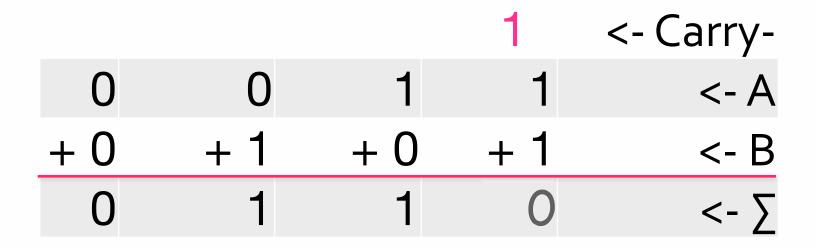
Aritmética Digital



• Exemplos: $\Sigma = A + B$



Problema: útil, mas só posso realizar somas envolvendo palavras de 1-bit. E mesmo assim, pode ser gerado um sinal "extra", o bit de carry-out. Note que apesar de manipular palavras de 1-bit, gera até 2-bits de saída.

• Exemplos: $\Sigma = A + B$ << palavras de 8-bits

Decimal:	Hex:	Binário:	Obs:
10	1Y	11_1	<- bits de Carry-
28	1C	0001 1100	<- A
+ 22	+16	+0001 0110	<- B
50	32	0011 0010	<- Σ

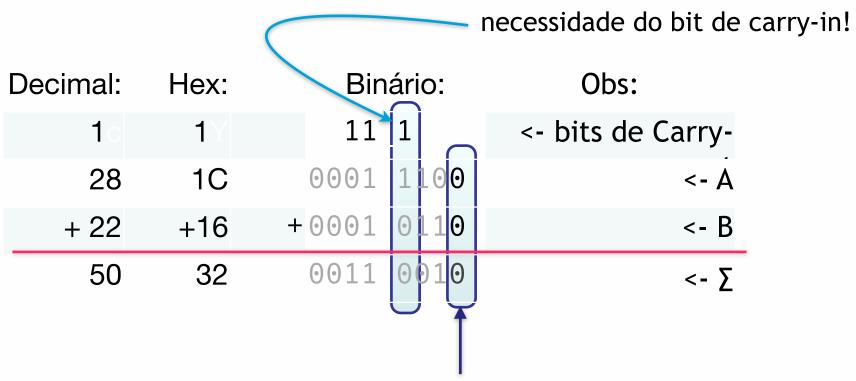
• Exemplos: $\Sigma = A + B$ << palavras de 8-bits

Decimal:	Hex:	Binário:	Obs:
10	1Y	11 1	<- bits de Carry-
28	1C	0001 1100	<- Å
+ 22	+16	+0001 0110	<- B
50	32	0011 0010	<- Σ

Repare: Aqui entra o "somador parcial" (não trabalha com bit de carry-in).

mas...

• Exemplos:
$$\Sigma = A + B$$
 << palavras de 8-bits:



Repare: Aqui entra o "somador parcial" (não trabalha com bit de carry-in).
mas...

Prof. Fernando Passold

Somador binário parcial (semi-somador):

• Projeto do circuito:

$$\begin{array}{c|c} & A \\ + & B \\ \hline C_{OUT} & \Sigma \end{array}$$

Bit de "vai-um" (carry-out)

Entradas: A y B Saídas: Σ e C_{OUT}

Entradas		Saídas		
Α	В	COUT	Σ	
0	0	0	0	
0	1	0	1	
1	0	0	1	
1	1	1	0	

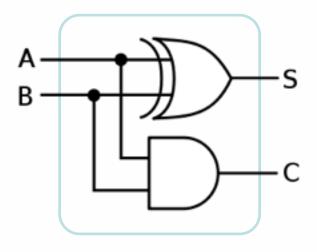
Somador binário parcial (semi-somador):

• Circuito:

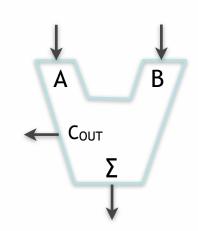
Entradas: A y B Salidas: Σ y C_{OUT}

$$\Sigma = A \oplus B$$

$$C_{OUT} = A \cdot B$$

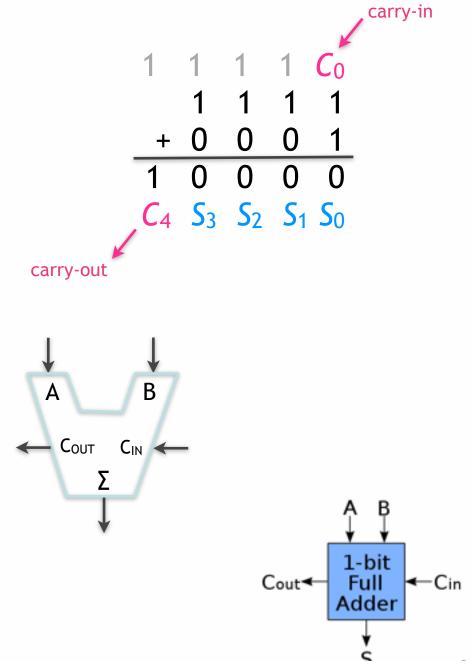


Entradas		Salidas		
Α	В	COUT	Σ	
0	0	0	0	
0	1	0	1	
1	0	0	1	
1	1	1	0	



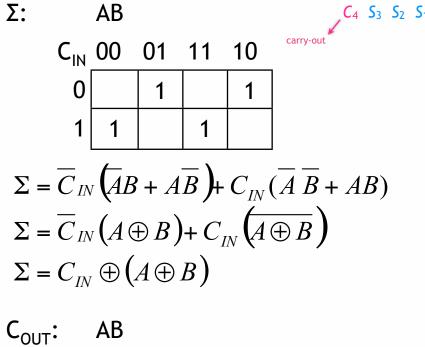
Projeto:

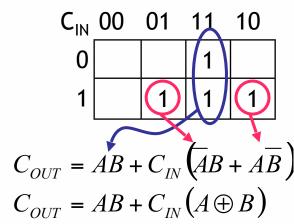
Е	intradas	Salidas		
C _{IN}	Α	В	C_OUT	Σ
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1



Projeto:

E	intrada	Salidas		
C _{IN}	Α	В	C_OUT	Σ
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1



