-L_+L_z^2 + \hbar L_z = \\
&= \hbar^2 \left[e^{-i\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\varphi} \right) e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\varphi} \right) - \right. \\
&\qquad \left. -\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - i\frac{\partial}{\partial\varphi} \right] = \\
&= \hbar^2 \left[\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta + i\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\varphi} \right) \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\varphi} \right) - \right. \\
&\qquad \left. -\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - i\frac{\partial}{\partial\varphi} \right] = \\
&= \hbar^2 \left[-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - i\left(\frac{\partial\cot\theta}{\partial\theta} \right)\frac{\partial}{\partial\varphi} - i\cot\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\varphi} - \cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} - \right. \\
&\qquad \left. -i\cot^2\theta\frac{\partial}{\partial\varphi} + i\cot\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\varphi} - \cot^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - i\frac{\partial}{\partial\varphi} \right] = \\
&= \hbar^2 \left[-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \left(1+\cot^2\theta\right)\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \right. \\
&\qquad \left. -i\left(1 + \cot^2\theta + \frac{\partial\cot\theta}{\partial\theta} \right)\frac{\partial}{\partial\varphi} \right]. \qquad (17.23)
\end{aligned}$$

Considerando le relazioni

$$1 + \cot^2\theta = 1 + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}, \qquad (17.24)$$

$$\frac{\partial\cot\theta}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \right) = \frac{-\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin^2\theta} = -\frac{1}{\sin^2\theta}, \qquad (17.25)$$

possiamo scrivere

$$L^2 = \hbar^2 \left[-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right], \qquad (17.26)$$

o, equivalentemente:

$$L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} \right) \right]. \qquad (17.27)$$

Osserviamo che, a meno di un fattore, L^2 è la parte angolare dell'operatore di Laplace.

17.1 Autovalori del momento angolare orbitale e armoniche sferiche[3]

Consideriamo gli autostati simultanei degli operatori L^2 ed L_z, definiti dalle equazioni:

$$L^2|l,m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|l,m\rangle, \tag{17.28}$$
$$L_z|l,m\rangle = \hbar m|l,m\rangle. \tag{17.29}$$

Seguendo una pratica usuale abbiamo qui indicato con l il numero quantico j riferito al momento angolare orbitale. La componente z del momento angolare può quindi assumere i valori definiti da

$$m = -l, -l+1, \ldots, l-1, l. \tag{17.30}$$

L'assegnazione dei valori l ed m non definisce completamente lo stato della particella. Ciò è evidente già dal fatto che le espressioni degli operatori L^2 e L_z, in coordinate sferiche, contengono solamente gli angoli θ e φ, così che le loro autofunzioni possono contenere un fattore arbitrario dipendente da r-
In questo contesto ci limitiamo allora solo a considerare la parte dipendente dagli angoli θ e φ degli autostati di posizione; in altri termini, indicheremo con $|\theta,\varphi\rangle$ il vettore di stato di una particella che si trova in un punto dello spazio individuato dagli angoli θ e φ, ma a distanza r arbitraria dall'origine delle coordinate.
Moltiplichiamo scalarmente entrambi i membri delle equazioni (17.28) e (17.29) per il bra $\langle\theta,\varphi|$:

$$\langle\theta,\varphi|L^2|l,m\rangle = \hbar^2 l(l+1)\langle\theta,\varphi|l,m\rangle, \tag{17.31}$$
$$\langle\theta,\varphi|L_z|l,m\rangle = \hbar m\langle\theta,\varphi|l,m\rangle. \tag{17.32}$$

Le funzioni

$$Y_{l,m}(\theta,\varphi) = \langle\theta,\varphi|l,m\rangle \tag{17.33}$$

sono dunque le **autofunzioni simultanee degli operatori L^2 ed L_z** e sono note con il nome di **armoniche sferiche**. Fisicamente, queste funzioni rappresentano l'**ampiezza di probabilità che un sistema, caratterizzato dai valori l ed m dei numeri quantici del momento angolare, si trovi in una posizione la cui direzione è definita dal valori θ e φ degli angoli delle coordinate polari**.
Le espressioni derivate in precedenza per gli operatori del momento angolare nella rappresentazione delle coordinate, ci consentono di scrivere esplicitamente

[3] S3.6, LL27-28, G11

le **equazioni agli autovalori che definiscono le armoniche sferiche**:

$$\begin{aligned} L^2 Y_{l,m}(\theta,\varphi) &= -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right] Y_{l,m}(\theta,\varphi) = \\ &= \hbar^2 l(l+1) Y_{l,m}(\theta,\varphi), \end{aligned} \tag{17.34}$$

$$L_z Y_{l,m}(\theta,\varphi) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} Y_{l,m}(\theta,\varphi) = \hbar m Y_{l,m}(\theta,\varphi). \tag{17.35}$$

