

TRANSformada **Z** (parte I)

Controle Automático III
Prof. Fernando Passold

1. Definição

- Seja $f^*(t)$ o resultado do sinal contínuo $f(t)$ que foi amostrado no tempo:
- Se este sinal foi amostrado de maneira ideal*, $f^*(t)$ pode ser escrito como:

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot \delta(t - kT) = f(t) \cdot \delta_T(t)$$

- Um sampler ideal é definido como aquele que abre e fecha o circuito instantaneamente, a cada T segundos, com tempo de duração zero - amostragem por trem de pulsos:

$$\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$$

- Observação: estamos assumindo que a amostragem inicie em $t=0$.

1. Definição

$$p = e^{j\theta} = \underbrace{\cos(\theta)}_{\Re\{p\}} + j \underbrace{\sin(\theta)}_{\Im\{p\}} = x + jy$$

- Seja $f^*(t)$ o resultado do sinal contínuo $f(t)$ que foi amostrado no tempo:

- Se este sinal foi amostrado de maneira ideal*, $f^*(t)$ pode ser escrito como:

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot \delta(t - kT) = f(t) \cdot \delta_T(t)$$

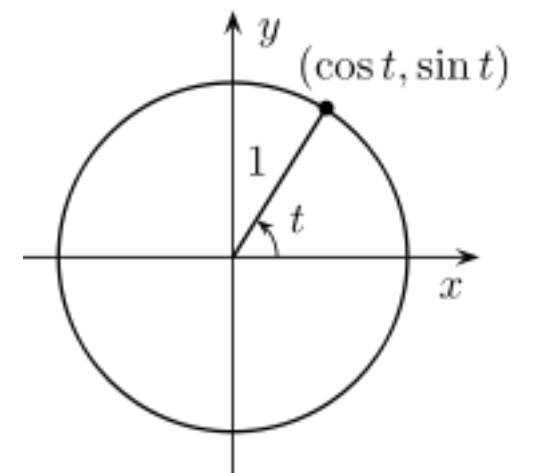
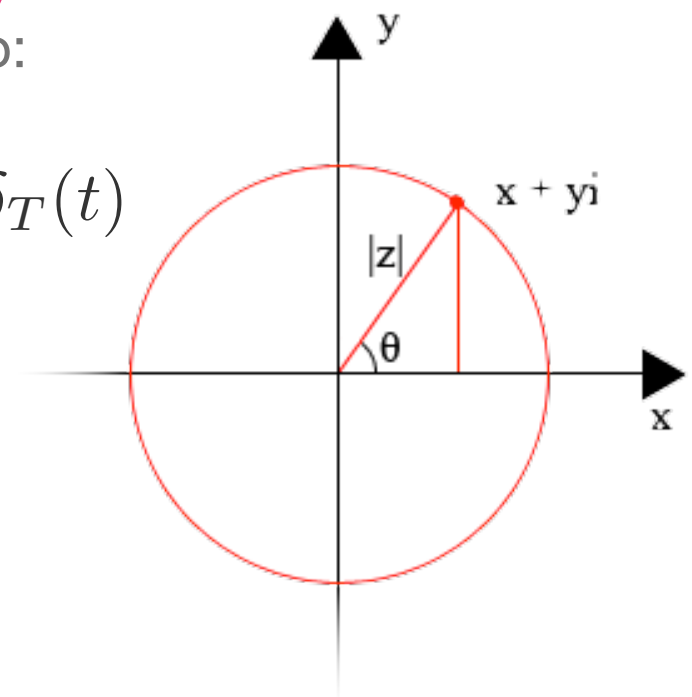
- A transformada de Laplace da função $f^*(t)$ é dada por:

$$\mathcal{L}\{f^*(t)\} = F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot e^{-kTs}$$

- Note que o resultado contém o termo e^{-kTs} que é diferente da maioria das outras funções de sistemas com variáveis contínuas, não é uma função racional de s . Este termo gera dificuldades em operações posteriores em que serão necessárias transformadas inversas de Laplace!

Quando $s \rightarrow z$: plano cartesiano $(x, y) \rightarrow$ coordenadas polares $(1, \theta)$.

Note: $p = e^{j\theta} = \underbrace{\cos(\theta)}_{\Re\{p\}} + j \underbrace{\sin(\theta)}_{\Im\{p\}} = x + jy$



1. Definição

$$p = e^{j\theta} = \underbrace{\cos(\theta)}_{\Re\{p\}} + j \underbrace{\sin(\theta)}_{\Im\{p\}} = x + jy$$

- Seja $f^*(t)$ o resultado do sinal contínuo $f(t)$ que foi amostrado no tempo:

- Se este sinal foi amostrado de maneira ideal*, $f^*(t)$ pode ser escrito como:

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot \delta(t - kT) = f(t) \cdot \delta_T(t)$$

- A transformada de Laplace da função $f^*(t)$ é dada por:

$$\mathcal{L}\{f^*(t)\} = F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot e^{-kTs}$$

- Note que o resultado contém o termo e^{-Ts} que é diferente da maioria das outras funções de sistemas com variáveis contínuas, não é uma função racional de s . Este termo gera dificuldades em operações posteriores em que serão necessárias transformadas inversas de Laplace!
- Por isto é desejável transformar a função irracional $F^*(s)$ numa função racional, digamos $F(z)$ através da transformação de uma variável complexa em s em outra variável complexa z .

$$p = e^{j\theta} = \underbrace{\cos(\theta)}_{\Re\{p\}} + j \underbrace{\sin(\theta)}_{\Im\{p\}} = x + jy$$

1. Definição

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot \delta(t - kT) = f(t) \cdot \delta_T(t)$$

$$\mathcal{L}\{f^*(t)\} = F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot e^{-kTs}$$

- Uma escolha óbvia para esta transformação ($s \rightarrow z$) é: $z = e^{Ts}$
- Resolvendo esta equação de volta para s ($z \rightarrow s$), resulta em: $s = \frac{1}{T} \ln z$
- Nesta duas últimas equações, T é o período de amostragem (em segundos) e z a variável complexa cujas componentes real e imaginária estão relacionadas com a variável s da seguinte forma:

$$\Re\{z\} = e^{T\sigma} \cos \omega T$$

$$\Im\{z\} = e^{T\sigma} \sin \omega T$$

- Lembrando que: $s = \sigma + j\omega$

- Assim:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k}$$

$$p = e^{j\theta} = \underbrace{\cos(\theta)}_{\Re\{p\}} + j \underbrace{\sin(\theta)}_{\Im\{p\}} = x + jy$$

