Конспект лекцій з теорії ймовірностей

Каніовська І.Ю.

17 липня 2020 р.

Зміст

Розділ 1

Випадкові події

1.1 Основні поняття теорії ймовірностей

1.1.1 Стохастичний експеримент (СЕ)

Означення 1.1.1. *Стохастичним експериментом (випробуванням)* називається експеримент, який можна повторювати неоднаразово, зберігаючи певні умови, і результат якого експерименту заздалегідь передбачити неможливо.

Означення 1.1.2. Будь-який результат СЕ називається *подією.*

Приклад 1.1.1.

1. СЕ — кидання кубика один раз, подія — випало 6 очок.
2. СЕ — кидання кубика двічі, подія — сума очок, що випала, дорівнює 6.

Події бувають:

1. Випадкові — можуть відбутися чи не відбутися при проведенні СЕ.
2. Неможливі — ніколи не відбуваються в даному СЕ.
3. Вірогідні — завжди відбуваються в даному СЕ.

1.1.2 Теоретико-множинний підхід до основних понять ТЙ

Будемо вважати, що кожному СЕ можна поставити у відповідність деяку множину, що називається *простором елементарних подій* Ω. Під *елементарними подіями* ω будемо розуміти єдині логічно можливі події СЕ, що виключають одна одну.

Приклад 1.1.2.

1. СЕ — кидання кубика один раз. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6\}$, де $\omega_k = \{\text{випало } k \text{ очок}\}, k = 1, ..., 6$.
2. СЕ — кидання монетки до першої появи герба. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k, ...\}$,
   де $\omega_i = \{\text{герб випав на } i\text{-тому киданні}\}, i \in \mathbb{N}$.
3. СЕ — зустріч двох осіб, що домовилися зустрітися протягом години. x — час приходу першої особи, y — час приходу другої, $0 \le x, y \le 1$. $\Omega = \{(x, y) : 0 \le x, y \le 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

В подальшому випадкові події позначатимемо $A, B, C, ...$. *Випадкова подія — підмножина* Ω. У прикладі з киданням кубика один раз $A = \{\text{випало 6 очок}\} = \{\omega_6\}$. В загальному випадку маємо $A = \{\omega_{k1}, \omega_{k2}, ..., \omega_{kn}, ...\} \subset \Omega$. Неможлива подія — $\varnothing$, вірогідна — Ω.

1.1.3 Основні операції над подіями

Зауваження. Розглядаємо події в межах фіксованих СЕ та простору елементарних подій.

1. *Включення* $A \subset B$ означає, що якщо відбулася подія A, то обов'язково відбудеться подія B. Наприклад, $A = \{\text{витягнуто даму пік}\}, B = \{\text{витягнуто карту чорної масті}\}$. Очевидно, $A \subset B$.

   Рівність подій: $(A \subset B, B \subset A) \iff (A = B)$.

2. *Об'єднання подій* $A \cup B$ — це подія, яка відбувається тоді, коли відбувається принаймні одна з подій A чи B.

   Властивості: $A \cup A = A$, $A \cup B = B \cup A$, $(A \subset B) \Rightarrow (A \cup B = B)$, $A \cup \Omega = \Omega$, $A \cup \varnothing = A$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

   Операція узагальнюється на скінченну або зліченну кількість подій: $A = \bigcup_{i=1}^{n(\infty)} A_i$.

3. *Перетин подій* $A \cap B$ — це подія, яка відбувається тоді, коли A і B відбуваються одночасно.

   Властивості: $A \cap A = A$, $A \cap B = B \cap A$, $(A \subset B) \Rightarrow (A \cap B = A)$, $A \cap \Omega = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

   Операція узагальнюється на скінченну або зліченну кількість подій: $A = \bigcap_{i=1}^{n(\infty)} A_i$.

Означення 1.1.3. Події A та B називається *несумісними*, якщо вони не відбуваються одночасно: $A \cap B = \varnothing$. Узагальнення: події $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ називаються *попарно несумісними*, якщо $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$.

