

5

Ações de Controle Básicas e Controladores Automáticos Industriais

5-1 INTRODUÇÃO

Um controlador automático compara o valor real da grandeza de saída do processo com a grandeza de referência (valor desejado), determina o desvio e produz um sinal de controle que reduzirá o desvio a zero ou a um valor pequeno. A maneira pela qual o controlador automático produz o sinal de controle é chamada *ação de controle*.

Neste capítulo serão discutidas primeiramente as ações de controle básicas usadas nos sistemas de controle industriais; em seguida, os efeitos das ações de controle integral e derivativa sobre o desempenho dos sistemas. Posteriormente, será considerada a resposta de sistemas de ordem superior. Todo sistema físico se torna instável quando algum dos pólos a malha fechada está situado no semiplano s da direita. O critério de estabilidade de Routh é útil para testar a existência ou não de tais pólos a malha fechada no semiplano da direita. Neste capítulo estão incluídas discussões sobre este critério de estabilidade.

Muitos controladores industriais são eletrônicos, hidráulicos, pneumáticos ou uma combinação deles. Neste capítulo são apresentados os princípios de operação relativos aos controladores pneumáticos, hidráulicos e eletrônicos.

O escopo deste capítulo é o seguinte: a Seção 5-1 fornece uma introdução pertinente. A Seção 5-2 apresenta as ações de controle básicas comumente usadas em controladores automáticos industriais. A Seção 5-3 discute os efeitos das ações de controle integral e derivativa sobre o desempenho do sistema. A Seção 5-4 trata dos sistemas de ordem superior e a Seção 5-5 cobre o critério de estabilidade de Routh. As Seções 5-6 e 5-7 discutem, respectivamente, os controladores pneumáticos e os controladores hidráulicos. Neste ponto introduz-se o princípio de operação dos controladores pneumáticos e hidráulicos e os métodos de geração das várias ações de controle. A Seção 5-8 trata dos controladores eletrônicos que utilizam amplificadores operacionais. Na Seção 5-9 discutimos o avanço de fase e o atraso de fase na resposta senoidal. Obtém-se a função de transferência senoidal e mostra-se o avanço e o atraso de fase que podem ocorrer na resposta senoidal. Finalmente, a Seção 5-10 aborda os erros estacionários nas respostas dos sistemas.

5-2 AÇÕES DE CONTROLE BÁSICAS

Nesta seção serão discutidos os detalhes das ações de controle básicas usadas em controladores analógicos industriais. Começaremos com a classificação dos controladores analógicos industriais.

Classificação de controladores analógicos industriais. Os controladores analógicos industriais podem ser classificados, de acordo com a ação de controle, como:

1. Controladores de duas posições ou liga-desliga (*on-off*)
2. Controladores proporcionais
3. Controladores do tipo integral
4. Controladores do tipo proporcional e integral
5. Controladores do tipo proporcional e derivativo
6. Controladores do tipo proporcional, integral e derivativo

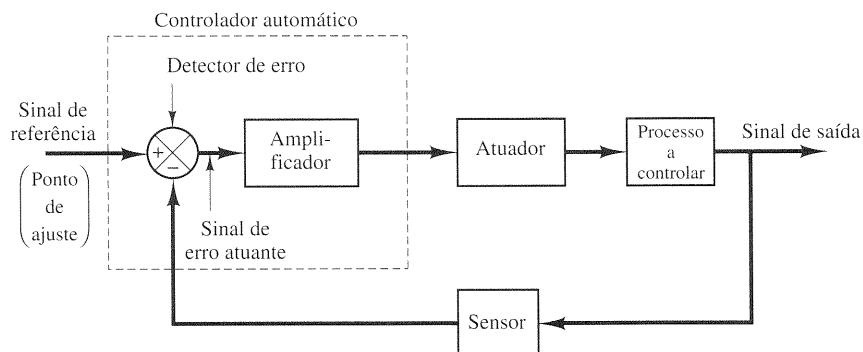


Fig. 5-1 Diagrama de blocos de um sistema de controle industrial, que consiste em um controlador automático, um atuador, um processo a controlar e um sensor (elemento de medição).

A maioria dos controladores analógicos industriais utiliza eletricidade ou fluido pressurizado, tais como óleo ou ar, como fonte de energia. Os controladores também podem ser classificados, de acordo com o tipo de fonte de energia empregada na operação, como controladores pneumáticos, controladores hidráulicos ou controladores eletrônicos. A espécie de controlador a ser utilizada deve ser decidida com base no tipo de processo a controlar e nas condições de operação, incluindo considerações como segurança, custo, disponibilidade, precisão, confiabilidade, peso e dimensão.

Controlador automático, atuador e sensor (elemento de medição). A Fig. 5-1 traz um diagrama de blocos de um sistema de controle industrial que consiste em um controlador automático, um atuador, um processo a controlar e um sensor (elemento de medição). O controlador detecta o sinal de erro atuante, usualmente em um baixo nível de potência, e o amplifica até um nível suficientemente alto. O sinal de saída do controlador automático alimenta algum tipo de atuador tal como um motor ou válvula pneumática, um motor hidráulico ou um motor elétrico. (O atuador é um dispositivo de potência que produz o sinal destinado a agir sobre o processo, de acordo com o sinal de controle, de tal modo que o sinal de retroação tenda ao valor do sinal de referência.)

O sensor ou elemento de medição é um dispositivo que converte a variável de saída em uma outra variável adequada, tal como um deslocamento, uma pressão ou uma tensão elétrica que pode ser usada para comparar o sinal de saída com o sinal de referência. Este elemento fica no elo de retroação do sistema a malha fechada. O valor do ponto de ajuste do controlador (*set point*) deve ser convertido em um sinal de referência com as mesmas unidades que o sinal de retroação proveniente do sensor ou elemento de medição.

Controladores auto-operados. Em muitos controladores automáticos industriais são utilizadas unidades separadas para o elemento de medida e para o atuador. Em sistemas mais simples, no entanto, tal como em controladores auto-operados, esses elementos são integrados em uma única unidade. Controladores auto-operados utilizam a energia desenvolvida pelo elemento de medida e são muito simples e baratos. Um exemplo de controlador auto-operado é mostrado na Fig. 5-2. O ponto de ajuste é determinado ajustando-se a força da mola. A pressão controlada é medida pelo diafragma. O sinal de erro atuante é a força atuante líquida que age no diafragma. Sua posição determina a abertura da válvula.

A operação do controlador auto-operado é a seguinte: suponha-se que a pressão de saída seja menor do que a pressão de referência, determinada pelo ponto de ajuste. Então, a força da mola para baixo é maior do que a força da pressão para cima, resultando em um movimento para baixo do diafragma. Isto acarreta um aumento da vazão e o crescimento da pressão de saída. Quando a força de pressão para cima for igual à força da mola para baixo, o obturador da válvula permanece

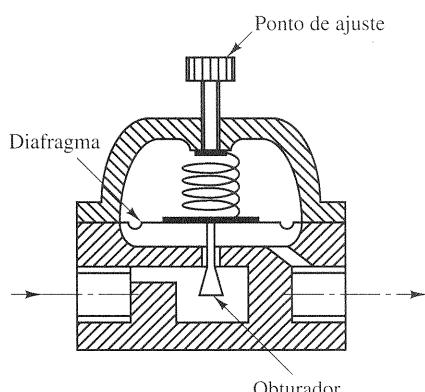


Fig. 5-2 Controlador auto-operado.

estacionário e a vazão fica constante. Inversamente, se a pressão de saída for maior do que a pressão de referência, a abertura da válvula torna-se menor e reduz a vazão através da abertura da válvula. Este controlador auto-operado é muito usado para controle de pressão de água e de gás.

Ação de controle de duas posições ou liga-desliga (on-off). Em um sistema de controle de duas posições, o elemento atuante possui apenas duas posições fixas que são, em muitos casos, simplesmente “ligado” ou “desligado” (do inglês *on-off*). O controle de duas posições é relativamente simples e barato e, por esta razão, extremamente utilizado tanto em sistemas de controle industriais como em sistemas de controle domésticos.

Considere-se $u(t)$ o sinal de saída do controlador e $e(t)$ o sinal de erro atuante. Em um controle de duas posições, o sinal $u(t)$ permanece igual a um valor máximo ou a um valor mínimo, conforme o sinal de erro atuante seja positivo ou negativo, de modo que

$$\begin{aligned} u(t) &= U_1, \quad \text{para } e(t) > 0 \\ &= U_2, \quad \text{para } e(t) < 0 \end{aligned}$$

onde U_1 e U_2 são constantes. O valor mínimo U_2 é, usualmente, zero ou $-U_1$. Os controladores de duas posições geralmente são dispositivos elétricos, e as válvulas operadas por solenóide elétrico são extensivamente usadas nestes controladores. Controladores proporcionais pneumáticos com ganhos muito altos atuam como controladores de duas posições e são muitas vezes denominados controladores pneumáticos de duas posições.

As Figs. 5-3(a) e (b) mostram os diagramas de blocos de controladores de duas posições. O intervalo através do qual o sinal de erro atuante deve mover-se antes de ocorrer a comutação de valores é denominado *intervalo diferencial*. Um intervalo diferencial é indicado na Fig. 5-3(b). Este intervalo diferencial faz com que a saída de controlador $u(t)$ mantenha seu valor presente até que o sinal de erro atuante tenha se movido ligeiramente além do valor zero. Em alguns casos, o intervalo diferencial é o resultado de atrito e de perda de movimento introduzidos de forma não-intencional no sistema; entretanto, quase sempre é intencionalmente colocado, de modo a impedir uma operação excessiva do mecanismo de comutação.

