TRANSformada ***Z***
(parte I)

Controle Automático III
Prof. Fernando Passold

1. Definição

- Seja $f^*(t)$ o resultado do sinal contínuo $f(t)$ que foi amostrado no tempo:

- Se este sinal foi amostrado de maneira ideal*, $f^*(t)$ pode ser escrito como:

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot \delta(t - kT) = f(t) \cdot \delta_T(t)$$

- Um sampler idela é definido como aquele que abre e fecha o circuito instantâneamente, a cada T segundos, com tempo de duração zero - amostragem por trem de pulsos:

$$\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$$

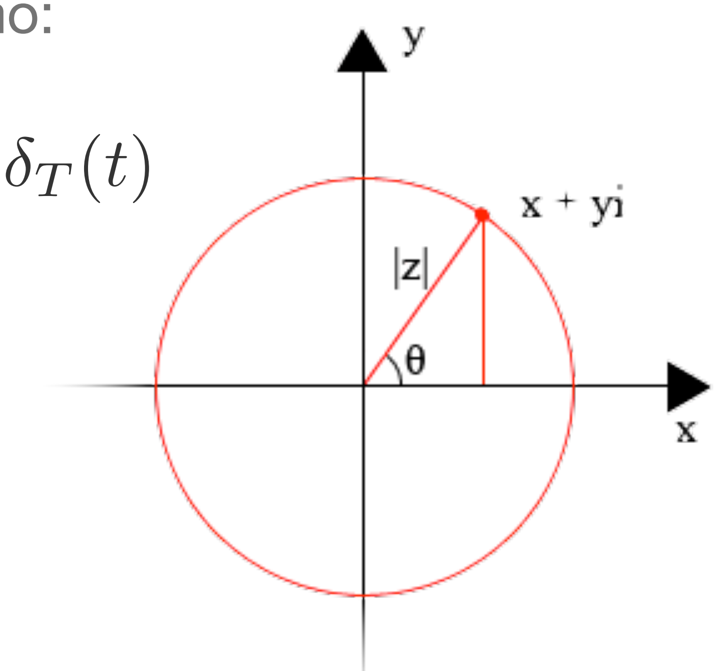
- Observação: estamos assumindo que a amostragem inicie em t=0.

1. Definição

- Seja *f*(t)* o resultado do sinal contínuo *f(t)* que foi amostrado no tempo:

- Se este sinal foi amostrado de maneira ideal*, *f*(t)* pode ser escrito como:

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\cdot\delta(t-kT) = f(t)\cdot\delta_T(t)$$



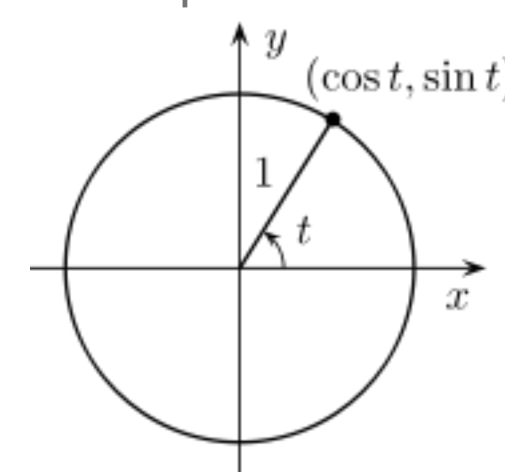
- A transformada de Laplace da função *f*(t)* é dada por:

$$\mathscr{L}\{f^*(t)\} = F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\cdot e^{-T\,s}$$

- Note que o resultado contêm o termo e^{-Ts} que diferente da maioria das outras funções de sistemas com variáveis contínuas, não é uma função racional de s. Este termo gera dificuldades em operações posteriores em que serão necessárias transformadas inversas de Laplace!

Quando $s \to z$: plano cartesiano $(x, y) \to$ coordenadas polares $(1, \theta)$.

Note: $p = e^{j\,\theta} = \underbrace{\cos(\theta)}_{\Re\{p\}} + \underbrace{j\sin(\theta)}_{\Im\{p\}} = x + jy$



$$p = e^{j\,\theta} = \underbrace{\cos(\theta)}_{\Re\{p\}} + \underbrace{j\,\sin(f)}_{\Im\{p\}} = x + jy$$

1. Definição

- Seja $f^*(t)$ o resultado do sinal contínuo $f(t)$ que foi amostrado no tempo:

- Se este sinal foi amostrado de maneira ideal*, $f^*(t)$ pode ser escrito como:

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot \delta(t - kT) = f(t) \cdot \delta_T(t)$$

- A transformada de Laplace da função $f^*(t)$ é dada por:

$$\mathscr{L}\{f^*(t)\} = F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot e^{-T\,s}$$

- Note que o resultado contêm o termo e^{-Ts} que diferente da maioria das outras funções de sistemas com variáveis contínuas, não é uma função racional de s. Este termo gera dificuldades em operações posteriores em que serão necessárias transformadas inversas de Laplace!

- Por isto é desejável transformar a função irracional $F^*(s)$ numa função racional, digamos $F(z)$ através da transformação de uma variáve; complexa em s em outra variável complexa z.

$$p = e^{j\,\theta} = \underbrace{\cos(\theta)}_{\Re\{p\}} + \underbrace{j\sin(f)}_{\Im\{p\}} = x + jy$$

1. Definição

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\cdot\delta(t-kT) = f(t)\cdot\delta_T(t)$$

$$\mathscr{L}\left\{f^*(t)\right\} = F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\cdot e^{-T\,s}$$

- Uma escolha óbvia para esta transformação (s --> z) é: $z = e^{T\,s}$
- Resolvendo esta equação de volta para s, resulta em: $s = \dfrac{1}{T}\ln z$
- Nesta duas últimas equações, *T* é o período de amostragem (em segundos) e *z* a variável complexa cujas componentes real e imaginária estão relacionadas com a variável *s* da seguinte forma:

$$\mathbb{R}\{z\} = e^{T\sigma}\cos\omega T$$

$$\mathbb{I}\{z\} = e^{T\sigma}\sin\omega T$$

- Lembrando que: $s = \omega + j\omega$
- Assim: $$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\,z^{-k}$$

$$p = e^{j\,\theta} = \underbrace{\cos(\theta)}_{\Re\{p\}} + j\underbrace{\sin(f)}_{\Im\{p\}} = x + jy$$