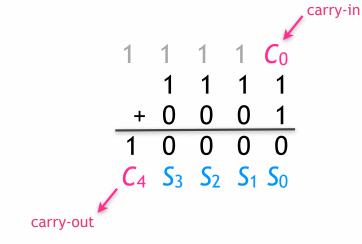


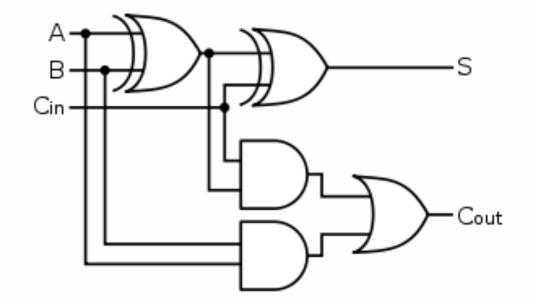
Projeto:

E	intradas	Salidas		
CIN	Α	В	C _{OUT}	Σ
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

$$\Sigma = (A \oplus B) \oplus C_{IN}$$

$$C_{OUT} = AB + (A \oplus B)C_{IN}$$



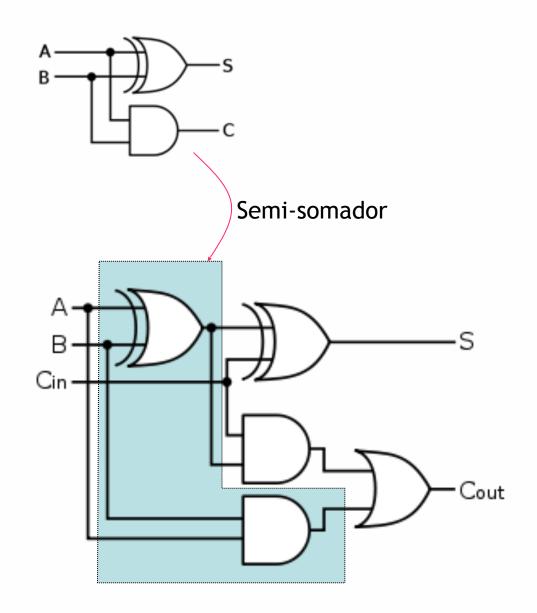


Projeto:

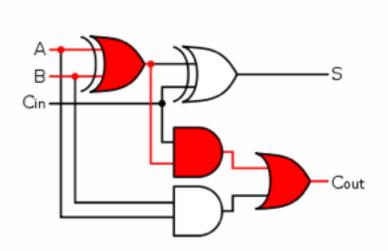
E	intrada	Salidas		
CIN	Α	В	C _{OUT}	Σ
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

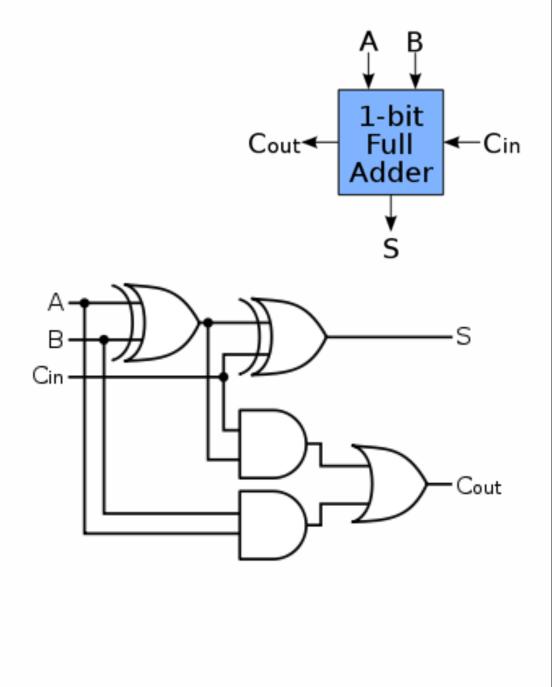
$$\Sigma = (A \oplus B) \oplus C_{IN}$$

$$C_{OUT} = AB + (A \oplus B)C_{IN}$$



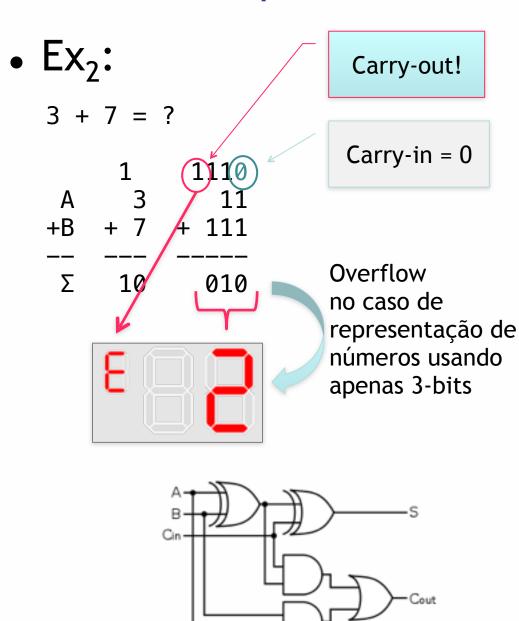
• Ex₁:



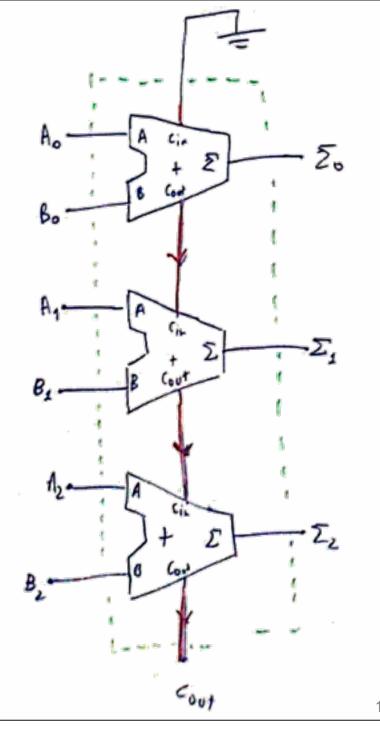


Prof. Fernando Passold

Sistemas Digitales



Sistemas Digitales



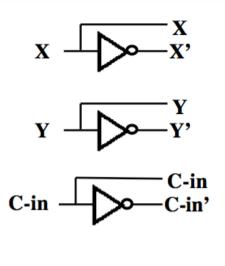
Prof. Fernando Passold

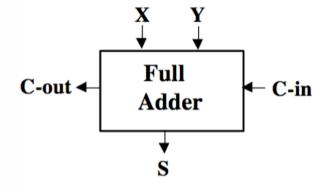
Ex₂: Somador Completo Usando AND-OR

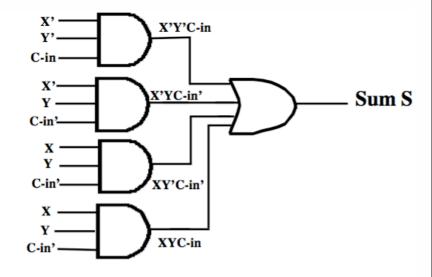
$$\Sigma = (A \oplus B) \oplus C_{IN}$$

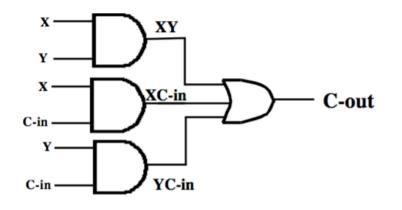
$$C_{OUT} = AB + (A \oplus B)C_{IN}$$

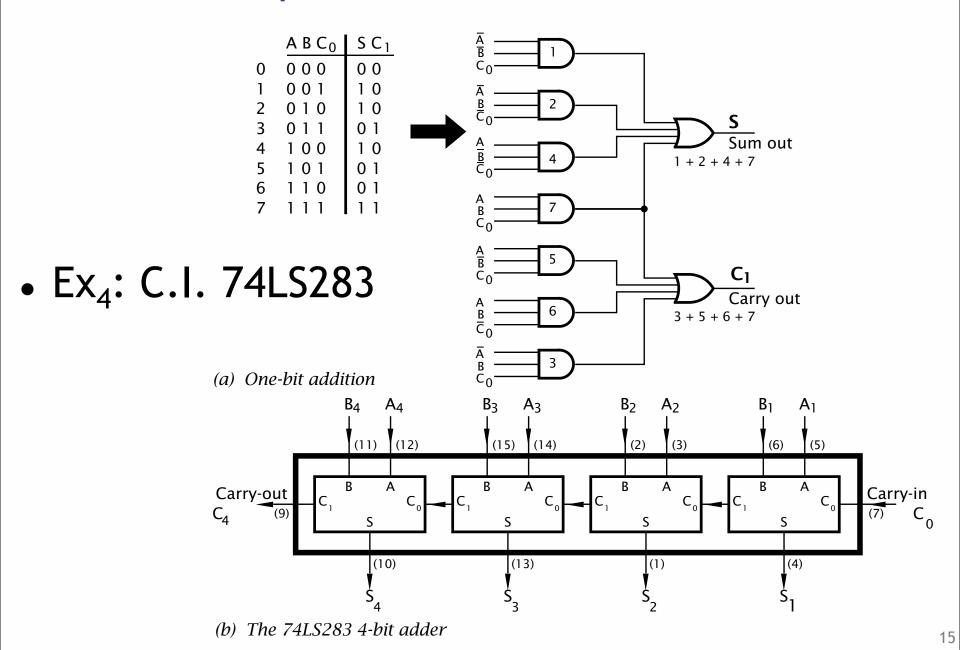
Е	ntrada	s	Salidas		
CIN	IN A B		C _{OUT}	Σ	
0	0	0	0	0	
0	0	1	0	1	
0	1	0	0	1	
0	1	1	1	0	
1	0	0	0	1	
1	0	1	1	0	
1	1	0	1	0	
1	1	1	1	1	

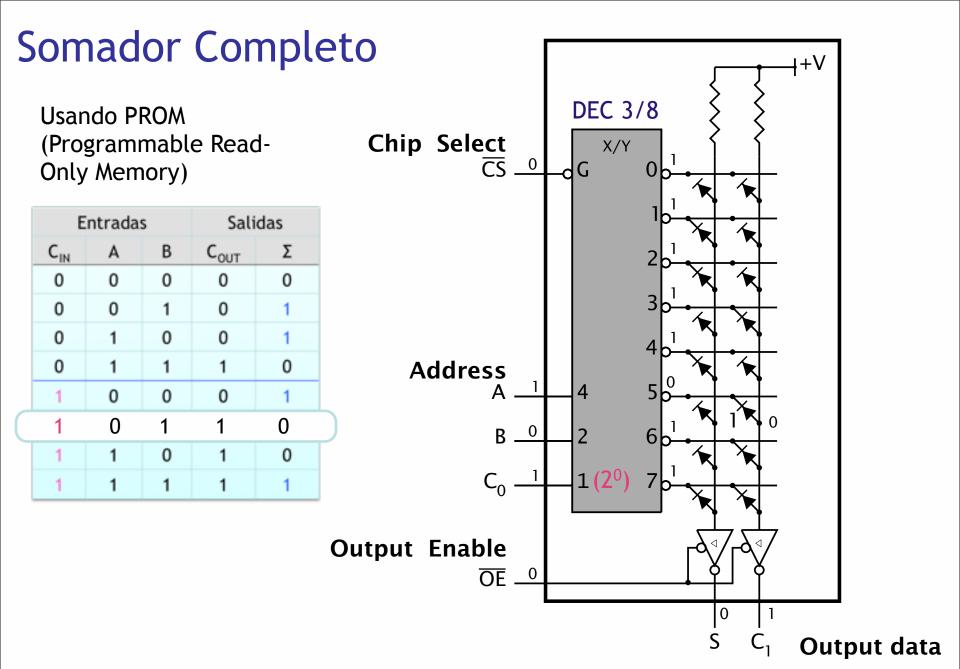












Somador Completo (ripple-carry-adder)

Problema:

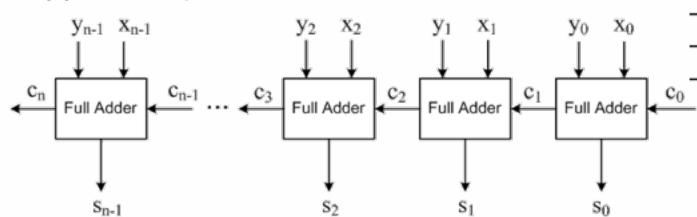
Atrasos de propagação de sinais, principalmente dos "carryout" (estágios internos):

Tempo total do atraso = $2 \text{ n}\Delta = 8\Delta = \text{atraso de 8 portas}$ onde: $\Delta = \text{atraso de propagação de 1 porta; } 2\Delta \text{ é o atraso}$ associado com o tempo que cada somador completo leva para gerar seu carry-out.

