প্রথম অধ্যায়

১ম অধ্যায়

মাট্রিক্স ও নির্ণয়ক (Matrix and Determinants)

ম্যাট্রিক্স

ম্যাট্রিক্সঃ

কতগুলো (বাস্তব বা জটিল) সংখ্যাকে সারি এবং কলাম আকারে দুটি বন্ধনী দ্বারা একটি নির্দিষ্ট নিয়মে শ্রেণীবদ্ধ করলে যে আয়তাকার বিন্যাস পাওয়া যায় তাকে ম্যাট্রিক্স বলে।

ম্যাট্রিক্সকে প্রথম বন্ধনী ( ) অথবা তৃতীয় বন্ধনী [ ] অথবা দুই জোড়া সমান্তরাল সরলরেখা || || দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণঃ

i) A=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

ii) B=$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

iii) C=$\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$

আবিষ্কারঃ

ব্রিটিশ গণিতবিদ ক্লে প্রথম Matrix আবিষ্কার করেন।

উপাদানঃ

যে সমস্ত সংখ্যা দ্বারা ম্যাট্রিক্স গঠিত হয় তাদের তাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি পদ বা ভুক্তি (entry) বলে।

সারি (Row):

ম্যাট্রিক্সের সংখ্যাগুলোকে আনুভূমিক রেখা বরাবর সাজানো হলে তাকে সারি বলে।

কলাম (Column):

ম্যাট্রিক্সের উলম্ব রেখা বরাবর সাজানো হলে তাকে কলাম বলে।

উদাহরণঃ A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

A ম্যাট্রিক্সের দুটি সারি ও দুটি কলাম বিদ্যমান।

প্রকাশঃ

ম্যাট্রিক্সকে ইংরেজি বড় হাতের অক্ষর দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমন-$\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$,$\mathcal{C}$ ইত্যাদি।

মুখ্যকর্ণ

- ❖ ম্যাট্রিক্স উপস্থাপনাঃ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ সারি

গৌণকর্ণ

কলাম

- ❖ ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদঃ

1.আয়তাকার ম্যাট্রিক্স (Rectangular Matrix) : কোন ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলাম সংখ্যা সমান না হলে তাকে আয়তাকার Matrix বলে।

যেমন-$\begin{bmatrix} 10 & 2 & 30 \\ 4 & 2 & -8 \end{bmatrix}$ একটি (2×3) ক্রমের ম্যাট্রিক্স।

2.বর্গ ম্যাট্রিক্স (Square Matrix):

যে ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলাম সংখ্যা সমান তাকে বর্গ ম্যাট্রিক্স বলে।

যেমন-$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ একটি (2×2) ক্রমের ম্যাট্রিক্স।

3.সারি ম্যাট্রিক্স (Row Matrix):

যে ম্যাট্রিক্সের একটি মাত্র সারি থাকে তাকে সারি ম্যাট্রিক্স বলে।

যেমন-$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ একটি (1×3) ক্রমের Matrix.

4.কলামম্যাট্রিক্স (Column Matrix):

যে ম্যাট্রিক্সের একটি মাত্র কলাম থাকে তাকে কলামMatrix বলে।

যেমন-$A = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$একটি (3×1)ক্রমেরMatrix.

5.উর্ধ ত্রিভুজাকৃতির মাট্রিক্স(Upper Triangular Matrix):কোনবর্গম্যাট্রিক্সেরপ্রধানকর্ণেরনিম্নস্থসবগুলোউপাদানশূন্যহলেতাকেউর্ধত্রিভুজাকৃতিMatrixবলে।

যেমন-$U = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ একটি (3×3) ক্রমের Matrix.

