# Transformada Z Inversa

Controle Automático III
Prof. Fernando Passold

Last Update: 20/03/2019

# a) Método da Inversão por **Divisão Longa**

- Expansão em série de potências.
- Uma série de potências de Z (amostras do sinal a cada instante de amostragem) pode ser obtido pela simples divisão contínua da função Z, do polinômio do seu numerador pelo polinômio do denominador.

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

$$\begin{array}{r|l} N(z) & D(z) \\ \hline & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} \end{array}$$

- Exemplo: Calcule os primeiros termos da sequencia correspondente à transformação:

$$Y(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 2z}{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}$$

$$\begin{array}{r|l} z^3 - 2z^2 + 2z & z^3 - 3z^2 + 3z - 1 \\ \cline{2-2} -z^3 + 3z^2 - 3z + 1 & 1 \\ \cline{1-1} 1z^2 - 1z + 1 & \end{array}$$

# a) Método da Inversão por **Divisão Longa**

- Expansão em série de potências.
- Uma série de potências de Z (amostras do sinal a cada instante de amostragem) pode ser obtido pela simples divisão contínua da função Z, do polinômio do seu numerador pelo polinômio do denominador.

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

$$\begin{array}{l|l} N(z) & D(z) \\ \hline & \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} \end{array}$$

- Exemplo: Calcule os primeiros termos da sequencia correspondente à transformação:

$$Y(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 2z}{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}$$

$$\begin{array}{r|l} z^3 - 2z^2 + 2z \quad & z^3 - 3z^2 + 3z - 1 \\ \cline{2-2} \underline{-z^3 + 3z^2 - 3z + 1} \quad & 1 + 1z^{-1} \\ 1z^2 - 1z + 1 \quad & \\ \underline{-1z^2 + 3z - 3 + 1z^{-1}} & \\ 2z - 2 + 1z^{-1} & \end{array}$$

# a) Método da Inversão por **Divisão Longa**

- Expansão em série de potências.
- Uma série de potências de Z (amostras do sinal a cada instante de amostragem) pode ser obtido pela simples divisão contínua da função Z, do polinômio do seu numerador pelo polinômio do denominador.

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

$$\begin{array}{l|l} N(z) & D(z) \\ \hline & \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} \end{array}$$

- Exemplo: Calcule os primeiros termos da sequencia correspondente à transformação:

$$Y(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 2z}{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}$$

$$\begin{array}{r|l}
z^3 - 2z^2 + 2z & z^3 - 3z^2 + 3z - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-z^3 + 3z^2 - 3z + 1} & 1 + 1z^{-1} + 2z^{-2} \\
1z^2 - 1z + 1 & \\
\underline{-1z^2 + 3z - 3 + 1z^{-1}} & \\
2z - 2 + 1z^{-1} & \\
\underline{-2z + 6 - 6z^{-1} + 2z^{-2}} & \\
4 - 5z^{-1} + 2z^{-2} &
\end{array}$$

# a) Método da Inversão por **Divisão Longa**

- Expansão em série de potências.
- Uma série de potências de Z (amostras do sinal a cada instante de amostragem) pode ser obtido pela simples divisão contínua da função Z, do polinômio do seu numerador pelo polinômio do denominador.

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

$$\begin{array}{l|l} N(z) & D(z) \\ \hline & \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} \end{array}$$

- Exemplo: Calcule os primeiros termos da sequencia correspondente à transformação:

$$Y(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 2z}{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}$$

$$\begin{array}{r|l}
z^3 - 2z^2 + 2z & z^3 - 3z^2 + 3z - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-z^3 + 3z^2 - 3z + 1} & 1 + 1z^{-1} + 2z^{-2} + 4z^{-3} + \dots \\
1z^2 - 1z + 1 & \\
\underline{-1z^2 + 3z - 3 + 1z^{-1}} & \\
2z - 2 + 1z^{-1} & \\
\underline{-2z + 6 - 6z^{-1} + 2z^{-2}} & \\
4 - 5z^{-1} + 2z^{-2} &
\end{array}$$

Assim:

$$Y(z) = 1 + z^{-1} + 2z^{-2} + 4z^{-3} + \dots$$

Lembrando da definição da transformada Z:

$$y(k) = \{1, 1, 2, 4, \dots\}$$

# Exercício:

- Determine as primeiras 3 amostras de: $F(z) = \dfrac{0,5z}{(z-1)(z-0,5)}$

- Solução: $f(k) = \{0; 0,5; 0,75; 0,875; \ldots\}$ e $f(\infty) = ?$

# b) Método da Expansão em **Frações Parciais**

- Requer uso de tabelas de pares de transformadas Z: $\left[f(t) \xrightarrow{Z} F(z)\right]$

| F(s) | f(t) | f(k) | F(z) | Obs |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{s}$ | $u(t)$ | $u(k)$ | $\frac{z}{z-1}$ | Degrau Unitário |
| | | $a^k$ | $\frac{z}{z-a}$ | |
| $\frac{1}{s^2}$ | $t$ | $k\,T$ | $\frac{T\,z}{(z-1)^2}$ | Rampa |
| $\frac{1}{s+a}$ | $e^{-at}$ | $e^{-akT}$ | $\frac{z}{z-e^{-aT}}$ | Exponencial |
| $\frac{1}{(s+a)^2}$ | $t\,e^{at}$ | $kT\,e^{-akT}$ | $\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$ | Pólos Múltiplos |
| $\frac{a}{s(s+a)}$ | $1-e^{-at}$ | $1-e^{-akT}$ | $\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$ | Exponencial Decrescente |

