Numerik 2 - Übung 3

Florian Lüthi, i10b

March 11, 2012

Aufgabe 1

a)

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 8 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Erste Spalte:

$$\begin{aligned}
a &= \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, ||a||_2 = \sqrt{6^2+8^2+0^2} = \sqrt{100} = 10 \\
\Rightarrow v &= a + ||a||_2 e_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow Q_v a &= -||a||_2 e_1 = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, ||v||_2 = \sqrt{16^2+8^2+0^2} = \sqrt{320}
\end{aligned}$$

Erste Spalte, Umformung der zweiten Spalte:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow Q_v x_1 &= x_1 - \frac{2}{||v||_2^2}(v^T x_1)v \\
&= \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \frac{2}{320}(16 \cdot (-3) + 8 \cdot 1 + 0 \cdot (-4)) \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - (-0.25) \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Erste Spalte, Umformung der dritten Spalte:

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow Q_v x_2 &= x_2 - \frac{2}{||v||_2^2}(v^T x_2)v \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{2}{320}(16 \cdot (-2) + 8 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2)) \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} - (-0.25) \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt:

$$
Q_1 A = \begin{pmatrix} -10 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}
$$

Zweite Spalte:

$$
\begin{aligned}
a &= \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, ||a||_2 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5 \\
\Rightarrow v &= a + ||a||_2 e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow Q_v a &= -||a||_2 e_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}, ||v||_2 = \sqrt{8^2 + (-4)^2} = \sqrt{80}
\end{aligned}
$$

Zweite Spalte, Umformung der dritten Spalte:

$$
\begin{aligned}
x &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow Q_v x &= x - \frac{2}{||v||_2^2}(v^T x)v \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{2}{80}(8 \cdot 1 + (-4) \cdot (-2)) \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 0.4 \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3.2 \\ -1.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.2 \\ -0.4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt:

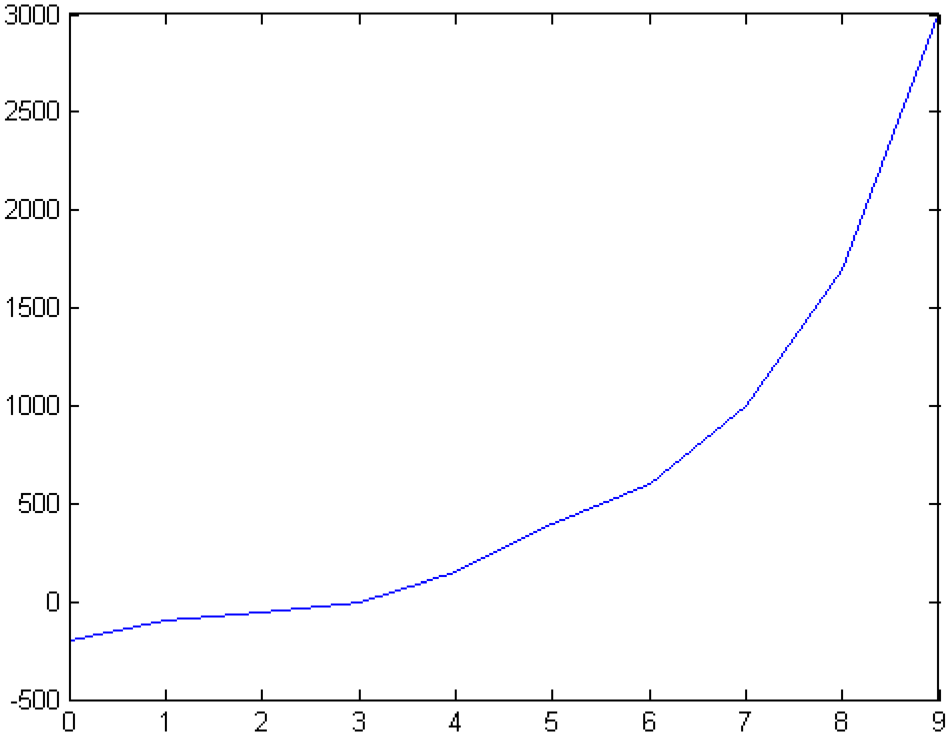
$$
Q_2 Q_1 A = R = \begin{pmatrix} -10 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -2.2 \\ 0 & 0 & -0.4 \end{pmatrix}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
b &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow Q_1 b &= b - \frac{2}{||v||_2^2}(v^T b)v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{320}(16 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 0 \cdot 1) \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 0.25 \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow Q_2 Q_1 b &= Q_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ \hline \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{80}(8 \cdot 1 + (-4) \cdot 1) \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 \\ \hline \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0.1 \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0.2 \\ 0.6 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \begin{pmatrix} -10 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -2.2 \\ 0 & 0 & -0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3 \\ 0.2 \\ 1.4 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow -0.4 x_3 &= 1.4 \Rightarrow x_3 = -3.5 \\
\Rightarrow -5 x_2 - 2.2 x_3 &= 0.2 \Rightarrow -5 x_2 = 0.2 - 7.7 = -7.5 \Rightarrow x_2 = 1.5 \\
\Rightarrow -10 x_1 + x_2 + 2 x_3 &= -3 \Rightarrow -10 x_1 + 1.5 - 7 = -3 \Rightarrow x_1 = -0.25 \\
\Rightarrow x &= \begin{pmatrix} -0.25 \\ 1.5 \\ -3.5 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