1. Definição

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\cdot\delta(t-kT) = f(t)\cdot\delta_T(t)$$

$$\mathscr{L}\left\{f^*(t)\right\} = F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\cdot e^{-T\,s}$$

- Uma escolha óbvia para esta transformação (
- Resolvendo esta equação de volta para s, res
- Nesta duas últimas equações, *T* é o período c cujas componentes real e imaginária estão re

$$\mathbb{R}\{z\} =$$

$$\mathbb{I}\{z\} = e^{T\sigma}\sin\omega T$$

- Lembrando que: $s = \omega + j\omega$
- Assim: $$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\,z^{-k}$$

Note que:

$$\mathcal{Z}\left\{f(kT)\right\} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}$$

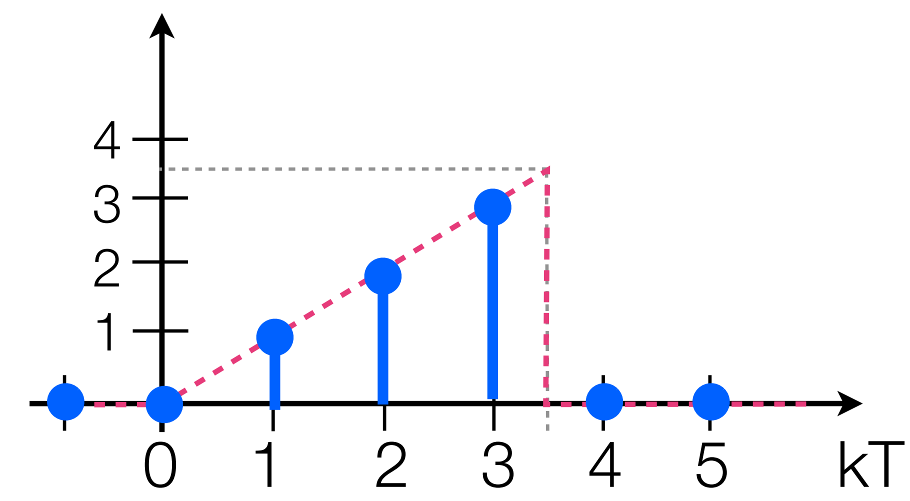
$$F(z) = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \ldots + f(kT)z^{-k} + \ldots$$

Exemplo_1) Transformada Z de um sinal...

- Suponha o sinal definido abaixo:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \forall \quad t < 0 \\ t, & \forall \quad 0 \le t < 3,5 \\ 0, & \forall \quad t \ge 3,5 \end{cases}$$

De posse destes dados obtemos:



- e que T=1 segundo. Obtenha a F(z):

- Temos que:

$$\left.\begin{array}{rcl} f(0) & = & 0 \\ f(1) & = & 1 \\ f(2) & = & 2 \\ f(3) & = & 3 \\ f(4) & = & 0 \\ & \vdots & \\ f(nT) & = & 0, n > 3 \end{array}\right\}$$

$$F(z) = 0z^0 + 1z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 0 \cdot z^{-4} + \ldots$$
$$F(z) = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3}$$
$$F(z) = z^{-1}\left(1 + 2z^{-1} + 3z^{-1}\right)$$

Repare que este é um caso de uma função limitada no tempo.

Detalhes

$$F(s) = \mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^\infty f(t)\, e^{-s\,t} dt$$

$$F(z) = \mathscr{L}\left\{f^*(t)\right\} = \sum_0^\infty f(kT)\, z^{-k}$$

- Mas:

$$\lim_{T \to 0} F(z) \neq F(s)$$

$$\lim_{T \to 0} f^*(t) = f(t)$$

- Uma vez que $f^*(t)$ representa um trem de pulsos (ponderados) espaçados a T segundos, à medida que T se torna infinitezimalmente menor, o trem de impulsos simplesmente se colapsa num grupo de impulsos em t=0, mas o resultado de maneira nenhuma se parece com $f(t)$.

Limitações da Transformada Z

- Quando se aplica o método da transformada Z, devemos ter em mente as limitações e condições deste método:

- Assumindo um “ideal sampler”, a obtenção da transformada Z de um sinal (função) contínuo no tempo, f(t) é baseada principalmente na amostragem da função por um sampler ideal. O resultado disto é que **a transformada Z, F(z), representa a função f(t) somente nos instantes de amostragem.**

- A transformada Z inversão não é única! Dado F(z), sua transformada inversa fornece somente a solução para f(kT). **Estritamente citando, a solução para f(t) é desconhecida**.

- A exatidão do método depende da magnitude da frequencia de amostragem, ws, ou do período de amostragem T em relação ao componente de maior frequencia contido na função f(t). Se o período de amostragem for muito grande (ou a frequencia de amostragem é muito baixa), a solução da transformada Z pode ser errônea, uma vez que f*(t) não será uma boa representação de f(t).

- É necessário se atentar para o fato de que F(z) foi formada à partir de uma sequencia e assim contêm apenas a informação de f(t) nos pontos de amostragem do sinal.

$$F(z) = \mathscr{L}\left\{f^*(t)\right\} = \sum_{0}^{\infty} f(kT)\, z^{-k}$$

Limitações da Transformada Z

- Quando se aplica o método da transformada Z, devemos ter em mente as limitações e condições deste método:

- Assumindo um "ideal sampler", a obtenção da transformada Z de um sinal (função) contínuo no tempo, f(t) é baseada principalmente na amostragem da função por um sampler ideal. O resultado disto é que **a transformada Z, F(z), representa a função f(t) somente nos instantes de amostragem.**

> Note que a transformada Z está sempre relacinada com uma sequencia de números, uma série que pode ser limitada (convergir) ou ser infinita!

