Graph Coloring als Online-Problem mit bipartiten Graphen und Advice Complexity

Semesterarbeit

Florian Lüthi*

ZHAW, 22. Dezember 2013

*luethifl@students.zhaw.ch

Zusammenfassung

Diese Semesterarbeit beschäftigt sich mit dem Verhältnis zwischen Online- und Offline-Problemen. Ausserdem gibt sie einen Überblick über das Konzept der *Advice Complexity* sowie deren Anwendung zur Erreichung einer konstanten Competitive Ratio für einen Graphenfärbe-Algorithmus auf bipartiten Zufallsgraphen. Die dazu notwendigen Modelle werden ebenfalls erläutert. Sie verifiziert empirisch die theoretische obere Schranke an Advice Bits von $b = \frac{n}{\sqrt{2^{k-1}}}$ ([3]) und erläutert das dazu notwendige Programm. Schlussendlich führt sie einige Experimente durch, um einen allfälligen Zusammenhang zwischen der Länge und der Kantendichte von bipartiten Zufallsgraphen sowie der Competitive Ratio und der Menge an Advice Bits des entsprechenden Online-Algorithmus zu finden. Sie vermutet, dass die Kantendichte als Teil der Länge aufgefasst werden sollte.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **4**

2 Advice Complexity **5**
2.1 Online- vs. Offline-Probleme 5
2.2 Competitive Ratio 5
2.3 Das SkiRental-Problem 6
2.4 Das Orakel 8
2.5 Online SimpleKnapsack mit Advice 10

3 Online Coloring von bipartiten Graphen **12**
3.1 Modelle von (bipartiten) Graphen 12
3.2 Zufallsgraphen 14
3.3 Generierung von Zufallsgraphen 14
3.4 Graph Coloring 16
3.5 Online Graph Coloring: First Fit-Algorithmus 17

4 Online Coloring von bipartiten Graphen mit Advice **23**
4.1 Online Coloring Algorithmus mit Advice 23
4.2 Obere und untere Schranken für Advice Bits 23
4.3 Experimente 25
4.3.1 Anzahl Advice Bits für dieselbe Competitive Ratio wie First Fit . 26
4.3.2 Anzahl Advice Bits für Optimalität 32
4.3.3 Anzahl Advice Bits für $k = 3$ 32
4.4 Fazit der Experimente 34

5 Kommentierung der Implementation des Programms `GraphBonanza` **35**
5.1 Anforderungen 35
5.2 Umfeld, Architektur und verwendete Bibliotheken 35
5.3 Die `GraphBuilder`-Klasse 36

Literaturverzeichnis **38**

1 Einleitung

Selbst in Zeiten immer grösser werdender Datenmengen, stetig wachsender verfügbarer Rechenleistung sowie daraus folgender immens gestiegener Erwartungen an die digitalisierte und automatisierte Welt bleibt die (aus menschlicher Sicht beruhigende) Erkenntnis, dass selbst die unmittelbare Zukunft unerwartete Wendungen beinhaltet.

Diese Arbeit beschäftigt sich in dem ihr vorgegebenen Rahmen zur Hauptsache mit den beiden Konzepten Advice Complexity und Graphenfärbung. Zusammen mit dem Programm `GraphBonanza`[1] versucht sie einen Überblick über diese Themen zu geben, sowie ein Theorem aus [3] experimentell zu verifizieren.

Diese Arbeit ist folgendermassen aufgebaut: Im nächsten Kapitel wird auf das Konzept der Advice Complexity eingegangen, im Übernächsten auf dasjenige der Graphenfärbung, in Kapitel 4 werden diese beiden Themen miteinander verknüpft und es werden Experimente durchgeführt. Im letzten Kapitel folgt eine kurze Kommentierung der Implementation von `GraphBonanza`.

Der Autor bedankt sich bei Dr. Lucia Keller für die sehr kompetente Betreuung sowie die terminliche Flexibilität. Derselbe Dank gilt auch der Studienleitung.

[1] https://github.com/foyan/GraphBonanza

2 Advice Complexity

2.1 Online- vs. Offline-Probleme

Optimierungsprobleme lassen sich (unter vielerlei anderen Klassifikationsmöglichkeiten) in Online-Probleme und Offline-Probleme mit dazugehörigen Online- bzw. Offline-Algorithmen unterteilen. Der wesentliche Unterschied zwischen diesen beiden Klassen besteht darin, dass ein Offline-Algorithmus seine gesamte Eingabe zur Laufzeit kennt, während ein Online-Algorithmus dies nicht tut. Er bekommt einen Teil der Eingabe und berechnet daraus sofort einen Teil des Resultats. Ein solches Teilresultat kann im Nachhinein nicht mehr geändert werden.

Es liegt nun auf der Hand, dass ein Online-Algorithmus dazu tendiert, während der Berechnung eines Teilresultats Entscheidungen zu treffen, welche sich nach Berechnungen weiterer Teilresultate als suboptimal herausstellen – dies insbesondere darum, weil die während der Berechnung des Teilresultats i zur Verfügung stehenden Informationen über das gesamte Problem nur aus den Teileingaben der Berechnungen 1 bis i stammen können [1].

Eine weitere Folge des obengenannten Unterschieds manifestiert sich darin, dass ein Offline-Algorithmus prinzipiell immer eine optimale Lösung finden kann, während der entsprechende Online-Algorithmus unter Umständen zu wenig Informationen zur Verfügung hat. Dies verunmöglicht den Vergleich dieser beiden Typen von Algorithmen mittels klassischer Masse wie zum Beispiel der asymptotischen Laufzeitkomplexität. Aus diesem Grunde muss eine andere Möglichkeit gefunden werden, einen Offline-Algorithmus mit seinem Online-Pendant (und deren Lösungen) vergleichen zu können.

2.2 Competitive Ratio

Eine gängige Möglichkeit dafür ist die von Sleator und Tarjan eingeführte *Competitive Ratio* [15, 1], welche im Grunde genommen das Verhältnis zwischen den Kosten der optimalen Lösung und derer des zu untersuchenden Online-Algorithmus ausdrückt [1]. Da die Qualität der Lösung eines Online-Algorithmus wesentlich von der Beschaffenheit der Eingabe abhängt, wird dabei vom jeweils schlechtestmöglichen Fall ausgegangen [16].

Formal kann die Competitive Ratio folgendermassen definiert werden: Sei $\text{opt}(I)$ die optimale Lösung eines konkreten Online-Problems für eine Sequenz aus Teileingaben I, welche durch einen Offline-Algorithmus erreicht werden kann. Seien ferner $\mathcal{S}$ alle

möglichen Lösungen (mit $\text{opt}(I) \in \mathcal{S}$), $A(I) \in \mathcal{S}$ diejenige Lösung, welche der Online-Algorithmus A zu diesem Problem liefern kann, und $C : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ die Kosten für die jeweilige Lösung.

Ein Online-Algorithmus A für ein Minimierungsproblem wird nun als *c-kompetitiv* bezeichnet, wenn es Konstanten $c \geq 0$ und α gibt, sodass für sämtliche mögliche Eingaben I

$$C(A(I)) \leq c \cdot C(\text{opt}(I)) + \alpha$$

gilt [1].

Ausserdem bezeichnen wir einen Algorithmus A von nun an als *kompetitiv*, wenn es ein solches c gibt (sprich wenn die Competitive Ratio nicht von der Eingabelänge n abhängt).

2.3 Das SkiRental-Problem

Die Competitive Ratio lässt sich durch das wohlbekannte SkiRental-Problem illustrieren: Nehmen wir an, wir wollen zum ersten Mal ein Wochenende lang Skifahren gehen. Wir besitzen aber keine Skis. Es stellt sich nun die Frage, ob wir Skis mieten oder kaufen wollen – wobei erschwerend hinzukommt, dass wir momentan noch keine Ahnung haben, wieviele Wochenenden wir danach noch skifahrend verbringen möchten.

Angenommen, der Kauf eines Paars Ski kostet CHF 500, die Miete äquivalenter Skis für ein Wochenende hingegen CHF 50.[1] Es ist nun einfach auszurechnen, dass sich der Kauf der Skis vor dem ersten Wochenende nur lohnen würde, wenn wir an mindestens 10 Wochenenden Skifahren gehen würden.

Da wir das aber nicht wissen, sind wir gezwungen, von Anfang an einen Online-Algorithmus A_t auszuwählen, der für jede Teileingabe (sprich für jedes geplante Skiwochenende) sofort die Frage nach Kauf oder Miete beantworten muss. Die Teileingabe für den Algorithmus ist jeweils die Anzahl an vergangenen Skiwochenenden.

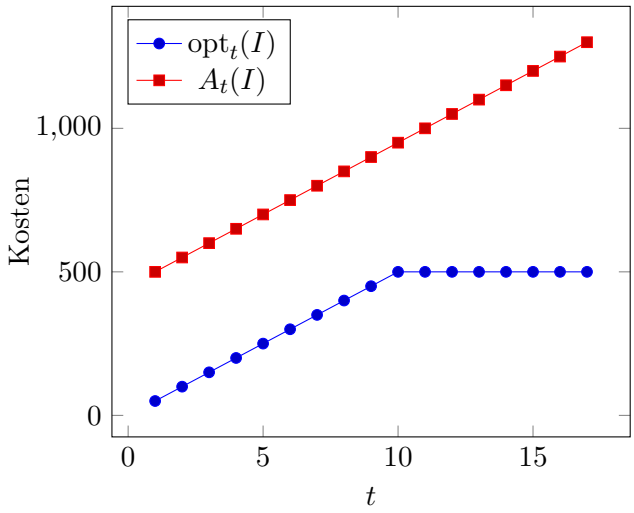
Die oben besprochene Eigenschaft der potenziellen Suboptimalität der Entscheidungen wird beim zehnten solchen Wochenende augenscheinlich, wenn bei den vorangegangen Wochenenden die Entscheidung jeweils auf Mieten gefallen sein sollte.

Bezeichne t nun dasjenige Wochenende, an welchem wir uns dafür entscheiden, die Skis zu kaufen. Wir schauen uns die folgenden Fälle an:

- Für $t = 1$ gilt, dass $A_1(I) = 500$, denn wir kaufen ja gleich beim ersten Mal. Die Competitive Ratio c hingegen liegt bei 10, da wir im schlechtesten Fall nur dieses eine Mal Skifahren gehen – es gälte also $\text{opt}_1(I) = 50$.

[1] In der Realität wesentliche Aspekte wie Preisveränderungen über die Zeit, veränderte Qualitätsansprüche und Abnützung der Skis sollen bei dieser Betrachtung vernachlässigt werden.

Abbildung 2.1: Verlauf von Lösung und Optimum für SkiRental



- Für $t = 2$ gilt, dass $A_2(I) = 550$, denn wir mieten beim ersten (CHF 50) und kaufen beim zweiten Mal (CHF 500). Die Competitive Ratio c liegt bei 5.5, da wir im schlechtesten Fall nur diese zwei Male Skifahren gehen – optimal wäre zwei Mal mieten, also $\text{opt}_2(I) = 100$.
- Für $t = 10$ gilt, dass $A_{10}(I) = 950$, denn wir mieten die ersten neun Male (CHF 450) und kaufen beim zehnten Mal (CHF 500). Für die optimale Lösung spielt es keine Rolle, ob jeweils gemietet oder von Anfang an gekauft wird, also ist $\text{opt}_{10}(I) = 500$. Dies ergibt eine Competitive Ratio von $c = 1.9$.
- Für $t = 11$ gilt, dass $A_{11}(I) = 1000$, denn wir mieten die ersten zehn Male (CHF 500) und kaufen beim elften Mal (CHF 500). Die Competitive Ratio c liegt bei $c = 2$, da es optimal wäre, gleich beim ersten Mal die Skis zu kaufen (CHF 500).

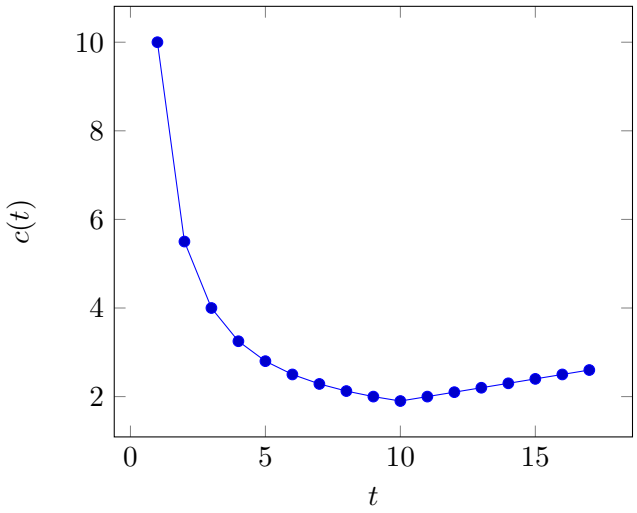
Der Verlauf von $\text{opt}_t(I)$ und $A_t(I)$ in Abhängigkeit von t ist in Abbildung 2.1 skizziert, Abbildung 2.2 zeigt c in Abhängigkeit von t.

