

Übungsblatt 1

Florian

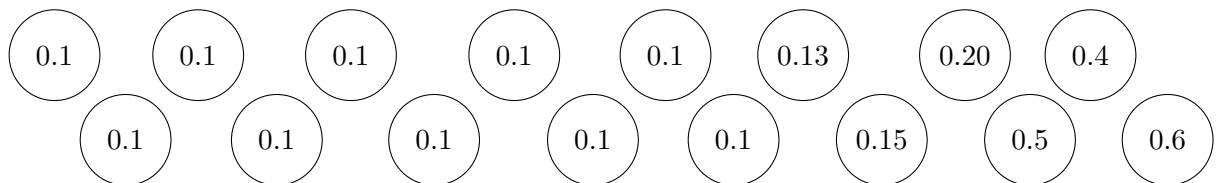
September 25, 2012

Aufgabe 1

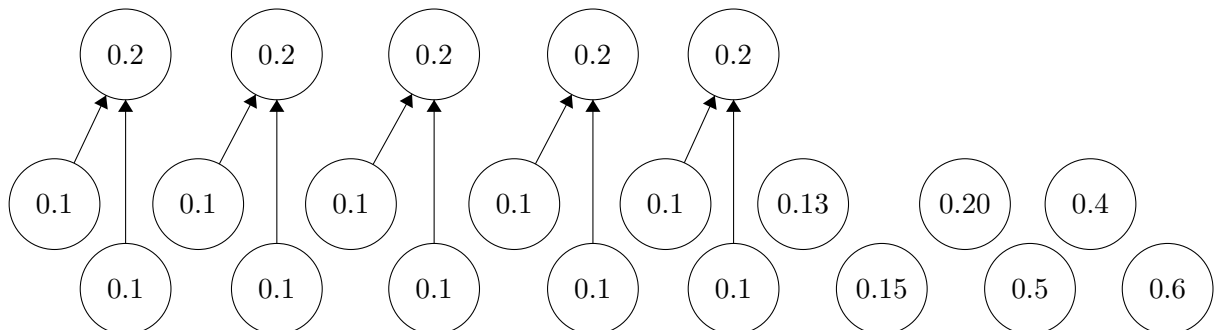
- a) Die Auftretenswahrscheinlichkeiten $p(x)$ (wobei $\sum_{x \in A} p(x) = 2.98$) werden normiert auf 1.0.

$$\begin{aligned}
 E(A) &= \sum_{x \in A} p(x) \cdot \log_2 \frac{1}{p(x)} \\
 &= 10 \cdot \frac{0.1}{2.98} \cdot \log_2 \frac{2.98}{0.1} + \frac{0.13}{2.98} \cdot \log_2 \frac{2.98}{0.13} + \frac{0.15}{2.98} \cdot \log_2 \frac{2.98}{0.15} \\
 &\quad + \frac{0.20}{2.98} \cdot \log_2 \frac{2.98}{0.20} + \frac{0.5}{2.98} \cdot \log_2 \frac{2.98}{0.5} + \frac{0.4}{2.98} \cdot \log_2 \frac{2.98}{0.4} + \frac{0.6}{2.98} \cdot \log_2 \frac{2.98}{0.6} \\
 &= 3.60565808338531 \dots
 \end{aligned}$$