Note que a saída de um somador completo com respeito ao bit na posição j é dado por:

$$S_j = X_j \oplus Y_j \oplus C_j$$
$$C_{j+1} = X_j \cdot Y_j + X_j \cdot C_j + Y_j \cdot C_j$$

Ripple-Carry-Adder:

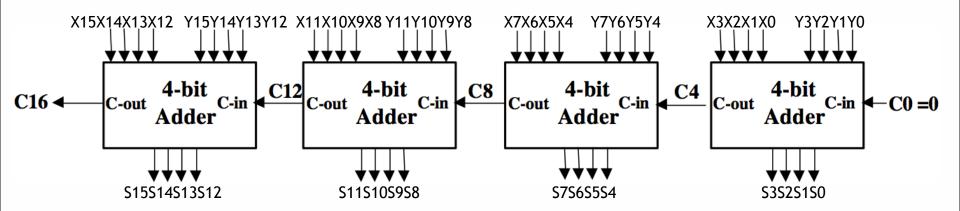


Prof. Fernando Passold

Sistemas Digitales

Somador Completo (ripple-carry-adder)

- Exemplo: Somador de 16-bits, usando 4 x Somadores de 4-bits
- Soma duas palavras de entrada de 16-bits: X (bits X0 até X15) e Y (bits Y0 até Y15) produzindo o resultado de 16-bits S (bits S0 até S15) e 1-bit de Carry-Out na posição mais significativa: C16.



- Atraso total de propagação = 4 x propagação de cada somador de 4-bits;
 - $= 4 \times 2 \text{ n}\Delta = 4 \times 8\Delta = 32\Delta;$
 - = atraso de 32 portas!

Carry Look-Ahead Adders, ou

Somadores Baseados em Antecipação do Sinal de Carry

- Desvantagem do ripple carry adder: o atraso na propagação do sinal de carry (2 $n\Delta$) aumenta conforme aumenta o tamanho do somador (n-bits).
- Somadores do tipo "carry look adders" usam um método diferente para criar os bits de carry necessários para cada somador completo com a menor constante de atraso sendo igual ao atraso de 3 portas.
- O carry-out, C_{out} de cada somador completo na posição i ou C_{j+1} é dado por:

$$C_{out} = C_{i+1} = X_i \cdot Y_i + (X_i + Y_i) \cdot C_i$$

Definindo que:

 $G_i = X_i \cdot Y_i =$ Função geradora de carry da posição i (atraso de 1 porta) Note que se $G_i = 1$, C_{i+1} será gerado independente do valor de C_j $P_i = X_i \cdot Y_i =$ Função propagadora de carry da posição i (1 porta de atraso) Note que se $P_i = 1$, C_i será propagado até C_{i+1}

• Usando função geradora de carry G_i e a função propagadora de carry P_i , então C_{i+1} pode ser escrito como:

$$C_{out} = C_{i+1} = G_i + P_i \cdot C_i$$

• Para eliminar o ripple de carry, o termo C_i é recursivamente expandido e multiplicado, resultando numa expressão AND-OR para cada C_{i+1} .

Carry Look-Ahead Adders, ou

Somadores Baseados em Antecipação do Sinal de Carry

• Para um somador carry look-ahead de 4-bits, as expressões expandidas associadas com todos os bits de carry são dadas por:

$$C_{i+1} = \underbrace{X_i \cdot Y_i}_{G_i} + \underbrace{(X_i + Y_i)}_{P_i} \cdot C_i$$

$$C_1 = G_0 + P_0 \cdot C_0$$

$$C_2 = G_1 + P_1 \cdot C_1 = G_1 + P_1 \cdot G_0 + P_1 \cdot P_0 \cdot C_0$$

$$C_3 = G_2 + P_2 \cdot C_2 = G_2 + P_2 \cdot G_1 + P_2 \cdot P_1 \cdot G_0 + P_2 \cdot P_1 \cdot P_0 \cdot C_0$$

• Os circuitos adicionais necessários para implementar as expressões são usualmente referencidas como a lógica do carry look-ahead.

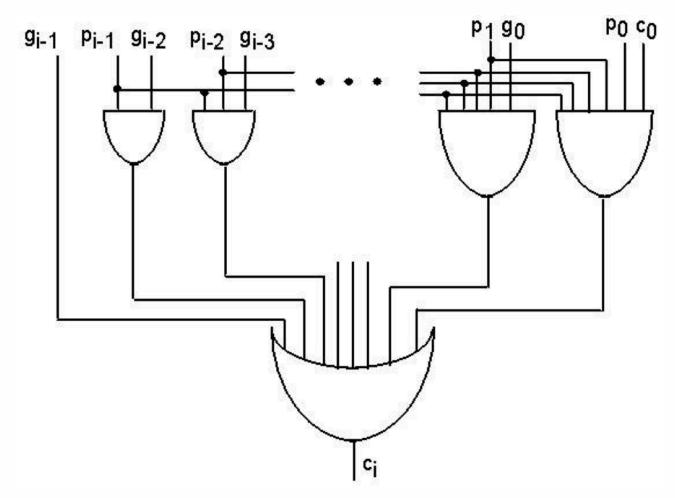
 $C_4 = G_3 + P_3 \cdot G_2 + P_3 \cdot P_2 \cdot G_1 + P_3 \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot G_0 + P_3 \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot P_0 \cdot C_0$

• Usando a lógica de carry-ahead, todas os bits de carry estão disponíveis depois do atraso de propagação de 3 portas, independente do tamanho do somador.