6.নিম্নত্রিভুজাকৃতিরমাট্রিক্স(Lower Triangular Matrix):

যেমন-$L = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 05 & 2 & 0 \\ 02 & 10 & 6 \end{bmatrix}$

এককোনবর্গম্যাট্রিক্সেরপ্রধানকর্ণেরউপরস্থসবগুলোউপাদানশূন্যহলেতাকেনিম্নত্রিভুজাকৃতিটি (3×3) ক্রমের ম্যাট্রিক্স।

7.শূন্যবানালমাট্রিক্স (Zero or Nal Matrix):

যেম্যাট্রিক্সেরসবগুলোউপাদানশূন্যতাকেশূন্যবানালMatrixবলে।

যেমন-$Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ একটি (3×3) ক্রমের Matrix.

8.কর্ণ ম্যাট্রিক্স(Diagonal Matrix):

যে ম্যাট্রিক্সের কর্ণস্থিত উপাদান ব্যতীত অন্য সকল উপাদান শূন্য হয় তাকে কর্ণ Matrixবলে।

যেমন- $D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ একটি (3×3) ক্রমের Matrix.

9.জটিল ম্যাট্রিক্স (Complex Matrix):

যে ম্যাট্রিক্সের উপাদানগুলোর মধ্যে জটিল সংখ্যা থাকে তাকে জটিল Matrixবলে।

যেমন- $C = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ একটি (3×3) ক্রমের Matrix.

10.স্কেলার ম্যাট্রিক্স (Scalar Matrix):

যে কর্ণ ম্যাট্রিক্সের অশূন্য উপাদানগুলো সমান হয় তাকে স্কেলার Matrix বলে।

যেমন- $S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ একটি (3×3) ক্রমের Matrix.

11.একক বা অভেদক ম্যাট্রিক্স (Unit or Identity Matrix):

যে কর্ণ ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের সকল উপাদান 1 (একক) এবং অন্য সকল উপাদান শূন্য হয় তাকে অভেদক Matrix বলে।

যেমন-$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ একটি (3×3) ক্রমের Matrix.

12.বিশেষ বা ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স (Singular Matrix):

যে ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান শূন্য তাকে ব্যতিক্রমী Matrix বলে।

যেমন-$D = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ একটি (2×2) ক্রমের Matrix.

এখানে, $|E|$=3×4-6×2=0

13.অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স (Non-singular Matrix):

যে ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান শূন্য নয় তাকে অব্যতিক্রমী Matrix বলে৷

যেমন-$I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ একটি Non-singular Matrix.

এখানে,

$|N| \neq 0$

14.সমঘাতি বা এককক্ষন ম্যাট্রিক্স (Indempotent Matrix):

বর্গাকার কোন ম্যাট্রিক্সAকে সমঘাতি ম্যাট্রিক্স বলাহবেযদি$A^2 = A$ হয়।

যেমন-A $= \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$একটি Idempotent Matrix কারণ $A^2 = A$.

যেমন-A $= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$একটি Idempotent Matrix কারণ$A^2 = A$.

15.শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স (Nilpotent Matrix):

একটি বর্গাকার ম্যাট্রিক্স A কে শূন্যঘাতি মেট্রিক্স বলা হবে যদি $A^n = 0$ হয়। এখানে n ধনাত্নক পূর্ণ সংখ্যা হবে।

যেমন-A $= \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$এখানে, $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$

একইভাবে $A^3 = 0, A^4 = 0, A^5 = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A^n = 0.$

16.অভেদঘাতি বা উদ্ঘাতিক ম্যাট্রিক্স (Ivolutory Matrix):

যদি A একটি বর্গাকার ম্যাট্রিক্স হয় তবে A^2=I হলে A কে উদ্ঘাটি ম্যাট্রিক্স বলা হবে৷

যেমনঃ-A $= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

এখানে, $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

এখানে, I হল একক ম্যাট্রিক্স৷

17.পার্শ্বচর বা বিম্বম্যাট্রিক্স (Involuntary Matrix):

কোন মাট্রিক্সের সারিগুলো কলামে এবং কলামগুলো সারিতে রুপান্তর করলে যে নতুন ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে বিম্ব ম্যাট্রিক্স বলে।

