Wissenschaftlicher, rechnender Schreibomat

Florian

January 17, 2013

Tools

1 Huffmann-Codierung

führt immer zu einem regulären binären Baum.

Definition 1 (Entropie)**.** Durchschnittliche Anzahl Zeichen, die für Zeichen des Alphabets A verwendet werden:

$$E(A) = \sum_{x \in A} p(x) \cdot \log_2 \frac{1}{p(x)}$$

2 Hamming Code

(4,7)-Code: 4 Informationsbits, 3 Parity-Bits.
Nachricht, die in den Kanal verschickt werden soll:
(D_7, D_6, D_5, D_3)
Führt zu:
$(D_7, D_6, D_5, P_4, D_3, P_2, P_1)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

P4 = D7 + D6 + D5,
P2 = D7 + D6 + D3,
P1 = D7 + D5 + D3
Generator-Matrix G, Checkmatrix H:

$$
\begin{aligned}
G &= \begin{bmatrix} D_7 & D_6 & D_5 & P_4 & D_3 & P_2 & P_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_7 & D_6 & D_5 & D_3 \end{bmatrix} \\
H &= \begin{bmatrix} D_7 & D_6 & D_5 & P_4 & D_3 & P_2 & P_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_4 & P_2 & P_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

3 Konditionierung einer Matrix

Beispiel. Finden einer Lösung. y variiert: was bedeutet das für x?

$$
\begin{aligned}
2x + y &= 3 \\
2x + (1.001)y &= 0 \\
\Rightarrow y &= 3 - 2x
\end{aligned}
$$

Beispiel. Ist das Gleichungssystem singulär? $\det(A) = 0$

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 2.1 & -0.6 & 1.1 \\ 3.2 & 4.7 & -0.8 \\ 3.1 & -6.5 & 4.1 \end{bmatrix} \\
\Rightarrow \det(A) &= 2.1 \cdot 4.7 \cdot 4.1 + (-0.6) \cdot (-0.8) \cdot 3.1 + 1.1 \cdot 3.2 \cdot (-6.5) \\
&\quad -3.1 \cdot 4.7 \cdot 1.1 - (-6.5) \cdot (-0.8) \cdot 2.1 - 4.1 \cdot 3.2 \cdot -0.6 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

4 Das Gauss'sche Eliminationsverfahren

Beispiel. Nun.

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 11 \\ -2 & 4 & -2 & -16 \\ 1 & -2 & 4 & 17 \end{array}\right]
$$

Nach $(b) - (-0.5) \cdot (a)$:

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 11 \\ 0 & 3 & -1.5 & -10.5 \\ 1 & -2 & 4 & 17 \end{array}\right]
$$

Nach $(c) - (-0.25) \cdot (a)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 11 \\ 0 & 3 & -1.5 & -10.5 \\ 0 & -1.5 & 3.75 & 14.25 \end{array}\right]$$

Nach $(c) - (-0.5) \cdot (b)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 11 \\ 0 & 3 & -1.5 & -10.5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1.5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -10.5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Beispiel.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -6 & -4 & 1 & 22 \\ -4 & 6 & -4 & -18 \\ 1 & -4 & 6 & 11 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -6 & -4 & 1 & 22 \\ 0 & \frac{26}{3} & -\frac{14}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & -\frac{10}{3} & 6 & 11 \end{array}\right]$$

5 LU-Dekomposition

Theorem 1. Jede symmetrische Matrix kann sich in eine LU-Dekomposition zerlegen lassen.

Dekomposition von Doolittle

$$L_{ii} = 1$$

Dekomposition von Count

$$U_{ii} = 1$$

Dekomposition von Cholesky

$$L = U^T$$

Die Nebenbedingung ist, dass die Matrix A positiv definit ist:

$$\vec{x}^T A \vec{x} > 0$$

Warum LU-Dekomposition? Gleichungssystem: $Ax = b, A = L \cdot U \Rightarrow LUx = b$. Finde Lösung für $Ly = b$, dann $Ux = y$

5.1 Dekomposition von Doolittle

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow L \cdot U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{11}L_{21} & U_{11}L_{21} + U_{22} & L_{21}U_{13} + U_{23} \\ U_{11}L_{31} & U_{12}L_{31} + U_{22}L_{32} & U_{13}L_{31} + U_{23}L_{32} + U_{33} \end{bmatrix}$$

Darauf wird nun das Gauss'sche Eliminationsverfahren angewandt:
2. Reihe: 2. Reihe - $L_{21}\cdot$ 1. Reihe 3. Reihe: 3. Reihe - $L_{31}\cdot$ 1. Reihe

$$\Rightarrow A' = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & U_{22}L_{32} & U_{23}L_{32} + U_{33} \end{bmatrix}$$

Neuer Gauss'scher Filterschritt:
3. Reihe: 3. Reihe - $L_{32}\cdot$ 2. Reihe

$$\Rightarrow A'' = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

5.2 Dekomposition von Cholesky

$$A = LL^T$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_{11}^2 & L_{11}L_{21} & L_{11}L_{31} \\ L_{21}L_{11} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} \\ L_{31}L_{11} & L_{31}L_{32} + L_{32}L_{22} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Aha.

$$
\begin{aligned}
A_{11} = L_{11}^2 \quad &\leftrightarrow \quad L_{11} = \sqrt{A_{11}} \\
A_{21} = L_{11}L_{21} \quad &\leftrightarrow \quad L_{21} = \frac{A_{21}}{L_{11}} = \frac{A_{21}}{\sqrt{A_{11}}} \\
A_{31} = L_{11}L_{31} \quad &\leftrightarrow \quad L_{31} = \frac{A_{31}}{L_{11}} = \frac{A_{31}}{\sqrt{A_{11}}} \\
& \quad L_{32} = \frac{(A_{32} - L_{21}L_{31})}{L_{22}} \\
L_{22} = \sqrt{A_{22} - L_{21}^2} \\
L_{31} = \frac{A_{32} - L_{32}L_{22}}{L_{21}} \\
A_{33} = L_{31}^2 - L_{32}^2 + L_{32}^2 \quad &\leftrightarrow \quad L_{33} = \sqrt{A_{33} - (L_{31}L_{32})}
\end{aligned}
$$

Beispiel.

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 11 \end{bmatrix} \\
L_{11} &= \sqrt{A_{11}} = 2 \\
L_{21} &= \frac{A_{21}}{2} = -1 \\
L_{31} &= \frac{A_{31}}{L_{11}} = 1 \\
L_{22} &= \sqrt{A_{22} - L_{21}^2} = 1 \\
L_{32} &= (-4) + 1 = -3 \\
L_{33} &= \sqrt{11 - (1 + 3^2)} = \sqrt{1} = 1
\end{aligned}
$$

Cholesky-Zerlegung gefunden:

$$
\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}
$$

6 Positiv definit

Matrix A positiv definit äquivalent zu

$$
\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq 0
$$

Zeigen dass das immer gilt!