

Graph Coloring als Online-Problem mit bipartiten Graphen und Advice Complexity

Semesterarbeit

Florian Lüthi*

ZHAW, 22. November 2013

*luethifl@students.zhaw.ch

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Advice Complexity	4
2.1	Online- vs. Offline-Probleme	4
2.2	Competitive Ratio	4
2.3	Das SKIRENTAL-Problem	5
2.4	Das Orakel	7
2.5	Online SIMPLEKNAPSACK mit Advice	9
3	Online Graph Coloring von bipartiten Graphen	11
	Literaturverzeichnis	13

1 Einleitung

2 Advice Complexity

2.1 Online- vs. Offline-Probleme

Optimierungsprobleme lassen sich (unter vielerlei anderen Klassifikationsmöglichkeiten) in Online-Probleme und Offline-Probleme mit dazugehörigen Online- bzw. Offline-Algorithmen unterteilen. Der wesentliche Unterschied zwischen diesen beiden Klassen besteht darin, dass ein Offline-Algorithmus seine gesamte Eingabe zur Laufzeit kennt, während ein Online-Algorithmus dies nicht tut. Er bekommt einen Teil der Eingabe und berechnet daraus sofort einen Teil des Resultats. Ein solches Teilresultat kann im Nachhinein nicht mehr geändert werden.

Es liegt nun auf der Hand, dass ein Online-Algorithmus dazu tendiert, während der Berechnung eines Teilresultats Entscheidungen zu treffen, welche sich nach Berechnungen weiterer Teilresultate als suboptimal herausstellen – dies insbesondere darum, weil die während der Berechnung des Teilresultats i zur Verfügung stehenden Informationen über das gesamte Problem nur aus den Teileingaben der Berechnungen 1 bis i stammen können [1].

Eine weitere Folge des obengenannten Unterschieds manifestiert sich darin, dass ein Online-Algorithmus im Allgemeinen offensichtlich keine optimale Lösung findet. Auf der anderen Seite funktioniert ein qualitativer Vergleich zweier Algorithmen dadurch, dass deren asymptotische Laufzeitkomplexität verglichen wird. Da sich die Qualität der von einem Online-Algorithmus und dessen Offline-Pendant produzierten Lösungen grundlegend unterscheidet (während letzterer eine optimale Lösung anstrebt, ist ersterem diese konzeptbedingt verwehrt), muss eine andere Möglichkeit gefunden werden, diese beiden Algorithmen (und deren Lösungen) vergleichen zu können.

2.2 Competitive Ratio

Eine gängige Möglichkeit, dieses Problem zu lösen, ist die von Sleator und Tarjan eingeführte *Competitive Ratio* [8, 1], welche im Grunde genommen das Verhältnis zwischen den Kosten der optimalen Lösung und derer des zu untersuchenden Online-Algorithmus ausdrückt [1]. Da die Qualität der Lösung eines Online-Algorithmus wesentlich von der Beschaffenheit der Eingabe abhängt, wird dabei vom jeweils schlechtestmöglichen Fall ausgegangen [9].

Formal kann die Competitive Ratio folgendermassen definiert werden: Sei $\text{opt}(I)$ die optimale Lösung eines konkreten Online-Problems für eine Sequenz aus Teileingaben I . \mathcal{I}

sei die Menge aller möglicher solcher Sequenzen. Seien ferner \mathcal{S} alle möglichen Lösungen (mit $\text{opt}(I) \in \mathcal{S}$), $A(I) \in \mathcal{S}$ diejenige Lösung, welche der Online-Algorithmus zu diesem Problem liefern kann, und $C : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ die Kosten für die jeweilige Lösung.

Ein Online-Algorithmus wird nun als *c-kompetitiv* bezeichnet, wenn es Konstanten $c \geq 0$ und α gibt, sodass für sämtliche mögliche Eingaben I

$$C(A(I)) \leq c \cdot C(\text{opt}(I)) + \alpha$$

gilt [1], und die Competitive Ratio wäre ergo

$$c = \max_{I \in \mathcal{I}} \left\{ \frac{C(A(I))}{C(\text{opt}(I))} \right\}.$$

2.3 Das SKIRENTAL-Problem

Die Competitive Ratio lässt sich durch das wohlbekannte SKIRENTAL-Problem illustrieren: Nehmen wir an, wir wollen zum ersten Mal ein Wochenende lang Skifahren gehen. Wir besitzen aber keine Skis. Es stellt sich nun die Frage, ob wir Skis mieten oder kaufen wollen – wobei erschwerend hinzukommt, dass wir momentan noch keine Ahnung haben, wieviele Wochenenden wir danach noch skifahrend verbringen möchten.