Allgemein kann die Competitive Ratio für dieses Problem (mit allgemeinen Kosten b für den Kauf bzw. r für die Miete) beschrieben werden als

$$c(t) = \begin{cases} \frac{b+(t-1)\cdot r}{t\cdot r}, & \text{wenn } r \cdot t \leq b \\ \frac{b+(t-1)\cdot r}{b}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Unsere Instanz des SkiRental-Problems ist also 1.9-kompetitiv; im Allgemeinen ist SkiRental $(2 - \frac{r}{b})$-kompetitiv [6].

Abbildung 2.2: Verlauf der Competitive Ratio für SkiRental



Zurück auf die Realität bezogen, scheint es die bestmögliche Strategie bei *Kaufen oder Mieten*-Problemen zu sein, das Objekt (beispielsweise ein Haus oder ein Auto) an dem Zeitpunkt zu kaufen, an welchem die kumulierten Mietkosten die Kaufkosten zu überschreiten beginnen. Die intuitive Begründung dafür ist, dass die Wahrscheinlichkeit, das entsprechende Objekt für noch einmal mindestens dieselbe Zeitdauer zu benötigen, durch die schon einigermassen lange Mietdauer gegeben ist [16].

2.4 Das Orakel

Es ist augenscheinlich, dass die Lösung $t = 10$ für unsere Instanz des SkiRental-Problems die beste Approximation ist, welche wir erreichen können, solange wir nicht in die Zukunft schauen können. Nichtsdestotrotz ist diese Lösung offensichtlich weit entfernt davon, optimal zu sein – im schlechtesten Fall würden wir 1.9 mal so viel für unsere Skis bezahlen wie eigentlich nötig.

Entsprechend interessant wäre es, eine Aussage darüber machen zu können, wieviel zusätzliche Information der Online-Algorithmus zur Verfügung haben müsste, um das Problem optimal (oder mit einer festgelegten Competitive Ratio [1]) lösen zu können. Während die Competitive Ratio die Kosten darstellt, welche durch die gefundene Lösung zusätzlich zur optimalen Lösung zu gewärtigen wären, würde diese Aussage den Zusatznutzen beschreiben, welcher sich durch den Preis dieser zusätzlichen Kosten erkaufen liesse [6].

Für unser SkiRental-Problem ist die Antwort denkbar trivial: Es ist vollkommen ausreichend, bei der ersten Entscheidung (sprich bei der Berechnung des ersten Teilre-

sultats) zu wissen, ob die Skis gekauft werden oder ob sie für dieses und alle weiteren Wochenenden gemietet werden sollen – mit einem einzigen Bit zusätzlicher Information könnte das Problem also optimal gelöst werden.

SkiRental ist insofern speziell, als dass dem ganzen Leben (und damit auch der Freizeitplanung) nichtdeterministische Aspekte innewohnen; aus diesem Grunde wird die benötigte Information von keiner Instanz geliefert werden können. Auf der anderen Seite sind aber durchaus Probleme denkbar, welche eigentlich Online-Probleme sind (oder aus praktischen Gründen von Online-Algorithmen gelöst werden), die Qualität der Resultat aber nachhaltig verbessert werden könnte, wenn zusätzliche Offline-Informationen aus der gesamten Eingabe herangezogen werden könnten. Deren Beschaffung könnte mit derart hohen Kosten verbunden sein, dass die Bestrebung wäre, einen möglichst guten Kompromiss zwischen diesen Kosten und der verbesserten Competitive Ratio zu erreichen [6].

Interesssant wäre es darum, ein Modell zur Verfügung zu haben, mit welchem sich Probleme nach Anzahl und Art der zusätzlich benötigten Informationen klassifizieren liessen. [6] schlägt ein solches Modell vor [1] – die sogenannte *Advice Complexity*. Das Modell nimmt die Existenz eines *Orakels* $\mathcal{O}$ an, welchem das Problem in seiner Gesamtheit bekannt ist und welches über unlimitierte Rechenleistung verfügt [6, 1]. Das Orakel stellt dem Algorithmus $\mathcal{A}$ bitweise Informationen zur Verfügung [6]. Das Mass der *Advice Complexity* bezeichnet demzufolge die Menge der zwischen dem Algorithmus und dem Orakel ausgetauschten Informationen. Da diese Menge an Informationen generell von der Länge der Eingabe abhängt, bezeichnet die Advice Complexity von $\mathcal{A}$ für Eingaben der Länge n das Maximum an Advice Complexitiy für alle Abfragen für Totaleingaben mit maximaler Länge von n, normalisiert auf n [1]:

$$B_{(\mathcal{A},\mathcal{O})} = \max_{I \in \mathcal{I}^n} \frac{B_{(\mathcal{A},\mathcal{O})}(I)}{n},$$

während die Advice Complexity des Problems $\mathcal{P}$ definiert ist als diejenige Advice Complexity des besten Algorithmus [3].

[6] schlägt vor, die Kommunikation zwischen dem Orakel und dem Algorithmus in wahlweise zwei verschiedenen Modi ablaufen zu lassen:

- Im *Answerer*-Modus entscheidet der Algorithmus selbständig, ob und für welche Eingaben er das Orakel um Rat fragen muss. Für jede Anfrage schickt das Orakel einen Advice-String zurück, welcher aber nicht leer sein kann [6] (denn dies wäre ja kein sinnvoller Rat).

  Bezogen auf SkiRental würde der Algorithmus das Orakel vor dem ersten Wochenende fragen, ob er die Skis kaufen oder mieten soll, und das Orakel würde diese Frage mit *Kaufen* oder *Mieten* beantworten. Danach wäre keine weitere Kommunikation zwischen Orakel und Algorithmus notwendig.

- Im *Helper*-Modus schickt das Orakel dem Algorithmus sporadisch und spontan Advice Bits. Wir können uns das so vorstellen, dass der Algorithmus mehrere voneinander unabhängige Verhaltensmuster für die Berechnung der Teilausgabe aufweist, welche vom Orakel entsprechend aufgerufen werden können. Bei jedem notwendigen Wechsel des Verhaltensmusters würde das Orakel erneut einen Advice senden.

  Bezogen auf SkiRental würde das Orakel den Algorithmus vor dem ersten Wochenende entweder in den *Kaufen*- oder *Mieten*-Modus versetzen. Der *Kaufen*-Modus kauft die Skis für die erste Teileingabe und tut nichts mehr für alle folgenden Teileingaben, während der *Mieten*-Modus für jede Teileingabe die Skis mietet.

Wir beobachten, dass die Länge der vom Orakel gegebenen Advice-Strings ebenfalls Informationen beinhalten (beispielsweise zeigt ein leerer String im *Helper*-Modus dem Algorithmus an, das momentane Verhaltensmuster beizubehalten). Dies ist insofern ein Problem, als dass es das Modell einerseits komplexer als notwendig macht. Andererseits wird der Vergleich von Advice Complexity mit anderen Komplexitätsmassen dadurch erschwert [1].

[2] entwickelt dieses Modell der Advice Complexity dahingehend weiter, als dass die Existenz eines *Advice Tapes* angenommen wird, wohin das Orakel alle Advice Bits sequentiell schreibt, und zwar vor der Berechnung der ersten Teileingabe durch den Algorithmus. Dadurch wird das Modell direkt vergleichbar mit demjenigen von randomisierten Online-Algorithmen [1]; es kann konstatiert werden, dass für jeden randomisierten Online-Algorithmus $\mathcal{R}$, welcher b Bits von seinem Random-Tape liest und eine Competitive Ratio von r erreicht, ein Algorithmus mit Advice $\mathcal{A}$ und Orakel $\mathcal{O}$ existiert, welcher b Advice-Bits benötigt und dessen Competitive Ratio ebenfalls r ist [2]. Dies ist einfach durch die Konstruktion von $\mathcal{O}$ dahingehend zu erreichen, dass $\mathcal{O}$ dieselben Bits auf das Advice Tape schreibt, wie auf dem Random Tape für den randomisierten Algorithmus stehen würden.

Im weiteren Verlauf wollen wir davon ausgehen, dass jeweils ein Advice Tape existiert.

2.5 Online SimpleKnapsack mit Advice

Um die teilweise überraschenden Fähigkeiten von Algorithmen mit Advice zu demonstrieren, wollen wir uns das SimpleKnapsack-Problem anschauen: Wir nehmen die Existenz eines Rucksacks an. Dieser Rucksack hat eine maximale Kapazität von 1. Des weiteren nehmen wir eine Menge von Gegenständen $S = \{w_1, \ldots, w_n\}$ (deren w_i die entsprechenden Grössen ausdrücken, mit $0 < w_i \leq 1$) an. Das Ziel ist, den Rucksack möglichst gut (aber nur bis zur Kapazitätsgrenze) zu füllen.

Erschwerend kommt noch hinzu, dass dieses Problem als Online-Problem formuliert wird – der Algorithmus bekommt also einen Gegenstand präsentiert und muss sofort entscheiden, ob er diesen im Rucksack verstauen will oder nicht. Das nachträgliche Entfernen von bereits verstauten Gegenständen ist nicht erlaubt [5].

Allgemein existiert kein kompetitiver deterministischer Online-Algorithmus [13] für SimpleKnapsack: es existiert (aus Mangel an Informationen über die Zukunft) kein besserer Algorithmus, als derjenige, welcher sämtliche präsentierten Gegenstände der Reihe nach einpackt, solange sie noch in den Rucksack passen. Ein möglicher Adversary wäre nun die Sequenz $\langle \varepsilon, 1 \rangle$, wobei ε beliebig nahe an 0 gewählt werden könnte; dies führt dazu, dass der Algorithmus ε in den Rucksack packt und dann aufhören muss, weil $\varepsilon + 1$ die Kapazitätsgrenze überschreiten würde.

Die Competitive Ratio dieses Algorithmus wäre entsprechend

$$r = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} = \infty.$$

Wenn wir nun ein Orakel dazudenken, welches dem Algorithmus bei der ersten Entscheidung mitteilt, ob in der Sequenz ein Gegenstand w_i vorkommt, für welchen $w_i \geq 0.5$ gilt, könnte der Algorithmus folgende Fallunterscheidung machen:

a) Falls ein solcher Gegenstand vorkommt, würde der Algorithmus solange alle Gegenstände verwerfen, bis ein Gegenstand mit $w_i \geq 0.5$ zur Debatte steht. Diesen würde er wie auch alle nachfolgenden in den Rucksack packen. Da er zumindest ersteren gepackt hat, hätte der Rucksack mindestens eine Gesamtfüllung von 0.5.

b) Falls hingegen kein solcher Gegenstand vorkommt, würde der Algorithmus von Anfang an alle Gegenstände in den Rucksack packen. Der Rucksack wäre damit ebenfalls zu mindestens zur Hälfte gefüllt, da es keinen Gegenstand ≥ 0.5 geben kann, der nicht in den Rucksack passen würde (ansonsten Fall a) zur Anwendung gelangt wäre).

Daraus folgt, dass die Competitive Ratio des Algorithmus mit einem einzigen Advice Bit

$$r = \frac{1}{0.5} = 2$$

ist [5].

Spannenderweise wird die Competitive Ratio für $b \in \mathcal{O}(1)$ nicht wesentlich verbessert. Der Grund dafür ist im Prinzip, dass eine konstante Anzahl an Advice Bits nicht ausreichen kann, um genügend Informationen darüber transportieren zu können, welche Gegenstände ausgewählt werden sollen. Für $b \in \mathcal{O}(\log(n))$ gilt dies hingegen – die Competitive Ratio reduziert sich dann auf $r = 1 + \varepsilon$ [5].

