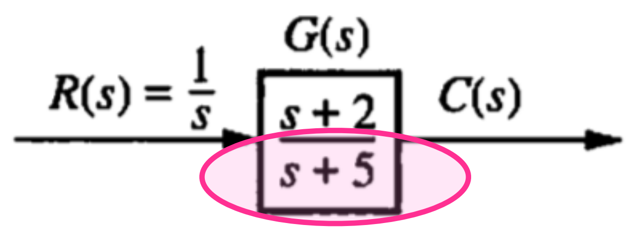
ROOT LOCUS

INTRO…

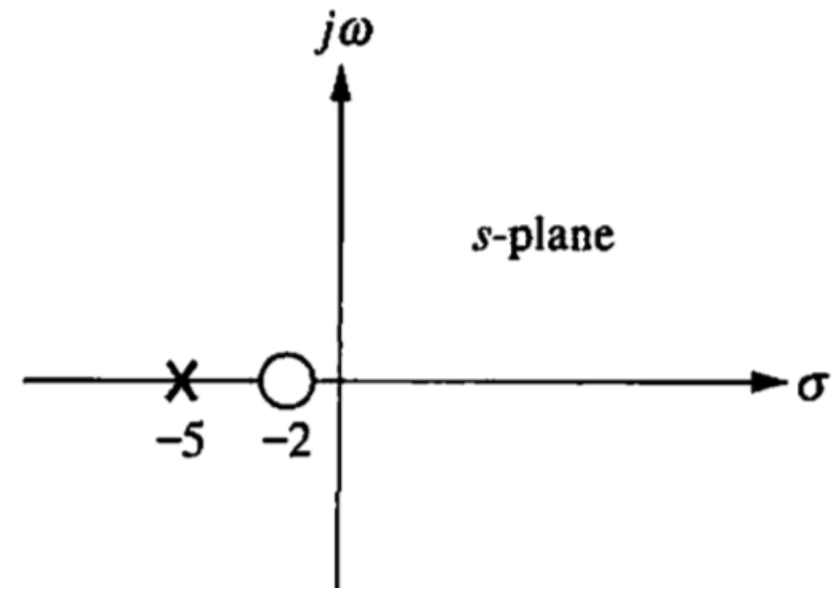
Controle Automático II
Prof. Fernando Passold
Engenharia Elétrica — UPF

POLOS E ZEROS DE UM SISTEMA

- Seja o seguinte sistema:
- A resposta a uma entrada degrau unitário leva à:



(a) Sistema em MA.



(b) Pólos e zeros de MA no plano-s

Degrau: $\mathcal{L}\left\{u(t)\right\} = 1/s$

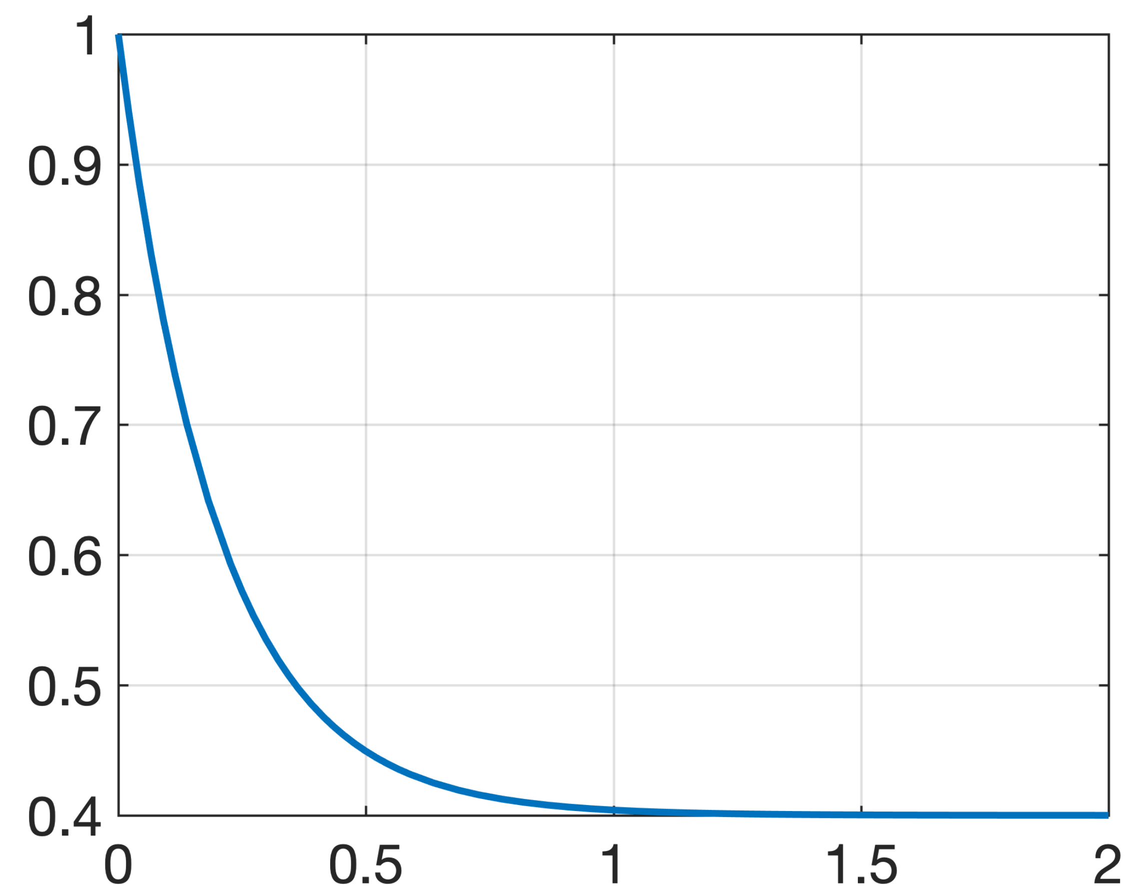
$$C(s) = \frac{(s+2)}{s\,(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5} = \frac{2/5}{s} + \frac{3/5}{s+5}$$

$$A = \left.\frac{(s+2)}{(s+5)}\right|_{s=0} = \frac{2}{5}$$

$$B = \left.\frac{(s+2)}{s}\right|_{s=-5} = \frac{3}{5}$$

$$c(t) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{e}^{-5t}$$

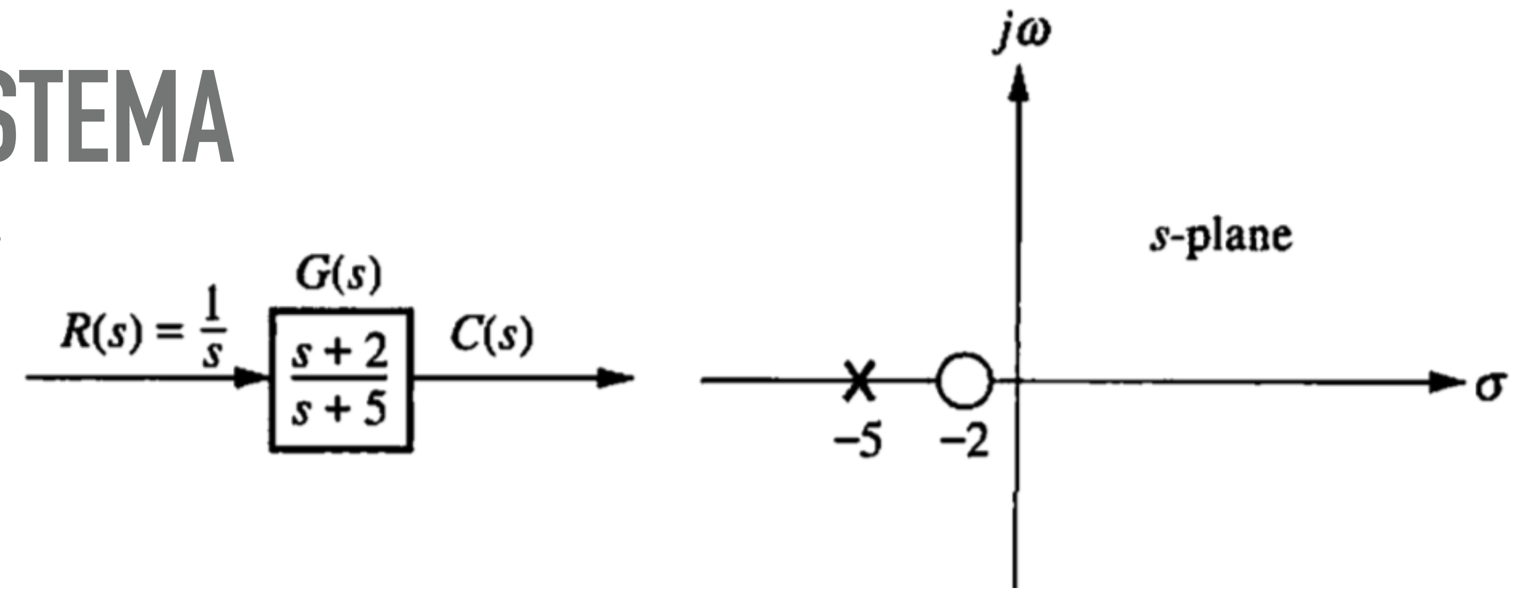
```
>> fplot(@(t) (2/5)+(3/5)*exp(-5*t), [0 2])
>> grid
```



ps.: Note que o pólo em s = −5 é estável (resposta converge no tempo)

POLOS E ZEROS DE UM SISTEMA

- Seja o seguinte sistema:
- A resposta a uma entrada degrau unitário leva à:



(a) Sistema em MA. *(b) Pólos e zeros de MA no plano-s*

Degrau: $\mathcal{L}\left\{u(t)\right\} = 1/s$

$$C(s) = \frac{(s+2)}{s\,(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5} = \frac{2/5}{s} +$$

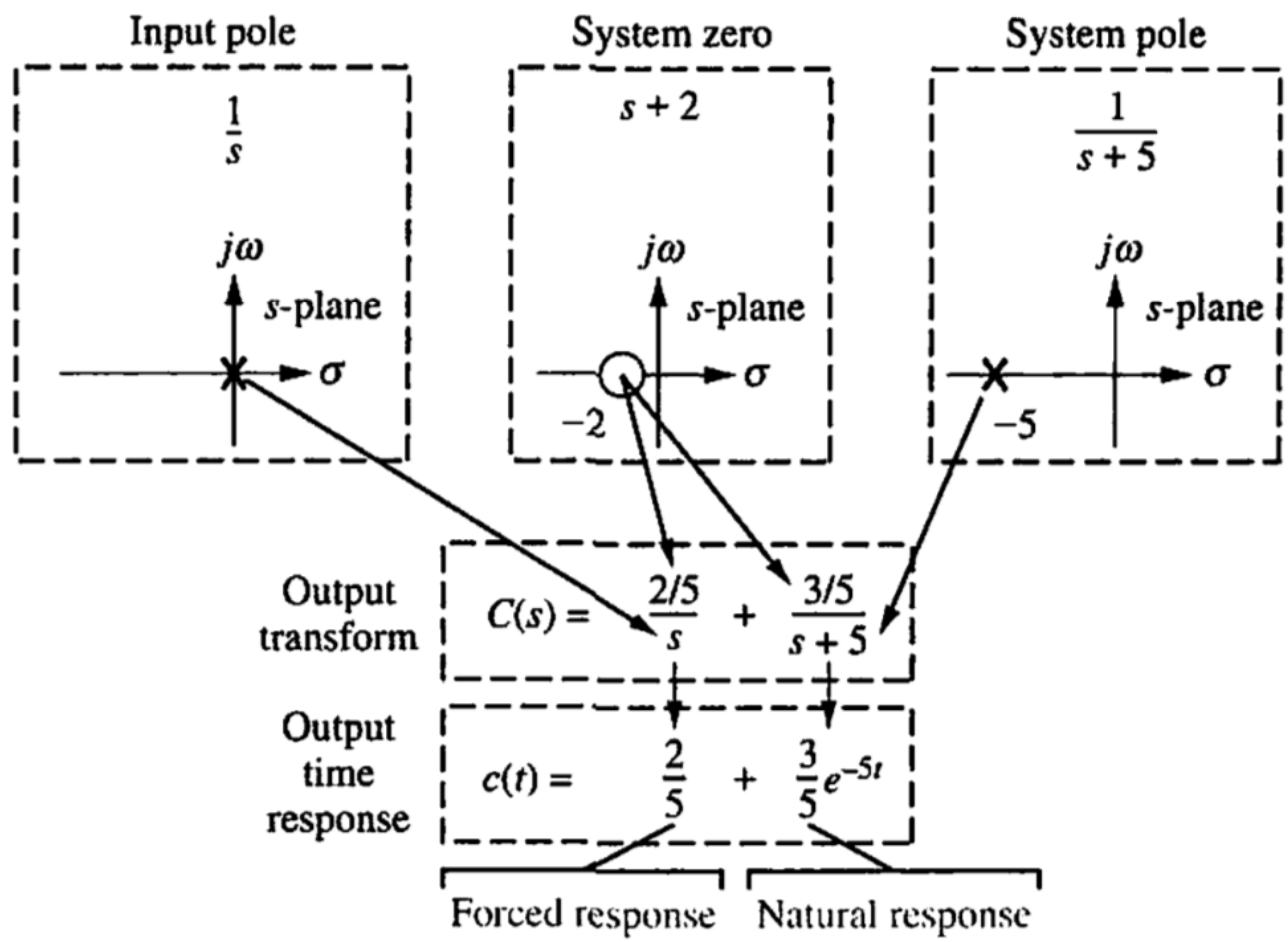
$$A = \left.\frac{(s+2)}{(s+5)}\right|_{s=0} = \frac{2}{5}$$