# b) Método da Expansão em **Frações Parciais**

- Requer uso de tabelas de pares de transformadas Z: $\left[f(t) \xrightarrow{Z} F(z)\right]$
- Exemplo_1) Aplicando este método com o exemplo anterior:

$$F(z) = \frac{0,5z}{(z-1)(z-0,5)}$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{0,5}{(z-1)(z-0,5)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0,5}$$

$$A = (z-1) \cdot F'(z)\big|_{z=1} \quad \therefore \quad A = \left.\frac{(z-1)\,0,5}{(z-1)(z-0,5)}\right|_{z=1} \quad \therefore \quad A = \frac{0,5}{1-0,5} = 1$$

$$B = (z-0,5) \cdot F'(z)\big|_{z=0,5} \quad \therefore \quad B = \left.\frac{(z-0,5)\,0,5}{(z-1)(z-0,5)}\right|_{z=0,5} \quad \therefore \quad B = \frac{0,5}{0,5-1} = -1$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-0,5} \quad \therefore \quad F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0,5}$$

| F(s) | f(t) | f(k) | F(z) | Obs |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{s}$ | $u(t)$ | $u(k)$ | $\frac{z}{z-1}$ | Degrau Unitário |
| | | $a^k$ | $\frac{z}{z-a}$ | |
| $\frac{1}{s^2}$ | $t$ | $k\,T$ | $\frac{T\,z}{(z-1)^2}$ | Rampa |
| $\frac{1}{s+a}$ | $e^{-at}$ | $e^{-akT}$ | $\frac{z}{z-e^{-aT}}$ | Exponencial |
| $\frac{1}{(s+a)^2}$ | $t\,e^{at}$ | $kT\,e^{-akT}$ | $\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$ | Pólos Múltiplos |
| $\frac{a}{s(s+a)}$ | $1-e^{-at}$ | $1-e^{-akT}$ | $\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$ | Exponencial Decrescente |

$$A = (z-1)\cdot F'(z)\big|_{z=1} \quad \therefore \quad A = \left.\frac{(z-1)\,0,5}{(z-1)(z-0,5)}\right|_{z=1} \quad \therefore \quad A = \frac{0,5}{1-0,5} = 1$$

$$B = (z-0,5)\cdot F'(z)\big|_{z=0,5} \quad \therefore \quad B = \left.\frac{(z-0,5)\,0,5}{(z-1)(z-0,5)}\right|_{z=0,5} \quad \therefore \quad B = \frac{0,5}{0,5-1} = -1$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-0,5} \quad \therefore \quad F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0,5}$$

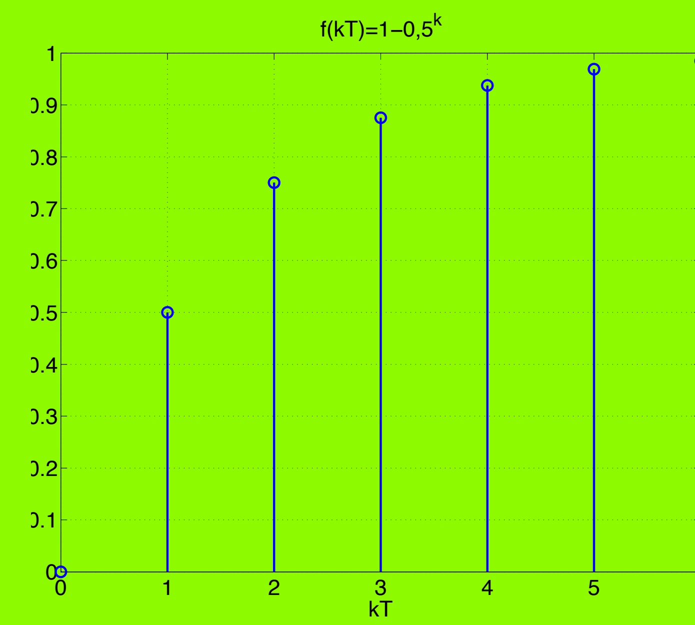
$$\therefore f(kT) = 1\cdot 1^k - 1\cdot 0,5^k = 1 - 0,5^k$$

# b) Método da Expansão e

- Requer uso de tabelas de pares de transf
- Exemplo_1) Aplicando este método com

Note que: $f(kT)=1\text{-}0{,}5^k$
$f(0)=0$
$f(1)=0{,}5$
$f(2)=0{,}75$
$f(3)=0{,}875$
...

$$f(kT)|_{k\to\infty} = 1,0$$




$$F(z) = \frac{0,5z}{(z-1)(z-0,5)}$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{0,5}{(z-1)(z-0,5)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0,5}$$

$$A = (z-1)\cdot F'(z)|_{z=1} \quad \therefore \quad A = \left.\frac{(z-1)\,0,5}{(z-1)(z-0,5)}\right|_{z=1} \quad \therefore \quad A = \frac{0,5}{1-0,5} = 1$$

$$B = (z-0,5)\cdot F'(z)|_{z=0,5} \quad \therefore \quad B = \left.\frac{(z-0,5)\,0,5}{(z-1)(z-0,5)}\right|_{z=0,5} \quad \therefore \quad B = \frac{0,5}{0,5-1} = -1$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-0,5} \quad \therefore \quad F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0,5}$$

$$\therefore f(kT) = 1\cdot 1^k - 1\cdot 0,5^k = 1 - 0,5^k$$

Note que: $f(kT)=1-0{,}5^k$

$f(0)=0$

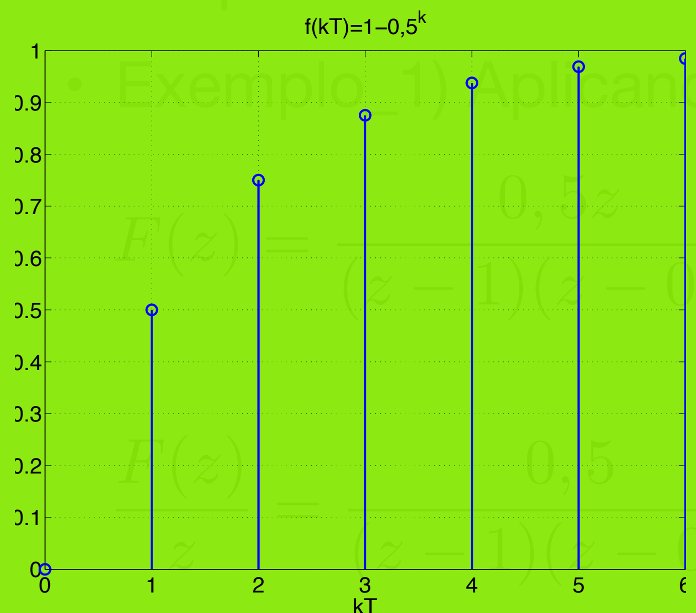
$f(1)=0{,}5$

$f(2)=0{,}75$

$f(3)=0{,}875$

...