a) Nun denn:



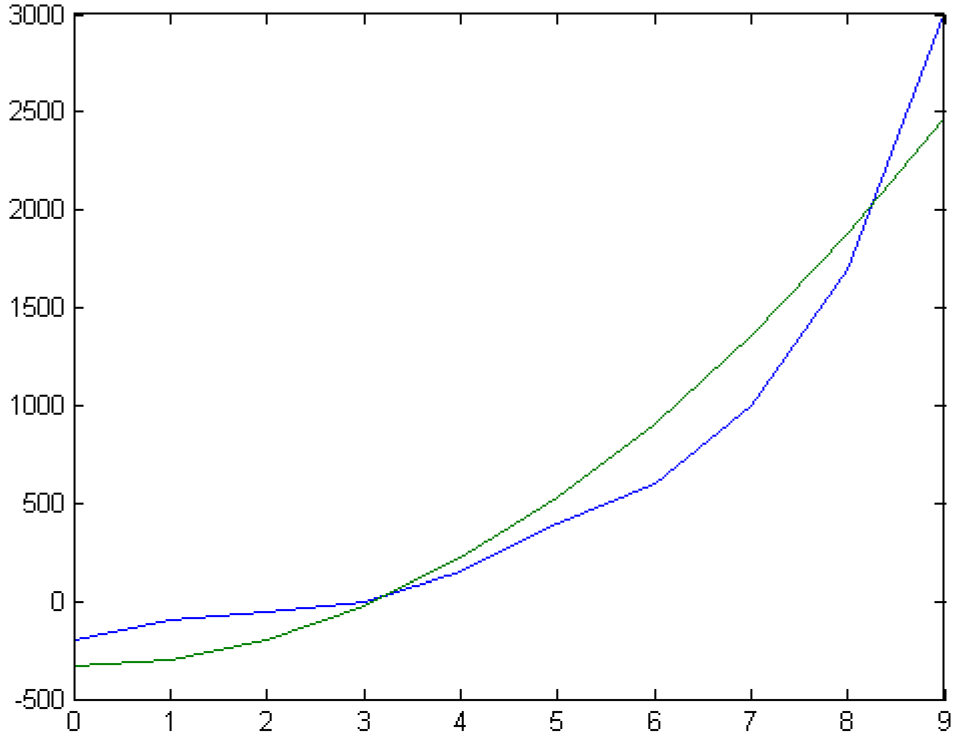
b) Für den Ansatz $v = \alpha + \beta u^2$:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 0^0 & 0^2 \\ 1^0 & 1^2 \\ 2^0 & 2^2 \\ 3^0 & 3^2 \\ 4^0 & 4^2 \\ 5^0 & 5^2 \\ 6^0 & 6^2 \\ 7^0 & 7^2 \\ 8^0 & 8^2 \\ 9^0 & 9^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 9 \\ 1 & 16 \\ 1 & 25 \\ 1 & 36 \\ 1 & 49 \\ 1 & 64 \\ 1 & 81 \end{pmatrix} \Rightarrow R = \begin{pmatrix} -3.1623 & -90.1249 \\ 0 & 84.9147 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
Q &= \begin{pmatrix}
-0.3162 & -0.3162 & -0.3162 & -0.3162 & -0.3162 & -0.3162 & -0.3162 & \cdots \\
-0.3356 & -0.3239 & -0.2885 & -0.2296 & -0.1472 & -0.0412 & 0.0883 & \cdots \\
-0.3195 & -0.2846 & 0.8885 & -0.1017 & -0.0879 & -0.0702 & -0.0485 & \cdots \\
-0.3186 & -0.2255 & -0.1014 & 0.9056 & -0.0845 & -0.0718 & -0.0563 & \cdots \\
-0.3173 & -0.1428 & -0.0874 & -0.0842 & 0.9202 & -0.0741 & -0.0672 & \cdots \\
-0.3156 & -0.0364 & -0.0692 & -0.0711 & -0.0737 & 0.9229 & -0.0812 & \cdots \\
-0.3136 & 0.0936 & -0.0471 & -0.0551 & -0.0663 & -0.0807 & 0.9017 & \cdots \\
-0.3112 & 0.2473 & -0.0209 & -0.0362 & -0.0575 & -0.0850 & -0.1185 & \cdots \\
-0.3084 & 0.4246 & 0.0093 & -0.0143 & -0.0474 & -0.0899 & -0.1419 & \cdots \\
-0.3053 & 0.6256 & 0.0435 & 0.0104 & -0.0359 & -0.0955 & -0.1683 & \cdots
\end{pmatrix} \\
b &= \begin{pmatrix} -200 \\ -100 \\ -50 \\ 0 \\ 150 \\ 400 \\ 600 \\ 1000 \\ 1700 \\ 3000 \end{pmatrix} \Rightarrow Qb = \begin{pmatrix} -2055.4805 \\ 2935.2999 \\ 86.3155 \\ -28.5595 \\ -109.3843 \\ -156.1592 \\ -318.8840 \\ -347.5587 \\ -142.1835 \\ 597.2419 \end{pmatrix} \\
Rx &= Qb \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -335.1779 \\ 34.5676 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