$$B = \left.\frac{(s+2)}{s}\right|_{s=-5} = \frac{3}{5}$$

$$c(t) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{e}^{-5t}$$

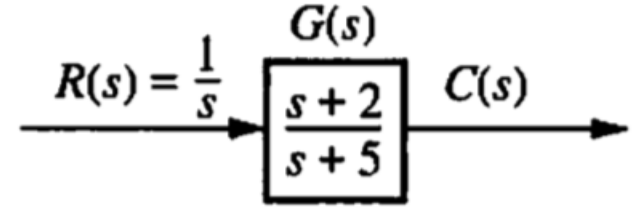
zeros $\rightarrow$ x

polos $\rightarrow$ ○

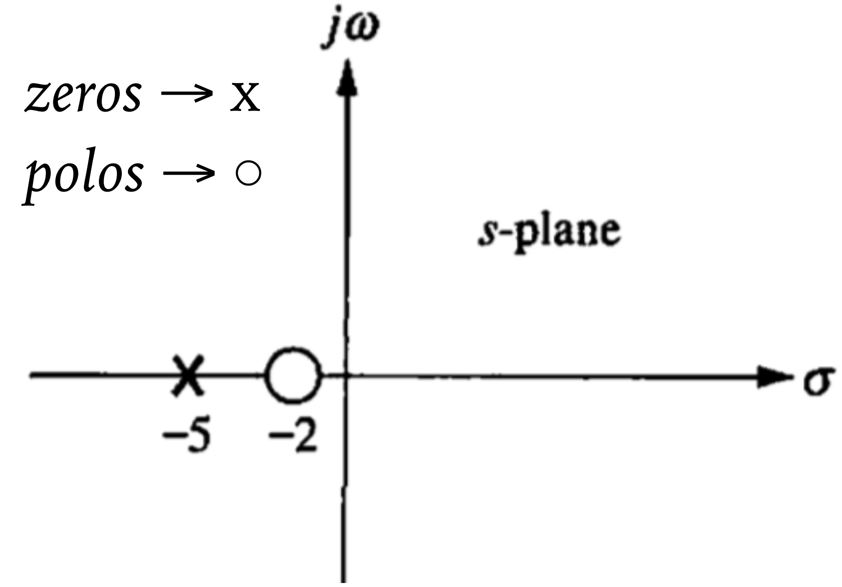


POLOS E ZEROS DE UM SISTEMA

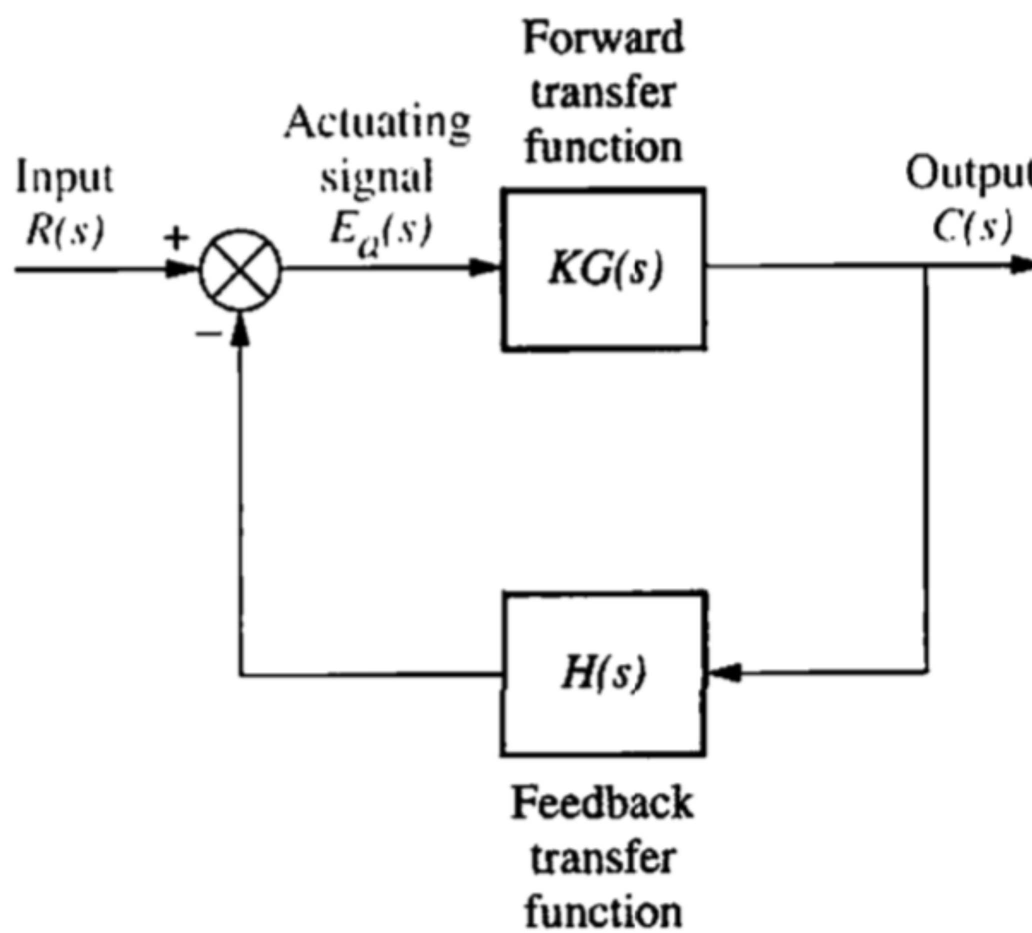
- Seja o seguinte sistema:
- A resposta a uma entrada degrau unitário leva à:
- O que acontece quando fechamos a malha com controlador proporcional?



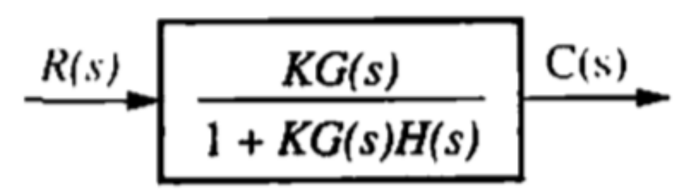
(a) Sistema em MA.



(b) Pólos e zeros de MA no plano-s



(c) Fechando a malha.

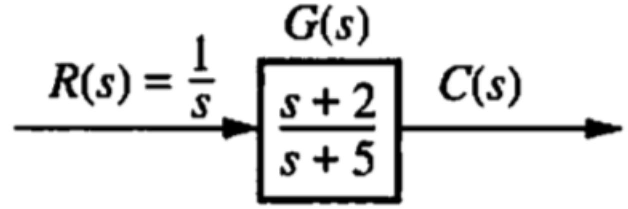


(d) Sistema equivalente (FTMF).

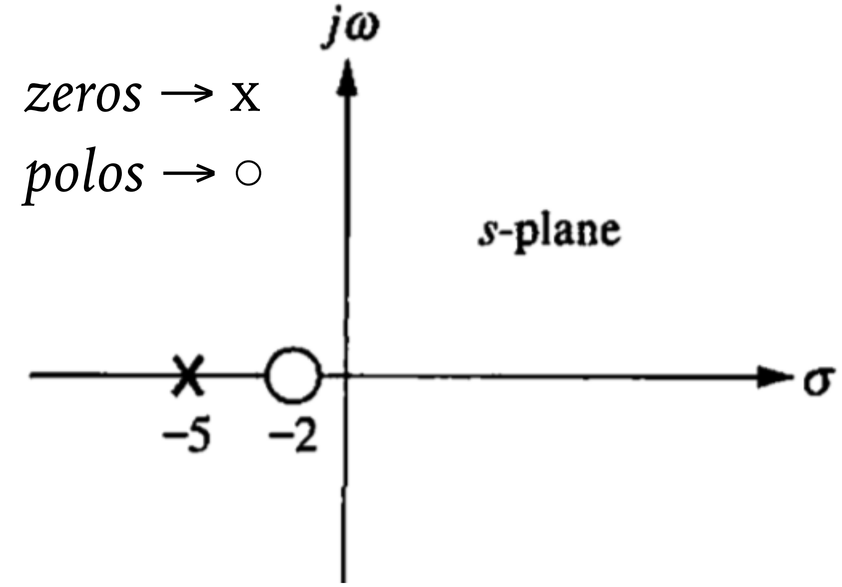
Vamos perceber que a medida que aumentamos K, os pólos em MF mudam de local.

POLOS E ZEROS DE UM SISTEMA

- Seja o seguinte sistema:
- A resposta a uma entrada degrau unitário leva à:
- O que acontece quando fechamos a malha com controlador proporcional



(a) Sistema em MA.



(b) Pólos e zeros de MA no plano-s

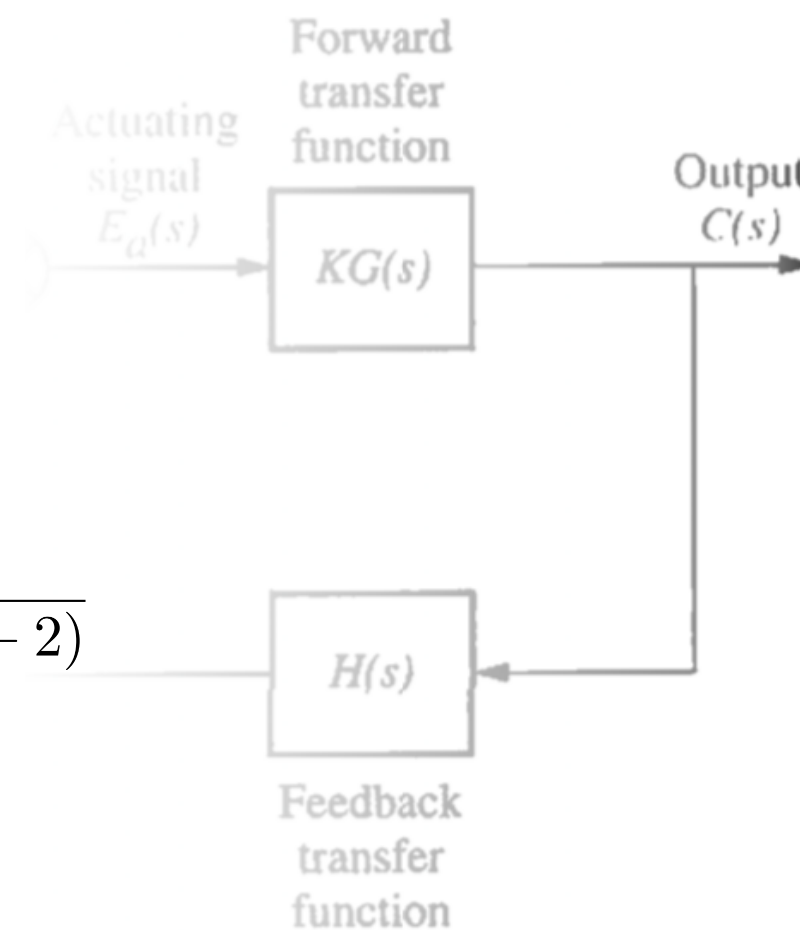
(c) Fechando a malha:

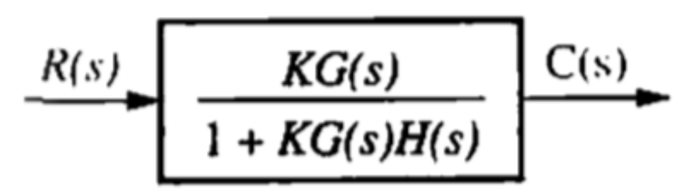
$$FTMF(s) = \frac{K\,G(s)}{1 + K\,G(s)} = \frac{R(s)}{C(s)}$$

$$FTMF(s) = \frac{\frac{K(s+2)}{(s+5)}}{1 + \frac{K(s+2)}{(s+5)}} = \frac{K(s+2)}{(s+5) + K(s+2)}$$

$$FTMF(s) = \frac{K(s+2)}{(K+1)s + (2K+5)}$$

EC(s)

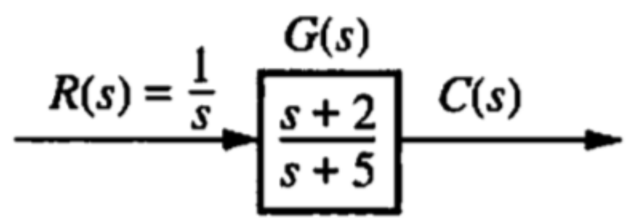




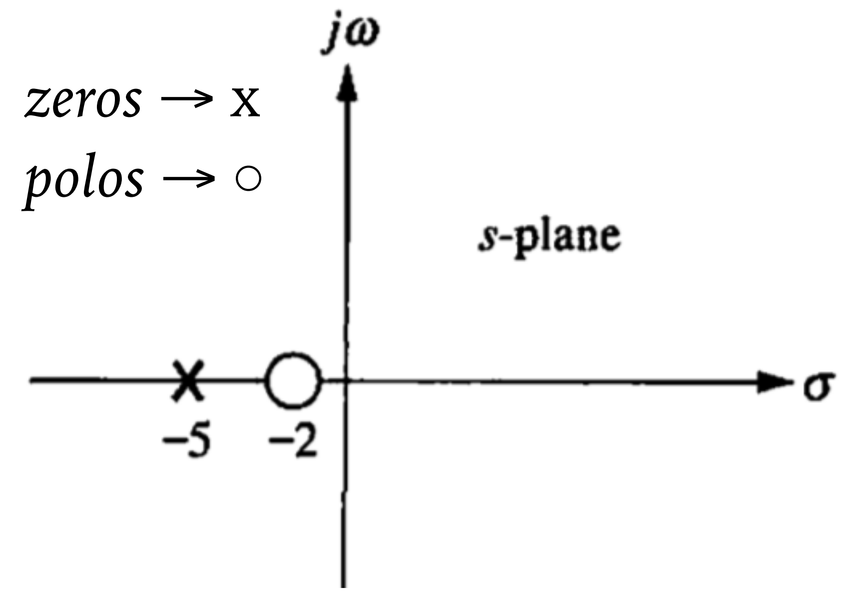
(d) Sistema equivalente (FTMF).

POLOS E ZEROS DE UM SISTEMA

- Seja o seguinte sistema:
- O que acontece quando fechamos a malha com controlador proporcional?



(a) Sistema em MA.



(b) Pólos e zeros de MA no plano-s

(c) Fechando a malha:

$$FTMF(s) = \frac{K\,G(s)}{1 + K\,G(s)} = \frac{R(s)}{C(s)}$$

$$FTMF(s) = \frac{K(s+2)}{(K+1)s + (2K+5)}$$

Calculando pólos de MF, variando K:

K	EC(s)=0	Polo em (s=)
0.0	1 s + 5 = 0	-5.00
0.1	1.1 s + 5.2 = 0	-4.73
0.5	1.5 s + 6 = 0	-4.00
1.0	2 s + 7 = 0	-3.50
1.5	2.5 s + 8 = 0	-3.20
2.0	3 s + 9 = 0	-3.00
4.0	5 s + 13 = 0	-2.60
10.0	11 s + 25 = 0	-2.27
50.0	51 s + 105 = 0	-2.06
100.0	101 s + 205 = 0	-2.03

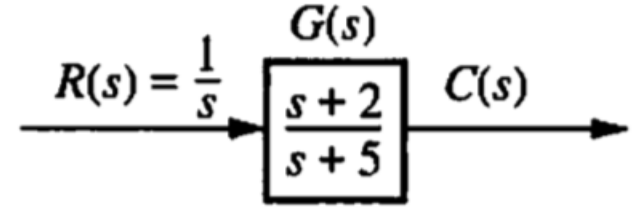
```
% Determinando faixa de polos em MF,
% variando ganho para fig. 4.1 NISE
% Fernando Passold, em 01.04.2019
K=[0 0.1 0.5 1 1.5 2 4 10 50 100];
u=length(K);
fprintf(' K | EC(s)=0 | Polo em (s=)\n');
for i=1:u
    EC = [(K(i) + 1) (2*K(i) + 5)]; % monta EC(s)
    polo = roots(EC);
    fprintf('%5.1f | %g s + %g = 0 | %7.2f\n', K(i), EC(1),
EC(2), polo);
end
```

Feedback transfer function

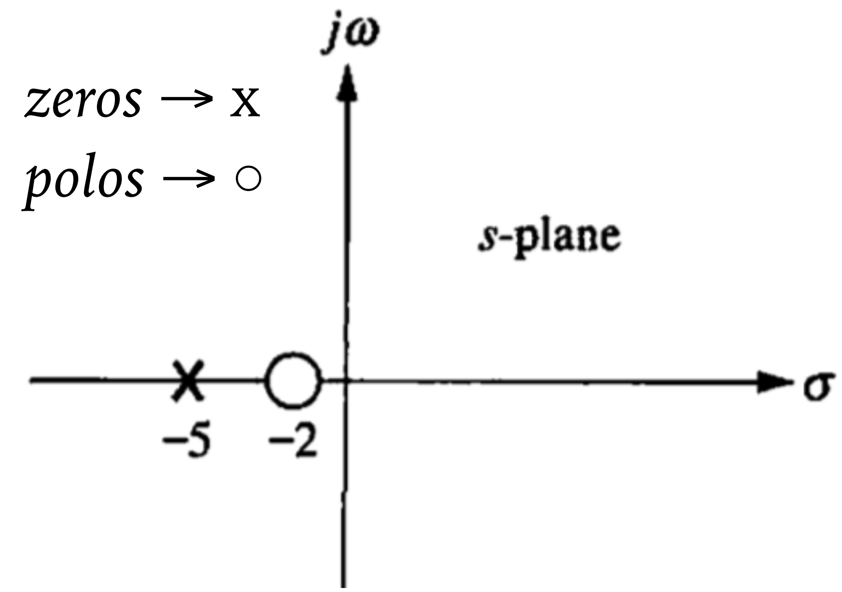
(FTMF).