1. Definição

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot \delta(t - kT) = f(t) \cdot \delta_T(t)$$

$$\mathcal{L}\{f^*(t)\} = F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot e^{-Ts}$$

- Uma escolha óbvia para esta transformação
- Resolvendo esta equação de volta para s, res
- Nesta duas últimas equações, **T** é o período de amostragem, cujas componentes real e imaginária estão re

Note que:

$$\mathcal{Z}\{f(kT)\} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k}$$

$$F(z) = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots + f(kT)z^{-k} + \dots$$

$$\Re\{z\} =$$

$$\Im\{z\} = e^{T\sigma} \sin \omega T$$

- Lembrando que: $s = \sigma + j\omega$

- Assim:

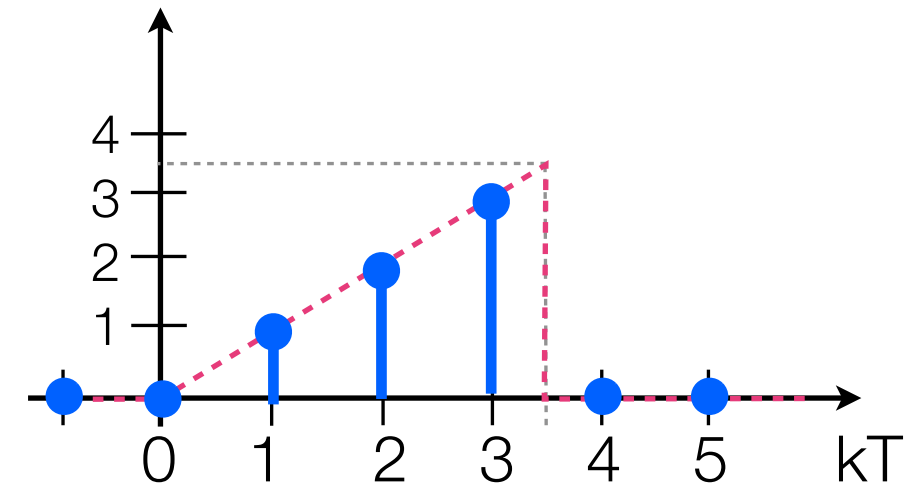
$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k}$$

Exemplo_1) Transformada Z de um sinal...

- Suponha o sinal definido abaixo:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \forall t < 0 \\ t, & \forall 0 \leq t < 3,5 \\ 0, & \forall t \geq 3,5 \end{cases}$$

De posse destes dados obtemos:



- e que T=1 segundo. Obtenha a F(z):

- Temos que:

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(1) &= 1 \\ f(2) &= 2 \\ f(3) &= 3 \\ f(4) &= 0 \\ &\vdots \\ f(nT) &= 0, n > 3 \end{aligned} \right\}$$

$$F(z) = 0z^0 + 1z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 0 \cdot z^{-4} + \dots$$

$$F(z) = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3}$$

$$F(z) = z^{-1} (1 + 2z^{-1} + 3z^{-1})$$

Repare que este é um caso de uma função limitada no tempo.

Detalhes

$$F(s) = \mathcal{L} \{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-s t} dt$$

$$F(z) = \mathcal{L} \{f^*(t)\} = \sum_0^{\infty} f(kT) z^{-k}$$

- Mas:

$$\lim_{T \rightarrow 0} F(z) \neq F(s)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} f^*(t) = f(t)$$

- Uma vez que $f^*(t)$ representa um trem de pulsos (ponderados) espaçados a T segundos, à medida que T se torna infinitesimalmente menor, o trem de impulsos simplesmente se colapsa num grupo de impulsos em $t=0$, mas o resultado de maneira nenhuma se parece com $f(t)$.

Limitações da Transformada Z

- Quando se aplica o método da transformada Z, devemos ter em mente as limitações e condições deste método:
- Assumindo um “ideal sampler”, a obtenção da transformada Z de um sinal (função) contínuo no tempo, $f(t)$ é baseada principalmente na amostragem da função por um sampler ideal. O resultado disto é que **a transformada Z, $F(z)$, representa a função $f(t)$ somente nos instantes de amostragem.**
- A transformada Z inversão não é única! Dado $F(z)$, sua transformada inversa fornece somente a solução para $f(kT)$. **Estritamente citando, a solução para $f(t)$ é desconhecida.**
- A exatidão do método depende da magnitude da frequência de amostragem, ω_s , ou do período de amostragem T em relação ao componente de maior frequência contido na função $f(t)$. Se o período de amostragem for muito grande (ou a frequência de amostragem é muito baixa), a solução da transformada Z pode ser errônea, uma vez que $f^*(t)$ não será uma boa representação de $f(t)$.
- É necessário se atentar para o fato de que $F(z)$ foi formada à partir de uma sequência e assim contém apenas a informação de $f(t)$ nos pontos de amostragem do sinal.

$$F(z) = \mathcal{L} \{f^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k}$$

Limitações da Transformada Z

Note que a transformada Z está sempre relacionada com uma sequência de números, uma série que pode ser limitada (convergir) ou ser infinita!

- Quando se aplica o método da transformada Z, o método:
- Assumindo um “ideal sampler”, a obtenção da transformada Z de um sinal (função) contínuo no tempo, $f(t)$ é baseada principalmente na amostragem da função por um sampler ideal. O resultado disto é que a **transformada Z, $F(z)$, representa a função $f(t)$ somente nos instantes de amostragem.**
- A transformada Z inversão não é única! Dado $F(z)$, sua transformada inversa fornece somente a solução para $f(kT)$. **Estritamente citando, a solução para $f(t)$ é desconhecida.**
- A exatidão do método depende da magnitude da frequência de amostragem, ω_s , ou do período de amostragem T em relação ao componente de maior frequência contido na função $f(t)$. Se o período de amostragem for muito grande (ou a frequência de amostragem é muito baixa), a solução da transformada Z pode ser errônea, uma vez que $f^*(t)$ não será uma boa representação de $f(t)$.
- É necessário se atentar para o fato de que $F(z)$ foi formada a partir de uma sequência e assim contém apenas a informação de $f(t)$ nos pontos de amostragem do sinal.

$$F(z) = \mathcal{L} \{f^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k}$$

Ex₂) Transformada Z da função Impulso:

$$\mathcal{Z} \{ \delta(t) \} = \mathcal{Z} \{ \delta(kT) \} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = 1$$

Ex₃) Transformada Z da função Degrau:

$$\mathcal{Z} \{u(t)\} = \mathcal{Z} \{u^*(T)\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = \quad ?$$

Ex₃) Transformada Z da função Degrau:

$$\mathcal{Z} \{u(t)\} = \mathcal{Z} \{u^*(T)\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = ?$$

- Lembrando de Séries Geométricas, ou P.G.s:

$$S(q) = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n = \sum_{k=0}^n a \cdot q^k$$

onde: $a = 1^{\circ}$ termo da série e $q =$ razão da série.