Seja o sistema de controle de nível de líquido mostrado na Fig. 5-4(a), onde a válvula eletromagnética indicada na Fig. 5-4(b) é usada para controlar a vazão de entrada. Ou esta válvula está aberta ou está fechada. Com este controle de duas posições, ou a vazão de entrada de água é uma constante positiva ou é nula. Conforme mostrado na Fig. 5-5, o sinal de saída move-se continuamente entre os dois limites requeridos para ocasionar o movimento do elemento atuante de uma posição fixa para outra. Note-se que os valores do sinal de saída seguem uma de duas curvas exponenciais, uma corres-

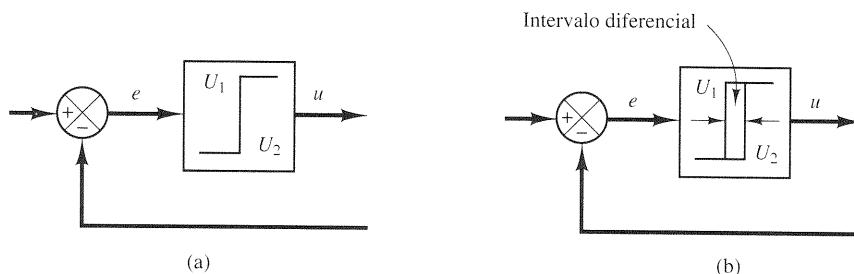


Fig. 5-3 (a) Diagrama de blocos de um controlador liga-desliga; (b) diagrama de blocos de um controlador liga-desliga com intervalo diferencial.

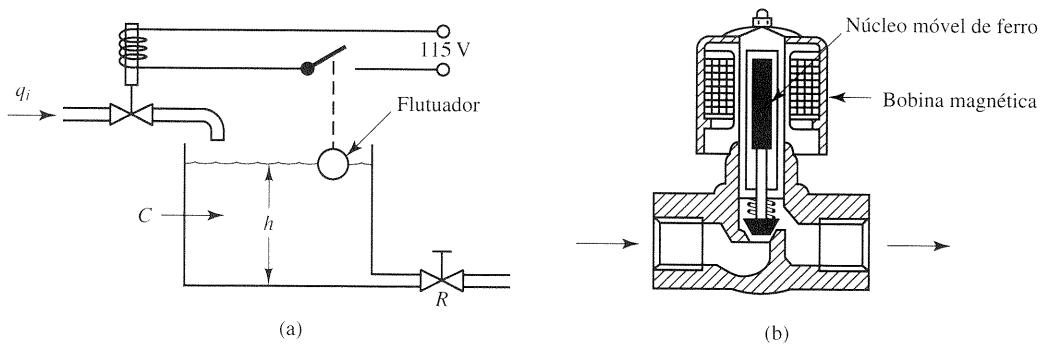


Fig. 5-4 (a) Sistema de controle de nível de líquido; (b) válvula eletromagnética.

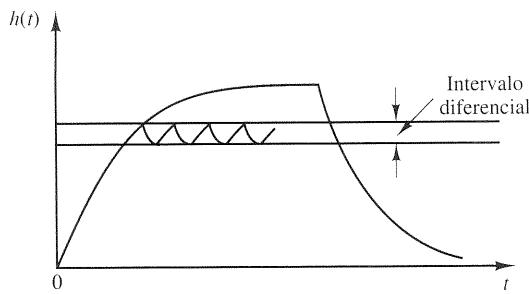


Fig. 5-5 Curva do nível $h(t)$ versus t relativa ao sistema mostrado na Fig. 5-4(a).

pondente à ação de encher e a outra à ação de esvaziar. Esta oscilação do sinal de saída entre dois limites é uma característica de resposta típica de um sistema de controle de duas posições.

Da Fig. 5-5 verifica-se que a amplitude da oscilação de saída pode ser reduzida diminuindo-se o intervalo diferencial. Isto, entretanto, aumenta o número de comutações por minuto da chave, reduzindo a vida útil do componente. A amplitude do intervalo diferencial deve ser determinada a partir de considerações relativas à exatidão exigida e à vida do componente.

Ação de controle proporcional. Para um controlador com ação de controle proporcional, a relação entre o sinal de saída do controlador $u(t)$ e o sinal de erro atuante $e(t)$ é

$$u(t) = K_p e(t)$$

ou, no domínio de transformada de Laplace,

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p$$

onde K_p é denominado ganho proporcional.

Qualquer que seja o mecanismo real ou a forma da energia usada na operação, o controlador proporcional é essencialmente um amplificador com ganho ajustável. Um diagrama de blocos deste controlador é mostrado na Fig. 5-6.

Ação de controle integral. Em um controlador com a ação de controle integral, o valor da saída do controlador $u(t)$ é variado segundo uma taxa proporcional ao sinal de erro atuante $e(t)$. Isto é,

$$\frac{du(t)}{dt} = K_i e(t)$$

ou

$$u(t) = K_i \int_0^t e(t) dt$$

onde K_i é uma constante ajustável. A função de transferência do controlador integral é

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}$$

Se o valor de $e(t)$ for dobrado, então o valor de $u(t)$ varia duas vezes mais rápido. Para erro atuante nulo, o valor de $u(t)$ permanece estacionário. A ação de controle integral é muitas vezes denominada controle de restabelecimento (*reset*). A Fig. 5-7 mostra um diagrama de blocos desse tipo de controlador.

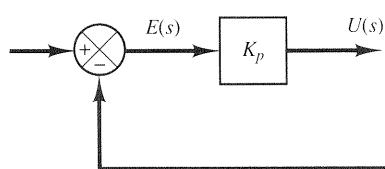


Fig. 5-6 Diagrama de blocos de um controlador proporcional.

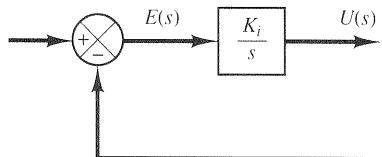


Fig. 5-7 Diagrama de blocos de um controlador integral.

Ação de controle proporcional-e-integral. A ação de controle de um controlador proporcional-e-integral é definida por

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt$$

ou a função de transferência do controlador é

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

onde K_p representa o ganho proporcional e T_i é chamado *tempo integral*. Tanto K_p como T_i são ajustáveis. O tempo integral ajusta a ação de controle integral, enquanto uma mudança no valor de K_p afeta tanto a parte proporcional como a parte integral da ação de controle. O inverso do tempo integral T_i é denominado *tasa de restabelecimento*. A taxa de restabelecimento é o número de vezes por minuto que a parte proporcional da ação de controle é duplicada. A taxa de restabelecimento é medida em termos de repetições por minuto. A Fig. 5-8(a) mostra um diagrama de blocos de um controlador proporcional-e-integral. Se o sinal de erro atuante $e(t)$ for uma função em degrau unitário, como mostrado na Fig. 5-8(b), então a saída do controlador $u(t)$ é a indicada na Fig. 5-8(c).

Ação de controle proporcional-e-derivativa. A ação de controle de um controlador proporcional-e-derivativo é definida pela seguinte equação

$$u(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

e a função de transferência é

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p (1 + T_d s)$$

onde K_p representa ganho proporcional e T_d é uma constante chamada *tempo derivativo*. Tanto K_p como T_d são ajustáveis. A ação de controle derivativa, algumas vezes denominada *controle de taxa*, é onde a magnitude da saída do controlador é proporcional à taxa de variação do sinal de erro atuante. O tempo derivativo T_d é o intervalo de tempo pelo qual a ação derivada avança o efeito da ação de controle proporcional. A Fig. 5-9(a) mostra um diagrama de blocos de um controlador proporcional-e-derivativo. Se o sinal de erro atuante $e(t)$ for uma função rampa unitária, conforme mostrado na Fig. 5-9(b), entao a saída do controlador $u(t)$ é a indicada na Fig. 5-9(c). Como pode ser visto na Fig. 5-9(c), a ação de controle derivativa tem um caráter antecipatório. De fato, no entanto, a ação de controle derivativa nunca poderá antecipar uma ação que ainda não tenha ocorrido.

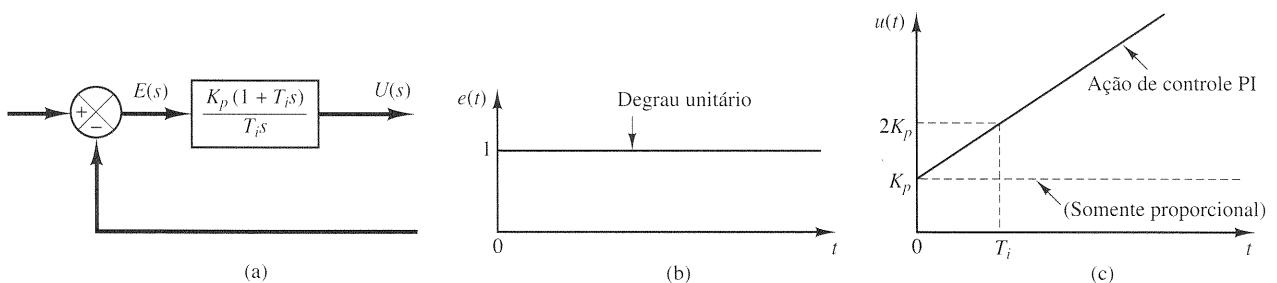


Fig. 5-8 (a) Diagrama de blocos de um controlador proporcional-integral; (b) e (c) diagramas esboçando um degrau unitário de entrada e o correspondente sinal de saída do controlador.

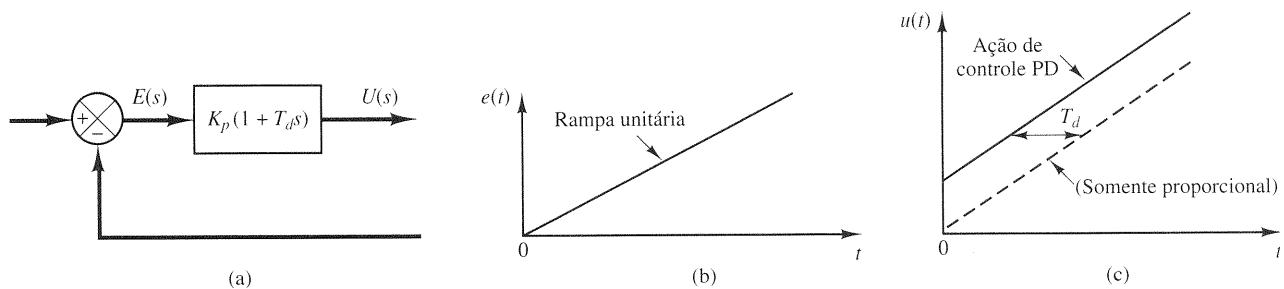


Fig. 5-9 (a) Diagrama de blocos de um controlador proporcional-derivativo; (b) e (c) diagramas esboçando uma rampa unitária de entrada e o correspondente sinal de saída do controlador.