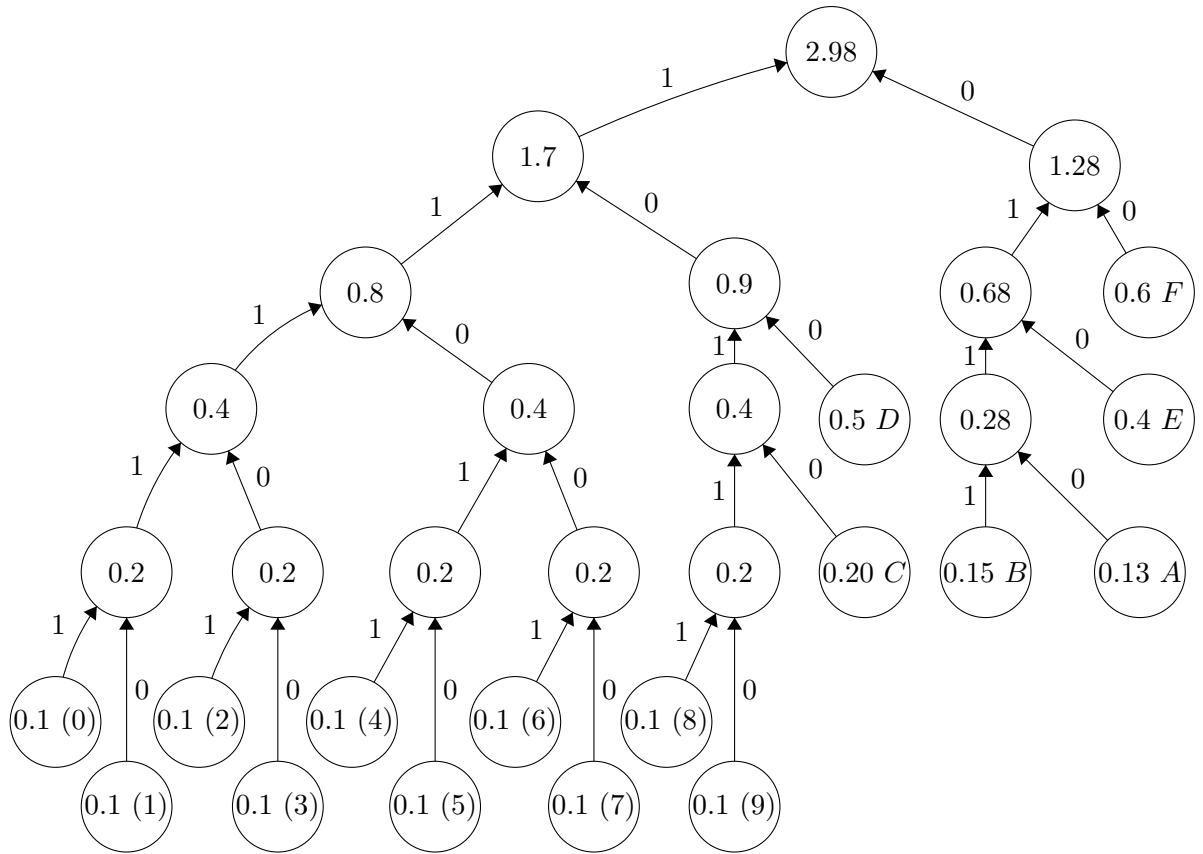
- b) Nur Blätter:



Die 10 0.1-er zusammengefasst:



Und so weiter, und so fort bis zu:



Daraus folgt entlang der Pfeile der Code:

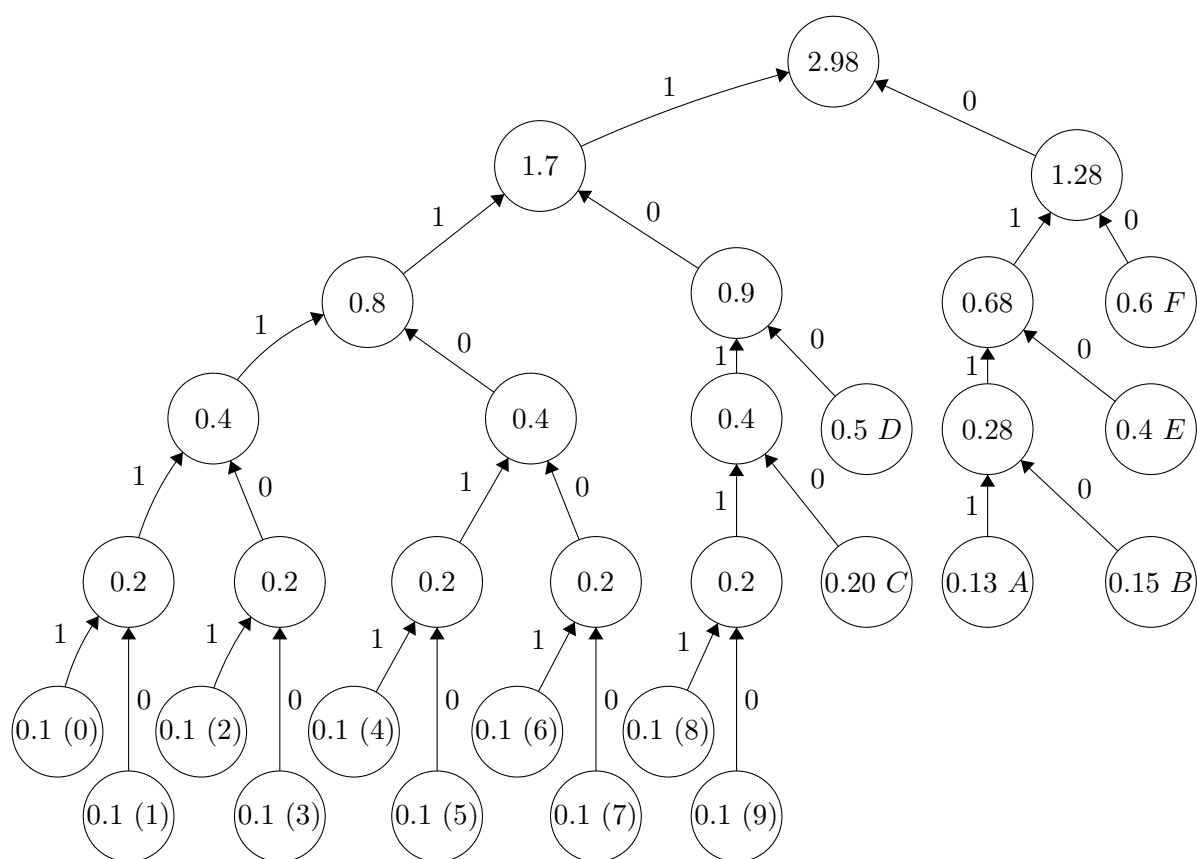
0 11111
1 11110
2 11101
3 11100
4 11011
5 11010
6 11001
7 11000
8 10111
9 10110
A 01110