- Estamos interessados em descobrir: $\sum_{k=0}^n a \cdot q^k$

$$\left. \begin{array}{rcl} S(q) & = & a + aq + aq^2 + \dots + aq^n \\ q \cdot S(q) & = & aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n+1} \\ \hline S(q) - qS(q) & = & a - aq^{n+1} \\ S(q)(1 - q) & = & a - aq^{n+1} \end{array} \right\} S(q) = \frac{a - aq^{n+1}}{1 - q}$$

- Voltando ao nosso caso...

Ex3) Transformada Z da função Degrau:

$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \mathcal{Z}\{u^*(T)\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = ?$$

- Lembrando de Séries Geométricas, ou P.G.s:

$$S(q) = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n = \sum_{k=0}^n a \cdot q^k \longrightarrow S(q) = \frac{a - aq^{n+1}}{1 - q}$$

- Voltando ao nosso caso...

$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1z^{-k} = 1 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + \dots = \left. \frac{1 - 1(z^{-1})^{n+1}}{1 - z^{-1}} \right|_0^{\infty}$$

- Verificando se a série converge:

$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left. \frac{1 - 1(z^{-1})^{n+1}}{1 - z^{-1}} \right|_0^{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \overbrace{z^{-n}}^{=0} \cdot 1}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

- Assim: $\mathcal{Z}\{u(t)\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad \text{Se } |z| > 1$

Ex3) Transformada Z da função Degrau:

Adaptando como “regra” geral para uma P.G.:

$$\sum_{n=0}^{\infty} Ax^n = \frac{A}{1-x}, \quad \text{Se } |x| < 1$$

$$q^k = ?$$

$$S(q) = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n = \sum_{k=0}^n a \cdot q^k \longrightarrow S(q) = \frac{a - aq^{n+1}}{1 - q}$$

- Voltando ao nosso caso...

$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1z^{-k} = 1 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + \dots = \frac{1 - 1(z^{-1})^{n+1}}{1 - z^{-1}} \bigg|_0^{\infty}$$

- Verificando se a série converge:

$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 1(z^{-1})^{n+1}}{1 - z^{-1}} \bigg|_0^{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \overbrace{z^{-n}}^{=0} \cdot 1}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

- Assim:

$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad \text{Se } |z| > 1$$

Ex₃) Transformada Z da função Degrau:

$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \mathcal{Z}\{u^*(T)\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = ?$$

- Lembrando de Séries Geométricas, ou P.G.s:

$$S(q) = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n = \sum_{k=0}^n a \cdot q^k \longrightarrow S(q) = \frac{a - aq^{n+1}}{1 - q}$$

- Voltando ao nosso caso...

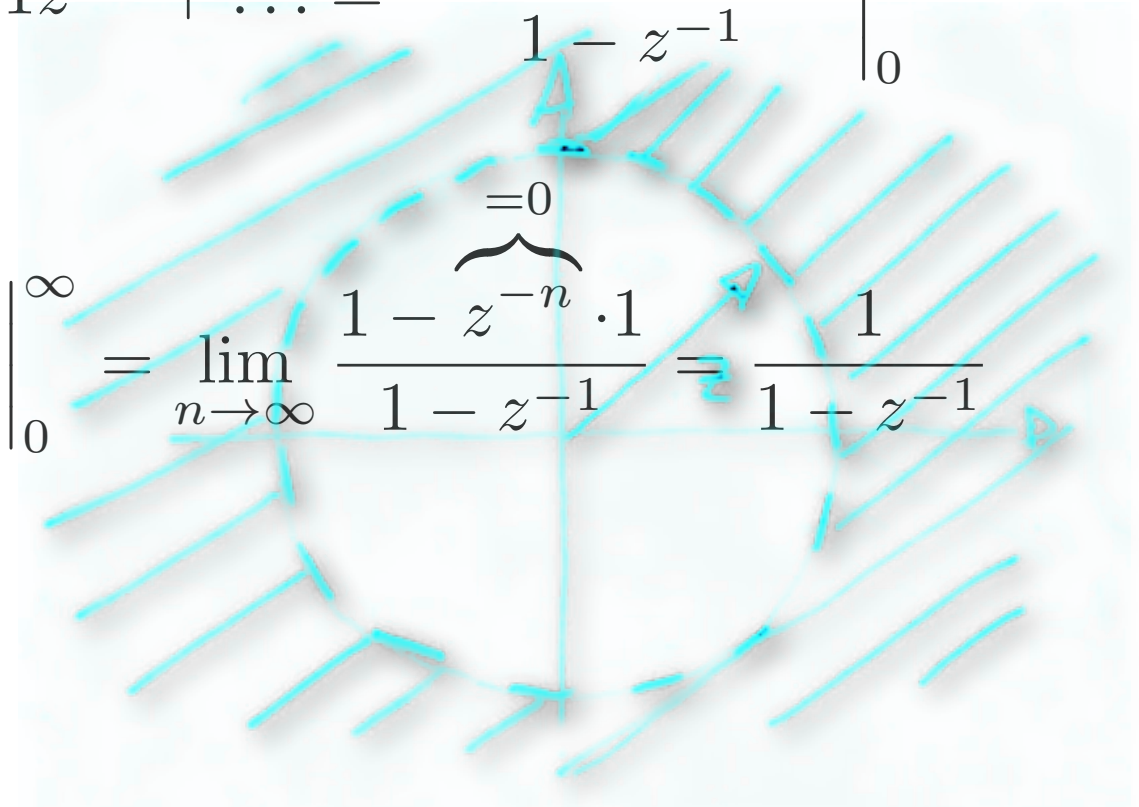
$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1z^{-k} = 1 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + \dots = \frac{1 - 1(z^{-1})^{n+1}}{1 - z^{-1}} \Big|_0^{\infty}$$

- Verificando se a série converge:

$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 1(z^{-1})^{n+1}}{1 - z^{-1}} \Big|_0^{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \overbrace{z^{-n}}^{=0} \cdot 1}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