Carry Look-Ahead Adders, ou

Somadores Baseados em Antecipação do Sinal de Carry

• Circuito:

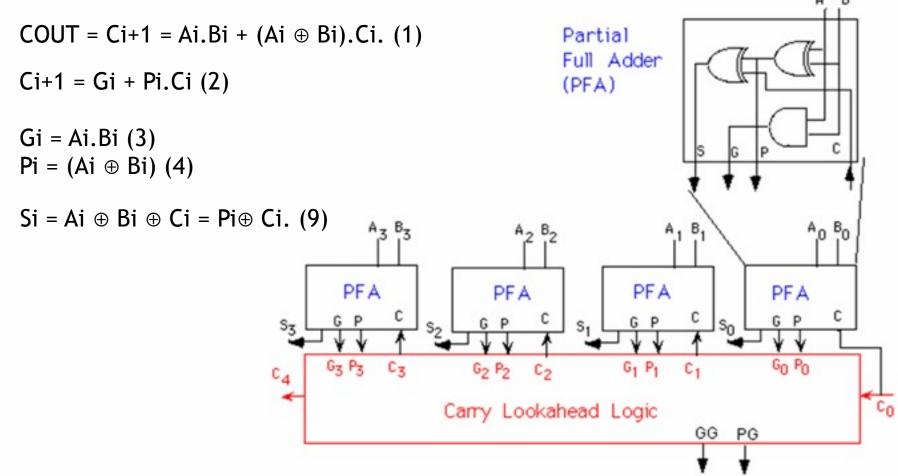


$$C_i = G_{i-1} + P_{i-1} G_{i-2} + \ldots + P_{i-1} P_{i-2} \cdots P_1 G_0 + P_{i-1} P_{i-2} \cdots P_0 C_0$$

+ Ref. sobre Somadores de Carry Antecipado (opcional):

• Lab 3) Carry-Look-Ahed Adder (University of Pensylvania) Dispobible en 25/11/2008:

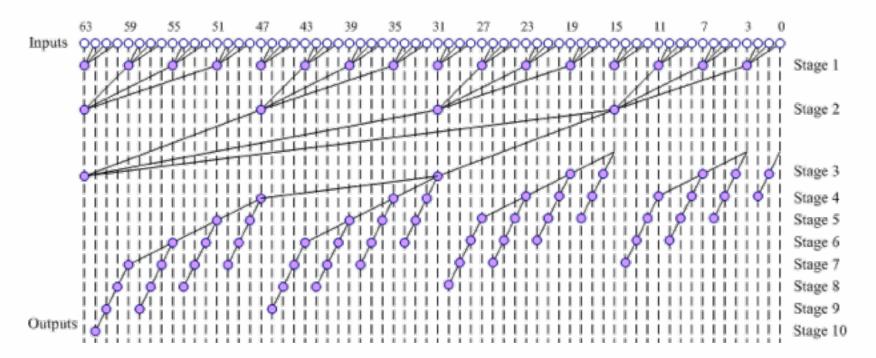
http://www.seas.upenn.edu/~ese201/syll.html



Prof. Fernando Passold

Sistemas Digitales

- + Ref. sobre Somadores de Carry Antecipado (opcional):
 - Hardware algorithms for arithmetic modules (httml
 25/11/2008) Trata de Ripple Carry, Paraller prefix adders, conditional sum adder, fixed block size carry skip adder, variable block size carry skip adder)



Introdução

 Como representar números com sinal no sistema binário de numeração?

- 3 opções:
 - Notação sinal-magnitude;
 - Notação Complemento 1;
 - Notação Complemento 2.

1) Formato Sinal-Magnitude

Exemplos:

No formato sinal-magnitude um número negativo possui os mesmos bits de magnitude que o correspondente número positivo, mas o bit de sinal é um "1" no lugar de um "0".

1) Formato Sinal-Magnitude

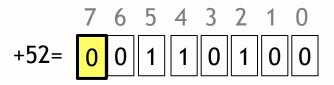
• Problemas:

-52=
$$\begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

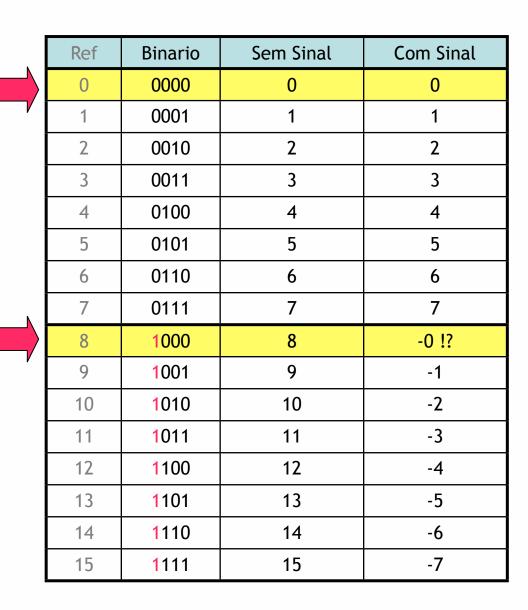
Ref	Binario	Sem Sinal	Com Sinal
0	0000	0	0
1	0001	1	1
2	0010	2	2
3	0011	3	3
4	0100	4	4
5	0101	5	5
6	0110	6	6
7	0111	7	7
8	1000	8	-0
9	1001	9	-1
10	1 010	10	-2
11	1 011	11	-3
12	1100	12	-4
13	1 101	13	-5
14	1 110	14	-6
15	1 111	15	-7

1) Formato Sinal-Magnitude

• Problemas:



-52=
$$\begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Exemplo:

No formato do complemento 1, um numero negativo é o complemento a 1 do correspondente número positivo.

• Problemas:

-52=
$$\begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ref	Binario	com Sinal	Sinal-Magnitude	Complemento-1
0	0000	0	0	0
1	0001	1	1	1
2	0010	2	2	2
3	0011	3	3	3
4	0100	4	4	4
5	0101	5	5	5
6	0110	6	6	6
7	0111	7	7	7
8	1000	8	-0	-7
9	1001	9	-1	-6
10	1010	10	-2	-5
11	1011	11	-3	-4
12	1100	12	-4	-3
13	1101	13	-5	-2
14	1 110	14	-6	-1
15	1111	15	-7	-0

• Problemas:



	7	6	5	4	3	2	1	0
+52=	0	0	1	1	0	1	0	0

Ref	Binario	sem Sinal	Sinal-Magnitude	Complemento-1
0	0000	0	0	0
1	0001	1	1	1
2	0010	2	2	2
3	0011	3	3	3
4	0100	4	4	4
5	0101	5	5	5
6	0110	6	6	6
7	0111	7	7	7
8	1000	8	-0	-7
9	1001	9	-1	-6
10	1 010	10	-2	-5
11	1 011	11	-3	-4
12	1 100	12	-4	-3
13	1 101	13	-5	-2
14	1 110	14	-6	-1
15	1111	15	-7	-0 !?