Enquanto a ação de controle derivativa possui a vantagem de ser antecipatória, apresenta as desvantagens de amplificar os sinais de ruído e causar um efeito de saturação no atuador.

Note-se que a ação de controle derivativa nunca pode ser usada sozinha porque esta ação de controle somente é efetiva durante os períodos transitórios.

Ação de controle proporcional-integral-derivativa. A combinação da ação de controle proporcional, ação de controle integral e ação de controle derivativa é denominada ação de controle proporcional-integral-derivativa. Esta ação combinada possui as vantagens de cada uma das três ações de controle individuais. A equação de um controlador com esta ação combinada é dada por

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

ou pela função de transferência

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

onde K_p representa o ganho proporcional, T_d representa o tempo derivativo e T_i representa o tempo integral. O diagrama de blocos de um controlador proporcional-integral-derivativo é mostrado na Fig. 5-10(a). Se $e(t)$ for uma função rampa unitária, conforme mostrado na Fig. 5-10(b), então a saída do controlador $u(t)$ será a indicada na Fig. 5-10(c).

Efeitos do sensor (elemento de medida) no desempenho do sistema. Uma vez que as características estática e dinâmica do sensor ou elemento de medida afetam a indicação do valor real da variável de saída, o sensor repre-

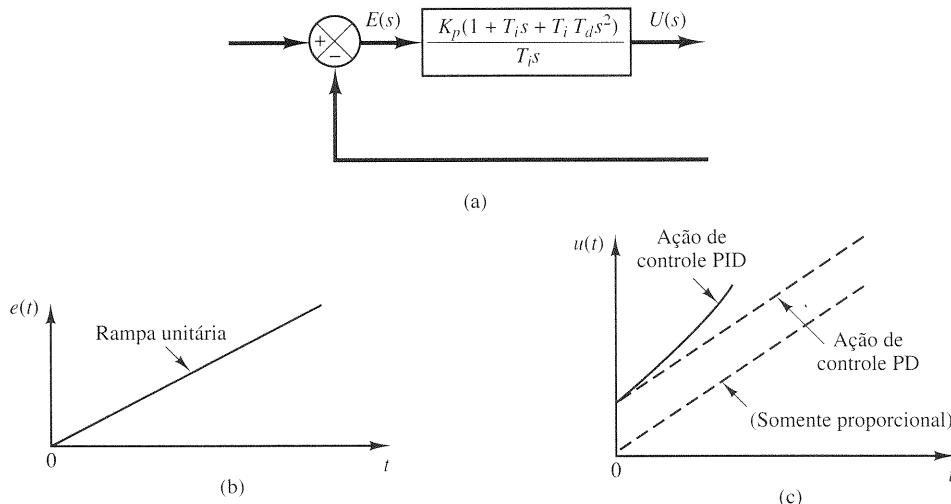


Fig. 5-10 (a) Diagrama de blocos de um controlador proporcional-integral-derivativo; (b) e (c) diagramas esboçando uma rampa unitária de entrada e o correspondente sinal de saída do controlador.

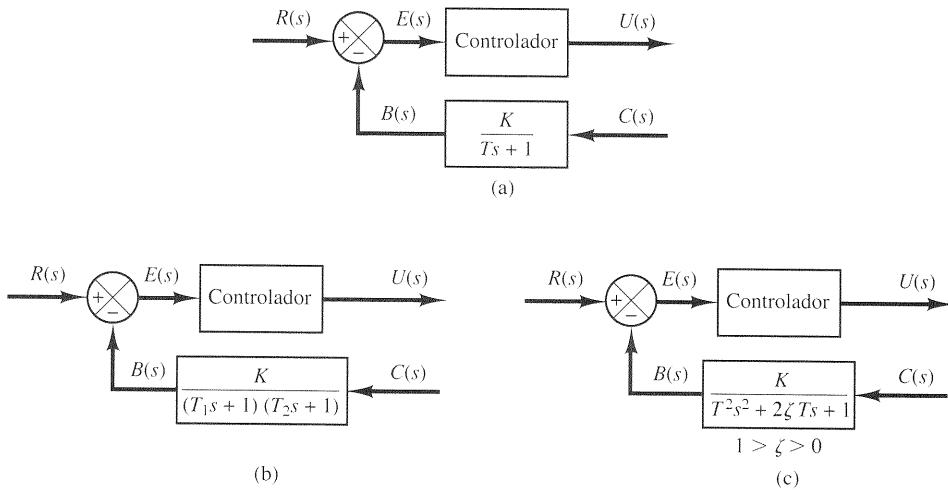


Fig. 5-11 Diagrama de blocos de controladores automáticos com sensor (a) de primeira ordem; (b) de segunda ordem superamortecido; (c) de segunda ordem subamortecido.

senta um papel importante na determinação do desempenho global do sistema de controle. O sensor normalmente determina a função de transferência no ramo de retroação. Se as constantes de tempo de um sensor são suficientemente pequenas, comparadas com outras constantes de tempo no sistema de controle, a função de transferência do sensor simplesmente se torna uma constante. As Figs. 5-11(a), (b) e (c) mostram diagramas de blocos de controladores automáticos dotados de um sensor de primeira ordem, de segunda ordem superamortecido e de segunda ordem subamortecido, respectivamente. A resposta de um sensor térmico é normalmente do tipo de segunda ordem superamortecido.

5-3 EFEITOS DAS AÇÕES DE CONTROLE INTEGRAL E DERIVATIVA SOBRE O DESEMPENHO DO SISTEMA

Nesta seção serão investigados os efeitos das ações de controle integral e derivativa sobre o desempenho do sistema. Aqui se consideram somente sistemas simples, de modo que os efeitos das ações de controle integral e derivativa sobre o desempenho do sistema possam ser vistos claramente.

Ação de controle integral. No controle proporcional de um processo cuja função de transferência não possui um integrador $1/s$ há um erro em regime estacionário, erro residual, na resposta a uma excitação em degrau. Este erro residual pode ser eliminado se for incluída no controlador uma ação de controle integral.

No controle integral de um processo, o sinal de controle, o sinal de saída do controlador, em qualquer instante é igual à área sob a curva do sinal de erro atuante até aquele instante. O sinal de controle $u(t)$ pode possuir um valor não-nulo quando o sinal de erro atuante $e(t)$ for nulo, conforme indicado na Fig. 5-12(a). Isto é impossível no caso do controlador proporcional, uma vez que um sinal de controle não-nulo necessita de um sinal de erro atuante não-nulo. (Um sinal de erro atuante não-nulo em regime estacionário significa que há um erro residual.) A Fig. 5-12(b) mostra a curva de $e(t)$ versus t e a curva correspondente $u(t)$ versus t quando o controlador é do tipo proporcional.

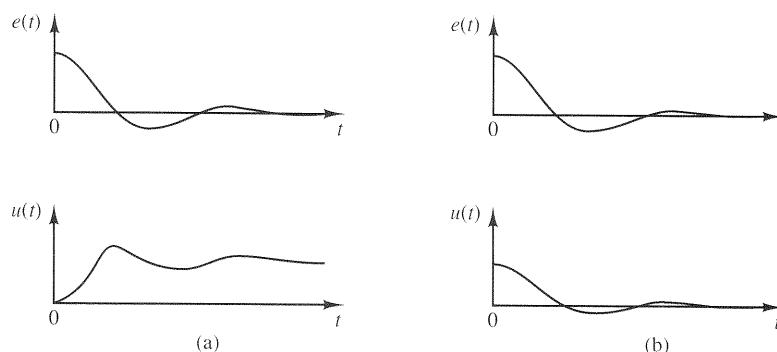


Fig. 5-12 (a) Gráficos das curvas $e(t)$ e $u(t)$ mostrando sinal de controle não-nulo para sinal de erro atuante nulo (controle integral); (b) gráficos das curvas $e(t)$ e $u(t)$ mostrando sinal de controle nulo para sinal de erro atuante nulo (controle proporcional).

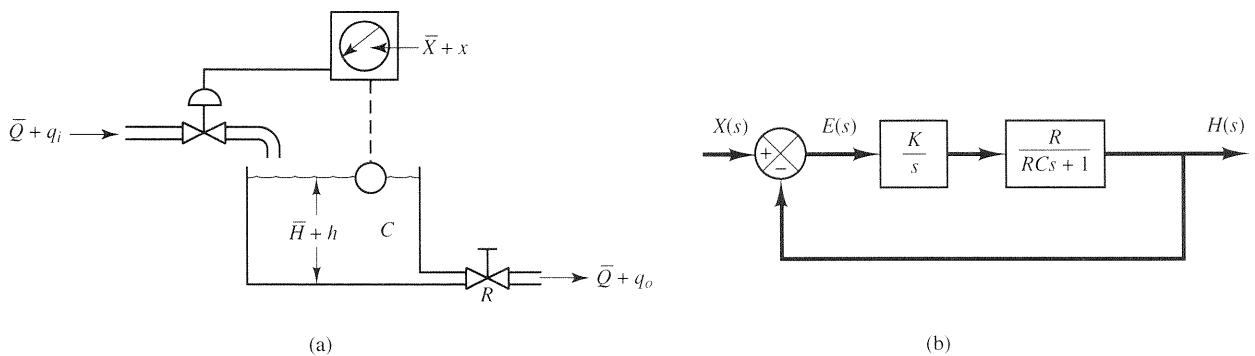


Fig. 5-13 (a) Sistema de controle de nível de líquido; (b) diagrama de blocos do sistema.