- Assim:

$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad \text{Se } |z| > 1$$



Ex3) Transformada Z da função Degrau:

$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \mathcal{Z}\{u^*(T)\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = ?$$

Note:

$r^{-n} \Rightarrow$ exponencial

crescente p/ $r < 1 \therefore$ Ex.: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$

decrescente p/ $r > 1 \therefore$ Ex.: $(2)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0,125$

$$\rightarrow S(q) = \frac{a - aq^{n+1}}{1 - q}$$

$$\left. \frac{1 - 1(z^{-1})^{n+1}}{1 - z^{-1}} \right|_0^{\infty}$$

- Verificando se a série converge:

$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left. \frac{1 - 1(z^{-1})^{n+1}}{1 - z^{-1}} \right|_0^{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \overbrace{z^{-n}}^{=0} \cdot 1}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

- Assim: $\mathcal{Z}\{u(t)\} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$ Se $|z| > 1$

Ex3) Transformada Z da função Degradada

$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \mathcal{Z}\{u^*(T)\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} =$$

Note:

$r^{-n} \Rightarrow$ exponencial

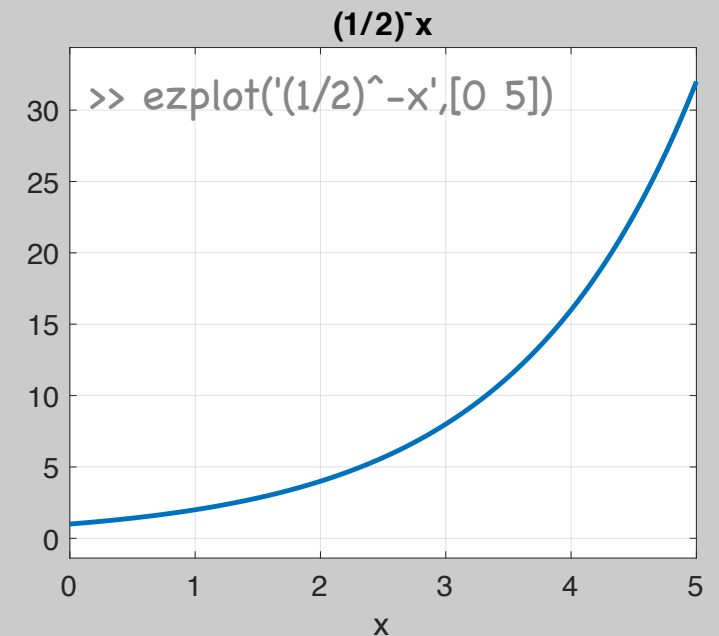
crescente p/ $r < 1 \therefore$ Ex.: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$

decrecente p/ $r > 1 \therefore$ Ex.: $(2)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0,125$

- Verificando se a série converge:

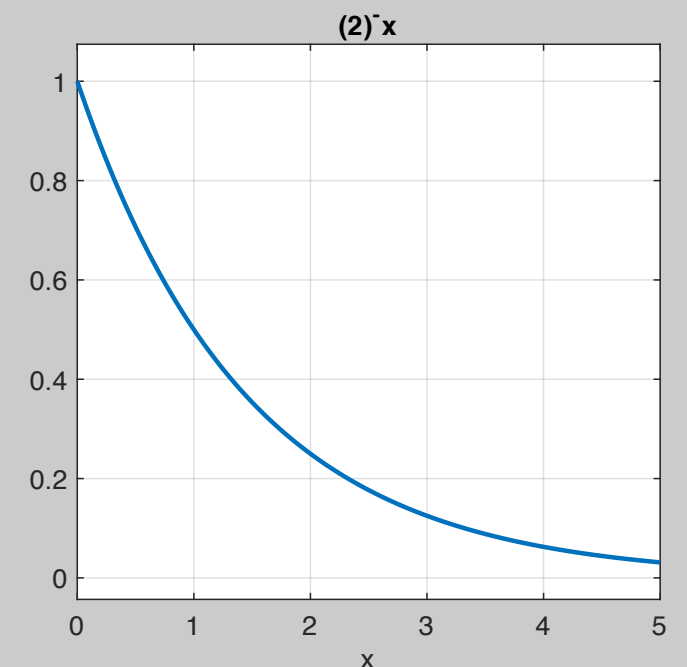
$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 1(z^{-1})^{n+1}}{1 - z^{-1}} \Big|_0^{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{-n-1}}{1 - z^{-1}}$$

- Assim: $\mathcal{Z}\{u(t)\} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$ Se $|z| > 1$



$$S(q) = \frac{a - aq^{n+1}}{1 - q}$$

$$\frac{1 - 1(z^{-1})^{n+1}}{1 - z^{-1}} \Big|_0^{\infty}$$



Ex4) Transformada Z de uma série:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{-k} = 1 + 2z^{-1} + 4z^{-2} + 8z^{-3} + \dots = ?$$

$$f[k] = (a)^k, \quad p/k=0,1,2,3,\dots$$

$$f[k] = [1, a, a^2, a^3, \dots]$$

$$\downarrow z$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot z^{-1})^n = \underbrace{1 + a \cdot z^{-1} + a^2 \cdot z^{-2} + \dots}_{\text{P.G.} \Rightarrow a=1}$$

$$q=a$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A \cdot x^n = \frac{A}{1-x}, \text{ se } |x| < 1$$

$$F(z) = \frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}} \cdot \frac{z^{-1}}{z^{-1}}$$

$$F(z) = \frac{z}{z - a}$$

$$F(z) = \frac{z}{z - 2}$$

Ex5) Transformada Z da função Exponencial:

$$\mathcal{Z} \{e^{-at}\} = \mathcal{Z} \{e^{-a(kT)}\} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-aT} \cdot z^{-1})^k = 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + \dots + ?$$

$$F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \overbrace{(e^{-aT} z^{-1})}^{=0}^{n+1}}{1 - e^{-aT} z^{-1}} \quad \therefore \left[\leftarrow \sum_{k=0}^n a q^k = S(q) = \frac{a - a q^{n+1}}{1 - q} \right]$$

