

Cap 10) Técnicas de Resposta em Frequência

Control Automático

Prof. Fernando Passold

Nov-2009

Objetivos

- Como usar respuesta en frecuencia:

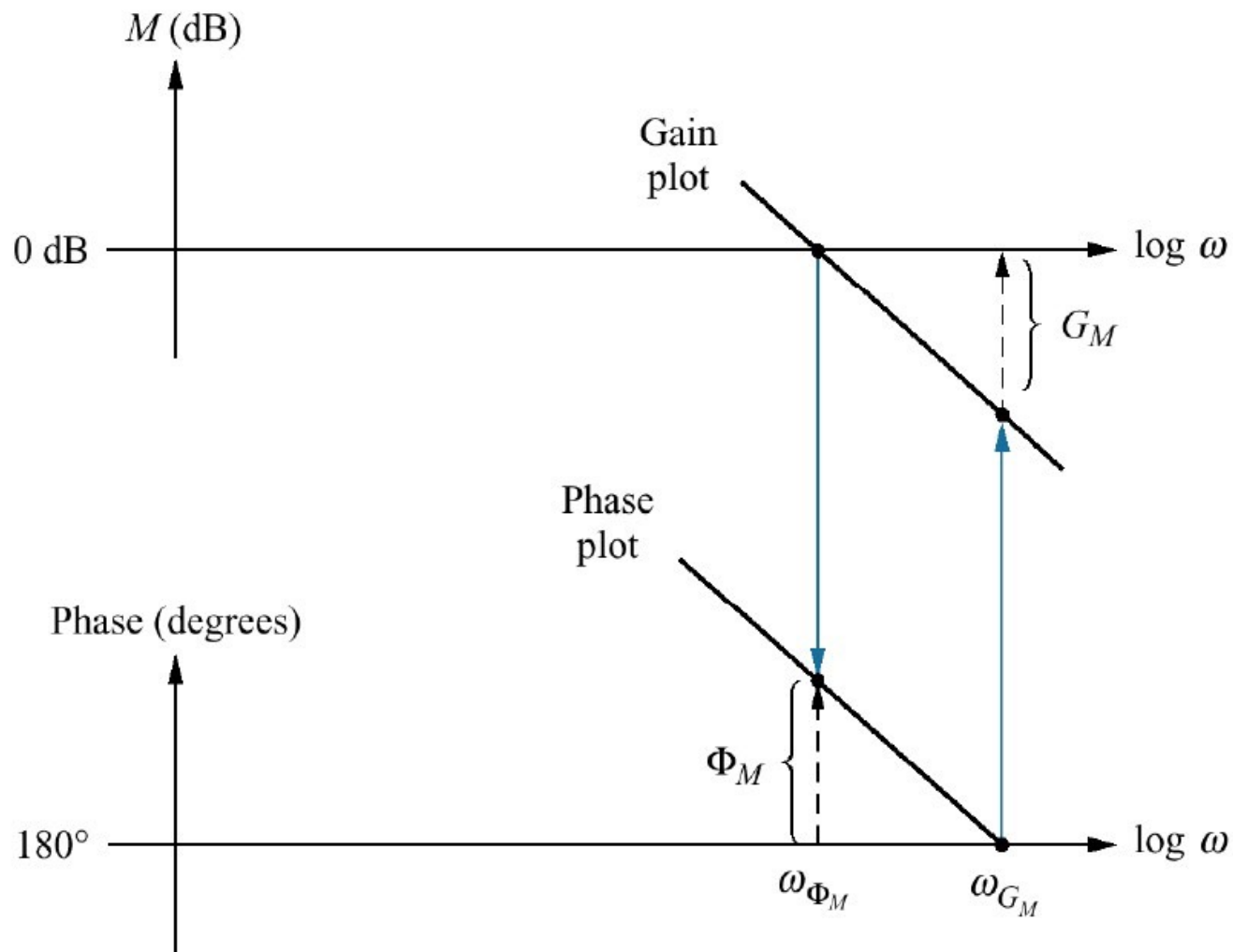
- Para ajustar la ganancia de forma a respetar especificaciones para la respuesta transitoria;
- Como usar la respuesta en frecuencia para mejorar el error estacionario del sistema;
- Como usar la respuesta en frecuencia para mejorar la respuesta transitoria del sistema;
- Como usar la respuesta en frecuencia para mejorar tanto el error estacionario cuanto la respuesta transitoria.

$$G_c(s) = \frac{(1 + \alpha T_1 s)}{\underbrace{(1 + T s)}_{\substack{\text{Adelanto} \\ \text{de Fase}}}} \cdot \frac{(1 + T_2 s)}{\underbrace{(1 + \beta T s)}_{\substack{\text{Atraso} \\ \text{de Fase}}}}$$

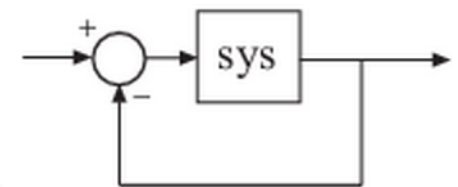
Introdução

- Estabilidad y diseño de la respuesta transitoria mediante ajuste de ganancia:
 - Métodos basados en respuesta en frecuencia, diferentes del método basado en RL, pueden ser realizados sin la obligatoriedad de una herramienta computacional usando aproximaciones asintóticas.
- El diseño de la respuesta transitoria mediante compensación en cascada:
 - Métodos basados en respuesta en frecuencia no son tan intuitivos como los basados en RL.
- Diseño del error de estado estacionario mediante compensación en cascada:
 - Métodos basados en respuesta en frecuencia facilitan el proyecto de compensadores derivativos de forma a acelerar la respuesta del sistema al mismo tiempo respetando requerimientos de errores de estado estacionario.

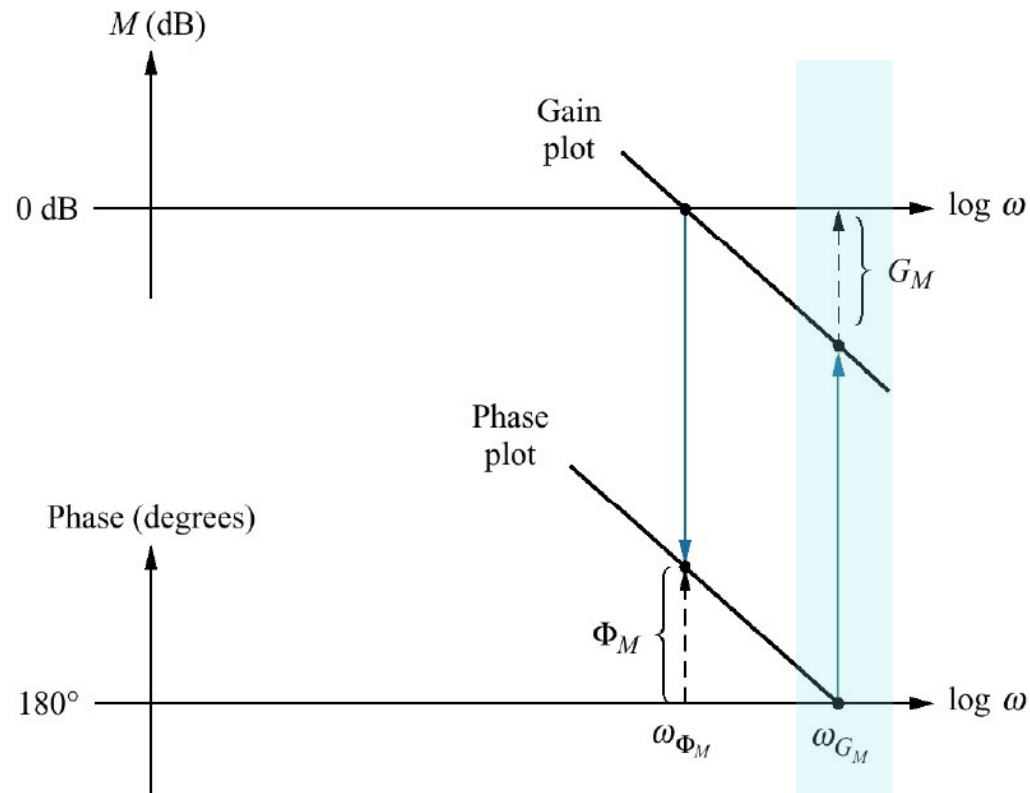
Estabilidade, Margem de Ganho e Margem de Fase através do Diagrama de Bode...



