

Aufgabe 2

a) a-priori:

$$\begin{aligned} |x_n - \tilde{x}_2| &\leq \frac{\kappa^n}{1-\kappa} \cdot |x_1 - x_0| \\ &\Rightarrow \frac{0.75^n}{1-0.75} \cdot |0.3 - 0| \\ &= \frac{0.75^n}{1-0.75} \cdot 0.3 \\ &= 0.75^n \cdot \frac{0.3}{0.25} \\ &= 1.2 \cdot 0.75^n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1.2 \cdot 0.75^n \leq 10^{-4}$$

$$\Rightarrow 0.75^n \leq \frac{10^{-4}}{1.2}$$

$$\Rightarrow \log_{0.75}(0.75^n) \leq \log_{0.75}\left(\frac{10^{-4}}{1.2}\right)$$

$$\Rightarrow n \leq \log_{0.75}\left(\frac{10^{-4}}{1.2}\right) = \cancel{32.8} \quad 32.6425\dots$$

$$\Rightarrow \# \text{ Iterationen } = \underline{\underline{33}}$$

a-posteriori:

$$\begin{aligned} |x_n - \tilde{x}_2| &\leq \frac{\kappa}{1-\kappa} \cdot |x_n - x_{n-1}| \\ n=9 &\Rightarrow \frac{0.75}{1-0.75} \cdot |0.3389297064 - 0.3389172778| \\ &= \underline{\underline{3.7286 \cdot 10^{-5}}} \end{aligned}$$

\Rightarrow Gen. a-priori-Abschätzung: Genauigkeit erreicht
bei $n=33$; gen. a-posteriori-Abschätzung liegt
schon bei $n=9$. A-priori ist pessimistischer.

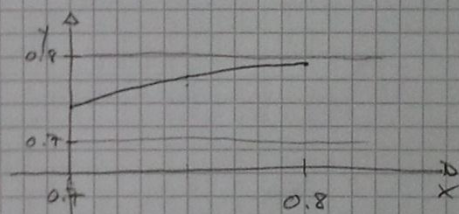
5) $x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n - 0.3}$

n	x_n
0	0.7
1	0.736806
2	0.763701 0.758746
3	0.771242
4	0.778182
5	0.781984
6	0.784051
7	0.78517 \approx <u>0.78...</u>

5) f. für $x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n - 0.3} = T(x)$:

$[a, b] = [0.7, 0.8]$

1. Bedingung erfüllt,
 $z_2 (\max = 0.735...) = T(0.8)$



$T'(x) = \frac{1}{3} (x - 0.3)^{-\frac{2}{3}}$ (Aufgabe 18)

$|f(x) - f(\tilde{x})| \leq M \cdot |x - \tilde{x}|$ ($M = \max_{x_0 \in I} |f'(x_0)|$)

$\max_{x \in I} |T'(0.7)| = 0.6140... < 1 \Rightarrow \alpha := \underline{0.62}$

an-priori: $|x_n - \tilde{x}| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot |x_1 - x_0|$

$= \frac{0.62^n}{1-0.62} \cdot |0.736806 - 0.7| \leq 10^{-4}$

$\Rightarrow 0.62^n \leq \frac{10^{-4}}{0.0368}$

$\Rightarrow n \leq \log_{0.62} \left(\frac{10^{-4}}{0.0368} \right) = \underline{14.3844...}$

\Rightarrow Genauigkeit von 10^{-4} wird bei diesem $T(x)$ nach 15 Iterationen erreicht vs. 33 bei der vorigen Aufgabe.