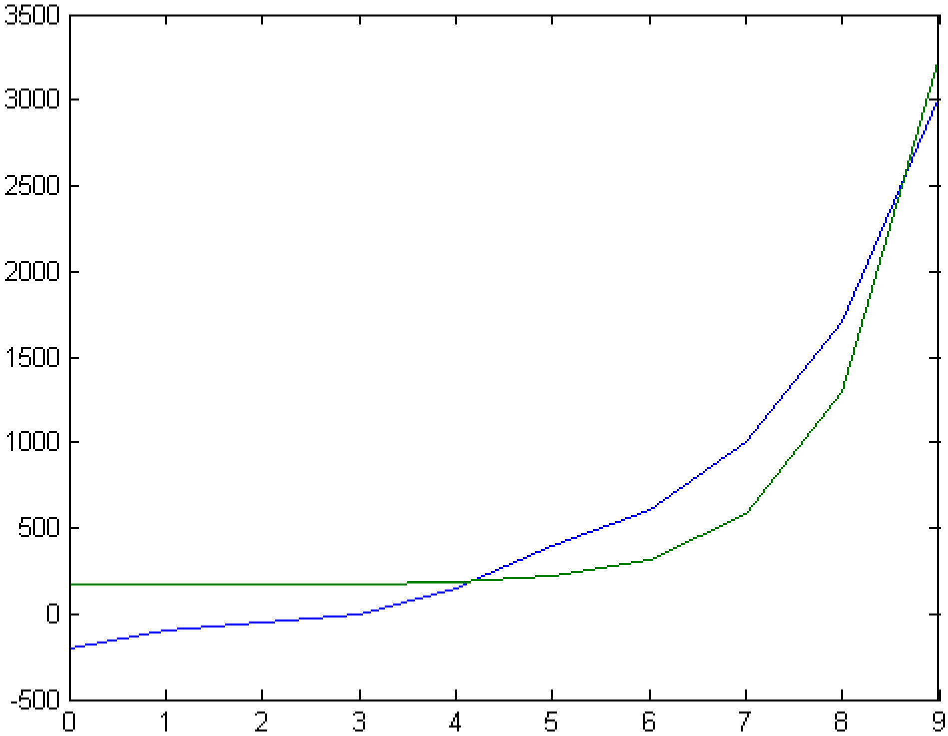
Für den Ansatz $v = \alpha + \beta \mathrm{e}^u$:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 0^0 & \mathrm{e}^0 \\ 1^0 & \mathrm{e}^1 \\ 2^0 & \mathrm{e}^2 \\ 3^0 & \mathrm{e}^3 \\ 4^0 & \mathrm{e}^4 \\ 5^0 & \mathrm{e}^5 \\ 6^0 & \mathrm{e}^6 \\ 7^0 & \mathrm{e}^7 \\ 8^0 & \mathrm{e}^8 \\ 9^0 & \mathrm{e}^9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2.7183 \\ 1 & 7.389 \\ 1 & 20.0855 \\ 1 & 54.5982 \\ 1 & 148.4132 \\ 1 & 403.4288 \\ 1 & 1096.6332 \\ 1 & 2980.9580 \\ 1 & 8103.0839 \end{pmatrix} \Rightarrow R = \begin{pmatrix} -3.1623 & -4053.5049 \\ 0 & 7714.0139 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
Q &= \begin{pmatrix}
-0.3162 & -0.3162 & -0.3162 & -0.3162 & -0.3162 & -0.3162 & -0.3162 & \cdots \\
-0.1660 & -0.1658 & -0.1652 & -0.1636 & -0.1591 & -0.1469 & -0.1139 & \cdots \\
-0.2995 & -0.1973 & 0.9141 & -0.0857 & -0.0852 & -0.0839 & -0.0802 & \cdots \\
-0.2997 & -0.1957 & -0.0858 & 0.9144 & -0.0851 & -0.0838 & -0.0801 & \cdots \\
-0.3003 & -0.1914 & -0.0854 & -0.0852 & 0.9152 & -0.0835 & -0.0800 & \cdots \\
-0.3019 & -0.1796 & -0.0845 & -0.0843 & -0.0839 & 0.9173 & -0.0796 & \cdots \\
-0.3064 & -0.1476 & -0.0818 & -0.0817 & -0.0814 & -0.0806 & 0.9215 & \cdots \\
-0.3183 & -0.0606 & -0.0747 & -0.0747 & -0.0748 & -0.0750 & -0.0754 & \cdots \\
-0.3509 & 0.1758 & -0.0554 & -0.0557 & -0.0568 & -0.0596 & -0.0672 & \cdots \\
-0.4395 & 0.8186 & -0.0027 & -0.0041 & -0.0078 & -0.0177 & -0.0449 & \cdots
\end{pmatrix} \\
b &= \begin{pmatrix} -200 \\ -100 \\ -50 \\ 0 \\ 150 \\ 400 \\ 600 \\ 1000 \\ 1700 \\ 3000 \end{pmatrix} \Rightarrow Qb = \begin{pmatrix} -2488.2546 \\ 2594.6425 \\ -238.6459 \\ -193.3886 \\ -56.2807 \\ 158.6750 \\ 263.4148 \\ 404.4707 \\ 400.5876 \\ -212.765 \end{pmatrix} \\
Rx &= Qb \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 166.3918 \\ 0.3773 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

