

Transformada Z Inversa

Parte 3/3

Prof. Fernando Passold

a) Método da Inversão por **Divisão Longa**

- Expansão em série de potências.
- Uma série de potências de Z (amostras do sinal a cada instante de amostragem) pode ser obtido pela simples divisão contínua da função Z, do polinômio do seu numerador pelo polinômio do denominador.

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$
$$\begin{array}{r} N(z) \\ \hline D(z) \\ \hline \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \end{array}$$

- Exemplo: Calcule os primeiros termos da sequencia correspondente à transformação:

$$Y(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 2z}{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}$$

$$\begin{array}{r} z^3 - 2z^2 + 2z \\ \hline -z^3 + 3z^2 - 3z + 1 \\ \hline 1z^2 - 1z + 1 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} z^3 - 3z^2 + 3z - 1 \\ \hline \end{array}$$

a) Método da Inversão por **Divisão Longa**

- Expansão em série de potências.
- Uma série de potências de Z (amostras do sinal a cada instante de amostragem) pode ser obtido pela simples divisão contínua da função Z, do polinômio do seu numerador pelo polinômio do denominador.

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$
$$\begin{array}{r} N(z) \\ \hline D(z) \\ \hline \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \end{array}$$

- Exemplo: Calcule os primeiros termos da sequencia correspondente à transformação:

$$Y(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 2z}{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}$$

$$\begin{array}{r} z^3 - 2z^2 + 2z \\ \hline -z^3 + 3z^2 - 3z + 1 \\ \hline 1z^2 - 1z + 1 \\ \hline -1z^2 + 3z - 3 + 1z^{-1} \\ \hline 2z - 2 + 1z^{-1} \end{array}$$

a) Método da Inversão por **Divisão Longa**

- Expansão em série de potências.
- Uma série de potências de Z (amostras do sinal a cada instante de amostragem) pode ser obtido pela simples divisão contínua da função Z, do polinômio do seu numerador pelo polinômio do denominador.

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$
$$\begin{array}{r} N(z) \\ \hline D(z) \\ \hline \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \end{array}$$

- Exemplo: Calcule os primeiros termos da sequencia correspondente à transformação:

$$Y(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 2z}{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}$$

$$\begin{array}{r} z^3 - 2z^2 + 2z \\ \hline -z^3 + 3z^2 - 3z + 1 \\ \hline 1z^2 - 1z + 1 \\ -1z^2 + 3z - 3 + 1z^{-1} \\ \hline 2z - 2 + 1z^{-1} \\ -2z + 6 - 6z^{-1} + 2z^{-2} \\ \hline 4 - 5z^{-1} + 2z^{-2} \end{array}$$

a) Método da Inversão por **Divisão Longa**

- Expansão em série de potências.
- Uma série de potências de Z (amostras do sinal a cada instante de amostragem) pode ser obtido pela simples divisão contínua da função Z, do polinômio do seu numerador pelo polinômio do denominador.

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$
$$\begin{array}{r} N(z) \\ \hline D(z) \\ \hline \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \end{array}$$

- Exemplo: Calcule os primeiros termos da sequencia correspondente à transformação:

$$Y(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 2z}{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}$$

$$\begin{array}{r} z^3 - 2z^2 + 2z \\ \hline -z^3 + 3z^2 - 3z + 1 \\ \hline 1z^2 - 1z + 1 \\ -1z^2 + 3z - 3 + 1z^{-1} \\ \hline 2z - 2 + 1z^{-1} \\ -2z + 6 - 6z^{-1} + 2z^{-2} \\ \hline 4 - 5z^{-1} + 2z^{-2} \end{array}$$

Assim:

$$Y(z) = 1 + z^{-1} + 2z^{-2} + 4z^{-3} + \dots$$

Lembrando da definição da transformada Z:

$$y(k) = \{1, 1, 2, 4, \dots\}$$

Exercício:

- Determine as primeiras 3 amostras de: $F(z) = \frac{0,5z}{(z - 1)(z - 0,5)}$
- Solução: $f(k) = \{0; 0,5; 0,75; 0,875; \dots\}$ e $f(\infty) = ?$

b) Método da Expansão em **Frações Parciais**

- Requer uso de tabelas de pares de transformadas Z: $[f(t) \xrightarrow{Z} F(z)]$

$F(s)$	$f(t)$	$f(k)$	$F(z)$	Obs
$\frac{1}{s}$	$u(t)$	$u(k)$	$\frac{z}{z - 1}$	Degrau Unitário
		a^k	$\frac{z}{z - a}$	
$\frac{1}{s^2}$	t	kT	$\frac{Tz}{(z - 1)^2}$	Rampa
$\frac{1}{s + a}$	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$	Exponencial
$\frac{1}{(s + a)^2}$	$t e^{at}$	$kT e^{-akT}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$	Pólos Múltiplos
$\frac{a}{s(s + a)}$	$1 - e^{-at}$	$1 - e^{-akT}$	$\frac{z(1 - e^{-aT})}{(z - 1)(z - e^{-aT})}$	Exponencial Decrescente

b) Método da Expansão em **Frações Parciais**

- Requer uso de tabelas de pares de transformadas Z: $[f(t) \xrightarrow{Z} F(z)]$
- Exemplo_1) Aplicando este método com o exemplo anterior:

$$F(z) = \frac{0,5z}{(z-1)(z-0,5)}$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{0,5}{(z-1)(z-0,5)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0,5}$$

$$A = (z-1) \cdot F'(z)|_{z=1} \quad \therefore \quad A = \left. \frac{(z-1)0,5}{(z-1)(z-0,5)} \right|_{z=1} \quad \therefore \quad A = \frac{0,5}{1-0,5} = 1$$

$$B = (z-0,5) \cdot F'(z)|_{z=0,5} \quad \therefore \quad B = \left. \frac{(z-0,5)0,5}{(z-1)(z-0,5)} \right|_{z=0,5} \quad \therefore \quad B = \frac{0,5}{0,5-1} = -1$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-0,5} \quad \therefore \quad F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0,5}$$