Означення 1.1.4. Події $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ утворюють *повну групу подій*, якщо вони попарно несумісні та $\bigcup_{i=1}^{n(\infty)} A_i = \Omega$.

4. *Протилежна подія* $\overline{A}$ — це подія, яка відбувається тоді, коли A не відбувається.

   Властивості: $A \cup \overline{A} = \Omega$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

5. *Різниця подій* $A \backslash B$ — це подія $A \cap \overline{B}$. Для протилежної події маємо $\overline{A} = \Omega \backslash A$.

1.1.4 Алгебра та σ-алгебра подій

Означення 1.1.5. Непорожня система підмножин $\mathcal{F}$ простору елементарних подій Ω утворює *алгебру подій*, якщо:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$;
2. $(A, B \in \mathcal{F}) \Rightarrow (A \cup B \in \mathcal{F})$;
3. $(A \in \mathcal{F}) \Rightarrow \left(\overline{A} \in \mathcal{F}\right)$.

Узагальнення: якщо Ω містить зліченну кількість подій, то означення σ-алгебра отримаємо заміною умови 2 на $(\forall n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{F}) \Rightarrow (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F})$.

Пара $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ називається *вимірним простором стохастичного експерименту.*

1.1.5 Міра вірогідності появи випадкової події

Дослідника завжди цікавить кількісна характеристика появи тієї чи іншої події.

Нехай Ω — скінченний чи зліченний. Поставимо у відповідність кожній елементарній події ω_k число $p_k \geq 0$ так, що $\sum_{k=0}^{n(\infty)} p_k = 1$. Тоді $P(A) = \sum_{\omega_k \in A} p_k$ — кількісна характеристика, ймовірність події A.

Приклад 1.1.3. *Класична модель ймовірності.* Якщо простір елементарних подій Ω СЕ скінченний та всі ω_k рівноможливі, то такий СЕ називається *класичним.* В такому випадку $p_1 = p_2 = ... = p_n = \frac{1}{n}$, де $n = \text{card}(\Omega)$.

$$P(A) = \sum_{\omega_k \in A} p_k = \frac{m}{n} = \frac{\text{кількість елементарних подій в } A}{\text{загальна кількість елементарних подій}} \tag{1}$$

Ймовірності, що розраховуються за формулою (1), називаються *класичними*.

Приклад 1.1.4. 1. «Задачі про вибір» — коли з великої кількості чогось вибирають певну кількість. Наприклад, з урни з 10 кульками, 3 чорними та 7 білими, навмання витягають 5 кульок. Обчислимо ймовірність події $A = \{\text{серед них 2 чорних кульки}\}$: $P(A) = \frac{C_3^2 \cdot C_7^3}{C_{10}^5} = \frac{3 \cdot 35}{252} = \frac{5}{12}$.

2. «Задачі про ліфт». 5 осіб одночасно зайшли в ліфт 11-поверхового будинку. Яка ймовірність того, що вони всі вийдуть на різних поверхах, починаючи з другого?

   $P(A) = \frac{A_{10}^5}{\widetilde{A}_{10}^5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10^5} = 0.3024$. Тут A_n^k та $\widetilde{A}_n^k$ — кількості розміщень без повторень та з повтореннями відповідно.

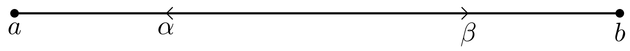
Властивості класичної ймовірності:

1. $\forall A \in \mathcal{F} : 0 \le P(A) \le 1$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
4. $P(\varnothing) = 0$.
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, для несумісних A і B $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
6. $(A \subset B) \Rightarrow (P(A) \le P(B))$.
7. Якщо $A_1, A_2, ..., A_n$ — повна група подій СЕ, то $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = 1$.

1.2 Геометричні ймовірності. Аксіоми теорії ймовірностей.

1.2.1 Геометрична модель ймовірності

Приклад 1.2.1. Нехай точка кидається навмання на відрізок $[a, b]$. Яка ймовірність її потрапляння в $\langle \alpha, \beta \rangle \subset [a, b]$?
Розглянемо подію $A = \{\text{точка потрапила в } \langle \alpha, \beta \rangle\}$.