Dalla condizione di normalizzazione degli autostati $|l,m\rangle$ e dalla completezza degli autostati $|\theta,\varphi\rangle$ della posizione, segue la condizione di normalizzazione delle armoniche sferiche:

$$\langle l',m'|l,m\rangle = \int d\Omega\ \langle l',m'|\theta,\varphi\rangle\langle\theta,\varphi|l,m\rangle = \delta_{ll'}\delta_{mm'}, \tag{17.36}$$

ossia

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\ Y^*_{l',m'}(\theta,\varphi) Y_{l,m}(\theta,\varphi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{17.37}$$

Le equazioni differenziali (17.34) e (17.35), che definiscono le armoniche sferiche, ammettono una soluzione per separazione delle variabili θ e φ), della forma:

$$Y_{l,m}(\theta,\varphi) = \Theta_{l,m}(\theta)\Phi_m(\varphi), \tag{17.38}$$

$\Theta_{l,m}(\theta)$ e $\Phi_m(\varphi)$ sono separatamente normalizzate:

$$\begin{gathered} \int d\varphi\ |\Phi_m(\varphi)|^2 = 1, \\ \int d\varphi\ |\Theta_{l,m}(\theta)|^2 = 1. \end{gathered} \tag{17.39}$$

L'eq. (17.35) indica che le funzioni Φ_m sono in particolare le autofunzioni della componente z del momento angolare, mentre le funzioni $\Theta_{l,m}$ non sono di per sé autofunzioni di qualche operatore del momento angolare.
L'eq. (17.35), che possiamo scrivere nella forma:

$$-i\frac{\partial}{\partial\varphi}\Phi_m(\varphi) = m\Phi_m(\varphi), \tag{17.40}$$

ha come soluzioni normalizzate le funzioni:

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}. \tag{17.41}$$

La condizione che la funzione d'onda sia monotona (ossia ad un solo valore) implica in particolare

$$\Phi_m(0) = \Phi_m(2\pi), \tag{17.42}$$

e dunque **l'autovalore m può assumere solo valori interi** (positivi o negativi):

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{17.43}$$

ne segue che anche **il numero l può assumere solo valori interi** (positivi, incluso lo zero):

$$l = 0, 1, 2, \dots \tag{17.44}$$

Sottolineiamo come le regole di commutazione del momento angolare implichino soltanto la condizione che j (o l) e, dunque, m siano numeri intero o semi-interi. La condizione che l ed m siano invece numeri interi è una condizione aggiunta valida specificatamente per il momento angolare orbitale e che non si applica pertanto al momento angolare di spin.

La determinazione delle funzioni $\Theta_{lm}(\theta)$ può essere effettuata risolvendo l'equazione agli autovalori per l'operatore L^2 e sostituendo per $\Phi_m(\varphi)$ la sua espressione (17.42). Risulta tuttavia conveniente seguire un'altra strada[4]. Consideriamo in primo luogo l'autostato corrispondente ad $m = l$. Questo soddisfa l'equazione

$$L_+|l, l\rangle = 0, \tag{17.45}$$

la cui espressione, nella rappresentazione delle coordinate si ottiene moltiplicando l'equazione per il bra $|\theta, \varphi\rangle$ ed utilizzando per l'operatore L_+ la sua rappresentazione(17.18). Si ottiene in tal modo:

$$L_+ Y_{ll}(\theta, \varphi) = \hbar e^{i\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot\theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] Y_{ll}(\theta, \varphi) = 0. \tag{17.46}$$

Sostituendo nella precedente equazione

$$Y_{ll}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{il\varphi}\ \Theta_{ll}(\theta), \tag{17.47}$$

Otteniamo per $\Theta_{ll}(\theta)$ l'equazione

$$\frac{d\Theta_{ll}}{d\theta} - l \cot\theta\ \Theta_{ll}(\theta) = 0, \tag{17.48}$$

la cui soluzione si ricava facilmente

$$\begin{aligned} &\frac{d\Theta_{ll}}{d\theta} = l \cot\theta\ \Theta_{ll}(\theta) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln \Theta_{ll} = l \int d\theta\ \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \text{cost} = l \int \frac{d \sin\theta}{\sin\theta} + \text{cost} \\ &\qquad = l \log \sin\theta + \text{cost}, \end{aligned} \tag{17.49}$$