3 Online Coloring von bipartiten Graphen

3.1 Modelle von (bipartiten) Graphen

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wollen wir uns mit einer speziellen Variante des Graphenfärbeproblems beschäftigen. Damit wir dies tun können, wollen wir einige Begriffe definieren:

Definition 1 (Graph)**.** Ein (ungerichteter, ungewichteter) Graph ist ein Tupel

$$G = (V, E),$$

wobei $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ dessen Knoten *(vertices)* bezeichnet und $E = \{e_1, e_2, \dots\}$ dessen Kanten *(edges)*. Jedes e ist eine 2-elementige Teilmenge von V. [4]

Abbildung 3.1 illustriert einen Graphen mit

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

und

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_6\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_4\}\}.$$

Gerichtete Graphen sind für diese Arbeit aber nicht weiter interessant. Dasselbe gilt für gewichtete Graphen; bei diesen wären entweder die Knoten gewichtet (das heisst, wir bräuchten eine zusätzliche Abbildung $w_v : V \to \mathbb{R}$) oder die Kanten gewichtet (durch eine entsprechende Abbildung $w_e : E \to \mathbb{R}$).

Definition 2 (Bipartiter Graph)**.** Wenn alle Knoten eines Graphen G so in zwei disjunkte Mengen S_1 und S_2 (Partitionsklassen oder *shores*) aufgeteilt werden können, dass keine Kanten von G zwischen Knoten innerhalb derselben Shore existieren, sprechen wir von einem bipartiten Graphen.

Abbildung 3.2 illustriert einen bipartiten Graphen mit

$$V = S_1 \cup S_2 = \{v_1, v_2, v_5, v_7, v_8\} \cup \{v_3, v_4, v_6, v_9\}$$

und

$$E = \{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_9\}, \{v_4, v_8\}, \{v_5, v_6\}, \{v_6, v_8\}, \{v_7, v_9\}\}.$$

Abbildung 3.1: Ein Graph

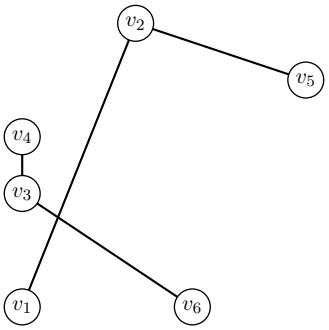


Abbildung 3.2: Ein bipartiter Graph

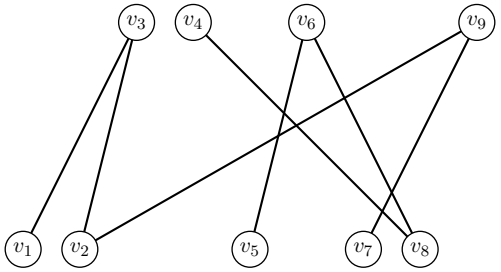
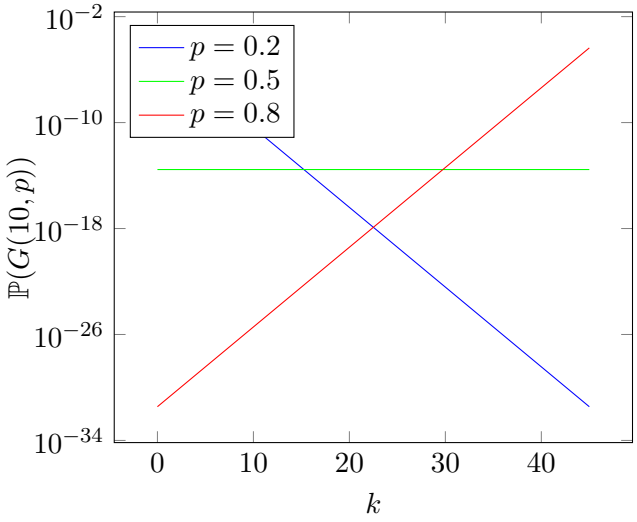


Abbildung 3.3: Verteilung der Auftretenswahrscheinlichkeit eines Zufallsgraphen



3.2 Zufallsgraphen

Wenn wir Eigenschaften von vielen Graphen betrachten wollen, sind Zufallsgraphen ein hilfreicher Denkansatz. Das grundlegende Prinzip ist, eine feste Menge von Knoten V anzunehmen und dann aus allen möglichen Kombinationen von Kanten (sprich aus der Potenzmenge $\mathcal{P}(E)$) mit einer definierten Wahrscheinlichkeit auszuwählen.

Das verbreitete Modell der Erdös-Renyi-Graphen definiert eine Klasse von Graphen $G(n, p)$ mit einer Anzahl Knoten n und einer gleichverteilten Wahrscheinlichkeit p, dass eine Kante zwischen zwei Knoten besteht [7].

Da ein solcher Graph maximal $|\mathcal{P}(E)| = \binom{n}{2}$ Kanten haben kann, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass darin ein Graph mit genau k Kanten auftritt, gegeben als

$$\mathbb{P}(G) = p^k(1-p)^{\binom{n}{2}-k}.$$

Es ist natürlich möglich, dass einzelne Knoten eines solchen Graphen gar keine Kanten haben, sprich das zusammenhängende Graph-Gebilde nicht alle n Knoten beinhaltet. Diese Knoten werden aber trotzdem zum Graphen dazugezählt. [7]

Abbildung 3.3 zeigt die Auftretenswahrscheinlichkeit eines Graphen in $G(10, p)$ abhängig von der Anzahl Kanten für $p = 0.2, 0.5, 0.8$.

3.3 Generierung von Zufallsgraphen

Zufallsgraphen zu generieren ist im Grunde genommen ziemlich einfach, wie Algorithmus 1 zeigt [14]. Das Problem ist allerdings ebenfalls offensichtlich: Die Komplexitäts-

klasse dieses Algorithmus ist $\mathcal{O}(n^2)$.

Algorithmus 1 Ein naiver Zufallsgraphen-Generator

Eingabe:
Anzahl Knoten n,
Kantenwahrscheinlichkeit p.
Ausgabe:
Zufallsgraph $G = (V, E)$.

```
for i ← 1, n do
    for j ← i + 1, n do
        θ ← gleichverteilte Zufallszahl
        if θ < p then
            E ← E ∪ {(v_i, v_j)}
        end if
    end for
end for
```

Um diese technische Suboptimalität zu lösen, verfolgen Nobari, Lu, Karras und Bressan in [14] folgende Idee:

1. Jede Kante (v_i, v_j) (und darum auch $\{v_i, v_j\}$) kann als e_k ausgedrückt werden durch die Beziehungen
$$i = \left\lfloor \frac{k}{v} \right\rfloor$$
und
$$j = k \mod v.$$

2. Damit kann Algorithmus 1 $\in \mathcal{O}(n^2)$ zu einem Algorithmus mit linearer Laufzeitkomplexität $\mathcal{O}(|E|)$ umgeschrieben werden (siehe Algorithmus 2). Da aber $|E| = \binom{n}{2}$ gilt, nützt uns das momentan noch nicht viel.

3. Der eigentliche Trick folgt der Erkenntnis, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Folge von gleichverteilten Zufallsentscheidungen, die zum selben Resultat führen, im Grunde einer geometrischen Verteilung entspricht. Dadurch können wir die Wahrscheinlichkeit, dass die nächsten s Kanten des Graphen mit einer jeweiligen Wahrscheinlichkeit von $1 - p$ ausgelassen werden, ausdrücken als
$$f(s) = p \cdot (1 - p)^s,$$
und die kumulative Verteilungsfunktion wäre ([14])
$$F(s) = \sum_{i=0}^{s} f(i) = 1 - (1 - p)^{s+1}.$$

Algorithmus 2 Ein umgeformter naiver Zufallsgraphen-Generator

Eingabe:
Kantenwahrscheinlichkeit p.
Ausgabe:
Zufallsgraph $G = (V, E)$.

for $i \leftarrow 1, |E|$ **do**
  $\theta \leftarrow$ gleichverteilte Zufallszahl
  if $\theta < p$ **then**
    $E \leftarrow E \cup \{e_i\}$
  end if
end for

Dies bedeutet, dass der Algorithmus nach jedem Setzen einer Kante eine einzige neue Zufallszahl α generiert, mit welcher er bestimmen kann, wieviele Kanten s ausgelassen werden können (nämlich die kleinste ganze Zahl, für welche

$$F(s) \geq \alpha$$

gilt). Durch ein paar Takte Algebra können wir nach s auflösen und bekommen eine explizite Funktion ([14]):

$$s(\alpha) = \max(0, \lceil \log_{1-p} \alpha \rceil - 1)$$

Damit können wir unseren Algorithmus optimieren (siehe Algorithmus 3). Es liegt nun auf der Hand, dass dieser Algorithmus desto schneller ist, je kleiner p gewählt wird. [14] versucht darum, der durch die Berechnung des Logarithmus gestiegenen mathematischen Komplexität Herr zu werden, indem eine Menge an Logarithmus-Werten vorberechnet und wiederverwendet werden. Ausserdem werden noch Optimierungen vorgenommen, um den Algorithmus auf Grafik-Prozessoren laufen zu lassen. Dies ist für uns allerdings nicht weiter spannend, und darum wollen wir es bei der einfachen Optimierung wie eben gesehen belassen.

3.4 Graph Coloring

Definition 3 (Knotenfärbung)**.** Für einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist die Abbildung

$$f : V \to C \subset \mathbb{N}$$

eine Knotenfärbung, wenn keinen zwei Knoten, die durch eine Kante verbunden sind, dieselbe Farbe ($c \in C$) zugeordnet wird.

G heisst k-knotenfärbbar, wenn die maximale Anzahl verwendeter Farben k beträgt – das heisst, wenn für alle $v \in V$ gilt, dass

$$f(v) < k.$$

Algorithmus 3 Ein Zufallsgraphen-Generator mit Edge Skipping

Eingabe:
Kantenwahrscheinlichkeit p.
Ausgabe:
Zufallsgraph $G = (V, E)$.

$i \leftarrow -1$
while $i < |E|$ **do**
  $\alpha \leftarrow$ gleichverteilte Zufallszahl
  $s \leftarrow \max(0, \lceil \log_{1-p} \alpha \rceil - 1)$
  $i \leftarrow i + s + 1$
  $E \leftarrow E \cup \{e_i\}$
end while
Entferne die letzte Kante

Die kleinstmögliche solche Zahl k wird Chromatische Zahl $\chi(G)$ geheissen.

Das Auffinden einer gültigen Färbung für einen Graphen wird als Graphenfärbeproblem bezeichnet. Das dazugehörige Entscheidungsproblem, ob ein Graph k-färbbar ist, ist eines von Karp's 21 $\mathcal{NP}$-vollständigen Problemen [10]. Praktische Anwendung finden Färbeprobleme vor allem als mathematische Formulierung von Scheduling-Problemen aller Art, beispielsweise für Stundenpläne. Ein anderes wohlstudiertes Problem ist die Frage, wie viele Farben notwendig sind, um auf einer beliebigen Landkarte jedes Land so einzufärben, dass nie zwei benachbarte Länder dieselbe Farbe haben – mit dem lange vermuteten, aber doch überraschenden Ergebnis, dass 4 Farben ausreichend sind [8].

Ausserdem liegt auf der Hand, dass ein bipartiter Graph stets 2-färbbar ist.

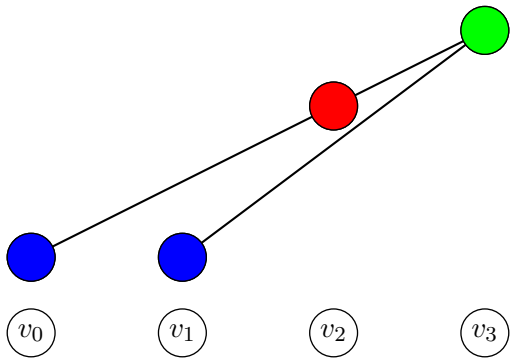
3.5 Online Graph Coloring: First Fit-Algorithmus

Wir wollen das Graphenfärbeproblem nun als Online-Problem betrachten. Dafür stellen wir uns vor, dass der zu färbende Graph nicht komplett vorliegt, sondern jeder Knoten einzeln präsentiert wird. Jeder Knoten muss im Moment seiner Präsentation eingefärbt werden. Alle Kanten zwischen bereits aufgedeckten Knoten sind bekannt, alle anderen jedoch nicht. [12]
Offensichtlich kann ein solches Problem nicht per se optimal gelöst werden, da Informationen über das gesamte Problem fehlen. Abbildung 3.4 veranschaulicht den simplen First Fit-Algorithmus 4:

1. Zuerst wird die höchste zugeordnete Farbe im Graphen gesucht (k) und daraus eine Menge C' aufgebaut, die alle verwendeten Farben enthält.

