

Zelluläre Automaten und Differentialgleichungen

Detlev Ziereisen Florian Lüthi

ZHAW (HSZ-T)

16.06.2012

*Das gesamte Geschehen im Universum ist das
Ergebnis der Arbeit eines gigantischen Zellulären
Automaten.*

(Konrad Zuse, Rechnender Raum, 1969)

Agenda

- 1 Ziel des Projekts
- 2 Theorie
 - Zelluläre Automaten
 - Differentialgleichungen
 - Beides zusammen
- 3 Implementation
 - Testing
 - Strategy
 - Painting
 - Lösung der Gleichung
- 4 Fazit

Ziel des Projekts

Zellulärer Automat, der...

- allgemein ist,
- Differentialgleichungen lösen kann,
- cool aussieht,
- portabel ist.

Outline

- 1 Ziel des Projekts
- 2 **Theorie**
 - Zelluläre Automaten
 - Differentialgleichungen
 - Beides zusammen
- 3 Implementation
 - Testing
 - Strategy
 - Painting
 - Lösung der Gleichung
- 4 Fazit

Definition

Ein Zellulärer Automat hat:

- einen Zellularraum R ,
- eine endliche Nachbarschaft N , wobei $\forall r \in R (N_r \subset R)$,
- eine Zustandsmenge Q ,
- eine Überföhrungsfunktion $\delta : Q^{|N|+1} \mapsto Q$.

Wolfram's eindimensionales Universum

- eindimensional
- $|N| = 2, |Q| = 2$
- $\Rightarrow |\text{img}(\delta)| = 256$
- $\Rightarrow 256$ verschiedene Automaten
- Automat Nr. 110 ist turing-complete!

Outline

- 1 Ziel des Projekts
- 2 **Theorie**
 - Zelluläre Automaten
 - **Differentialgleichungen**
 - Beides zusammen
- 3 Implementation
 - Testing
 - Strategy
 - Painting
 - Lösung der Gleichung
- 4 Fazit

Differentiation

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta \vec{x}} u \right)_{\vec{x}} = u_{\vec{x}} - \sum_{i=1}^{\dim(\vec{x})} u_{\vec{x} - \vec{e}_i}$$

$$\left(\frac{\Delta^2}{\Delta \vec{x}^2} u \right)_{\vec{x}} = u_{\vec{x}} - 2 \cdot \sum_{i=1}^{\dim(\vec{x})} u_{\vec{x} - \vec{e}_i} + \sum_{i=1}^{\dim(\vec{x})} u_{\vec{x} - 2\vec{e}_i}$$

Integration

$$\left[\begin{array}{c|c} a & B \\ \hline & c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|ccc} \alpha_1 & 0 & & \\ \alpha_2 & \beta_{2,1} & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \alpha_m & \beta_{m,1} & \beta_{m,2} & \cdots & 0 \\ \hline & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_m \end{array} \right]$$

Outline

- 1 Ziel des Projekts
- 2 **Theorie**
 - Zelluläre Automaten
 - Differentialgleichungen
 - **Beides zusammen**
- 3 Implementation
 - Testing
 - Strategy
 - Painting
 - Lösung der Gleichung
- 4 Fazit

Beides zusammen

- R beinhaltet die diskreten Werte der zu findenden "Funktion"
- $\Delta \vec{x}$ ist grob diskretisiert
- Δt ist fein diskretisiert
- $(Q, D) \in R$ sind die Zustandsinformationen der Zellen (Differentialle nach der Zeit)
- In der Übergangsfunktion δ ist die Differentialgleichung.

Die Welle

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \vec{x}^2} = k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Die Welle

$$\begin{array}{ccc}
 u_i & & u_i(t) + \frac{\partial u_i(t + \Delta t)}{\partial t} \Delta t \\
 \downarrow & & \uparrow \\
 \frac{\partial u_i}{\partial \vec{x}} = u_i - \sum u_{i-1} & & \frac{\partial u_i(t + \Delta t)}{\partial t} = \frac{\partial u_i(t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t \\
 \downarrow & & \uparrow \\
 -2u_i + \sum u_{i-1} + \sum u_{i+1} & \xrightarrow{\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \vec{x}^2}}} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}
 \end{array}$$

Outline

- 1 Ziel des Projekts
- 2 Theorie
 - Zelluläre Automaten
 - Differentialgleichungen
 - Beides zusammen
- 3 **Implementation**
 - **Testing**
 - Strategy
 - Painting
 - Lösung der Gleichung
- 4 Fazit

Testing mit Node.js und Mocha

```
if (typeof(module) !== "undefined") {  
  module.exports = DiffusionEquation;  
  var ATusk = require('../src/ATusk.js');  
  var VNA = require('../src/VonNeumannNeighbourhood.  
    js');  
}  
function DiffusionEquation() {  
  /* ... */  
}
```


Testing mit Node.js und Mocha

```
describe('GameOfLife', function() {  
  it('should comply to rule 1', function() {  
    var cell = {x:1, y:1, currentData: {status: 0}};  
  
    var model = [  
      [creator(1), creator(1), creator(1)],  
      [creator(0), cell, creator(0)],  
      [creator(0), creator(0), creator(0)]  
    ];  
  
    assert(game, cell, model, 1);  
  
  });  
}
```