$F(s)$	$f(t)$	$f(k)$	$F(z)$	Obs
$\frac{1}{s}$	$u(t)$	$u(k)$	$\frac{z}{z-1}$	Degrau Unitário
		a^k	$\frac{z}{z-a}$	
$\frac{1}{s^2}$	t	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	Rampa
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	Exponencial
$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{at}	$kT e^{-akT}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$	Pólos Múltiplos
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$	$1 - e^{-akT}$	$\frac{z(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$	Exponencial Decrescente

$$A = (z-1) \cdot F'(z)|_{z=1} \quad \therefore \quad A = \frac{(z-1)0,5}{(z-1)(z-0,5)} \Big|_{z=1} \quad \therefore \quad A = \frac{0,5}{1-0,5} = 1$$

$$B = (z-0,5) \cdot F'(z)|_{z=0,5} \quad \therefore \quad B = \frac{(z-0,5)0,5}{(z-1)(z-0,5)} \Big|_{z=0,5} \quad \therefore \quad B = \frac{0,5}{0,5-1} = -1$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-0,5} \quad \therefore \quad F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0,5}$$

$$\therefore f(kT) = 1 \cdot 1^k - 1 \cdot 0,5^k = 1 - 0,5^k$$

b) Método da Expansão em Série

- Requer uso de tabelas de pares de transformadas.
- Exemplo_1) Aplicando este método com

$$F(z) = \frac{0,5z}{(z-1)(z-0,5)}$$

Note que: $f(kT)=1-0,5^k$

$$f(0)=0$$

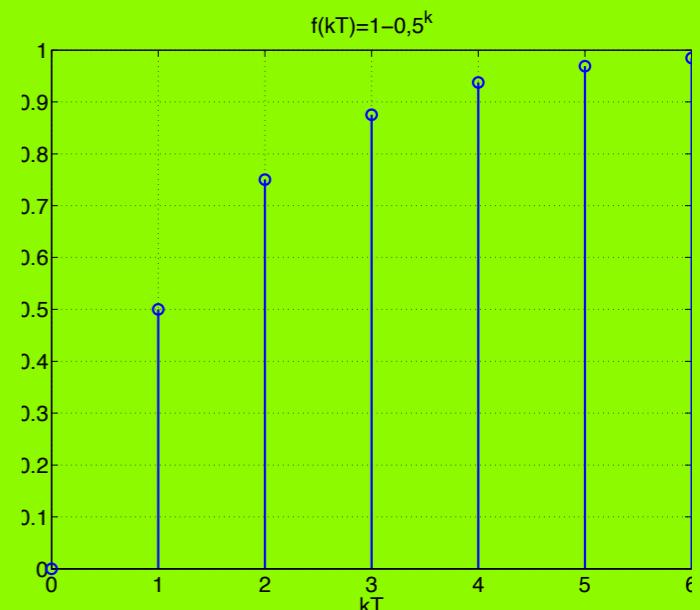
$$f(1)=0,5$$

$$f(2)=0,75$$

$$f(3)=0,875$$

...

$$f(kT)|_{k \rightarrow \infty} = 1,0$$



$$\frac{F(z)}{z} = \frac{0,5}{(z-1)(z-0,5)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0,5}$$

$$A = (z-1) \cdot F'(z)|_{z=1} \quad \therefore \quad A = \left. \frac{(z-1)0,5}{(z-1)(z-0,5)} \right|_{z=1} \quad \therefore \quad A = \frac{0,5}{1-0,5} = 1$$

$$B = (z-0,5) \cdot F'(z)|_{z=0,5} \quad \therefore \quad B = \left. \frac{(z-0,5)0,5}{(z-1)(z-0,5)} \right|_{z=0,5} \quad \therefore \quad B = \frac{0,5}{0,5-1} = -1$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-0,5} \quad \therefore \quad F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0,5}$$

$$\therefore f(kT) = 1 \cdot 1^k - 1 \cdot 0,5^k = 1 - 0,5^k$$

Note que: $f(kT) = 1 - 0,5^k$

$$f(0) = 0$$

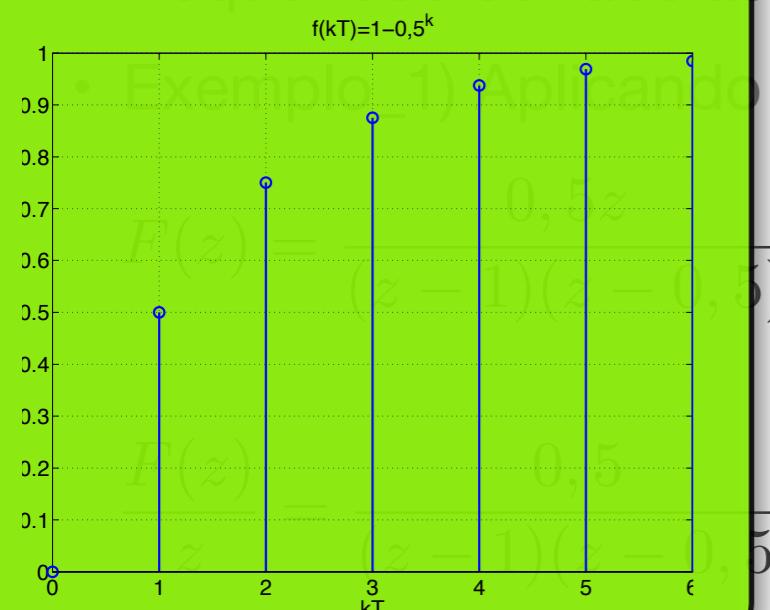
$$f(1) = 0,5$$

$$f(2) = 0,75$$

$$f(3) = 0,875$$

...