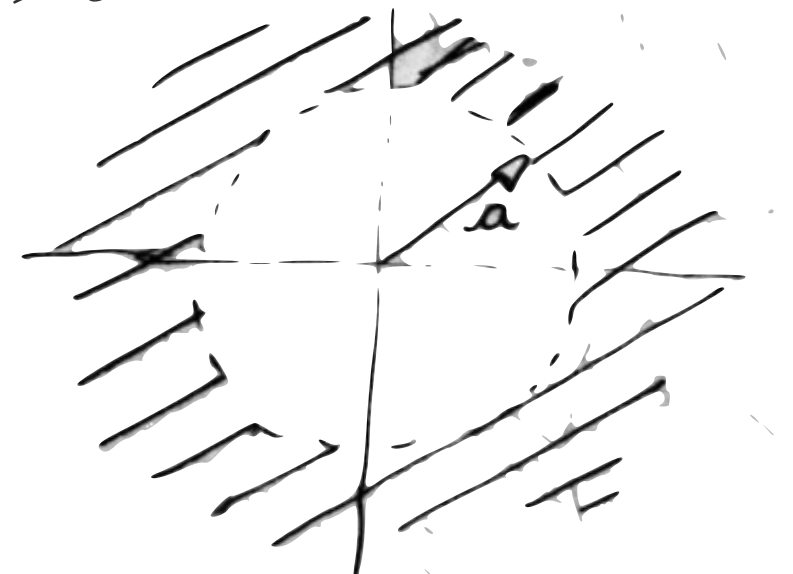
$$F(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

Este limite converge se:

$$\left[\frac{e^{-aT}}{|z|} \right] < 1 \quad \therefore \quad |z| > e^{-aT}$$

Note também que:

$$\mathcal{L} \{e^{-at}\} = \frac{1}{s + a}$$



Plano z

Ex5) Transformada Z da função Exponencial:

Se: $f[kT] = e^{-a \cdot (kT)}$ $\therefore F(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}}$ $\mathcal{L} \{e^{-at}\} = \frac{1}{s + a}$

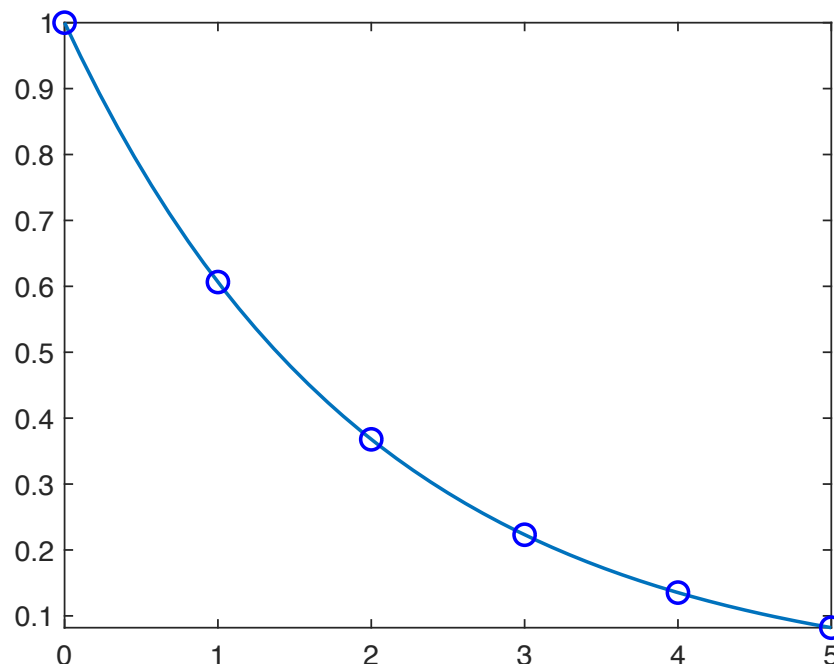
Suponha $a = 0,5 \rightarrow$ Pólo em $s = -0,5$ (**estável**) e $T = 1,0$ (segundo): $F(s) = \frac{1}{s + 0,5}$; $a = -0,5$

$$F(z) = \frac{z}{z - e^{(-0,5 \cdot 1,0)}}$$

$$F(z) = \frac{z}{z - 0.6065}$$

Resposta (ao impulso) no tempo: $\mathcal{Z}^{-1} = e^{-0,5 \cdot k \cdot 1}$

>> fplot(@k) (0.6065).^k, [0 5])



```
>> k = 0:1:5;
>> f = (0.6065).^k;
>> [k' f']
      0      1.0000
      1      0.6065
      2      0.3678
      3      0.2231
      4      0.1353
      5      0.0821
>> hold on
>> plot(k, f, 'bo')
```

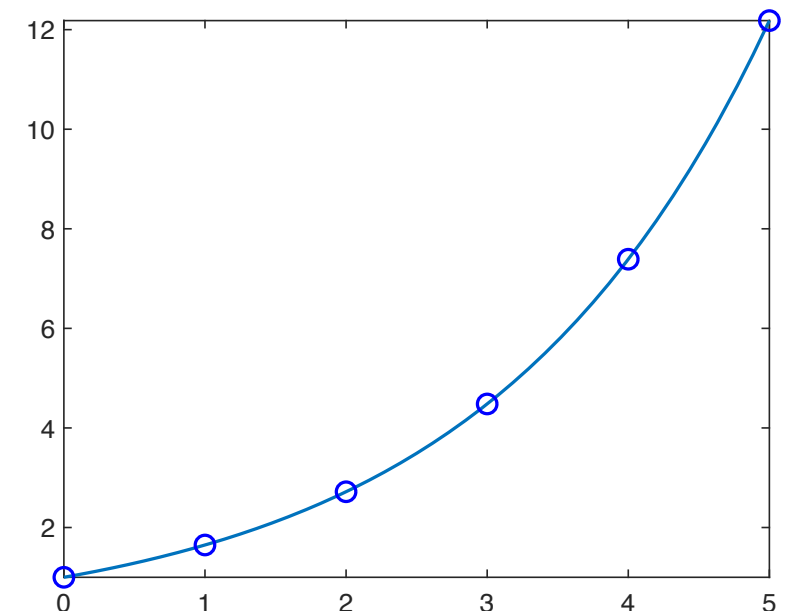
Se entretanto: $a = -0,5$ (pólo **instável**; em $s = +0,5$)

$$F(s) = \frac{1}{s - 0,5}$$

$$F(z) = \frac{z}{z - e^{(0,5 \cdot 1,0)}}$$

$$F(z) = \frac{z}{z - 1.6487}$$

```
>> f=(1.6487).^k;
>> [k' f']
      0      1.0000
      1      1.6487
      2      2.7182
      3      4.4815
      4      7.3887
      5     12.1817
```



Note (1):