2. Danach wird über allen Farben iteriert, und diejenigen wieder aus C' entfernt, welche einem Nachbarknoten von v zugeordnet sind.

Abbildung 3.4: Nicht optimal färbbarer bipartiter Graph



3. Falls nun keine Farben mehr in C' enthalten sind, wird eine neue Farbe $k+1$ erfunden und zugeordnet – ansonsten wird die kleinste verfügbare Farbe zugeordnet.

Wir können beobachten, wie dieser Algorithmus für einen beispielhaften (aber doch unspektakulären) bipartiten Graphen folgendermassen scheitert:

1. Der Knoten v_0 wird präsentiert, und bekommt die Farbe Blau.
2. Der Knoten v_1 wird präsentiert, und bekommt ebenfalls die Farbe Blau, da noch keine Kante bekannt ist.
3. Der Knoten v_2 wird präsentiert, und mit ihm die Kante $\{v_0, v_2\}$. v_2 bekommt die Farbe Rot, da v_0 bereits die Farbe Blau bekommen hat.
4. Der Knoten v_3 wird präsentiert, und mit ihm die Kanten $\{v_0, v_3\}$ und $\{v_1, v_3\}$. v_3 bekommt die Farbe Grün, da v_1 bereits die Farbe Blau und v_2 bereits die Farbe Rot bekommen hat.

Der kapitale Fehler passierte bereits beim Färben von v_1. Es gab anhand der bereits vorhandenen Informationen keinen Grund, nicht anzunehmen, dass v_1 Blau zugeordnet bekommen sollte. Wenn allerdings bekannt gewesen wäre, dass v_1 eine Kante zu v_3, dieser eine Kante zu v_2 und dieser wiederum eine Kante zu v_0 haben wird, hätte dies ausgereicht, um zu erkennen, dass v_1 in der gegenteiligen Shore von v_0 hätte platziert werden müssen, wie in Abbildung 3.5 illustriert wird.

Das Online Coloring-Problem hat keine konstante Competitive Ratio ([3]), wie in [9] gezeigt wird. Für den Nachvollzug wollen wir uns vergegenwärtigen, dass jeder Baum ein bipartiter Graph ist, weil alle Knoten einer Ebene nur mit Knoten der jeweiligen nächsten oder vorhergehenden Ebene verknüpft sein können, wie in Abbildung 3.6 skizziert.
Wir überlegen uns nun eine rekursive Folge von Bäumen:

- Der Baum T_1 besitzt nur einen Knoten.

Algorithmus 4 First Fit-Algorithmus für Online Graph Coloring

Eingabe:
Der präsentierte Knoten v,
Der bereits bekannte Graph $G' = (V', E')$,
Die bereits bekannte Färbung $f : V' \to C$
Ausgabe:
Die Färbung für den präsentierten Knoten $f(v) \in C$

$k \leftarrow \max_{w \in V'} f(w)$
$C' \leftarrow \{1, \ldots, k\}$

for all $c \in C'$ **do**
  for all $e \in E'$ **do**
    if $v \in e$ **then**
      $\{w\} \leftarrow e \cap v$
      if $f(w) = c$ **then**
        $C' \leftarrow C' - \{f(w)\}$
      end if
    end if
  end for
end for

if $C' \neq \{\}$ **then**
  $f(v) \leftarrow \min C'$
else
  $f(v) \leftarrow k + 1$
end if

Abbildung 3.5: Optimal gefärbter bipartiter Graph

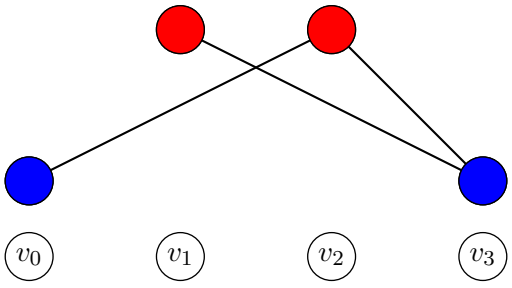
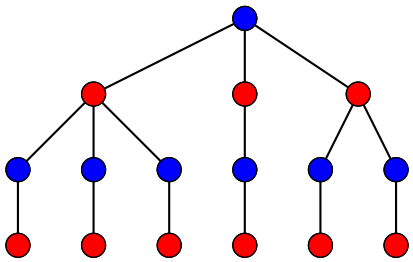


Abbildung 3.6: Ein Baum



- Der Baum T_n besteht aus der Vereinigung von exakten Kopien aller Bäume $T_1, \dots T_{n-1}$ sowie einem zusätzlichen Knoten, der eine Kante zu den jeweiligen Wurzelknoten all dieser Bäume hat. Abbildung 3.7 verdeutlicht dies.

Wenn wir nun die Knoten dieser Bäume in einer geeigneten Reihenfolge präsentieren, maximieren wir die Menge an verdeckter Information, welche jeden Online-Algorithmus scheitern lassen wird. Für den besprochenen First Fit-Algorithmus 4 gehen wir beispielsweise folgendermassen vor:

1. Wir präsentieren zuerst alle Knoten, welche durch rekursives Kopieren von T_1 entstanden sind – diese bilden auch gleichzeitig alle Blattknoten aller Bäume. Da diese Knoten natürlich keine gemeinsamen Kanten haben, wird der Algorithmus allen dieselbe Farbe zuweisen – beispielsweise Blau.

2. Nun präsentieren wir alle Knoten, welche durch rekursives Kopieren des für T_2 hinzugefügten Knotens entstanden sind. (Wenn wir uns die im vorhergehenden Schritt präsentierten Knoten aus den Bäumen wegdenken würden, würden die T_2-originären Knoten die neue Menge an Blattknoten bilden.) Der Algorithmus kann diese Knoten nicht blau färben, da sie alle eine Kante zu schon präsentierten Knoten haben – ergo bekommen sie die Farbe Rot.

3. Den zweiten Schritt wiederholen wir nun für die in $T_3, T_4, \dots$ hinzugefügten und in jeden weiteren Baum kopierten Knoten. Schon bei T_3 stellen wir fest, dass der dazumal hinzugefügte Knoten nur eine dritte Farbe zugeordnet bekommen kann, da er Kanten zu je einem der in den beiden vorangegangenen Schritten präsentierten Knoten hat.

Die Abbildung 3.8 veranschaulicht das Resultat. Es ist nun offensichtlich, dass der Algorithmus für jeden Baum T_n genau n Farben benötigt. Da jeder dieser Bäume 2^{n-1} Knoten hat, und es unendlich viele solcher Bäume gibt (das Spiel lässt sich bei genügend Platz und Zeit endlos weitertreiben), konstatieren wir eine nicht-konstante Competitive Ratio von

$$r = \frac{\log_2 k + 1}{2}$$

Abbildung 3.7: Die Folge $T_1, \ldots, T_6$

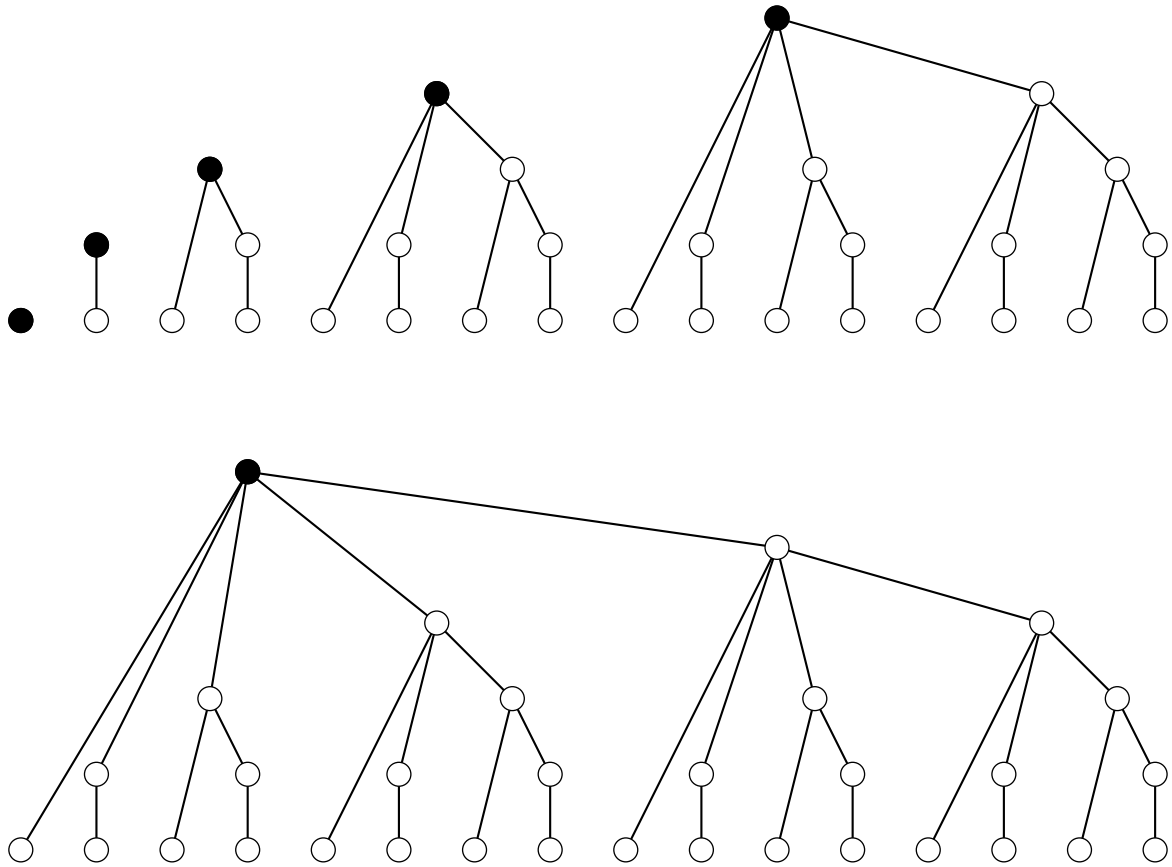
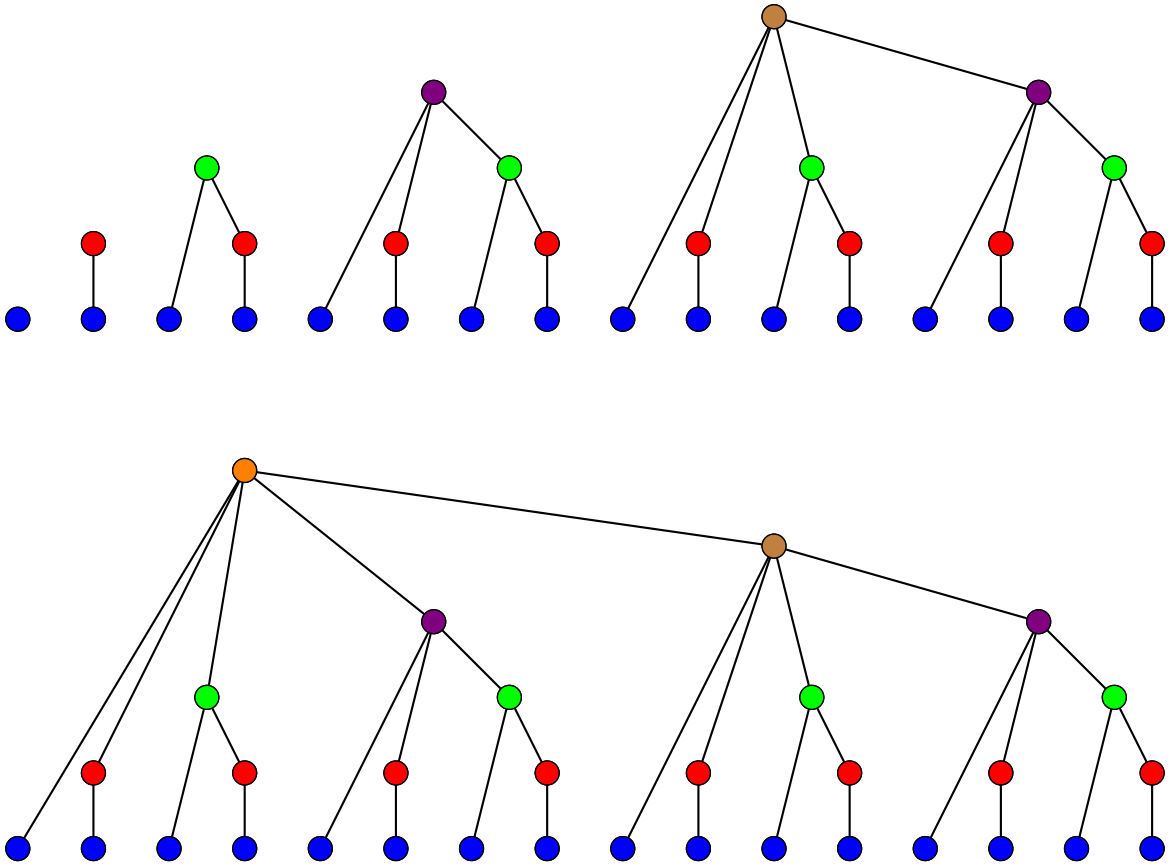


Abbildung 3.8: First Fit auf $T_1, \ldots, T_6$



in Abhängigkeit der Anzahl Knoten k. Gleichzeitig ist darum $\log_2 k + 1$ eine untere Schranke für die minimale Anzahl Farben von Online-Algorithmen auf bipartiten Graphen – allerdings eine zu optimistische, denn [3] erhöht diese auf

$$1.13747 \cdot \log_2 k.$$

4 Online Coloring von bipartiten Graphen mit Advice

Im vorhergehenden Kapitel haben wir festgestellt, dass Online Coloring auf bipartiten Graphen nicht kompetitiv ist. Wir wollen nun betrachten, wie sich der Einsatz eines Orakels im Sinne der Advice Complexity auf die Kompetivität auswirken würde – und hoffen auf ähnlich erstaunliche Ergebnisse wie im Falle von SimpleKnapsack.