- B** 0111
- C** 1010
- D** 100
- E** 010
- F** 00

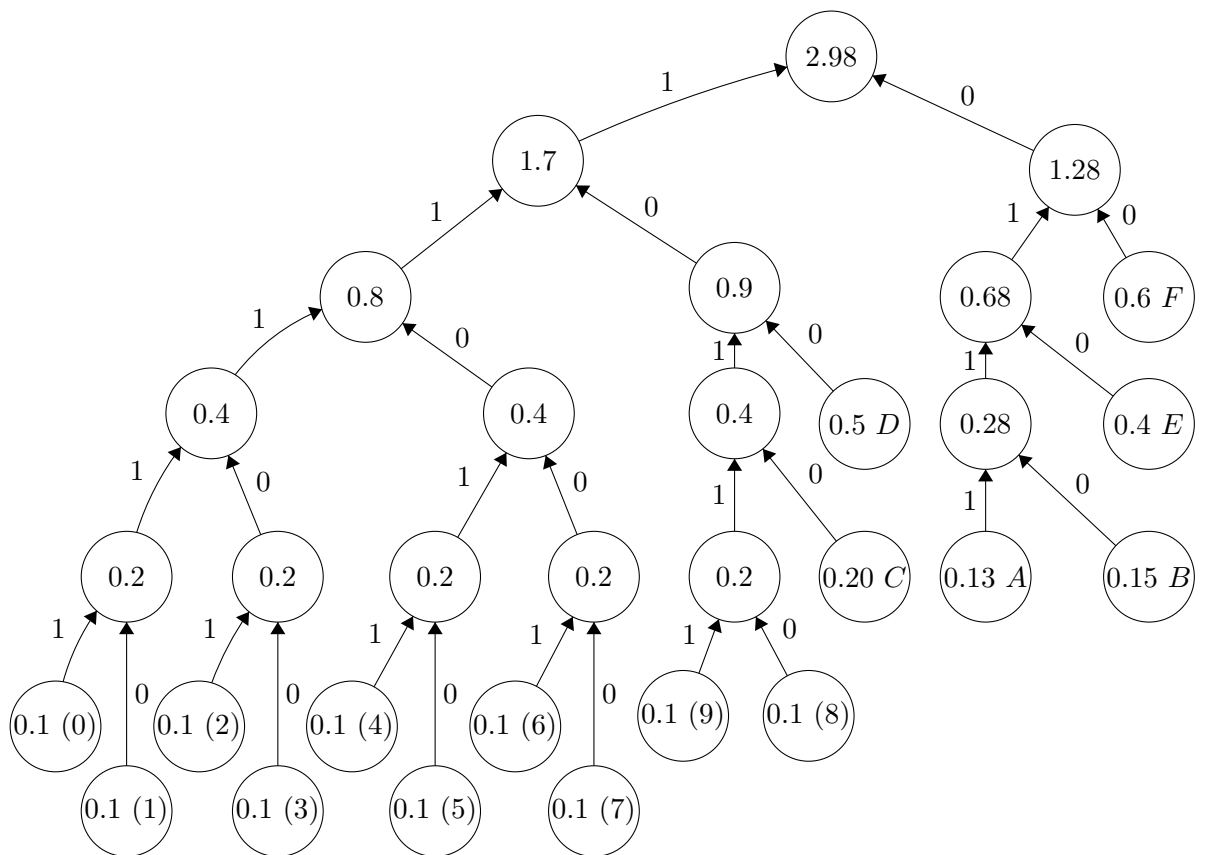
Die Code-Länge ist 5 (entspricht der Tiefe des Baums).

c) Der Baum ist nicht eindeutig.

Alternative Darstellungen:



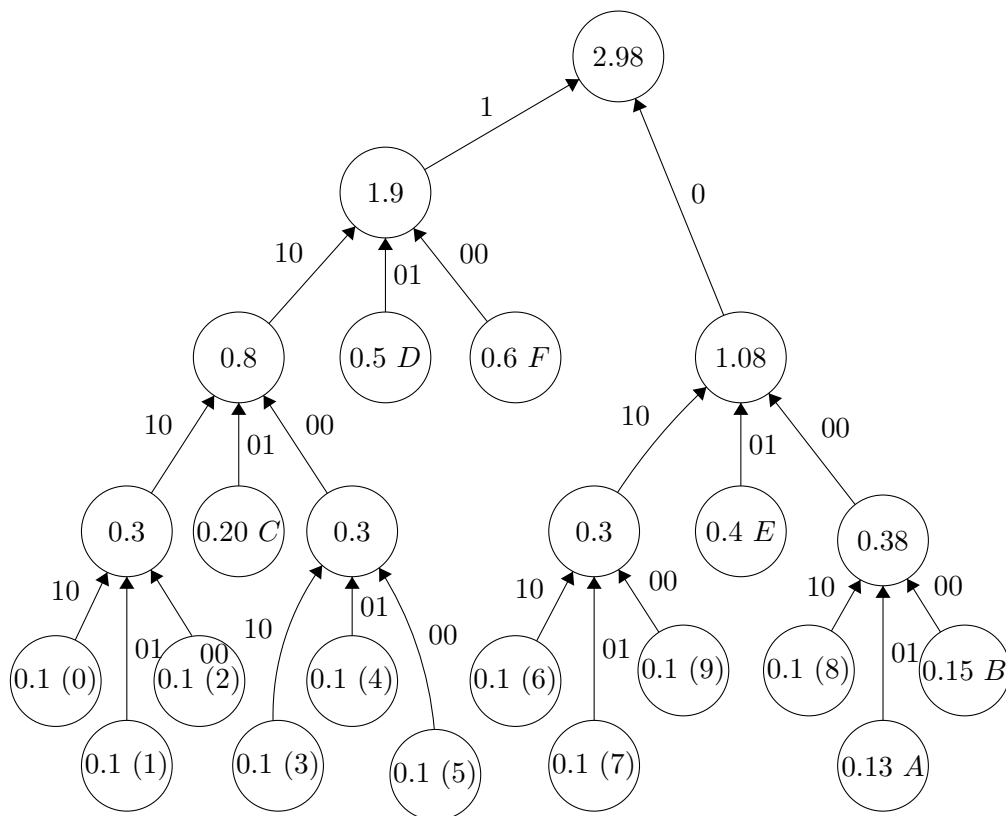
(A und B vertauscht)