$$f(kT)|_{k\to\infty} = 1{,}0$$




# Método da Expan...

- Requer uso de tabelas de pare...
- Exemplo_1) Aplicando este mé...

$$F(z) = \frac{0,5\,z}{(z-1)(z-0,5)}$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{0,5}{(z-1)(z-0,5)} = \frac{A}{z-1}$$

$$A = (z-1)\cdot F'(z)|_{z=1} \quad \therefore \quad A = \ldots$$

$$B = (z-0,5)\cdot F'(z)|_{z=0,5} \quad \therefore \quad \ldots = -1$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-0,5} \quad \therefore$$

$$f(kT) = 1 - 0,5^k$$

$$F(z) = \frac{0,5\,z}{(z-1)(z-0,5)}$$

$$U(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$G(z) = \frac{0,5}{z-0,5}$$

Processo

$$U(z) \longrightarrow \boxed{G(z)} \longrightarrow F(z)$$

$$F(z) = U(z)\cdot G(z)$$

$$G(z) = \frac{F(z)}{U(z)}$$

$$G(z) = \frac{0,5}{(z-0,5)} \cdot \frac{\div z^{-1}}{\div z^{z-1}}$$

$$G(z) = \frac{F(z)}{U(z)} = \frac{0,5z^{-1}}{(1-0,5z^{-1})}$$

$$F(z)\,(1-0,5z^{-1}) = U(z)\cdot 0,5z^{-1}$$

$$F(z) = 0,5\,z^{-1}U(z) + 0,5\,z^{-1}F(z)$$

$$\Big\downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$

Prop. atraso no tempo:

$$\mathcal{Z}\{x(t-nT)\} = z^{-n}\,X(z)$$

$$f[kT] = 0,5\,u[(k-1)T] + 0,5\,f[(k-1)T]$$

Note:

```
f[k]=0,5*u[k-1] + 0,5*f[k-1];
u[kT]=1 p/ k >= 0; % Def. entrada degrau
f[kT]=0 p/ k <  0; % Sist. causal
```

então:

```
f[0]=0,5*0 + 0,5*0 = 0;
f[1]=0,5*u[0] + 0,5*f[0] = 0,5*1 + 0 = 0,5
f[2]=0,5*u[1] + 0,5*f[1] = 0,5*1 + 0,5*0,5 = 0,75
f[3]=0,5*u[2] + 0,5*f[2] = 0,5*1 + 0,5*0,75 = 0,875
f[4]=0,5*u[3] + 0,5*f[3] = 0,5*1 + 0,5*0,875 = 0.9375
```

# Lembrando de Laplace...

- Expansão em frações parciais, se fazia:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+b} + \ldots$$

$$\downarrow \mathscr{L}^{-1}$$

$$f(t) = Ae^{-at} + Be^{-bt} + \ldots$$

Assim, para obter-se f(kT) à partir de F(z) temos que decompor F(z) da seguinte forma:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b}$$

para obter-se termos simples na forma:

$$\frac{c_i\, z}{z-a} \quad \xrightarrow{Z^{-1}} \quad c_i\, a^k$$

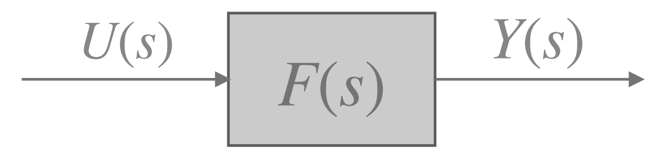
$$F(z) \quad \xrightarrow{Z^{-1}} \quad f(kT)$$

$$\frac{F(z)}{z} = F'(z) = \frac{A}{z-a} + \ldots$$

$$f(kT) = A\, a^k$$

# Lembrando de Laplace…

$F(s) = K_0 + \dfrac{K_1}{s-s_1} + \dfrac{K_2}{s-s_2} + \ldots + \dfrac{K_n}{s-s_n}$, (expansão em frações parciais)




$K_0$=termo constante, quando grau de $N(s)$=grau de $D(s)$, exemplo:

$$F(s) = \frac{2s^2+4s+5}{4s^2+1} = \frac{1}{2} + \frac{N'(s)}{4s^2+1} = \frac{1}{2} + \frac{4s+9/2}{4s^2+1}$$

$$\begin{array}{r|l} 2s^2+4s+5 & 4s^2+1 \\ \cline{2-2} -2s^2 \qquad -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 4s+\frac{9}{2} & \end{array}$$