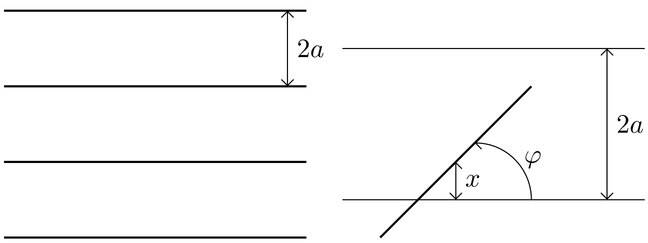


$P(A) = kl_{\langle \alpha, \beta \rangle}$ для деякого $k > 0$. З іншого боку, $P(\Omega) = 1 = kl_{[a,b]}$. Таким чином $k = \frac{1}{l_{[a,b]}} = \frac{1}{b-a}$. Тому $P(A) = \frac{l_{\langle \alpha, \beta \rangle}}{l_{[a,b]}}$.

Нехай простір елементарних подій інтерпретується як замкнена область в $\mathbb{R}^n$, а випадкові події — її підмножини. В якості σ-алгебри подій $\mathcal{F}$ беремо підмножини, що мають міру μ. Тоді в якості ймовірності деякої події A беремо $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$. Наприклад, в $\mathbb{R}^1$ беремо міру «довжина», в $\mathbb{R}^2$ — «площа», а в $\mathbb{R}^3$ — «об'єм».

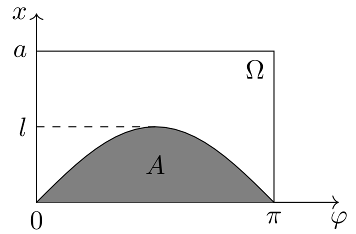
Ймовірності, що знаходяться таким чином називаються *геометричними*, а сама модель називається *геометричною моделлю ймовірності*. Геометрична модель може використовуватись, коли Ω має геометричну інтерпретацію як замкнена область в $\mathbb{R}^n$, а елементарні події — рівноможливі.

Приклад 1.2.2 (задача Бюффона)**.** На площині накреслені паралельні прямі на відстані $2a$, на них кидається голка довжиною $2l$, $l \le a$. Яка ймовірність того, що голка перетне якунебудь пряму?



Достатньо розглядати лише дві прямі. $\Omega = \left\{(\varphi, x) \in \mathbb{R}^2 : \varphi \in [0, \pi], x \in [0, \pi]\right\}$

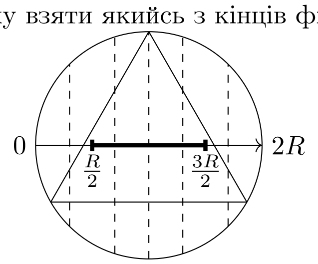
При такій побудові простору елементарних подій подія $A = \{\text{голка перетне пряму}\} = \{(\varphi, x) \in \Omega : x \le l \sin\varphi\}$



$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)},\ S(\Omega) = \pi a,\ S(A) = \int_0^\pi l \sin\varphi \,\mathrm{d}x = l\,(-\cos\varphi)|_0^\pi = 2l$. Отже, $P(A) = \frac{2l}{\pi a}$.
Якщо провести n кидань голки, у m з яких голка потрапить на пряму, то за допомогою приблизної рівності $\frac{m}{n} \approx \frac{2l}{\pi a}$ можна приблизно обчислити число π. Наприклад, якщо взяти $n = 5000, m = 2532, l/a = 0.8$, то отримаємо $\pi \approx 3.1596$

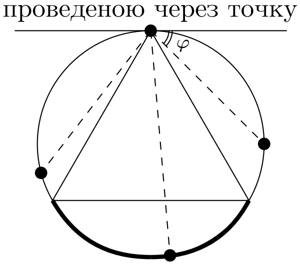
Приклад 1.2.3 (парадокс Бертрана)**.** Нехай в колі радіусом R навмання обирається хорда. Яка ймовірність того, що її довжина буде більшою за довжину сторони правильного трикутника, вписаного в це коло?
Існують три способи розв'язання цієї задачі, причому кожен з них дає різний результат.

