Конспект лекцій з теорії ймовірностей

Каніовська І.Ю.

15 липня 2020 р.

Зміст

Розділ 1

Випадкові події

1.1 Основні поняття теорії ймовірностей

1.1.1 Стохастичний експеримент (СЕ)

Означення 1.1.1. *Стохастичним експериментом (випробуванням)* називається експеримент, який можна повторювати неодноразово, зберігаючи певні умови, і результат якого експерименту заздалегідь передбачити неможливо.

Означення 1.1.2. Будь-який результат СЕ називається *подією.*

Приклад 1.1.1.

1. СЕ — кидання кубика один раз, подія — випало 6 очок.
2. СЕ — кидання кубика двічі, подія — сума очок, що випала, дорівнює 6.

Події бувають:

1. Випадкові — можуть відбутися чи не відбутися при проведенні СЕ.
2. Неможливі — ніколи не відбуваються в даному СЕ.
3. Вірогідні — завжди відбуваються в даному СЕ.

1.1.2 Теоретико-множинний підхід до основних понять ТЙ

Будемо вважати, що кожному СЕ можна поставити у відповідність деяку множину, що називається *простором елементарних подій* Ω. Під *елементарними подіями* ω будемо розуміти єдині логічно можливі події СЕ, що виключають одна одну.

Приклад 1.1.2.

1. СЕ — кидання кубика один раз. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6\}$, де $\omega_k = \{\text{випало } k \text{ очок}\}, k = 1, ..., 6$.
2. СЕ — кидання монетки до першої появи герба. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k, ...\}$,
   де $\omega_i = \{\text{герб випав на } i\text{-тому киданні}\}, i \in \mathbb{N}$.
3. СЕ — зустріч двох осіб, що домовилися зустрітися протягом години. x — час приходу першої особи, y — час приходу другої, $0 \le x, y \le 1$. $\Omega = \{(x, y) : 0 \le x, y \le 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

В подальшому випадкові події позначатимемо $A, B, C, ...$. *Випадкова подія — підмножина* Ω. У прикладі з киданням кубика один раз $A = \{\text{випало 6 очок}\} = \{\omega_6\}$. В загальному випадку маємо $A = \{\omega_{k1}, \omega_{k2}, ..., \omega_{kn}, ...\} \subset \Omega$. Неможлива подія — $\varnothing$, вірогідна — Ω.

1.1.3 Основні операції над подіями

Зауваження. Розглядаємо події в межах фіксованих СЕ та простору елементарних подій.

1. *Включення* $A \subset B$ означає, що якщо відбулася подія A, то обов'язково відбудеться подія B. Наприклад, $A = \{\text{витягнуто даму пік}\}$, $B = \{\text{витягнуто карту чорної масті}\}$. Очевидно, $A \subset B$.

   Рівність подій: $(A \subset B, B \subset A) \iff (A = B)$.

2. *Об'єднання подій* $A \cup B$ — це подія, яка відбувається тоді, коли відбувається принаймні одна з подій A чи B.

   Властивості: $A \cup A = A$, $A \cup B = B \cup A$, $(A \subset B) \Rightarrow (A \cup B = B)$, $A \cup \Omega = \Omega$, $A \cup \varnothing = A$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

   Операція узагальнюється на скінченну або зліченну кількість подій: $A = \bigcup_{i=1}^{n(\infty)} A_i$.

3. *Перетин подій* $A \cap B$ — це подія, яка відбувається тоді, коли A і B відбуваються одночасно.

   Властивості: $A \cap A = A$, $A \cap B = B \cap A$, $(A \subset B) \Rightarrow (A \cap B = A)$, $A \cap \Omega = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

   Операція узагальнюється на скінченну або зліченну кількість подій: $A = \bigcap_{i=1}^{n(\infty)} A_i$.

   Означення 1.1.3. Події A та B називається *несумісними*, якщо вони не відбуваються одночасно: $A \cap B = \varnothing$. Узагальнення: події $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ називаються *попарно несумісними*, якщо $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$.

   Означення 1.1.4. Події $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ утворюють *повну групу подій*, якщо вони попарно несумісні та $\bigcup_{i=1}^{n(\infty)} A_i = \Omega$.

4. *Протилежна подія* $\overline{A}$ — це подія, яка відбувається тоді, коли A не відбувається.

   Властивості: $A \cup \overline{A} = \Omega$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

5. *Різниця подій* $A \backslash B$ — це подія $A \cap \overline{B}$. Для протилежної події маємо $\overline{A} = \Omega \backslash A$.