- A transformada … omente a solução para f(k…

- A exatidão do método depende da magnitude da frequencia de amostragem, ws, ou do período de amostragem T em relação ao componente de maior frequencia contido na função f(t). Se o período de amostragem for muito grande (ou a frequencia de amostragem é muito baixa), a solução da transformada Z pode ser errônea, uma vez que f*(t) não será uma boa representação de f(t).

- É necessário se atentar para o fato de que F(z) foi formada à partir de uma sequencia e assim contêm apenas a informação de f(t) nos pontos de amostragem do sinal.

$$F(z) = \mathscr{L}\left\{f^*(t)\right\} = \sum_{0}^{\infty} f(kT)\, z^{-k}$$

Ex2) Transformada Z da função Impulso:

$$\mathcal{Z}\left\{\delta(t)\right\} = \mathcal{Z}\left\{\delta(kT)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = 1$$

Ex3) Transformada Z da função Degrau:

$$\mathcal{Z}\left\{u(t)\right\} = \mathcal{Z}\left\{u^*(T)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = \quad ?$$

Ex3) Transformada Z da função Degrau:

$$\mathcal{Z}\left\{u(t)\right\} = \mathcal{Z}\left\{u^*(T)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = \quad ?$$

- Lembrando de Séries Geométricas, ou P.G.s:

$$S(q) = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n = \sum_{k=0}^{n} a \cdot q^k$$

onde: *a* = 1º termo da série e *q* = razão da série.

- Estamos interessados em descobrir: $\sum_{k=0}^{n} a \cdot q^k$

$$\left.\begin{array}{rcl} S(q) & = & a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n \\ q \cdot S(q) & = & aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n+1} \\ \hline S(q) - qS(q) & = & a - aq^{n+1} \\ S(q)(1-q) & = & a - aq^{n+1} \end{array}\right\} \quad S(q) = \frac{a - aq^{n+1}}{1-q}$$

- Voltando ao nosso caso...

Ex3) Transformada Z da função Degrau:

$$\mathcal{Z}\left\{u(t)\right\} = \mathcal{Z}\left\{u^*(T)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = \quad ?$$

- Lembrando de Séries Geométricas, ou P.G.s:

$$S(q) = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n = \sum_{k=0}^{n} a \cdot q^k \longrightarrow S(q) = \frac{a - aq^{n+1}}{1-q}$$

- Voltando ao nosso caso...

$$\mathcal{Z}\left\{u(t)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1z^{-k} = 1 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + \ldots = \left. \frac{1 - 1(z^{-1})^{n+1}}{1 - z^{-1}} \right|_0^{\infty}$$

- Verificando se a série converge:

$$\mathcal{Z}\left\{u(t)\right\} = \lim_{n \to \infty} \left. \frac{1 - 1(z^{-1})^{n+1}}{1 - z^{-1}} \right|_0^{\infty} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - \overbrace{z^{-n}}^{=0} \cdot 1}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

- Assim: $$\mathcal{Z}\left\{u(t)\right\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad \text{Se } |z| > 1$$

Ex3) Transformada Z da função Degrau:

$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \mathcal{Z}\{u^*(T)\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = \quad ?$$

- Lembrando de Séries Geométricas, ou P.G.s:

$$S(q) = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n = \sum_{k=0}^{n} a \cdot q^k \longrightarrow S(q) = \frac{a - aq^{n+1}}{1-q}$$

- Voltando ao nosso caso...

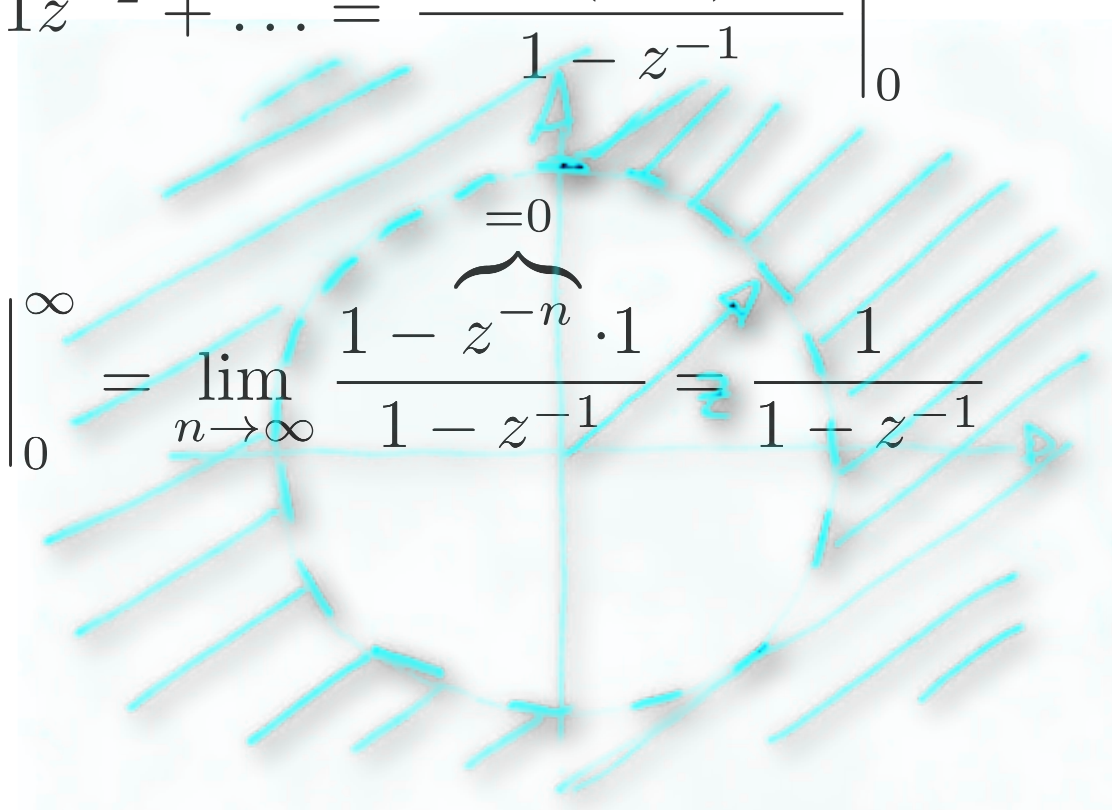
$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1z^{-k} = 1 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + \ldots = \left. \frac{1 - 1(z^{-1})^{n+1}}{1 - z^{-1}} \right|_0^{\infty}$$

