Конспект лекцій з теорії ймовірностей

Каніовська І.Ю.

14 липня 2020 р.

Зміст

1 Випадкові події **2**
1.1 Основні поняття теорії ймовірностей 2

Розділ 1

Випадкові події

1.1 Основні поняття теорії ймовірностей

Стохастичний експеримент (СЕ)

Означення 1.1.1. *Стохастичним експериментом (випробуванням)* називається експеримент, який можна повторювати неодноразово зберігаючи певні умови і результат цього експерименту заздалегідь передбачити неможливо.

Означення 1.1.2. Будь-який результат СЕ називається *подією.*

Приклад 1.1.1.

1. СЕ — кидання кубика один раз, подія — випало 6 очок.
2. СЕ — кидання кубика двічі, подія — сума очок, що випала, дорівнює 6.

Події бувають:

1. Випадкові — можуть відбутися чи не відбутися при проведенні СЕ.
2. Неможливі — ніколи не відбуваються в даному СЕ.
3. Вірогідні — завжди відбуваються в даному СЕ.

Теоретико-множинний підхід до основних понять ТЙ

Будемо вважати, що кожному СЕ можна поставити у відповідність деяку множину, що називається *простором елементарних подій* Ω. Під *елементарними подіями* ω будемо розуміти єдині логічно можливі події СЕ, що виключають одна одну.

Приклад 1.1.2.

1. СЕ — кидання кубика один раз. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6\}$, де $\omega_k = \{\text{випало } k \text{ очок}\}, k = 1, ..., 6$.
2. СЕ — кидання монетки до першої появи герба. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k, ...\}$,
   де $\omega_i = \{\text{герб випав на } i\text{-тому киданні}\}, i \in \mathbb{N}$.
3. СЕ — зустріч двох осіб, що домовилися зустрітися протягом години. x — час приходу першої особи, y — час приходу другої, $0 \le x, y \le 1$. $\Omega = \{(x, y) : 0 \le x, y \le 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

В подальшому випадкові події позначатимемо $A, B, C, ...$. *Випадкова подія — підмножина* Ω. У прикладі з киданням кубика один раз $A = \{\text{випало 6 очок}\} = \{\omega_6\}$. В загальному випадку маємо $A = \{\omega_{k1}, \omega_{k2}, ..., \omega_{kn}, ...\} \subset \Omega$. Неможлива подія — $\varnothing$, вірогідна — Ω.

Основні операції над подіями

Зауваження. Розглядаємо події в межах фіксованих СЕ та простору елементарних подій.

1. *Включення* $A \subset B$ означає, що якщо відбулася подія A, то обов'язково відбудеться подія B. Наприклад, $A = \{\text{витягнуто даму пік}\}$, $B = \{\text{витягнуто карту чорної масті}\}$. Очевидно, $A \subset B$.

   Рівність подій: $(A \subset B, B \subset A) \iff (A = B)$.

2. *Об'єднання подій* $A \cup B$ — це подія, яка відбувається тоді, коли відбувається принаймні одна з подій A чи B.

   Властивості: $A \cup A = A$, $A \cup B = B \cup A$, $(A \subset B) \Rightarrow (A \cup B = B)$, $A \cup \Omega = \Omega$, $A \cup \varnothing = A$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

   Операція узагальнюється на скінченну або зліченну кількість подій: $A = \bigcup_{i=1}^{n(\infty)} A_i$.

3. *Перетин подій* $A \cap B$ — це подія, яка відбувається тоді, коли A і B відбуваються одночасно.

   Властивості: $A \cap A = A$, $A \cap B = B \cap A$, $(A \subset B) \Rightarrow (A \cap B = A)$, $A \cap \Omega = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

   Операція узагальнюється на скінченну або зліченну кількість подій: $A = \bigcap_{i=1}^{n(\infty)} A_i$.

   Означення 1.1.3. Події A та B називається *несумісними*, якщо вони не відбуваються одночасно: $A \cap B = \varnothing$. Узагальнення: події $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ називаються *попарно несумісними*, якщо $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$.

   Означення 1.1.4. Події $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ утворюють *повну групу подій*, якщо вони попарно несумісні та $\bigcup_{i=1}^{n(\infty)} A_i = \Omega$.

4. *Протилежна подія* $\overline{A}$ — це подія, яка відбувається тоді, коли A не відбувається.

   Властивості: $A \cup \overline{A} = \Omega$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

5. *Різниця подій* $A \backslash B$ — це подія $A \cap \overline{B}$. Для протилежної події маємо $\overline{A} = \Omega \backslash A$.

Алгебра та σ-алгебра подій

Означення 1.1.5. Непорожня система підмножин $\mathcal{F}$ простору елементарних подій Ω утворює *алгебру подій*, якщо:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$;
2. $(A, B \in \mathcal{F}) \Rightarrow (A \cup B \in \mathcal{F})$;
3. $(A \in \mathcal{F}) \Rightarrow \left(\overline{A} \in \mathcal{F}\right)$.

Узагальнення: якщо Ω містить зліченну кількість подій, то означення σ-алгебра отримаємо заміною умови 2 на $(\forall n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{F}) \Rightarrow (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F})$.

Пара $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ називається *вимірним простором стохастичного експерименту.*

Міра вірогідності появи випадкової події

Дослідника завжди цікавить кількісна характеристика появи тієї чи іншої події.

Нехай Ω — скінченний чи зліченний. Поставимо у відповідність кожній елементарній події ω_k число $p_k \geq 0$ так, що $\sum_{k=0}^{n(\infty)} p_k = 1$. Тоді $P(A) = \sum_{\omega_k \in A} p_k$ — кількісна характеристика, ймовірність події A.

Приклад 1.1.3. *Класична модель ймовірності.* Якщо простір елементарних подій Ω СЕ скінченний та всі ω_k рівноможливі, то такий СЕ називається *класичним.* В такому випадку $p_1 = p_2 = ... = p_n = \frac{1}{n}$, де $n = \text{card}(\Omega)$.

$$P(A) = \sum_{\omega_k \in A} p_k = \frac{m}{n} = \frac{\text{кількість елементарних подій в } A}{\text{загальна кількість елементарних подій}} \tag{1.1}$$

Ймовірності, що розраховуються за формулою (1.1), називаються *класичними.*

Приклад 1.1.4. 1. «Задачі про вибір» — коли з великої кількості чогось вибирають певну кількість. Наприклад, з урни з 10 кульками, 3 чорними та 7 білими, навмання витягають 5 кульок. Обчислимо ймовірність події $A = \{\text{серед них 2 чорних кульки}\}$: $P(A) = \frac{C_3^2 \cdot C_7^3}{C_{10}^5} = \frac{3 \cdot 35}{252} = \frac{5}{12}$

2. «Задачі про ліфт». 5 осіб одночасно зайшли в ліфт 11-поверхового будинку. Яка ймовірність того, що вони всі вийдуть на різних поверхах, починаючи з другого?

   $P(A) = \frac{A_{10}^5}{\widetilde{A}_{10}^5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10^5} = 0.3024$. Тут A_n^k та $\widetilde{A}_n^k$ — кількості розміщень без повторень та з повтореннями відповідно.

Властивості класичної ймовірності:

1. $\forall A \in \mathcal{F} : 0 \leq P(A) \leq 1$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
4. $P(\varnothing) = 0$.
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, для несумісних A і B $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
6. $(A \subset B) \Rightarrow (P(A) \leq P(B))$.
7. Якщо $A_1, A_2, ..., A_n$ — повна група подій СЕ, то $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = 1$.