POLOS E ZEROS DE UM SISTEMA

- Seja o seguinte sistema:
- O que acontece quando fechamos a malha com controlador proporcional?



(a) Sistema em MA.



(b) Pólos e zeros de MA no plano-s

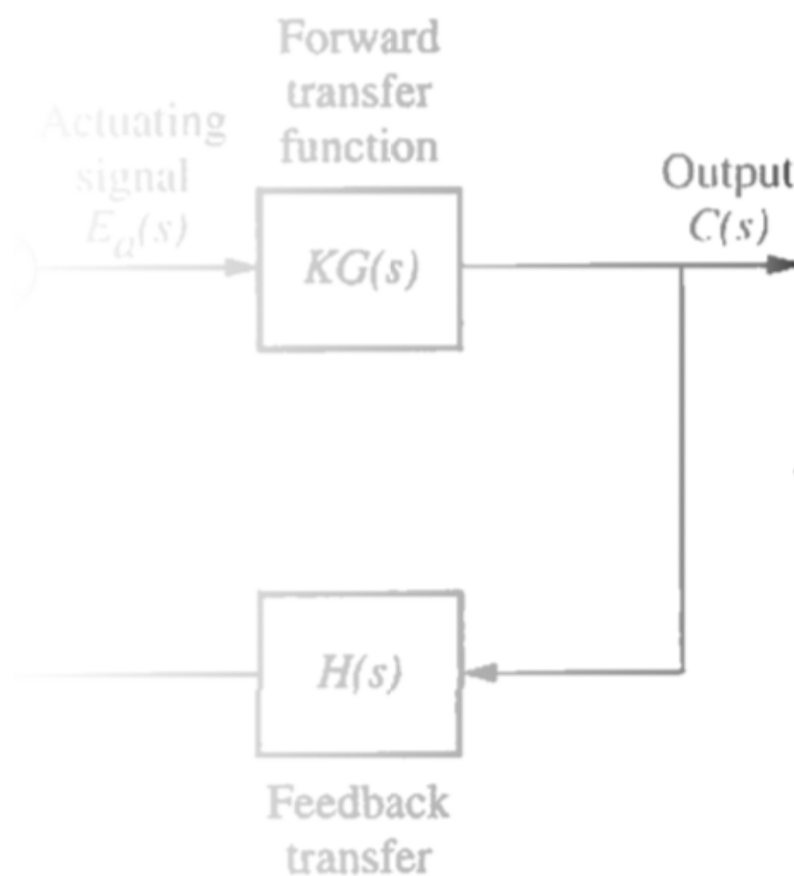
(c) Fechando a malha:

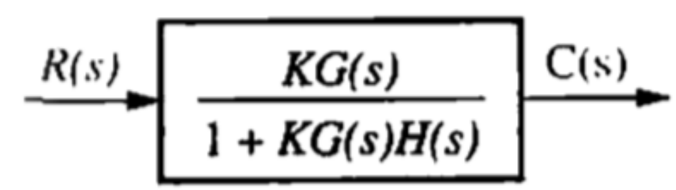
$$FTMF(s) = \frac{K\,G(s)}{1+K\,G(s)} = \frac{R(s)}{C(s)}$$

$$FTMF(s) = \frac{K(s+2)}{(K+1)s+(2K+5)}$$

Calculando pólos de MF, variando K:

```
   K  |      EC(s)=0       | Polo em (s=)
  0.0 |   1 s + 5 = 0      |   -5.00
  0.1 |  1.1 s + 5.2 = 0   |   -4.73
  0.5 |  1.5 s + 6 = 0     |   -4.00
  1.0 |   2 s + 7 = 0      |   -3.50
  1.5 |  2.5 s + 8 = 0     |   -3.20
  2.0 |   3 s + 9 = 0      |   -3.00
  4.0 |   5 s + 13 = 0     |   -2.60
 10.0 |  11 s + 25 = 0     |   -2.27
 50.0 |  51 s + 105 = 0    |   -2.06
100.0 | 101 s + 205 = 0    |   -2.03
```



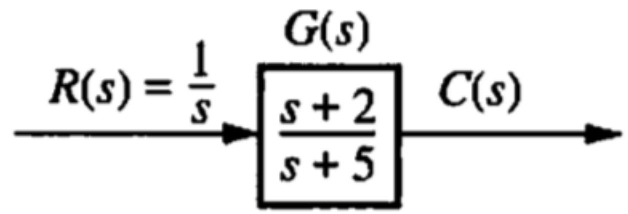


(d) Sistema equivalente (FTMF).

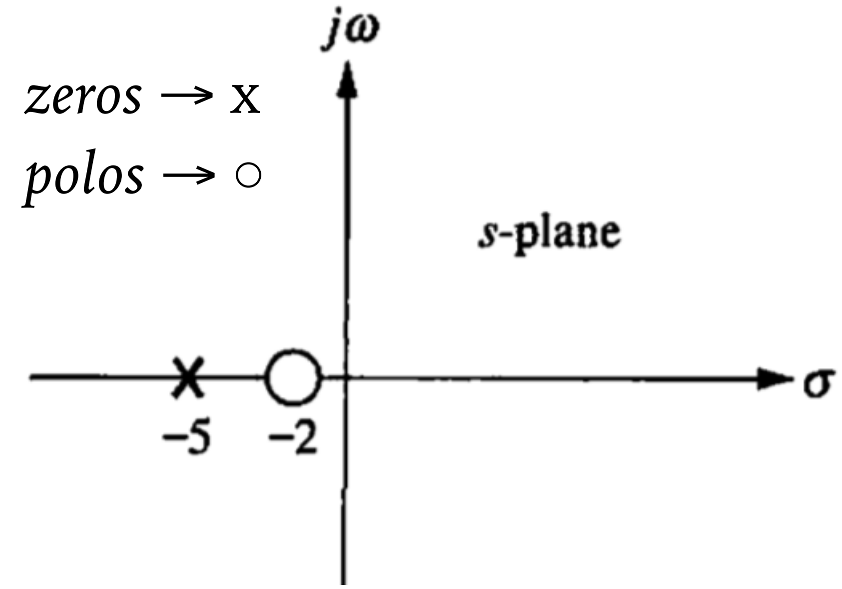
Note: o pólo de MA "caminha" na direção do zero (mais próximo)

POLOS E ZEROS DE UM SISTEMA

```
>> G=tf([1 2],[1 5])
G =
   s + 2
   -----
   s + 5
>> rlocus(G)
```



(a) Sistema em MA.

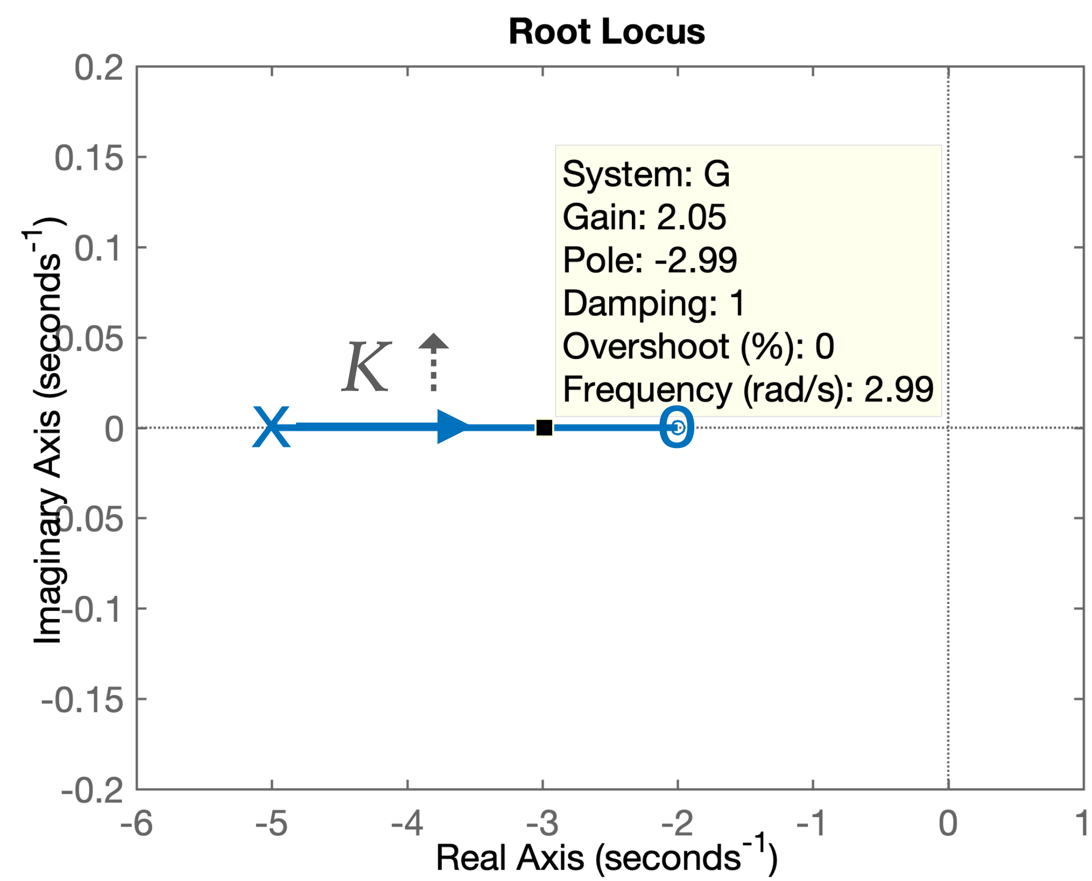


(b) Pólos e zeros de MA no plano-s

(c) Fechando a malha:

$$FTMF(s) = \frac{K\,G(s)}{1 + K\,G(s)} = \frac{R(s)}{C(s)}$$

$$FTMF(s) = \frac{K(s+2)}{(K+1)s + (2K+5)}$$



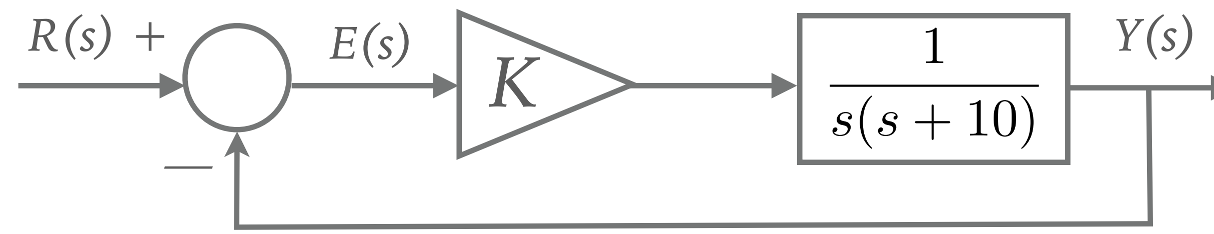
Calculando pólos de MF, variando K:

K	EC(s)=0	Polo em (s=)
0.0	1 s + 5 = 0	-5.00
0.1	1.1 s + 5.2 = 0	-4.73
0.5	1.5 s + 6 = 0	-4.00
1.0	2 s + 7 = 0	-3.50
1.5	2.5 s + 8 = 0	-3.20
2.0	3 s + 9 = 0	-3.00
4.0	5 s + 13 = 0	-2.60
10.0	11 s + 25 = 0	-2.27
50.0	51 s + 105 = 0	-2.06
100.0	101 s + 205 = 0	-2.03

Note: o pólo de MA "caminha" na direção do zero (mais próximo)

EX_2: SISTEMA DE 2ª-ORDEM (SOMENTE 2 POLOS)

- Seja o seguinte sistema:



Pólos de MA em s=0 e s=-10.

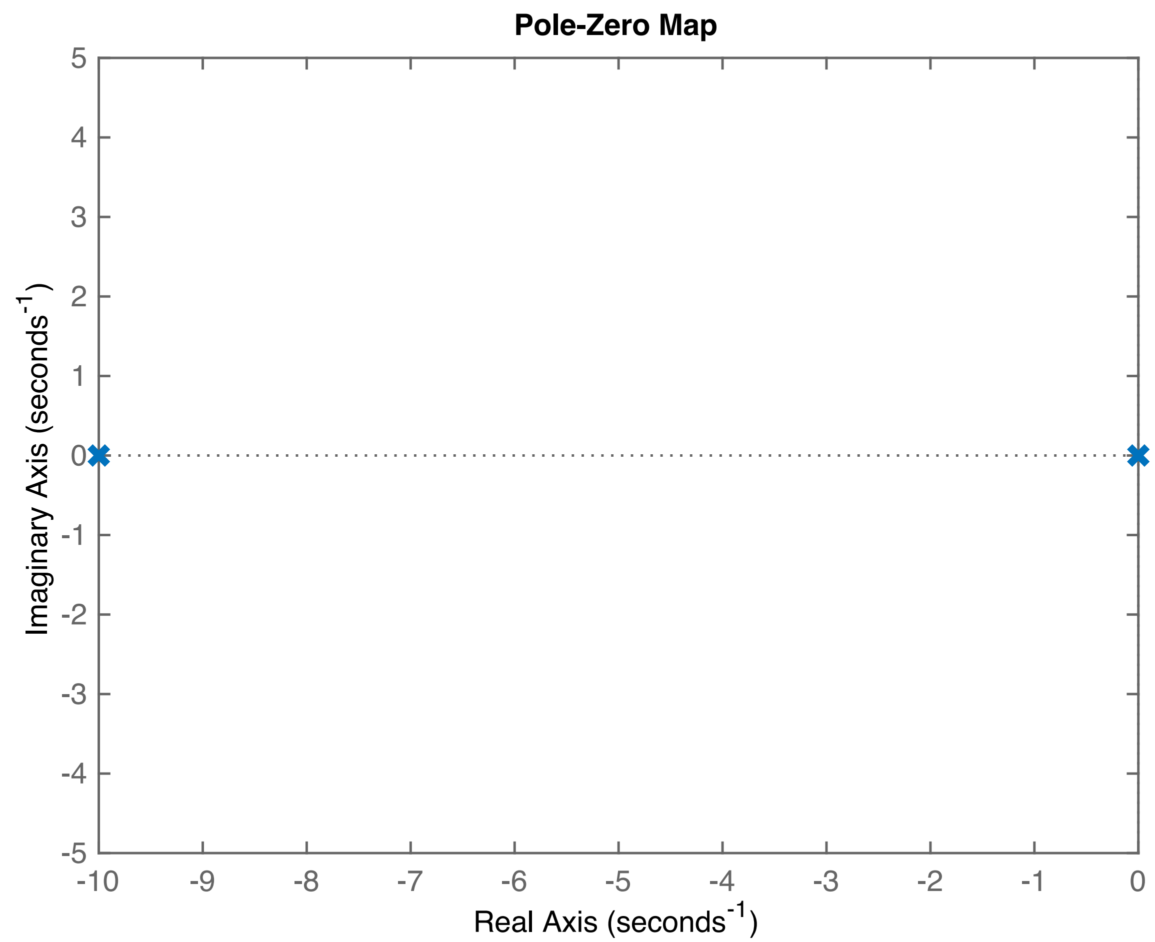
$$FTMF(s) = \frac{K\,G(s)}{1+K\,G(s)} = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

$$FTMF(s) = \frac{\frac{K}{s(s+10))}}{1+\frac{K}{s(s+10)}} = \frac{K}{s(s+10)+K}$$

$$FTMF(s) = \frac{K}{s^2+10s+K}$$

Variando K obteremos os pólos de MF em:

