Capitolo 16 Momento angolare

16.1 Rotazioni, momento angolare e regole di commutazione per gli operatori momento angolare[1]

Nella meccanica quantistica, così come nella meccanica classica, **il momento angolare è il generatore delle rotazioni infinitesime**.
Se indichiamo con $D_{\widehat{n}}(d\varphi)$ l'operatore unitario che induce una rotazione di un angolo infinitesimo $d\varphi$ attorno all'asse caratterizzato dal vettore $\widehat{n}$ abbiamo allora

$$D_{\widehat{n}}(d\varphi) = 1 - \frac{i}{\hbar}\vec{J} \cdot \widehat{n}\ d\varphi, \tag{16.1}$$

dove $\vec{J}$ è **l'operatore momento angolare**. Questa equazione può essere considerata la **definizione** nella meccanica quantistica dell'operatore momento angolare.
Una rotazione finita si può ottenere associando successivamente rotazioni infinitesime attorno allo stesso asse. Così ade esempio, per una rotazione finita di un angolo ϕ attorno all'asse z, otteniamo

$$\begin{aligned} D_z(\phi) &= \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{i}{\hbar}J_z\frac{\phi}{N}\right)^N = \\ &= \lim_{N\to\infty} e^{N\log\left(1-\frac{i}{\hbar}J_z\frac{\phi}{N}\right)} = \lim_{N\to\infty} e^{N\left(-\frac{i}{\hbar}J_z\ \frac{\phi}{N}\right)}, \end{aligned} \tag{16.2}$$

ossia

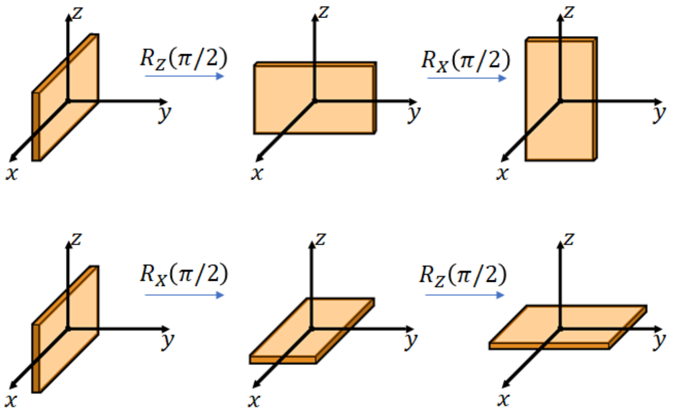
$$D_z(\phi) = e^{-\frac{i}{\hbar}J_z\phi}. \tag{16.3}$$

L'avere assunto che il momento angolare è il generatore delle rotazioni spaziali implica che, per un sistema invariante rispetto a rotazioni attorno a un determinato asse, si conserva la componete del momento angolare lungo quell'asse.
In particolare poi, le proprietà di isotropia dello spazio (ossia l'equivalenza di tutte le direzioni nello spazio) implica che l'hamiltoniano di un sistema isolato deve essere invariante rispetto a rotazioni di un angolo arbitrario attorno a

[1] S3.1; LL26

un asse qualsiasi. **La legge di conservazione del momento angolare di un sistema isolato è dunque conseguenza della proprietà di isotropia dello spazio**.

È una proprietà ben nota delle rotazioni il fatto che **rotazioni attorno ad uno stesso asse commutano, mentre rotazioni attorno ad assi diversi non commutano**. Così ad esempio una rotazione di $\pi/2$ attorno all'asse z seguita da una rotazione di $\pi/2$ attorno all'asse x produce un risultato diverso di quello ottenuto con una rotazione di $\pi/2$ attorno all'asse x seguita da una rotazione di $\pi/2$ attorno all'asse z:



In termini dell'azione degli operatori di rotazione du un generico vettore di stato $|\alpha\rangle$ questo implica

$$D_x(\pi/2)D_z(\pi/2)|\alpha\rangle \neq D_z(\pi/2)D_x(\pi/2)|\alpha\rangle, \tag{16.4}$$

o, equivalentemente, per l'arbitrarietà dello stato $|\alpha\rangle$,

$$[D_x(\pi/2); D_z(\pi/2)] \neq 0. \tag{16.5}$$

Per stabilire quantitativamente le regole di commutazione degli operatori di rotazione attorno ad assi diversi, dobbiamo considerare con maggior dettaglio le proprietà di commutazione delle rotazioni.
A tale scopo ricordiamo che a ciascuna rotazione, diciamo di un angolo φ attorno ad un asse definito dal versore $\widehat{n}$, può essere associata una **matrice ortogonale** $R_{\widehat{n}}(\varphi)$. Il significato di questa matrice è che un vettore $\vec{v}$ di componenti $(v_x, v_y v_z)$ (che può rappresentare ad esempio la posizione di una particella nello spazio), viene trasformato, a seguito della rotazione nel vettore $\vec{v'}$ legato a $\vec{v}$ dalla relazione

$$\vec{v'} = R_{\widehat{n}}(\varphi)\vec{v}. \tag{16.6}$$

L'ortogonalità della matrice R segue dal fatto che le rotazioni lasciano invariati i moduli dei vettori:

$$\vec{v'} \cdot \vec{v} = \vec{v} R^T R \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{v} \qquad \Rightarrow \qquad R^T R = 1. \tag{16.7}$$

È semplice derivare l'espressione della matrice di rotazione associata ad esempio ad una rotazione di un angolo $d\varphi$ attorno all'asse z. Esprimendo le componenti del vettore $\vec{v}$ in coordinate polari,

$$\begin{cases} v_x = v \sin\theta \cos\varphi, \\ v_y = v \sin\theta \sin\varphi, \\ v_z = v \cos\theta, \end{cases} \tag{16.8}$$

si ha che il vettore $\vec{v}$ si trasforma, per effetto della rotazione, nel vettore $\vec{v'}$ di componenti:

$$\begin{cases} v'_x = v \sin\theta \cos(\varphi + d\varphi) = v_x \cos d\varphi - v_y \sin d\varphi, \\ v'_y = v \sin\theta \sin(\varphi + d\varphi) = v_x \sin d\varphi + v_y \cos d\varphi, \\ v'_z = v \cos\theta = v_z. \end{cases} \tag{16.9}$$

La matrice $R_z(d\varphi)$ ha dunque la forma

$$R_z(d\varphi) = \begin{pmatrix} \cos d\varphi & -\sin d\varphi & 0 \\ \sin d\varphi & \cos d\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{16.10}$$

Per studiare le proprietà di commutazione delle rotazioni è conveniente considerare rotazioni infinitesime. Ponendo $\varepsilon = d\varphi$ e sviluppando la precedente matrice fino al secondo ordine in ε troviamo:

$$R_z(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon^2/2 & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 - \varepsilon^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^3). \tag{16.11}$$

Le corrispondenti matrici si rotazione attorno agli assi x e y si possono ottenere con permutazioni cicliche di x, y e z:

$$x \to y, \ y \to z, \ z \to x, \tag{16.12}$$

si ottiene in tal modo:

$$R_x(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \varepsilon^2/2 & -\varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 1 - \varepsilon^2/2 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^3), \tag{16.13}$$

$$R_y(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon^2/2 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 1-\varepsilon^2/2 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^3). \tag{16.14}$$

Consideriamo ora una rotazione di angolo ε attorno all'asse y seguita da una rotazione di angolo ε attorno all'asse x. La corrispondente matrice di rotazione è:

$$R_x(\varepsilon)R_y(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon^2/2 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & 1-\varepsilon^2/2 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & 1-\varepsilon^2 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^3) \tag{16.15}$$

Se consideriamo invece rotazione di angolo ε attorno all'asse x seguita da una rotazione di angolo ε attorno all'asse y otteniamo la matrice di rotazione

$$R_y(\varepsilon)R_x(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon^2/2 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 0 & 1-\varepsilon^2/2 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & 1-\varepsilon^2 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^3) \tag{16.16}$$