Note-se que a ação de controle integral, embora remova o erro residual ou erro em regime estacionário, pode resultar em uma resposta oscilatória com amplitude lentamente decrescente ou mesmo com amplitude crescente, ambas usualmente indesejáveis.

Controle integral de sistemas de controle de nível de líquido. Na Seção 4-2 verificou-se que o controle proporcional de um sistema de nível de líquido apresenta um erro em regime estacionário a uma excitação em degrau. Será mostrado, agora, que este erro pode ser eliminado se for incluída no controlador uma ação de controle integral.

A Fig. 5-13(a) mostra um sistema de controle de nível de líquido. Admite-se que o controlador seja um controlador integral. Considera-se, ainda, que os valores instantâneos das variáveis, x , q_i , h e q_o , medidos em relação aos seus valores respectivos de regime estacionário \bar{X} , \bar{Q} , \bar{H} e \bar{Q} , são pequenas quantidades, de modo que o sistema possa ser considerado linear. Sob estas hipóteses, o diagrama de blocos do sistema pode ser obtido como indicado na Fig. 5-13(b). Da Fig. 5-13(b), a função de transferência a malha fechada entre $H(s)$ e $X(s)$ é

$$\frac{H(s)}{X(s)} = \frac{KR}{RCs^2 + s + KR}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{E(s)}{X(s)} &= \frac{X(s) - H(s)}{X(s)} \\ &= \frac{RCs^2 + s}{RCs^2 + s + KR} \end{aligned}$$

Uma vez que o sistema é estável, o erro em regime estacionário da resposta a uma excitação em degrau unitário é obtido pela aplicação do teorema do valor final como se segue

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(RCs^2 + s)}{RCs^2 + s + KR} \frac{1}{s} \\ &= 0 \end{aligned}$$

O controle integral do sistema de nível de líquido, portanto, elimina o erro em regime estacionário na resposta a uma excitação em degrau. Esta é uma vantagem importante em relação ao controle proporcional que resulta em erro residual.

Resposta a torques de perturbação (controle proporcional). Agora, investiguemos o efeito de um torque perturbador aplicado à carga. Considere-se o sistema indicado na Fig. 5-14. O controlador proporcional fornece um torque T para posicionar o elemento de carga, que consiste em momento de inércia e atrito viscoso. O torque perturbador é designado por D .

Admitindo-se nulo o sinal de referência, ou seja, $R(s) = 0$, a função de transferência entre $C(s)$ e $D(s)$ é dada por

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{1}{Js^2 + bs + K_p}$$

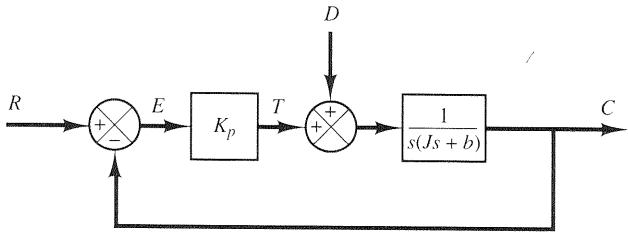


Fig. 5-14 Sistema de controle com torque perturbador.

Portanto,

$$\frac{E(s)}{D(s)} = -\frac{C(s)}{D(s)} = -\frac{1}{Js^2 + bs + K_p}$$

O erro em regime estacionário devido a um torque perturbador em degrau, de valor T_d , é dado por

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-s}{Js^2 + bs + K_p} \frac{T_d}{s} \\ &= -\frac{T_d}{K_p} \end{aligned}$$

Em regime permanente, o controlador proporciona o torque $-T_d$ que é igual em módulo, mas oposto em sinal, ao torque perturbador T_d . A saída em regime permanente, devida ao torque perturbador em degrau, é

$$c_{ss} = -e_{ss} = \frac{T_d}{K_p}$$

O erro em regime estacionário pode ser reduzido aumentando-se o valor do ganho K_p . O aumento deste valor, entretanto, resultará em uma resposta mais oscilatória do sistema.

Obtenção de resposta com o MATLAB. A seguir serão obtidas curvas de resposta do sistema mostrado na Fig. 5-14, quando este é submetido a uma perturbação em degrau unitário. Serão obtidas, especificamente, curvas de resposta para valores pequenos e para valores grandes de K_p .

Sejam considerados dois casos:

Caso 1: $J = 1, b = 0,5, K_p = 1$ (sistema 1):

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{1}{s^2 + 0,5s + 1}$$

Caso 2: $J = 1, b = 0,5, K_p = 4$ (sistema 2):

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{1}{s^2 + 0,5s + 4}$$

Note-se que, para o sistema 1

$$\begin{aligned} \text{num1} &= [0 \quad 0 \quad 1] \\ \text{den1} &= [1 \quad 0.5 \quad 1] \end{aligned}$$

e para o sistema 2

$$\begin{aligned} \text{num2} &= [0 \quad 0 \quad 1] \\ \text{den2} &= [1 \quad 0.5 \quad 4] \end{aligned}$$

No Programa MATLAB 5-1 foram usadas as notações $y1$ e $y2$ para o sinal de resposta. $y1$ é a resposta $c(t)$ do sistema 1, e $y2$ é a resposta $c(t)$ do sistema 2.

Note-se que, no Programa MATLAB 5-1, o comando `plot` com argumentos múltiplos foi utilizado no lugar do comando `hold`. (Obtém-se os mesmos resultados em ambos os casos.) Para utilizar o comando `plot` com argumentos múltiplos, y_1 e y_2 não devem ter, necessariamente, o mesmo número de elementos. Contudo, é conveniente que os vetores y_1 e y_2 sejam do mesmo tamanho. Assim, especifica-se o mesmo número de pontos a serem calculados a partir da escolha de pontos correspondentes aos instantes de tempo (como, por exemplo, $t = 0:0.1:20$). O comando `step` deve incluir este valor de t definido pelo usuário. Em consequência, no Programa MATLAB 5-1 foi usado o seguinte comando `step`:

$$[y, x, t] = \text{step}(\text{num}, \text{den}, t)$$

As curvas de resposta ao degrau unitário obtidas pelo uso do Programa MATLAB 5-1 são mostradas na Fig. 5-15.

```
Programa MATLAB 5-1
%
% ----- Traçar duas curvas de resposta ao degrau
% num único diagrama -----
%
% ***** Entrar com os numeradores e denominadores
% das duas funções de transferência *****
%
num1 = [0 0 1];
den1 = [1 0.5 1];
num2 = [0 0 1];
den2 = [1 0.5 4];
%
% ***** Para traçar duas curvas de resposta a degrau
% y1 versus t e y2 versus t num único diagrama
% e escrever dísticos 'Sistema 1' e 'Sistema 2'
% para distinguir as duas curvas, entrar com os
% seguintes comandos *****
%
t = 0:0.1:20;
[y1, x1, t] = step(num1, den1, t);
[y2, x2, t] = step(num2, den2, t);
plot(t, y1, t, y2)
grid
text(11, 0.75, 'Sistema 1'), text(11.2, 0.16, 'Sistema 2')
%
% ***** Adicionar título do gráfico e legendas dos
% eixos x e y *****
%
title('Respostas ao Degrau de Dois Sistemas')
xlabel('t s')
ylabel('Respostas y1 e y2')
```

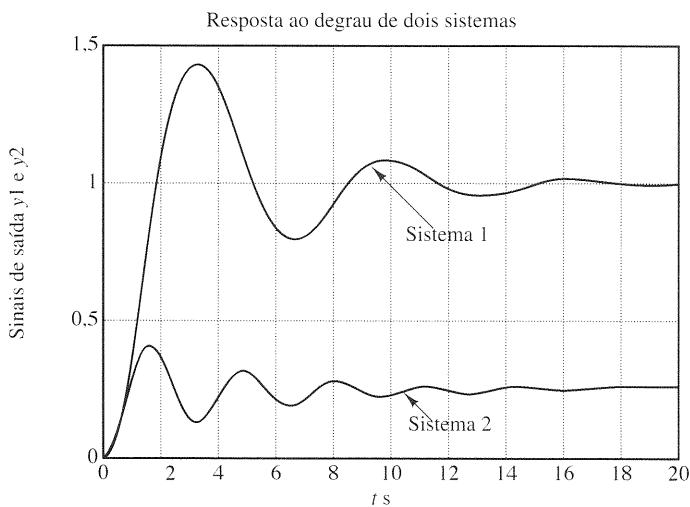


Fig. 5-15 Curvas de resposta ao degrau unitário.

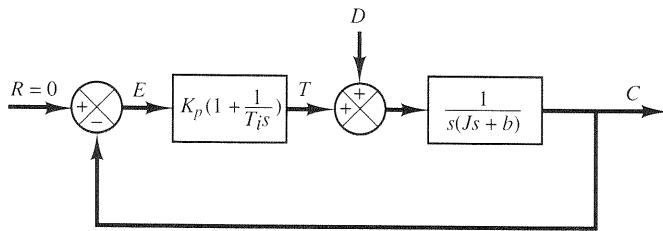


Fig. 5-16 Controle proporcional-integral de uma carga constituída de inércia e de atrito viscoso.

Resposta a torques de perturbação (controle proporcional-integral). Para eliminar o erro residual devido ao torque perturbador, o controlador proporcional deve ser substituído por um controlador proporcional-integral.

Se for adicionada ao controlador uma ação de controle integral, então, enquanto houver sinal de erro, haverá um torque desenvolvido pelo controlador visando reduzir este erro, desde que o sistema de controle seja estável.

A Fig. 5-16 mostra o controle proporcional-integral de uma carga constituída de inércia e de atrito viscoso.

