Divisibility by 2 or 5

if $n \% 2 == 0$ then yes it is divisible by 2. $(n <= 10^{18})$

যদি নাম্বারটা অনেক বড় হয় like string এ দেওয়া থাকে number টা। আর কিভাবে করবো?

string $s =$ (100 digit)

* last digit যদি even digit হয় $(0, 2, 4, 6, 8)$ তাহলে তা অবশ্যই 2 দ্বারা ভাগ যাবে।

$\underline{0}, \underline{5}, 1\underline{0}, 1\underline{5}, 2\underline{0}, 2\underline{5}, 3\underline{0}, \ldots$

* last digit যদি 0 অথবা 5 হয়, তাহলে তা 5 দ্বারা ভাগ যাবে।
* last digit যদি 0 হলে 10 দ্বারা ভাগ যাবে।

divisibility by 3 OR 9

$(\text{digit sum} \% 3 == 0)$ হলে ঐ সংখ্যা must be divisible by 3.

কেন হয় কী?

$\boxed{10 \% 3 = 1}$ we know

$4123 \% 3$

$= (4 \times \underline{10^3} + 1 \times \underline{10^2} + 2 \times \underline{10} + 3) \% 3$

$= (4 \times 10^3) \% 3 + (1 \times 10^2) \% 3 + (2 \times 10) \% 3 + 3 \% 3$

$= 4 \% 3 \times 1 + 1 \% 3 + 2 \% 3 + 3 \% 3$

$= (4 + 1 + 2 + 3) \% 3$

$10^3 \% 3$

$= (10 \% 3)^3 \% \ldots$

$(a \times b) \% m$

$(6 \% 4)^3 \% 6$

$[(\text{digit sum}) \% 9 == 0]$ হলে 3 এবং 9 দ্বারা divisible.

So, number 31 base এ আছে। এখন কাদের জন্য আমরা digit sum নিতে পারবো?

$$\Rightarrow (31 \% m) = 1$$

যাদের জন্য এই condition আছে।

$31 \% 3 = 1$	$31 \% 30 = 1$
$31 \% 5 = 1$	
$31 \% 10 = 1$	
$31 \% 15 = 1$	

$$b \% x == 1$$ (কতগুলো number আছে, যাদের জন্য b base এ 1 পাওয়া যাবে?)

$$\Rightarrow \underline{(b-1) \% x = 0}$$

$\therefore$ আমরা $(b-1)$ এর division গুলো, তাদের জন্য 1 পাওয়া যাবে।

Divisibility by 4:—

* last এর ২টা digit 4 দ্বারা ভাগ হলে or divisible.

কেন?

$$4123 \% 4$$

$$= (\underbrace{4\times 10^3 + 1\times 10^2}_{4 \text{ দ্বারা divisible}} + 2\times 10 + 3) \% 4$$

$$= 0 + 0 + \underline{(20+3) \% 4}$$

$$= 23 \% 4$$

Divisibility by 6 :–

$6 = 2 \times 3$

- যেকোন সংখ্যা 2 এবং 3 উভয় দ্বারা independently ভাগ গেলে তা ~~divis~~ 6 দ্বারা divisible.

$(2562 \% 2) \leftarrow$

$(2562 \% 3) \leftarrow$

$\underline{15 \% 3}$

- Prime factorize দিয়ে চেক করে দেখা।

divisibility by 11 :–

$10 \% 11 = 10$ or $\underline{-1}$

$(654123) \% 11$

$= \cancel{[(6\%11)+(5\%11)+(4\%11)+(1\%11)+(2\%11)+(3\%11)]} \% 11$

$= (6\times10^5 + 5\times10^4 + 4\times10^3 + 1\times10^2 + 2\times10 + 3\times10^0) \% 11$

$= \underline{(-6+5-4+1-2+3)} \% 11$

এটা 11 দ্বারা divisible হলে তা 11 দ্বারা divisible.

$=$

power বিজোড় হলে -1

জোড় " $+1$

divisibility by large Numbers

a → 10^5 digit

b → 10^9

a %, b টা divisible হবে কি না?

if $a>0$ and $b>0$
or $a<0$ and $b<0$
everything fine

but if $a<0$ and $b>0$
then need to check:
$ans = (b + ans) \% b$

5265 % 11

= 5 % 11 = 5

= (5 × 10 + 2) % 11

= (2 × 10 + 6) % 11 =

⇒ 5 % 11 = 5

⇒ (5 × 10 + 2) % 11 = 8

⇒ (8 × 10 + 6) % 11 = 9

⇒ (9 × 10 + 5) % 11 = ~~7~~

i → 0 to < n

ans = [ans * 10 + (a[i] - '0')] % b;