- Verificando se a série converge:

$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \lim_{n\to\infty} \left. \frac{1 - 1(z^{-1})^{n+1}}{1 - z^{-1}} \right|_0^{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \overbrace{z^{-n}}^{=0} \cdot 1}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

- Assim:

$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad \text{Se } |z| > 1$$



Ex3) Transformada Z da função Degrau:

$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \mathcal{Z}\{u^*(T)\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = \quad ?$$

Note:

$r^{-n} \Rightarrow \text{exponencial}$

$\text{crescente p/ } r < 1 \therefore \text{Ex.: } \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$

$\text{decrescente p/ } r > 1 \therefore \text{Ex.: } (2)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0,125$

$$S(q) = \frac{a - aq^{n+1}}{1 - q}$$

$$\left.\frac{1 - 1(z^{-1})^{n+1}}{1 - z^{-1}}\right|_0^\infty$$

- Verificando se a série converge:

$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \lim_{n\to\infty} \left.\frac{1 - 1(z^{-1})^{n+1}}{1 - z^{-1}}\right|_0^\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \overbrace{z^{-n}}^{=0} \cdot 1}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

- Assim:

$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad \text{Se } |z| > 1$$

Ex3) Transformada Z da função Degrau:

Adaptando como "regra" geral para uma P.G.:

$$\sum_{n=0}^{\infty} Ax^n = \frac{A}{1-x}, \quad \text{Se } |x| < 1$$

$$\ldots^{k} = \quad ?$$

$$S(q) = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n = \sum_{k=0} a \cdot q^k \longrightarrow S(q) = \frac{a - aq^{n+1}}{1-q}$$

- Voltando ao nosso caso...

$$\mathcal{Z}\left\{u(t)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1z^{-k} = 1 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + \ldots = \left.\frac{1 - 1(z^{-1})^{n+1}}{1 - z^{-1}}\right|_0^{\infty}$$

- Verificando se a série converge:

$$\mathcal{Z}\left\{u(t)\right\} = \lim_{n\to\infty} \left.\frac{1 - 1(z^{-1})^{n+1}}{1 - z^{-1}}\right|_0^{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \overbrace{z^{-n}}^{=0} \cdot 1}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

- Assim:

$$\mathcal{Z}\left\{u(t)\right\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad \text{Se } |z| > 1$$

Ex4) Transformada Z de uma série:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \, z^{-k} = 1 + 2z^{-1} + 4z^{-2} + 8z^{-3} + \ldots = \quad ?$$

$$F(z) = \frac{z}{z-2}$$

Ex5) Transformada Z da função Exponencial:

$$\mathcal{Z}\left\{e^{-a\,t}\right\} = \mathcal{Z}\left\{e^{-a(kT)}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-aT}\cdot z^{-1}\right)^{k} = 1 + e^{-aT}z^{-1} + e^{-2aT}z^{-2} + \ldots + \quad ?$$

$$F(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{1-(\overbrace{e^{-aT}z^{-1}}^{=0})^{n+1}}{1-e^{-aT}z^{-1}} \qquad \therefore \left[\longleftarrow \quad \sum_{k=0}^{n} aq^{k} = S(q) = \frac{a-aq^{n+1}}{1-q}\right]$$

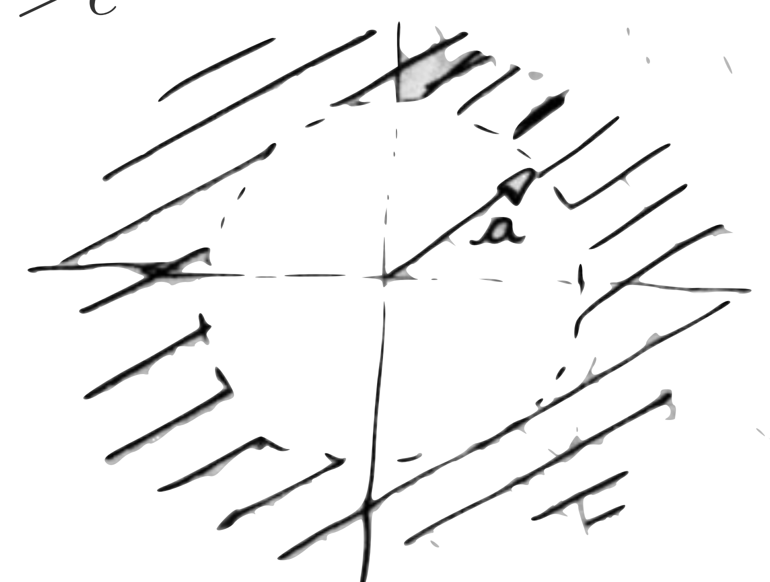
$$F(z) = \frac{z}{z-e^{-aT}}$$

Este limite converge se:

$$\left[\frac{e^{-aT}}{|z|}\right] < 1 \quad \therefore \quad |z| > e^{-aT}$$

Note também que:

$$\mathscr{L}\left\{e^{-at}\right\} = \frac{1}{s+a}$$

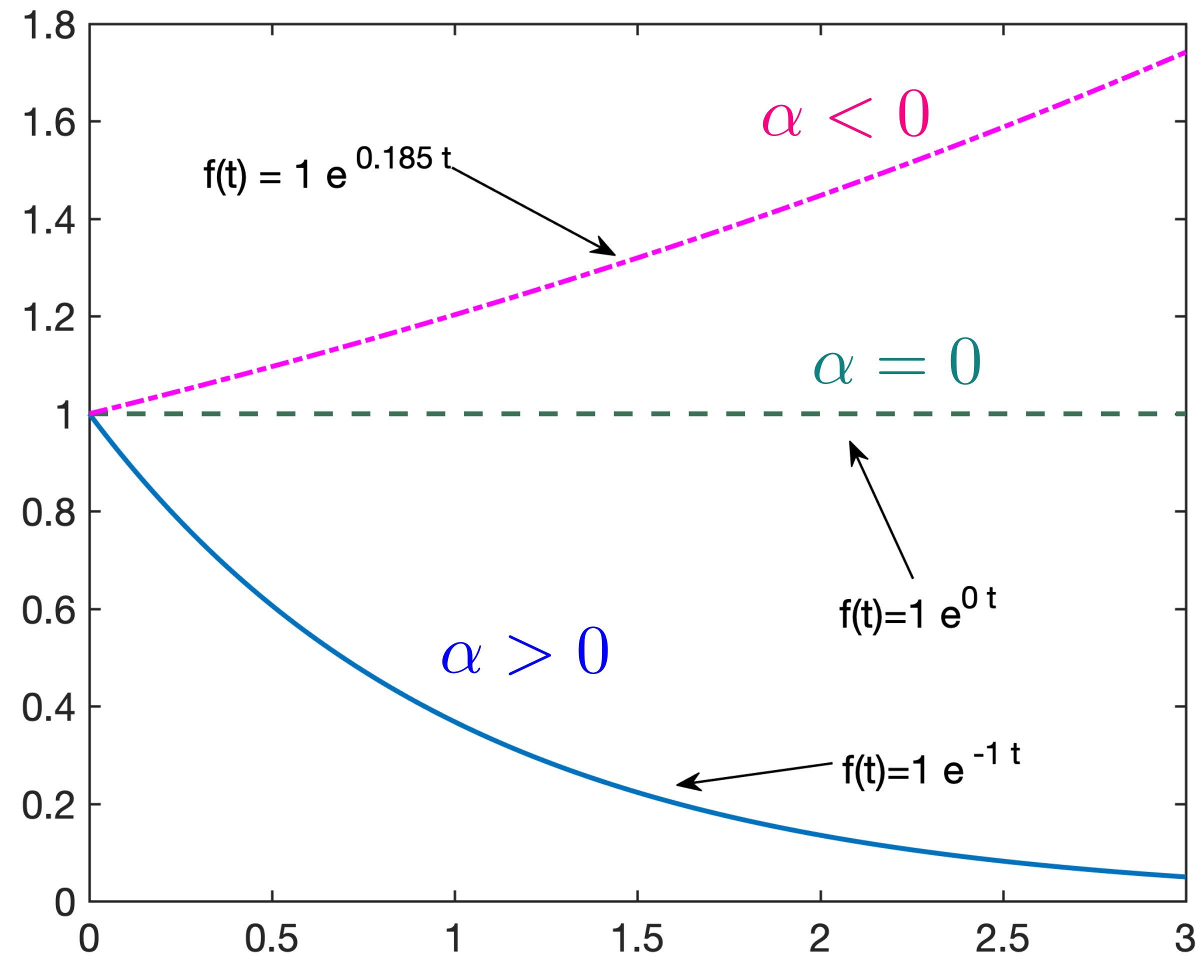


Plano z

Lembrando da função exponencial:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A \cdot e^{-\alpha * t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{A}{s+\alpha}$$



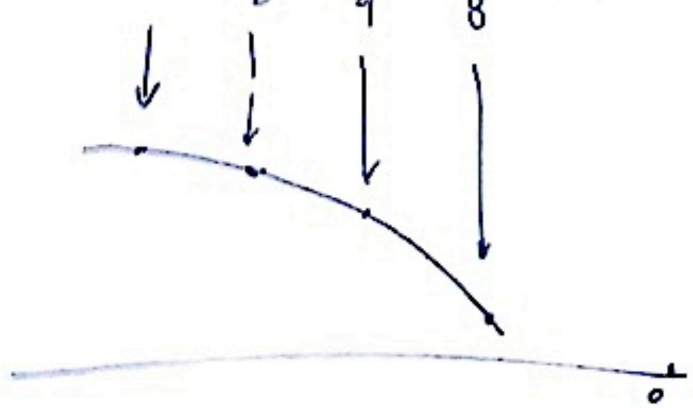

```
>> t=[0:1e-3:3];
>> y1=exp(-1.*t);
>> y2=exp(0.*t);
>> y3=exp(0.185.*t);
>> plot(t,y1, t,y2, t,y3)
```

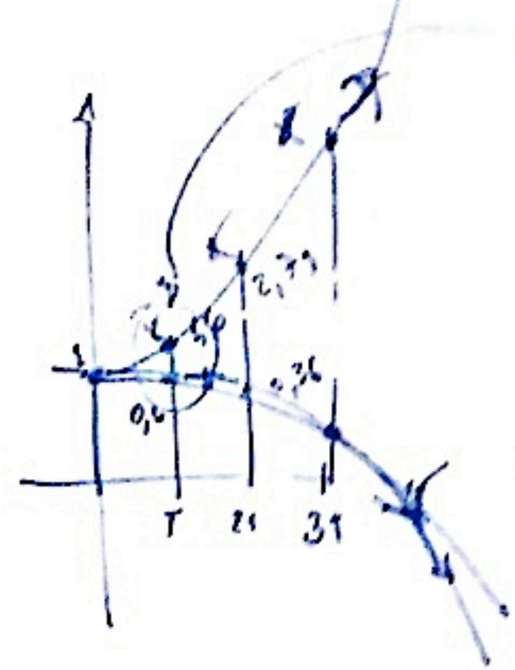
Ex5) Transformada Z da função Exponencial:

$z = 2$

$= 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \dots + ^{-\infty}$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$





e^{aT}

$a = 0,5,\ T = 1 \Rightarrow 1,6487$

$a = -0,5;\ T = 1 \Rightarrow 0,6065$

$a = 0,5;\ T = 2 \Rightarrow 2,718$

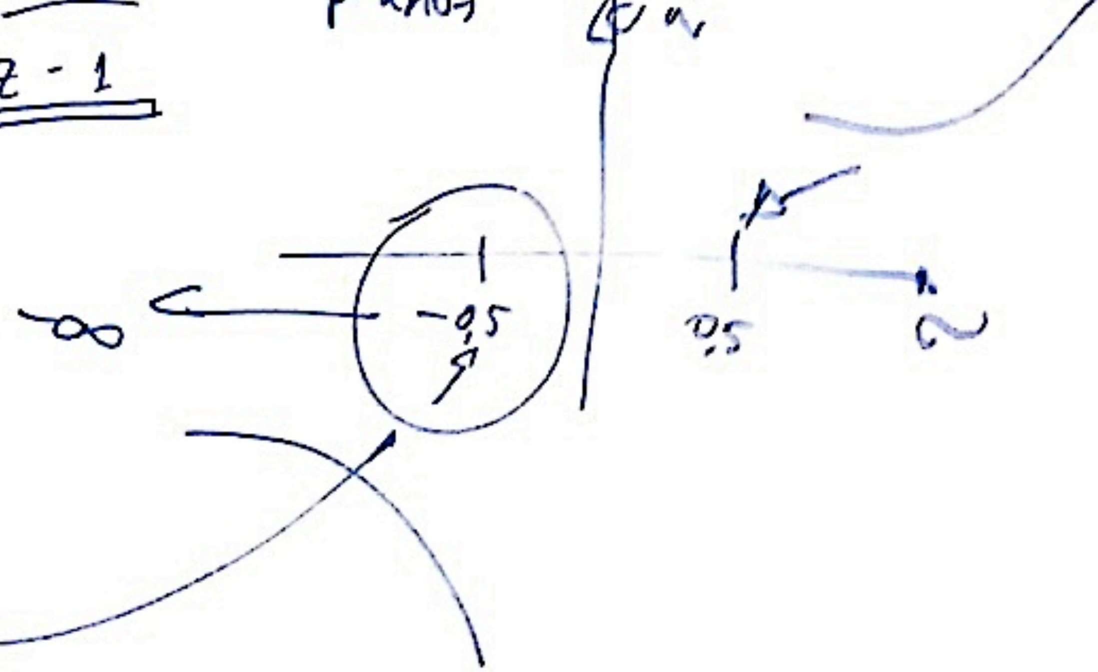
$a = -0,5,\ T = 2 \Rightarrow 0,3678$

$f_s = 1\,Hz$

$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{z^{+1}}{z^{+1}} = \frac{z}{z - 1}$

planos

$\mathcal{L}\{e^{0,5t}\} = \frac{1}{s + 0,5}$



$Z\{e^{-0,5t}\} = \frac{z}{z - 0,6065}$

$T = T_0$

Ex5) Transformada Z da função Exponencial:

Note:

Usando MATLAB:

```
>> t=0:5;
>> y1=exp(-0.5*t);
>> plot(t,y1)
>> y2=exp(0.5*t);
>> plot(t,y2)
>> T=1;
>> p1=exp(-T*0.5)

p1 =

    0.6065

>> k=0:5;
>> z_p1=p1.^k;
```

Comparando os valores gerados:

```
>> [t' y1’] % sistema contínuo

ans =

         0    1.0000
    1.0000    0.6065
    2.0000    0.3679
    3.0000    0.2231
    4.0000    0.1353
    5.0000    0.0821

>> [k' z_p1’] % sist. amostrado

ans =

         0    1.0000
    1.0000    0.6065
    2.0000    0.3679
    3.0000    0.2231
    4.0000    0.1353
    5.0000    0.0821

>>
```

Ex5) Transformada Z da função Exponencial:

Se: $f[kT] = e^{-a\cdot(k\,T)} \quad \therefore \quad F(z) = \dfrac{z}{z - e^{-aT}}$

$$\mathscr{L}\left\{e^{-at}\right\} = \frac{1}{s+a}$$

Se a = 0,5 ➛ Pólo em s = – 0,5

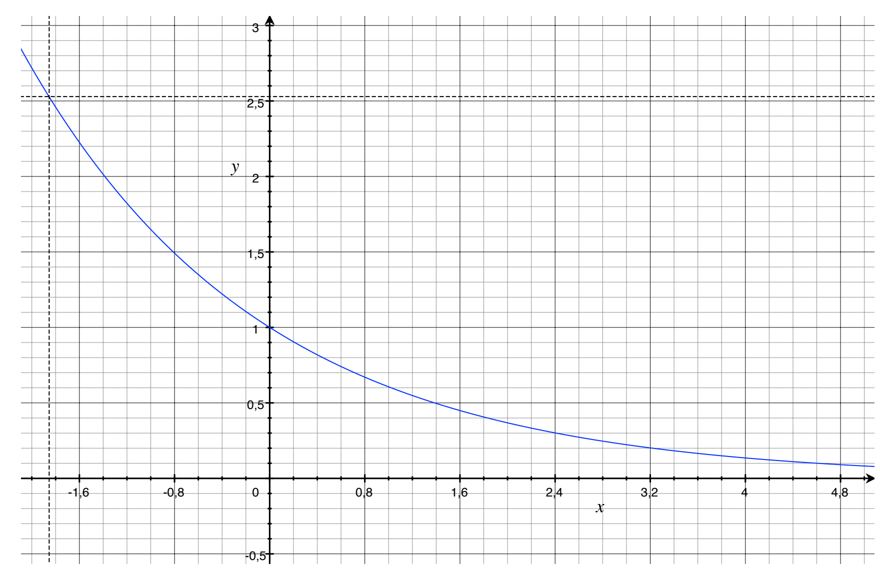
$$F(s) = \frac{1}{1+0,5}\,; \quad a = -0,5$$