A função de transferência a malha fechada entre $C(s)$ e $D(s)$ é

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{s}{Js^3 + bs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i}}$$

Na ausência de sinal de referência, ou seja, para $r(t) = 0$, o sinal de erro é obtido a partir de

$$E(s) = -\frac{s}{Js^3 + bs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i}} D(s)$$

Se este sistema de controle for estável, isto é, se as raízes da equação característica

$$Js^3 + bs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i} = 0$$

tiverem partes reais negativas, então o erro em regime estacionário da resposta a um torque perturbador em degrau unitário é obtido aplicando-se o teorema de valor final da seguinte forma:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-s^2}{Js^3 + bs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i}} \frac{1}{s} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, o erro em regime estacionário em relação ao torque perturbador pode ser eliminado se o controlador for do tipo proporcional-integral.

Note-se que a ação de controle integral adicionada ao controlador proporcional converteu o sistema originalmente de segunda ordem em um sistema de terceira ordem. Conseqüentemente, o sistema de controle pode tornar-se instável para um valor grande de K_p desde que as raízes da equação característica possam possuir partes reais positivas. (O sistema de segunda ordem será sempre estável se os coeficientes na equação diferencial do sistema forem todos positivos.)

É importante observar que, se o controlador fosse um controlador integral, como na Fig. 5-17, então o sistema sempre resultaria instável porque a equação característica

$$Js^3 + bs^2 + K = 0$$

possuiria raízes com partes reais positivas. Um sistema instável deste tipo não poderia ser usado na prática.

Note-se que, no sistema da Fig. 5-16, a ação de controle proporcional tende a estabilizar o sistema, enquanto a ação de controle integral tende a eliminar ou reduzir o erro em regime estacionário em resposta a vários sinais de entrada.

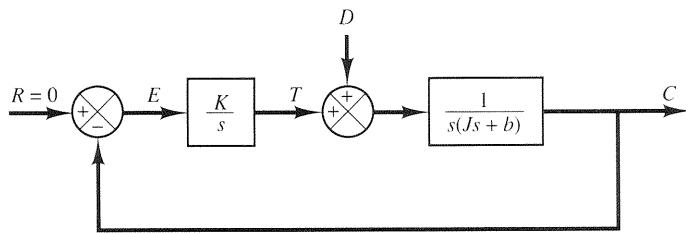


Fig. 5-17 Controle integral de uma carga constituída de inércia e de atrito viscoso.

Ação de controle derivativa. A ação de controle derivativa, quando adicionada a um controlador proporcional, propicia um meio de obter um controlador com alta sensibilidade. Uma vantagem em se usar ação de controle derivativa é que ela responde à taxa de variação do erro atuante e pode produzir uma correção significativa antes de o valor do erro atuante tornar-se demasiadamente grande. O controle derivativo, portanto, antecipa o erro atuante e inicia uma ação corretiva mais cedo, tendendo a aumentar a estabilidade do sistema.

Embora o controle derivativo não afete diretamente o erro em regime estacionário, ele introduz amortecimento no sistema e, portanto, permite o uso de um valor maior do ganho K , o que resulta em uma melhoria na precisão em regime estacionário.

Devido ao fato de o controle derivativo operar sobre a taxa de variação do erro atuante e não sobre o próprio erro atuante, este modo nunca é usado sozinho. É sempre utilizado em combinação com ação proporcional ou com ação proporcional-integral.

Sistemas de controle proporcional com carga de inércia. Antes de discutir o efeito da ação derivativa no desempenho do sistema, será considerado o controle proporcional de uma carga de inércia.

Seja o sistema indicado na Fig. 5-18(a). A função de transferência a malha fechada é obtida como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{Js^2 + K_p}$$

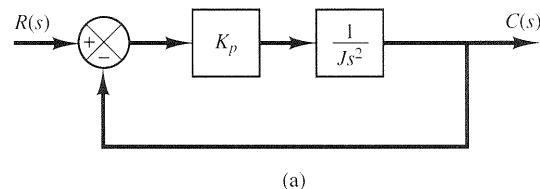
Como as raízes da equação característica

$$Js^2 + K_p = 0$$

são imaginárias, a resposta a uma excitação em degrau unitário continua a oscilar indefinidamente, como mostrado na Fig. 5-18(b).

Sistemas de controle que exibem estas características de resposta não são desejáveis. Será visto que a adição de um controle derivativo estabilizará o sistema.

Controle proporcional-derivativo de um sistema com carga de inércia. Seja feita a substituição do controlador proporcional por um controlador proporcional-derivativo cuja função de transferência é $K_p(1 + T_d s)$. O torque desenvolvido pelo controlador é proporcional a $K_p(e + T_d \dot{e})$. O controle derivativo é essencialmente antecipatório, mede a velocidade de erro instantânea, prediz grandes valores de ultrapassagem antecipadamente no tempo e produz uma ação contrária apropriada antes de ocorrer uma ultrapassagem demasiadamente grande.



(a)

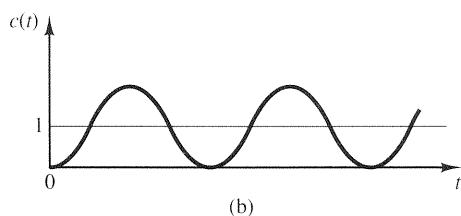


Fig. 5-18 (a) Controle proporcional de um sistema com carga de inércia; (b) resposta a um degrau unitário.

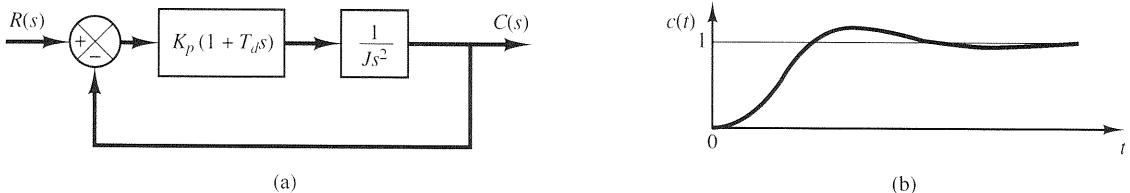


Fig. 5-19 (a) Controle proporcional-derivativo de um sistema com carga de inércia; (b) resposta a um degrau unitário.

Considere-se o sistema mostrado na Fig. 5-19(a). A função de transferência a malha fechada é dada por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p(1 + T_d s)}{J s^2 + K_p T_d s + K_p}$$

A equação característica

$$J s^2 + K_p T_d s + K_p = 0$$

agora possui duas raízes com partes negativas para valores positivos de J , K_p , e T_d . Portanto, o controle derivativo introduz um efeito de amortecimento. Uma curva de resposta típica $c(t)$ a uma excitação em degrau unitário é fornecida na Fig. 5-19(b). Evidentemente, a curva de resposta mostra uma melhoria significativa em relação à curva de resposta original indicada na Fig. 5-18(b).

Controle proporcional-derivativo de sistemas de segunda ordem. Pode-se alcançar uma solução de compromisso entre o comportamento em regime transitório e o comportamento em regime estacionário por meio da ação de controle proporcional-derivativa.

Seja o sistema mostrado na Fig. 5-20. A função de transferência a malha fechada é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p + K_d s}{J s^2 + (B + K_d)s + K_p}$$

O erro estacionário a uma excitação em rampa unitária é

$$e_{ss} = \frac{B}{K_p}$$

A equação característica é

$$J s^2 + (B + K_d)s + K_p = 0$$

A constante de amortecimento efetiva do sistema é $B + K_d$ em lugar de B . Como o coeficiente de amortecimento ζ deste sistema vale

$$\zeta = \frac{B + K_d}{2\sqrt{K_p J}}$$

é possível obter, simultaneamente, valores pequenos para o erro de regime permanente e_{ss} a uma excitação em rampa e para o valor de ultrapassagem a uma excitação em degrau, fazendo-se os valores de B pequeno, de K_p elevado, e de K_d suficientemente grande de modo a se ter o valor de ζ entre 0,4 e 0,7.

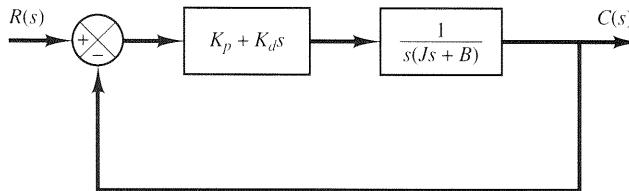


Fig. 5-20 Sistema de controle.

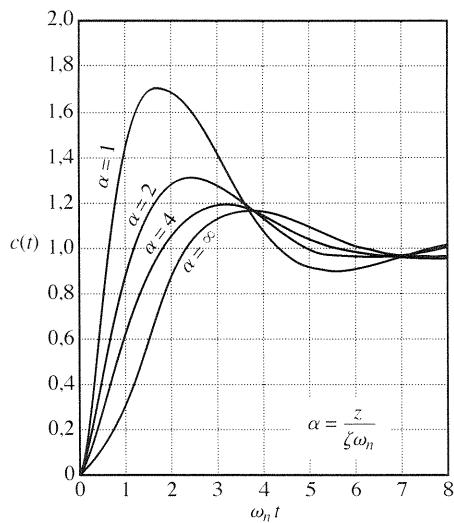


Fig. 5-21 Curvas de respostas ao degrau unitário do sistema de segunda ordem

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{z} \frac{s + z}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\zeta = 0,5$$

A seguir, será examinada a resposta ao degrau unitário do sistema mostrado na Fig. 5-20. Seja a definição

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_p}{J}}, \quad z = \frac{K_p}{K_d}$$

A função de transferência a malha fechada pode ser escrita

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{z} \frac{s + z}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Quando um sistema de segunda ordem possui um zero próximo dos pólos a malha fechada, o comportamento da resposta transitória se torna consideravelmente diferente daquele de um sistema de segunda ordem sem o zero.

Se o zero em $s = -z$ estiver localizado próximo ao eixo $j\omega$, seu efeito sobre a resposta ao degrau unitário será bastante significativo. Curvas de resposta ao degrau típicas deste sistema, para valores de $\zeta = 0,5$ e diversos valores de $z/(\zeta\omega_n)$, são mostradas na Fig. 5-21.