K	Polo 1	Polo 2
0	0	-10
5	-9.47214	-0.527864
10	-8.87298	-1.12702
15	-8.16228	-1.83772
20	-7.23607	-2.76393
25	-5	-5
30	$-5+j2.23607$	$-5-j2.23607$
35	$-5+j3.16228$	$-5-j3.16228$
40	$-5+j3.87298$	$-5-j3.87298$
45	$-5+j4.47214$	$-5-j4.47214$
50	$-5+j5$	$-5-j5$




```
>> G=tf(1,[1 10 0])
>> pzmap(G)
>> axis([-10 0 -5 5])
```

EX_2: SISTEMA DE 2ª-

➤ Seja o seguinte sistema:

Pólos de MA em s=0 e s=-10.

$$FTMF(s) = \frac{K\,G(s)}{1 + K\,G(s)} = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

$$FTMF(s) = \frac{\frac{K}{s(s+10)}}{1 + \frac{K}{s(s+10)}} = \frac{K}{s(s+10}$$

$$FTMF(s) = \frac{K}{s^2 + 10s + K}$$

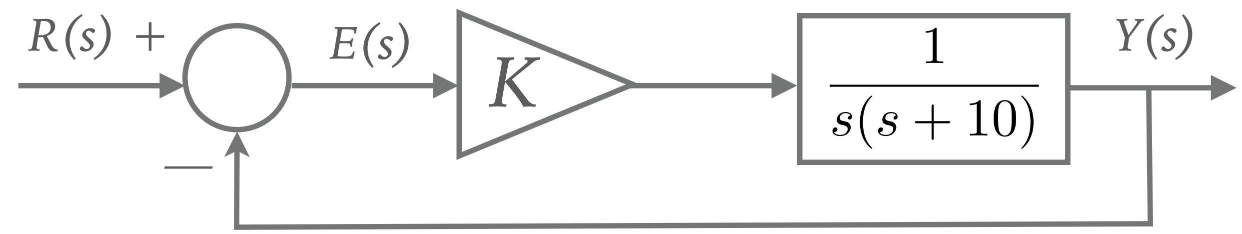
Variando K obteremos os pólos de MF e

K	Polo 1	Polo 2
0	0	-10
5	-9.47214	-0.527864
10	-8.87298	-1.12702
15	-8.16228	-1.83772
20	-7.23607	-2.76393
25	-5	-5
30	$-5 + j2.23607$	$-5 - j2.23607$
35	$-5 + j3.16228$	$-5 - j3.16228$
40	$-5 + j3.87298$	$-5 - j3.87298$
45	$-5 + j4.47214$	$-5 - j4.47214$
50	$-5 + j5$	$-5 - j5$

```
% Determinando faixa de p?los em MF, variando ganho para fig. 8.4 NISE
% Fernando Passold, em 01.04.2019
K=0:5:50;
u=length(K);
fprintf(' K & \\text{Polo 1} & \\text{Polo 2} \\\\ \n');
figure;
for i=1:u
    fprintf('%2g & ', K(i));
    EC = [1 10 K(i)]; % monta EC(s) (e mostra polin?mio)
    polo = roots(EC);
    fprintf('%g ', real(polo(1)));
    aux=num2str(K(i));
    if ~(isreal(polo(1)))
        plot(real(polo),imag(polo),'bx','LineWidth',2,'MarkerSize',12)
        text(real(polo)+.2,imag(polo),aux);
        aux=abs(imag(polo(j)));
        fprintf('+ j%g ', aux);
    else
        plot(real(polo),[0 0],'bx','LineWidth',2,'MarkerSize',12)
        text(real(polo)+.2,[0.2 0.2],aux);
    end
    fprintf(' & %g ', real(polo(2)));
    if ~(isreal(polo(1)))
        fprintf('- j%g ', aux);
    end
    if i==1
        hold on
    end
    fprintf(' \\\\\n');
end
title('Plano-s');
xlabel('Real (\sigma)');
ylabel('Imag (j\omega)');
```

EX_2: SISTEMA DE 2ª-ORDEM (SOMENTE 2 POLOS)

- Seja o seguinte sistema:



Pólos de MA em s=0 e s=-10.

$$FTMF(s) = \frac{K\,G(s)}{1 + K\,G(s)} = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

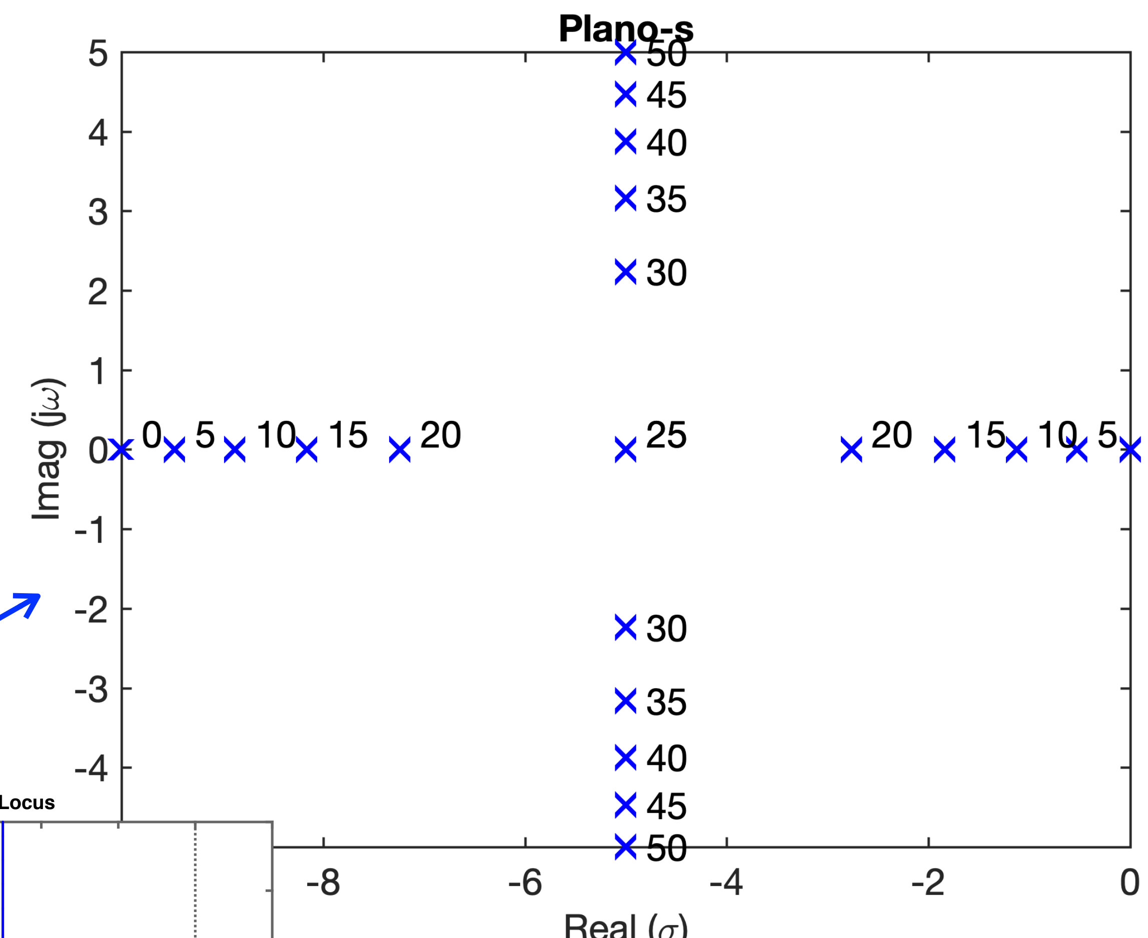
$$FTMF(s) = \frac{\frac{K}{s(s+10))}}{1 + \frac{K}{s(s+10)}} = \frac{K}{s(s+10)+K}$$

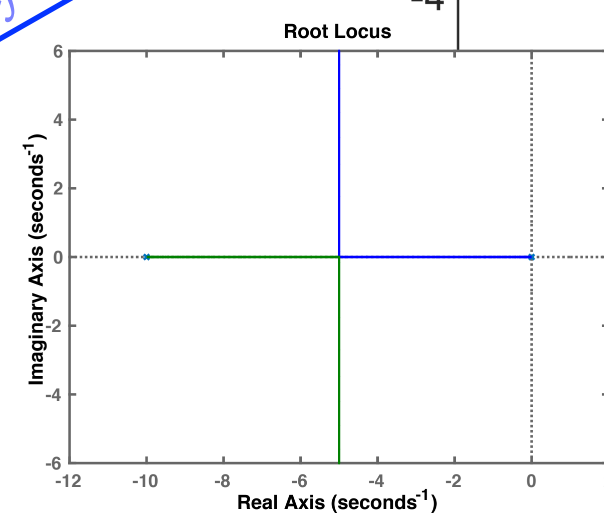
$$FTMF(s) = \frac{K}{s^2 + 10s + K}$$

Variando K obteremos os pólos de MF em:

K	Polo 1	Polo 2
0	0	-10
5	-9.47214	-0.527864
10	-8.87298	-1.12702
15	-8.16228	-1.83772
20	-7.23607	-2.76393
25	-5	-5
30	$-5 + j2.23607$	$-5 - j2.23607$
35	$-5 + j3.16228$	$-5 - j3.16228$
40	$-5 + j3.87298$	$-5 - j3.87298$
45	$-5 + j4.47214$	$-5 - j4.47214$
50	$-5 + j5$	$-5 - j5$

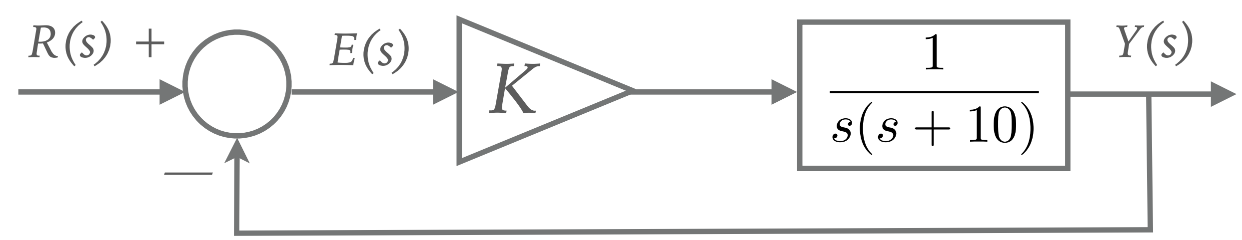
Gráfico





EX_2: SISTEMA DE 2ª-ORDEM (SOMENTE 2 POLOS)

➤ Seja o seguinte sistema:



Pólos de MA em s=0 e s=-10.

$$FTMF(s) = \frac{K\,G(s)}{1+K\,G(s)} = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

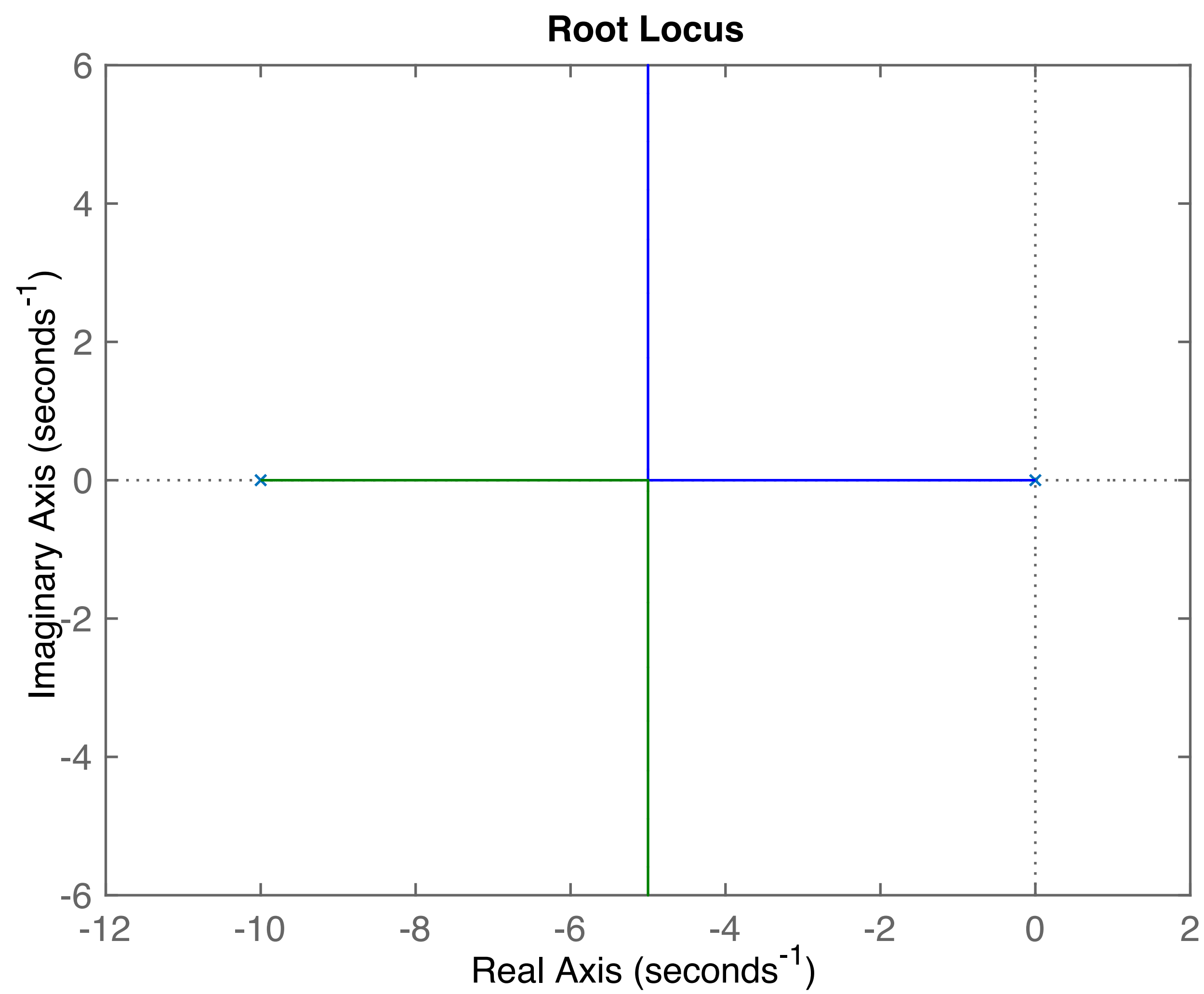
$$FTMF(s) = \frac{\frac{K}{s(s+10))}}{1+\frac{K}{s(s+10)}} = \frac{K}{s(s+10)+K}$$

$$FTMF(s) = \frac{K}{s^2+10s+K}$$

Variando K obteremos os pólos de MF em:

K	Polo 1	Polo 2
0	0	-10
5	-9.47214	-0.527864
10	-8.87298	-1.12702
15	-8.16228	-1.83772
20	-7.23607	-2.76393
25	-5	-5
30	$-5+j2.23607$	$-5-j2.23607$
35	$-5+j3.16228$	$-5-j3.16228$
40	$-5+j3.87298$	$-5-j3.87298$
45	$-5+j4.47214$	$-5-j4.47214$
50	$-5+j5$	$-5-j5$

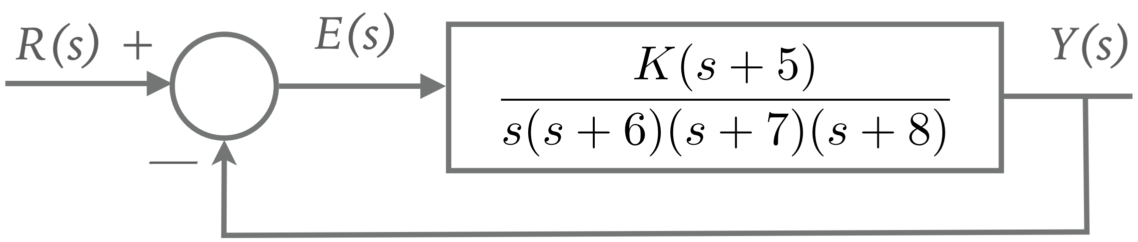
Gráfico



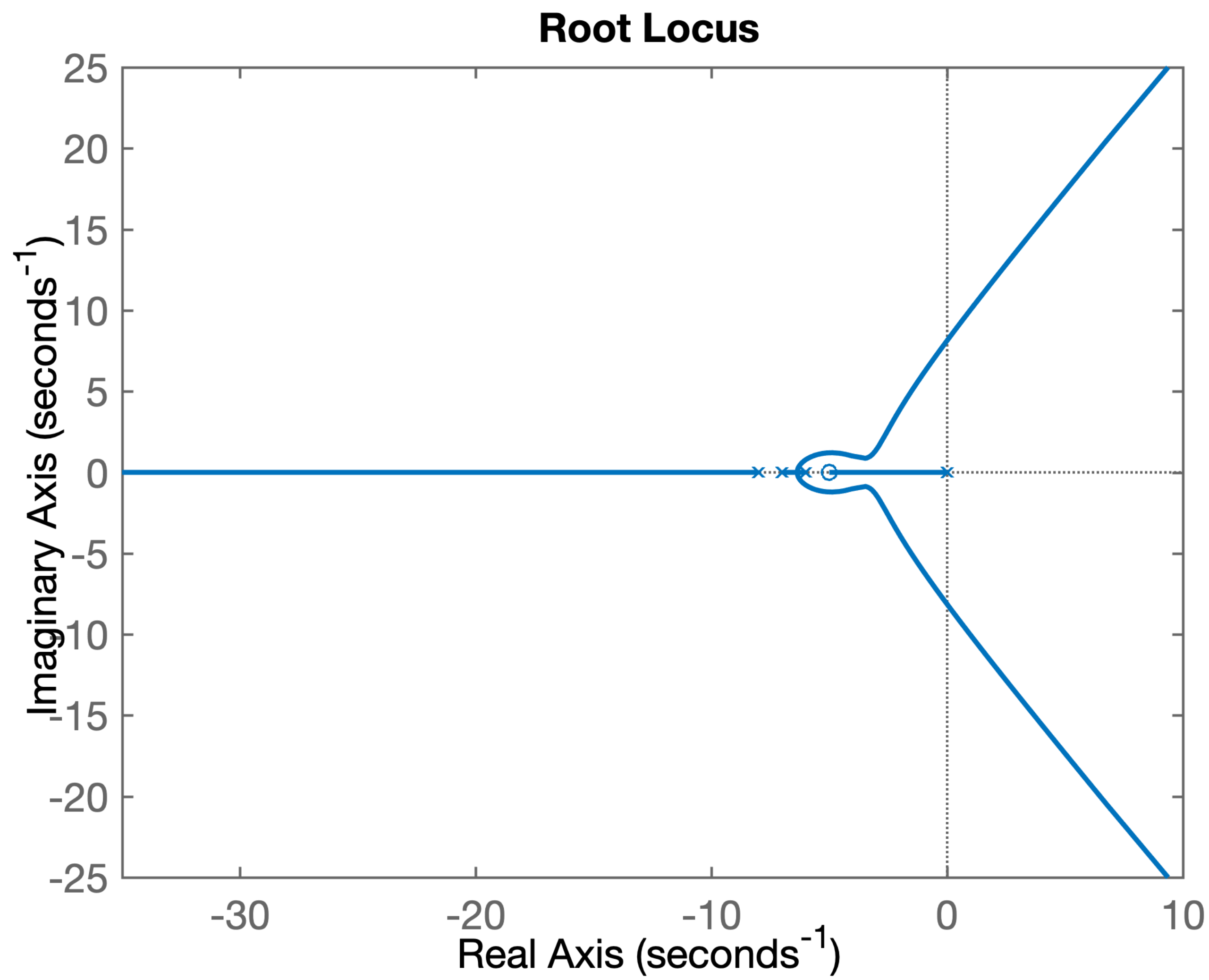

```
>> figure; rlocus(G)
```

EX_3: VOLTANDO AO EXEMPLO DO INÍCIO DA AULA

➤ Seja este outro sistema:

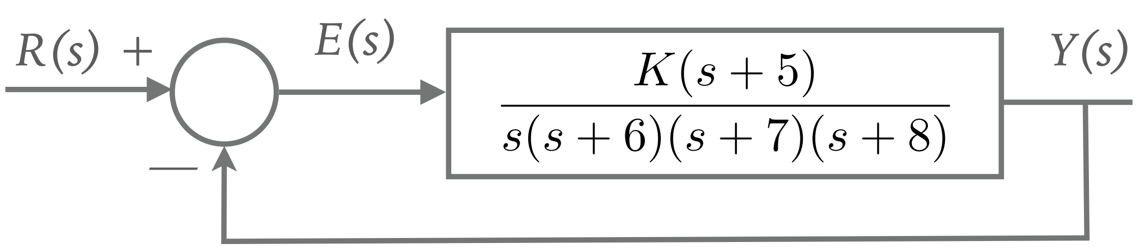



```
>> G=tf([1 5],poly([0 -6 -7 -8]));
>> zpk(G)

ans =

         (s+5)
  -------------------
  s (s+8) (s+7) (s+6)

Continuous-time zero/pole/gain model.

>> rlocus(G)
```

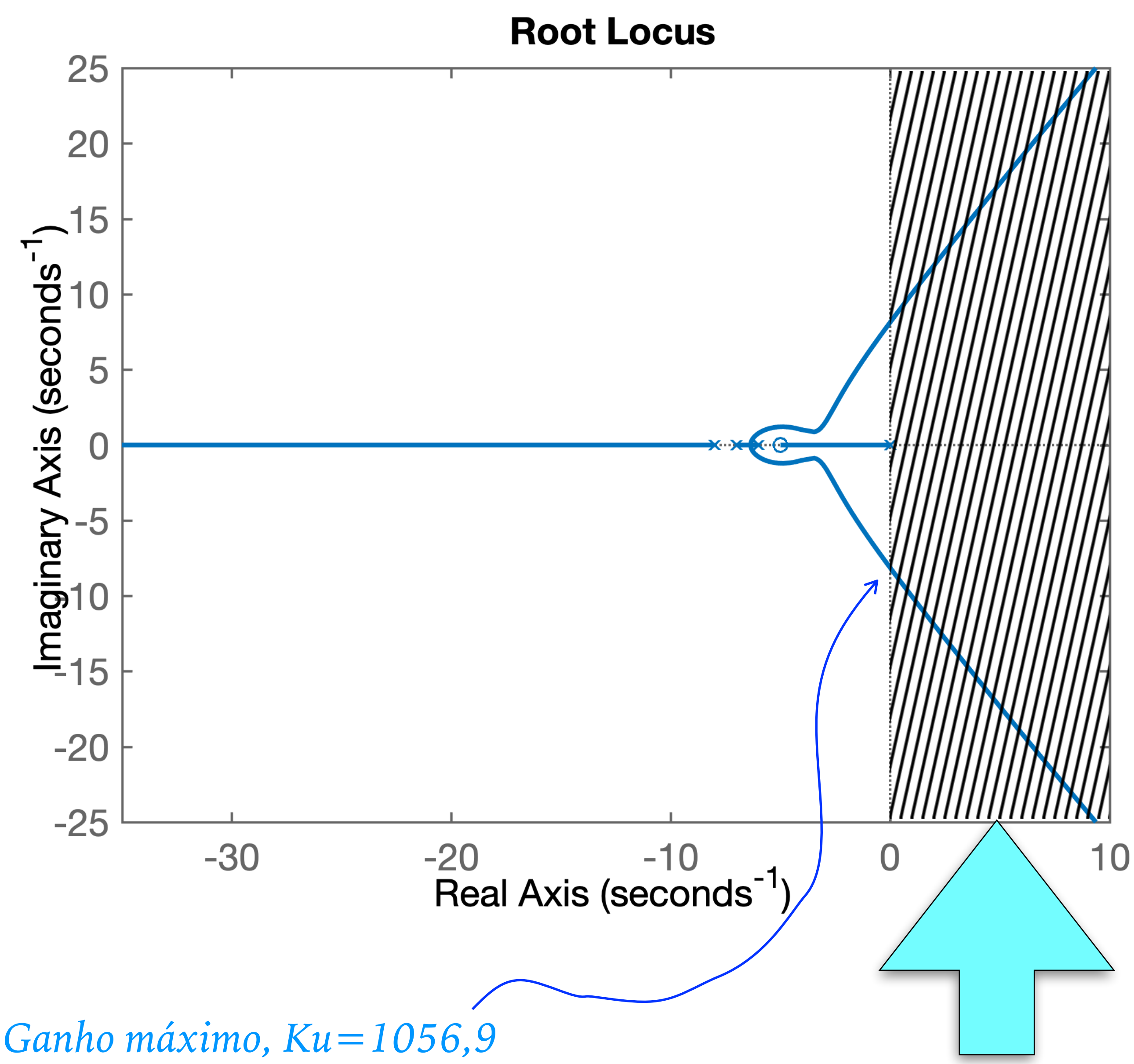


EX_3: VOLTANDO AO EXEMPLO DO INÍCIO DA AULA

- Seja este outro sistema:




```
>> G=tf([1 5],poly([0 -6 -7 -8]));
>> zpk(G)

ans =

          (s+5)
  -------------------
  s (s+8) (s+7) (s+6)

Continuous-time zero/pole/gain model.

>> rlocus(G)
```

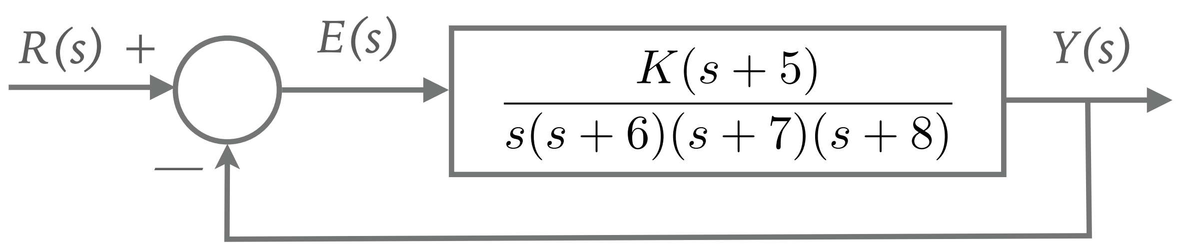


Ganho máximo, Ku=1056,9

Região de instabilidade

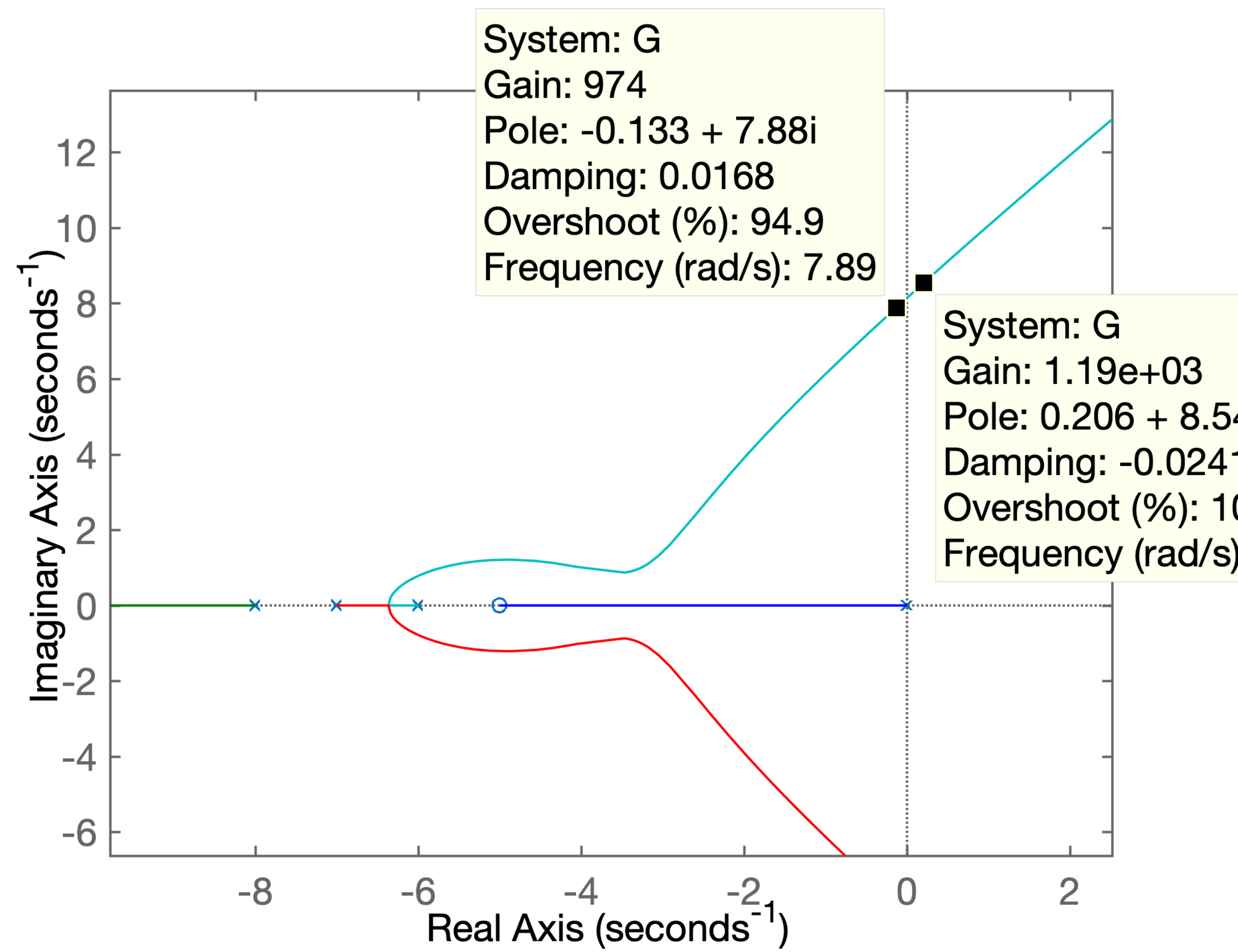
EX_3: VOLTANDO AO EXEMPLO DO INÍCIO DA AULA

