ESPE

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS

INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

MATERIA:

Cálculo Diferencial e Integral

PROFESOR:

Ing. Miguel Patricio Quezada Morales

ESTUDIANTE:

Páez Bolaños Freddy Jair

TEMA:

Integrales Impropias

PERÍODO ACADÉMICO:

Noviembre 2020 – Abril 2021

NRC:

5320

Integrales Impropias

Las integrales impropias son integrales definidas que cubren un área no acotada.

Un tipo de integrales impropias son las aquellas en las que al menos uno de los puntos extremos se extiende al infinito. Por ejemplo, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ es una integral impropia. Se puede ver como el límite $\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx$

Otro tipo de integrales impropias son las integrales cuyos puntos extremos son finitos, pero la función integrada no está acotada en uno o los dos extremos. Por ejemplo, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ es una integral impropia. Se puede ver como el límite: $\lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$

INTEGRALES IMPROPIAS DE PRIMERA ESPECIE:

Las integrales de este tipo son de la forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f \,, \quad \int_{0}^{+\infty} f, \qquad \int_{-\infty}^{b} f,$$

siendo **f** acotada en el intervalo correspondiente.

Observación 1 Es evidente que las propiedades de la integral permiten reducir su estudio al caso

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f$$

siendo f acotada en [a, +∞).

Supongamos que se conoce una primitiva F de la función f . Entonces,

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f \;=\; \lim_{t\to+\infty} \int_0^t f \;=\; \lim_{t\to+\infty} (F(t) - F(a)$$

1. **Sea f: [a, +∞) ⟼ R una función acotada.**

Se dice que $\int_a^{+\infty} f$ es convergente si, y solo si, f es Riemann integrable para todo intervalo [a, t], existe el límite y es un número real.

$$\lim_{t\to+\infty} \int_a^t f$$

2. Se dice que $\int_a^{+\infty} f$ es divergente si, y sólo si, f es Ríe- Mann integrable para todo intervalo [a, t], existe el límite y no es finito.

$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f$$

3. Se dice que $\int_a^{+\infty} f$ es oscilante en el caso en que f no sea Riemann integrable en un intervalo [a, t] o no exista el limite

$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f.$$

Integrales impropias de segunda especie:

En este caso, nos encontraremos con funciones definidas en intervalos tales que tienen un comportamiento asintótico en alguno de sus extremos. En el caso de que la función presen- tase un comportamiento similar en otros puntos del dominio (por ejemplo, un intervalo de extremos a, b), y estos fuesen x1, · · · , en, aplicando las propiedades de la integral, tenemos que

$$\int_a^b f = \int_a^{x_1} f + \cdots + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f + \cdots + \int_{x_n}^b f$$

con lo que podemos reducir el estudio al caso donde sólo tengamos asíntotas en los extremos del intervalo. Es más, podemos pensar que la asíntota sólo está en un extremo del intervalo ya que para todo c ∈ (a, b), se tiene que

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b .$$

Para este caso, si existiese una primitiva F de f , entonces,

1. Si f (x) no esta´ acotada en b:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t \to b^-} [F(t) - F(a)] .$$

2. Si f (x) no está acotada en a:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+} [F(b) - F(t)]\,.$$

Por lo tanto, podemos afirmar que la idea básica que inspira el cálculo de las integrales impropias de segunda especie es integrar hasta un punto t arbitrario en el interior de [a, b) y, después, hacer tender t al extremo de integración donde la función sea no acotada.

Definición 2 Sea f : [a, b) R una función tal que $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$ y que no presenta más asíntotas verticales en [a, b). Entonces:

1. Se dirá que la integral $\int_a^b f$ es **convergente**, si f es Riemann integrable en [a, t] para todo t ∊ [a, b), existe el límite y es un número real

$$\lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

En este caso se dirá que la función f es Riemann integrable en [a, b).

2. Se dirá que la integral $\int_a^b f$ es **divergente**, si f es Riemann integrable en [a, t] para todo t ∊ [a, b), existe el límite y no es finito

$$\lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

3. Se dirá que la integral $\int_a^b f$ es oscilante en el caso en que f no sea Riemann integrable en un intervalo [a, t], con t ∊ [a, b), o no exista el límite

$$\lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

NETGRAFÍA:

- Recuperado de: http://www.dma.uvigo.es/~aurea/Impropias.pdf
- Khan Academy. Recuperado de: https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-bc/bc-integration-new/bc-6-13/a/improper-integrals-review
- Recuperado de: https://www.ucm.es/data/cont/docs/518-2013-11-12-INTEGRALES2.pdf