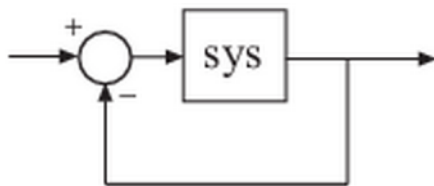
O ganho e a margem de fase de um sistema indica a estabilidade relativa do sistema em malha fechada formado pela aplicação de realimentação negativa unitária.



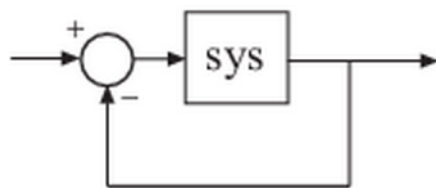
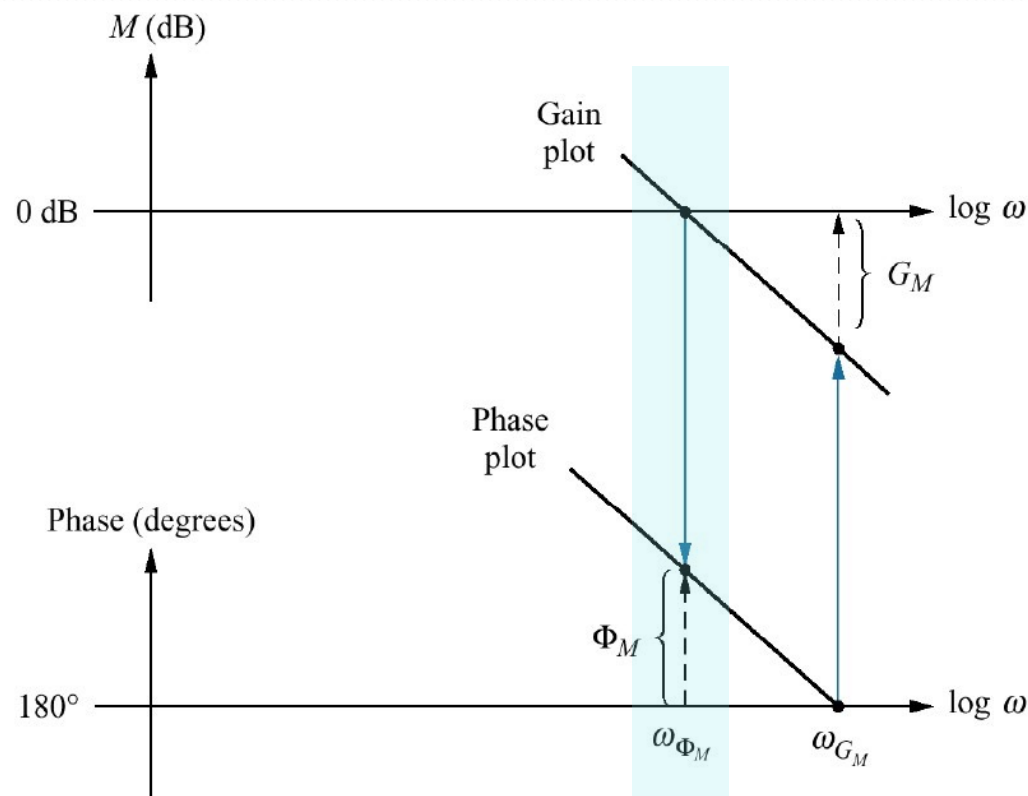
Estabilidade, Margem de Ganho e Margem de Fase através do Diagrama de Bode...



A **margem de ganho**, G_M , é a quantidade de aumento ou diminuição de ganho necessária para fazer com que o loop inverta seu sinal (ângulo de fase se torna -180° = realimentação positiva \Rightarrow instável) na frequência ω_{G_M} . Em outras palavras, a margem de ganho é $1/g$ se g é o ganho na frequência de fase de -180° .



Estabilidade, Margem de Ganho e Margem de Fase através do Diagrama de Bode...



A **margem de fase**, $P_m (\Phi_M)$, é a diferença entre a fase da resposta e -180° quando o ganho do loop é 1.0.

A frequência ω_{pm} na qual a magnitude é 1,0 é chamada de frequência de ganho unitário ou frequência de cruzamento de ganho.

Geralmente, verifica-se que as margens de ganho ≥ 3 ; combinado com margens de fase entre 30° e 60° graus resultam em compensações razoáveis entre a largura de banda e a estabilidade.