Função: $y[k] = (a)^k$, $p/k = 0, 1, 2, 3, \dots$

\downarrow

$$y[k] = [1, a, a^2, a^3, \dots]$$

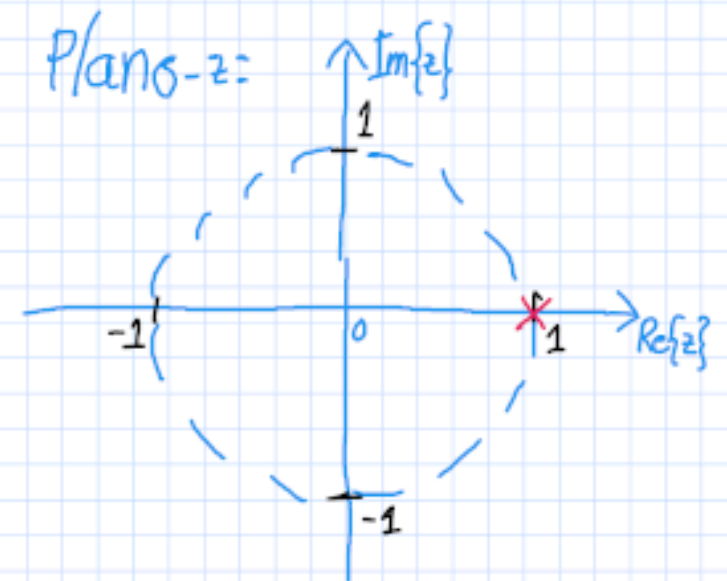
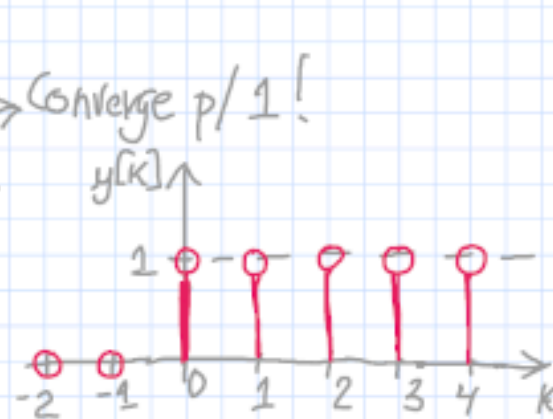
converge?

$$\Leftrightarrow Y(z) = \frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}} \cdot \frac{z^{+1}}{z^{+1}} = \frac{z}{z - a}$$

Caso 1) $y[k] = (1)^k \leftarrow$ Degrau

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (1)^k \cdot z^{-k} = 1 + 1 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + 1 \cdot z^{-3} + \dots$$

$$Y(z) = \frac{1}{1 - 1 \cdot z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$



Note (2):

Função: $y[k] = (a)^k$, $p/k=0,1,2,3,\dots$

$$y[k] = [1, a, a^2, a^3, \dots]$$

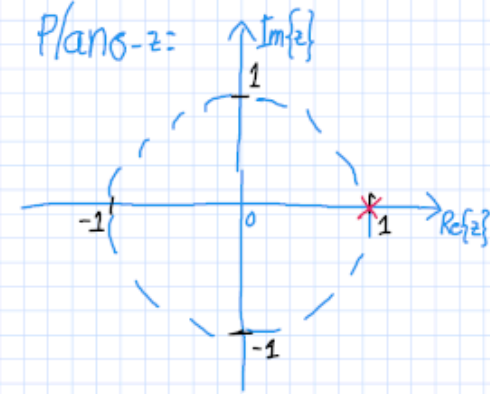
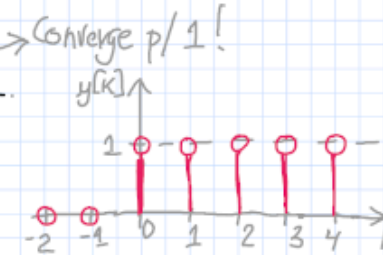
converge?

$$\Leftrightarrow Y(z) = \frac{1}{1-a \cdot z^{-1}} \cdot \frac{z^{+1}}{z^{+1}} = \frac{z}{z-a}$$

Caso 1) $y[k] = (1)^k \leftarrow$ Degrau

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (1)^k \cdot z^{-k} = 1 + 1 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + 1 \cdot z^{-3} + \dots$$

$$Y(z) = \frac{1}{1-1 \cdot z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

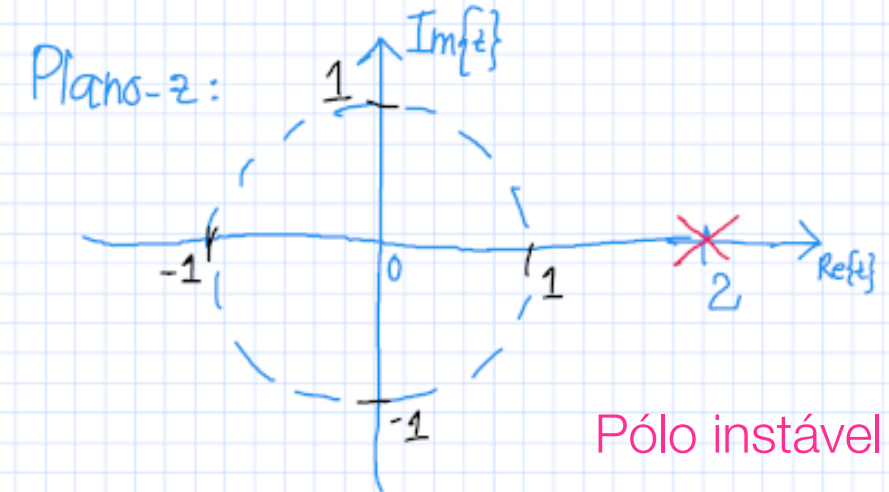


Caso 2) $y[k] = (2)^k$

$$Y(z) = ?$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot z^{-k} = 1 + 2 \cdot z^{-1} + 4 \cdot z^{-2} + 8 \cdot z^{-3} + \dots$$