NB $\Big[(R_yR_x)^T = R_x^T R_y^T = R_xR_y + (\varepsilon \to -\varepsilon)\Big]$.
Dal confronto di questi risultati vediamo che

$$R_x(\varepsilon)R_y(\varepsilon) - R_y(\varepsilon)R_x(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon^2 & 0 \\ \varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_z(\varepsilon^2) - 1 + O(\varepsilon^3), \tag{16.17}$$

che definisce la proprietà di commutazione di due rotazioni successive infinitesime attorno agli assi x ed y.
La stessa proprietà deve essere soddisfatta dagli operatori che inducono le corrispondenti rotazioni dei vettori di stato in meccanica quantistica, ossia:

$$D_x(\varepsilon)D_y(\varepsilon) - D_y(\varepsilon)D_x(\varepsilon) = D_z(\varepsilon^2) - 1 + O(\varepsilon^3). \tag{16.18}$$

In termini degli operatori momento angolare, questa relazione implica:

$$\begin{aligned}
&D_x(\varepsilon)D_y(\varepsilon) - D_y(\varepsilon)D_x(\varepsilon) = \\
&= \left(1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar}J_x - \frac{\varepsilon^2}{2\hbar^2}J_x^2\right)\left(1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar}J_y - \frac{\varepsilon^2}{2\hbar^2}J_y^2\right) - (x \leftrightarrow y) = \\
&= \left(1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar}J_x - \frac{i\varepsilon}{\hbar}J_y - \frac{\varepsilon^2}{2\hbar^2}J_x - \frac{\varepsilon^2}{2\hbar^2}J_y - \frac{\varepsilon^2}{\hbar^2}J_xJ_y\right) - (x \leftrightarrow y) = \\
&= -\frac{\varepsilon^2}{\hbar^2}\left(J_xJ_y - J_yJ_x\right) = \\
&= D_z(\varepsilon^2) - = \left(1 - \frac{i\varepsilon^2}{\hbar}J_z - \right) = -\frac{i\varepsilon^2}{\hbar}J_z,
\end{aligned} \tag{16.19}$$

ossia

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z. \tag{16.20}$$

Utilizzando le permutazioni cicliche di x, y e z possiamo derivare le regole di commutazione per le altre componenti del momento angolare:

$$[J_y, J_z] = i\hbar J_x, \tag{16.21}$$

$$[J_z, J_x] = i\hbar J_y, \tag{16.22}$$

o in forma compatta per due componenti arbitrarie

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ikj} J_k. \tag{16.23}$$

Queste equazioni sono note come le **relazioni fondamentali di commutazione del momento angolare**.
Sottolineiamo come **queste relazioni di commutazione seguono solamente dall'assunzione che J_k è il generatore della rotazione attorno all'asse k-esimo e dalla proprietà di non commutatività delle rotazioni**. **Le relazioni di commutazione (16.23) implicano che, in generale, le tre componenti del momento angolare non possono avere simultaneamente valori determinati**. A questo proposito il momento angolare differisce essenzialmente dall'impulso, le cui tre componenti sono misurabili simultaneamente. Con gli operatori J_x, J_y e J_z formiamo l'**operatore** del **quadrato del momento angolare**:

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2. \tag{16.24}$$

Questo operatore commuta con ciascuno degli operatori J_x, J_y e J_z:

$$[J^2, J_k] = 0. \quad (k = 1, 2, 3) \tag{16.25}$$

Infatti, considerando ad esempio il caso $k = 3$ ed utilizzando le relazioni di commutazione (16.23) otteniamo:

$$\begin{aligned} [J^2, J_z] &= [J_x^2 + J_y^2 + J_z^2, J_z] = [J_x^2, J_z] + [J_y^2, J_z] = \\ &= J_x[J_x, J_z] + [J_x, J_z]J_x + J_y[J_y, J_z] + [J_y, J_z]J_y = \\ &= J_x(-i\hbar J_y) + (-i\hbar J_y)J_x + J_y(i\hbar J_x) + (i\hbar J_x)J_y = \\ &= 0. \end{aligned} \tag{16.26}$$

(N.B.: abbiamo usato la proprietà generale dei commutatori
$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$).
Dal punto di vista fisico, le relazioni (16.25) significano che **il quadrato del momento angolare (cioè il suo valore assoluto) può avere valori determinati contemporaneamente con una delle sue componenti**.