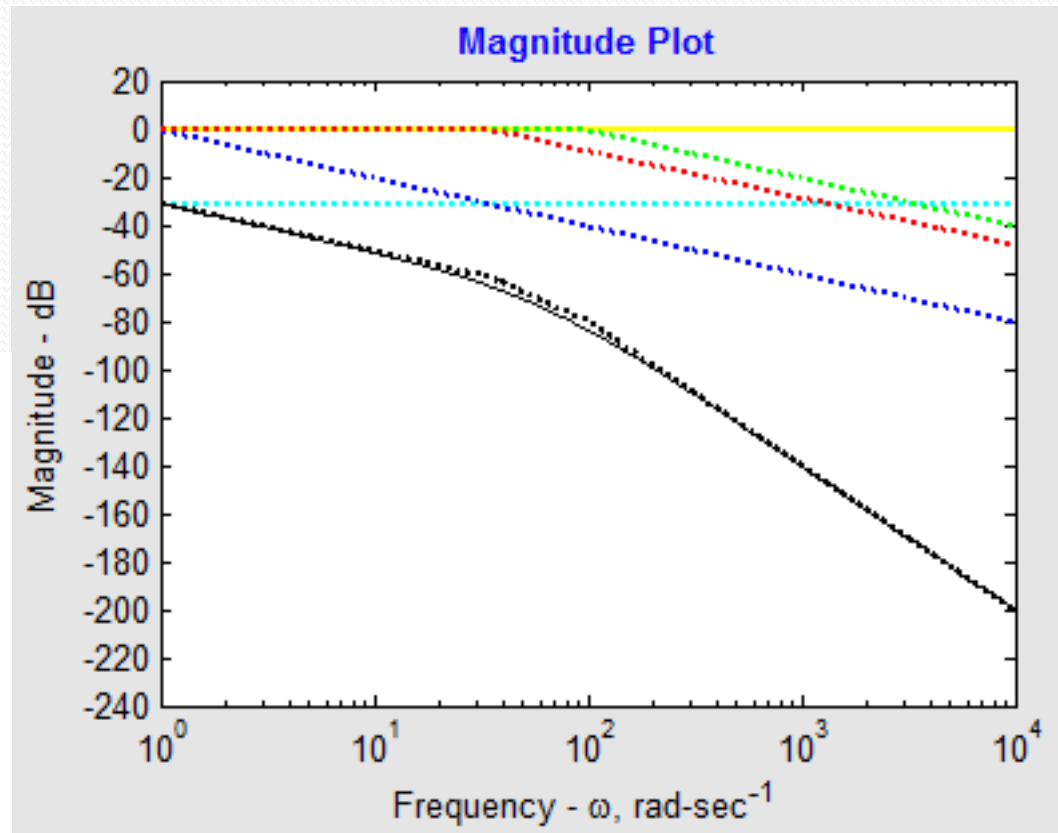
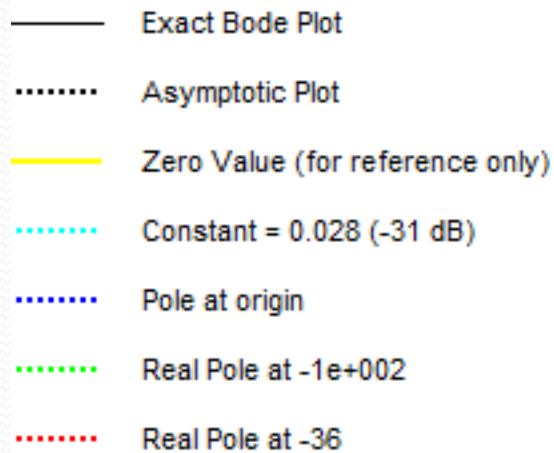
Estabilidad

● Ejemplo: $G(s) = \frac{100}{s(s+100)(s+36)}$

$$G(s) = \frac{100}{s \cdot 100 \cdot \left(\frac{s}{100} + 1\right) \cdot 36 \cdot \left(\frac{s}{36} + 1\right)}$$

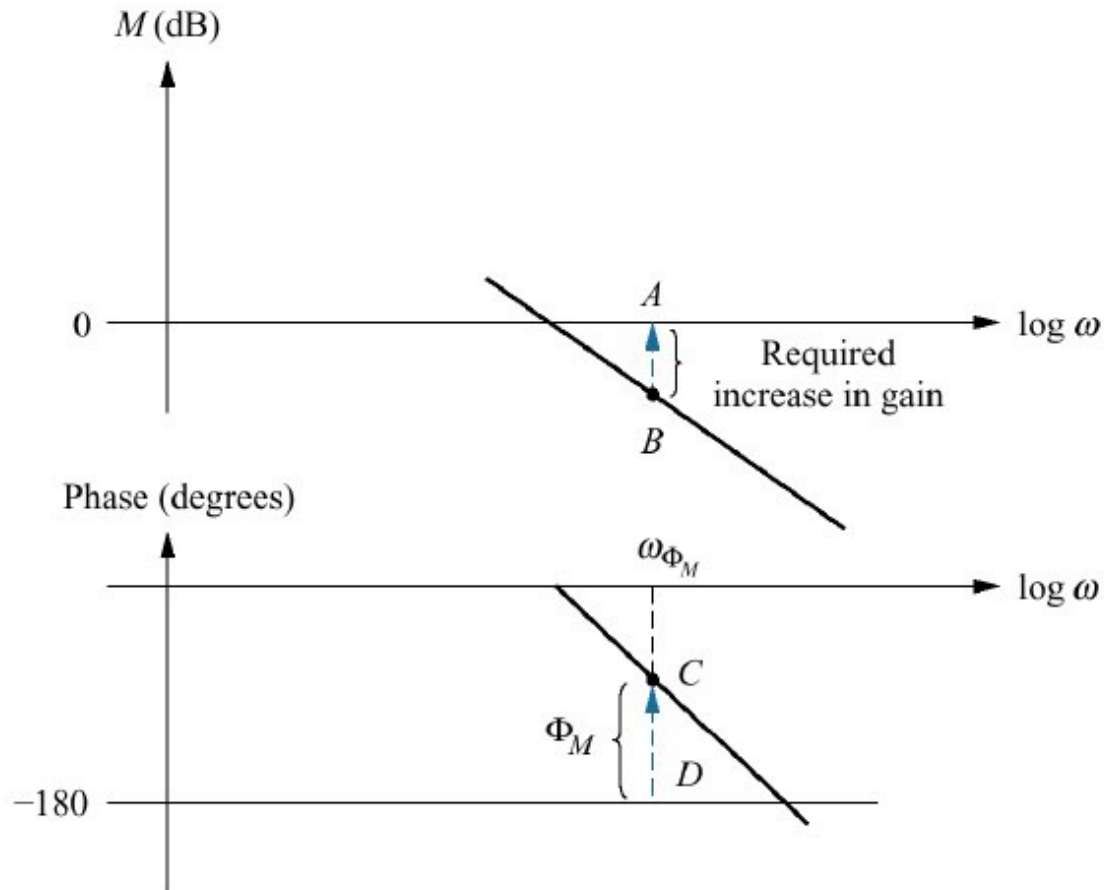
$$20 \log(36^{-1}) = -20 \log(36)$$

$$= -31,261 \text{ dB}$$



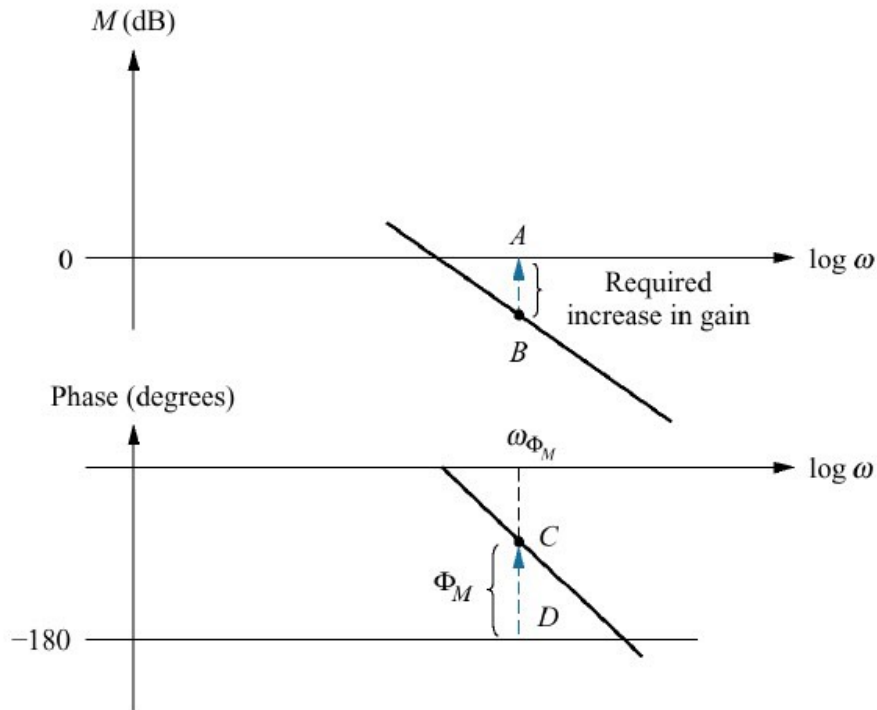
Ajuste da Resposta Transitória via ajuste de ganho