(8 und 9 vertauscht)

d) Indem kein Binär-, sondern ein regulärer Baum mit beispielsweise 3 Kindknoten pro Knoten verwendet wird.

e) Regulärer 3-kindknotiger Baum:



- f) Nein, weil auch die einzelnen Zeichen von Binärdaten wiederkehrende Häufigkeiten aufweisen (0 wird beispielsweise relativ häufig auftauchen).

Aufgabe 2

1. Man kann Redundanz in die übertragenen Daten einbauen und dann die überschüssige Information verwenden, um Fehlererkennung bzw. -korrektur zu betreiben.
2. Die Kompression sollte vor der Chiffrierung erfolgen, weil das Ziel der Chiffrierung eine möglichst zufällige Verteilung der Zeichen ist. Dies hat negative Auswirkungen auf die Kompression, weil diese sich normalerweise wiederauftretende Muster bzw. ungleiche Auftretenswahrscheinlichkeiten zu Nutze macht. Die Fehlerkorrektur kommt sinnvollerweise erst am Ende, damit während dem Empfangen gleich als erstes die Fehleranalyse gemacht werden kann und nicht erst die Daten dechiffriert und dekomprimiert werden müssen.

Also: Kompression \Rightarrow Chiffrierung \Rightarrow Fehlerkorrektur beim Senden, Fehlerkorrektur \Rightarrow Dechiffrierung \Rightarrow Dekompression beim Empfangen.

3. • Generatormatrix:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Allgemein:

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & d_3 & p_4 & d_5 & d_6 & d_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_3 & d_5 & d_6 & d_7 \end{bmatrix} G$$

Mögliche Codewörter:

$d_3 d_5 d_6 d_7$	$p_1 = d_3 + d_5 + d_7$	$p_2 = d_3 + d_6 + d_7$	$p_4 = d_5 + d_6 + d_7$	$p_1 p_2 d_3 p_4 d_5 d_6 d_7$
0000	0	0	0	0000000
0001	1	1	1	1101001
0010	0	1	1	0101010
0011	1	2=0	2=0	1000011
0100	1	0	1	1001100
0101	2=0	1	2=0	0100101
0110	1	1	2=0	1100110
0111	2=0	2=0	3=1	0001111
1000	1	1	0	1110000
1001	2=0	2=0	1	0011001
1010	1	2=0	1	1011010
1011	2=0	3=1	2=0	0110011
1100	2=0	1	1	0111100
1101	3=1	2=0	2=0	1010101
1110	2=0	2=0	2=0	0010110
1111	3=1	3=1	3=1	1111111

- Indem wir die übertragenen Codewörter mit der Checkmatrix H multiplizieren und 0 als Resultat erwarten.

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Beispielsweise für das Datenwort 0010:

$$H \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wenn hingegen ein Übertragungsfehler stattfindet, beispielsweise das dritte Bit gedreht ist:

$$H \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Der resultierende Vektor ist die binäre Repräsentation der Fehlerstelle: $011_b = 3$. Dementsprechend können wir diese Stelle korrigieren und erhalten das gültige, beabsichtigte Codewort.