4.1 Online Coloring Algorithmus mit Advice

Das Hauptproblem von Online-Färbe-Algorithmen scheint zu sein, dass es Situationen während der Präsentation der Knoten geben kann, welche zu gleichen Färbungen von Knoten auf beiden Shores führen können, wie wir durch Betrachten der Abbildungen 3.4 und 3.5 rekapitulieren können. Dies ist einzig der fehlenden Information über die Zukunft geschuldet. Ein allenfalls eingesetztes Orakel sollte also in genau diesem Aspekt helfen können. Die benötigte Unterstützung beschränkt sich aber auf ein schmales Band: um eine konstante Competitive Ratio $\frac{k}{2}$ zu erreichen (sprich: k Farben zuzulassen), ist einzig wichtig, die Farben k und $k-1$ nicht durcheinander zu bringen [3].

Dies führt zum Algorithmus 5, welcher wie der First Fit-Algorithmus immer die niedrigstmögliche Farbe zuordnet. Falls aber für einen Knoten die einzigen beiden möglichen Farben $k-1$ und k sind, fragt er das Orakel, wie der Knoten gefärbt werden soll. Damit wird sichergestellt, dass alle Knoten mit der Farbe $k-1$ auf der einen Seite und alle Knoten mit der Farbe k auf der anderen Seite des Graphen sind.

4.2 Obere und untere Schranken für Advice Bits

Bezüglich den Schranken für Advice Bits lassen sich folgende Aussagen machen:

- Um jeden bipartiten Graphen mit n Knoten optimal färben zu können, sind höchstens $n-2$ Advice Bits nötig. Die Begründung liegt darin, dass ein Algorithmus konstruiert werden kann, der folgendermassen funktioniert:

  1. Der erste Knoten bekommt die Farbe 1.

Algorithmus 5 Online Graph Coloring-Algorithmus mit Advice

Eingabe:
Der präsentierte Knoten v,
Der bereits bekannte Graph $G' = (V', E')$,
Die bereits bekannte Färbung $f : V' \to C$,
Die maximale Anzahl erlaubter Farben k,
Das Orakel $\mathcal{O} : V \to \{0, 1\}$

Ausgabe:
Die Färbung für den präsentierten Knoten $f(v) \in C$

$C' \leftarrow \{1, \ldots, k\}$
for all $c \in C'$ **do**
  for all $e \in E'$ **do**
    if $v \in e$ **then**
      $\{w\} \leftarrow e \cap v$
      if $f(w) = c$ **then**
        $C' \leftarrow C' - \{f(w)\}$
      end if
    end if
  end for
end for

if $C' \neq \{k-1, k\}$ **then**
  $f(v) \leftarrow \min C'$
else
  $f(v) \leftarrow k - 1 + \mathcal{O}(v)$
end if

2. Bei der Präsentation des zweiten Knotens wird das Orakel gefragt, ob jedem bei der Präsentation isolierten Knoten ebenfalls die Farbe 1 zugeordnet werden soll. Nicht-isolierte Knoten bekommen die bezüglich des Nachbarknoten entgegengesetzte Farbe. Bei einer Bejahung dieser Frage beträgt die Anzahl Advice Bits genau $1 \leq n-2$.
3. Falls das Orakel bei Schritt 2 verneint, wird es bei jedem isolierten Knoten nach der Farbe gefragt. Das Orakel würde die erste Frage aber nur verneinen, wenn es mindestens 2 nicht isolierte Knoten gibt – ansonsten wäre Optimalität auch noch gewährleistet, wenn die Farbe 1 auf beiden Shores auftauchen würde. Also beträgt die Anzahl Advice Bits höchstens $n-2$. [3]

- Um jeden bipartiten Graphen mit n Knoten optimal färben zu können, sind mindestens $n-3$ Advice Bits nötig. [3]
- Um jeden bipartiten Graphen mit n Knoten mit höchstens $k > 2$ Farben färben zu können, sind höchstens $\frac{n}{\sqrt{2^{k-1}}}$ Advice Bits nötig [3]. Dies ergibt sich aus der Beobachtung, dass die Befragung des Orakels, ob die Farbe k oder $k-1$ zugewiesen werden soll, nur jeweils notwendig wird, wenn der aktuell präsentierte Knoten $k-2$ Kanten zu Nachbarn mit genau den Farben $\{1, \ldots, k-2\}$ hat. Durch Induktion lässt sich dann zeigen, dass dies nur für jeden $\sqrt{2^{k-1}}$ten aller n Knoten der Fall ist [3, 11].

  Wir könnten entgegenhalten, dass wir einen Graphen konstruieren könnten, der für diesen Algorithmus möglichst schlecht funktioniert, indem wir die Anzahl an $\{k-1, k\}$-Auswahlmöglichkeit maximieren. Dies könnte zum Beispiel durch die Konstruktion von Bäumen $T_1, \ldots T_{k-2}$ erreicht werden, welche nicht miteinander verbunden sind. Die Präsentation dieser Bäume führte dazu, dass der Algorithmus für den jeweiligen originären Knoten des $i$ten Baumes die Farbe i verwenden müsste. Die restlichen $n-1+2^{k-1}$ Knoten würden dann mit all diesen originären Baumknoten verbunden und präsentiert. Da der Algorithmus für die Nachbarn dieser Knoten bereits $k-2$ Farben verwendet hätte, müsste er die Farbe $k-1$ oder k verwenden – was zu $n-1+2^{k-1}$ Advice Bits führen würde.

  Dies ist allerdings nur vordergründig ein Problem, da k nur die Höchstgrenze an erlaubten Farben darstellt. Tatsächlich ist es so, dass die Anzahl Advice Bits für einen derartigen Graphen bei $k' = k-1$ ausserordentlich klein wird (weil der Adversary seine gesamte Konzentration in die Forcierung von $k-2$ legt).

4.3 Experimente

Mit Hilfe des zu dieser Arbeit gehörenden Programms `GraphBonanza` werden wir nun einige Experimente durchführen. Die aus den Experimenten angefallenen Daten sind von https://github.com/foyan/GraphBonanza/blob/master/doc/thesis/Experimente.xlsx beziehbar.

Tabelle 4.1: First Fit gegen Algorithmus mit Advice für 10000 Instanzen von $G(1000, 0.1)$

FF: # colors	# samples	AA: min advice bits	AA: avg advice bits	AA: max advice bits
2	11	13	17.72727273	26
3	156	18	46.90384615	156
4	199	17	54.11055276	186
5	222	14	51.38288288	175
6	255	10	42.21176471	123
7	382	3	30.23036649	115
8	661	1	19.28290469	87
9	1087	1	15.05335787	62
10	1570	1	12.19235669	44
11	1756	1	10.90261959	31
12	1577	1	10.10653139	22
13	1122	0	8.163101604	15
14	642	0	5.230529595	11
15	260	0	2.384615385	7
16	88	0	1.579545455	5
17	12	0	0.5	3

4.3.1 Anzahl Advice Bits für dieselbe Competitive Ratio wie First Fit

In diesem ersten Experiment wollen wir untersuchen, wie viele Advice Bits durchschnittlich, minimal und maximal benötigt werden, um eine repräsentative Menge von $G(n, p)$-Graphen zu färben. Dabei wird die maximale Anzahl Farben k für den Algorithmus mit Advice so gewählt, dass er jeweils dem Resultat von First Fit entspricht. Tabelle 4.1 zeigt das Resultat für 10000 Instanzen von $G(n = 1000, p = 0.1)$. Die Daten sind über die vom First Fit-Algorithmus benötigten Anzahl Farben gruppiert (Spalte FF: # colors) und weisen die minimale, maximale und durchschnittliche Anzahl Advice Bits aus, welche der Algorithmus mit Advice angefragt hat. Die Tabellen 4.2 und 4.3 zeigen die Resultate desselben Experiments für $p = 0.5$ respektive $p = 0.9$.

Des weiteren geben die Abbildungen 4.1, 4.2, 4.3 einen visuellen Überblick über diesen Sachverhalt. Dabei zeigt die rote Kurve den Verlauf der oberen Schranke, der graue Bereich die jeweilige Bandbreite der verwendeten Advice Bits, die schwarze Kurve den durchschnittliche Anzahl Advice Bits sowie die blauen Balken die Anzahl Male, für welche der First Fit-Algorithmus die entsprechende Anzahl Farben verwendet hat.

Es fallen folgende Dinge auf:

- Bei sehr kleinen Kantenwahrscheinlichkeiten ($p = 0.01$, $p = 0.02$) ist der First Fit-Algorithmus in der Lage, jeweils immer ungefähr dieselbe Anzahl Farben zu verwenden ($k \in \{6, 7, 8\}$). Des weiteren kann auch der Algorithmus mit Advice mit dieser Competitive Ratio mithalten, ohne je in die Nähe der Schranke zu kommen.

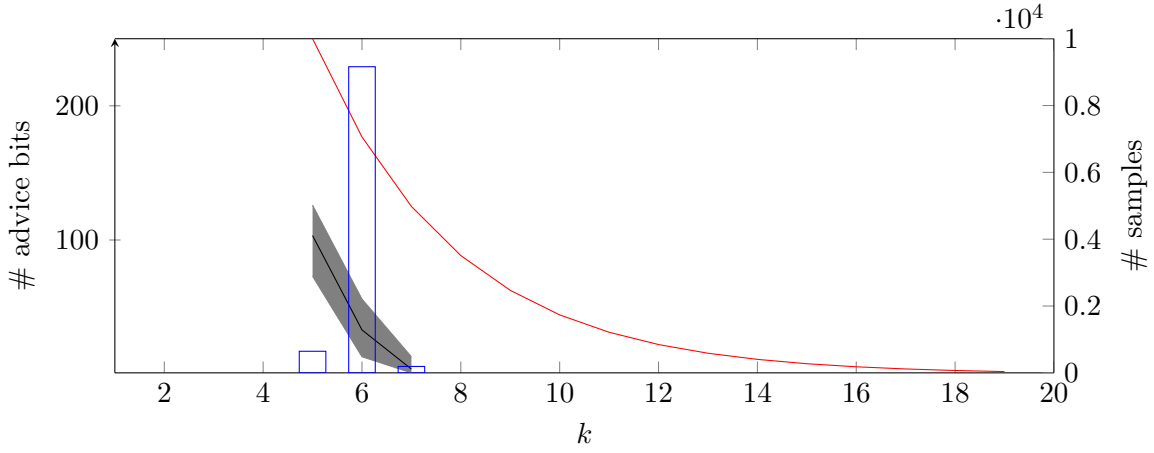
Tabelle 4.2: First Fit gegen Algorithmus mit Advice für 10000 Instanzen von $G(1000, 0.5)$