Спосіб 1. З міркувань симетрії обирається якийсь фіксований діаметр кола і розглядається всі перпендикулярні до нього хорди. Серед них і обирається навмання довільна хорда. Очевидно, що кожна хорда у цьому випадку може бути однозначно визначена своєю серединою, тобто кожній хорді можна взаємно однозначно поставити у відповідність координату її середини, якщо за початок відліку взяти якийсь з кінців фіксованого діаметру.



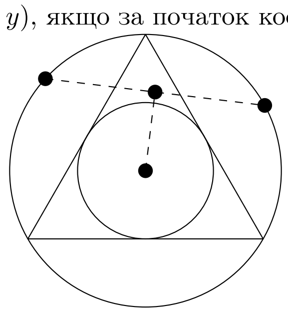
Таким чином, множина всіх значень координати середини хорди $\Omega = [0; 2R]$. Множина, що відповідає події — це відрізок $A = \left[\frac{R}{2}; \frac{3R}{2}\right]$. В якості міри візьмемо довжину. Тоді $P(A) = \frac{l(A)}{l(\Omega)} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$.

Спосіб 2. В цьому способі пропонується розглядати тільки хорди з одним закріпленим кінцем. Кожній хорді поставимо у відповідність ту частину дуги кола, яка потрапляє у кут φ, що утворює хорда з дотичною, проведеною через точку закріплення кінця всіх хорд.



Тоді множина $\Omega = [0; \pi]$, а $A = \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$. Знову візьмемо за міру довжину і отримаємо $P(A) = \frac{\pi/3}{\pi} = \frac{1}{3}$.

Спосіб 3. Розглядаються всі хорди кола. Кожній з них взаємно однозначно ставиться у відповідність точка її середини (x, y), якщо за початок координат прийняти центр кола.



В такому випадку $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\right\}$, а $A = \left\{(x, y) \in \Omega : x^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{4}\right\}$. Тоді $P(A) = \frac{\pi R^2/4}{\pi R^2} = \frac{1}{4}$.

Жозеф Бертран був противником геометричного означення ймовірності. Він казав, що воно не дає можливості однозначно обчислити ймовірність однієї і тієї ж випадкової події та використовував вищенаведений приклад для доведення своєї правоти. Дійсно, було отримано три різних відповіді при розв'язанні однієї задачі. Так в чому ж справа? Насправді, помилка полягає у різних трактуваннях поняття «навмання обрана хорда». В кожному з трьох способів це трактування було різним, що й стало причиною різних відповідей.

1.2.2 Аксіоми теорії ймовірностей

I. Побудова вимірного простору $\{\Omega, \mathcal{F}\}$:

A1: Будь-якому стохастичному експерименту можна поставити у відповідність простір елементарних подій Ω.

A2: $(\forall n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{F}) \Rightarrow \left(\bigcup_{n=1}^{n(\infty)} A_n \in \mathcal{F}\right)$.

A3: $(A \in \mathcal{F}) \Rightarrow \left(\overline{A} \in \mathcal{F}\right)$.
Дві останні аксіоми стосуються побудови алгебри чи σ-алгебри подій.

II. Властивості ймовірності:

P1: $\forall A \in \mathcal{F} : P(A) \geq 0$.

P2: $P(\Omega) = 1$ — аксіома нормування.

P3: $\forall A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \mathcal{F}, A_i \cap A_j$ при $i \neq j$: $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ — аксіома зліченної адитивності. Іноді у випадках «простої» алгебри (а не σ-алгебри) достатньо аксіоми скінченної адитивності **P3′**: $\forall A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}, A_i \cap A_j$ при $i \neq j$: $P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$.

Означення 1.2.1. Нормована міра P, що введена на вимірному просторі $\{\Omega, \mathcal{F}\}$, називається *ймовірністю.* Всі події беруться з σ-алгебри подій. Трійка $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ називається *ймовірнісний простором* стохастичного експерименту.