Angenommen, der Kauf eines Paares Ski kostet CHF 500, die Miete äquivalenter Skis für ein Wochenende hingegen CHF 50.¹ Es ist nun einfach auszurechnen, dass sich der Kauf der Skis vor dem ersten Wochenende nur lohnen würde, wenn wir an mindestens 10 Wochenenden Skifahren gehen würden.

Da wir das aber nicht wissen, sind wir quasi der Online-Algorithmus, der für jede Teileingabe (sprich für jedes geplante Skiwochenende) sofort die Frage nach Kauf oder Miete beantworten muss. Die Teileingabe für den Algorithmus ist jeweils die Anzahl an vergangenen Skiwochenenden.

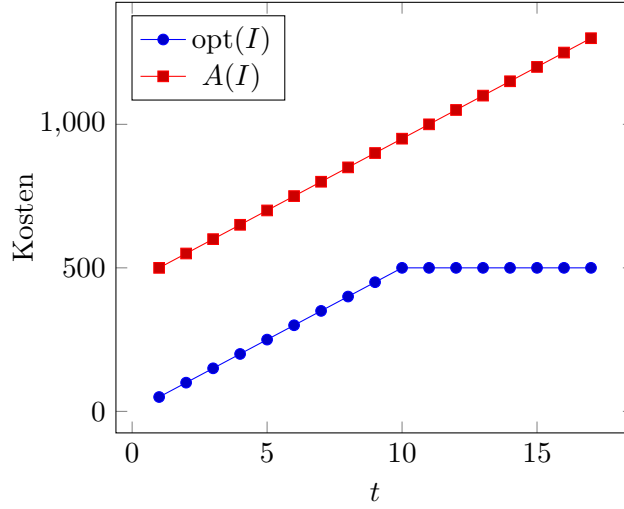
Die oben besprochene Eigenschaft der potenziellen Suboptimalität der Entscheidungen wird beim zehnten solchen Wochenende augenscheinlich, wenn bei den vorangegangenen Wochenenden die Entscheidung jeweils auf Mieten gefallen sein sollte.

Bezeichne t nun dasjenige Wochenende, an welchem wir uns dafür entscheiden, die Skis zu kaufen. Wir schauen uns die folgenden Fälle an:

- Für $t = 1$ gilt, dass $A(I) = 500$, denn wir kaufen ja gleich beim ersten Mal. Die Competitive Ratio c hingegen liegt bei 10, da wir im schlechtesten Fall nur dieses eine Mal Skifahren gehen – es gälte also $\text{opt}(I) = 50$.

¹In der Realität wesentliche Aspekte wie Preisveränderungen über die Zeit, veränderte Qualitätsansprüche und Abnutzung der Skis sollen bei dieser Betrachtung vernachlässigt werden.

Abbildung 2.1: Verlauf von Lösung und Optimum für SkiRental



- Für $t = 2$ gilt, dass $A(I) = 550$, denn wir mieten beim ersten (CHF 50) und kaufen beim zweiten Mal (CHF 500). Die Competitive Ratio c liegt bei 5.5, da wir im schlechtesten Fall nur diese zwei Male Skifahren gehen – optimal wäre zwei Mal mieten, also $\text{opt}(I) = 50$.
- Für $t = 10$ gilt, dass $A(I) = 950$, denn wir mieten die ersten neun Male (CHF 450) und kaufen beim zehnten Mal (CHF 500). Für die optimale Lösung spielt es keine Rolle, ob gemietet oder gekauft wird, also ist $\text{opt}(I) = 500$. Dies ergibt eine Competitive Ratio von $c = 1.9$.
- Für $t = 11$ gilt, dass $A(I) = 1000$, denn wir mieten die ersten zehn Male (CHF 500) und kaufen beim elften Mal (CHF 500). Die Competitive Ratio c liegt bei $c = 2$, da es optimal wäre, gleich beim ersten Mal die Skis zu kaufen (CHF 500).