FF: # colors	# samples	AA: min advice bits	AA: avg advice bits	AA: max advice bits
2	4190	1	3.999045346	16
3	3040	1	5.537171053	23
4	1474	1	5.865671642	34
5	708	1	6.015536723	34
6	330	1	6.387878788	32
7	137	1	6.510948905	27
8	63	1	6.587301587	25
9	31	1	7.064516129	19
10	17	2	6.117647059	13
11	7	2	4.285714286	10
12	2	3	3.5	4
13	1	2	2	2

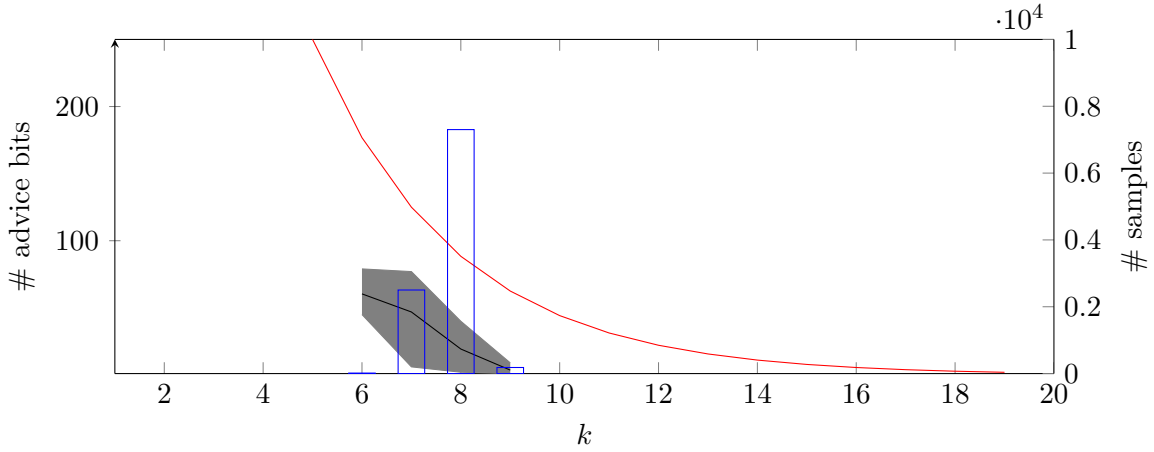
Tabelle 4.3: First Fit gegen Algorithmus mit Advice für 10000 Instanzen von $G(1000, 0.9)$

FF: # colors	# samples	AA: min advice bits	AA: avg advice bits	AA: max advice bits
2	9035	1	2.221140011	155
3	905	1	2.722651934	13
4	58	1	2.793103448	8
5	2	3	4.5	6

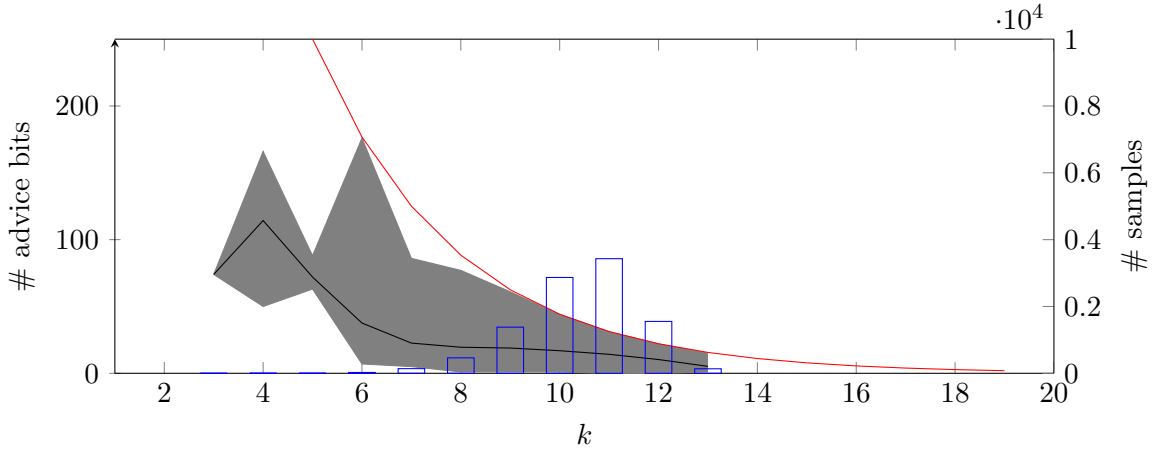
Abbildung 4.1: `FF` gegen `AA` für 10000 Instanzen von $G(1000, p)$, I



(a) $p =$ 0.01

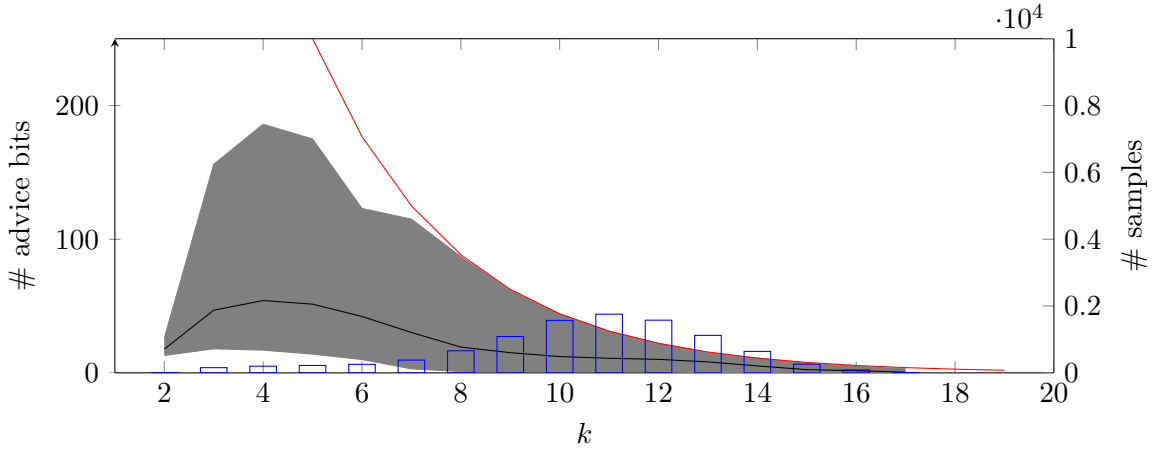


(b) $p =$ 0.02

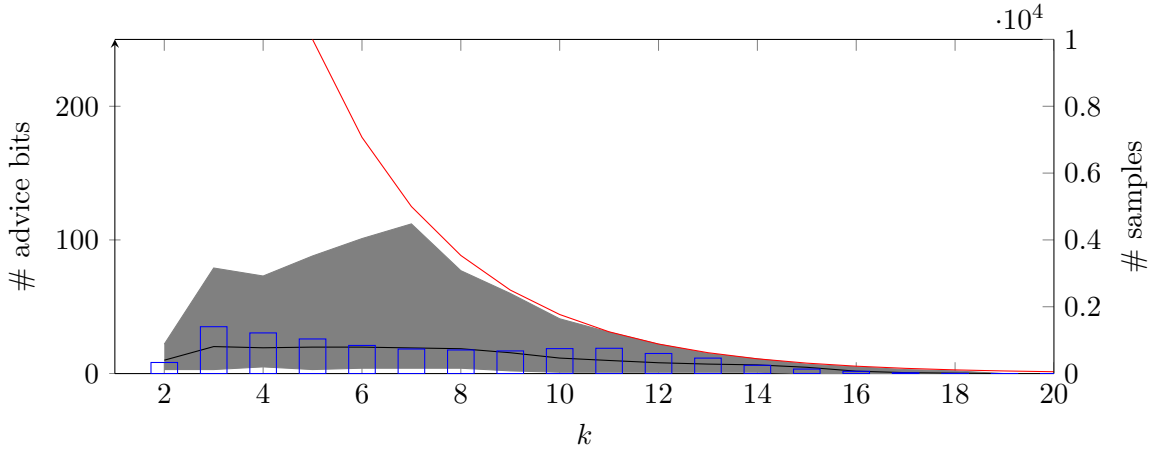


(c) $p =$ 0.05

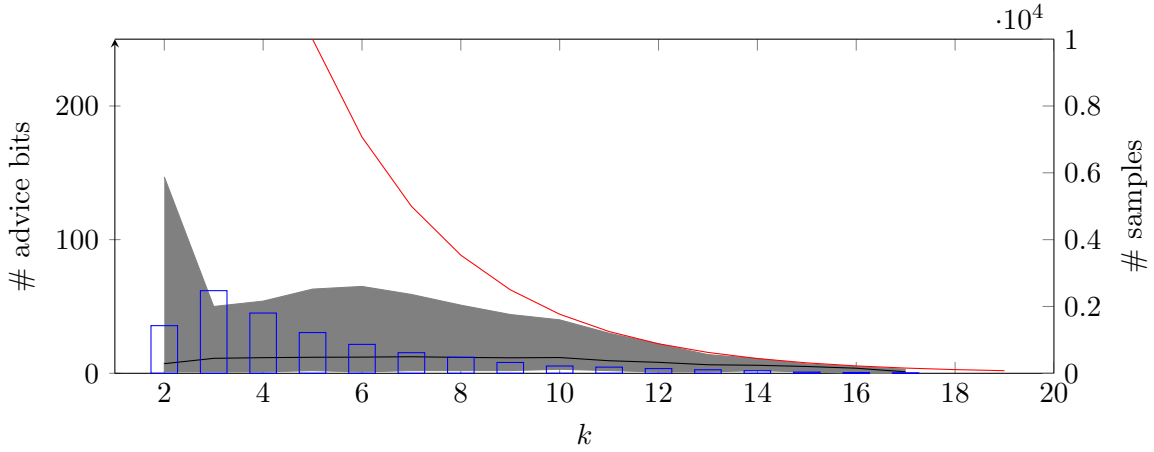
Abbildung 4.2: `FF` gegen `AA` für 10000 Instanzen von $G(1000, p)$, II