- Determinando la ganancia obedeciendo cierta especificación de sobrepaso:



Ayuste de la Respuesta Transitoria vía ayuste de ganancia

- Determinando la ganancia obedeciendo cierta especificación de sobrepaso:



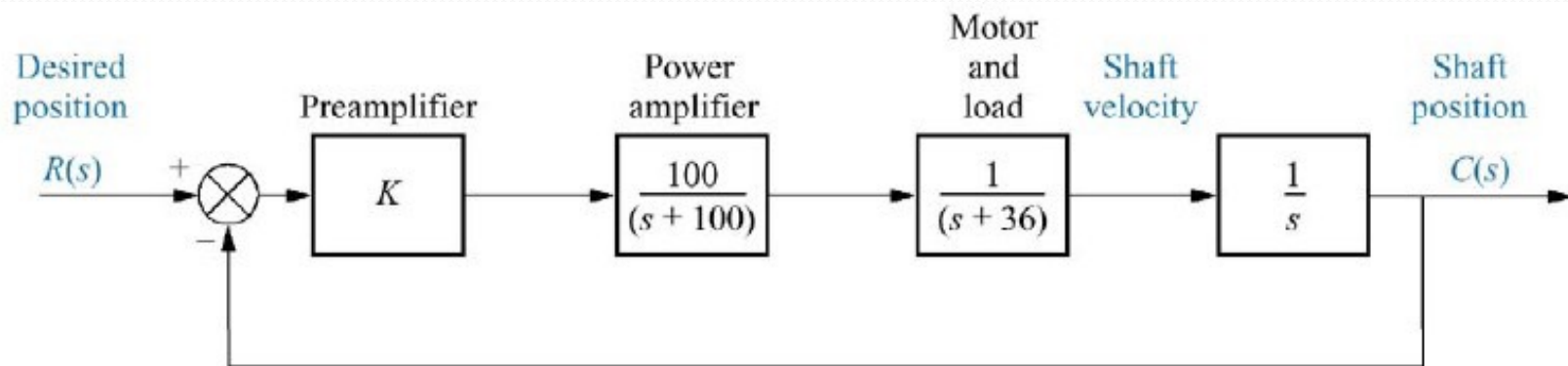
- Procedimiento:

1. Diseñar el diagrama de Bode (magnitud y fase) adoptando un valor conveniente de ganancia.
2. Usando las ecuaciones (4.39) y (10.73) determinar la margen de fase requerida de forma a obedecer el porcentual de sobrepaso especificado para el sistema.
3. Encontrar la frecuencia, ω_{Φ_M} en el diagrama de fase de Bode que permite alcanzar la margen de fase requerida (ver figura al lado).
4. Modificar la ganancia de una cantidad AB de forma a forzar que la curva de magnitud pase a través de 0 dB en la frecuencia ω_{Φ_M} .

$$\zeta = \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%OS/100)}} \quad (4.39)$$

$$\Phi_M = \tan^{-1} \frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1 + 4\zeta^4}}} \quad (10.73)$$

Ejemplo 11.1) Encontrar K para obtener OS%= 9,5% para entrada escalón



1. Elegir $K=3.6$ para empezar el diagrama de Bode con 0 dB en $\omega = 0,1$ rad/s:

$$G(s) = K \frac{100}{s(s+100)(s+36)} = \frac{K \cdot 100}{s \cdot 100 \cdot \left(\frac{s}{100} + 1\right) \cdot 36 \cdot \left(\frac{s}{36} + 1\right)} = \frac{K \cdot 100}{3600s \left(\frac{s}{100} + 1\right) \left(\frac{s}{36} + 1\right)}$$

Si $K=3,6$ entonces:

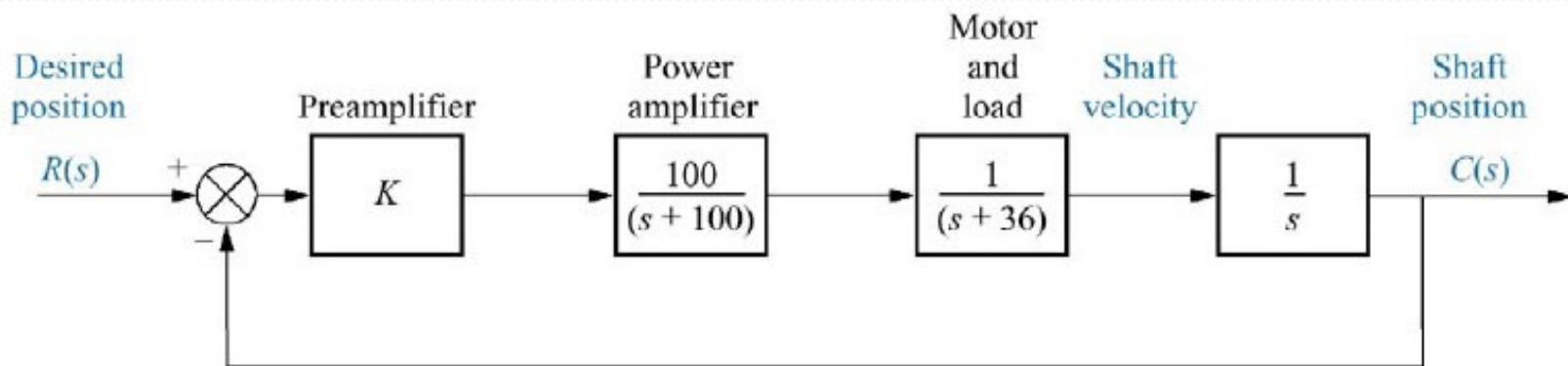
$$\dot{G}(s) = \frac{1}{s \left(\frac{s}{100} + 1\right) \left(\frac{s}{36} + 1\right)}$$

2. Para sobrepaso de 9,5%, el factor de amortiguamiento Φ_M

$$\zeta = \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%OS/100)}} = \frac{-\ln(9,5/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(9,5/100)}} = 0,5996$$

$$\Phi_M = \tan^{-1} \frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4}}} = \tan^{-1} \frac{2 \cdot 0,5996}{\sqrt{-2 \cdot 0,5996^2 + \sqrt{1+4 \cdot 0,5996^4}}} = 59,1621^\circ$$

Ejemplo 11.1) Encontrar K para obtener OS%= 9,5% para entrada escalón



1. Elegir $K=3.6$ para empezar el diagrama de Bode con 0 dB en $\omega = 0,1$ rad/s:

$$G(s) = K \frac{100}{s(s+100)(s+36)} = \frac{K \cdot 100}{s \cdot 100 \cdot \left(\frac{s}{100} + 1\right) \cdot 36 \cdot \left(\frac{s}{36} + 1\right)} = \frac{K \cdot 100}{3600s \left(\frac{s}{100} + 1\right) \left(\frac{s}{36} + 1\right)}$$

Si $K=3,6$ entonces:

$$G(s) = \frac{1}{s \left(\frac{s}{100} + 1\right) \left(\frac{s}{36} + 1\right)}$$