$$f(kT)|_{k \rightarrow \infty} = 1,0$$



$$A = (z - 1) \cdot F'(z)|_{z=1} \quad \therefore \quad A =$$

$$B = (z - 0,5) \cdot F'(z)|_{z=0,5} \quad \therefore \quad B =$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-0,5} \quad \therefore$$

$$f(kT) = 1 - 0,5^k$$

Expansão

de parênteses
este mé-

$$F(z) = \frac{0,5 z}{(z-1)(z-0,5)}$$

$$U(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$G(z) = \frac{0,5}{z-0,5}$$



$$F(z) = U(z) \cdot G(z)$$

$$G(z) = \frac{F(z)}{U(z)}$$

$$G(z) = \frac{0,5}{(z-0,5)} \cdot \frac{\div z^{-1}}{\div z^{z-1}}$$

$$G(z) = \frac{F(z)}{U(z)} = \frac{0,5 z^{-1}}{(1 - 0,5 z^{-1})}$$

$$F(z) (1 - 0,5 z^{-1}) = U(z) \cdot 0,5 z^{-1}$$

$$F(z) = 0,5 z^{-1} U(z) + 0,5 z^{-1} F(z)$$

$$\downarrow z^{-1}$$

$$f[kT] = 0,5 u[(k-1)T] + 0,5 f[(k-1)T]$$

Prop. atraso no tempo:
 $\mathcal{Z}\{x(t-nT)\} = z^{-n} X(z)$

Note:

$$f[0] = 0,5 * u[0] + 0,5 * f[0];$$

$u[kT] = 1$ p/ $k \geq 0$; % Def. entrada degrau

$f[kT] = 0$ p/ $k < 0$; % Sist. causal

então:

$$f[0] = 0,5 * 0 + 0,5 * 0 = 0;$$

$$f[1] = 0,5 * u[0] + 0,5 * f[0] = 0,5 * 1 + 0 = 0,5$$

$$f[2] = 0,5 * u[1] + 0,5 * f[1] = 0,5 * 1 + 0,5 * 0,5 = 0,75$$

$$f[3] = 0,5 * u[2] + 0,5 * f[2] = 0,5 * 1 + 0,5 * 0,75 = 0,875$$

$$f[4] = 0,5 * u[3] + 0,5 * f[3] = 0,5 * 1 + 0,5 * 0,875 = 0,9375$$

Lembrando de Laplace...

- Expansão em frações parciais, se fazia:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+b} + \dots$$

$$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$f(t) = Ae^{-at} + Be^{-bt} + \dots$$

$$F(z) \xrightarrow{Z^{-1}} f(kT)$$

$$\frac{F(z)}{z} = F'(z) = \frac{A}{z-a} + \dots$$

$$f(kT) = A a^k$$

Assim, para obter-se $f(kT)$ à partir de $F(z)$ temos que decompor $F(z)$ da seguinte forma:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b}$$

para obter-se termos simples na forma:

$$\frac{c_i z}{z-a} \xrightarrow{Z^{-1}} c_i a^k$$

Lembrando de Laplace...

$$F(s) = K_0 + \frac{K_1}{s - s_1} + \frac{K_2}{s - s_2} + \dots + \frac{K_n}{s - s_n}, \text{ (expansão em frações parciais)}$$

K_0 =termo constante, quando grau de $N(s)$ =grau de $D(s)$, exemplo:

$$F(s) = \frac{2s^2 + 4s + 5}{4s^2 + 1} = \frac{1}{2} + \frac{N'(s)}{4s^2 + 1} = \frac{1}{2} + \frac{4s + 9/2}{4s^2 + 1}$$

$$\begin{array}{r} 2s^2 + 4s + 5 \\ -2s^2 \quad \quad \quad | \quad 4s^2 + 1 \\ \hline 4s + \frac{9}{2} \end{array}$$

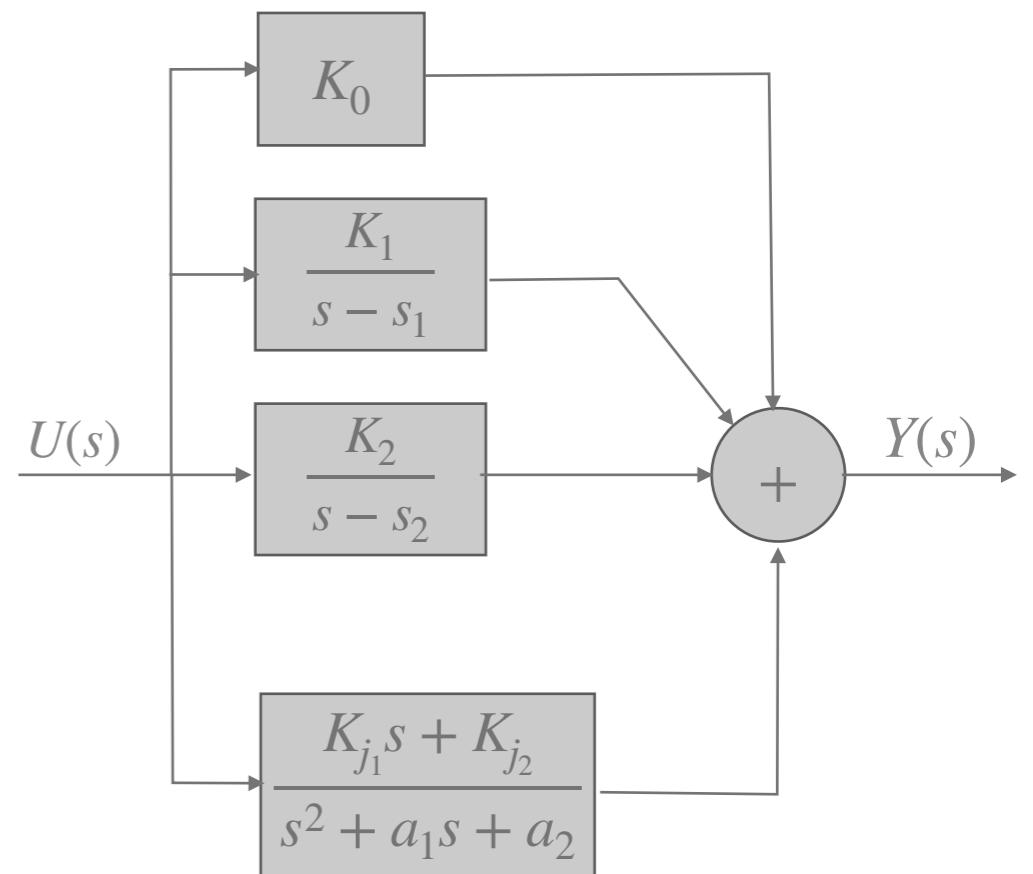
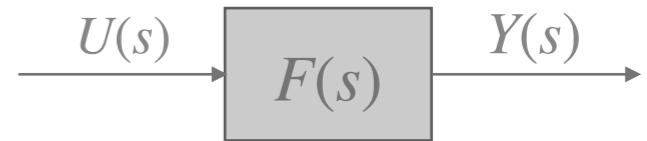
$$\text{Casos } \left\{ \begin{array}{l} s_i = \text{real, então } \rightarrow \frac{K_i}{s - s_1}; \\ s_1 = \text{complexo, então } \rightarrow \frac{K_j}{s - s_j} + \frac{K_j^*}{s - s_j^*} \end{array} \right.$$