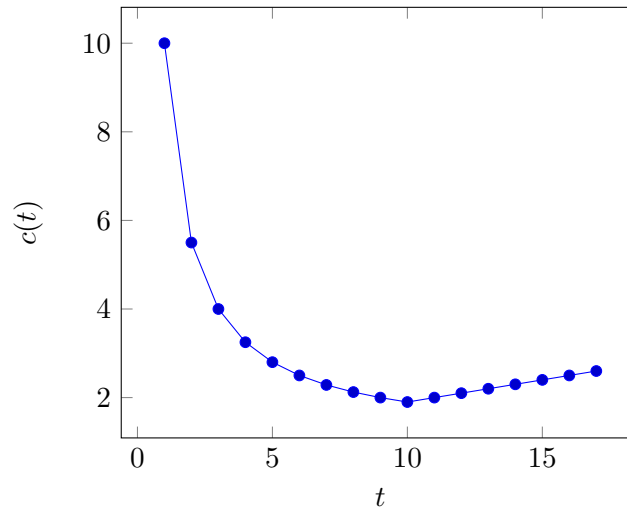
Der Verlauf von $\text{opt}(I)$ und $A(I)$ ist in Abbildung 2.1 skizziert, Abbildung 2.2 zeigt c in Abhängigkeit von t .

Allgemein kann die Competitive Ratio für dieses Problem (mit allgemeinen Kosten b für den Kauf bzw. r für die Miete) beschrieben werden als

$$c(t) = \begin{cases} \frac{b+(t-1) \cdot r}{t \cdot r}, & \text{wenn } r \cdot t \leq b \\ \frac{b+(t-1) \cdot r}{b}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Unsere Instanz des SKIRENTAL-Problems ist also 1.9-kompetitiv; im Allgemeinen ist SKIRENTAL $(2 - \frac{r}{b})$ -kompetitiv [6].

Abbildung 2.2: Verlauf der Competitive Ratio für SkiRental



Zurück auf die Realität bezogen, scheint es eine sinnvolle Strategie bei *Kaufen oder Mieten*-Problemen zu sein, das Objekt zu dem Zeitpunkt zu kaufen, an dem die kumulierten Mietkosten die Kaufkosten aufwiegen oder überschreiten – die Competitive Ratio ist zu diesem Zeitpunkt die beste. Ausserdem kann die Annahme getroffen werden, dass die Wahrscheinlichkeit für eine weitere Benutzung des entsprechenden Objekts um einen mindestens gleich langen Zeitraum wie während der Mietphase (während welcher sich die Kaufkosten amortisieren) relevant ist [9].

2.4 Das Orakel

Es ist augenscheinlich, dass die Lösung $t = 10$ für unsere Instanz des SKIRENTAL-Problems die beste Approximation ist, welche wir erreichen können, solange wir nicht in die Zukunft schauen können. Nichtsdestotrotz ist diese Lösung offensichtlich weit entfernt davon, optimal zu sein – im schlechtesten Fall würden wir 1.9 mal so viel für unsere Skis bezahlen wie eigentlich nötig.

Entsprechend interessant wäre es, eine Aussage darüber machen zu können, wieviel zusätzliche Information der Online-Algorithmus zur Verfügung haben müsste, um das Problem optimal (oder mit einer festgelegten Competitive Ratio [1]) lösen zu können. Während die Competitive Ratio die Kosten darstellt, welche durch die gefundene Lösung zusätzlich zur optimalen Lösung zu gewärtigen wären, würde diese Aussage den Zusatznutzen beschreiben, welcher sich durch den Preis dieser zusätzlichen Kosten erkaufen liesse [6].

Für unser SKIRENTAL-Problem ist die Antwort denkbar trivial: Es ist vollkommen

ausreichend, bei der ersten Entscheidung (sprich bei der Berechnung des ersten Teilergebnisses) zu wissen, ob die Skis gekauft werden oder ob sie für dieses und alle weiteren Wochenenden gemietet werden sollen – mit einem einzigen Bit zusätzlicher Information könnte das Problem also optimal gelöst werden.