➤ Seja o sistema:




```
>> G=tf([1 5],poly([0 -6 -7 -8]));
>> zpk(G)

        (s+5)
  -------------------
  s (s+8) (s+7) (s+6)

>> rlocus(G)
>> G
G =
              s + 5
  ------------------------------
  s^4 + 21 s^3 + 146 s^2 + 336 s
>>
```

Ganho máximo, Ku=1056,9



$$FTMF(s) = \frac{K(s+5)}{s^4 + 21s^3 + 146s^2 + 336s + K(s+5)}$$

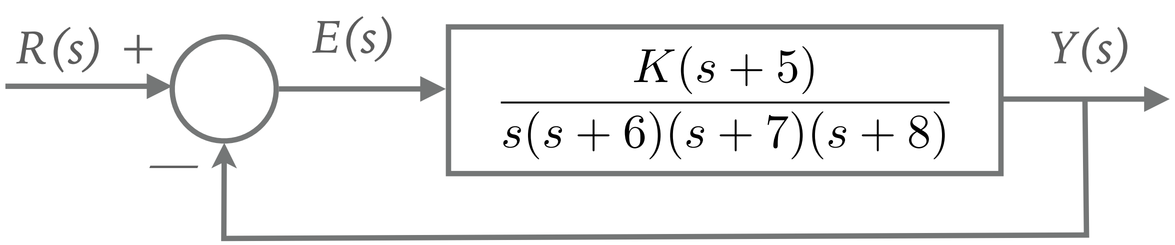
$$EC(z) = s^4 + 21s^3 + 146s^2 + (K+336)s + 5K = 0$$

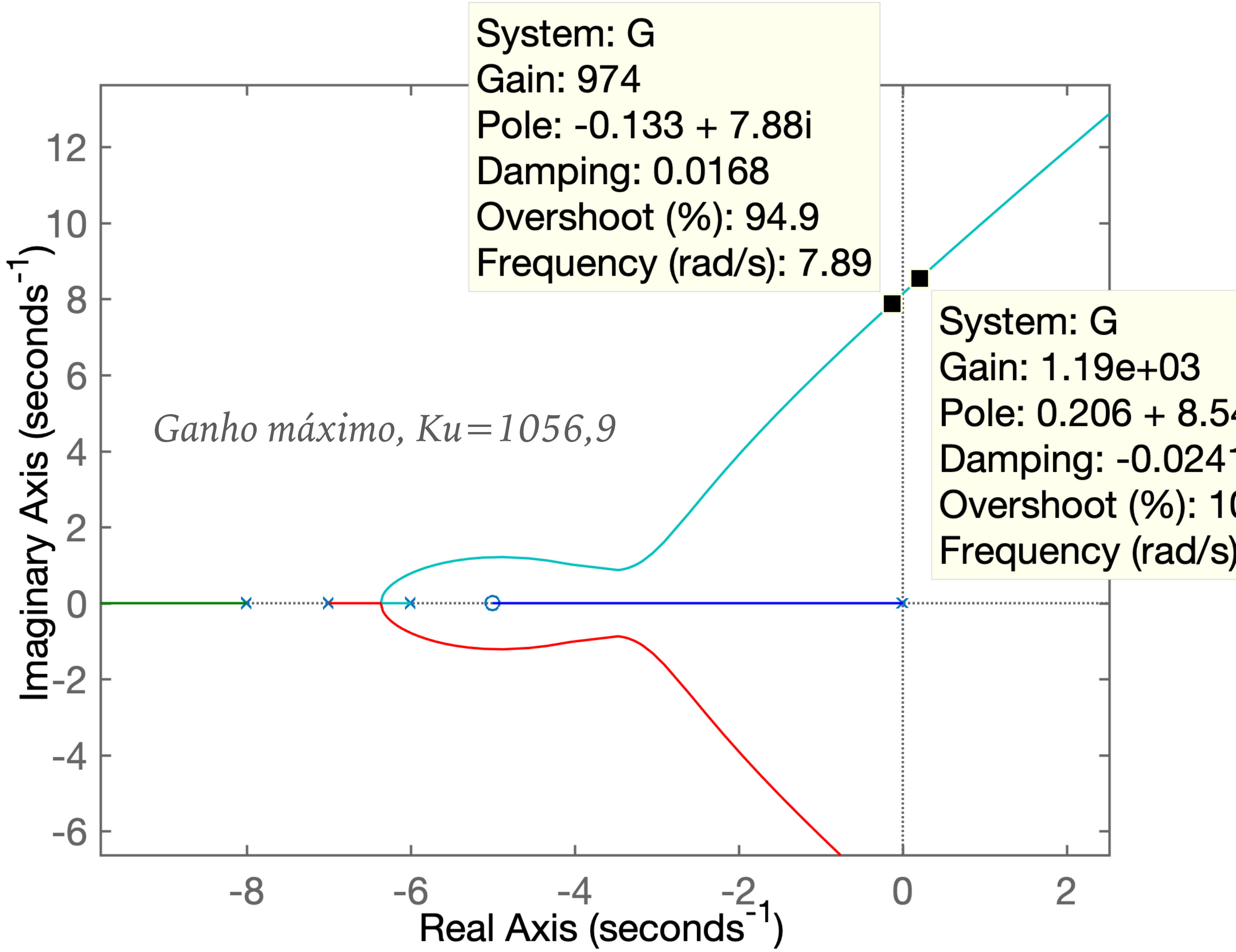
s^4	1	146	$5K$
s^3	21	$(K+336)$	0
s^2	b_1	b_2	
s^1	c_1		
s^0	d_1		

Arranjo de Routh-Hurwitz

EX_3: VOLTANDO AO EXEMPLO DO INÍCIO DA AULA

- Seja o sistema:





Note:

Se K=1, teremos…

Se K=10, teremos…

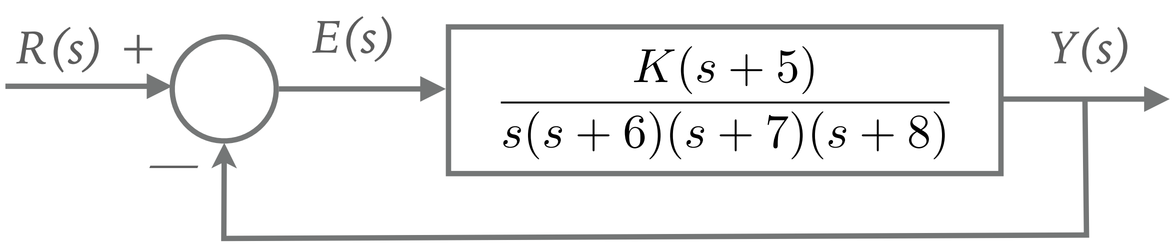
Se K=100, teremos…

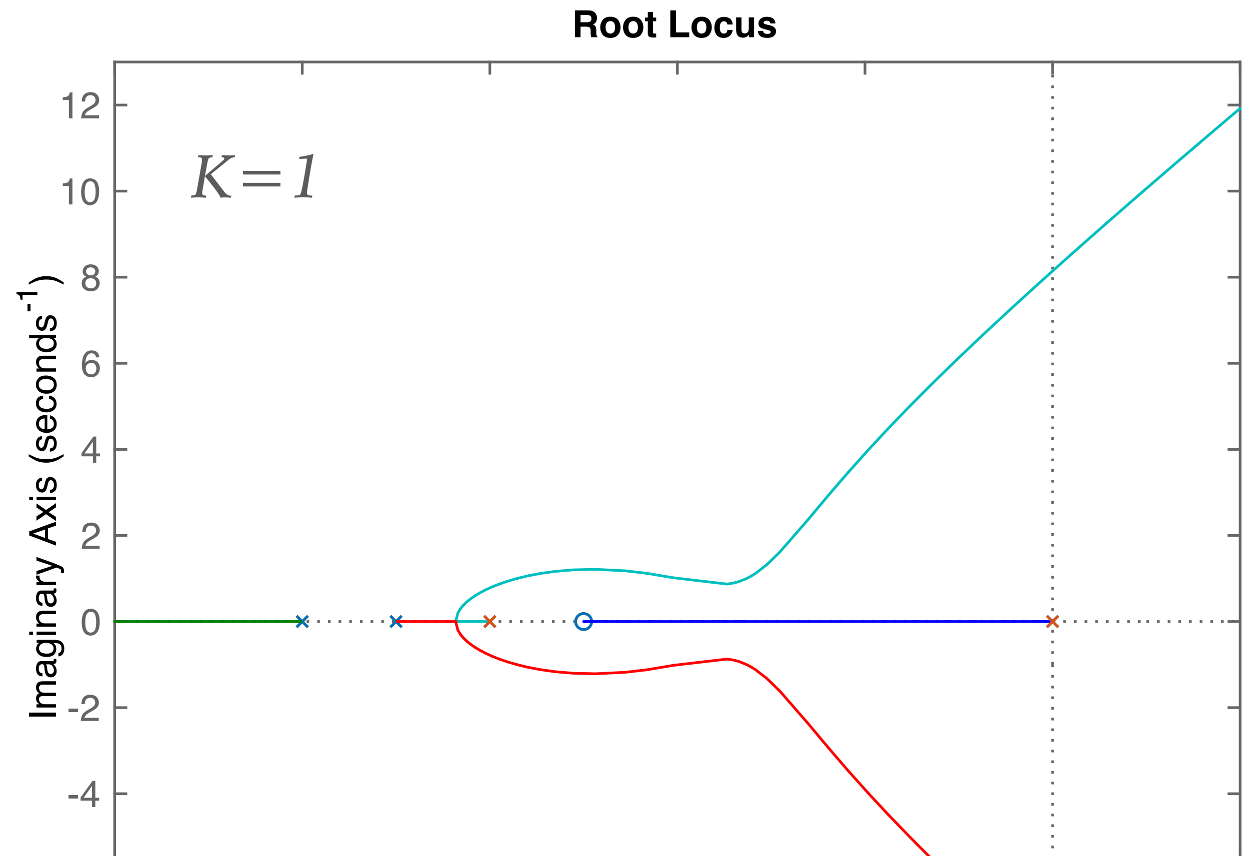
Se K=1000, teremos…

Se K=1100, teremos…

EX_3: VOLTANDO AO EXEMPLO DO INÍCIO DA AULA

- Seja o sistema:





Note:

Ganho máximo, Ku=1056,9

Se K=1, teremos…

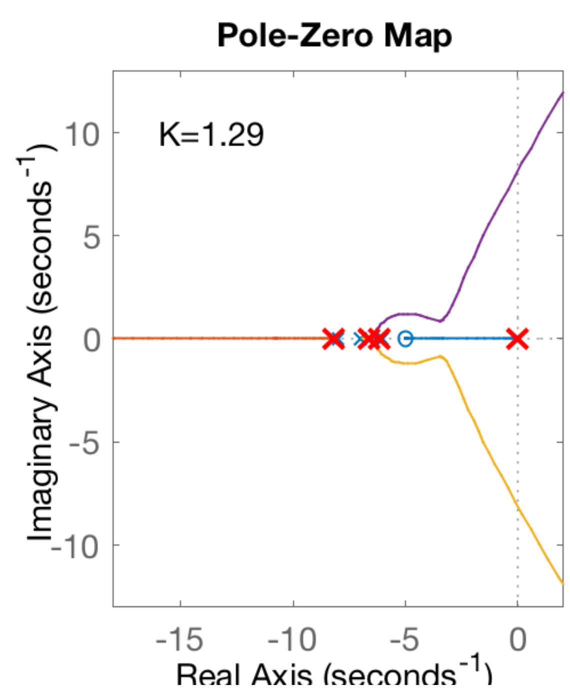
```
>> K=1;
>> FTMF=feedback(K*G,1);
>> pole(FTMF)
ans =
       -8.1554
       -6.7224
       -6.1073
     -0.014933
>> zpk(FTMF)
                    (s+5)
  -----------------------------------------
  (s+8.155) (s+6.722) (s+6.107) (s+0.01493)
>>
```

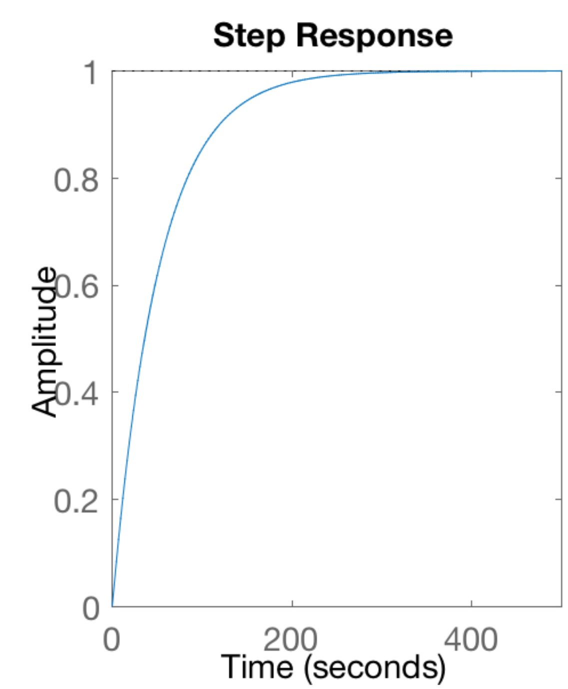
Se K=10, teremos…

Se K=100, teremos…

Se K=1000, teremos…

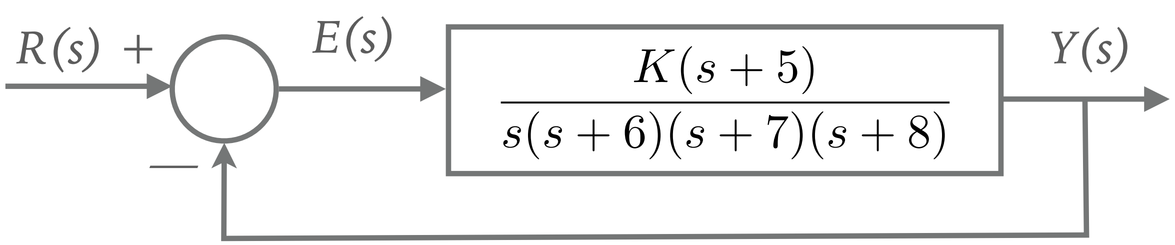
Se K=1100, teremos…





EX_3: VOLTANDO AO EXEMPLO DO INÍCIO DA AULA

➤ Seja o sistema:



Note:

Ganho máximo, Ku=1056,9

Se K=1, teremos…

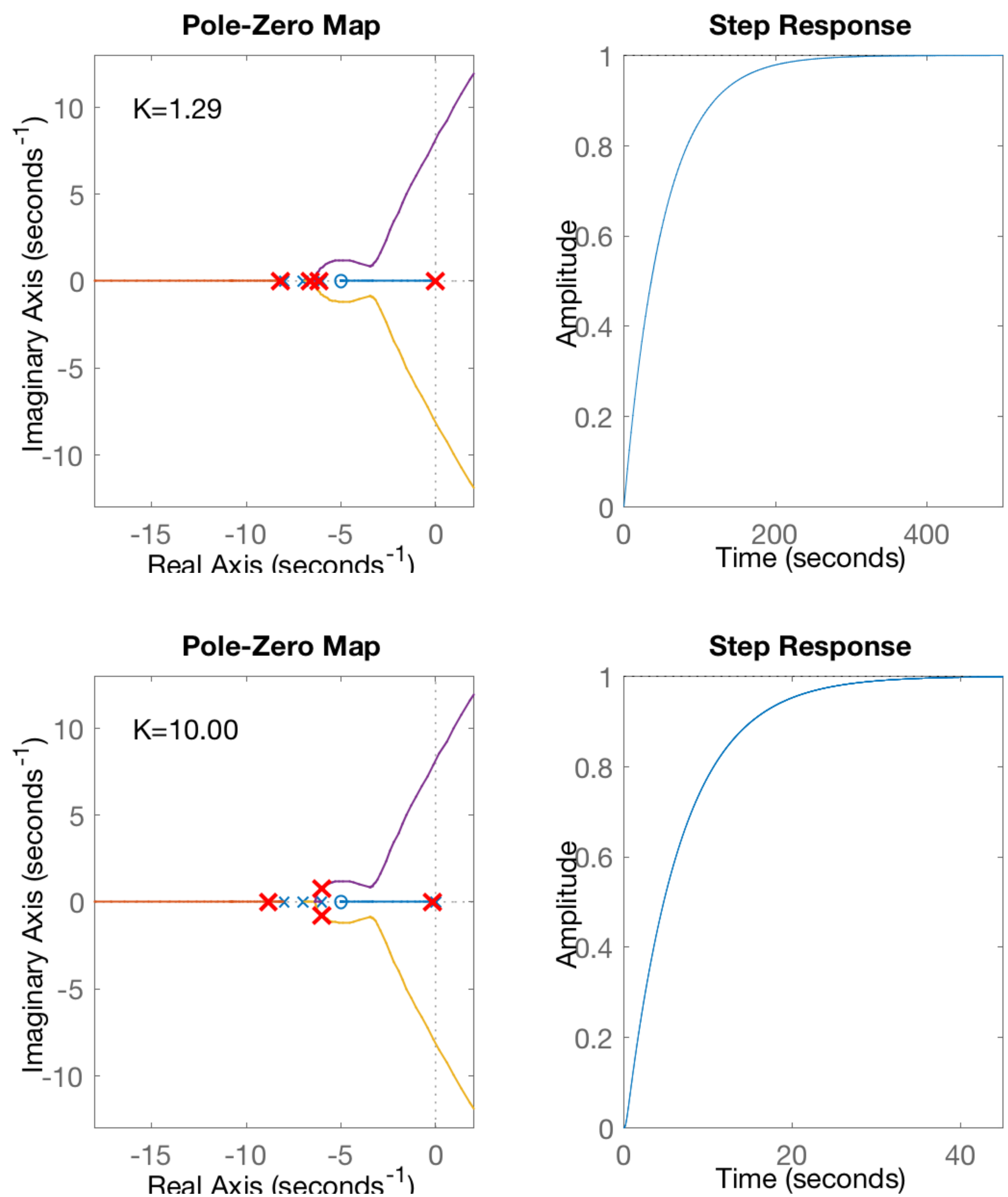
Se K=10, teremos…

Se K=100, teremos…

Se K=1000, teremos…

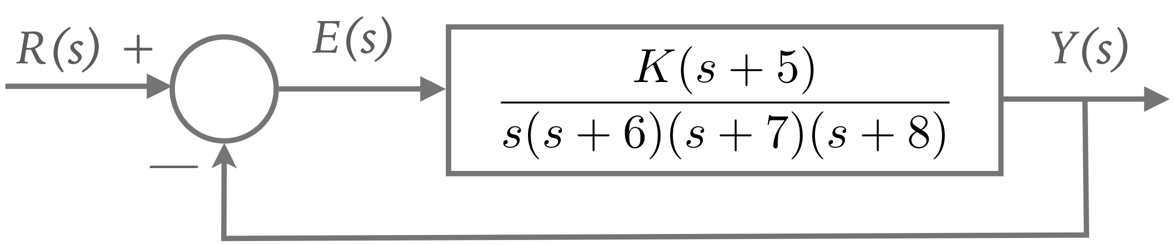
Se K=1100, teremos…

```
>> K=10;
>> FTMF=feedback(K*G,1);
>> pole(FTMF)
ans =
      -8.8346 +         0i
      -6.0055 +   0.77683i
      -6.0055 -   0.77683i
     -0.15434 +         0i
>> zpk(FTMF)
                  10 (s+5)
  -------------------------------------------
  (s+8.835) (s+0.1543) (s^2 + 12.01s + 36.67)
>>
```



EX_3: VOLTANDO AO EXEMPLO DO INÍCIO DA AULA

- Seja o sistema:



Note:

Ganho máximo, Ku=1056,9

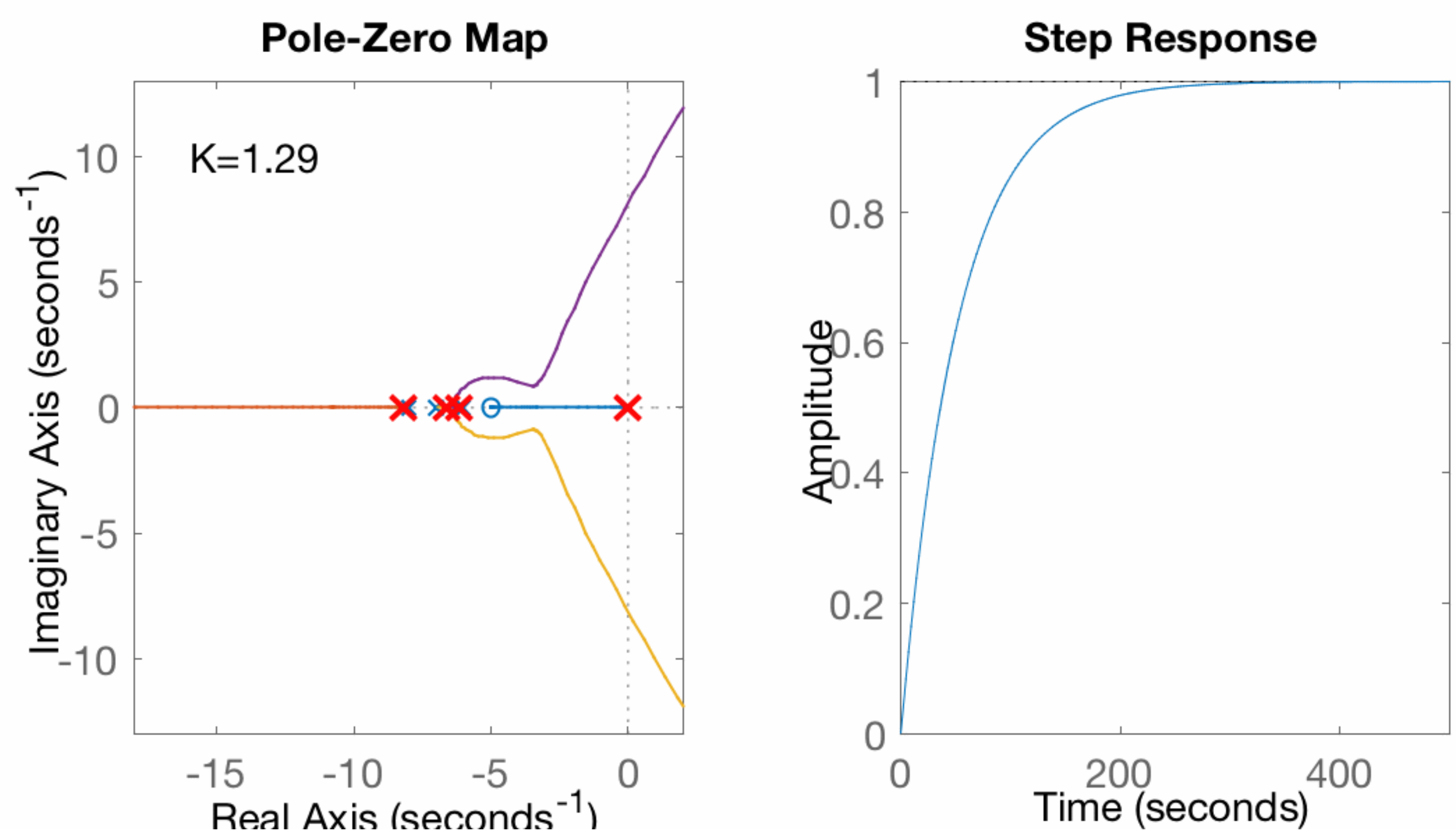
Se K=1, teremos…

Se K=10, teremos…

Se K=100, teremos…

Se K=1000, teremos…

Se K=1100, teremos…



PROPRIEDADES (REGRAS) DO ROOT LOCUS (RL)

$$FTMF(s) = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)H(s)}$$

$$EC(z) = 1 + K \cdot G(s)H(s) = 0$$

$$K \cdot G(s)H(s) = -1 \quad = 1\,\angle[(2k+1)\cdot 180^o], \quad \text{onde: } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

$$\left| K \cdot G(s)H(s) \right| = 1$$

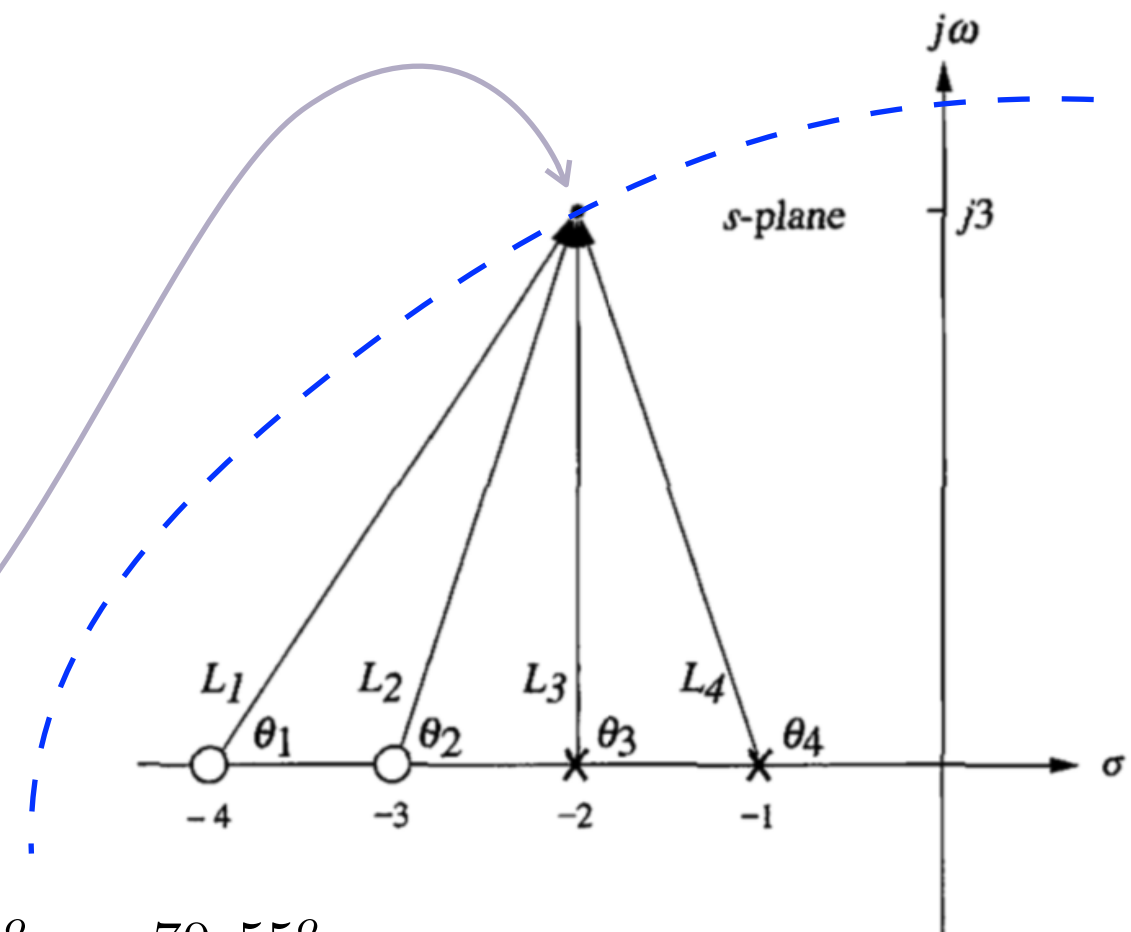
$$\angle KG(s)H(s) = (2k+1)\cdot 180^o$$

Para um ponto no plano-s pertencer ao traço do RL:

Somatório dos ângulos = 180o:

$$\sum \angle(\text{Zeros}) - \sum \angle(\text{Polos}) = \text{No. Ímpar} \cdot 180^o$$

Exemplo: ponto s=-2+j3 pertence ao RL (para certo valor de K) !?



$$\theta_1 + \theta_2 - (\theta_3 + \theta_4) = 56,31^o + 71,57^o - 90^o - 108,43^o = -70,55^o$$

$\Rightarrow$ *Conclusão: Não pertence ao RL (não pode ser um pólo de MF).*

PROPRIEDADES (REGRAS) DO ROOT LOCUS (RL)