Onde $s_j = \text{complexo}$.

Se $s_j = a + jb$ então $s_j^* = a - jb$ e teremos:

$$\Rightarrow \frac{K_j}{s - s_j} + \frac{K_j^*}{s - s_j^*} = \frac{K_{j_1} + K_{j_2}}{s^2 + a_1s + a_2}$$

Onde K_{j_1} e K_{j_2} , a_1 e a_2 são reais.



Exercício:

- Obtenha $y(kT)$ à partir de: $Y(z) = \frac{z+4}{(z-1)(z-2)}$

$$y(kT) = 2\delta(k) - 5 + 3(-2)^k$$

Exercício:

- Obtenha $y(kT)$ à partir de: $Y(z) = \frac{z+4}{(z-1)(z-2)}$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z+4}{z(z-1)(z-2)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-1} + \frac{c}{z-2}$$

$$a = z \cdot Y'(z)|_{z=0} \quad \therefore \quad a = \left. \frac{z(z+4)}{z(z-1)(z-2)} \right|_{z=0} \quad \therefore \quad a = \frac{4}{(-1)(-2)} = 2$$

$$b = (z-1) \cdot Y'(z)|_{z=1} \quad \therefore \quad b = \left. \frac{(z-1)(z+4)}{z(z-1)(z-2)} \right|_{z=1} \quad \therefore \quad b = \frac{5}{(1)(-1)} = -5$$

$$c = (z-2) \cdot Y'(z)|_{z=2} \quad \therefore \quad c = \left. \frac{(z-2)(z+4)}{z(z-1)(z-2)} \right|_{z=2} \quad \therefore \quad c = \frac{6}{(2)(1)} = 3$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2}{z} + \frac{(-5)}{z-1} + \frac{3}{z-2}$$

$$Y(z) = \frac{2z}{z} + \frac{(-5)z}{z-1} + \frac{3z}{z-2}$$

$F(s)$	$f(t)$	$f(k)$	$F(z)$	Obs
$\frac{1}{s}$	$u(t)$	$u(k)$	$\frac{z}{z-1}$	Degrau Unitário
$\frac{1}{s^2}$	t	a^k	$\frac{z}{z-a}$	
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	Rampa
$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{at}	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	Exponencial
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$	$kT e^{-akT}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$	Pólos Múltiplos
$c = (z-2) \cdot Y'(z) _{z=2}$	\dots	$1 - e^{-akT}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$	Exponencial Decrescente

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2}{z} + \frac{(-5)}{z-1} + \frac{3}{z-2}$$

$$Y(z) = \frac{2z}{z} + \frac{(-5)z}{z-1} + \frac{3z}{z-2}$$

$$y(kT) = 2\delta(k) - 5 + 3(-2)^k$$

$$y(kT) = \{0, -11, 7, -29, 43, -101, 187, -389, \dots\}$$

Exercício:

- Obtenha $y(kT)$ à partir de: $Y(z) = \frac{z+4}{(z-1)(z-2)}$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z+4}{z(z-1)(z-2)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-1} + \frac{c}{z-2}$$

$$a = z \cdot Y'(z)|_{z=0} \quad \therefore \quad a = \left. \frac{z(z+4)}{z(z-1)(z-2)} \right|_{z=0} \quad \therefore \quad a = \frac{4}{(-1)(-2)} = 2$$

$$b = (z-1) \cdot Y'(z)|_{z=1} \quad \therefore \quad b = \left. \frac{(z-1)(z+4)}{z(z-1)(z-2)} \right|_{z=1} \quad \therefore \quad b = \frac{5}{(1)(-1)} = -5$$

$$c = (z-2) \cdot Y'(z)|_{z=2} \quad \therefore \quad c = \left. \frac{(z-2)(z+4)}{z(z-1)(z-2)} \right|_{z=2} \quad \therefore \quad c = \frac{6}{(2)(1)} = 3$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2}{z} + \frac{(-5)}{z-1} + \frac{3}{z-2}$$

$$Y(z) = \frac{2z}{z} + \frac{(-5)z}{z-1} + \frac{3z}{z-2}$$

$$y(kT) = 2\delta(k) - 5 + 3(-2)^k$$

Usando MATLAB:

```
>> k=0:7; % gera vetor com instantes de amostragem  
>> y=-5+3*(-2).^k % gera correspondente vetor y(kT)  
y =      -2     -11      7    -29     43   -101    187   -389  
>>
```

$$y(kT) = \{0, -11, 7, -29, 43, -101, 187, -389, \dots\}$$

Caso de Pólos Complexos Conjugados

- Suponha que no momento de expandir $Y(z)$ surjam termos como:

$$Y(z) = \dots + \frac{A_1}{z - \alpha - j\beta} + \frac{A_2}{z - \alpha + j\beta} + \dots$$

A_1 é o resíduo de $p_1 = \alpha + j\beta$, então $A_2 = A_1^*$ é o resíduo de $p_2 = p_1^* = \alpha - j\beta$.