Ця система аксіом несуперечна, бо існують стохастичні експерименти, які задовольняють цим аксіомам, але неповна, бо в різних задачах теорії ймовірностей розглядаються різні ймовірнісні простори.

1.2.3 Властивості імовірності, що випливають з аксіом

1. Якщо $A_1, A_2, \ldots, A_n, \cdots \in \mathcal{F}$ утворюють повну групу подій, то $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = 1$.

   Доведення. Напряму випливає з аксіоми P2. ▲

2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

   Доведення. $A \cup \overline{A} = \Omega \Rightarrow 1 \underset{P2}{=} P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) \underset{P3'}{=} P(A) + P(\overline{A})$ ▲

3. $P(\varnothing) = 0$

   Доведення. Наслідок з властивості 2 ($\varnothing = \overline{\Omega}$) ▲

   Зауваження. Якщо імовірність події дорівнює нулю, то це не означає, що подія неможлива.

   Приклад 1.2.4. СЕ - кидання точки на відрізок $[a, b]$. А $=$ {потрапляння в певну точку $x \in [a, b]$ }

4. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Доведення. $A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B \backslash A) \underset{P3'}{\Rightarrow} P(B) = P(A) + P(B \backslash A) \underset{P1}{\geq} P(A)$ ▲

5. $\forall A \in \mathcal{F} : P(A) \leq 1$

   Доведення. Наслідок з властивості 4, $A \subset \Omega$ та P2. ▲

6. $A \subset B : P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$

   Доведення. Наслідок з властивості 4. ▲

7. $\forall A, B \in \mathcal{F} : P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

   Доведення. $A \cup B = (A \backslash (A \cap B)) \cup (A \cap B) \cup (B \backslash (A \cap B))$ - попарно несумісні.
   З аксіоми P3': $P(A \cup B) = P(A \backslash (A \cap B)) + P(A \cap B) + P(B \backslash (A \cap B))$ ▲

8. Узагальнення властивості 7: $\forall A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F} : P(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) -$
   $- \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(\cap_{i=1}^n A_i)$
   (формула включення-виключення для ймовірностей).

   Вправа. Довести.

Приклад 1.2.5 (Задача про неуважну секретарку)**.** Секретарка поклала n листів в n чистих конвертів, заклеїла ці конверти і тільки після цього написала адреси. Яка ймовірність того, що хоча б один з листів дійде за призначенням?
$A_i = \{$і-тий лист дійшов за призначенням$\}, i = \overline{1, n}$. $P(A_i) = \frac{1}{n} = \frac{(n-1)!}{n!}$.
$A = \{$хоча б один із листів дійшов за призначенням$\}, A = \cup_{i=1}^n A_i$
$P(A_i \cap_{i \neq j} A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$
$P(A_i \cap_{i \neq j \neq k} A_j \cap A_k) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$
$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \frac{1}{n!}$
$P(A) = n\frac{1}{n} - C_n^2 \frac{1}{n(n-1)} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} \approx 1 - \frac{1}{e} \approx 0,63$

9. $\forall A_1, A_2, \ldots, A_n, \cdots \in \mathcal{F} : P(\cup_{i=1}^\infty A_i) \leq \sum_{i=1}^\infty P(A_i)$

   Доведення. Введемо події $B_1 = A_1, B_2 = \overline{A_1} \cap A_2, B_3 = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3, B_n = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots$
   $\cdots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n$. Ці події попарно несумісні, $\cup_{i=1}^\infty B_i = \cup_{i=1}^\infty A_i,\ B_i \subset A_i$.
   За аксіомою $P3 : P(\cup_{i=1}^\infty A_i) = P(\cup_{i=1}^\infty A_i) \underset{P3}{=} \sum_{i=1}^\infty P(B_i) \underset{4}{\leq} \sum_{i=1}^\infty P(A_i)$ ▲

10. $\forall A_1, A_2, \ldots, A_n, \cdots \in \mathcal{F} : P(\cap_{i=1}^\infty A_i) = 1 - P(\overline{\cap_{i=1}^\infty A_i}) = 1 - P(\cup_{i=1}^\infty A_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^\infty P(\overline{A_i})$