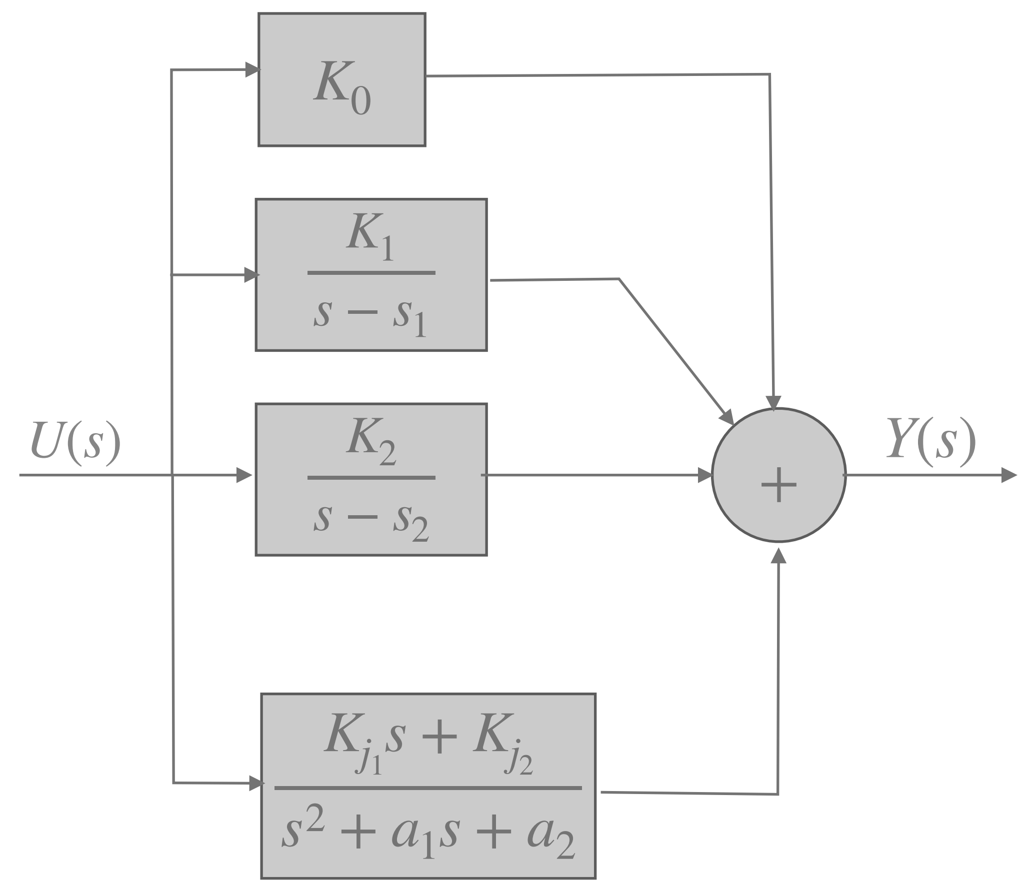
$$\text{Casos} \begin{cases} s_i = \text{real, então } \rightarrow \dfrac{K_i}{s-s_1}; \\ s_1 = \text{complexo, então } \rightarrow \dfrac{K_j}{s-s_j} + \dfrac{K_j^*}{s-s_j^*} \end{cases}$$

Onde $s_j =$ complexo.

Se $s_j = a + jb$ então $s_j^* = a - jb$ e teremos:

$$\Rightarrow \frac{K_j}{s-s_j} + \frac{K_j^*}{s-s_j^*} = \frac{K_{j_1} + K_{j_2}}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

Onde $K_{j_1}$ e $K_{j_2}$, $a_1$ e $a_2$ são reais.



# Exercício:

- Obtenha y(kT) à partir de: $Y(z) = \dfrac{z+4}{(z-1)(z-2)}$

$$y(kT) = 2\delta(k) - 5 + 3(-2)^k$$

# Exercício:

- Obtenha y(kT) à partir de: $Y(z) = \dfrac{z+4}{(z-1)(z-2)}$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z+4}{z(z-1)(z-2)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-1} + \frac{c}{z-2}$$

$$a = z \cdot Y'(z)|_{z=0} \quad \therefore \quad a = \left.\frac{z(z+4)}{z(z-1)(z-2)}\right|_{z=0} \quad \therefore \quad a = \frac{4}{(-1)(-2)} = 2$$

$$b = (z-1) \cdot Y'(z)|_{z=1} \quad \therefore \quad b = \left.\frac{(z-1)(z+4)}{z(z-1)(z-2)}\right|_{z=1} \quad \therefore \quad b = \frac{5}{(1)(-1)} = -5$$

$$c = (z-2) \cdot Y'(z)|_{z=2} \quad \therefore \quad c = \left.\frac{(z-2)(z+4)}{z(z-1)(z-2)}\right|_{z=2} \quad \therefore \quad c = \frac{6}{(2)(1)} = 3$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2}{z} + \frac{(-5)}{z-1} + \frac{3}{z-2}$$

$$Y(z) = \frac{2z}{z} + \frac{(-5)z}{z-1} + \frac{3z}{z-2}$$

| F(s) | f(t) | f(k) | F(z) | Obs |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{s}$ | $u(t)$ | $u(k)$ | $\frac{z}{z-1}$ | Degrau Unitário |
| | | $a^k$ | $\frac{z}{z-a}$ | |
| $\frac{1}{s^2}$ | $t$ | $k\,T$ | $\frac{T\,z}{(z-1)^2}$ | Rampa |
| $\frac{1}{s+a}$ | $e^{-at}$ | $e^{-akT}$ | $\frac{z}{z-e^{-aT}}$ | Exponencial |
| $\frac{1}{(s+a)^2}$ | $t\,e^{at}$ | $kT\,e^{-akT}$ | $\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$ | Pólos Múltiplos |
| $\frac{a}{s(s+a)}$ | $1-e^{-at}$ | $1-e^{-akT}$ | $\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$ | Exponencial Decrescente |

$$c = (z-2)\cdot Y'(z)|_{z=2} \quad \therefore \quad c \ldots z(z-1)(z-2)|_{z=2}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2}{z} + \frac{(-5)}{z-1} + \frac{3}{z-2}$$

$$Y(z) = \frac{2z}{z} + \frac{(-5)z}{z-1} + \frac{3z}{z-2}$$

$$y(kT) = 2\delta(k) - 5 + 3(-2)^k$$

$$y(kT) = \{0, -11, 7, -29, 43, -101, 187, -389, \ldots\}$$

# Exercício:

- Obtenha y(kT) à partir de: $Y(z) = \dfrac{z+4}{(z-1)(z-2)}$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z+4}{z(z-1)(z-2)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-1} + \frac{c}{z-2}$$

$$a = z \cdot Y'(z)|_{z=0} \quad \therefore \quad a = \left.\frac{z(z+4)}{z(z-1)(z-2)}\right|_{z=0} \quad \therefore \quad a = \frac{4}{(-1)(-2)} = 2$$

$$b = (z-1) \cdot Y'(z)|_{z=1} \quad \therefore \quad b = \left.\frac{(z-1)(z+4)}{z(z-1)(z-2)}\right|_{z=1} \quad \therefore \quad b = \frac{5}{(1)(-1)} = -5$$

$$c = (z-2) \cdot Y'(z)|_{z=2} \quad \therefore \quad c = \left.\frac{(z-2)(z+4)}{z(z-1)(z-2)}\right|_{z=2} \quad \therefore \quad c = \frac{6}{(2)(1)} = 3$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2}{z} + \frac{(-5)}{z-1} + \frac{3}{z-2}$$

$$Y(z) = \frac{2z}{z} + \frac{(-5)z}{z-1} + \frac{3z}{z-2}$$

$$y(kT) = 2\delta(k) - 5 + 3(-2)^k$$

$$y(kT) = \{0, -11, 7, -29, 43, -101, 187, -389, \ldots\}$$

```
Usando MATLAB:
>> k=0:7; % gera vetor com instantes de amostragem
>> y=-5+3*(-2).^k % gera correspondente vetor y(kT)
y =     -2   -11     7   -29    43  -101   187  -389
>>
```

