Aufgabe 1

exp	h	D1f(1,h)	D2f(1,h)	|D1f(1,h)-f'(1)|	|D2f(1,h)-f'(1)|	
-1	0.1	-0.867061844	-0.840069234	0.027015115	0.001402452	
-2	0.01	-0.844158449	-0.84145696	0.002701512	1.40245E-05	
-3	0.001	-0.841740996	-0.841470845	0.000270151	1.40245E-07	
-4	0.0001	-0.841497999	-0.841470983	2.70151E-05	1.40245E-09	
-5	0.00001	-0.841473686	-0.841470985	2.70151E-06	1.40245E-11	
-6	0.000001	-0.841471255	-0.841470985	2.70151E-07	1.40245E-13	
-7	0.0000001	-0.841471013	-0.841470985	2.70151E-08	1.40245E-15	
-8	0.00000001	-0.841470982	-0.841470982	2.70151E-09	1.40245E-17	
-9	1E-09	-0.841471115	-0.841471004	2.70151E-10	1.40245E-19	
-10	1E-10	-0.841471337	-0.841470782	2.70151E-11	1.40245E-21	
-11	1E-11	-0.841471337	-0.841471337	2.70151E-12	1.40245E-23	
-12	1E-12	-0.841549053	-0.841493542	2.70151E-13	1.40245E-25	
-13	1E-13	-0.841549053	-0.841549053	2.70151E-14	1.40245E-27	
-14	1E-14	-0.843769499	-0.838218384	2.70151E-15	1.40245E-29	
-15	1E-15	-0.999200722	-0.88817842	2.70151E-16	1.40245E-31	
-16	1E-16	0	0	2.70151E-17	1.40245E-33	<= möglichst klein!
opt h	3.8526E-16		-0.864534957		2.08154E-32	

Aufgabe 1 b)

Rundungsfehler: $\frac{2 \cdot eps}{h} \cdot |f(x_0)|$

Diskretisierungsfehler: $\frac{|f'''(x_0)|}{6} \cdot h^2$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot eps}{h} \cdot |f(x_0)| = \frac{|f'''(x_0)|}{6} \cdot h^2$$

$$\Rightarrow 2 \cdot eps \cdot |f(x_0)| = \frac{|f'''(x_0)|}{6} \cdot h^3$$

$$\Rightarrow h^3 = \frac{2}{c} 12 \cdot \frac{eps \cdot |f(x_0)|}{|f'''(x_0)|}$$

$$eps = 0.5 \cdot 10^{-n+1}$$

$$\Rightarrow h^3 = 12 \cdot \frac{0.5 \cdot 10^{-n+1} |f(x_0)|}{|f'''(x_0)|} = 6 \cdot 10^{-n+1} \frac{|f(x_0)|}{|f'''(x_0)|}$$

$$\Rightarrow h = \sqrt[3]{6 \cdot 10^{-n+1} \cdot \frac{|f(x_0)|}{|f'''(x_0)|}}$$

$\Rightarrow f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'''(x) = \sin(x)$, $n = 17$

$$\Rightarrow h = 6 \cdot 10^{-16} \cdot \frac{\cos(1)}{\sin(1)} = 3.8526 \cdot 10^{-16}$$

$\Rightarrow D_2 f(1,h) = -0.8645349\ldots$, Fehler $= 2.081 \cdot 10^{-32}$