$$F(z) = \frac{z}{z-2}$$



Pólo instável

Caso 3) $y[k] = \left(\frac{1}{2}\right)^k$

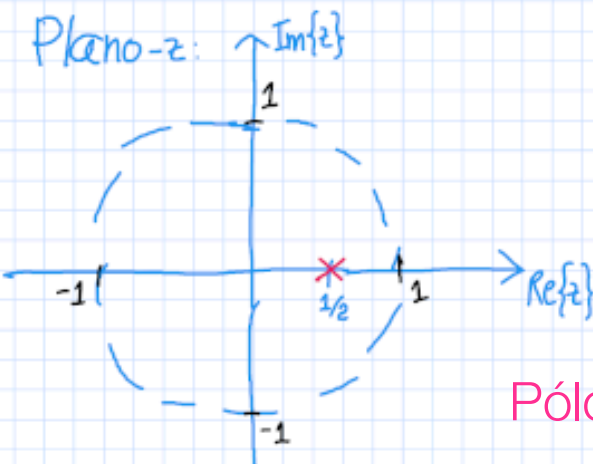
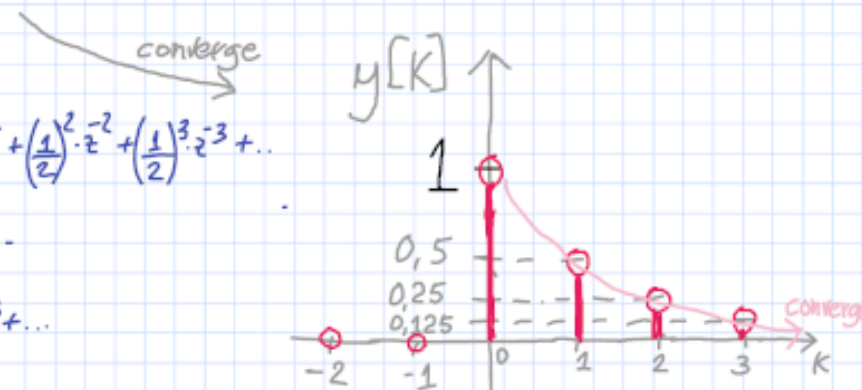
$$Y(z) = ?$$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot z^{-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot z^{-0} + \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot z^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot z^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot z^{-3} + \dots$$

$$Y(z) = 1 + \frac{1}{2} \cdot z^{-1} + \frac{1}{4} \cdot z^{-2} + \frac{1}{8} \cdot z^{-3} + \dots$$

$$Y(z) = 1 + 0,5z^{-1} + 0,25z^{-2} + 0,125z^{-3} + \dots$$

$$Y(z) = \frac{z}{z-0,5}$$



Pólo estável

Note (3):

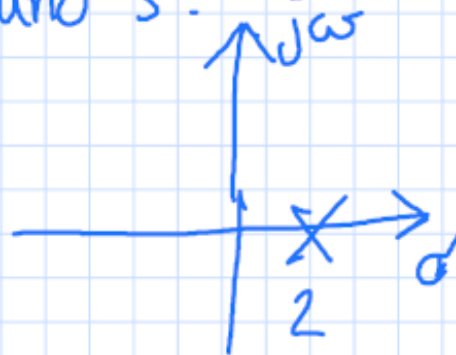
Função exponencial:

$$y = e^{at}$$

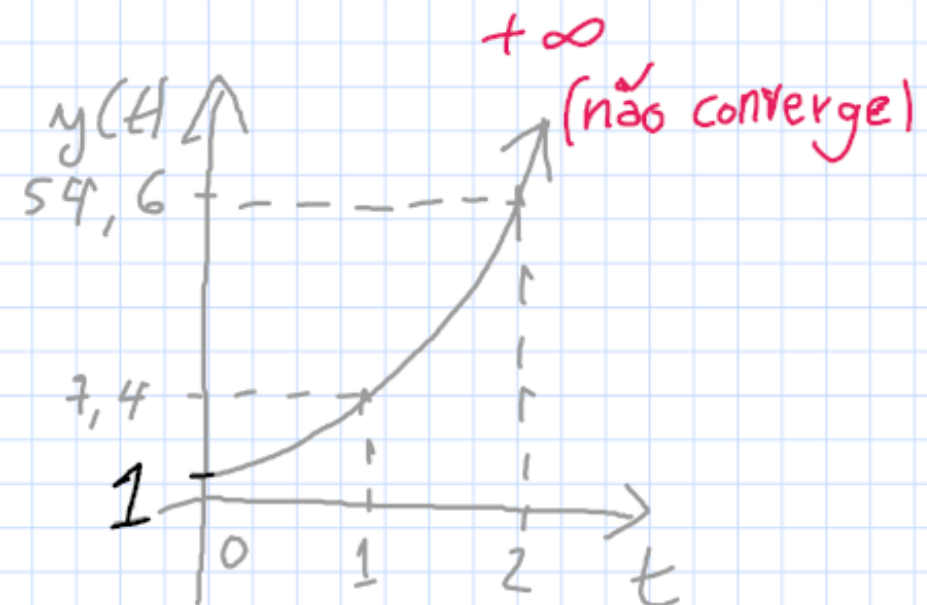
Caso 1) $a > 0$

Ex: $a = 2$

Plano-s:

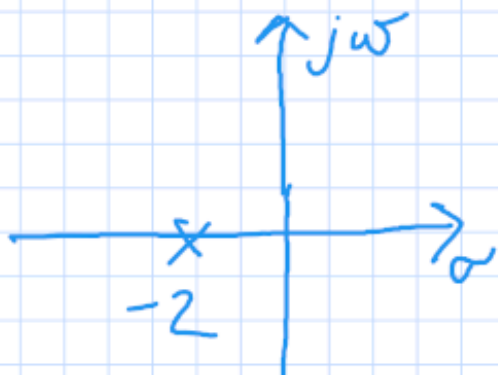


$$\begin{aligned} \therefore y(t) &= e^{2t} \\ y(0) &= e^{2 \cdot 0} = 1 \\ y(1) &= e^{2 \cdot 1} = 7,3891 \\ y(2) &= e^{2 \cdot 2} = 54,5982 \\ &\vdots \\ y(\infty) &= \infty \text{ (não converge)} \end{aligned}$$