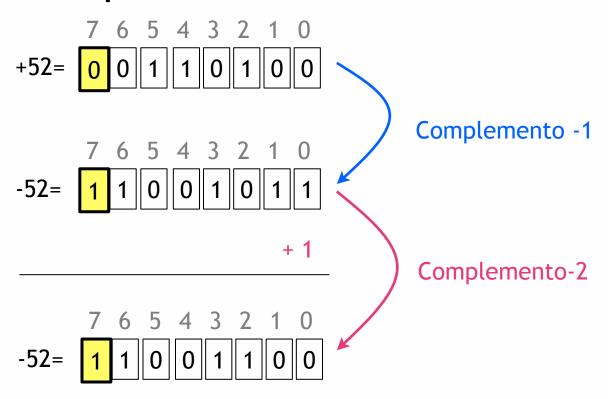
Problemas:

Para somar dois números neste sistema, se realiza uma soma convencional, mas se faz necessário voltar a somar o bit de carry-out (se ele foi ativado na primeira soma) para completar a soma final.

O exemplo acima demostra esta necesidade:

Considere o caso da soma de -1 (11111110) com +2 (00000010).

Exemplo:

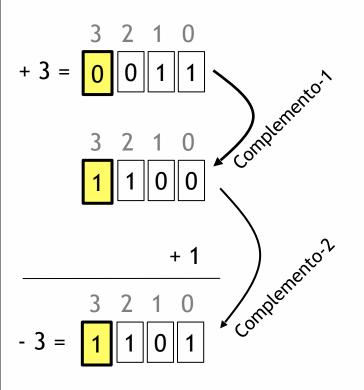


No formato do complemento-2, um número negativo é resultado do complemento do correspondente número positivo acrescido da soma de +1.

Exemplo para 4-bits:

Ref	Binario	sem Sinal	Sinal-	Comple-	Comple-
			Magnitude	Mento-1	Ment- 2
0	0000	0	0	0	0
1	0001	1	1	1	1
2	0010	2	2	2	2
3	0011	3	3	3	3
4	0100	4	4	4	4
5	0101	5	5	5	5
6	0110	6	6	6	6
7	0111	7	7	7	7
8	1000	8	-0	-7	-8
9	1 001	9	-1	-6	-7
10	1 010	10	-2	-5	-6
11	1 011	11	-3	-4	-5
12	1 100	12	-4	-3	-4
13	1 101	13	-5	-2	-3
14	1 110	14	-6	-1	-2
15	1 111	15	-7	-0	-1

• Exemplo:



Ref	Binario	sem Sinal	Sinal- Magnitude	Comple- Mento-1	Comple- Ment- 2
0	0000	0	0	0	0
1	0001	1	1	1	1
2	0010	2	2	2	2
3	0011	3	3	3	3
4	0100	4	4	4	4
5	0101	5	5	5	5
6	0110	6	6	6	6
7	0111	7	7	7	7
8	1000	8	-0	-7	-8
9	1 001	9	-1	-6	-7
10	1 010	10	-2	-5	-6
11	1 011	11	-3	-4	-5
12	1 100	12	-4	-3	-4
13	1 101	13	-5	-2	-3
14	1 110	14	-6	-1	-2
15	1 111	15	-7	-0	-1

• Repare:

$$-8 = 10000$$

$$-1$$
3 2 1 0
$$-1$$
3 2 1 0
$$01111$$

$$Complemento$$



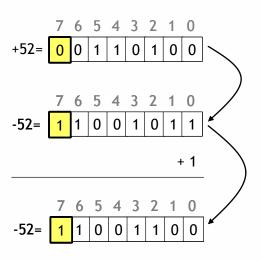
Ref	Binario	sem Sinal	Sinal- Magnitude	Comple- Mento-1	Comple- Mento-2
0	0000	0	0	0	0
1	0001	1	1	1	1
2	0010	2	2	2	2
3	0011	3	3	3	3
4	0100	4	4	4	4
5	0101	5	5	5	5
6	0110	6	6	6	6
7	0111	7	7	7	7
8	1000	8	-0	-7	-8
9	1 001	9	-1	-6	-7
10	1 010	10	-2	-5	-6
11	1 011	11	-3	-4	-5
12	1 100	12	-4	-3	-4
13	1 101	13	-5	-2	-3
14	1 110	14	-6	-1	-2
15	1111	15	-7	-0	-1

• Exemplo:

Ref	Binario	sin Signo	Signo-	Comple-	Comple-
			Magnitud	mento 1	Mento 2
0	0000	0	0	0	0
1	0001	1	1	1	1
2	0010	2	2	2	2
3	0011	3	3	3	3
4	0100	4	4	4	4
5	0101	5	5	5	5
6	0110	6	6	6	6
7	0111	7	7	7	7
8	1000	8	-0	-7	-8
9	1001	9	-1	-6	-7
10	1010	10	-2	-5	-6
11	1011	11	-3	-4	-5
12	1100	12	-4	-3	-4
13	1101	13	-5	-2	-3
14	1110	14	-6	-1	-2
15	1111	15	-7	-0	-1

Binario	Complemento-2	Interpretação sem sinal.
00000000	0	0
0000001	1	1
•••	•••	• • •
01111110	126	126
01111111	127	127
10000000	-128	128
10000001	-127	129
10000010	-126	130
•••	•••	• • •
11111110	-2	254
11111111	-1	255

Exemplo:



Notar que:

Con 16 bits é possível representar números entre -32,768 à 32,767, e com 32 bits é possível codificar números entre -2,147,483,648 à 2,147,483,647.