SKI-RENTAL ist insofern speziell, als dass dem ganzen Leben (und damit auch der Freizeitplanung) nichtdeterministische Aspekte innewohnen; aus diesem Grunde wird die benötigte Information von keiner Instanz geliefert werden können. Auf der anderen Seite sind aber durchaus Probleme denkbar, welche eigentlich Online-Probleme sind (oder aus praktischen Gründen von Online-Algorithmen gelöst werden), die Qualität der Resultate aber nachhaltig verbessert werden könnten, wenn zusätzliche Offline-Informationen aus der gesamten Eingabe herangezogen werden könnten. Deren Beschaffung könnte mit derart hohen Kosten verbunden sein, dass die Bestrebung wäre, einen möglichst guten Kompromiss zwischen diesen Kosten und der verbesserten Competitive Ratio zu erreichen [6].

Interessant wäre es darum, ein Modell zur Verfügung zu haben, mit welchem sich Probleme nach Anzahl und Art der zusätzlich benötigten Informationen klassifizieren liessen. [6] schlägt ein solches Modell vor [1] – die sogenannte *Advice Complexity*. Das Modell nimmt die Existenz eines *Orakels* \mathcal{O} an, welchem das Problem in seiner Gesamtheit bekannt ist und welches über unlimitierte Rechenleistung verfügt [6, 1]. Das Orakel stellt dem Algorithmus \mathcal{A} bitweise Informationen zur Verfügung [6]. Das Mass der *Advice Complexity* bezeichnet demzufolge die Menge der zwischen dem Algorithmus und dem Orakel ausgetauschten Informationen. Da diese Menge an Informationen generell von der Länge der Eingabe abhängt, bezeichnet die Advice Complexity von \mathcal{A} für Eingaben der Länge n das Maximum an Advice Complexity für alle Abfragen für Totaleingaben mit maximaler Länge von n , normalisiert auf n [1]:

$$B_{(\mathcal{A}, \mathcal{O})} = \max_{I \in \mathcal{I}^n} \frac{B_{(\mathcal{A}, \mathcal{O})}(I)}{n},$$

während die Advice Complexity des Problems \mathcal{P} definiert ist als diejenige Advice Complexity des besten Algorithmus [3].

[6] schlägt vor, die Kommunikation zwischen dem Orakel und dem Algorithmus in wahlweise zwei verschiedenen Modi ablaufen zu lassen:

- Im *Answerer-Modus* entscheidet der Algorithmus selbständig, ob und für welche Eingaben er das Orakel um Rat fragen muss. Für jede Anfrage schickt das Orakel einen Advice-String zurück, welcher aber nicht leer sein kann [6] (denn dies wäre ja kein sinnvoller Rat).

Bezogen auf SKI-RENTAL würde der Algorithmus das Orakel vor dem ersten Wochenende fragen, ob er die Skis kaufen oder mieten soll, und das Orakel würde diese Frage mit *Kaufen* oder *Mieten* beantworten. Danach wäre keine weitere Kommunikation zwischen Orakel und Algorithmus notwendig.

- Im *Helper*-Modus schickt das Orakel dem Algorithmus sporadisch und spontan *Advices*. Wir können uns das so vorstellen, dass der Algorithmus mehrere voneinander unabhängige Verhaltensmuster für die Berechnung der Teilausgabe aufweist, welche vom Orakel entsprechend aufgerufen werden können. Bei jedem notwendigen Wechsel des Verhaltensmusters würde das Orakel erneut einen *Advice* senden.

Bezogen auf *SKI*RENTAL würde das Orakel den Algorithmus vor dem ersten Wochenende entweder in den *Kaufen*- oder *Mieten*-Modus versetzen. Der *Kaufen*-Modus kauft die Skis für die erste Teileingabe und tut nichts mehr für alle folgenden Teileingaben, während der *Mieten*-Modus für jede Teileingabe die Skis mietet.

Wir beobachten, dass die Länge der vom Orakel gegebenen *Advice*-Strings ebenfalls Informationen beinhalten (beispielsweise zeigt ein leerer String im *Helper*-Modus dem Algorithmus an, das momentane Verhaltensmuster beizubehalten). Dies ist insofern ein Problem, als dass es das Modell einerseits komplexer als notwendig macht. Andererseits wird der Vergleich von *Advice Complexity* mit anderen Komplexitätsmassen dadurch erschwert [1].