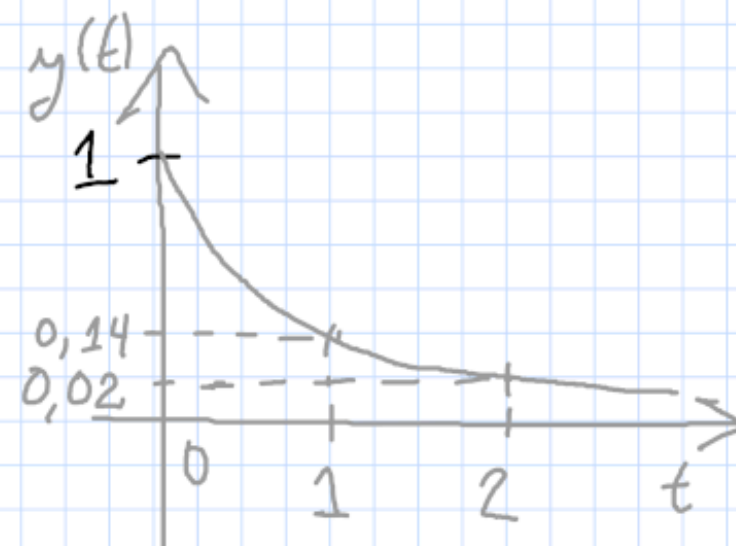


Caso 2) $a < 0$

Ex: $a = -2$



$$\begin{aligned} \therefore y(t) &= e^{-2t} \\ y(0) &= e^{-2 \cdot 0} = 1 \\ y(1) &= e^{-2 \cdot 1} = 0,1353 \\ y(2) &= e^{-2 \cdot 2} = 0,0183 \\ &\vdots \\ y(\infty) &= 0 \text{ (converge)} \end{aligned}$$



Exercícios:

1. Esboce o sinal: $y(kT) = 1 - 0,5^k$

2. Note que o sinal anterior: $y(kT)_{k \rightarrow \infty} = 1,0$

3. Dada a seguinte relação de pontos, obtenha sua equivalente transformada Z:

$$x(0) = 5$$

$$x(1) = 4$$

$$x(2) = 3$$

$$x(3) = 2$$

$$x(4) = 1$$

$$x(k) = 0 \quad \forall k \geq 5$$

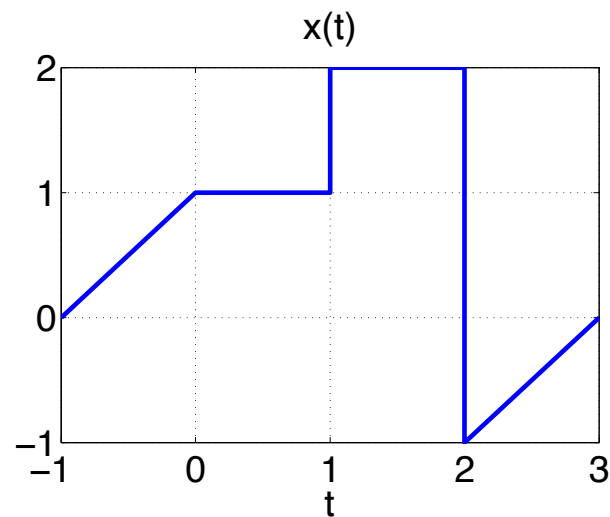
4. Dada outra sequência de pontos, determine sua $Y(z)$:

Obs.: condição inicial: $y(-1) = 8$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y(0) & = & 4 \\ y(1) & = & 1 \\ y(2) & = & 1 \\ y(3) & = & 0,5 \\ & \vdots & \\ y(k)_{k \rightarrow \infty} & = & ? \end{array} \right.$$

Problemas

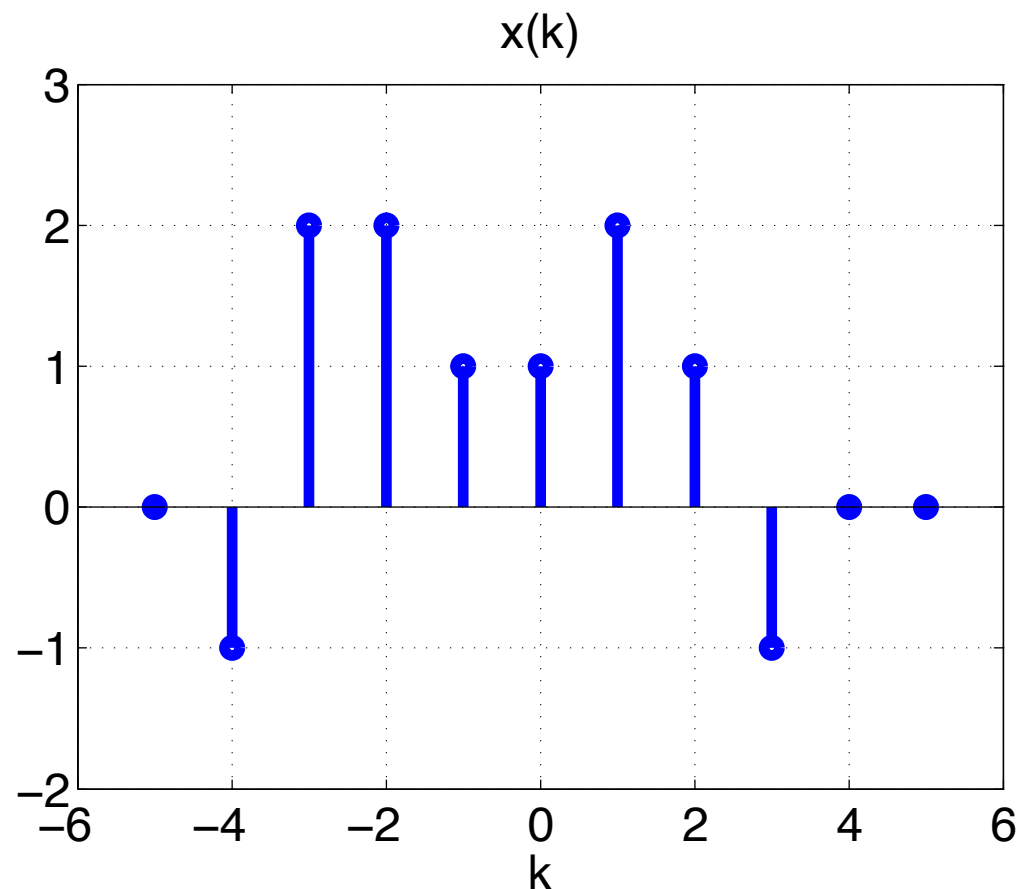
5. Esboce os sinais resultantes para:



a) $x(t - 2)$ \leftarrow Deslocamento no tempo

b) $x(1 - t)$

c) $x(-t + 1)$ \leftarrow Reflexão de sinal + Deslocamento no tempo



$$x_E(k) = \frac{1}{2} \{x(k) + x(-k)\}$$

$$x_O(k) = \frac{1}{2} \{x(k) - x(-k)\}$$