# Caso de Pólos Complexos Conjugados

- Suponha que no momento de expandir Y(z) surjam termos como:

$$Y(z) = \ldots + \frac{A_1}{z - \alpha - j\beta} + \frac{A_2}{z - \alpha + j\beta} + \ldots$$

$A_1$ é o resíduo de $p_1 = \alpha + j\beta$, então $A_2 = A_1^*$ é o resíduo de $p_2 = p_1^* = \alpha - j\beta$.

Em particular, se:

$$A_1 = (z - p_1) \cdot Y'(z)|_{z=p_1} = M \cdot e^{j\theta}$$

então

$$\frac{z \cdot Me^{j\theta}}{z - p_1} + \frac{z \cdot Me^{-j\theta}}{z - p_1^*} = \frac{2zM\cos(z-\alpha) - 2z\beta M \sin\theta}{(z-\alpha)^2 + \beta^2}$$

que pode ser invertido usando a transformada Z da tabela:

$$\mathcal{Z}\left\{e^{-at}\cos\left(\omega t - \theta\right)\right\} = \frac{z\cos\theta(z-a) - z\beta\sin\theta}{(z-\alpha)^2 + \beta^2}$$

onde: $\alpha = e^{-aT}\cos\omega T$; e

$\beta = e^{-aT}\sin\omega T$

Ref.: Van Landingham, Hugh F., **Introduction to digital control systems**, Macmillian Publishing Company, New York, 1985.

Note: $F(z) = \mathbf{Z}\{f(t) = \sin(\omega t)\}$

# Exercícios

1) Para $F(z) = \dfrac{z \sin \omega T}{z^2 - 2\cos \omega T z + 1}$, obter $f(kT)$ pelo método da divisão polinomial quando:

a) $T = \dfrac{\pi}{\omega}$ b) $T = \dfrac{\pi}{2\omega}$ e c) $T = \dfrac{\pi}{6\omega}$

Demonstre graficamente os resultados e realize uma comparação. Que está acontecendo?

# Exercícios

Note: $F(z) = \mathbf{Z}\{f(t) = \sin(\omega t)\}$

1) Para $F(z) = \dfrac{z \sin \omega T}{z^2 - 2\cos \omega T z + 1}$, obter $f(kT)$ pelo método da divisão polinomial quando:

$\boxed{\text{a) } T = \dfrac{\pi}{\omega}}$ b) $T = \dfrac{\pi}{2\omega}$ e c) $T = \dfrac{\pi}{6\omega}$

Demonstre graficamente os resultados e realize uma comparação. Que está acontecendo?

**Solução:**

Quando $\boxed{\text{a) } T = \dfrac{\pi}{\omega}}$, teremos:

$$F(z) = \frac{z \cdot \sin\left(\cancel{\omega} \cdot \frac{\pi}{\cancel{\omega}}\right)}{z^2 - 2\cos\left(\cancel{\omega} \cdot \frac{\pi}{\cancel{\omega}}\right) + 1}$$

$$F(z) = \frac{z \cdot \cancelto{0}{\sin(\pi)}}{z^2 - 2\cos(\pi) + 1}$$

$$F(z) = 0$$

Mas o que aconteceu aqui?

# Exercícios

Note: $F(z) = \mathbf{Z}\left\{f(t) = \sin(\omega t)\right\}$

1) Para $F(z) = \dfrac{z \sin \omega T}{z^2 - 2\cos \omega T z + 1}$, obter $f(kT)$ pelo método da divisão polinomial quando:

$\boxed{\text{a) } T = \frac{\pi}{\omega}}$ b) $T = \frac{\pi}{2\omega}$ e c) $T = \frac{\pi}{6\omega}$

Demonstre graficamente os resultados e realize uma comparação. Que está acontecendo?

**Solução:**

Quando a) $T = \frac{\pi}{\omega}$, teremos:

$$F(z) = \frac{z \cdot \sin\left(\cancel{\omega} \cdot \frac{\pi}{\cancel{\omega}}\right)}{z^2 - 2\cos\left(\cancel{\omega} \cdot \frac{\pi}{\cancel{\omega}}\right) + 1}$$

$$F(z) = \frac{z \cdot \cancelto{0}{\sin(\pi)}}{z^2 - 2\cos(\pi) + 1}$$

$$F(z) = 0$$

Mas o que aconteceu aqui?

Note o seguinte:

Quando $\boxed{\text{a) } T = \frac{\pi}{\omega}} \Rightarrow f_s = \frac{\omega}{\pi} \quad \left(f = \frac{1}{T}\right)$

como: $\omega = 2\pi f$ teremos então que:

$$f_s = \frac{\omega}{\pi} = \frac{2\cancel{\pi} f}{\cancel{\pi}} = 2f$$

ou seja, significa que a senoide está sendo amostrada numa freqüência duas vezes maior que a sua (teorema de Amostragem: Nyquist!), mas...

se substituirmos valores a expressão de

$\mathbf{Z}^{-1}\left\{F(z)\right\} = f(kT) = sin(\omega kT)$

lembrando que: $T = \frac{\pi}{\omega}$

$f(kT)$ se transforma em: $f(kT) = \sin\left(\cancel{\omega} k \frac{\pi}{\cancel{\omega}}\right) = \sin(k \cdot \pi)$

# Exercícios

Note: $F(z) = \mathbf{Z}\{f(t) = \sin(\omega t)\}$

1) Para $F(z) = \dfrac{z \sin \omega T}{z^2 - 2\cos \omega T z + 1}$, obter $f(kT)$ pelo método da divisão polinomial quando:

$\boxed{\text{a) } T = \dfrac{\pi}{\omega}}$ b) $T = \dfrac{\pi}{2\omega}$ e c) $T = \dfrac{\pi}{6\omega}$

Demonstre graficamente os resultados e realize uma comparação. Que está acontecendo?