[2] entwickelt dieses Modell der *Advice Complexity* dahingehend weiter, als dass die Existenz eines *Advice Tapes* angenommen wird, wohin das Orakel alle *Advices* sequentiell schreibt, und zwar vor der Berechnung der ersten Teileingabe durch den Algorithmus. Dadurch wird das Modell direkt vergleichbar mit demjenigen von randomisierten Online-Algorithmen [1]; es kann konstatiert werden, dass für jeden randomisierten Online-Algorithmus \mathcal{R} , welcher b Bits von seinem Random-Tape liest und eine Competitive Ratio von r erreicht, ein Algorithmus mit *Advice* \mathcal{A} und Orakel \mathcal{O} existiert, welcher b *Advice*-Bits benötigt und dessen Competitive Ratio ebenfalls r ist [2]. Dies ist einfach durch die Konstruktion von \mathcal{O} dahingehend zu erreichen, dass \mathcal{O} dieselben Bits auf das *Advice Tape* schreibt, wie auf dem Random Tape für den randomisierten Algorithmus stehen würden.

2.5 Online SIMPLEKNAPSACK mit Advice

Um die teilweise überraschenden Fähigkeiten von Algorithmen mit *Advice* zu demonstrieren, wollen wir uns das SIMPLEKNAPSACK-Problem anschauen: Wir nehmen die Existenz eines Rucksacks an. Dieser Rucksack hat eine maximale Kapazität von 1. Des weiteren nehmen wir eine Menge von Gegenständen $S = \{w_1, \dots, w_n\}$ (deren w_i die entsprechenden Grössen ausdrücken, mit $0 < w_i \leq 1$) an. Das Ziel ist, den Rucksack möglichst gut (aber nur bis zur Kapazitätsgrenze) zu füllen.

Erschwerend kommt noch hinzu, dass dieses Problem als Online-Problem formuliert wird – der Algorithmus bekommt also einen Gegenstand präsentiert und muss sofort entscheiden, ob er diesen im Rucksack verstauen will oder nicht. Das nachträgliche Entfernen von bereits verstauten Gegenständen ist nicht erlaubt [5].

Allgemein existiert kein kompetitiver deterministischer Online-Algorithmus [7]; die einzige Möglichkeit besteht im Grunde genommen darin, sämtliche präsentierten Ge-

gegenstände der Reihe nach einzupacken, solange sie noch in den Rucksack passen. Ein möglicher Adversary wäre nun die Sequenz $\langle \varepsilon, 1 \rangle$, wobei ε beliebig nahe an 0 gewählt werden könnte; dies führt dazu, dass der Algorithmus ε in den Rucksack packt und dann aufhören muss, weil $\varepsilon + 1$ die Kapazitätsgrenze überschreiten würde.

Die Competitive Ratio dieses Algorithmus wäre entsprechend

$$r = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} = \infty.$$

Wenn wir nun ein Orakel dazudenken, welches dem Algorithmus bei der ersten Entscheidung mitteilt, ob in der Sequenz ein Gegenstand w_i vorkommt, für welchen $w_i \geq 0.5$ gilt, könnte der Algorithmus folgende Fallunterscheidung machen:

- a) Falls ein solcher Gegenstand vorkommt, würde der Algorithmus solange alle Gegenstände verwerfen, bis ein Gegenstand mit $w_i \geq 0.5$ zur Debatte steht. Diesen würde er wie auch alle nachfolgenden in den Rucksack packen. Da er zumindest ersteren gepackt hat, hätte der Rucksack mindestens eine Gesamtfüllung von 0.5.
- b) Falls hingegen kein solcher Gegenstand vorkommt, würde der Algorithmus von Anfang an alle Gegenstände in den Rucksack packen. Der Rucksack wäre damit ebenfalls zu mindestens zur Hälfte gefüllt, da es keinen Gegenstand ≥ 0.5 geben kann, der nicht in den Rucksack passen würde (ansonsten Fall a) zur Anwendung gelangt wäre).

Daraus folgt, dass die Competitive Ratio des Algorithmus mit einem einzigen Advice Bit

$$r = \frac{1}{0.5} = 2$$

ist [5].

Spannenderweise wird die Competitive Ratio für $b \in \mathcal{O}(1)$ nicht wesentlich verbessert. Der Grund dafür ist im Prinzip, dass eine konstante Anzahl an Advice Bits nicht ausreichen kann, um genügend Informationen darüber transportieren zu können, welche Gegenstände ausgewählt werden sollen. Für $b \in \mathcal{O}(\log(n))$ gilt dies hingegen – die Competitive Ratio reduziert sich dann auf $r = 1 + \varepsilon$ [5].