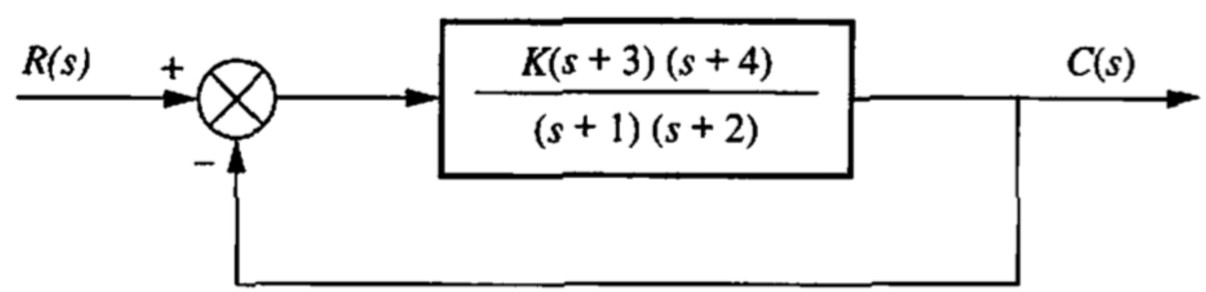
$$FTMF(s) = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)H(s)}$$

$$EC(z) = 1 + K \cdot G(s)H(s) = 0$$

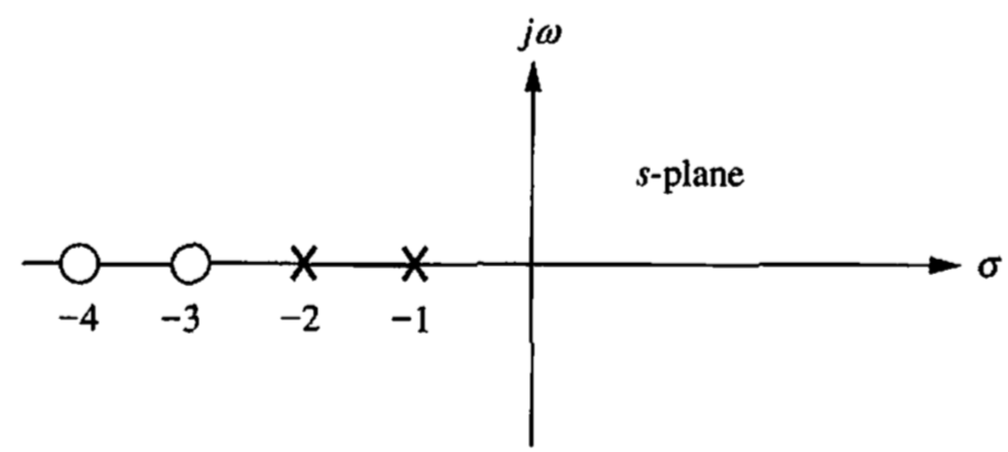
$$K \cdot G(s)H(s) = -1 \quad = 1\,\angle[(2k+1)\cdot 180^o], \quad \text{onde: } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

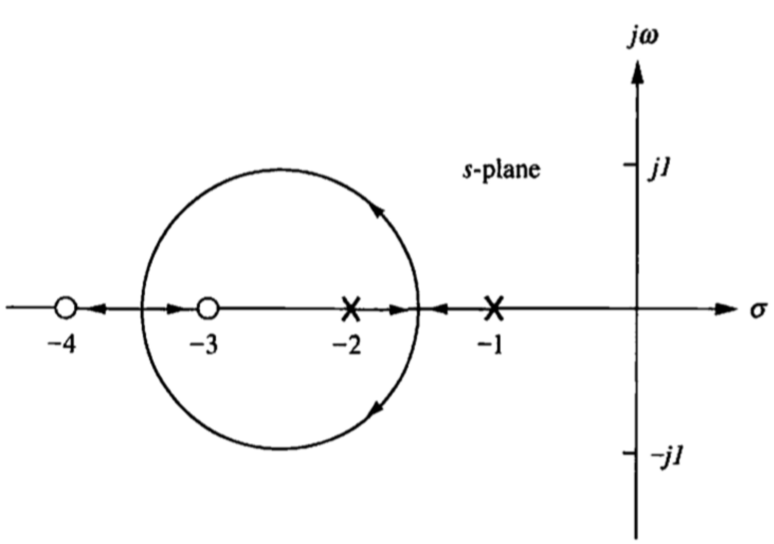
$$\left|K \cdot G(s)H(s)\right| = 1$$

$$\angle KG(s)H(s) = (2k+1)\cdot 180^o$$



No eixo real, para K> O, o RL existe à esquerda de um número ímpar de pólos de MA finitos (no eixo real) e/ou à esquerda de um número de zeros de MA finitos.





De acordo com a regra, os segmentos do eixo real do RL estão entre -1 e -2 e entre -3 e -4.

PROPRIEDADES (REGRAS) DO ROOT LOCUS (RL)

$$FTMF(s) = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)H(s)}$$

$$EC(z) = 1 + K \cdot G(s)H(s) = 0$$

$$K \cdot G(s)H(s) = -1 \quad = 1 \angle[(2k+1) \cdot 180^o], \quad \text{onde: } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

$$\left| K \cdot G(s)H(s) \right| = 1$$

$$\angle KG(s)H(s) = (2k+1) \cdot 180^o$$

Ponto de partida da assíntota:

$$\sigma_a = \frac{\sum \text{Polos finitos} - \sum \text{zeros finitos}}{\text{No. Polos finitos} - \text{No. Zeros finitos}}$$

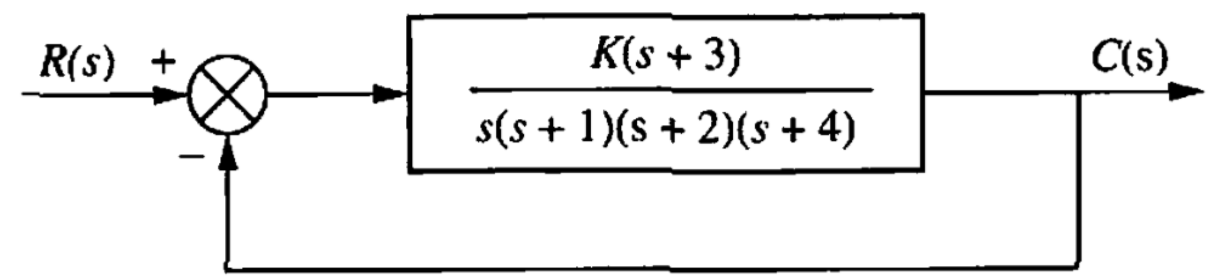
Ângulo de partida das assíntotas:

$$\theta_a = \frac{(2k+1) \cdot 180^o}{\text{No. Polos finitos} - \text{No. Zeros finitos}}, \quad \text{onde: } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

PROPRIEDADES (REGRAS) DO ROOT LOCUS (RL)

Ponto de partida da assíntota:

$$\sigma_a = \frac{\sum \text{Polos finitos} - \sum \text{zeros finitos}}{\text{No. Polos finitos} - \text{No. Zeros finitos}}$$

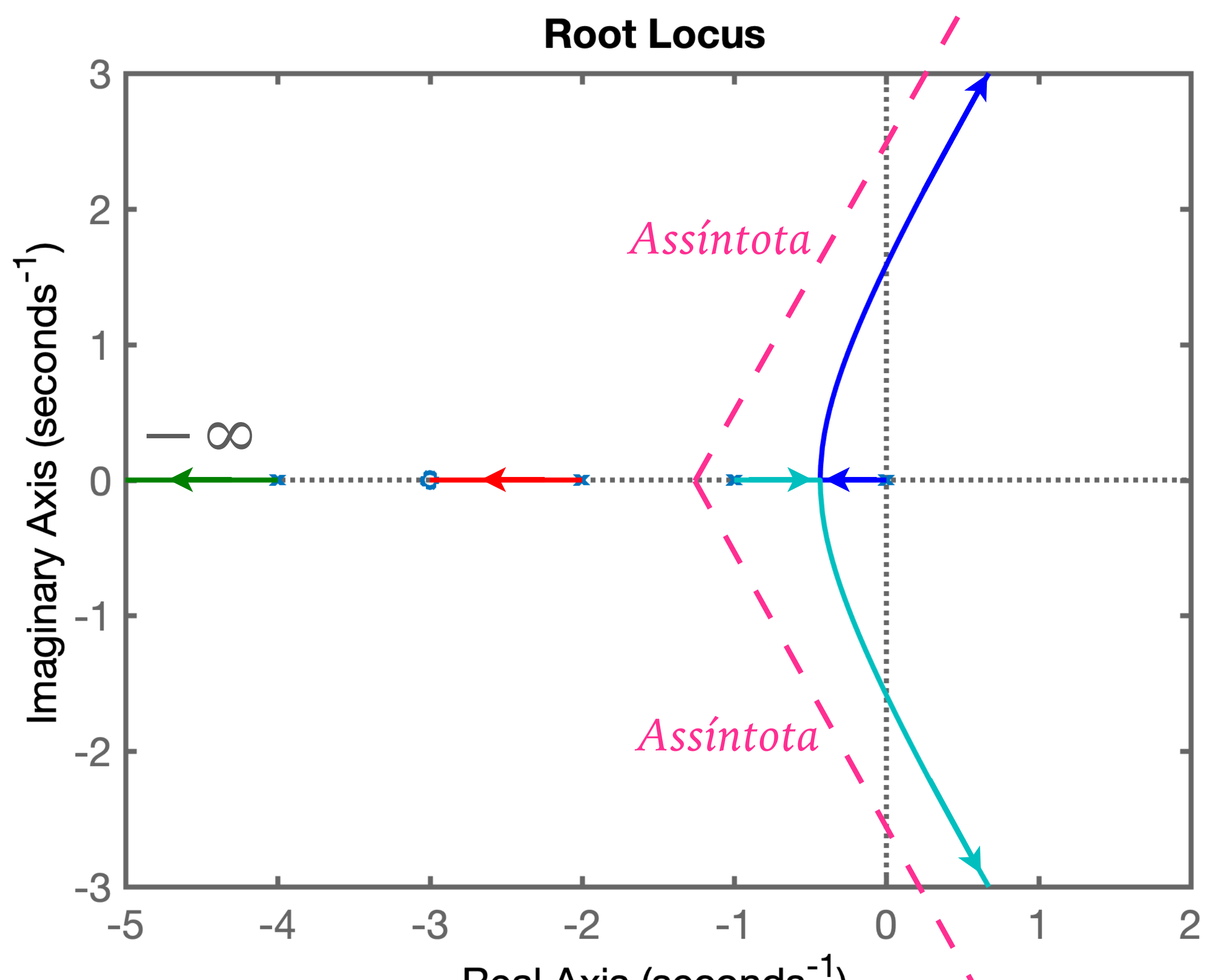


Ângulo de partida das assíntotas:

$$\theta_a = \frac{(2k+1)\cdot 180^o}{\text{No. Polos finitos} - \text{No. Zeros finitos}}, \quad \text{onde: } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

$$\sigma_a = \frac{(-1-2-4)-(-3)}{4-1} = -\frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned}
\theta_a &= \frac{(2k+1)\cdot 180^o}{4-1} \\
&= \frac{1\cdot 180^o}{3} = 60^o \qquad &, \text{ para } k = 0; \\
&= \frac{3\cdot 180^o}{3} = 0^o \qquad &, \text{ para } k = 1; \\
&= \frac{5\cdot 180^o}{5} = 300^o = -60^o \qquad &, \text{ para } k = 2;
\end{aligned}$$



ALGUNS EXEMPLOS DE RL

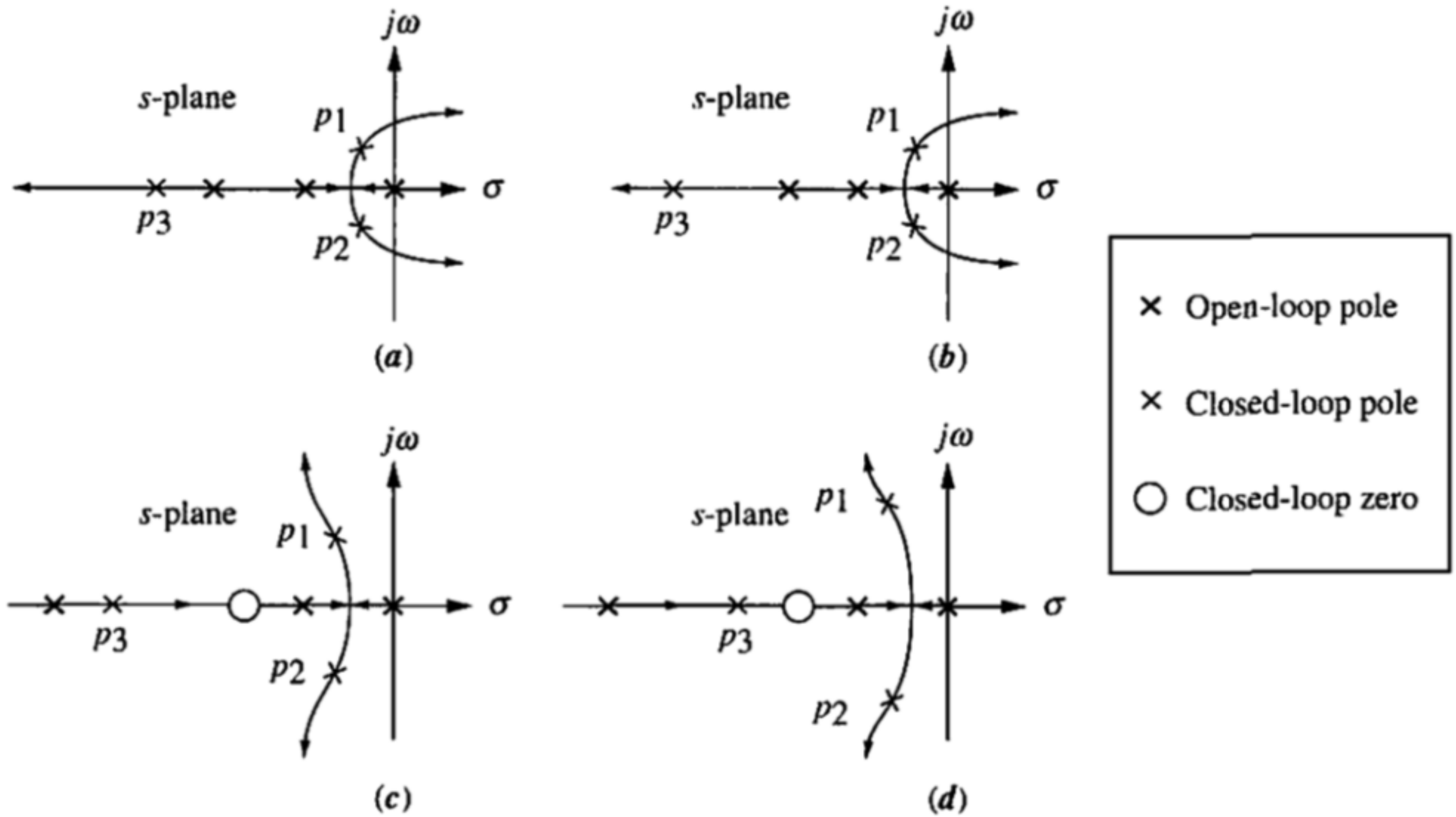


FIGURE 8.20 Making second-order approximations

REVISANDO…

- RL × respostas temporais de sistemas com múltiplos pólos simples reais;
- RL × respostas temporais de sistemas de 2ª-ordem (pólos complexos conjugados);
- Equações típicas prevendo respostas de sistemas de 2ª-ordem com pólos complexos (sub-amortecidos);
- Linhas guias no RL para valores constantes de:

σ	(parte real)
ω	(parte imaginária)
$\%OS$	(overshoot)
ζ	(fator amortecimento)
t_s	(tempo de assentamento)
t_p	(tempo do pico).