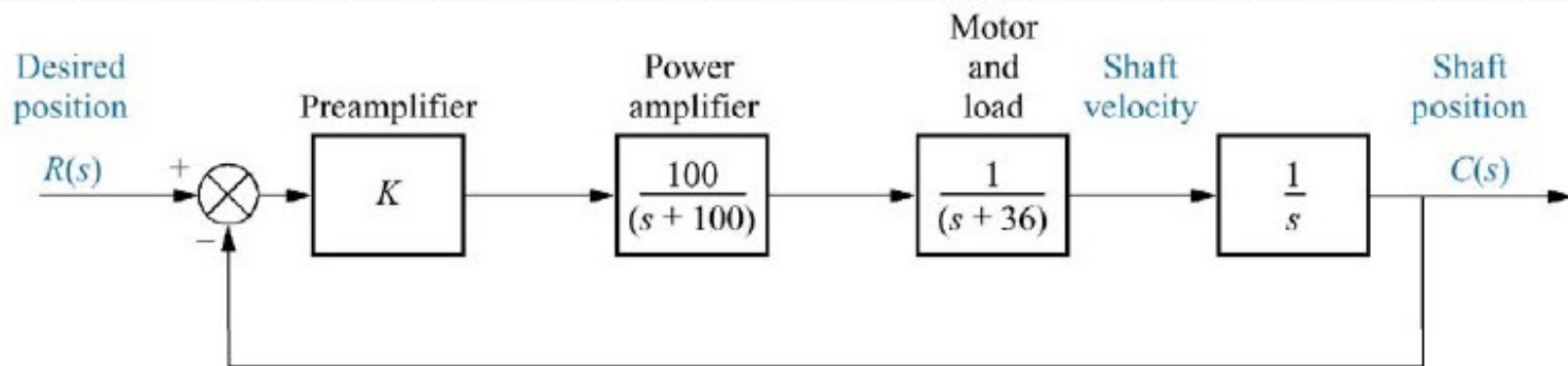
2. Para sobrepaso de 9,5%, el factor de amortiguamiento y Φ_M deben de ser:

$$\zeta = \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%OS/100)}} = \frac{-\ln(9,5/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(9,5/100)}} = 0,5996$$

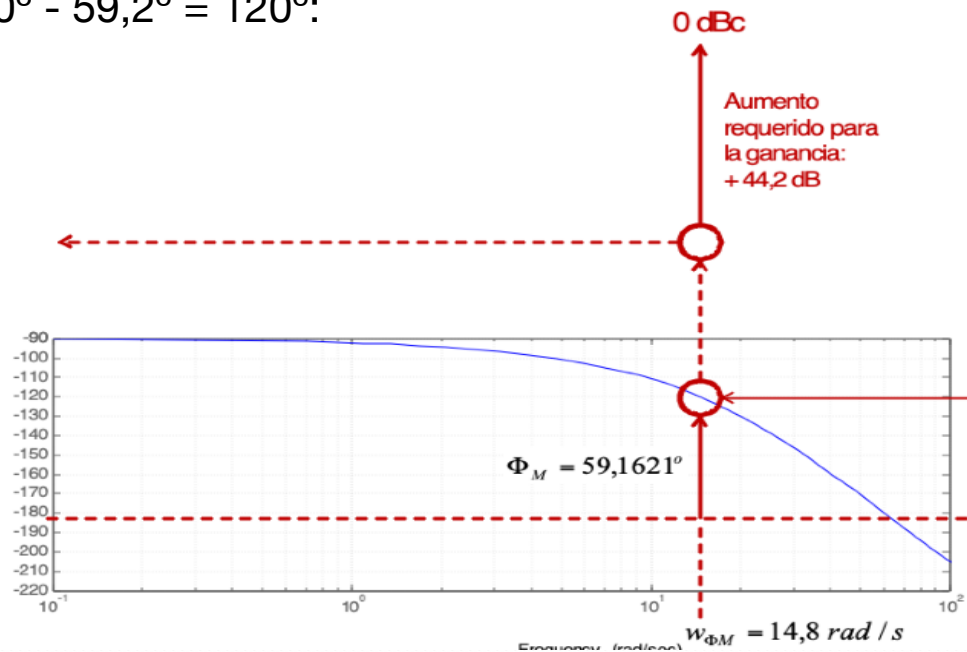
$$\Phi_M = \tan^{-1} \frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4}}} = \tan^{-1} \frac{2 \cdot 0,5996}{\sqrt{-2 \cdot 0,5996^2 + \sqrt{1+4 \cdot 0,5996^4}}} = 59,1621^\circ$$

```
clear % Clear variables
numg=[100]; % Define numerator of G(s).
deng=poly([0 -36 -100]); % Define denominator of G(s).
G=tf(numg,deng) % Create and display G(s).
pos=input('Type %OS '); % Input desired percent overshoot.
z=(-log(pos/100))/(sqrt(pi^2+log(pos/100)^2)); % Calculate required damping ratio.
Pm=atan(2*z/(sqrt(-2*z^2+sqrt(1+4*z^4))))*(180/pi); % Calculate required phase margin.
```