16.2 Autovalori ed elementi di matrice degli operatori di momento angolare[2]

Consideriamo il problema di determinare gli autovalori e gli autovettori simultanei del quadrato del momento angolare J^2 e di una sua componente lungo un determinato asse, diciamo J_z. Indichiamo rispettivamente con a e b questi autovalori.
Cerchiamo cioè le soluzioni delle equazioni

$$J^2|a,b\rangle = a|a,b\rangle, \tag{16.27}$$

$$J_z|a,b\rangle = b|a,b\rangle. \tag{16.28}$$

A tale scopo risulta conveniente, in luogo degli operatori J_x e J_y, introdurre le loro combinazioni complesse

$$J_\pm = J_x \pm iJ_y. \tag{16.29}$$

Utilizzando le relazioni di commutazione (16.23) per le componenti del momento angolare possiamo calcolare

$$\begin{aligned} [J_z, J_\pm] &= [J_z, J_x \pm iJ_y] = [J_z, J_x] \pm i[J_z, J_y] = \\ &= i\hbar J_y \pm i(-i\hbar J_x) = \pm\hbar(J_x \pm iJ_y) = \pm\hbar J_\pm. \end{aligned} \tag{16.30}$$

Dunque

$$[J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm. \tag{16.31}$$

Dalle relazioni di commutazione (16.25) segue anche immediatamente

$$[J^2, J_\pm] = 0. \tag{16.32}$$

Per determinare il significato fisico degli operatori $J_\pm$ esaminiamo l'azione di J_z sugli stati $J_\pm|a,b\rangle$:

$$\begin{aligned} J_z J_\pm|a,b\rangle &= \left([J_z, J_\pm] + J_\pm J_z\right)|a,b\rangle = \\ &= (b \pm \hbar)J_\pm|a,b\rangle, \end{aligned} \tag{16.33}$$

dove abbiamo fatto uso delle relazioni (16.31). Ciò prova che **gli stati $J_\pm|a,b\rangle$ sono ancora (a meno di una costante di normalizzazione) autostati dell'operatore J_z corrispondenti agli autovalori $b\pm\hbar$**. Per questa ragione gli operatori $J_\pm$ sono anche noti con il nome di **operatori "a scala"**.
Applichiamo ora agli stati $J_\pm|a,b\rangle$ l'operatore J^2. Utilizzando le regole di commutazione (16.32) troviamo:

$$J^2 J_\pm|a,b\rangle = \left([J^2, J_\pm] + J_\pm J^2\right)|a,b\rangle = aJ_\pm|a,b\rangle. \tag{16.34}$$

[2]S3.5, LL27

In altri termini, gli stati $J_\pm|a,b\rangle$ sono ancora autostati dell'operatore J^2 corrispondenti allo stesso autovalore a.
In conclusione possiamo scrivere:

$$J_\pm|a,b\rangle = c_\pm|a,b\pm\hbar\rangle, \tag{16.35}$$

. dove le costanti $c_\pm$ sono determinate imponendo la corretta normalizzazione dei vettori di stato.
Supponiamo ora di applicare più volte, in successione, l'operatore J_+ ad un autostato $|a,b\rangle$. Ad ogni applicazione l'autovalore di J_z aumenta di $\hbar$, mentre l'autovalore di J^2 è invariato. Questo processo, tuttavia, non può continuare in modo indefinito giacché, per un fissato valore a di J^2, deve esistere un valore massimo, b_{MAX} per J_z. Questo segue dal fatto che la differenza $J^2 - J_z^2 = J_x^2 + J_y^2$ è l'operatore di una grandezza fisica essenzialmente positiva e i suoi autovalori non possono essere negativi:

$$\begin{aligned}&\langle a,b|J^2 - J_z^2|a,b\rangle = (a-b^2) =\\ &= \langle a,b|J_x^2 + J_y^2|a,b\rangle =\\ &= \left(\langle a,b|J_x^+\right)\left(J_x|a,b\rangle\right) + \left(\langle a,b|J_y^+\right)\left(J_y|a,b\rangle\right) \geq 0.\end{aligned} \tag{16.36}$$

Dunque

$$b^2 \leq a. \tag{16.37}$$

Deve allora esistere un b_{MAX} tale che:

$$J_+|a,b_{MAX}\rangle = 0. \tag{16.38}$$

Per calcolare il valore di b_{MAX} possiamo applicare l'operatore J_- alla precedente equazione ed osservare che

$$J_-J_+ = (J_x - iJ_y)(J_x + iJ_y) = J_x^2 + J_y^2 + i[J_x, J_y], \tag{16.39}$$

ossia

$$J_-J_+ = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z. \tag{16.40}$$

Si ha allora:

$$\begin{aligned}0 &= J_-J_+|a,b_{MAX}\rangle = (J^2 - J_z^2 - \hbar J_z)|a,b_{MAX}\rangle =\\ &= (a - b_{MAX}^2 - \hbar b_{MAX})|a,b_{MAX}\rangle,\end{aligned} \tag{16.41}$$

ossia

$$b_{MAX}(b_{MAX} + \hbar) = a. \tag{16.42}$$

Similmente, l'eq. (16.37) implica anche l'esistenza di un valore minimo di b, b_{MIN}, definito dall'equazione

$$J_-|a,b_{MIN}\rangle = 0. \tag{16.43}$$

Tale valore si può calcolare applicando l'operatore J_+ alla precedente equazione ed osservando che

$$J_+J_- = (J_x + iJ_y)(J_x - iJ_y) = J_x^2 + J_y^2 - i[J_x, J_y], \tag{16.44}$$

ossia

$$J_-J_+ = J^2 - J_z^2 + \hbar J_z. \tag{16.45}$$

Si trova allora

$$\begin{aligned} 0 &= J_+J_-|a, b_{MIN}\rangle = (J^2 - J_z^2 + \hbar J_z)|a, b_{MIN}\rangle = \\ &= (a - b_{MIN}^2 - \hbar b_{MIN})|a, b_{MIN}\rangle, \end{aligned} \tag{16.46}$$

da cui

$$b_{MIN}(b_{MIN} - \hbar) = a. \tag{16.47}$$

Dal confronto delle eq. (16.42) e (16.47) (con l'ipotesi $b_{MAX} > b_{MIN}$) vediamo che

$$b_{MAX} = -b_{MIN}, \tag{16.48}$$

e dunque i valori possibili per b sono compresi nell'intervallo

$$-b_{MAX} \leq b \leq b_{MAX}. \tag{16.49}$$

Osserviamo che l'autostato corrispondente all'autovalore massimo di J_z, $|a, b_{MAX}\rangle$, può essere ottenuto applicando un numero n (intero) di volte l'operatore J_+ all'autostato corrispondente all'autovalore minimo, $|a, -b_{MAX}\rangle$. Questo implica

$$b_{MAX} = -b_{MAX} + n\hbar, \tag{16.50}$$

cioè

$$b_{MAX} = \frac{n\hbar}{2}, \qquad nintero. \tag{16.51}$$

Solitamente il valore di b_{MAX} in unità $\hbar$ è indicato con j, così che

$$j = \frac{b_{MAX}}{\hbar}\frac{n}{2}, \qquad nintero. \tag{16.52}$$

L'eq. (16.42) indica poi che

$$a = \hbar^2 j(j+1). \tag{16.53}$$

Definiamo anche m come il generico autovalore di J_z in unità $\hbar$:

$$b = m\hbar. \tag{16.54}$$

Il numero m può assumere allora tutti i valori compresi tra $-j$ e j e distanziati tra loro di 1.