5-4 SISTEMAS DE ORDEM SUPERIOR

Nesta seção discute-se inicialmente a resposta ao degrau unitário de um tipo particular de sistema de ordem superior. Em seguida apresenta-se, em termos gerais, uma análise de resposta transitória de sistemas de ordem superior. Apresenta-se, finalmente, uma análise de estabilidade no plano complexo.

Resposta transitória de sistemas de ordem superior. Considere-se o sistema mostrado na Fig. 5-22. A função de transferência a malha fechada é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (5-1)$$

Em geral, $G(s)$ e $H(s)$ são dados como relações de polinômios em s , ou seja,

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \quad \text{e} \quad H(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

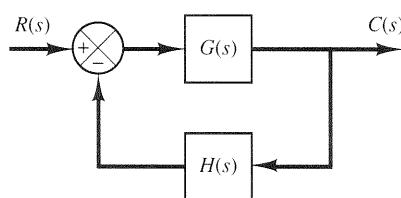


Fig. 5-22 Sistema de controle.

onde $p(s)$, $q(s)$, $n(s)$ e $d(s)$ são polinômios em s . A função de transferência a malha fechada dada pela Eq. (5-1) pode ser escrita então

$$\begin{aligned}\frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{p(s)d(s)}{q(s)d(s) + p(s)n(s)} \\ &= \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (m \leq n)\end{aligned}$$

A resposta transitória deste sistema a qualquer sinal de entrada dado pode ser obtida por uma simulação em computador (Ver Seção 4-4). Se se desejar uma expressão analítica para a resposta transitória, então é necessário fatorar o polinômio em denominador. [O MATLAB pode ser usado para se encontrarem as raízes do polinômio em denominador. Digitar o comando `roots(den)`.] Uma vez que o polinômio em denominador tenha sido fatorado, $C(s)/R(s)$ pode ser escrita assim

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} \quad (5-2)$$

Será examinado o comportamento da resposta deste sistema para uma excitação em degrau unitário. Será considerado primeiramente o caso em que todos os pólos a malha fechada são reais e distintos. Para uma excitação em degrau unitário, a Eq. (5-2) pode ser escrita

$$C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s + p_i} \quad (5-3)$$

onde a_i é o resíduo do polo situado em $s = -p_i$.

Se todos os pólos a malha fechada estiverem localizados no semiplano esquerdo, as magnitudes relativas dos resíduos determinam a importância relativa dos componentes na forma expandida de $C(s)$. Se há um zero a malha fechada perto de um polo a malha fechada, então o resíduo neste polo é pequeno e o coeficiente do termo de resposta transitória que corresponde a este polo se torna pequeno. Um polo a malha fechada e um zero a malha fechada, perto um do outro, se cancelarão efetivamente. Se o polo estiver localizado muito longe da origem, o resíduo neste polo pode ser pequeno. Os transitórios que correspondem a tal polo afastado são pequenos e de curta duração. Os termos na forma expandida de $C(s)$ que têm resíduo muito pequeno pouco contribuem para a resposta transitória e podem ser desprezados. Se isto for feito, o sistema de ordem superior pode ser aproximado por um de ordem inferior. (Tal aproximação freqüentemente permite estimar as características de resposta de um sistema de ordem superior a partir daquelas de um sistema simplificado.)

Seja, a seguir, o caso em que os pólos de $C(s)$ consistem em pólos reais e pares de pólos complexos-conjugados. Um par de pólos complexos-conjugados fornece um termo de segunda ordem em s . Como a forma fatorada da equação característica de ordem superior constitui-se de termos de primeira e de segunda ordem, então a Eq. (5-3) pode ser reescrita

$$C(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s \prod_{j=1}^q (s + p_j) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\xi_k \omega_k s + \omega_k^2)} \quad (5-4)$$

onde $q + 2r = n$. Se os pólos a malha fechada forem distintos, a Eq. (5-4) pode ser expandida em frações parciais como a seguir:

$$C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{j=1}^q \frac{a_j}{s + p_j} + \sum_{k=1}^r \frac{b_k(s + \xi_k \omega_k) + c_k \omega_k \sqrt{1 - \xi_k^2}}{s^2 + 2\xi_k \omega_k s + \omega_k^2}$$

Desta última equação vê-se que a resposta de um sistema de ordem superior é composta de um certo número de termos envolvendo as funções simples achadas nas respostas de sistemas de primeira e de segunda ordem. A resposta $c(t)$ a uma excitação em degrau unitário, a transformada de Laplace inversa de $C(s)$, é então

$$\begin{aligned}c(t) &= a + \sum_{j=1}^q a_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^r b_k e^{-\xi_k \omega_k t} \cos \omega_k \sqrt{1 - \xi_k^2} t \\ &\quad + \sum_{k=1}^r c_k e^{-\xi_k \omega_k t} \sin \omega_k \sqrt{1 - \xi_k^2} t, \quad \text{para } t \geq 0\end{aligned} \quad (5-5)$$

Assim, a resposta de um sistema estável de ordem elevada é composta pela soma de exponenciais e de senóides amortecidas.

Se todos os pólos a malha fechada estiverem no semiplano esquerdo do plano s , então os termos exponenciais e os termos amortecidos exponencialmente na Eq. (5-5) tenderão a zero quando t cresce. O valor da saída em regime estacionário é então $c(\infty) = a$.

Suponha-se que o sistema em consideração seja estável. Então os pólos a malha fechada que estão localizados longe do eixo $j\omega$ têm partes reais negativas de valor alto. Os termos exponenciais que correspondem a estes pólos decaem rapidamente a zero. (Note-se que a distância horizontal de um pôlo a malha fechada ao eixo $j\omega$ determina o tempo de acomodação de transitórios devido àquele pôlo. Quanto menor a distância, maior é o tempo de acomodação.)

Deve-se lembrar que o tipo de resposta transitória é determinado pelos pólos a malha fechada, enquanto a forma é determinada primariamente pelos zeros. Como se viu antes, os pólos do sinal de entrada $R(s)$ fornecem os termos de resposta estacionária na solução, enquanto os pólos de $C(s)/R(s)$ entram nos termos de resposta transitória exponencial e/ou nos termos de resposta transitória senoidal amortecidos. Os zeros de $C(s)/R(s)$ não afetam os expoentes nos termos de resposta exponencial, mas sim as magnitudes dos resíduos.

Pólos a malha fechada dominantes. A dominância relativa de pólos a malha fechada é determinada pela relação das partes reais dos pólos a malha fechada, bem como pelos valores relativos dos resíduos calculados nos pólos a malha fechada. As magnitudes dos resíduos dependem, ao mesmo tempo, dos pólos e dos zeros a malha fechada.

Se as relações das partes reais excedem cinco, e não havendo zeros na vizinhança, então os pólos a malha fechada mais perto do eixo $j\omega$ dominarão no desempenho da resposta transitória porque estes pólos correspondem a termos de resposta transitória que decaem lentamente. Os pólos a malha fechada que têm efeito dominante sobre o comportamento da resposta transitória são chamados *pólos dominantes*. Freqüentemente, os pólos a malha fechada dominantes ocorrem na forma de um par complexo-conjugado. Os pólos a malha fechada dominantes são os mais importantes entre os pólos a malha fechada.

O ganho de um sistema de ordem superior é freqüentemente ajustado até que exista um par de pólos a malha fechada complexos-conjugados dominantes. A presença destes pólos em um sistema estável reduz o efeito de não-linearidades tais como zona morta, histerese e atrito seco.

Deve-se lembrar que, embora o conceito de pólos a malha fechada dominantes seja útil para se estimar o comportamento dinâmico de um sistema a malha fechada, há necessidade de cuidados para verificar se as hipóteses são realmente satisfeitas antes de se utilizar este conceito.

Análise de estabilidade no plano complexo. A estabilidade de um sistema linear a malha fechada pode ser determinada pela localização dos pólos a malha fechada no plano s . Se qualquer desses pólos estiver situado no semiplano direito do plano s , então à medida que o tempo cresce, eles dão origem ao modo dominante, e a resposta transitória aumenta monotonicamente ou oscila com amplitude crescente. Isto representa um sistema instável. Para tal sistema, tão logo a fonte de energia seja ligada, a saída poderá crescer com o tempo. Se não existir saturação ou não for providenciado algum limitador mecânico, então o sistema pode vir a sofrer danos e parar de funcionar, uma vez que a resposta de um sistema físico real não pode aumentar indefinidamente. Portanto, pólos a malha fechada no semiplano direito não são permissíveis nos sistemas de controle lineares usuais. Se todos os pólos a malha fechada estiverem situados à esquerda do eixo $j\omega$, a resposta transitória termina por alcançar um equilíbrio. Isto representa um sistema estável.

O fato de um sistema linear ser estável ou instável é uma propriedade do sistema em si e não depende do sinal de entrada do sistema. Os pólos do sinal de entrada, ou excitação, não afetam a propriedade de estabilidade do sistema, mas contribuem somente para os termos de resposta estacionária na solução. Portanto, o problema de estabilidade absoluta pode ser

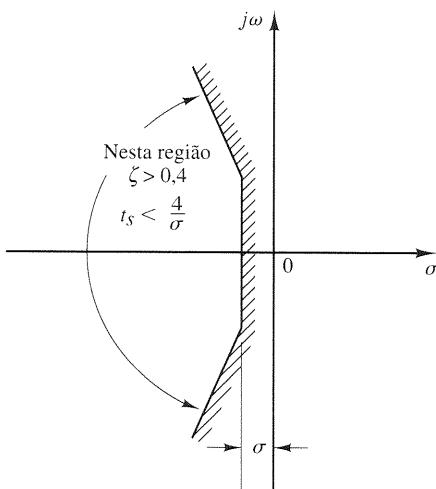


Fig. 5-23 Região do plano complexo satisfazendo a condição $\zeta > 0,4$ e $t_s < 4/\sigma$.

resolvido de imediato, não se escolhendo pólos a malha fechada no semiplano s da direita, incluído o eixo $j\omega$. (Matematicamente, pólos a malha fechada no eixo $j\omega$ resultarão em oscilações, com amplitude nem descrecente nem crescente com o tempo. Em casos práticos, onde o ruído se faz presente, a amplitude das oscilações pode crescer com uma taxa determinada pelo nível de potência do ruído. Portanto, um sistema de controle não pode ter pólos a malha fechada no eixo $j\omega$.)