Outline

- 1 Ziel des Projekts
- 2 Theorie
 - Zelluläre Automaten
 - Differentialgleichungen
 - Beides zusammen
- 3 **Implementation**
 - Testing
 - **Strategy**
 - Painting
 - Lösung der Gleichung
- 4 Fazit

Strategy

```
ViewUtils.bindStrategiesToCombobox(null, this.doc.  
    painter, PainterFactory.types, function(p) {  
    return p.name;  
}), (function(view) { return function(p) {  
    view.primaryPainter = PainterFactory.create(p, view.  
        doc.primaryCanvas, view);  
    view.secondaryPainter = PainterFactory.create(p, view.  
        doc.secondaryCanvas, view);  
    view.updatePainterScaling();  
    view.doc.viscositySelector.onChange();  
    if (view.automata.tusk != null) {  
        view.primaryPainter.pool = view.automata.tusk.  
            primaryPool;  
    }  
});})(this));
```

Outline

- 1 Ziel des Projekts
- 2 Theorie
 - Zelluläre Automaten
 - Differentialgleichungen
 - Beides zusammen
- 3 **Implementation**
 - Testing
 - Strategy
 - **Painting**
 - Lösung der Gleichung
- 4 Fazit

Painting: Vektoriell

```
this.paintCell = function(cell) {  
  
    var x = cell.x * this.scaling.x;  
    var y = cell.y * this.scaling.y;  
    var baseColor = this.baseColor;  
  
    var color = ViewUtils.getFormattedColor(this.pool.  
        getValue(cell), baseColor.r, baseColor.g, baseColor.  
        .b);  
    this.context.fillStyle = color;  
    this.context.fillRect(x, y, this.scaling.x, this.  
        scaling.y);  
};
```

Painting: Pixelesk

```
this.begin = function() {  
    this.imageData = this.context.createImageData(this.  
        view.CANVAS_WIDTH, this.view.CANVAS_HEIGHT);  
    this.buf = new ArrayBuffer(this.imageData.data.length)  
        ;  
    this.buf8 = new Uint8ClampedArray(this.buf);  
    this.data = new Uint32Array(this.buf);  
};  
  
this.end = function() {  
    this.imageData.data.set(this.buf8);  
    this.context.putImageData(this.imageData, 0, 0);  
};
```

```
this.paintCell = function(cell) {  
    var x = cell.x * this.scaling.x;  
    var y = cell.y * this.scaling.y;  
    var baseColor = this.baseColor;  
    var color = ViewUtils.getColor(this.pool.getValue(cell  
        ), baseColor.r, baseColor.g, baseColor.b);  
    for (var ix = x; ix < x + this.scaling.x; ix++) {  
        for (var iy = y; iy < y + this.scaling.y; iy++) {  
            var p = (iy * this.view.CANVAS_WIDTH + ix);  
            this.data[p] = (255 << 24) |  
                (color.b << 16) |  
                (color.g << 8) |  
                color.r;  
        }  
    }  
};
```

Outline

- 1 Ziel des Projekts
- 2 Theorie
 - Zelluläre Automaten
 - Differentialgleichungen
 - Beides zusammen
- 3 **Implementation**
 - Testing
 - Strategy
 - Painting
 - **Lösung der Gleichung**
- 4 Fazit

Wo ist δ ?

```
this.calcDifferentials = function(cell, dt, get) {  
  var c = 1.0 / this.viscosity;  
  var u = get(cell).u;  
  var udx = u - (get(cell.neighbours.w).u + get(cell.  
    neighbours.n).u) / 2;  
  var udx dx = -2 * u + (get(cell.neighbours.w).u + get(  
    cell.neighbours.n).u) / 2  
    + (get(cell.neighbours.e).u + get(cell.neighbours.s)  
      .u) / 2;  
  var udt dt = udx dx * c;  
  var udt = get(cell).udt + udt dt * dt;  
  
  return {  
    udt: udt, udt dt: udt dt,  
    udx: udx, udx dx: udx dx  
  };  
}
```

Integration

```
this.integrate = function(automata) {  
  var dt = 1 / automata.tusk.slices;  
  for (var t = 0; t < automata.tusk.slices; t++) {  
    automata.forEachCell(function(cell) {  
      var differentials = automata.tusk.  
        calcDifferentials(cell, dt, function(cell2) {  
          return cell2.currentData;  
        });  
      cell.nextData = automata.tusk.applyDifferentials  
        (cell, dt, differentials, function(cell2) {  
          return cell2.currentData;  
        });  
    });  
    automata.forEachCell(function(cell) {  
      cell.currentData = cell.nextData;  
    });  
  }  
}
```

Fazit

- Zuse ist wohl auf dem richtigen Weg
- Portabilität nur beschränkt möglich
- Erweiterungspotenzial vorhanden

Fazit

- Fragen?
- Verbindlichsten Dank für die Aufmerksamkeit