Em particular, se:

$$A_1 = (z - p_1) \cdot Y'(z)|_{z=p_1} = M \cdot e^{j\theta}$$

então

$$\frac{z \cdot M e^{j\theta}}{z - p_1} + \frac{z \cdot M e^{-j\theta}}{z - p_1^*} = \frac{2zM \cos(z - \alpha) - 2z\beta M \sin \theta}{(z - \alpha)^2 + \beta^2}$$

que pode ser invertido usando a transformada Z da tabela:

$$\mathcal{Z} \{e^{-at} \cos(\omega t - \theta)\} = \frac{z \cos \theta(z - a) - z\beta \sin \theta}{(z - a)^2 + \beta^2}$$

onde: $\alpha = e^{-aT} \cos \omega T$; e

$$\beta = e^{-aT} \sin \omega T$$

Note: $F(z) = \mathbf{Z}\{f(t) = \sin(\omega t)\}$

Exercícios

1) Para $F(z) = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2 \cos \omega T z + 1}$, obter $f(kT)$ pelo método da divisão polinomial quando:

- a) $T = \frac{\pi}{\omega}$ b) $T = \frac{\pi}{2\omega}$ e c) $T = \frac{\pi}{6\omega}$

Demonstre graficamente os resultados e realize uma comparação. Que está acontecendo?

Note: $F(z) = \mathbf{Z}\{f(t) = \sin(\omega t)\}$

Exercícios

1) Para $F(z) = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2 \cos \omega T z + 1}$, obter $f(kT)$ pelo método da divisão polinomial quando:

- a) $T = \frac{\pi}{\omega}$ b) $T = \frac{\pi}{2\omega}$ e c) $T = \frac{\pi}{6\omega}$

Demonstre graficamente os resultados e realize uma comparação. Que está acontecendo?

Solução:

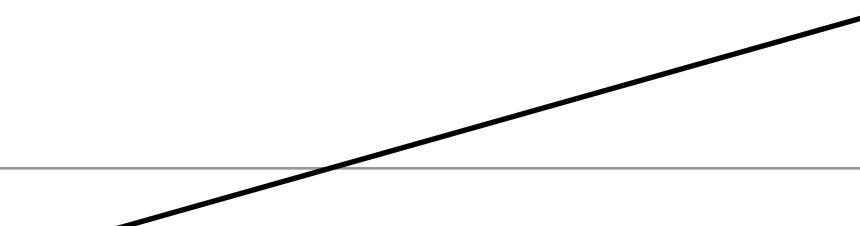
Quando a) $T = \frac{\pi}{\omega}$, teremos:

$$F(z) = \frac{z \cdot \sin \left(\omega \cdot \frac{\pi}{\omega} \right)}{z^2 - 2 \cos \left(\omega \cdot \frac{\pi}{\omega} \right) + 1}$$

$$F(z) = \frac{z \cdot \sin(\pi)}{z^2 - 2 \cos(\pi) + 1} \xrightarrow{0}$$

$$F(z) = 0$$

Mas o que aconteceu aqui?



Note: $F(z) = \mathbf{Z}\{f(t) = \sin(\omega t)\}$

Exercícios

1) Para $F(z) = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2 \cos \omega T z + 1}$, obter $f(kT)$ pelo método da divisão polinomial quando:

- a) $T = \frac{\pi}{\omega}$ b) $T = \frac{\pi}{2\omega}$ e c) $T = \frac{\pi}{6\omega}$

Demonstre graficamente os resultados e realize uma comparação. Que está acontecendo?

Solução:

Quando a) $T = \frac{\pi}{\omega}$, teremos:

$$F(z) = \frac{z \cdot \sin \left(\omega \cdot \frac{\pi}{\omega} \right)}{z^2 - 2 \cos \left(\omega \cdot \frac{\pi}{\omega} \right) + 1}$$

$$F(z) = \frac{z \cdot \sin(\pi)^0}{z^2 - 2 \cos(\pi) + 1}$$

$$F(z) = 0$$

Mas o que aconteceu aqui?

Note o seguinte:

Quando a) $T = \frac{\pi}{\omega} \Rightarrow f_s = \frac{\omega}{\pi} \quad \left(f = \frac{1}{T} \right)$

como: $\omega = 2\pi f$ teremos então que:

$$f_s = \frac{\omega}{\pi} = \frac{2\pi f}{\pi} = 2f$$

ou seja, significa que a senoide está sendo amostrada numa freqüência duas vezes maior que a sua (teorema de Amostragem: Nyquist!), mas...

se substituirmos valores a expressão de

$$\mathbf{Z}^{-1}\{F(z)\} = f(kT) = \sin(\omega kT)$$

lembrando que: $T = \frac{\pi}{\omega}$

$$f(kT) \text{ se transforma em: } f(kT) = \sin \left(\omega k \frac{\pi}{\omega} \right) = \sin(k \cdot \pi)$$

Note: $F(z) = \mathbf{Z}\{f(t) = \sin(\omega t)\}$

Exercícios

1) Para $F(z) = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2 \cos \omega T z + 1}$, obter $f(kT)$ pelo método da divisão polinomial quando:

- a) $T = \frac{\pi}{\omega}$ b) $T = \frac{\pi}{2\omega}$ e c) $T = \frac{\pi}{6\omega}$

Demonstre graficamente os resultados e realize uma comparação. Que está acontecendo?