বিম্ব ম্যাট্রিক্সকে A^T বা A^t বা A\` বা A^2 দ্বারা প্রকাশ করা হয় ।

$(A^T)^T = A$এবং $((A^T)^T)^T = AT$

উদাহরনঃ

যদি, A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times3}$ হয়

তবে, $A^T=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{bmatrix}_{3\times 2}$ হবে।

18.প্রতিসম ম্যাট্রিক্স (Symmetrix):

যদি A একটি বর্গাকার ম্যাট্রিক্স হয় এবং A^T= -A হয়, তবে A কে Symmetrix বলা হয় ।

যেমনঃ- $A=\begin{bmatrix}6 & 2 & 3\\ 2 & 4 & -6\\ 3 & -6 & 8\end{bmatrix}$ হলে,

এখানে,$A^T=\begin{bmatrix}6 & 2 & 3\\ 2 & 4 & -6\\ 3 & -6 & 8\end{bmatrix}$

কারন, $A = A^T$ হয়।

19. অপ্রতিসম বা বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স (Knewsemmetrix):

যদি A একটি বর্গাকার ম্যাট্রিক্স হয় এবং A^T=-A হয় তবে A কে Snewsymmetric Matrix বলে ।

যেমনঃ- $A = \begin{bmatrix}0 & 2 & -8\\ -2 & 0 & 6\\ 8 & -6 & 0\end{bmatrix}$ হলে,

$$A^T=\begin{bmatrix}0 & 2 & -8\\ -2 & 0 & -6\\ -8 & 6 & 0\end{bmatrix}$$

$$=-\begin{bmatrix}0 & 2 & -8\\ -2 & 0 & 6\\ -8 & 6 & 0\end{bmatrix}$$

$$\therefore AT = -A,$$

এখানে, A হোল একটি Skew symmetric Matrix.

20.উল্লম্ব ম্যাট্রিক্স(Orthogonal Matrix):

যদি A একটি বর্গাকার ম্যাট্রিক্স হয় এবং $AA^T = A^TA = I$হয় তবে A কে Orthogonal Matrix বলা হয় ।

অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স (Adjoint or Adjugate Matrix):

যদি A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় তবে তার প্রত্যেকটি উপাদানের সহগুনক (Co-factor) দ্বারা উৎপন্ন ম্যাট্রিক্স এর পার্শ্বচর ম্যাট্রিক্সকে AdjointMatrix বলে।

উদাহরণঃ

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

প্রথম ধাপঃ

$$a_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{23} \end{vmatrix}= a_{22}\times a_{23} - a_{23}\times a_{32}$$

$$a_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{33} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{21}\times a_{33} - a_{31}\times a_{33}$$

$$a_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=a_{21}\times a_{32}-a_{22}\times a_{31}$$

$a_{21}=a_{11}\times a_{33} - a_{13}\times a_{31}$

$a_{22}=a_{12}\times a_{33} - a_{13}\times a_{32}$

$a_{23}=a_{11}\times a_{32} - a_{12}\times a_{31}$

$a_{31}=a_{12}\times a_{23} - a_{13}\times a_{22}$

$a_{32}=a_{11}\times a_{23} - a_{13}\times a_{21}$

$a_{33}=a_{11}\times a_{22} - a_{12}\times a_{21}$

২য় ধাপঃ

$$Adj\ A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

22. বিপরীত ম্যাট্রিক্স (Inverse Matrix):

যদি A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং $|A|\neq 0$ হয়, তবে Adj A কে $|A|$ দ্বারা ভাগ করলে A^{-1} পাওয়া যায়।

সুতরাং, $A^{-1}=\frac{Adj\ A}{|A|}=\frac{1}{A}\ Adj\ A$

23. উপ-ম্যাট্রিক্স (Sub-Matrix):

কোন ম্যাট্রিক্সের যে কোন সংখ্যক কলাম ও সারি উপাদান বাদ দিয়ে গঠিত অপর একটি ম্যাট্রিক্সকে মূল ম্যাট্রিক্সের উপ-ম্যাট্রিক্স বলে।