-2 % 5

= -2 .. -3

ans = -3

ans = ~~(5 + -3)~~ % 5

= 3

(5 + ans) % b

K consecutive divisibility:- (interesting one)

n length এর একটি array দেওয়া আছে, কতগুলো এমন subarray আছে যার নিচের condition মানে:—

(subArray element product) % subArray length == 0

example: 2 3 4 2

size → 1: everyone is divisible by 1

size → 2: (2 × 3) % 2 = 0

(3 × 4) % 2 = 0

(4 × 2) % 2 = 0

size → 3: (2 × 3 × 4) % 3 = 0

(3 × 4 × 2) % 3 = 0

size → 4: (2 × 3 × 4 × 2) % 4 = 0

Solⁿ:-

যেকোনো n সংখ্যক consecutive number

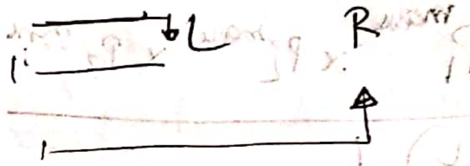
$\boxed{1 \; . . . \; n}$

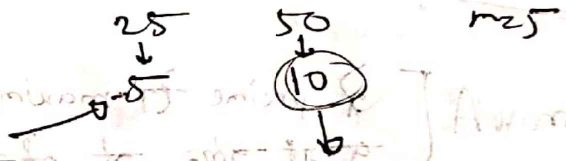
K সংখ্যক consecutive number এর product K! দ্বারা always divisible.

Divisibility by all:-

L থেকে R এর মধ্যে কতগুলো number m দ্বারা divisible?

$$\boxed{\left\lfloor \frac{R}{m} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{L-1}{m} \right\rfloor}$$





1–25 এর মধ্যে 5 এর 5টা division আছে। 1–50 এর মধ্যে 5 এর 10টা division আছে।

1 ---- n এর মধ্যে কয়টি number both (x,y) দ্বারা divisible?

অর্থাৎ যেসব number x ও y উভয় দ্বারা divisible: lcm(x,y)

$$\boxed{\frac{n}{lcm(x,y)}}$$

যদি বলা হয়, (x,y,z) দ্বারা divisible কয়টি?

$$\frac{n}{lcm(x,y,z)}$$

→ number আসবে না, lcm(x,y,z) এর মানটি যদি $\le n$

Modular lcm:- (n log N)

array, A, $n = 10^5$

$a_i <= 10^5$

$P_1^{max} \times P_2^{max} \times P_3^{max}$

$O(n^2)$!

max A [যে prime হবে maximum ~~ধরার আছে~~, তা ওই array তে mark করবো]

(n log n)

Pair Sums and Divisibility:- O(n log N)

$n = 10^5$ $k = 10^5$

$a_i <= 10^9$

কয়টি pair আছে, যাদের sum k দ্বারা divisible?

$(a_i + a_j) \% k == 0$?

$\Rightarrow (a_i \% k + a_j \% k) \% k = 0$

$\Rightarrow a_i \% k = -a_j \% m$

$5 = 2 + 3 = 2 + (5-2)$

i er $= i + (k-i)$

আমরা যদি i পাই, তাহলে দেখবো আছে k − i আছে, তার সাথে যোগ করলে K

After modulo by 5

0 1 2 3 1 2 4

$1+1+2 = 4$

- mod by k (all)
- i এর left এ k−i আছে কিনা দেখতে হবে।

$-j = k - i$

$10 \% 11 = 10$ or -1

কতগুলো subArray'র sum k দ্বারা divisible?

Prefix sum:-

2 1 3 4 5

- after mod by k, do prefix sum.

$P_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$

$P = P_j - P_{i-1}$

অর্থাৎ pair গুলো prefix sum থেকে, বের করো,

$$\boxed{(P_j - P_{i-1}) \% K == 0}$$

$a_j - a_z$

$P_z - P_{3-1}$

$(P_j \% K - P_{i-1} \% K) \% K = 0$

$\Rightarrow P_j \% K = P_{i-1} \% K$

$x = x$

$\Rightarrow \boxed{x - x = 0}$

অর্থাৎ প্রত্যেক i এর left এ i কতগুলো আছে।

$K - C$

- Subarray হলে
prefix sum দিয়ে চিন্তা করো

Hashing divisibility:

- array → 10^5

$a_i <= 10^5$ — consecutive element না হলেও হবে।

$k = 10^5$

maximum no. of subset such that sum of each pair of this subset is not divisible by k?