Lembrar de Linguagem C: variáveis do tipo "int"

Ref	Binario	sem Sinal	Sinal-	Comple-	Comple-
			Magnitude	Mento-1	Mento-2
0	0000	0	0	0	0
1	0001	1	1	1	1
2	0010	2	2	2	2
3	0011	3	3	3	3
4	0100	4	4	4	4
5	0101	5	5	5	5
6	0110	6	6	6	6
7	0111	7	7	7	7
8	1000	8	-0	-7	-8
9	1001	9	-1	-6	-7
10	1010	10	-2	-5	-6
11	1011	11	-3	-4	-5
12	1100	12	-4	-3	-4
13	1 101	13	-5	-2	-3
14	1 110	14	-6	-1	-2
15	1 111	15	-7	-0	-1

Soma/Subtração:

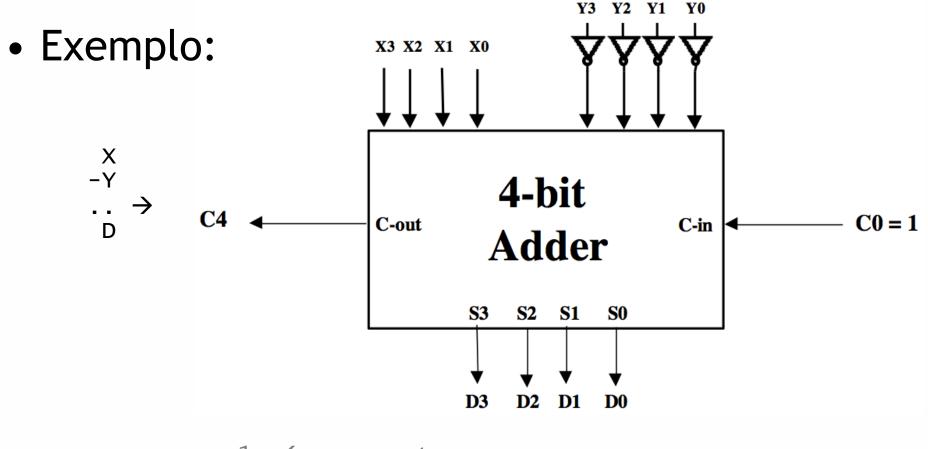
Exemplos:

```
1 1111 111. ← carry-outs
  0000 0111
  1111 \ 1011 \leftarrow +5=0000 \ 0101 \rightarrow -5=1111 \ 1010 \ (2,c1)
  0000 0010
            1 \leftarrow carry-outs
  0000 0101
+ 1111 1001 \leftarrow +7=0000 0111 \rightarrow -7=1111 1000 (2,C1)
  1111 1110 →
                      -1 \rightarrow 1111 \ 1101 \rightarrow 0000 \ 0010 = 2 \ (10)
```

Prof. Fernando Passold Sistemas Digitales 3

Interpretação sem sinal

Subtração:



Prof. Fernando Passold

Circuto de Soma/Subtração

• Exemplo:

Neste caso: D=1

```
1-bit
               1-bit
                             1-bit
                                           1-bit
 Full
Adder
              Adder
                            Adder
                                          Adder
```

Sumador/Subtrador:

Uso de "Inversor Controlado":

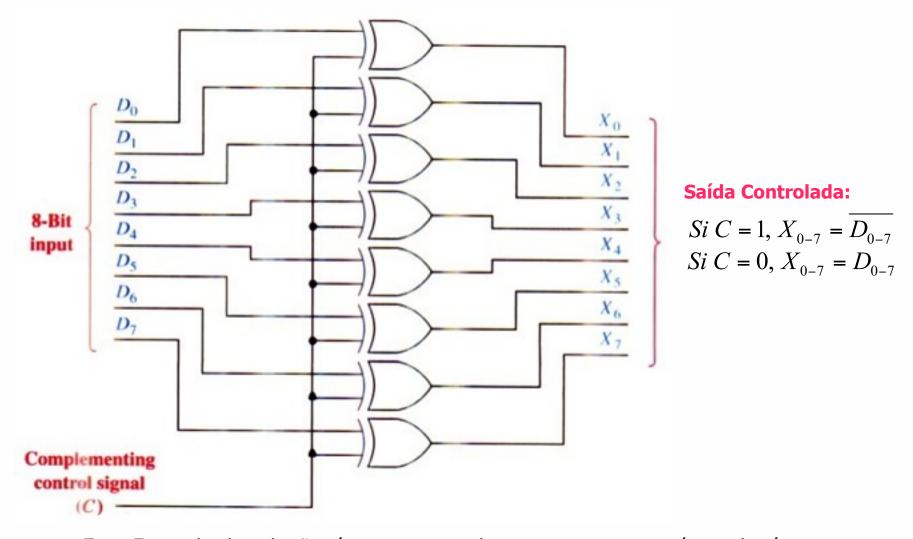
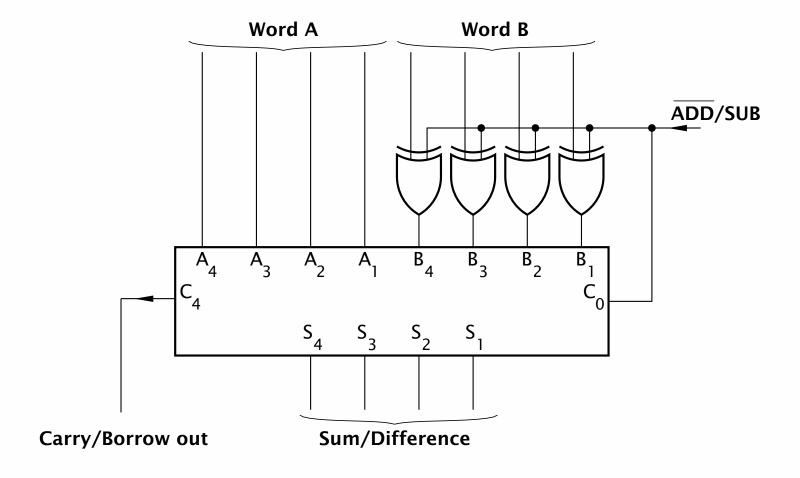


Fig.: Exemplo de solução típica empregada em circuitos aritméticos binários.