Note-se que o mero fato de que todos os pólos a malha fechada estejam no semiplano esquerdo do plano s não garante características satisfatórias para a resposta transitória. Se há pólos a malha fechada complexos-conjugados dominantes perto do eixo $j\omega$, a resposta transitória pode apresentar oscilações excessivas ou ser muito lenta. Portanto, para garantir uma característica de resposta transitória rápida e ainda bem amortecida, é necessário que os pólos a malha fechada do sistema se localizem em regiões particulares do plano complexo, como por exemplo a região limitada pela área hachurada na Fig. 5-23.

Uma vez que a estabilidade relativa e o desempenho transitório de um sistema de controle a malha fechada estão diretamente relacionados com a configuração de pólos e zeros a malha fechada no plano s , freqüentemente se torna necessário ajustar um ou mais parâmetros do sistema para obter configurações satisfatórias. Os efeitos de variação de parâmetros do sistema sobre os pólos a malha fechada serão discutidos com detalhes no Cap. 6.

5-5 CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE ROUTH

O problema mais importante em sistemas de controle lineares é o da estabilidade. Ou seja, em que condições um sistema se tornará instável? Se ele é instável, como se pode estabilizá-lo? Na Seção 5-4 foi dito que um sistema de controle é estável se e somente se todos os pólos a malha fechada estiverem situados no semiplano esquerdo do plano s . Como a maioria dos sistemas lineares a malha fechada apresenta funções de transferência a malha fechada da forma

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

onde os coeficientes a_i e b_j são constantes e $m \leq n$, deve-se inicialmente fatorar o polinômio $A(s)$ para achar os pólos a malha fechada. Um critério simples, conhecido como critério de estabilidade de Routh, permite determinar o número de pólos a malha fechada que estão no semiplano direito s sem ter que fatorar o polinômio.

Critério de estabilidade de Routh. O critério de estabilidade de Routh diz se há ou não raízes instáveis de uma equação polinomial sem ter que resolver a equação. Este critério de estabilidade se aplica a polinômios com apenas um número finito de termos. Quando o critério é aplicado a um sistema de controle, pode-se obter informação sobre estabilidade absoluta diretamente dos coeficientes da equação característica.

O procedimento no critério de estabilidade de Routh é o seguinte:

1. Escrever o polinômio em s da seguinte forma

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (5-6)$$

onde os coeficientes são grandezas reais. Admite-se que $a_n \neq 0$; isto é, qualquer raiz nula foi removida.

2. Se qualquer dos coeficientes for zero ou negativo na presença de pelo menos um coeficiente positivo, então há uma raiz ou raízes que são imaginárias ou que têm partes reais positivas. Portanto, em um caso como este, o sistema não é estável. Se estivermos interessados apenas na estabilidade absoluta, não há necessidade de seguir com o procedimento. Note-se que todos os coeficientes devem ser positivos. Esta é uma condição necessária, como pode ser visto pelo seguinte argumento: um polinômio em s que tem coeficientes reais pode ser sempre fatorado em fatores lineares e quadráticos, tais como $(s + a)$ e $(s^2 + bs + c)$, onde a , b e c são reais. Os fatores lineares resultam em raízes reais do polinômio, e os fatores quadráticos em raízes complexas. O fator $(s^2 + bs + c)$ resulta em raízes com partes reais negativas somente se b e c são ambos positivos. Para que todas as raízes tenham partes reais negativas, as constantes a , b , c , etc. em todos os fatores devem ser positivas. O produto de qualquer número de fatores lineares e quadráticos que contém apenas coeficientes positivos sempre resulta em um polinômio com coeficientes positivos. É importante notar que a condição de que todos os coeficientes sejam positivos não é suficiente para assegurar estabilidade. A condição necessária, mas não suficiente, para estabilidade é que os coeficientes da Eq. (5-6) estejam todos presentes e todos tenham um sinal positivo. (Se todos os a_i são negativos, eles podem ser tornados positivos multiplicando-se ambos os membros da equação por -1 .)

3. Se todos os coeficientes são positivos, arranjar os coeficientes do polinômio em linhas e colunas de acordo com o seguinte padrão:

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	.	.	.
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	.	.	.
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	.	.	.
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	.	.	.
s^{n-4}	d_1	d_2	d_3	d_4	.	.	.
.
.
s^2	e_1	e_2					
s^1	f_1						
s^0	g_1						

Os coeficientes b_1, b_2, b_3 e assim por diante são calculados como a seguir:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

$$\vdots$$

O cálculo dos b 's continua até que os restos sejam todos nulos. O mesmo padrão de multiplicação em cruz dos coeficientes das duas linhas anteriores é seguido para calcular os c 's, d 's, e 's etc. Ou seja,

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

$$c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}$$

$$\vdots$$

e

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$$

$$d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}$$

$$\vdots$$

Este processo continua até que a n -ésima linha tenha sido completada. O arranjo completo de coeficientes é triangular. Note-se que, ao desenvolver o arranjo, uma linha inteira pode ser dividida ou multiplicada por um número positivo visando simplificar os cálculos subsequentes sem alterar a conclusão de estabilidade.

O critério de estabilidade de Routh diz que o número de raízes da Eq. (5-6) com partes reais positivas é igual ao número de mudanças de sinal dos coeficientes da primeira coluna do arranjo tabular. Deve-se notar que os valores exatos dos termos da primeira coluna não precisam ser conhecidos; apenas os sinais são necessários. A condição necessária e suficiente

para que todas as raízes da Eq. (5-6) fiquem no semiplano esquerdo do plano s é que todos os coeficientes da Eq. (5-6) sejam positivos e que todos os termos da primeira coluna do arranjo tabular tenham sinais positivos.

EXEMPLO 5-1

Seja aplicar o critério de estabilidade de Routh para o seguinte polinômio de terceira ordem

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$$

onde todos os coeficientes são números positivos. O arranjo tabular de coeficientes se torna

s^3	a_0	a_2
s^2	a_1	a_3
s^1	$\frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	
s^0		a_3

A condição para que todas as raízes tenham partes reais negativas é dada por

$$a_1 a_2 > a_0 a_3$$

EXEMPLO 5-2

Considere-se o seguinte polinômio:

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$$

Vai-se seguir o procedimento apresentado e construir a tabela de coeficientes. (As duas primeiras linhas podem ser obtidas diretamente do polinômio dado. Os demais termos são obtidos a partir destes. Se qualquer dos coeficientes for inexistente, este pode ser substituído por um zero na tabela.)

s^4	1	3	5	s^4	1	3	5
s^3	2	4	0	s^3	2	4	\emptyset
					1	2	0
s^2	1	5		s^2	1	5	
s^1	-6			s^1	-3		
s_0	5			s^0	5		

A segunda linha foi dividida por 2.

Neste exemplo o número de mudanças de sinal dos coeficientes da primeira coluna é igual a dois. Isto significa que há duas raízes com partes reais positivas. Note-se que o resultado não se altera quando os coeficientes de qualquer linha são multiplicados ou divididos por um número positivo para simplificar os cálculos.

Casos especiais. Se um termo da primeira coluna for nulo, mas os termos restantes não forem nulos ou não houver termo restante, então o termo nulo é substituído por um número ϵ positivo muito pequeno e o resto da tabela é calculado. Por exemplo, considere-se a seguinte equação

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0 \quad (5-7)$$

O arranjo tabular de coeficientes é

s^3	1	1
s^2	2	2
s^1	$0 \approx \epsilon$	
s^0	2	

Se o sinal do coeficiente acima de zero (ϵ) é o mesmo sinal do coeficiente abaixo, isto indica que há um par de raízes imaginárias. De fato, a Eq. (5-7) tem duas raízes em $s = \pm j$.

Se, entretanto, o sinal do coeficiente acima de zero (ϵ) é oposto ao do coeficiente abaixo, isto indica que há uma mudança de sinal. Por exemplo, para a seguinte equação

$$s^3 - 3s + 2 = (s - 1)^2(s + 2) = 0$$

A tabela de coeficientes é

Uma mudança de sinal:	s^3	1	-3
	s^2	0 $\approx \epsilon$	2
Uma mudança de sinal:	s^1	$-3 - \frac{2}{\epsilon}$	
	s^0	2	

Há duas mudanças de sinal dos coeficientes da primeira coluna. Isto está de acordo com o resultado correto indicado pela forma fatorada de equação polinomial.

Se todos os coeficientes em uma linha calculada forem nulos, isto indica que há raízes de igual módulo mas radialmente opostas no plano s , isto é, duas raízes reais com módulo igual mas sinal oposto e/ou duas raízes imaginárias conjugadas. Em tal caso, o cálculo do resto da tabela pode ser continuado formando-se um polinômio auxiliar com os coeficientes da última linha e usando-se os coeficientes da derivada deste polinômio na linha seguinte. Tais raízes com igual módulo e situadas radialmente opostas no plano s podem ser determinadas resolvendo-se o polinômio auxiliar, que é sempre par. Para um polinômio auxiliar de grau $2n$ há n pares de raízes iguais e opostas. Por exemplo, considere-se a seguinte equação:

$$s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$$

A tabela de coeficientes é

s^5	1	24	-25	
s^4	2	48	-50	\leftarrow Polinômio auxiliar $P(s)$
s^3	0	0		

Os termos na linha s^3 são todos nulos. O polinômio auxiliar é então formado dos coeficientes da linha s^4 . O polinômio auxiliar $P(s)$ é

$$P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50$$

que indica que há dois pares de raízes de igual módulo e sinal oposto. Estes pares são obtidos resolvendo-se a equação polinomial auxiliar $P(s) = 0$. A derivada de $P(s)$ com respeito a s é

$$\frac{dP(s)}{ds} = 8s^3 + 96s$$

Os termos na linha s^3 são substituídos pelos coeficientes da última equação, ou seja, 8 e 96. A tabela de coeficientes então se torna

s^5	1	24	-25	
s^4	2	48	-50	
s^3	8	96		\leftarrow Coeficientes de $dP(s)/ds$
s^2	24	-50		
s^1	112,7	0		
s^0	-50			

Vê-se que há uma mudança de sinal na primeira coluna da nova tabela. Portanto, a equação original tem uma raiz com parte real positiva. Resolvendo a equação polinomial auxiliar

$$2s^4 + 48s^2 - 50 = 0$$

obtém-se

$$s^2 = 1, \quad s^2 = -25$$

ou

$$s = \pm 1, \quad s = \pm j5$$

Estes dois pares de raízes são uma parte da equação original. De fato, a equação original pode ser escrita em forma fatorada como a seguir:

$$(s + 1)(s - 1)(s + j5)(s - j5)(s + 2) = 0$$

É evidente que a equação original tem uma raiz com parte real positiva.