Note o seguinte:

Quando a) $T = \frac{\pi}{\omega} \Rightarrow f_s = \frac{\omega}{\pi} \quad \left(f = \frac{1}{T} \right)$

como: $\omega = 2\pi f$ teremos então que:

$$f_s = \frac{\omega}{\pi} = \frac{2\pi f}{\pi} = 2f$$

ou seja, significa que a senoide está sendo amostrada numa freqüência duas vezes maior que a sua (teorema de Amostragem: Nyquist!), mas...

se substituirmos valores na expressão de

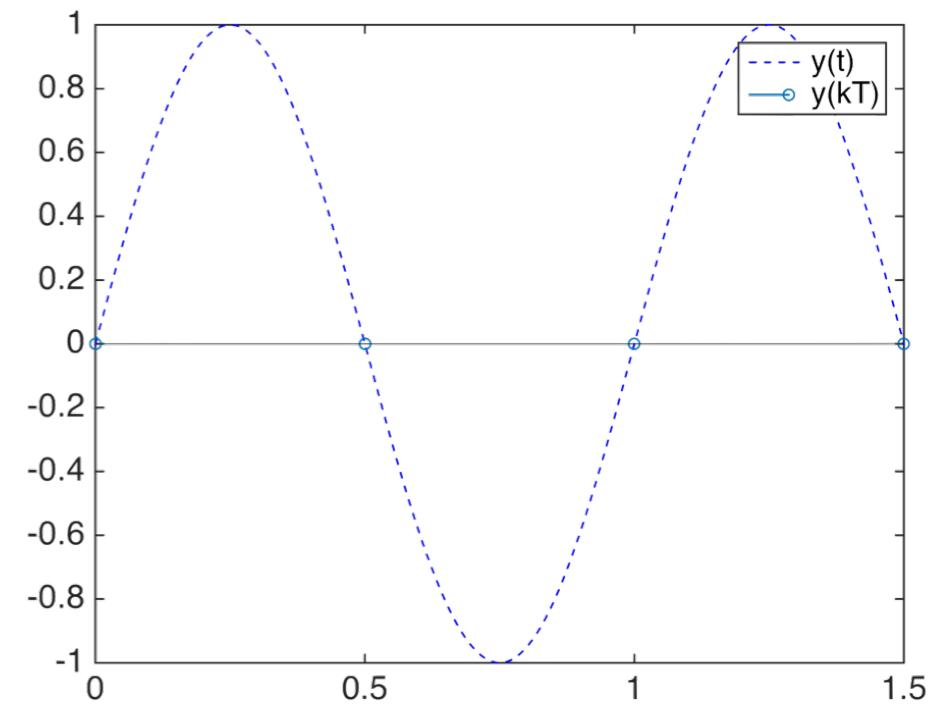
$$\mathbf{Z}^{-1}\{F(z)\} = f(kT) = \sin(\omega kT)$$

lembrando que: $T = \frac{\pi}{\omega}$

$f(kT)$ se transforma em: $f(kT) = \sin\left(\omega k \frac{\pi}{\omega}\right) = \sin(k \cdot \pi)$

que graficamente resulta em:
ou seja:
A senoide está sendo amostrada justamente nos instantes em que passa por amplitude zero.

k	y(kT)
0	0
1	0
2	0
⋮	⋮



Note: $F(z) = \mathbf{Z}\{f(t) = \sin(\omega t)\}$

Exercícios

1) Para $F(z) = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2 \cos \omega T z + 1}$, obter $f(kT)$ pelo método da divisão polinomial quando:

- a) $T = \frac{\pi}{\omega}$ b) $T = \frac{\pi}{2\omega}$ e c) $T = \frac{\pi}{6\omega}$

Demonstre graficamente os resultados e realize uma comparação. Que está acontecendo?

Solução:

Quando b) $T = \frac{\pi}{2\omega}$, teremos:

$$F(z) = \frac{z \cdot \sin \left(\omega \cdot \frac{\pi}{2\omega} \right)}{z^2 - 2 \cos \left(\omega \cdot \frac{\pi}{2\omega} \right) + 1}$$

$$F(z) = \frac{z \cdot \sin(\pi/2)}{z^2 - 2 \cos(\pi/2) + 1}$$

$$F(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$$

Que resulta no vetor (sequencia):

$$f(kT) = \{0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots\}$$

Note: $F(z) = \mathbf{Z}\{f(t) = \sin(\omega t)\}$

Exercícios

1) Para $F(z) = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2 \cos \omega T z + 1}$, obter $f(kT)$ pelo método da divisão polinomial quando:

- a) $T = \frac{\pi}{\omega}$ b) $T = \frac{\pi}{2\omega}$ e c) $T = \frac{\pi}{6\omega}$

Demonstre graficamente os resultados e realize uma comparação. Que está acontecendo?

Solução:

Quando b) $T = \frac{\pi}{2\omega}$, teremos:

$$F(z) = \frac{z \cdot \sin \left(\omega \cdot \frac{\pi}{2\omega} \right)}{z^2 - 2 \cos \left(\omega \cdot \frac{\pi}{2\omega} \right) + 1}$$

$$F(z) = \frac{z \cdot \sin(\pi/2)}{z^2 - 2 \cos(\pi/2) + 1} \xrightarrow[0]{1}$$

$$F(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$$

Que resulta no vetor (sequencia):

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \xrightarrow{\mathbf{Z}^{-1}}$$

$$\begin{array}{r|l} z & z^2 + 1 \\ -z - z^{-1} & z^{-1} - z^{-3} + z^{-5} - z^{-7} + \dots \\ \hline 0 - z^{-1} & +z^{-1} + z^{-3} \\ & 0 + z^{-3} \\ & -z^{-3} - z^{-5} \\ \hline & 0 - z^{-5} \end{array}$$

$$f(kT) = \{0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots\}$$

$$\begin{array}{c|c} N(z) & D(z) \\ \hline & \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot z^{-k} \end{array}$$

Note: $F(z) = \mathbf{Z}\{f(t) = \sin(\omega t)\}$

Exercícios

1) Para $F(z) = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2 \cos \omega T z + 1}$, obter $f(kT)$ pelo método da divisão polinomial quando:

- a) $T = \frac{\pi}{\omega}$ b) $T = \frac{\pi}{2\omega}$ e c) $T = \frac{\pi}{6\omega}$

Demonstre graficamente os resultados e realize uma comparação. Que está acontecendo?