1.1.4 Алгебра та σ-алгебра подій

Означення 1.1.5. Непорожня система підмножин $\mathcal{F}$ простору елементарних подій Ω утворює *алгебру подій*, якщо:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$;
2. $(A, B \in \mathcal{F}) \Rightarrow (A \cup B \in \mathcal{F})$;
3. $(A \in \mathcal{F}) \Rightarrow \left(\overline{A} \in \mathcal{F}\right)$.

Узагальнення: якщо Ω містить зліченну кількість подій, то означення σ-алгебра отримаємо заміною умови 2 на $(\forall n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{F}) \Rightarrow (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F})$.

Пара $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ називається *вимірним простором стохастичного експерименту.*

1.1.5 Міра вірогідності появи випадкової події

Дослідника завжди цікавить кількісна характеристика появи тієї чи іншої події.

Нехай Ω — скінченний чи зліченний. Поставимо у відповідність кожній елементарній події ω_k число $p_k \geq 0$ так, що $\sum_{k=0}^{n(\infty)} p_k = 1$. Тоді $P(A) = \sum_{\omega_k \in A} p_k$ — кількісна характеристика, ймовірність події A.

Приклад 1.1.3. *Класична модель ймовірності.* Якщо простір елементарних подій Ω СЕ скінченний та всі ω_k рівноможливі, то такий СЕ називається *класичним.* В такому випадку $p_1 = p_2 = ... = p_n = \frac{1}{n}$, де $n = \text{card}(\Omega)$.

$$P(A) = \sum_{\omega_k \in A} p_k = \frac{m}{n} = \frac{\text{кількість елементарних подій в } A}{\text{загальна кількість елементарних подій}} \tag{1.1}$$

Ймовірності, що розраховуються за формулою (1.1), називаються *класичними.*

Приклад 1.1.4.

1. «Задачі про вибір» — коли з великої кількості чогось вибирають певну кількість. Наприклад, з урни з 10 кульками, 3 чорними та 7 білими, навмання витягають 5 кульок. Обчислимо ймовірність події $A = \{$серед них 2 чорних кульки$\}$: $P(A) = \frac{C_3^2 \cdot C_7^3}{C_{10}^5} = \frac{3 \cdot 35}{252} = \frac{5}{12}$.

2. «Задачі про ліфт». 5 осіб одночасно зайшли в ліфт 11-поверхового будинку. Яка ймовірність того, що вони всі вийдуть на різних поверхах, починаючи з другого?

   $P(A) = \frac{A_{10}^5}{\widetilde{A}_{10}^5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10^5} = 0.3024$. Тут A_n^k та $\widetilde{A}_n^k$ — кількості розміщень без повторень та з повтореннями відповідно.

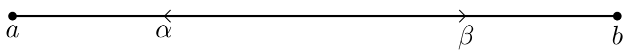
Властивості класичної ймовірності:

1. $\forall A \in \mathcal{F} : 0 \leq P(A) \leq 1$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
4. $P(\varnothing) = 0$.
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, для несумісних A і B $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
6. $(A \subset B) \Rightarrow (P(A) \leq P(B))$.
7. Якщо $A_1, A_2, ..., A_n$ — повна група подій СЕ, то $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = 1$.

1.2 Геометричні ймовірності. Аксіоми теорії ймовірностей.

1.2.1 Геометрична модель ймовірності

Приклад 1.2.1. Нехай точка кидається навмання на відрізок $[a, b]$. Яка ймовірність її потрапляння в $\langle \alpha, \beta \rangle \subset [a, b]$?
Розглянемо подію $A = \{$точка потрапила в $\langle \alpha, \beta \rangle\}$.



$P(A) = kl_{\langle \alpha, \beta \rangle}$ для деякого $k > 0$. З іншого боку, $P(\Omega) = 1 = kl_{[a,b]}$. Таким чином $k = \frac{1}{l_{[a,b]}} = \frac{1}{b-a}$. Тому $P(A) = \frac{l_{\langle \alpha, \beta \rangle}}{l_{[a,b]}}$.

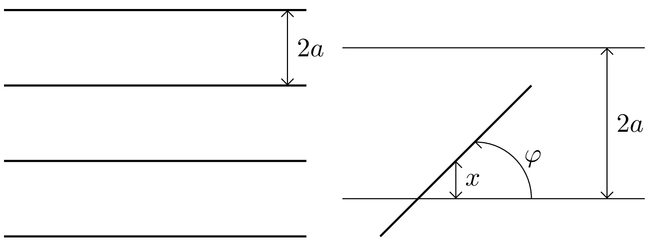
Нехай простір елементарних подій інтерпретується як замкнена область в $\mathbb{R}^n$, а випадкові події - її підмножини. В якості $\sigma -$ алгебри подій $\mathcal{F}$ беремо підмножини, що мають міру. Тоді в якості ймовірності деякої події A беремо $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$

$$\mathbb{R}^1: \quad P(A) = \frac{l_A}{l_\Omega}$$
$$\mathbb{R}^2: \quad P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega}$$
$$\mathbb{R}^3: \quad P(A) = \frac{V_A}{V_\Omega}$$