c) Für den Ansatz $v = \alpha + \beta u^2$:



Für den Ansatz $v = \alpha + \beta \mathrm{e}^{u}$:



d) Für den Ansatz $v = \alpha + \beta u^2$:

$$
\begin{aligned}
r_{quadratisch} &= \left\| \begin{pmatrix} 86.3155 \\ -28.5595 \\ -109.3843 \\ -156.1592 \\ -318.8840 \\ -347.5587 \\ -142.1835 \\ 597.2419 \end{pmatrix} \right\|_2 \\
&= \sqrt{86.3155^2 + (-28.5595)^2 + \cdots + 597.2419^2} = 802.5053
\end{aligned}
$$

Für den Ansatz $v = \alpha + \beta e^u$:

$$
\begin{aligned}
r_{exponentiell} &= \left\| \begin{pmatrix} -238.6459 \\ -193.3886 \\ -56.2807 \\ 158.6750 \\ 263.4148 \\ 404.4707 \\ 400.5876 \\ -212.765 \end{pmatrix} \right\|_2 \\
&= \sqrt{(-238.6459)^2 + (-193.3886)^2 + \cdots + (-212.765)^2} = 749.2794
\end{aligned}
$$

Da beim exponentiellen Ansatz das Residuum kleiner ist, bildet dieser Ansatz die Daten wohl besser ab.

Aufgabe 3

Lösung mit Matlab:

$$x = A \backslash b = \begin{pmatrix} 1.0150 \\ -0.0067 \end{pmatrix}$$

Das ist in der Tat interessant, da das Gleichungssystem $Ax = b$ gar keine exakte Lösung besitzt.