Note o seguinte:

Quando $\boxed{\text{a) } T = \dfrac{\pi}{\omega}} \Rightarrow f_s = \dfrac{\omega}{\pi} \quad \left(f = \dfrac{1}{T}\right)$

como: $\omega = 2\pi f$ teremos então que:

$$f_s = \frac{\omega}{\pi} = \frac{2\cancel{\pi}f}{\cancel{\pi}} = 2f$$

ou seja, significa que a senoide está sendo amostrada numa freqüência duas vezes maior que a sua (teorema de Amostragem: Nyquist!), mas...

se substituirmos valores na expressão de

$\mathbf{Z}^{-1}\{F(z)\} = f(kT) = sin(\omega kT)$

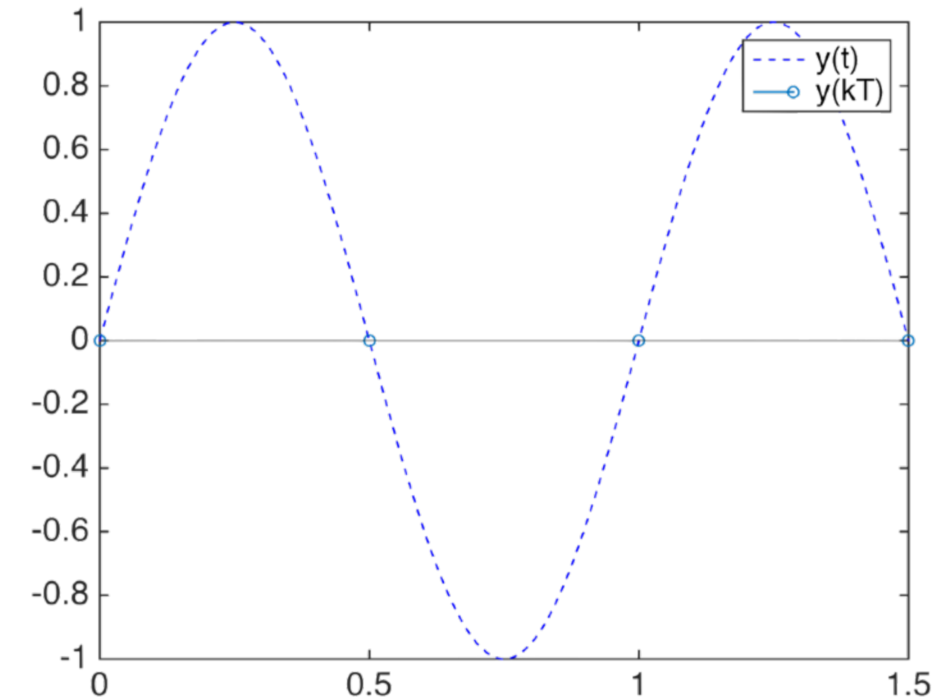
lembrando que: $T = \dfrac{\pi}{\omega}$

$f(kT)$ se transforma em: $f(kT) = \sin\left(\cancel{\omega}k\dfrac{\pi}{\cancel{\omega}}\right) = \sin(k \cdot \pi)$

| k | y(kT) |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 0 |
| 2 | 0 |
| ⋮ | ⋮ |

que graficamente resulta em:

ou seja:
A senoide está sendo amostrada justamente nos instantes em que passa por amplitude zero.



# Exercícios

Note: $F(z) = \mathbf{Z}\{f(t) = \sin(\omega t)\}$

1) Para $F(z) = \dfrac{z \sin \omega T}{z^2 - 2\cos \omega T z + 1}$, obter $f(kT)$ pelo método da divisão polinomial quando:

a) $T = \dfrac{\pi}{\omega}$ $\boxed{\text{b) } T = \dfrac{\pi}{2\omega}}$ e c) $T = \dfrac{\pi}{6\omega}$

Demonstre graficamente os resultados e realize uma comparação. Que está acontecendo?

**Solução:**

Quando $\boxed{\text{b) } T = \dfrac{\pi}{2\omega}}$, teremos:

$$F(z) = \frac{z \cdot \sin\left(\cancel{\omega} \cdot \frac{\pi}{2\cancel{\omega}}\right)}{z^2 - 2\cos\left(\cancel{\omega} \cdot \frac{\pi}{2\cancel{\omega}}\right) + 1}$$

$$F(z) = \frac{z \cdot \cancelto{1}{\sin(\pi/2)}}{z^2 - 2\cancelto{0}{\cos(\pi/2)} + 1}$$

$$F(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$$

Que resulta no vetor (sequencia):

$$f(kT) = \{0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots\}$$

# Exercícios

Note: $F(z) = \mathbf{Z}\{f(t) = \sin(\omega t)\}$

1) Para $F(z) = \dfrac{z \sin \omega T}{z^2 - 2\cos \omega T z + 1}$, obter $f(kT)$ pelo método da divisão polinomial quando:

a) $T = \dfrac{\pi}{\omega}$ $\boxed{\text{b) } T = \dfrac{\pi}{2\omega}}$ e c) $T = \dfrac{\pi}{6\omega}$

Demonstre graficamente os resultados e realize uma comparação. Que está acontecendo?