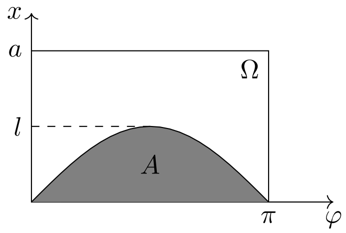
Ймовірності, що знаходяться таким чином називаються *геометричними*, а сама модель називається *геометричною моделлю ймовірності.*
Геометрична модель може використовуватись коли:

1. Ω має геометричну інтерпретацію як замкнена область в $\mathbb{R}^n$.
2. Елементарні події - рівноможливі.

Приклад 1.2.2 (Задача Бюффона)**.** На площині накреслені паралельні прямі на відстані $2a$, на них кидається голка довжиною $2l$, $l \leq a$. Яка ймовірність того, що голка перетне якунебудь пряму?



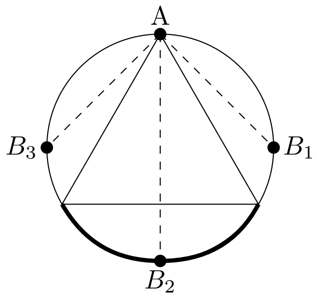
Достатньо розглядати лише дві прямі. $\Omega = \left\{(\varphi, x) \in \mathbb{R}^2 : \varphi \in [0, \pi], x \in [0, \pi]\right\}$
При такій побудові простору елементарних подій подія $A = \{\text{голка перетне пряму}\} = \{(\varphi, x) \in \Omega : x \leq l \sin \varphi\}$



$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)},\ S(\Omega) = \pi a,\ S(A) = \int_0^\pi l \sin \varphi \, \mathrm{d}x = l\, (-\cos \varphi)|_0^\pi = 2l$
Отже, $P(A) = \frac{2l}{\pi a}$.
Якщо провести n кидань голки, з яких m - кількість потраплянь голки на пряму, то за допомогою приблизної рівності $\frac{m}{n} \approx \frac{2l}{\pi a}$ можна приблизно обчислити число π.

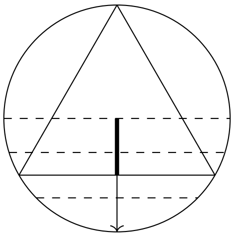
Приклад 1.2.3 (Парадокс Бертрана)**.** Нехай в колі радіусом r навмання проводиться хорда. Яка ймовірність того, що довжина цієї хорди буде більшою за довжину сторони правильного трикутника, що вписаний в це коло?
Існують три способи вирішення цієї задачі, при чому кожен з них дає різні результати.

Спосіб 1 Виберемо випадково дві точки (A та B) на колі та проведемо через них хорду. Вписаний трикутник (без втрати загальності) будуємо так, щоб його вершина лежала у першій вибраній точці. Друга вибрана на колі точка однозначно визначає хорду; таким чином кожну з хорд можна співставити з деякою точкою на колі.



$\Omega = [0, 2\pi r)$. Можна побачити, що якщо точка B потрапить в нижню третину кола, то хорда буде довшою за сторону трикутника. Таким чином подію T $= \{$довжина хорди більше ніж довжина сторони трикутника$\}$ можна інтерпретувати геометрично як $T = [\frac{2}{3}\pi r, \frac{4}{3}\pi r]$. Згідно з геометричної схеми, $P(T) = \frac{l_T}{l_\Omega} = \frac{1}{3}$.

Спосіб 2 Для будь-якої хорди маємо радіус, що проходить через середину цієї хорди перпендикулярно їй. Без втрати загальності "повернемо"вписаний трикутник так, щоб його ближча сторона була паралельна хорді. Сторона трикутника розділює обраний радіус на дві половини. Таким чином можна співставити кожну хорду з деякою точкою на радіусі. Якщо точка буде лежати на половині радіуса "ззовні"вписаного трикутника, то відповідна хорда буде коротше за сторону трикутника, в іншому випадку - довше. Таким чином маємо геометричну інтерпретацію для простору елементарних подій та нашої події, ймовірність якої ми шукаємо.



$\Omega = [0, r], T = [0, \frac{r}{2}], P(T) = \frac{l_T}{l_\Omega} = \frac{1}{2}.$

Спосіб 3 цвввввв