উদাহরণঃ

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 10 & 12 & 14 \\ 16 & 18 & 20 \end{bmatrix}$$

এই ম্যাট্রিক্সের উপ-মাট্রিক্সগুলো হলো,

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 12 & 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 16 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 14 \\ 18 & 20 \end{bmatrix}.$$

24. অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স (Conjugate Matrix): কোন জটিল ম্যাট্রিক্সের উপাদানগুলোর স্থান পরিবর্তন না করে ,তাদের জটিল অনুবন্ধী হলে তাকে অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স বলে। ইহাকে $\bar{A}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমনঃ- $A = \begin{bmatrix} 2-5i & -1-8i \\ 5 & 8i \end{bmatrix}$এর

অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স, $\bar{A} = \begin{bmatrix} 2+5i & -1+8i \\ 5 & -8i \end{bmatrix}$

23. ম্যাট্রিক্সের ট্রেস (Trace of Matrix):

কোন বর্গ ম্যাট্রিক্সের মূখ্য কর্ণের উপাদানের যোগফলকে ম্যাট্রিক্সের ট্রেস বলে।

যেমনঃ- $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

Trace (A)=Tr (A) = 3+2=5

উপরের Matrix হতে মূখ্যকর্ণ, মূখ্যপদ, মাধ্যমিক কর্ণ, মাধ্যমিক পদ কত?

মূখ্যকর্ণ হল, 3 এবং 2

মূখ্যপদ হল, 3×2=6

মাধ্যমিক কর্ণ হল, 4এবং 3 মাধ্যমিক পদ হল,4 × 3=12

24. ম্যাট্রিক্সের সমতা (Equality of Matrix):

যদি দুইটি মাট্রিক্সের মাত্রা (Order)সমান হয় এবং একটির উপাদান অপরটির অনুরূপ উপাদানের সমান হয় তবে ম্যাট্রিক্স দুইটি সমান হবে।

যেমনঃ- $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$

কারন দুইটি মাট্রিক্সের মাত্রা এবং উপাদান সমান।

*হারমিশিয়ান ম্যাট্রিক্স (Hermitian Matrix):

যদি কোন জটিল ম্যাট্রিক্সকে অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্সে রুপান্তর করা হয়। তা অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্সকেTranspose Matrix এ পরিণত করলে আদি ম্যাট্রিক্সে ফিরে আসলে তাকে Hermitian Matrix বলে। একে$(\bar{A})^{T}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণঃ- যদি A=$\begin{bmatrix} 2 & 4+i8 \\ 4-i8 & 6 \end{bmatrix}$

$\bar{A}$=$\begin{bmatrix} 2 & 4-i8 \\ 4+i8 & 6 \end{bmatrix}$

$(\overline{A})^{T}$=$\begin{bmatrix} 2 & 4+i8 \\ 4-i8 & 6 \end{bmatrix}$

- ম্যাট্রিক্স যোগের নিয়মঃ

যদি A=$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

এবং B=$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$হয়,

তবে,

A+B = $\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{bmatrix}$

- ২টি ম্যাট্রিক্স বিয়োগের নিয়মঃ

যদি A= $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

এবং B= $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$ হয়,

তবে,

$$A-B = \begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & a_{13}-b_{13} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & a_{23}-b_{23} \\ a_{31}-b_{31} & a_{32}-b_{32} & a_{33}-b_{33} \end{bmatrix}.$$

- 2×2 Inverse Matrix:

A= $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $|A| = ab - bc$

A- $\frac{1}{ab-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Adj (A) = $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{Adj\ (A)}{|A|}$

N.B: মাত্রা/ক্রম/পর্যায়/order = সারি × কলাম

দুইটি ম্যাট্রিক্স গুণের নিয়মঃ-

যদি A= $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

এবং B= $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$ হয়,

তবে,

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + b_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{bmatrix}$$