Que resulta no vetor (sequencia):

$$\begin{array}{r} N(z) \quad | \quad D(z) \\ \hline \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot z^{-k} \\ \hline z & \left| \begin{array}{l} z^2 + 1 \\ \hline z^{-1} - z^{-3} + z^{-5} - z^{-7} + \dots \end{array} \right. \\ -z - z^{-1} \\ 0 - z^{-1} \\ +z^{-1} + z^{-3} \\ \hline 0 + z^{-3} \\ -z^{-3} - z^{-5} \\ \hline 0 - z^{-5} \end{array}$$

$$f(kT) = \{0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots\}$$

Desta vez note o seguinte:

Quando b) $T = \frac{\pi}{2\omega} \Rightarrow f_s = \frac{2\omega}{\pi} \quad \left(f = \frac{1}{T} \right)$

como: $\omega = 2\pi f$ teremos então que:

$$f_s = \frac{2\omega}{\pi} = \frac{2 \cdot 2\pi f}{\pi} = 4f$$

Então, neste caso, a senoide está sendo amostrada numa freqüência 4x maior.

Lembrando de:

$$\mathbf{Z}^{-1}\{F(z)\} = f(kT) = \sin(\omega kT)$$

$$f(kT) \text{ se transforma em: } f(kT) = \sin\left(\omega k \frac{\pi}{2\omega}\right) = \sin(k\pi/2)$$

Note: $F(z) = \mathbf{Z}\{f(t) = \sin(\omega t)\}$

Exercícios

1) Para $F(z) = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2 \cos \omega T z + 1}$, obter $f(kT)$ pelo método da divisão polinomial quando:

- a) $T = \frac{\pi}{\omega}$ b) $T = \frac{\pi}{2\omega}$ e c) $T = \frac{\pi}{6\omega}$

Demonstre graficamente os resultados e realize uma comparação. Que está acontecendo?

Desta vez note o seguinte:

Quando b) $T = \frac{\pi}{2\omega} \Rightarrow f_s = \frac{2\omega}{\pi} \quad \left(f = \frac{1}{T} \right)$

como: $\omega = 2\pi f$ teremos então que:

$$f_s = \frac{2\omega}{\pi} = \frac{2 \cdot 2\pi f}{\pi} = 4f$$

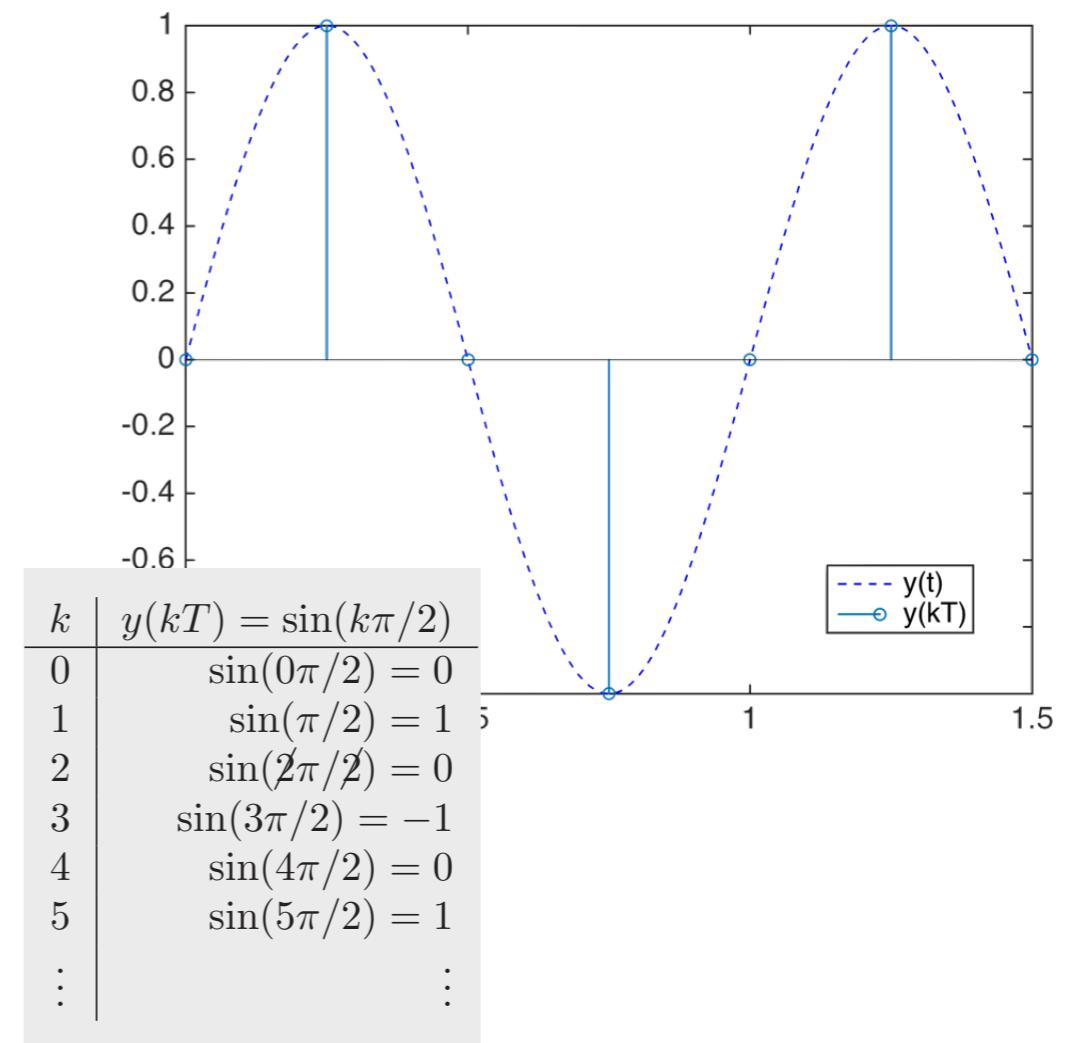
Então, neste caso, a senóide está sendo amostrada numa frequencia 4x maior.

