

# Zelluläre Automaten und Differentialgleichungen

Yeah.

Detlev Ziereisen<sup>1</sup>    Florian Lüthi<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Department of Computer Science  
ZHAW

16.06.2012



## Zellulärer Automat, der...

- allgemein ist,
- Differentialgleichungen lösen kann,
- cool aussieht,
- portabel ist.



Ein Zellulärer Automat hat:

- einen Zellularraum  $R$ ,
- eine endliche Nachbarschaft  $N$ , wobei  $\forall r \in R (N_r \subset R)$ ,
- eine Zustandsmenge  $Q$ ,
- eine Überföhrungsfunktion  $\delta : Q^{|N|+1} \mapsto Q$ .

Ein Zellulärer Automat hat:

- eindimensional
- $|N| = 2, |Q| = 2$
- $\Rightarrow |\text{img}(\delta)| = 256$
- $\Rightarrow 256$  verschiedene Automaten
- Automat Nr. 110 ist turing-complete!



$$\left(\frac{\Delta}{\Delta \vec{x}} u\right)_{\vec{x}} = u_{\vec{x}} - \sum_{i=1}^{\dim(\vec{x})} u_{\vec{x} - \vec{e}_i}$$

$$\left(\frac{\Delta^2}{\Delta \vec{x}^2} u\right)_{\vec{x}} = u_{\vec{x}} - 2 \cdot \sum_{i=1}^{\dim(\vec{x})} u_{\vec{x} - \vec{e}_i} + \sum_{i=1}^{\dim(\vec{x})} u_{\vec{x} - 2\vec{e}_i}$$



$$\left[ \begin{array}{c|c} a & B \\ \hline & c \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|ccc} \alpha_1 & 0 & & \\ \alpha_2 & \beta_{2,1} & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \alpha_m & \beta_{m,1} & \beta_{m,2} & \cdots & 0 \\ \hline & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_m \end{array} \right]$$



- $R \approx \vec{x}$  in einer, zwei oder drei Dimensionen =< Florian
- $(Q, D) \in R$  mit  $Q$  als einer Menge von berechnungsfernen Zustandsinformationen und den Differentialen nach der Zeit

$$D = \left( u, \frac{\partial u}{t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \dots, \frac{\partial^n u}{t^n} \right) \in \mathbb{R}^n$$

- Eine neue Generation entspricht jeweils der fortgelaufenen Zeit  $\partial t$ , welche sehr fein diskretisiert werden muss
- In der Übergangsfunktion  $\delta$  steckt die eigentliche Differentialgleichung. In der Regel verändert sie nur die Elemente von  $D$ . Sollte die Differentialgleichung Terme mit verschiedenen Ordnungen enthalten, wird die Gleichung unter Zuhilfenahme entsprechender Hilfgleichungen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  in ein äquivalentes System gewöhnlicher Differentialgleichungen umgeformt.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \vec{x}^2} = k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\begin{array}{ccc}
 u_i & & u_i(t) + \frac{\partial u_i(t + \Delta t)}{\partial t} \Delta t \\
 \downarrow & & \uparrow \\
 \frac{\partial u_i}{\partial \vec{x}} = u_i - \sum u_{i-1} & & \frac{\partial u_i(t + \Delta t)}{\partial t} = \frac{\partial u_i(t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t \\
 \downarrow & & \uparrow \\
 -2u_i + \sum u_{i-1} + \sum u_{i+1} & \xrightarrow{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \vec{x}^2}} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}
 \end{array}$$



- Portabel
- sdfsdfs
- Closures





```
if (typeof(module) !== "undefined") {  
  module.exports = DiffusionEquation;  
  var ATusk = require('../src/ATusk.js');  
  var VNA = require('../src/VonNeumannNeighbourhood.  
    js');  
}  
  
function DiffusionEquation() {  
  /* ... */  
}
```



# Make Titles Informative. Use Uppercase Letters.

Subtitles are optional.

- Use `itemize` a lot.
- Use very short sentences or short phrases.

# Make Titles Informative.

You can create overlays. . .

- using the `pause` command:
  - First item.
  - Second item.
- using overlay specifications:
  - First item.
  - Second item.
- using the general `uncover` command:
  - First item.
  - Second item.

# Make Titles Informative.

You can create overlays. . .

- using the `pause` command:
  - First item.
  - Second item.
- using overlay specifications:
  - First item.
  - Second item.
- using the general `uncover` command:
  - First item.
  - Second item.

# Make Titles Informative.

You can create overlays. . .

- using the `pause` command:
  - First item.
  - Second item.
- using overlay specifications:
  - First item.
  - Second item.
- using the general `uncover` command:
  - First item.
  - Second item.

# Make Titles Informative.

You can create overlays. . .

- using the `pause` command:
  - First item.
  - Second item.
- using overlay specifications:
  - First item.
  - Second item.
- using the general `uncover` command:
  - First item.
  - Second item.

# Make Titles Informative.

You can create overlays. . .

- using the `pause` command:
  - First item.
  - Second item.
- using overlay specifications:
  - First item.
  - Second item.
- using the general `uncover` command:
  - First item.
  - Second item.



# Make Titles Informative.

You can create overlays. . .

- using the `pause` command:
  - First item.
  - Second item.
- using overlay specifications:
  - First item.
  - Second item.
- using the general `uncover` command:
  - First item.
  - Second item.



# Make Titles Informative.

# Make Titles Informative.

- The **first main message** of your talk in one or two lines.
  - The **second main message** of your talk in one or two lines.
  - Perhaps a **third message**, but not more than that.
- 
- Outlook
    - Something you haven't solved.
    - Something else you haven't solved.