3 Online Graph Coloring von bipartiten Graphen

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wollen wir uns mit einer speziellen Variante des Graphenfärbeproblems beschäftigen. Damit wir dies tun können, wollen wir einige Begriffe definieren:

Definition 1 (Graph). Ein (ungerichteter, ungewichteter) Graph ist ein Tupel

$$G = (V, E),$$

wobei $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ dessen Knoten (*vertices*) bezeichnet und $E = \{e_1, e_2\}$ dessen Kanten (*edges*). Jedes e ist eine 2-elementige Teilmenge von V . [4]

Abbildung 3.1 illustriert einen Graphen mit

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

und

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_6\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_4\}\}$$

Definition 2 (Bipartiter Graph). Wenn alle Knoten eines Graphen G so in zwei disjunkte Mengen S_1 und S_2 (Partitionsklassen oder *shores*) aufgeteilt werden können, dass keine Kanten von G zwischen Knoten aus S_1 und solchen aus S_2 existieren, sprechen wir von einem bipartiten Graphen.

Abbildung 3.2 illustriert einen bipartiten Graphen.

Bipartite Graphen

Abbildung 3.1: Ein Graph

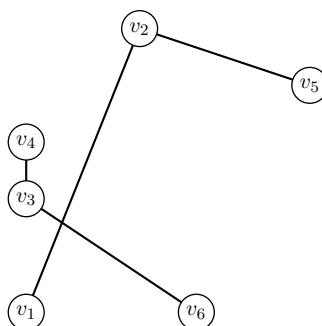
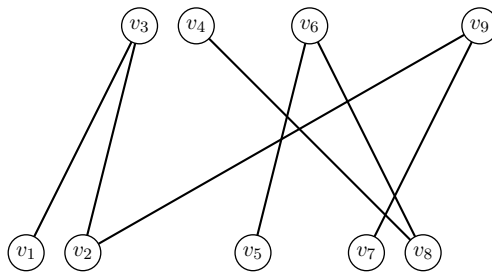


Abbildung 3.2: Ein bipartiter Graph



Literaturverzeichnis

- [1] Hans-Joachim Böckenhauer, Dennis Komm, Rastislav Kráľovič, Richard Kráľovič, and Tobias Mömke. On the advice complexity of online problems. In Yingfei Dong, Ding-Zhu Du, and Oscar Ibarra, editors, *Algorithms and Computation*, volume 5878 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 331–340. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [2] Hans-Joachim Böckenhauer, Dennis Komm, Rastislav Kráľovič, Richard Kráľovič, and Tobias Mömke. Online algorithms with advice. technical report 614, 2009.
- [3] MariaPaola Bianchi, Hans-Joachim Böckenhauer, Juraj Hromkovič, and Lucia Keller. Online coloring of bipartite graphs with and without advice. In Joachim Gudmundsson, Julián Mestre, and Taso Viglas, editors, *Computing and Combinatorics*, volume 7434 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 519–530. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [4] Norman Biggs. *Algebraic Graph Theory (Cambridge Mathematical Library)*. Cambridge University Press, 2 edition, 2 1994.
- [5] Hans-Joachim Böckenhauer, Dennis Komm, Richard Kráľovič, and Peter Rossmanith. On the advice complexity of the knapsack problem. In *Proceedings of the 10th Latin American International Conference on Theoretical Informatics*, LATIN’12, pages 61–72, Berlin, Heidelberg, 2012. Springer-Verlag.
- [6] Stefan Dobrev, Rastislav Kráľovič, and Dana Pardubská. Measuring the problem-relevant information in input. *RAIRO - Theoretical Informatics and Applications*, 43:585–613, 7 2009.
- [7] A. Marchetti-Spaccamela and C. Vercellis. Stochastic on-line knapsack problems. *Mathematical Programming*, 68(1-3):73–104, 1995.
- [8] Daniel D. Sleator and Robert E. Tarjan. Amortized efficiency of list update and paging rules. *Commun. ACM*, 28(2):202–208, February 1985.
- [9] Luca Trevisan. Cs261: Optimization, lecture 17. <http://theory.stanford.edu/~trevisan/cs261/lecture17.pdf>, 2011.