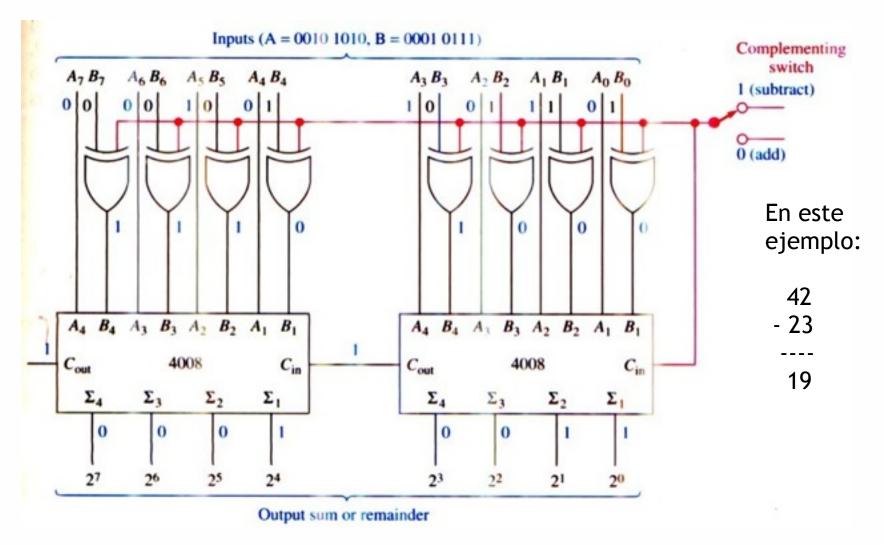
Circuto de Soma/Subtração

Usando "Inversor Controlado":



Somador/Subtrador:

• Circuito de soma/substração: $\Sigma = A + B$ ou $\Sigma = A - B$

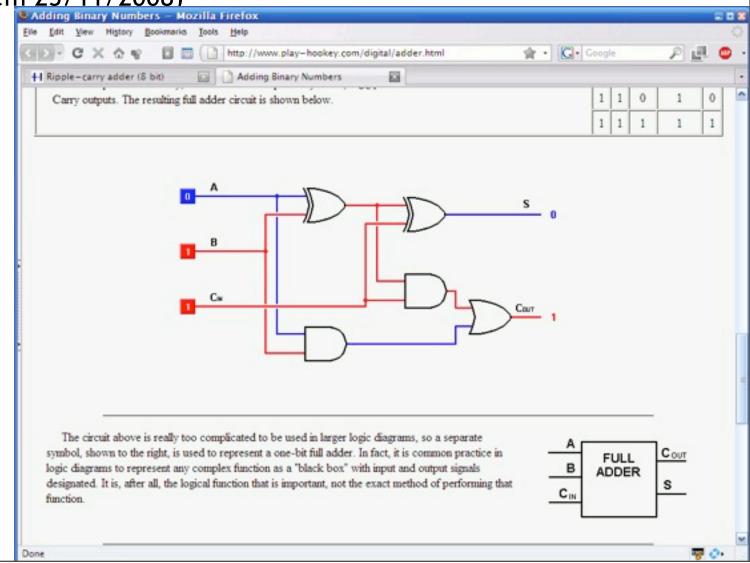


Prof. Fernando Passold

Simuladores em Applets-Java:

http://www.play-hookey.com/digital/adder.html

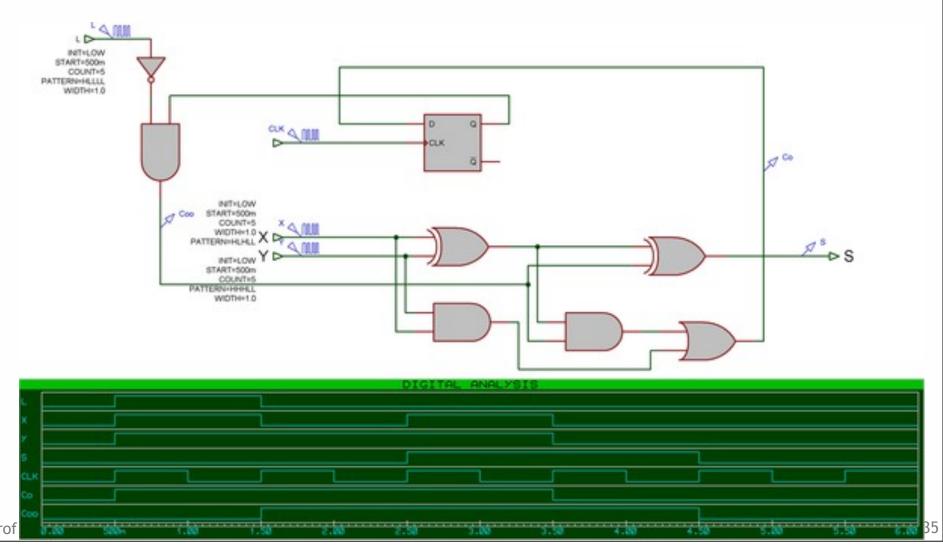
(Disponível em 25/11/2008)



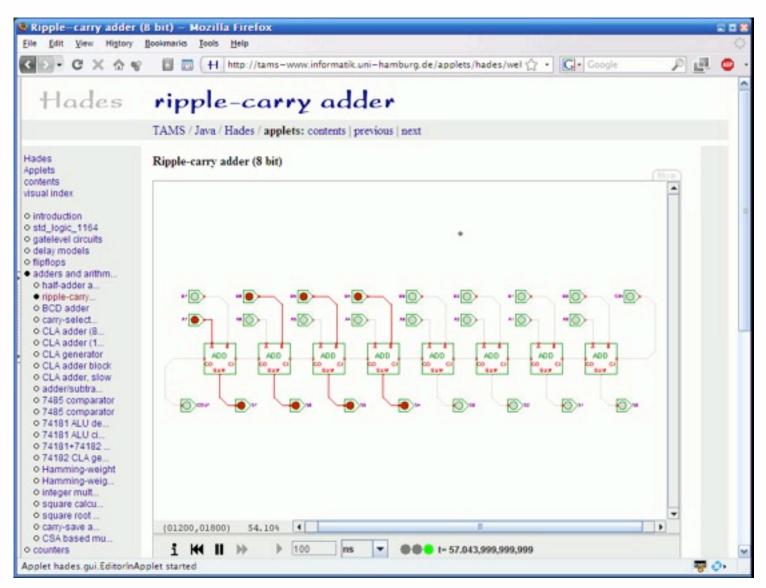
Prof. Fernando Passold

+ Ref.:

 Microprocessor Design/Add and Subtract Blocks, trata de circuitos de adição e subtração http://en.wikibooks.org/wiki/Microprocessor_Design/
 Add and Subtract Blocks - Disponível em 25/11/2008



Simuladores em Applets-Java:



http://tams-www.informatik.uni-hamburg.de/applets/hades/webdemos/20-arithmetic/10-adders/ripple.html

Disponível em 25/11/2008. Prof. Fernando Passold

Simuladores em Applets-Java:

 http://tams-www.informatik.uni-hamburg.de/applets/hades/webdemos/20arithmetic/20-carryselect/adder carryselect.html
 (Disponível em 25/11/2008)