T=1,0

$$F(z) = \frac{z}{z - e^{(-0,5\cdot 1,0)}}$$

$$F(z) = \frac{z}{z - 0.6065}$$

Resposta (ao impulso) no tempo:

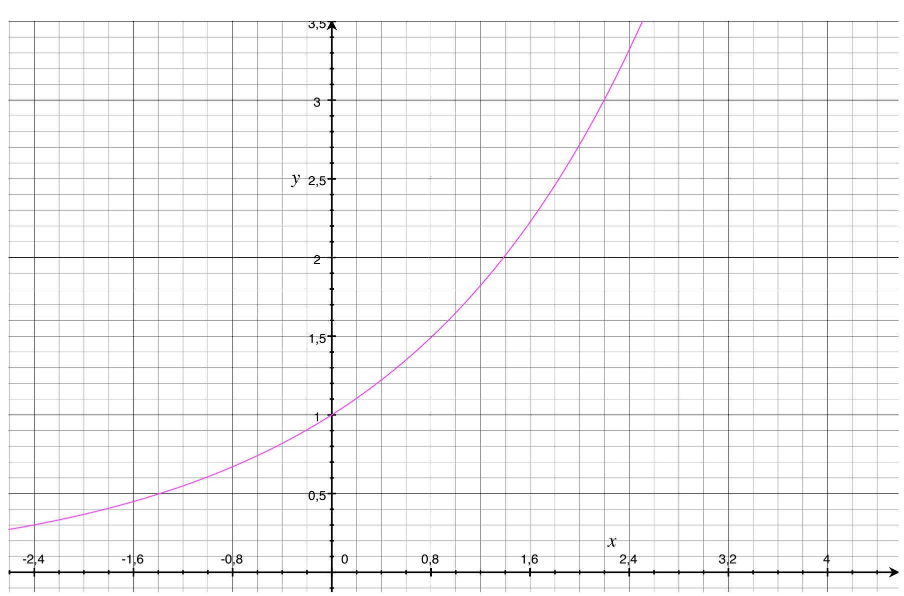


t	f(t)
0	1.0000
1.0000	0.6065
2.0000	0.3679
3.0000	0.2231
4.0000	0.1353
5.0000	0.0821
6.0000	0.0498
7.0000	0.0302
8.0000	0.0183
9.0000	0.0111
10.0000	0.0067

Se entretanto: a = – 0,5

$$F(z) = \frac{z}{z - 1.6487}$$

0	1.0000
1.0000	1.6487
2.0000	2.7183
3.0000	4.4817
4.0000	7.3891
5.0000	12.1825
6.0000	20.0855
7.0000	33.1155
8.0000	54.5982
9.0000	90.0171
10.0000	148.4132



Problemas

1. Esboce o sinal: $y(kT) = 1 - 0,5^k$

2. Note que o sinal anterior: $y(kT)_{k\to\infty} = 1,0$

3. Dada a seguinte relação de pontos, obtenha sua equivalente transformada Z:

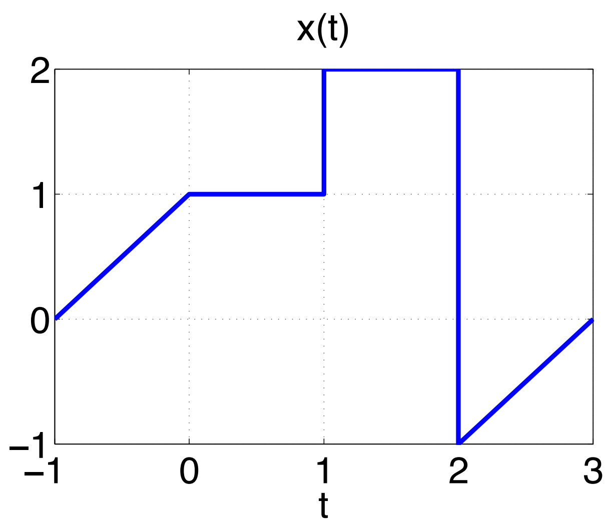
$$\begin{aligned} x(0) &= 5 \\ x(1) &= 4 \\ x(2) &= 3 \\ x(3) &= 2 \\ x(4) &= 1 \\ x(k) &= 0 \quad \forall\, k \geq 5 \end{aligned}$$

4. Dada outra sequencia de pontos, determine sua Y(z):
   Obs.: condição inicial: $y(-1) = 8$

$$\left\{ \begin{aligned} y(0) &= 4 \\ y(1) &= 1 \\ y(2) &= 1 \\ y(3) &= 0,5 \\ &\vdots \\ y(k)_{k\to\infty} &= ? \end{aligned} \right.$$