(a) $p = 0.1$

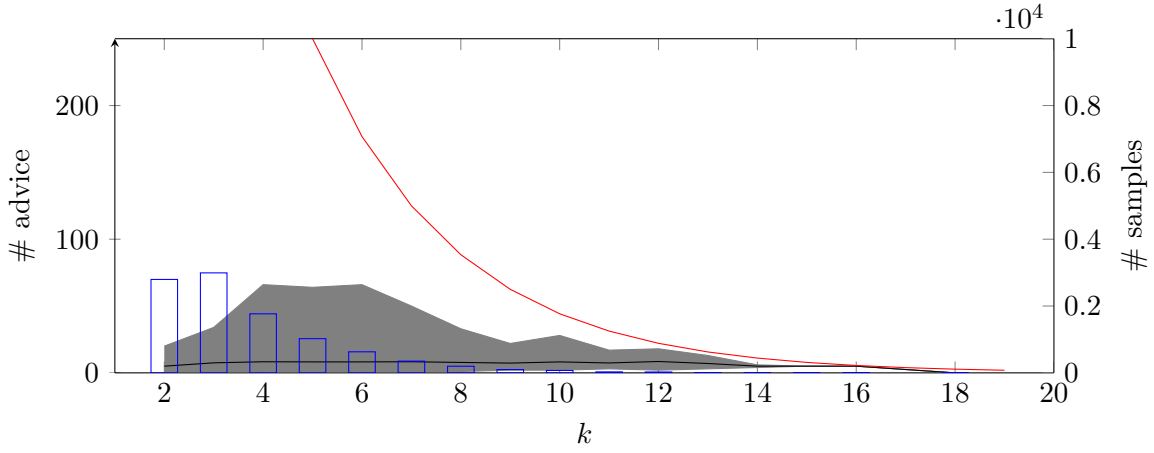


(b) $p = 0.2$

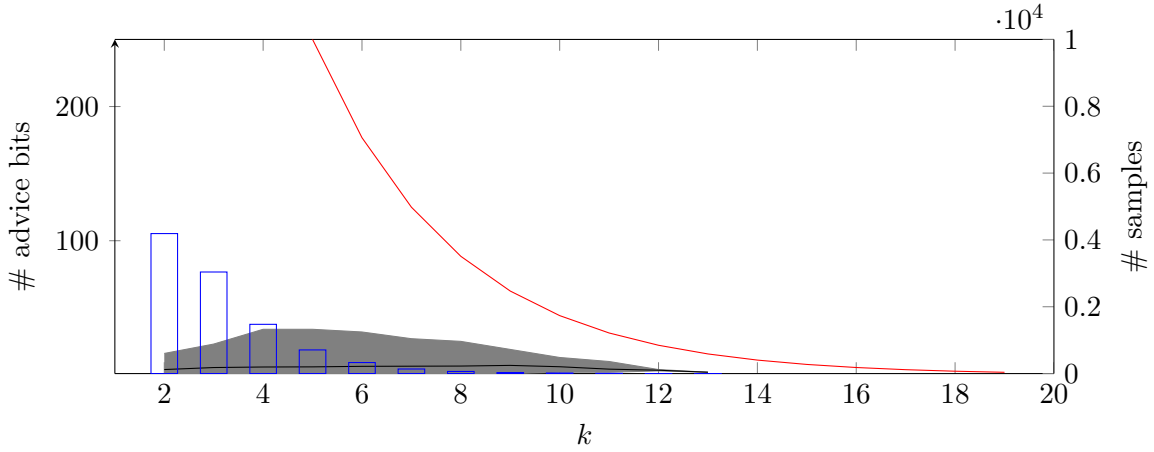


(c) $p = 0.3$

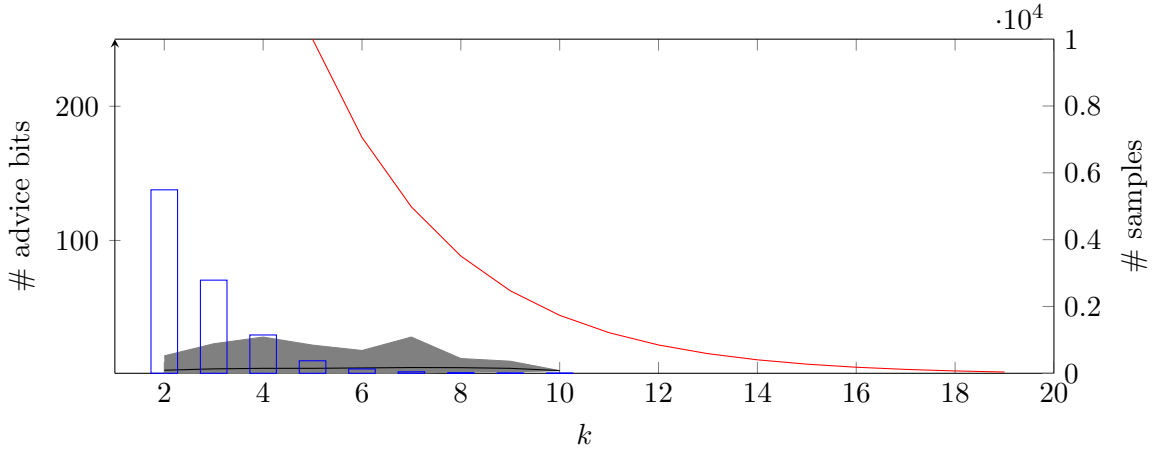
Abbildung 4.3: `FF` gegen `AA` für 10000 Instanzen von $G(1000, p)$, III



(a) $p = 0.4$



(b) $p = 0.5$



(c) $p = 0.6$

Abbildung 4.4: k in Abhängigkeit von p

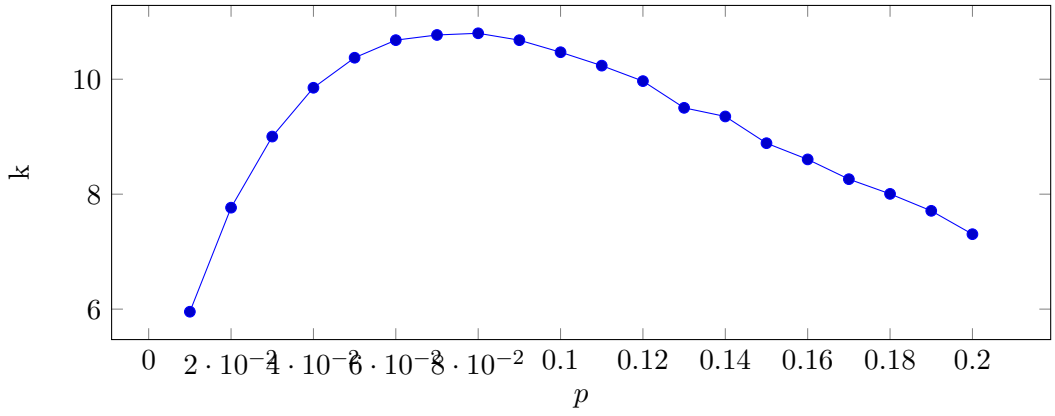
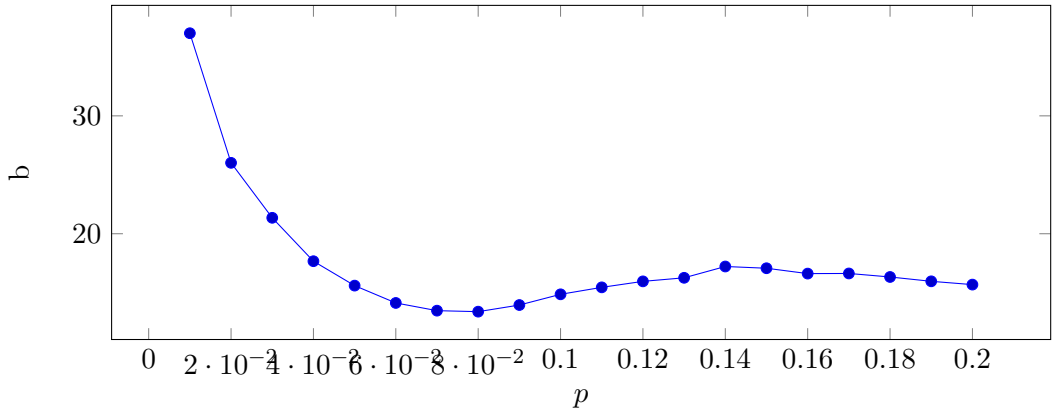


Abbildung 4.5: b in Abhängigkeit von p



- Bei ungefähr $p = 0.05$ ändern sich diese Verhalten jedoch – die Streuung von k wird breiter für First Fit, und der Algorithmus mit Advice beginnt sich für einzelne Instanzen an die Schranke heranzutasten.
- Mit stetig grösser werdendem p verschiebt sich die Häufung der ks von First Fit nach unten – dies erscheint logisch, da durch die gestiegene Kantendichte der Informationsgehalt steigt. Ebenso beginnt sich der Bereich der Advice Bits abzuflachen.

Der Verlauf von k und der durchschnittlichen Anzahl Advice Bits für den Bereich $p \in (0.01; 0.20)$ ist in den Abbildungen 4.4 und 4.5 dargestellt. Wir beobachten vor allem, dass ab $p = 0.14$ die Anzahl benötigter Advice Bits wieder zu sinken beginnt, das heisst für $p = 1000$ scheint sich dort die zunehmende Informationsdichte positiv auszuwirken.

Abbildung 4.6: b für $k = 2$ in $G(n, 0.1)$

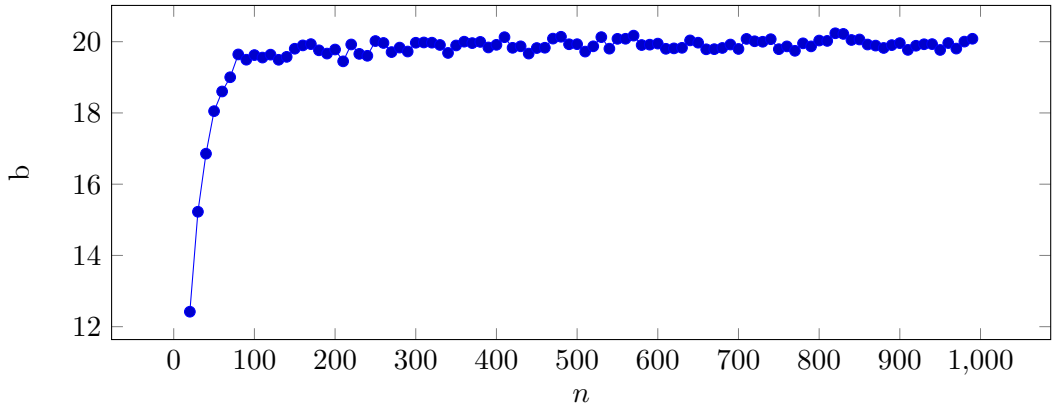
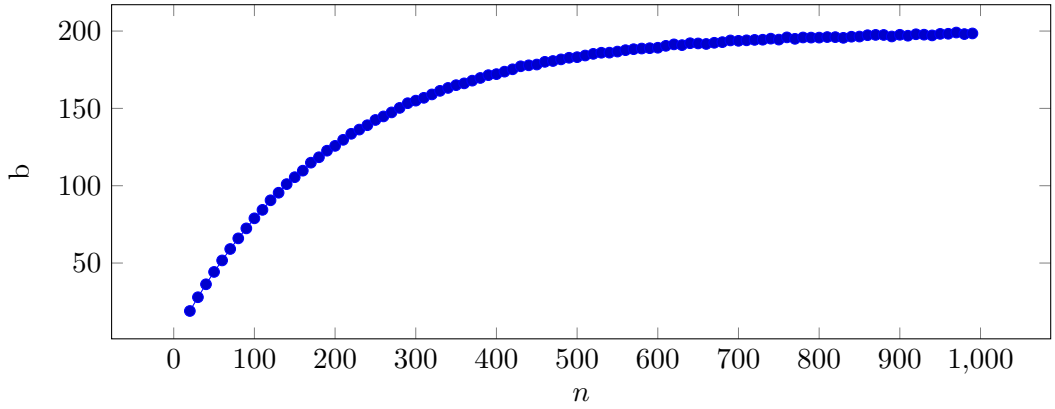


Abbildung 4.7: b für $k = 2$ in $G(n, 0.01)$



4.3.2 Anzahl Advice Bits für Optimalität

In diesem Experiment wollen wir untersuchen, wie viele Advice Bits durchschnittlich benötigt werden, um eine repräsentative Menge von $G(n, p)$-Graphen optimal zu färben. Die Ergebnisse für $n \in (20; 990)$ sind je für $p = 0.1$, $p = 0.01$ und $p = 0.001$ in den Abbildungen 4.6, 4.7 und 4.8 gegeben.

Dabei fällt auf, dass sich b logarithmisch verhält – bei $p = 0.01$ ist es offensichtlich, bei den anderen Kantenwahrscheinlichkeiten können wir es zumindest erahnen.

4.3.3 Anzahl Advice Bits für $k = 3$

Zum Abschluss wollen wir noch überprüfen, ob sich für $k = 3$ (und darum für die Competitive Ratio $c = \frac{3}{2}$) eine Besonderheit ergibt. Dies ist für $p = 0.1$ ebenfalls nicht der Fall, wie in wir auf Abbildung 4.9 nachschauen können.