Ejemplo 11.1) Encontrar K para obtener $OS\% = 9,5\%$ para entrada escalón

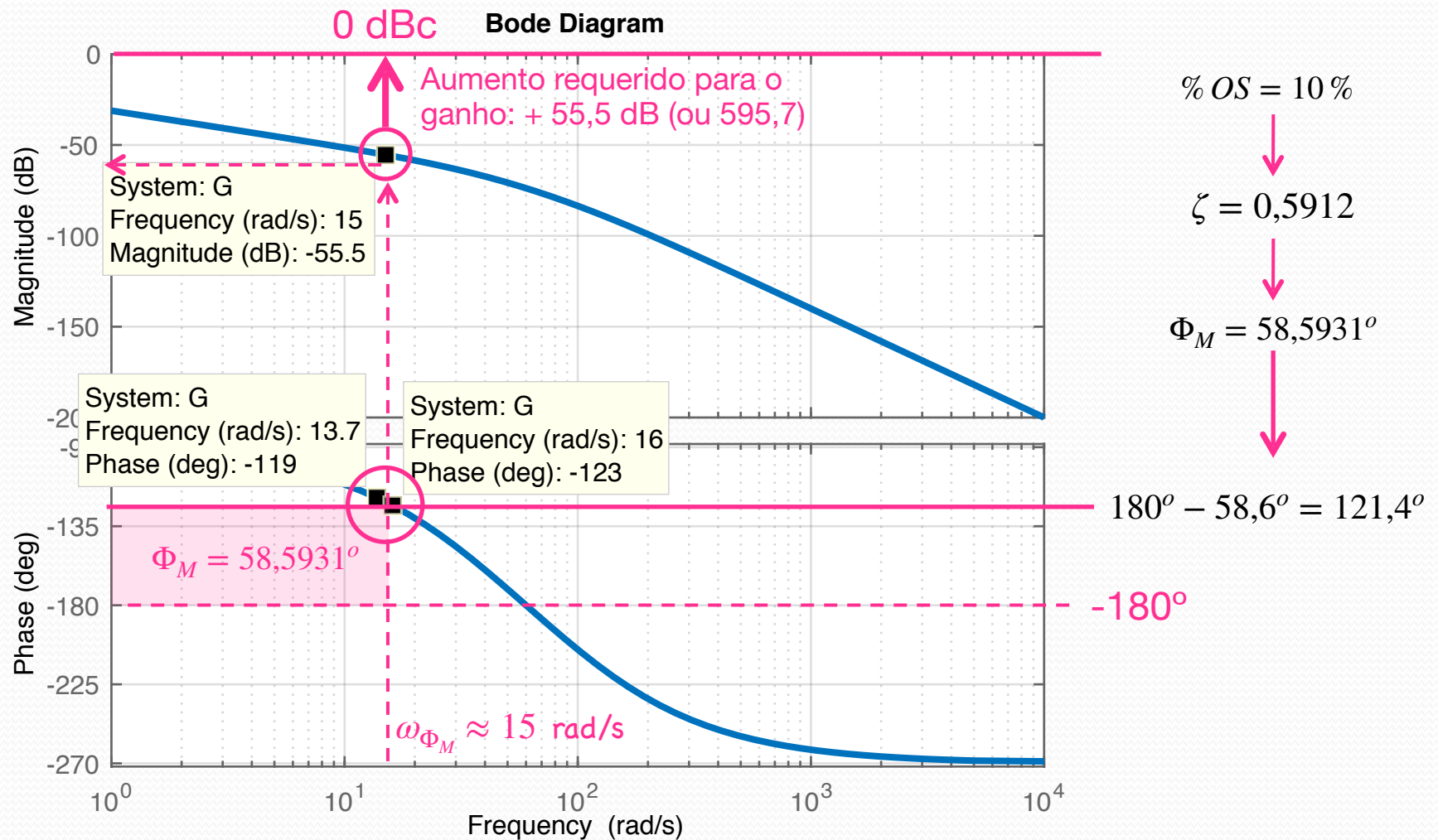


3. Dibujando el diagrama de Bode y ubicando el punto en lo cual la diferencia entre 180° y $\Phi_M = 180^\circ - 59,2^\circ = 120^\circ$:

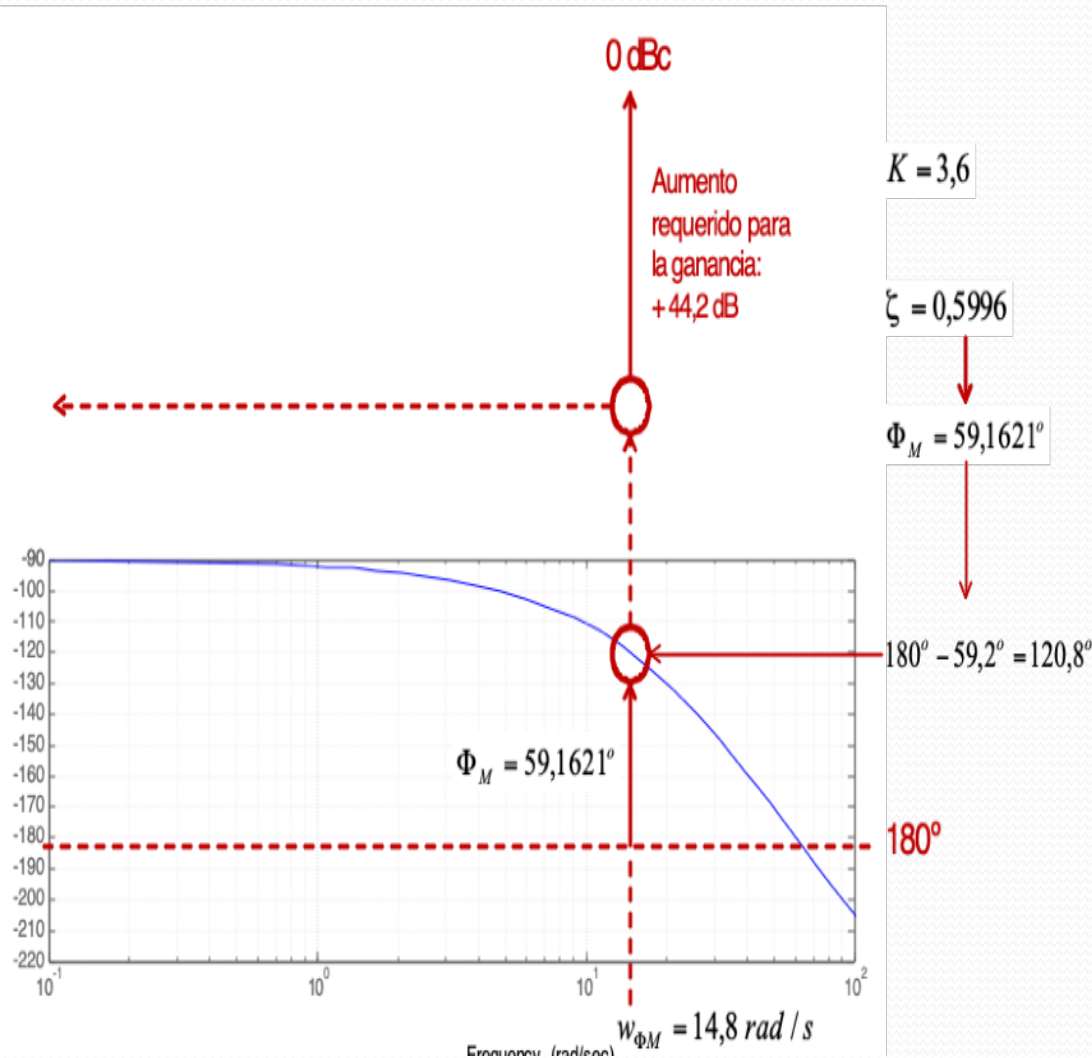


```
clear % Clear variables
numg=[100]; % Define numerator of G(s).
deng=poly([0 -36 -100]); % Define denominator of G(s).
G=tf(numg,deng) % Create and display G(s).
pos=input('Type %OS '); % Input desired percent overshoot.
z=(-log(pos/100))/(sqrt(pi^2+log(pos/100)^2)); % Calculate required damping ratio.
Pm=atan(2*z/sqrt(-2*z^2+sqrt(1+4*z^4)))*(180/pi); % Calculate required phase margin.
```