- **মাট্রিক্সের সাহায্যে একদল একাঘাত সমীকরণের সমাধান পদ্ধতিঃ-**

মনে করি,

$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=c_1$------------------(1)

$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=c_2$------------------(2)

$a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=c_3$------------------(3)

(1),(2) ও (3) নং হতে আমরা লিখতে পারি,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \text{-----------(4)}$$

আবার,

মনে করি, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$

এখন, (4) হতে পাই,

$AB=C$

$B=A^{-1}C$------------------(5)

এখানে,

$D=|A|\neq 0$

(5) হতে পাই,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{13} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

$x = p$, $y = z$ ও $z = r$.

নির্ণায়ক (Determinant)

নির্ণায়কঃ

কতগুলো (বাস্তব বাঁ জটিল) সংখ্যা বা রাশিকে দুইটি খাড়া বন্ধনী দ্বারা একটি নির্দিষ্ট নিয়মে শ্রেণীবদ্ধ করলে যে বিশেষ আকারের বর্গাকৃতি বিন্যাস পাওয়া যায় তাকে নির্ণায়ক বলে।

নির্ণায়ককে সর্বদাই দুইটি বার।। দ্বারা আবদ্ধ করা হয়। নির্ণায়ক সর্বদাই বর্গাকৃতির হয় অর্থাৎ সারি ও কলাম অবশ্যই সমান হতে হবে।

নির্ণায়ককে de+(A) বা $|A|$ দ্বারা সূচিত করা হয় ।

- তৃতীয় পর্যায়ে নির্ণায়কের চিহ্নঃ-

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

- সারিঃ

নির্ণায়কের উপাদান সমূহের আনুভূমিক বিন্যাসকে সারি বলে ।

- স্তম্ভ (Column):

নির্ণায়কের উপাদান সমূহের উল্লম্ব বিন্যাসকে Column বলে ।

- নির্ণায়কের মাত্রাঃ

কোন নির্ণায়কের সারি ও কলাম সংখ্যা n হলে,তাকে n মাত্রার নির্ণায়ক বলে ।

- নির্ণায়কের পদঃ

ধরি, তৃতীয় মাত্রার নির্ণায়ক $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

এখানে, a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 ইত্যাদি এর গুনফলকে পদ (term) বলা হয় ।

- মূখ্য কর্ণ এবং মূখ্য পদঃ

a_1,b_2এবং c_3 উপাদান গুলোকে মূখ্য কর্ণ এবং a_1,b_2এবং c_3 এর উপাদান গুলোকে মূখ্যপদ (term) বলে ।

- মাধ্যমিক কর্ণ বা মাধ্যমিক পদঃ
- a_3, b_2 এবং c_1 এরউপাদান গুলোকে মাধ্যমিক কর্ণ এবং a_3, b_2 এবং c_1 এরউপাদান গুলোর গুণফলকে মাধ্যমিক পদ বলে ।
- অনুরাশি বা আনুপাতিকঃ

নির্ণায়কের যে কোন একটি উপাদানের মধ্য দিয়ে একটি খাঁড়া ও একটি আনুভূমিক সরল রেখা টানলে,বাকী উপাদান গুলোদ্বারা গঠিত নির্ণায়ককে ঐ উপাদানের অনূরাশি (Mirror) বলে ।

উদাহরণঃ

$$D= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

উপরোক্ত নির্ণায়কের a_1, b_2 এবং c_3 এর অনূরাশি যথাক্রমে-

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{এবং} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

বা, $(b_2c_3 - b_3c_2), (a_2c_3 - a_3c_2)$ এবং $(a_2b_3 - a_3b_2)$

- সহ গুনক (Co-factor):

নির্ণায়কের কোন উপাদানের অনুরাশির পূর্বে যথাসাধ্য চিহ্ন বসালে তাকে ঐ উপাদানের সহগুনক বলে ।

উদাহরণঃ

$$D= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

উপরোক্ত নির্ণায়কে a_1, b_2 এবং c_3 এর সহগুনক যথাক্রমে –

$$+\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{এবং} +\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$\therefore$ নির্ণায়কের বিস্তার $= a_1(b_2c_3-b_3c_2)-b_1(a_2c_3-a_3c_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)$.