[4]Il procedimento qui esposto è il cosiddetto metodo matriciale, analogo a quello discusso per le autofunzioni dell'oscillatore atmonico.

ossia

$$\Theta_{ll}(\theta) = c_l \sin^l \theta. \tag{17.50}$$

la costante c_l si ricava (a meno di una fase arbitraria) dalla condizione di normalizzazione:

$$\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\ |\Theta_{ll}(\theta)|^2 = |c_l|^2 \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\ (\sin\theta)^{2l} = 1. \tag{17.51}$$

Per determinare il valore dell'integrale effettuiamo in primo luogo un'integrazione per parti:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\ (\sin\theta)^{2l} &= \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\ (\sin\theta)^{2l} = \\
&= -\cos\theta(\sin\theta)^{2l}\Big|_0^{\pi} + 2l \int_0^{\pi} d\theta \cos^2\theta\ (\sin\theta)^{2l-1} = \\
&= 2l \int_0^{\pi} d\theta\ (\sin\theta)^{2l-1} - 2l \int_0^{\pi} d\theta\ (\sin\theta)^{2l+1}.
\end{aligned} \tag{17.52}$$

Vediamo allora che

$$\int_0^{\pi} d\theta\ (\sin\theta)^{2l+1} = \frac{2l}{2l+1} \int_0^{\pi} d\theta\ (\sin\theta)^{2l-1}. \tag{17.53}$$

Applicando ricorsivamente questa formula otteniamo:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} d\theta\ (\sin\theta)^{2l+1} &= \frac{2l(2l-2)}{(2l+1)(2l-1)} \int_0^{\pi} d\theta\ (\sin\theta)^{2l-3} = \\
&= \frac{2l(2l-2)\dots 2}{(2l+1)(2l-1)\dots 3} \int_0^{\pi} d\theta\ \sin\theta = \\
&= \frac{[2l(2l-2)\dots 2]^2}{(2l+1)(2l-1)\dots 2\cdot 1} \cdot 2 \\
&= \frac{[2^l\ l(l-1)(l-2)\dots 1]^2}{(2l+1)!} \cdot 2 \\
&= \frac{2[2^l\ l!]^2}{(2l+1)!}.
\end{aligned} \tag{17.54}$$

L'inverso di questo integrale è pari a $|c_l|^2$. La fase di c_l è scelta per convenzione uguale a $(-1)^l$, così che in definitiva si ottiene

$$\Theta_{ll}(\theta) = (-1)^l \sqrt{\frac{(2l+1)!}{2}} \frac{1}{2^l\ l!} \sin^l \theta, \tag{17.55}$$

e per l'autofunzione completa l'espressione

$$Y_{ll}(\theta, \varphi) = (-1)^l \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}} \frac{1}{2^l\ l!} e^{il\varphi} \sin^l \theta. \tag{17.56}$$

Le autofunzioni $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ con $m < l$ possono essere determinate mediante successive applicazione dell'operatore a scala L_-. Dalla relazione

$$\begin{aligned} L_-|l, m+1\rangle &= \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}|l, m\rangle = \\ &= \hbar\sqrt{(l-m)(l+m+1)}|l, m\rangle, \end{aligned} \tag{17.57}$$

vediamo che

$$(L_-)^2|l, m+2\rangle = \hbar^2\sqrt{(l-m)(l-m-1)(l+m+1)(l+m+2)}|l, m\rangle, \tag{17.58}$$

e dunque

$$(L_-)^{l-m}|l, l\rangle = \hbar^{l-m}\sqrt{\frac{(l-m)!(2l)!}{(l+m)!}}|l, m\rangle. \tag{17.59}$$

Moltiplicando scalarmente questa relazione per il bra $\langle\theta, \varphi|$ otteniamo per le autofunzioni del momento angolare

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{(L_-)^{l-m}}{(\hbar)^{l-m}}\sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!(2l)!}}Y_{ll}(\theta, \varphi). \tag{17.60}$$

Questa formula, insieme all'espressione (17.18) dell'operatore L_- nella rappresentazione delle coordinate, risolve completamente il problema posto.
È anche possibile derivare una formula esplicita per l'applicazione successiva dell'operatore L_-. Secondo questa formula:

$$\frac{1}{(\hbar)^{l-m}}(L_-)^{l-m}\left(e^{il\varphi}f(\theta)\right) = \frac{e^{im\varphi}}{(\sin\theta)^m}\frac{d^{l-m}}{(d\cos\theta)^{l-m}}\left(\sin^l\theta\ f(\theta)\right). \tag{17.61}$$