⇒ mod by k (all elements)

$\boxed{x, k-x}$

x নিলে k−x নেওয়া যাবে না।

count arr:- 0 1 2 3 4 -- m−2, m−1

শুধু একটা নেওয়া যাবে। ২টা নিলে pair হবে, divisible হবে।

maximum যেটা হবে সেটা ও নিতে হবে।

$\boxed{\text{Max}(i, k-i)}$

$\left(\frac{m}{2}, m - \frac{m}{2}\right)$

এই হবে আরও একটা নেওয়া যাবে। ২টা নিলে divisible

Legendre's formula : $\log_p n$

$$V_p(n!) = \sum_{i=1}^{d} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$$

~~tailing~~ trailing zero's in $n!$:-

$a = \max\left(\frac{n!}{2^x}\right)$ বেশি 2 ~~এর~~, 5 ~~এর~~ হবে।

$b = \max\left(\frac{n!}{5^x}\right)$

$\boxed{b<a}$ অবশ্যই হবে, $\boxed{\frac{10}{2} > \frac{10}{5}}$

no. of trailing zero $= \max\left(\frac{n!}{5^x}\right)$

Divisons of a factorial :- $n! = 1, 2, 3, 4 \ldots n$

~~প্রত্যেকটা~~ individually prime factorize করো, counter array তে increment করো।

counter $[\;\;|\;\;|\;\;|\;\;|\;\;]$

No. of Odd divisons :-

n এর যতটা divison আছে, ~~সেগুলোর~~ মধ্যে odd কয়টা।

$n = 2^{e_1} \times 3^{e_2} \times 5^{e_3} \ldots$

just 2^{e_1} বাদ দিলে বাকি যা divison হবে, তাই হবে no. of odd divisors.

odd divison $= (e_2+1) \times (e_3+1)$

Goldbach's Conjecture :-

$\to$ 2+3 2+7

- every even integer greater than 2 can be expressed by sum of two ~~prime~~ numbers. prime

$n = a + b$ (a, b prime)

$\Rightarrow b = (n-a, a)$

prime a select করো।

prime (n-a) check করো, yes or no?

$\boxed{\begin{array}{l} a = a; \\ b = n-a; \end{array}}$ $\to$ a $\to$ prime than (n-a) ও তাও check করো।

- every odd integer greater than ~~2~~ 2 can be expressed by sum of ~~two~~ 3 numbers.

~~$a = 2$~~

~~$b = n-2$~~

Represent n by minimum no. of prime-sum:-

n → prime = 1

n → even = 2 (goldbach's conjecture)

n = odd ~~n = odd~~

n → (n−2) prime = 2 [2, n−2]

otherwise; n → 3 : [3, (n−3)]

(n−3) → even so for it we also have 2 prime]

Counting digit of a number:-

$(\log_{10} n + 1)$

base 10

যদি base 2 হয়,

$\boxed{\log_2 n + 1}$

base-x হলে

$\boxed{\log_x n + 1}$

For n! :-

$\log_{10}(n!)$

$= \log_{10}(1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n!)$

$= [\log_{10} 1 + \log_{10} 2 + \log_{10} 3 + \dots + \log_{10} n]$

double y = x + 1

|y|

Big GCD

$gcd(a,b) = gcd(a \% b, b) = gcd(a-b, b)$

$= \cancel{gcd}$

maximum subset of array element so ~~that~~ $\boxed{gcd(\cancel{all}\ subset) = 1}$

Fool! fool!

পুরো array টাই best option

element যত বাড়বে, gcd তত কমে।

Sum of Powers :-

$$\boxed{k^0 + k^1 + k^2 + \dots + k^n < k^{n+1}} \text{ if } n \geq 2$$

$$\boxed{2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 < 2^4}$$

Represent n by sum of mini. no. of 2^x :-

$$11 = 2^3 + (11 - 2^3)$$

$$10 = 2^3 + (11 - 2^3)$$

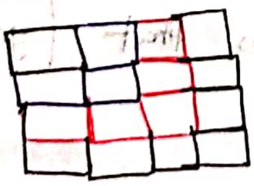
sum of 3^x :-

$$n = 3^x + (n - 3^x) + 3^x$$

Common formulas :-

~~1st n~~ [illegible]

sum of 1st n odd numbers $= n^2$



- $1 + 2 + 3 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

- **Arithmetic Sequence:-** (সমান্তর ধারা)

$$a, a+d, a+2d, \ldots$$

$a =$ first term.
$d =$ common diff

$$x_n = a + (n-1)d$$

Sum ~~of~~ ~~[illegible]~~:- n সংখ্যক পদের $\quad \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

Geometric Sequence (গুণোত্তর)

$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots$$

$$a, ar, ar^2, \ldots$$

$r =$ ration
$a =$ first

$$\boxed{x_n = ar^{n-1}}$$

Sum ~~upto~~ of n সংখ্যক পদের:-

$$a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

for infinite series:-

$$\text{sum} = a\left(\frac{1}{1-r}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} ar^k$$