**Solução:**

Quando $\boxed{\text{b) } T = \dfrac{\pi}{2\omega}}$, teremos:

$$F(z) = \frac{z \cdot \sin\left(\cancel{\omega} \cdot \frac{\pi}{2\cancel{\omega}}\right)}{z^2 - 2\cos\left(\cancel{\omega} \cdot \frac{\pi}{2\cancel{\omega}}\right) + 1}$$

$$F(z) = \frac{z \cdot \cancelto{1}{\sin(\pi/2)}}{z^2 - 2\cancelto{0}{\cos(\pi/2)} + 1}$$

$$F(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$$

Que resulta no vetor (sequencia):

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \xrightarrow{\mathbf{Z}^{-1}} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot z^{-k}$$

$$\begin{array}{l|l} N(z) & D(z) \\ \hline & \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot z^{-k} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
z & z^2 + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-z - z^{-1}} & z^{-1} - z^{-3} + z^{-5} - z^{-7} + \ldots \\
0 - z^{-1} & \\
\quad \underline{+z^{-1} + z^{-3}} & \\
\qquad 0 + z^{-3} & \\
\qquad \underline{-z^{-3} - z^{-5}} & \\
\qquad\quad 0 - z^{-5} &
\end{array}$$

$$f(kT) = \{0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots\}$$

# Exercícios

Note: $F(z) = \mathbf{Z}\{f(t) = \sin(\omega t)\}$

1) Para $F(z) = \dfrac{z \sin \omega T}{z^2 - 2\cos \omega T z + 1}$, obter $f(kT)$ pelo método da divisão polinomial quando:

a) $T = \dfrac{\pi}{\omega}$ $\boxed{\text{b) } T = \dfrac{\pi}{2\omega}}$ e c) $T = \dfrac{\pi}{6\omega}$

Demonstre graficamente os resultados e realize uma comparação. Que está acontecendo?

Que resulta no vetor (sequencia):

$$N(z) \;\Big|\; \underline{D(z)}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot z^{-k}$$

$$\begin{array}{l|l}
z & z^2 + 1 \\ \hline
\underline{-z - z^{-1}} & z^{-1} - z^{-3} + z^{-5} - z^{-7} + \dots \\
0 - z^{-1} & \\
\quad \underline{+z^{-1} + z^{-3}} & \\
\qquad 0 + z^{-3} & \\
\qquad \underline{-z^{-3} - z^{-5}} & \\
\qquad \quad 0 - z^{-5} &
\end{array}$$

$$f(kT) = \{0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots\}$$

Desta vez note o seguinte:

$$\text{Quando } \boxed{\text{b) } T = \frac{\pi}{2\omega}} \Rightarrow \quad f_s = \frac{2\omega}{\pi} \quad \left(f = \frac{1}{T}\right)$$

como: $\omega = 2\pi f$ teremos então que:

$$f_s = \frac{2\omega}{\pi} = \frac{2 \cdot 2\cancel{\pi} f}{\cancel{\pi}} = 4f$$

Então, neste caso, a senoide está sendo amostrada numa freqüência 4x maior.
Lembrando de:

$$\mathbf{Z}^{-1}\{F(z)\} = f(kT) = sin(\omega kT)$$

$f(kT)$ se transforma em: $f(kT) = \sin\left(\cancel{\omega} k \dfrac{\pi}{2\cancel{\omega}}\right) = \sin(k\pi/2)$

# Exercícios

Note: $F(z) = \mathbf{Z}\{f(t) = \sin(\omega t)\}$

1) Para $F(z) = \dfrac{z \sin \omega T}{z^2 - 2\cos \omega T z + 1}$, obter $f(kT)$ pelo método da divisão polinomial quando:

a) $T = \dfrac{\pi}{\omega}$ $\boxed{\text{b) } T = \dfrac{\pi}{2\omega}}$ e c) $T = \dfrac{\pi}{6\omega}$

Demonstre graficamente os resultados e realize uma comparação. Que está acontecendo?

Desta vez note o seguinte:

$$\text{Quando } \boxed{\text{b) } T = \frac{\pi}{2\omega}} \Rightarrow f_s = \frac{2\omega}{\pi} \quad \left(f = \frac{1}{T}\right)$$

como: $\omega = 2\pi f$ teremos então que:

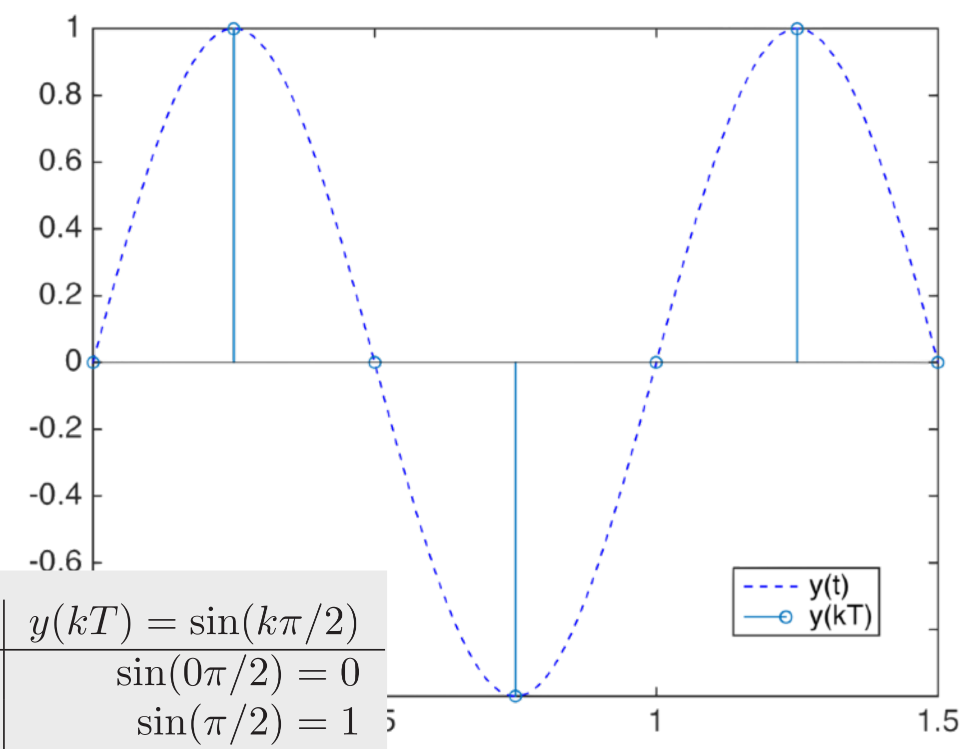
$$f_s = \frac{2\omega}{\pi} = \frac{2 \cdot 2\cancel{\pi} f}{\cancel{\pi}} = 4f$$