Utilizzando questo risultato si ottiene allora:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{(-1)^l}{2^l\ l!}\sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}\frac{e^{im\varphi}}{(\sin\theta)^m}\frac{d^{l-m}}{(d\cos\theta)^{l-m}}(\sin\theta)^{2l}. \tag{17.62}$$

la dipendenza dall'angolo θ delle funzioni armoniche sferiche è rappresentata da una classe speciale di polinomi in $\cos\theta$, detti **polinomi associati di Legendre**, indicati solitamente con il simbolo $P_l^m(\cos\theta)$. In particolare, per i valori di m positivi si ha

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}\ P_l^m(\cos\theta)\ e^{im\varphi} \qquad m > 0. \tag{17.63}$$

Le armoniche sferiche con valori negativi di m si possono poi scrivere, in termini delle armoniche sferiche con m positivo, nella forma

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^{|m|}\left(Y_{l|m|}(\theta, \varphi)\right)^* \qquad m < 0. \tag{17.64}$$

Armoniche Sferiche e Polinomi di Legendre

Armoniche Sferiche

- SphericalHarmonicY[l, m, θ, ϕ] gives the spherical harmonic $Y_l^m(\theta, \phi)$.

- The spherical harmonics are orthogonal with respect to integration over the surface of the unit sphere.
- For $l \geq 0$, $Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{(2l+1)/(4\pi)}\ \sqrt{(l-m)!/(l+m)!}\ P_l^m(\cos(\theta))\ e^{i m \phi}$ where P_l^m is the associated Legendre function.
- For $l \leq -1$, $Y_l^m(\theta, \phi) = Y_{-(l+1)}^m(\theta, \phi)$.

l = 0

```
Print["Y[0,0] = ", SphericalHarmonicY[0,0,θ,ϕ]]
```

$$Y[0,0] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

l = 1

```
Do[Print["Y[1,",m,"] = ", SphericalHarmonicY[1,m,θ,ϕ]], {m,1,-1,-1}]
```

$$Y[1,1] = \frac{-1}{2} E^{I\phi} \sqrt{\frac{3}{2\pi}}\ Sin[\theta]$$

$$Y[1,0] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}}\ Cos[\theta]$$

$$Y[1,-1] = \frac{1}{2} E^{-I\phi} \sqrt{\frac{3}{2\pi}}\ Sin[\theta]$$

l = 2

```
Do[Print["Y[2,",m,"] = ", SphericalHarmonicY[2,m,θ,ϕ]], {m,2,-2,-1}]
```

$$Y[2,2] = \frac{1}{4} E^{2I\phi} \sqrt{\frac{15}{2\pi}}\ Sin[\theta]^2$$

$$Y[2,1] = \frac{-1}{2} E^{I\phi} \sqrt{\frac{15}{2\pi}}\ Cos[\theta]\ Sin[\theta]$$

$$Y[2,0] = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}}\ (-1 + 3\ Cos[\theta]^2)$$

$$Y[2,-1] = \frac{1}{2} E^{-I\phi} \sqrt{\frac{15}{2\pi}}\ Cos[\theta]\ Sin[\theta]$$

$$Y[2,-2] = \frac{1}{4} E^{-2I\phi} \sqrt{\frac{15}{2\pi}}\ Sin[\theta]^2$$

■ Polinomi associati di Legendre

- `LegendreP[n, x]` gives the Legendre polynomial $P_n(x)$.
- `LegendreP[n, m, x]` gives the associated Legendre polynomial $P_n^m(x)$.

- The Legendre polynomials satisfy the differential equation
  $(1-x^2)\,(d^2 y/d x^2) - 2x(dy/dx) + n(n+1)\,y = 0$.
- The Legendre polynomials are orthogonal with unit weight function .
- The associated Legendre polynomials are defined by

$$P_n^m(x) = (-1)^m\,(1-x^2)^{m/2}\,(d^m/d x^m)\,P_n(x)$$

■ l = 0

```
Print["P[0,0] = ", LegendreP[0,0,x]]
```

P[0,0] = 1

■ l = 1

```
Do[Print["P[1,",m,"] = ", LegendreP[1,m,x]], {m,1,0,-1}]
```

P[1,1] = $-\sqrt{1-x^2}$

P[1,0] = x

■ l = 2

```
Do[Print["P[2,",m,"] = ", LegendreP[2,m,x]], {m,2,0,-1}]
```

P[2,2] = $-3\,(-1+x^2)$

P[2,1] = $-3\,x\sqrt{1-x^2}$

P[2,0] = $\frac{-1}{2} + \frac{3\,x^2}{2}$