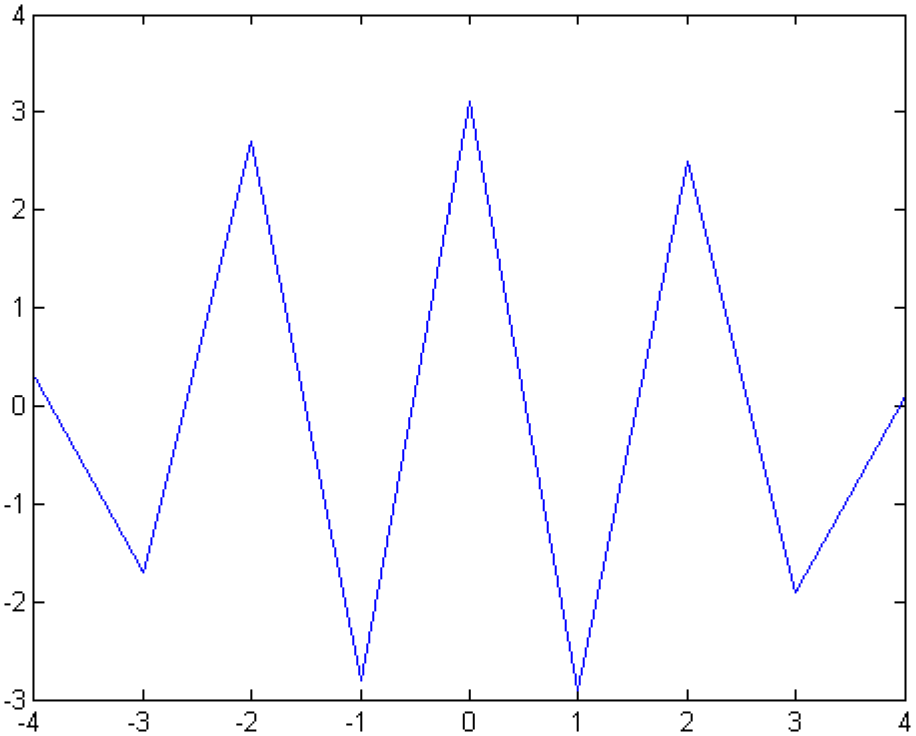
Der Matlab Function Browser sagt nun im dritten Abschnitt zur Funktion `mldivide`:

> If A is an m-by-n matrix with $m \neq n$ and B is a column vector with m components, or a matrix with several such columns, then $X = A \backslash B$ is the solution in the least squares sense to the under- or overdetermined system of equations $AX = B$. In other words, X minimizes $||AX - B||$, the length of the vector $AX - B$. The rank k of A is determined from the QR decomposition with column pivoting. The computed solution X has at most k nonzero elements per column. If $k < n$, this is usually not the same solution as $x = \text{pinv}(A)B$, which returns a least squares solution.

Long story short bedeutet das, dass Matlab für den Fall, dass A nicht quadratisch ist und b gleichviele Zeilen wie A enthält, das lineare Ausgleichsproblem und nicht das Gleichungssystem exakt löst (was gar nicht funktionieren könnte, weil ja entweder zuwenig Information oder zuviel und sich dann widersprechende Information in A und b enthalten ist). Die Quintessenz ist, dass wir uns die letzten drei Übungsserien eigentlich hätten sparen können.

Aufgabe 4

a) Der gewünschte Plot:



b)

$$\begin{aligned}
\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{c^2} &= 1 \\
\frac{u^2c^2}{a^2c^2} + \frac{v^2a^2}{c^2a^2} &= 1 \\
\frac{u^2c^2 + v^2a^2}{a^2c^2} &= 1 \\
u^2c^2 + v^2a^2 &= a^2c^2 \\
v^2a^2 &= a^2c^2 - u^2c^2 \\
v^2 &= \frac{a^2c^2 - u^2c^2}{a^2} = \frac{a^2c^2}{a^2} - \frac{u^2c^2}{a^2} = c^2 - \frac{c^2}{a^2}u^2
\end{aligned}$$

Substitutionen: $\alpha = c^2$, $\beta = \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow v^2 = \alpha - \beta u^2$

c)