Exemplo 11.1) Encontrar K para obter OS%= 10% para entrada degrau

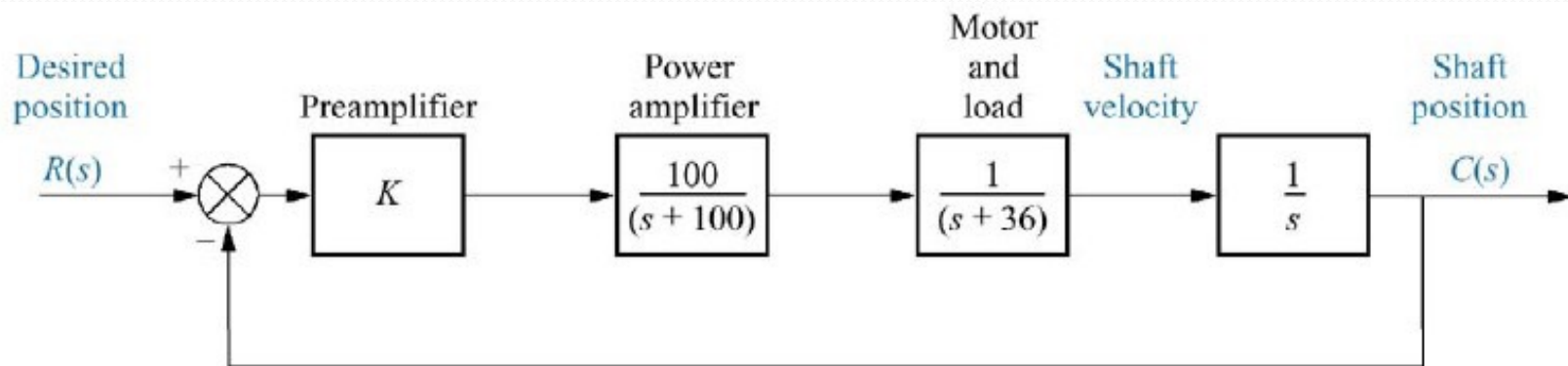


Ejemplo 11.1) Encontrar K para obtener OS%= 9,5% para entrada escalón



```
w=0.01:0.01:1000;
% Set range of frequency from 0.01 to
% 1000 in steps of 0.01.
[M,P]=bode(G,w);      % Get Bode data.
Ph=-180+Pm;           % Calculate required phase
angle.
for k=1:length(P);
    % Search Bode data for required phase
    angle.
    if P(k)-Ph<=0;
        % If required phase angle is found,
        % find the value of
        M=M(k); % magnitude at the same
        frequency.
        'Required K'      % Display label.
        K=1/M             % Calculate the required
        gain.
        break            % Stop the loop.
    end                  % End if.
end                      % End for.
```


Ejemplo 11.1) Encontrar K para obtener $OS\% = 9,5\%$ para entrada escalón



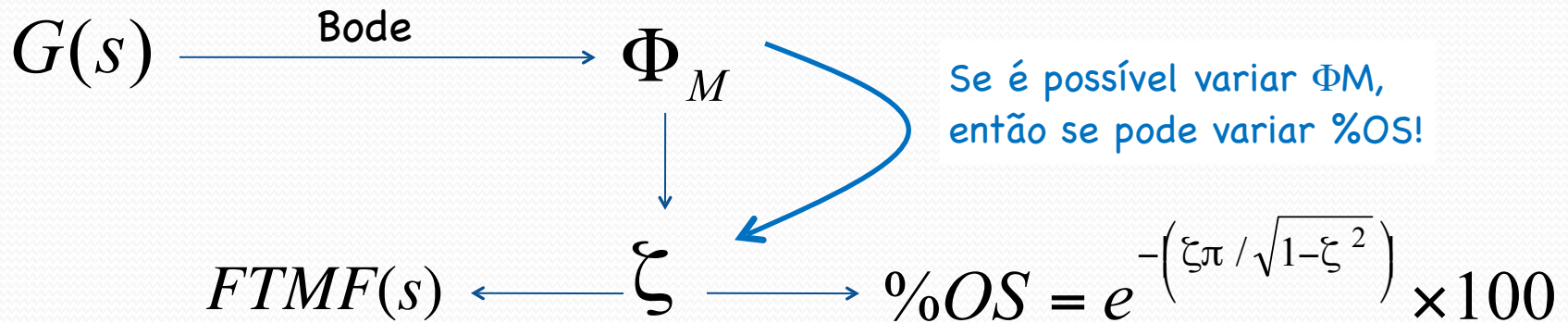
4. La diferencia entre 180° y $\Phi_M = 180^\circ - 59,2^\circ = 120^\circ$ se produce para $w=14,8$ rad/s, ocasión en la cual, por el diagrama de magnitud se percibe que una ganancia de $-44,2$ dB, que es lo que falta añadir al sistema para que alcance la margen de fase requerida:

```

clear % Clear variables
numg=[100]; % Define numerator of G(s).
deng=poly([0 -36 -100]); % Define denominator of G(s).
G=tf(numg,deng) % Create and display G(s).
pos=input('Type %OS '); % Input desired percent overshoot.
z=(-log(pos/100))/(sqrt(pi^2+log(pos/100)^2)); % Calculate required damping ratio.
Pm=atan(2*z/(sqrt(-2*z^2+sqrt(1+4*z^4))))*(180/pi); % Calculate required phase margin.
  
```


Relación entre Transitorios de Lazo Cerrado & Respuesta en Frecuencia de lazo abierto

- A través del Diagrama de Bode de un sistema aún en lazo abierto, $G(s)$, uno puede prever el porcentual de sobrepaso, %OS, del mismo sistema en lazo cerrado, $T(s)$:
 - Este valor se puede obtener a partir de la margen de fase del sistema en lazo abierto



$$\Phi_M = \tan^{-1} \frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4}}}$$

$$\zeta = \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%OS/100)}}$$

Relación entre Transitorios de Lazo Cerrado & Respuesta en Frecuencia de lazo abierto:

Sistema lazo abierto:

$$G(s) = \frac{w_n^2}{s(s + 2\zeta w_n)}$$

Sistema lazo cerrado:

$$T(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2}$$

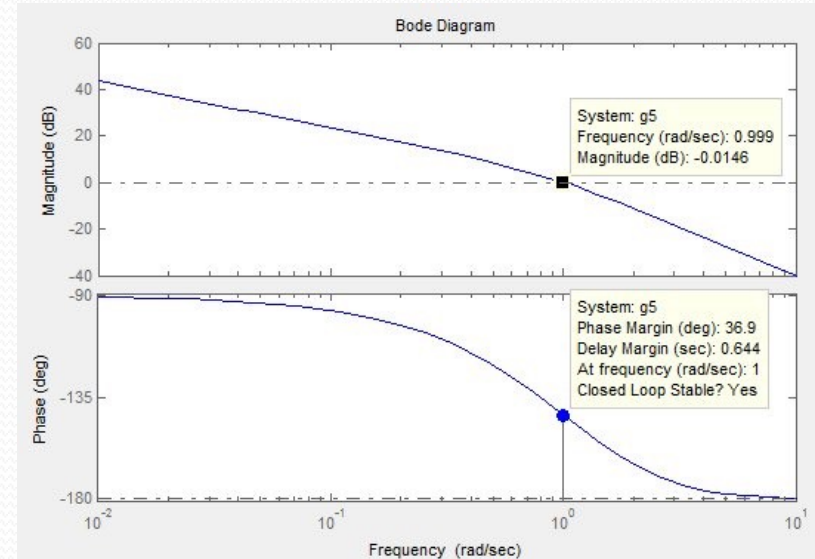
Encontrando frecuencia w_1 donde $|G(jw)| = 1$

$$|G(jw)| = \frac{w_n^2}{|-w^2 + j2\zeta w_n w|} = 1$$

$$w_1 = w_n \sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1 + 4\zeta^4}}$$

$$\angle G(jw) = -90 - \tan^{-1}\left(\frac{w_1}{2\zeta w_n}\right)$$

$$= -90 - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 + 1}}}{2\zeta}\right)$$



Como $\Phi M = \angle G(jw) - 180^\circ$:

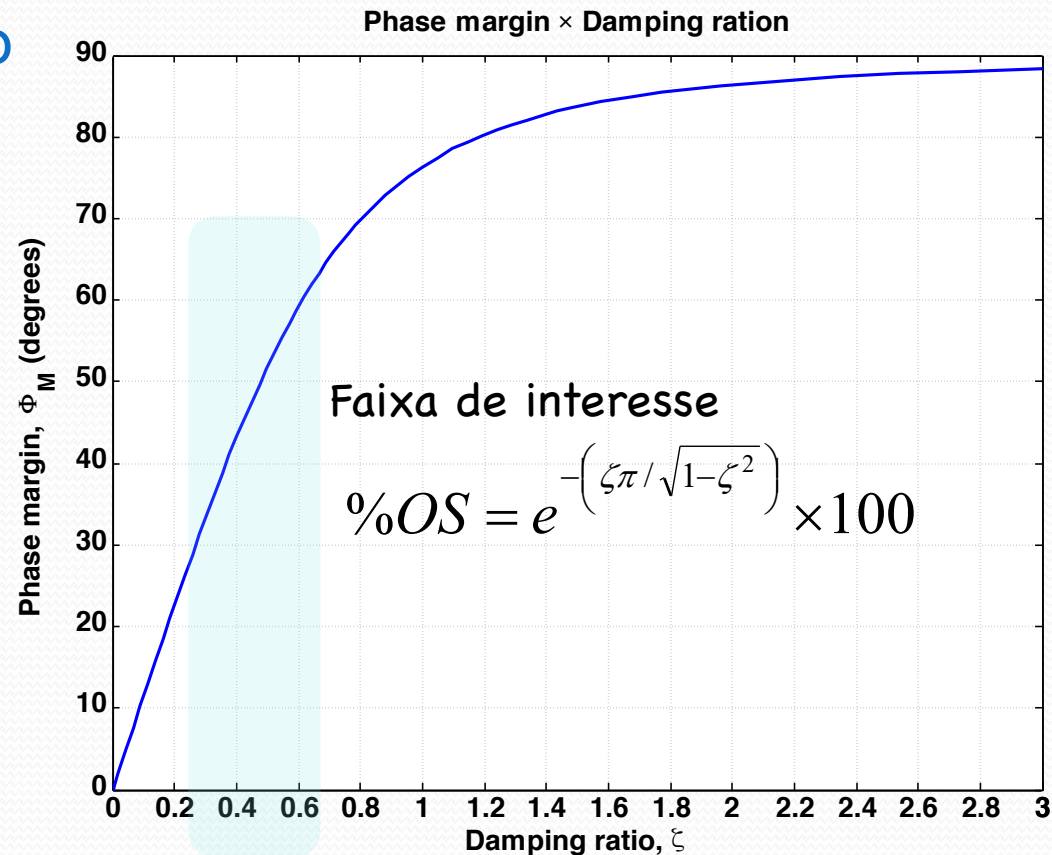
$$\Phi_M = 90 - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 + 1}}}{2\zeta}\right)$$

$$\Phi_M = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 + 1}}}\right)$$

Relación entre Transitorios de Lazo Cerrado & Respuesta en Frecuencia de lazo abierto

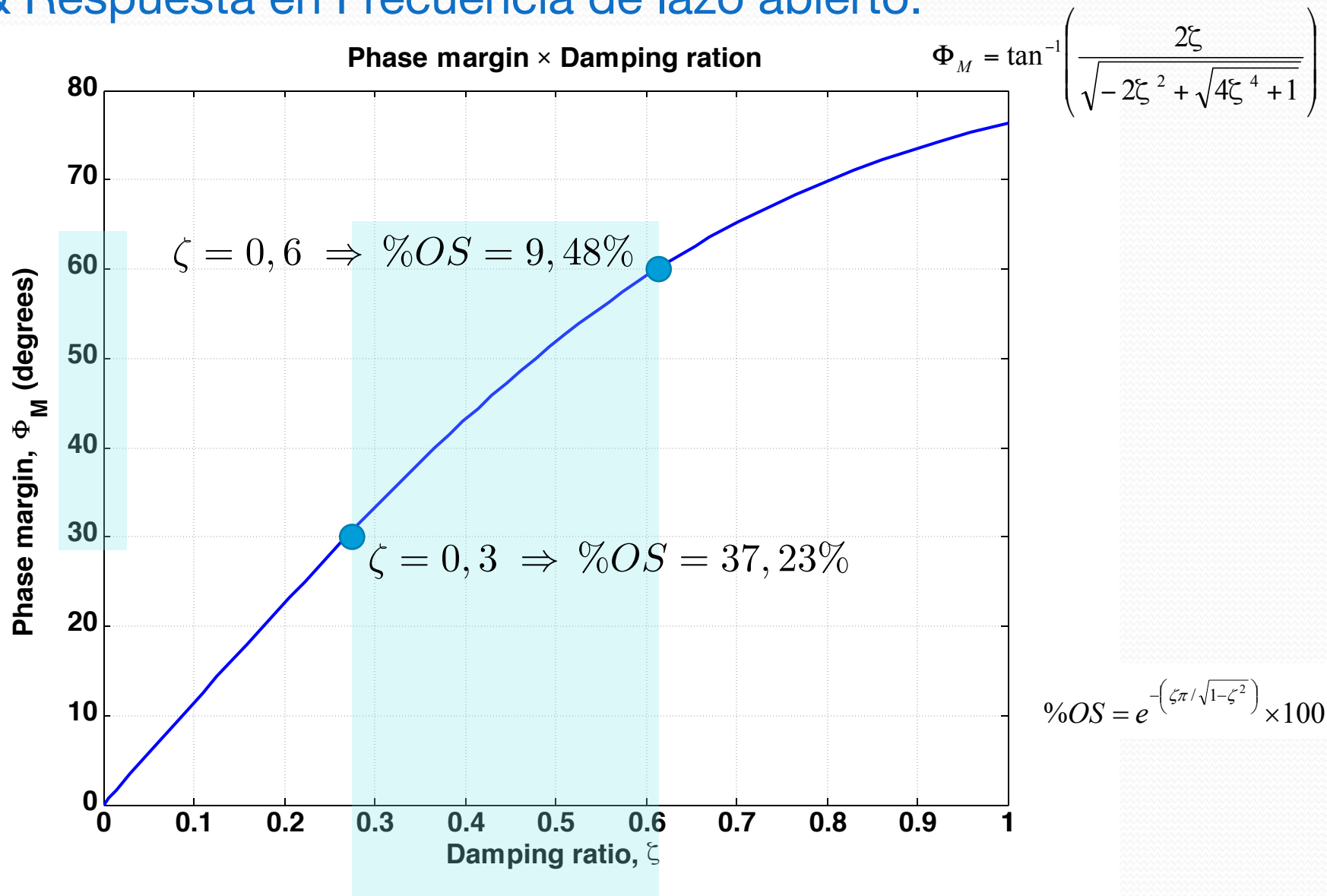
$$\Phi_M = 90 - \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 + 1}}}{2\zeta} \right)$$

$$\Phi_M = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 + 1}}} \right)$$



```
>> fplot(@(zeta) atan2(2*zeta,sqrt(-2*zeta*zeta+sqrt(1+4*zeta^4)))*180/pi, [0 3] )
>> grid
>> title('Phase margin \times Damping ration')
>> xlabel('Damping ratio, \zeta')
>> ylabel('Phase margin, \Phi_M (degrees)')
```

Relación entre Transitorios de Lazo Cerrado & Respuesta en Frecuencia de lazo abierto:



Compensador de Atraso de Fase (*Lag*)

1. Mejorar constante de error estático sin reflejos en la estabilidad del sistema;
2. Aumentar la Margen de Fase del sistema de forma a satisfacer la deseada respuesta transitoria.