Então, neste caso, a senóide está sendo amostrada numa frequencia 4x maior.
Lembrando de:

$$\mathbf{Z}^{-1}\{F(z)\} = f(kT) = sin(\omega kT)$$

$f(kT)$ se transforma em: $f(kT) = \sin\left(\cancel{\omega} k \dfrac{\pi}{2\cancel{\omega}}\right) = \sin(k\pi/2)$

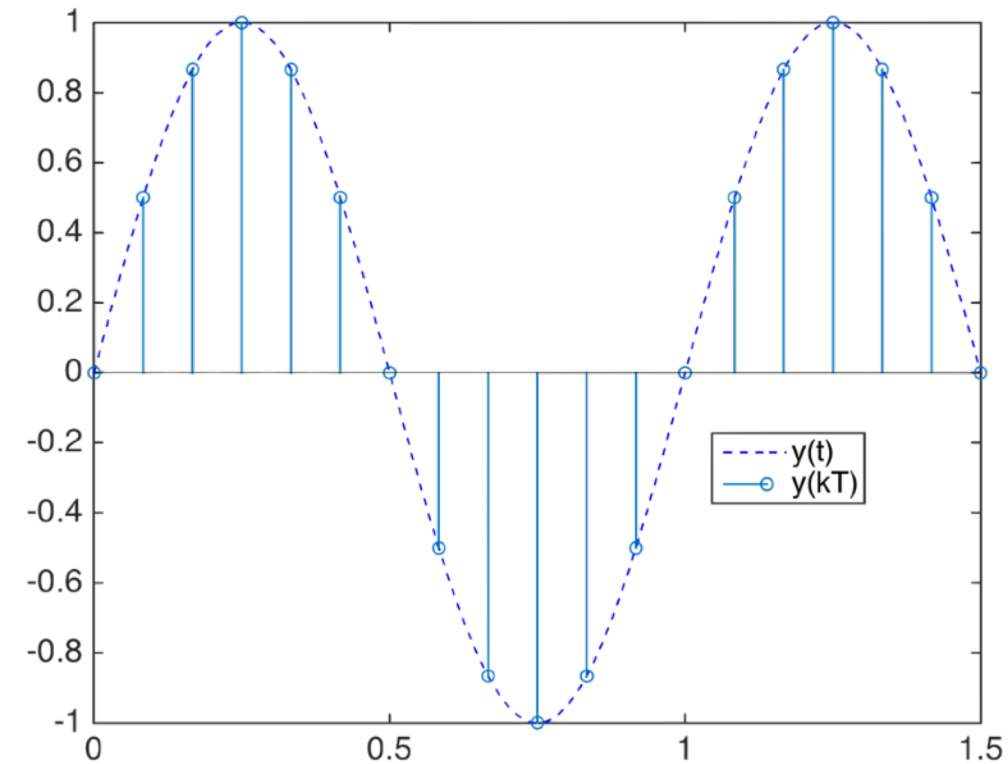
$$f(kT) = \{0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots\}$$




| $k$ | $y(kT) = \sin(k\pi/2)$ |
|---|---|
| 0 | $\sin(0\pi/2) = 0$ |
| 1 | $\sin(\pi/2) = 1$ |
| 2 | $\sin(\cancel{2}\pi/\cancel{2}) = 0$ |
| 3 | $\sin(3\pi/2) = -1$ |
| 4 | $\sin(4\pi/2) = 0$ |
| 5 | $\sin(5\pi/2) = 1$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |

# Arquivo dos gráficos: >> exercicio_seno.m

```
% simulando uma senóide sendo amostrada à diferentes frequencias
clear all;
close all;
f = input ('Entre com a freq. da senóide [Hz]: ? ');
fs = input ('Entre com a freq. de amostragem [Hz]: ? ');
ciclos = input('Quantos ciclos mostrar da onda senoidal ? ');
if ciclos < 0
    ciclos = 1
end
% T = 1/f; t_final = p * T, então:
t_final = ciclos/f; % domínio tempo, em segundos
f_aux = 500*f; % freq. de amostragem simulação sinal contínuo (500 pt/ciclo)
T_aux = 1/f_aux;
t=0:T_aux:t_final; % criar vetor tempo para sinal analógico simulado
y=sin(2*pi*f*t); % criat vetor do sinal analógico simulado
plot( t, y, 'b--') % plotando sinal analógico ("contínuo")
% segue versão discretizada
T = 1/fs;
k=0:T:t_final; % cria vetor dos instantes de amotragem (no domínio tempo)
yd=sin(2*pi*f*k); % criat vetor do sinal amostrado
hold on
stem (k,yd)
legend('y(t)', 'y(kT)');
```




```
>> exercicio_seno
Entre com a freq. da senóide [Hz]: ? 1
Entre com a freq. de amostragem [Hz]: ? 12
Quantos ciclos mostrar da onda senoidal ? 1.5
>>
```

# Obtenção da **Transformada Z** à partir da **transformada de Laplace** de certa função...

a) Método 1: Uso da transformada inversa de Laplace.

$$\begin{array}{ccc} F(s) & \longrightarrow & F(z) \\ \mathcal{L}^{-1} \downarrow & & \uparrow \mathcal{Z} \\ f(t) & \underset{T}{\longrightarrow} & f(kT) \end{array}$$

b) Método 2: Decomposição de F(s) em elementos simples (expansão da função em frações parciais} e uso de tabelas contendo pares de transformadas Z e de Laplace.
F(s) pode ser descrito como (admitindo que F(s) não possua pólos múltiplos):

$$F(s) = c_0 + \underbrace{\sum_i \frac{c_i}{s - p_i}}_{\text{caso de pólos simples}} + \underbrace{\sum_j \left[ \frac{c_j}{s - p_j} + \frac{\overline{c_j}}{s - \overline{p_j}} \right]}_{\text{caso de pólos complexos}}$$

onde os pólos são: $p_j = \sigma + j\omega;$ e os resíduos são: $c_j = \alpha + j\beta.$