Lembrando de:

$$\mathbf{Z}^{-1}\{F(z)\} = f(kT) = \sin(\omega kT)$$

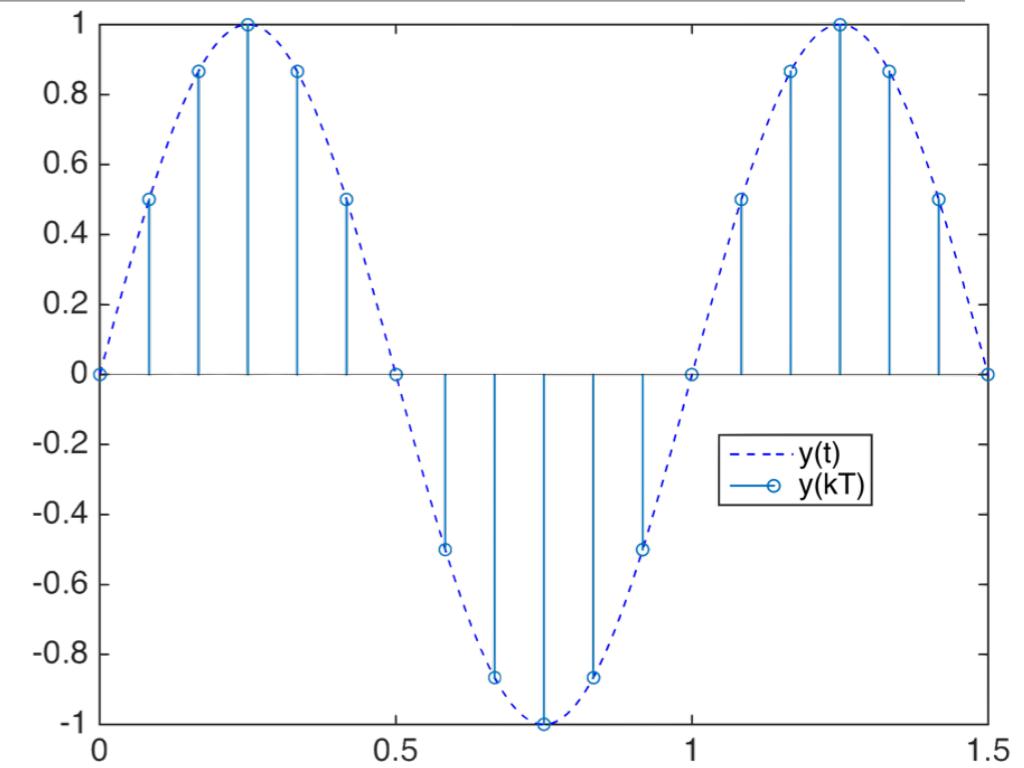
$f(kT)$ se transforma em: $f(kT) = \sin\left(\omega k \frac{\pi}{2\omega}\right) = \sin(k\pi/2)$

$$f(kT) = \{0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots\}$$



Arquivo dos gráficos: >> exercicio_seno.m

```
% simulando uma senóide sendo amostrada à diferentes frequencias  
clear all;  
close all;  
f = input ('Entre com a freq. da senóide [Hz]: ? ');  
fs = input ('Entre com a freq. de amostragem [Hz]: ? ');  
ciclos = input('Quantos ciclos mostrar da onda senoidal ? ');  
if ciclos < 0  
    ciclos = 1  
end  
% T = 1/f; t_final = p * T, então:  
t_final = ciclos/f; % domínio tempo, em segundos  
f_aux = 500*f; % freq. de amostragem simulação sinal contínuo (500 pt/ciclo)  
T_aux = 1/f_aux;  
t=0:T_aux:t_final; % criar vetor tempo para sinal analógico simulado  
y=sin(2*pi*f*t); % cria o vetor do sinal analógico simulado  
plot( t, y, 'b--' ) % plotando sinal analógico ("contínuo")  
% segue versão discretizada  
T = 1/fs;  
k=0:T:t_final; % cria vetor dos instantes de amostragem (no domínio tempo)  
yd=sin(2*pi*f*k); % cria o vetor do sinal amostrado  
hold on  
stem (k,yd)  
legend('y(t)', 'y(kT)');
```



```
>> exercicio_seno  
Entre com a freq. da senóide [Hz]: ? 1  
Entre com a freq. de amostragem [Hz]: ? 12  
Quantos ciclos mostrar da onda senoidal ? 15  
>>
```

Obtenção da **Transformada Z** à partir da **transformada de Laplace** de certa função...

a) Método 1: Uso da transformada inversa de Laplace.

$$\begin{array}{ccc} F(s) & \longrightarrow & F(z) \\ \mathcal{L}^{-1} \downarrow & & \uparrow \mathcal{Z} \\ f(t) & \xrightarrow[T]{} & f(kT) \end{array}$$

b) Método 2: Decomposição de $F(s)$ em elementos simples (expansão da função em frações parciais} e uso de tabelas contendo pares de transformadas Z e de Laplace.

$F(s)$ pode ser descrito como (admitindo que $F(s)$ não possua pólos múltiplos):

$$F(s) = c_0 + \underbrace{\sum_i \frac{c_i}{s - p_i}}_{\text{caso de pólos simples}} + \underbrace{\sum_j \left[\frac{c_j}{s - p_j} + \frac{\overline{c_j}}{s - \overline{p_j}} \right]}_{\text{caso de pólos complexos}}$$

onde os pólos são: $p_j = \sigma + j\omega$; e os resíduos são: $c_j = \alpha + j\beta$.