Selbststudium 6

Florian Lüthi

December 17, 2012

Aufgabe 1

Gelesen.

Aufgabe 2

(a) Dasdada:

$$3n \cdot \sqrt{n} \in \mathcal{O}(n^2)$$

ist äquivalent zu

$$3n \cdot \sqrt{n} \in \{r : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ | \exists c, n_0 \in \mathbb{N}, \text{ so dass für alle } n > n_0\text{: } r(n) \leq c \cdot n^2\}.$$

Also suchen wir entsprechende c und n_0. Wenn wir $c = 3$ wählen und $r(n_0)$ mit $f(n_0)$ gleichsetzen, bekommen wir:

$$3n_0 \cdot \sqrt{n_0} = 3 \cdot {n_0}^2$$

und damit

$$n \cdot \sqrt{n_0} = {n_0}^2.$$

Die Lösung ist $n_0 \in \{0, 1\}$, das heisst ab $n = 1$ würde die Bedingung gelten.
Da offensichtlich ab $n = 1$ n^2 schneller wächst als $n \cdot \sqrt{n} = n^1 \cdot n^{0.5} = n^{1.5}$, haben wir $c = 3$ und $n_0 = 0$ gefunden und das eingangs Behauptete gezeigt.

(b) Nun...

- $\mathbf{f_1(n) = 2^{n+3}} \in \mathcal{O}(\mathbf{3^n})$, denn äquivalent wäre $2^{n+3} = o(3^n)$ und darum

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+3}}{3^n} = 0.$$

  Formen wir ein wenig um, bekommen wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+3}}{2^{n\cdot\log_2(3)}} = \lim_{n\to\infty} 2^{n+3-n\cdot\log_2(3)} = \lim_{n\to\infty} 2^{3-0.58n} = 0.$$

- $\mathbf{f_2(n) = n \cdot 2^n} \in \mathcal{O}(\mathbf{3^n})$, denn äquivalent wäre $n \cdot 2^n = o(3^n)$ und darum

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot 2^n}{3^n} = 0.$$

Formen wir ein wenig um, bekommen wir

$$\lim_{n\to\infty} \left[n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]$$

Und nach Anwendung der de l'Hospital'schen Regel (wegen $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ gilt $\lim_{x\to\infty}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to\infty}[f(x)' \cdot g(x)'])$

$$\lim_{n\to\infty} \left[1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \ln \frac{2}{3} \right] = 0.$$

- $\mathbf{f_3(n) = 2^{2n}} \notin \mathcal{O}(\mathbf{3^n})$. Denn angenommen, es gälte tatsächlich $2^{2n} \in \mathcal{O}(3^n)$, gälte ebenso

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{3^n} = 0.$$

Ein paar Takte Algebra und Infinitesimalrechnung zeigen aber:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{2^{n\cdot\log_2(3)}} = \lim_{n\to\infty} 2^{2n - n\cdot\log_2(3)} = \lim_{n\to\infty} 2^{0.42n} = \infty,$$

was im Widerspruch zur Annahme steht, also muss die Annahme falsch sein.

(c) Dasdada:

$$n - \log_2(n) \in \Omega(n)$$

gilt, weil sich problemlos $n_0 = 4, d = 2$ finden lassen.

Aufgabe 3 = Aufgabe 6.2

(a) $2^n \in \Theta(2^{n+a})$. Die obere Schranke funktioniert offensichtlich, die untere Schranke genau dann, wenn $d \geq 2^a$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} 2^{n_0} &= \frac{1}{d} \cdot 2^{n_0+a} \\ &= \frac{1}{d} \cdot 2^{n_0} \cdot 2^a \\ \Rightarrow d \cdot 2^{n_0} &= 2^{n_0} \cdot 2^a \\ d &= 2^a \end{aligned}$$

(b) $2^{b\cdot n} \notin \Theta(2^n)$. Die untere Schranke funktioniert offensichtlich, für die obere Schranke gilt leider im Allgemeinen (für $b = 0$ wäre die Lösung $1 \neq 0$):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{b\cdot n}}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^n)^b}{2^n} = \lim_{n\to\infty} (2^n)^{b-1} = \infty$$

(c) $\log_b n \in \Theta(\log_a n)$[1], weil $\log_a n = \log_b n \cdot \frac{1}{\log_b a}$. Also kann für die obere Schranke $c = \lceil \frac{1}{\log_b a} \rceil$ und für die untere Schranke $d = \lfloor \frac{1}{\log_b a} \rfloor$ gesetzt werden (gerundet deshalb, weil von der in der Lektüre verwendeten Definition $c, d \in \mathbb{N}$ gefordert wird).

(d) $(n+1)! \notin \mathcal{O}(n!)$, denn es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

[1] c umbenannt in a, damit es kein Durcheinander mit der Konstanten in der Definition der oberen Schranke gibt.