- সহগুনকের চিহ্ন সনাক্তকরনঃ

$$\begin{vmatrix} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} \\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3} \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & (-1)^{3+3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

- নির্ণায়কের গুণাবলী (Properties of derminants):

1) কোন নির্ণায়কের একটি সারি বা কলামের সকল উপাদান শূন্য হলে নির্ণায়কের মানশূন্য হবে।

উদাহরণঃ

$$D_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

2) যদি নির্ণায়কের দুইটি সারি বা কলাম একই হয়, তবে নির্ণায়কের মান শূন্য হবে।

উদাহরণঃ

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}=0$$

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

3) কোন নির্ণায়কের অনুরূপ সারি ও কলাম সমূহ পরস্পর স্থান বিনিময় করলে এর মানের কোন পরিবর্তন হয় না।

উদাহরণঃ $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$D`=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

সুতরাং, D=D` সমান।

4) কোন নির্ণায়কের পাশাপাশি দুইটি কলাম বা সারি পরস্পর স্থান বিনিময় করলে নির্ণায়কটির মান অপরিবর্তিত থাকে কিন্তু চিহ্নের পরিবর্তন হয় I

যেমন, $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

এবং, $D`=-\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$

আবার, $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

এবং, $D` = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

5) কোন নির্ণায়কের যে কোন সারি বা কলাম এর প্রত্যেক উপাদানকে যে কোন সংখ্যক ‘n’ দ্বারা গুন করলে নির্ণায়কের মানকে ঐ সংখ্যা ‘n’দ্বারা গুন বোঝায়।

যেমন, $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ হলে,

$$\begin{vmatrix} na_1 & \mathrm{n}b_1 & nc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \mathrm{n}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

= nD

6. কোন নির্ণায়কের যে সারি বা কলাম এর প্রতিটি উপাদান দুটি পদের সমষ্টিরূপে থাকে, তবে নির্ণায়কটি অপর দুটি নির্ণায়কের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যাবে।

যেমনঃ- $D=\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$\therefore D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

7. নির্ণায়কের কোন সারি বা কলাম এর প্রতিটি উপাদান অন্য প্রতিটি সারি বা কলাম এর অনুরূপ উপাদানের একই গুণিতক দ্বারা বৃদ্ধি বা হ্রাস করা হলে নির্ণায়কের মানের কোন পরিবর্তন হয় না।

যেমনঃ

$$D=\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_2 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

এবং, $$D`=\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

তাহলে, D=D` হবে।

- দুই চলক বিশিষ্ট সমীকরণ জটের সমাধানঃ-

$a_1x+b_1y=c_1$----------- (1)

$a_2x+b_2y=c_2$----------- (2)

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_1b_2$$

$$D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=b_1c_2-b_1c_2$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1c_2-a_1c_2$$

$$x=\frac{Dx}{D}$$

$$y=\frac{Dy}{D}$$

- তিন চলক বিশিষ্ট সমীকরণ জটের সমাধানঃ-

$a_1x+b_1\,y+c_1z=d_1$ ------------------ (1)

$a_2x+b_2\,y+c_2z=d_2$ ------------------ (2)

$a_3x + b_3\, y + c_3 z = d_3$ ------------------ (3)

ক্রমের নিয়ম অনুযায়ী –

যেমন, $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

এবং, $Dx = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

আবার, $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$

এবং, $Dz = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$

$x = \frac{Dx}{D}, y = \frac{Dy}{D}, z = \frac{Dz}{D}$

- যদি D= 0 হয় তাহলে, x,y,z এর কোন সমাধান নাই।

রচনা ও সম্পাদনায়ঃ

মোঃ আল ফয়সাল রাব্বী(রেহান)