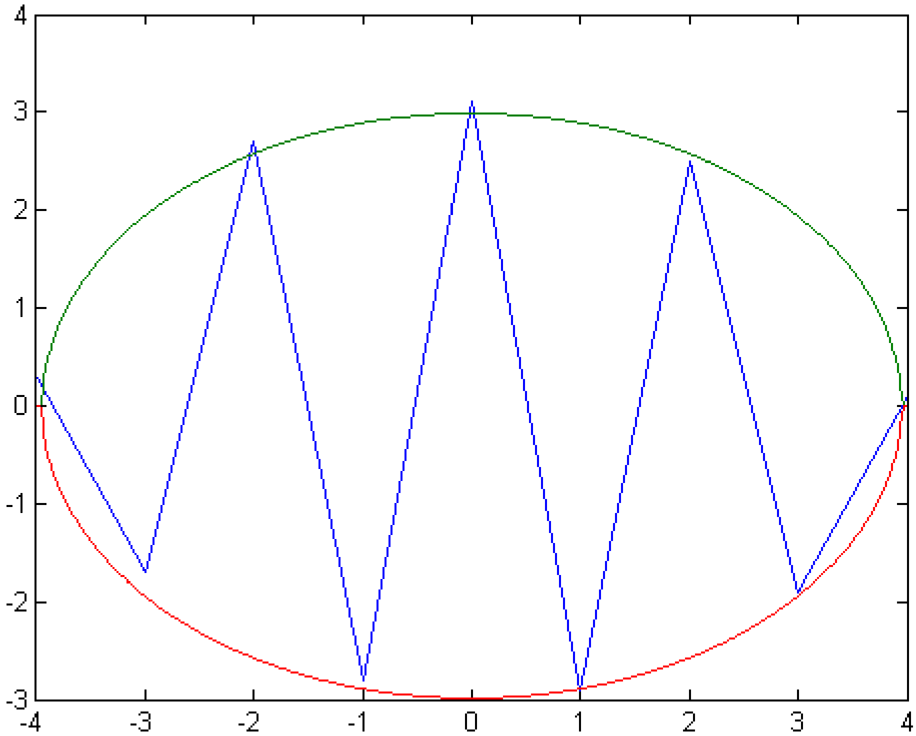
$$A = \begin{pmatrix} (-4)^0 & -(-4)^2 \\ (-3)^0 & -(-3)^2 \\ (-2)^0 & -(-2)^2 \\ (-1)^0 & -(-1)^2 \\ 0^0 & 0^2 \\ 1^0 & -1^2 \\ 2^0 & -2^2 \\ 3^0 & -3^2 \\ 4^0 & -4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -16 \\ 1 & -9 \\ 1 & -4 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & -4 \\ 1 & -9 \\ 1 & -16 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0.3^2 \\ (-1.7)^2 \\ 2.7^2 \\ (-2.8)^2 \\ 3.1^2 \\ (-2.9)^2 \\ 2.5^2 \\ (-1.9)^2 \\ 0.1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.09 \\ 2.89 \\ 7.29 \\ 7.84 \\ 9.61 \\ 8.41 \\ 6.25 \\ 3.61 \\ 0.01 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = A \backslash b = \begin{pmatrix} 8.9240 \\ 0.5719 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{aligned} \alpha &= c^2 \\ \Rightarrow c^2 &= 8.9240 \\ \beta &= \frac{c^2}{a^2} \\ \Rightarrow a^2 &= \frac{c^2}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} = 15.6032 \\ \Rightarrow v^2 &= c^2 - \frac{c^2}{a^2} u^2 = 8.9240 - 0.5719 u^2 \\ \Rightarrow v &= \pm\sqrt{8.9240 - 0.5719 u^2} \end{aligned}$$

e) Frohe Ostern!



Anmerkung: Da die Hauptachse der durch die Ansatzgleichung gegebenen Ellipse auf der x-Achse liegen muss, ist nicht sichergestellt, dass $\beta u^2 < \alpha$ gilt. Dadurch kann es für grosse $|u|$ zu komplexen v kommen, deren realen Anteile zum Glück aber immer 0 sind. Im Plot sieht man das daran, dass die Werte $x = \pm 4$ nicht im Defnitionsbereich der Ausgleichskurven zu liegen scheinen. Dies könnte durch folgenden Ansatz gelöst werden: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{c^2} = 1$, was dann aber zu zwei zusätzlichen Parametern im Ausgleichsproblem mit entsprechend mühsameren Umformungen und Substitutionen führen würde.