Problemas

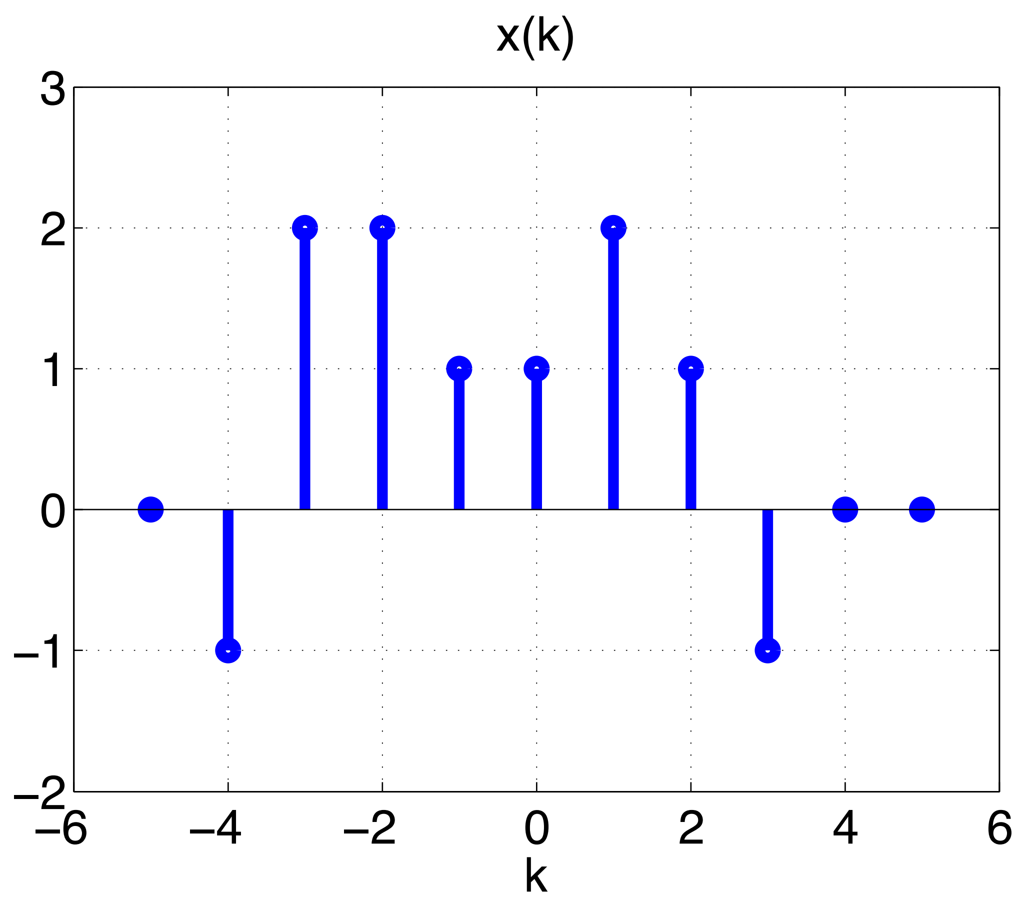
5. Esboce os sinais resultantes para:



$$a) \quad x(t-2) \qquad \leftarrow \text{Deslocamento no tempo}$$

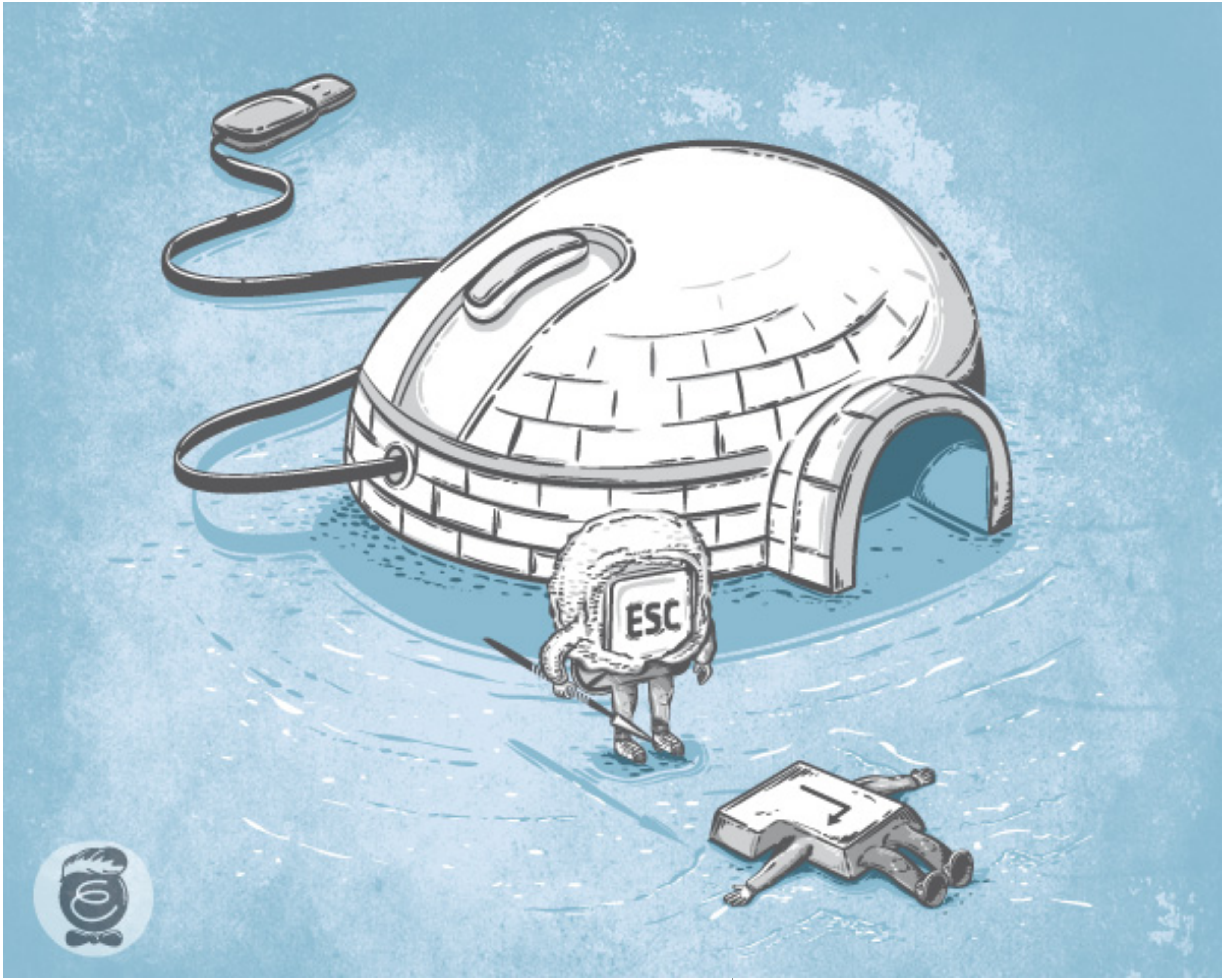
$$b) \quad x(1-t)$$

$$c) \quad x(-t+1) \qquad \leftarrow \text{Reflexão de sinal + Deslocamento no tempo}$$



$$x_E(k) = \frac{1}{2}\{x(k) + x(-k)\}$$

$$x_O(k) = \frac{1}{2}\{x(k) - x(-k)\}$$


ESC