Abbildung 4.8: b für $k = 2$ in $G(n, 0.001)$

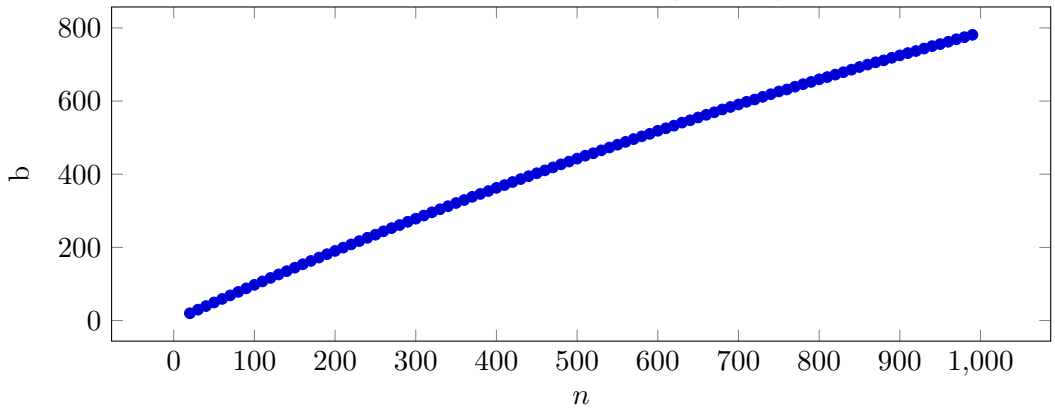
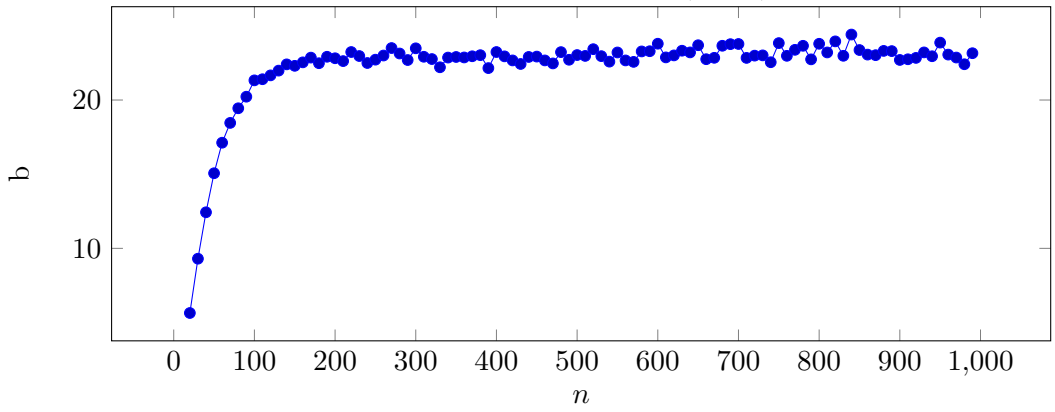


Abbildung 4.9: b für $k = 3$ in $G(n, 0.1)$



4.4 Fazit der Experimente

Es scheint so zu sein, dass die Länge der Probleminstanz n und die Kantendichte p zusammengehören – sie beide bestimmen am Schluss den Informationsgehalt, den das Online-Problem über die Zeit freigibt. Dieser Informationsgehalt bestimmt in der Konsequenz die quantitative Grenze – wie wir gesehen haben, nimmt die Steigung von b mit steigender Länge n und konstantem p stetig ab.

Über den Zusammenhang zwischen First Fit und Algorithmus mit Advice lässt sich hingegen folgendes sagen:

- Für $n = 1000$ scheint die Anzahl benötigter Advices bis $p = 0.14$ zu- und dann wieder leicht abzunehmen. Wir möchten einen Zusammenhang zwischen dieser Bewegungsänderung und n vermuten.
- Nicht immer kann der Algorithmus mit Advice dasselbe Problem mit exakt derselben Competitive Ratio wie der First Fit Algorithmus lösen: Wenn der Graph (zufällig oder absichtlich) so konstruiert ist, dass es bei zuvielen Knoten, die die Farbe $k - 1$ erhalten würden, egal ist, welche Farbe sie bekommen, wird Advice quasi *verschwendet*, was zu einer Verletzung der Schranken führt. Dies ist aber kein Beinbruch – da der Algorithmus mit Advice dasselbe Problem sogar mit einer besseren Competitive Ratio lösen kann und dabei weniger Advice benötigt.

5 Kommentierung der Implementation des Programms GraphBonanza

In den nachfolgenden Abschnitten sollen ein Überblick über die Anforderungen an das Programm sowie deren technische Umsetzung gegeben werden. Wo notwendig, sinnvoll und/oder interessant, werden auch einzelne Code-Abschnitte wiedergegeben und kommentiert.

5.1 Anforderungen

Die primäre Anforderung an das Programm besteht darin, ein Umfeld zu schaffen, worin die Experimente durchgeführt werden können. Ausserdem sollen einzelne Graphen visualisiert werden können.

5.2 Umfeld, Architektur und verwendete Bibliotheken

Das Programm wurde als reine Browser-Lösung unter Verwendung von `HTML` und `JavaScript` umgesetzt. Dadurch ist es theoretisch auf sämtlichen gängigen Plattformen lauffähig und hat keine Abhängigkeiten zu anderen Komponenten und Diensten wie Laufzeitumgebungen, Webservern, Datenbanken oder ähnlichem. Der Nachvollziehbarkeit und der Verwendung durch Dritte ist ebenfalls förderlich, dass kein Compiler vonnöten ist.

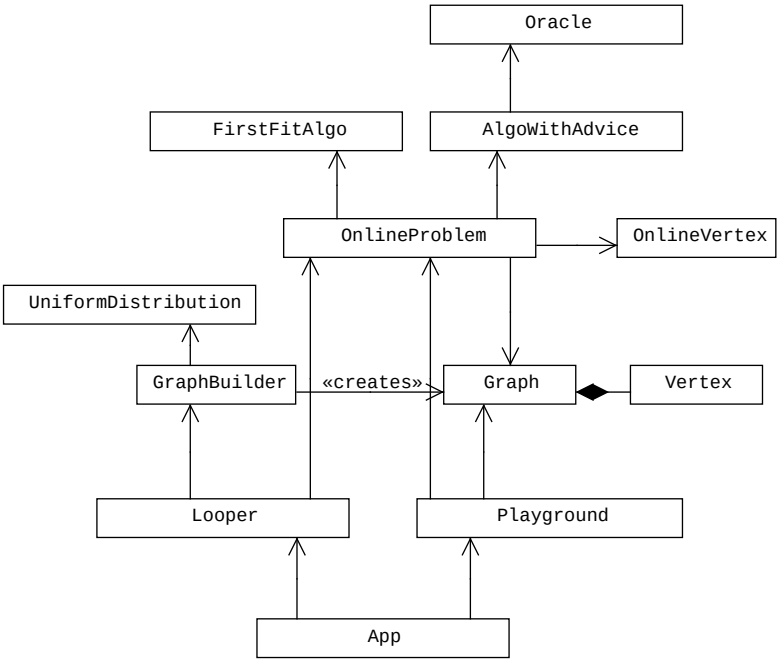
In der Praxis wird die Portabilität natürlich eingeschränkt durch die teilweise unvollständige und fehlerhafte Implementierung von `JavaScript`, `HTML` und `CSS` durch veraltete Browser wie zum Beispiel Internet Explorer. Es zeigt sich aber, das das Programm in aktuellen Versionen von `Firefox` und `Chrome` wie erwartet funktioniert.

Das UML-Diagramm in Abbildung 5.1 zeigt einen Überblick über die implementierten Klassen.

Die verwendeten Bibliotheken sind die folgenden:

- `jQuery` und `jQueryUI` für die Bereitstellung von Controls und Infrastruktur für die Benutzeroberfläche;
- `knockout.js` für die Vereinfachung des Datenbindings an die Oberfläche;
- `sigma.js` für die Visualisierung der Graphen.

Abbildung 5.1: Klassendiagramm von `GraphBonanza`



5.3 Die `GraphBuilder`-Klasse

Diese Klasse hat den Zweck, Zufallsgraphen gemäss dem $G(n, p)$-Modell unter Verwendung des optimierten Algorithmus 3 herzustellen. Die den optimierten Algorithmus betreffenden Teile der `build()`-Funktion sind in Abbildung 5.2 abgebildet.

Abbildung 5.2: `GraphBuilder::build()`

```
var graph = new Graph();

/* [...] */

var prob = self.probability();

var logProb = Math.log(1 - prob);
var e = -1;
while (e < edgeCount) {
  var r = Math.random();
  var k = Math.max(0, Math.ceil(Math.log(r) / logProb - 1));
  e += (k + 1);

  var i = e % shore1Count;
  var j = Math.floor(e / shore1Count);

  if (i  < shore1.length && j < shore2.length) {
    var v1 = shore1[i];
    var v2 = shore2[j];
    v1.friends.push(v2);
    v2.friends.push(v1);
  }
}

self.shuffle(graph.verteces);

for (var i = 0; i < graph.verteces.length; i++) {
  graph.verteces[i].index = i;
}

return graph;
```

Literaturverzeichnis

[1] Hans-Joachim Böckenhauer, Dennis Komm, Rastislav Královič, Richard Královič, and Tobias Mömke. On the advice complexity of online problems. In Yingfei Dong, Ding-Zhu Du, and Oscar Ibarra, editors, *Algorithms and Computation*, volume 5878 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 331–340. Springer Berlin Heidelberg, 2009.

[2] Hans-Joachim Böckenhauer, Dennis Komm, Rastislav Královič, Richard Královič, and Tobias Mömke. Online algorithms with advice. technical report 614, 2009.

[3] Maria Paola Bianchi, Hans-Joachim Böckenhauer, Juraj Hromkovič, and Lucia Keller. Online coloring of bipartite graphs with and without advice. In Joachim Gudmundsson, Julián Mestre, and Taso Viglas, editors, *Computing and Combinatorics*, volume 7434 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 519–530. Springer Berlin Heidelberg, 2012.

[4] Norman Biggs. *Algebraic Graph Theory (Cambridge Mathematical Library)*. Cambridge University Press, 2 edition, 2 1994.

[5] Hans-Joachim Böckenhauer, Dennis Komm, Richard Královič, and Peter Rossmanith. On the advice complexity of the knapsack problem. In *Proceedings of the 10th Latin American International Conference on Theoretical Informatics*, LATIN'12, pages 61–72, Berlin, Heidelberg, 2012. Springer-Verlag.

[6] Stefan Dobrev, Rastislav Královič, and Dana Pardubská. Measuring the problem-relevant information in input. *RAIRO - Theoretical Informatics and Applications*, 43:585–613, 7 2009.

[7] P. Erdös and A. Rényi. On random graphs i. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 6:290, 1959.

[8] Georges Gonthier. A computer-checked proof of the Four Colour Theorem. 2005.

[9] A. Gyárfás and J. Lehel. On-line and first fit colorings of graphs. *Journal of Graph Theory*, 12(2):217–227, 1988.

[10] John E. Hopcroft and Jeff D. Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*. Addison-Wesley Publishing Company, 1979.

[11] H.A. Kierstead and W.T. Trotter. On-line graph coloring. *On-line Algorithms*, 7:88 – 92, 1992.

[12] László Lovász, Michael Saks, and W.T. Trotter. An on-line graph coloring algorithm with sublinear performance ratio. *Discrete Mathematics*, 75(1–3):319 – 325, 1989.

[13] A. Marchetti-Spaccamela and C. Vercellis. Stochastic on-line knapsack problems. *Mathematical Programming*, 68(1-3):73–104, 1995.

[14] Sadegh Nobari, Xuesong Lu, Panagiotis Karras, and Stéphane Bressan. Fast random graph generation. In *Proceedings of the 14th International Conference on Extending Database Technology*, EDBT/ICDT '11, pages 331–342, New York, NY, USA, 2011. ACM.

[15] Daniel D. Sleator and Robert E. Tarjan. Amortized efficiency of list update and paging rules. *Commun. ACM*, 28(2):202–208, February 1985.

[16] Luca Trevisan. Cs261: Optimization, lecture 17. http://theory.stanford.edu/~trevisan/cs261/lecture17.pdf, 2011.

Abbildungsverzeichnis

2.1 Verlauf von Lösung und Optimum für SkiRental 7
2.2 Verlauf der Competitive Ratio für SkiRental 8

3.1 Ein Graph 13
3.2 Ein bipartiter Graph 13
3.3 Verteilung der Auftretenswahrscheinlichkeit eines Zufallsgraphen 14
3.4 Nicht optimal färbbarer bipartiter Graph 18
3.5 Optimal gefärbter bipartiter Graph 19
3.6 Ein Baum 20
3.7 Die Folge $T_1, \ldots, T_6$ 21
3.8 First Fit auf $T_1, \ldots, T_6$ 22

4.1 `FF` gegen `AA` für 10000 Instanzen von $G(1000, p)$, I 28
4.2 `FF` gegen `AA` für 10000 Instanzen von $G(1000, p)$, II 29
4.3 `FF` gegen `AA` für 10000 Instanzen von $G(1000, p)$, III 30
4.4 k in Abhängigkeit von p 31
4.5 b in Abhängigkeit von p 31
4.6 b für $k = 2$ in $G(n, 0.1)$ 32
4.7 b für $k = 2$ in $G(n, 0.01)$ 32
4.8 b für $k = 2$ in $G(n, 0.001)$ 33
4.9 b für $k = 3$ in $G(n, 0.1)$ 33

5.1 Klassendiagramm von `GraphBonanza` 36
5.2 `GraphBuilder::build()` 37

List of Algorithms

1 Ein naiver Zufallsgraphen-Generator 15
2 Ein umgeformter naiver Zufallsgraphen-Generator 16
3 Ein Zufallsgraphen-Generator mit Edge Skipping 17
4 First Fit-Algorithmus für Online Graph Coloring 19

5 Online Graph Coloring-Algorithmus mit Advice 24