Possiamo quindi riassumete i **risultati** derivati per gli autovalori di J^2 e J_z nella forma seguente:

$$J^2|j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j,m\rangle, \tag{16.55}$$

$$J_z|j,m\rangle = \hbar m|j,m\rangle, \tag{16.56}$$

dove j può assumere tutti i valori, interi o seminteri positivi, incluso lo zero, ed m può assumere i valori:

$$m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j. \tag{16.57}$$

È importante osservare come **la quantizzazione del momento angolare è una diretta conseguenza della sole regole di commutazione del momento angolare che a loro volta discendono dalle proprietà delle rotazioni e della definizione di $\vec{j}$ come generatore delle rotazioni**.
Per concludere questo studio **deduciamo le espressioni per gli elementi di matrice delle componenti J_x e J_y del momento angolare nella base degli autostati di J^2 e J_z.**
È conveniente a tale proposito considerare dapprima gli elementi di matrice degli operatori a scala J_+ e J_-. Scriviamo allora le equazioni (16.35) nella forma:

$$\begin{cases} J_+|j,m\rangle = c^+_{jm}|j,m+1\rangle, \\ J_-|j,m\rangle = c^-_{jm}|j,m-1\rangle, \end{cases} \tag{16.58}$$

Utilizzando le equazioni (16.40) e (16.45)otteniamo:

$$\begin{aligned} |c^+_{jm}|^2 &= \langle j,m|J_-J_+|j,m\rangle = \langle j,m|J^2 - J_z^2 - \hbar J_z|j,m\rangle = \\ &= \hbar^2\left(j(j+1) - m(m+1)\right), \end{aligned} \tag{16.59}$$

e

$$\begin{aligned} |c^-_{jm}|^2 &= \langle j,m|J_+J_-|j,m\rangle = \langle j,m|J^2 - J_z^2 + \hbar J_z|j,m\rangle = \\ &= \hbar^2\left(j(j+1) - m(m-1)\right). \end{aligned} \tag{16.60}$$

Le precedenti equazioni determinano i coefficienti c^+ e c^- a meno di un fattore di fase. In generale si usa scegliere c^+ e c^- reali e positivi, definendo in tal modo la fase (arbitraria) degli autostati $|j,m\rangle$ di J^2 e J_z. Si trova quindi:

$$J_+|j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}|j,m+1\rangle, \tag{16.61}$$

$$J_-|j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}|j,m-1\rangle. \tag{16.62}$$

Poiché le componenti J_x e J_y del momento angolare sono legate agli operatori a scala dalle semplici relazioni:

$$J_x = \frac{1}{2}\left(J_+ + J_-\right), \qquad J_y = \frac{1}{2i}\left(J_+ - J_-\right) \tag{16.63}$$

le equazioni (16.61) e (16.62) ci consentono di ricavare immediatamente le espressioni cercate per gli elementi di matrice di J_x e J_y:

$$\begin{aligned} \langle j, m-1|J_x|j,m\rangle &= \langle j, |J_x|j, m-1\rangle = \\ &= \frac{\hbar}{2}\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}, \end{aligned} \tag{16.64}$$

$$\begin{aligned} \langle j, m-1|J_y|j,m\rangle &= -\langle j, |J_y|j, m-1\rangle = \\ &= \frac{i\hbar}{2}\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}, \end{aligned} \tag{16.65}$$

tutti gli altri elementi di matrice sono invece nulli.
Osserviamo in particolare che nelle matrici J_x e J_y gli elementi diagonali sono tutti nulli. Poiché l'elemento di matrice diagonale dà il valore medio delle grandezze nello stato corrispondente, ciò significa che **negli stati con valori determinati di J_z, i valori medi di J_x e J_y sono nulli**:

$$\langle J_x\rangle = \langle J_y\rangle = 0. \tag{16.66}$$