Análise de estabilidade relativa. O critério de estabilidade de Routh provê a resposta à questão da estabilidade absoluta. Isto, em muitos casos práticos, não é suficiente. Normalmente é requerida informação sobre a estabilidade relativa do sistema. Um modo útil de se examinar a estabilidade relativa consiste em se deslocar o eixo vertical do plano s e aplicar o critério de estabilidade de Routh. Ou seja, substitui-se

$$s = \hat{s} - \sigma \quad (\sigma = \text{constante})$$

na equação característica do sistema, escreve-se o polinômio em termos de \hat{s} e, então, se aplica o critério de estabilidade de Routh para o novo polinômio em \hat{s} . O número de mudanças de sinal na primeira coluna da tabela feita para o polinômio em \hat{s} é igual ao número de raízes que estão localizadas para a direita da linha vertical $s = -\sigma$. Portanto, este teste revela o número de raízes que estão à direita da linha vertical $s = -\sigma$.

Aplicação do critério de estabilidade de Routh para a análise de sistemas de controle. O critério de estabilidade de Routh é de utilidade limitada na análise de sistemas de controle lineares, principalmente porque ele não sugere como melhorar a estabilidade relativa ou como estabilizar um sistema instável. Entretanto, é possível determinar os efeitos da modificação de um ou dois parâmetros de um sistema examinando-se os valores que causam instabilidade. Em seguida, considera-se o problema de determinar a região de estabilidade para um valor de um parâmetro.

Considere-se o sistema mostrado na Fig. 5-24. Será determinada a região de valores de K para os quais haverá estabilidade. A função de transferência a malha fechada é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2) + K}$$

A equação característica é

$$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

O arranjo tabular dos coeficientes se torna

s^4	1	3	K
s^3	3	2	0
s^2	$\frac{7}{3}$		K
s^1	$2 - \frac{9}{7}K$		
s^0	K		

Para estabilidade, K deve ser positivo, e todos os coeficientes da primeira coluna devem ser positivos. Portanto,

$$\frac{14}{9} > K > 0$$

Quando $K = 14/9$, o sistema se torna oscilatório e, matematicamente, a oscilação é mantida com amplitude constante.

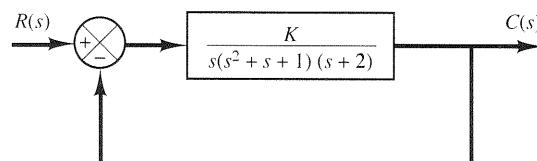


Fig. 5-24 Sistema de controle.

5-6 CONTROLADORES PNEUMÁTICOS*

Como meio mais versátil de transmitir sinais e potência, os fluidos, sejam como líquidos, sejam como gases, têm amplo emprego na indústria. Líquidos e gases podem ser distinguidos basicamente por suas relativas incompressibilidades e pelo fato de que um líquido pode ter uma superfície livre, enquanto um gás se expande para encher seu recipiente. No campo da engenharia o termo *pneumático* descreve os sistemas de fluidos que usam ar ou gases, e *hidráulico* se aplica aos sistemas que usam óleo.

Os sistemas pneumáticos são extensivamente usados na automação de maquinaria de produção e no campo dos controladores automáticos. Por exemplo, circuitos pneumáticos que convertem a energia do ar comprimido em energia mecânica têm amplo uso, e vários tipos de controladores pneumáticos são achados na indústria.

Uma vez que sistemas pneumáticos e sistemas hidráulicos são freqüentemente comparados, será feita a seguir uma breve comparação entre estas duas espécies de sistemas.

Comparação entre sistemas pneumáticos e sistemas hidráulicos. O fluido geralmente achado em sistemas pneumáticos é o ar; em sistemas hidráulicos é o óleo. E são principalmente as diversas propriedades dos fluidos envolvidos que caracterizam as diferenças entre os dois sistemas. Essas diferenças podem ser relacionadas da seguinte forma:

1. O ar e os gases são compressíveis, enquanto o óleo é incompressível.
2. O ar é desprovido de propriedades lubrificantes e sempre contém vapor d'água. O óleo funciona como fluido hidráulico e também como lubrificante.
3. A pressão de operação normal de sistemas pneumáticos é muitíssimo mais baixa do que a dos sistemas hidráulicos.
4. As potências de saída dos sistemas pneumáticos são consideravelmente menores do que as dos sistemas hidráulicos.
5. A precisão dos atuadores pneumáticos é deficiente nas baixas velocidades, enquanto a precisão dos atuadores hidráulicos pode ser satisfatória em todas as velocidades.
6. Em sistemas pneumáticos, a fuga externa é permitível até certo ponto, mas a fuga interna deve ser evitada porque a diferença de pressão efetiva é um tanto pequena. Nos sistemas hidráulicos, a fuga interna é permitível até certo ponto, mas a fuga externa deve ser evitada.
7. Não são requeridas tubulações de retorno em sistemas pneumáticos que utilizam o ar, mas elas são sempre necessárias em sistemas hidráulicos.
8. A temperatura de operação normal em sistemas pneumáticos é de 5° a 60°C (41° a 140°F). O sistema pneumático, no entanto, pode ser operado na faixa de 0° a 200°C (32° a 392°F). Os sistemas pneumáticos são insensíveis às variações de temperatura, em contraste com os sistemas hidráulicos, onde o atrito dos fluidos devido à viscosidade depende grandemente da temperatura. A temperatura de operação normal nos sistemas hidráulicos é de 20° a 70°C (68° a 158°F).
9. Sistemas pneumáticos são à prova de fogo e de explosão, enquanto os sistemas hidráulicos não o são.

A seguir, começa-se com uma modelagem matemática dos sistemas pneumáticos. Depois, são apresentados os controladores pneumáticos proporcionais. Ilustra-se o fato de que os controladores proporcionais utilizam o princípio da retroação negativa neles próprios. Será apresentada uma discussão detalhada do princípio pelo qual operam os controladores proporcionais. Finalmente, serão tratados métodos de obtenção das ações de controle derivativa e integral. Em todas as discussões, a ênfase recaia sobre os princípios fundamentais, em vez de em detalhes da operação dos mecanismos reais.

Sistemas pneumáticos. As décadas passadas viram um grande desenvolvimento nos controladores pneumáticos de baixa pressão para sistemas de controle industrial, e atualmente eles são usados extensivamente nos processos industriais. Dentre as razões para sua grande atração incluem-se sua característica de funcionamento à prova de explosão, a simplicidade e a facilidade de manutenção.

Resistência e capacidade de sistemas de pressão. Muitos processos industriais e controladores pneumáticos envolvem o fluxo de um gás ou ar através de tubulações e de recipientes sob pressão conectados.

Considere-se o sistema de pressão mostrado na Fig. 5-25(a). O fluxo de gás através da restrição é uma função da diferença de pressão $p_i - p_o$ do gás. Um sistema de pressão desse tipo pode ser caracterizado em termos de uma resistência e de uma capacidade.

A resistência R do fluxo de gás pode ser assim definida:

$$R = \frac{\text{variação na diferença de pressão do gás, N/m}^2}{\text{variação na diferença de vazão do gás, kg/s}}$$

*Foram adotadas ao longo deste capítulo as unidades do Sistema Internacional. (N. do T.)

ou

$$R = \frac{d(\Delta P)}{dq} \quad (5-8)$$

onde $d(\Delta P)$ é uma pequena variação na diferença de pressão do gás e dq uma pequena variação na vazão de gás. O cálculo do valor da resistência R do fluxo de gás pode ser bastante demorado. Experimentalmente, entretanto, pode ser facilmente determinado através de um gráfico relacionando a diferença de pressão com a vazão e calculando-se a inclinação da curva em uma dada condição de operação, conforme mostrado na Fig. 5-25(b).

A capacidade do recipiente sob pressão pode ser definida por

$$C = \frac{\text{variação na quantidade de gás armazenado, kg}}{\text{variação na pressão do gás armazenado, N/m}^2}$$

ou

$$C = \frac{dm}{dp} = V \frac{d\rho}{dp} \quad (5-9)$$

onde

C = capacidade, $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{N}$

m = massa do gás no interior do recipiente, kg

p = pressão do gás, N/m^2

V = volume do recipiente, m^3

ρ = densidade do gás, kg/m^3

A capacidade do sistema de pressão depende do tipo de processo de expansão envolvido. A capacidade pode ser calculada pelo uso da lei dos gases perfeitos. Se o processo de expansão do gás for politrópico e a mudança de estado do gás for entre isotérmica e adiabática, então

$$p \left(\frac{V}{m} \right)^n = \frac{p}{\rho^n} = \text{constante} \quad (5-10)$$

onde n = expoente politrópico.

Para os gases perfeitos,

$$p\bar{v} = \bar{R}T \quad \text{ou} \quad p\bar{v} = \frac{\bar{R}}{M} T$$

em que

p = pressão absoluta, N/m^2

\bar{v} = volume ocupado por 1 mol do gás, $\text{m}^3/\text{kg}\cdot\text{mol}$

\bar{R} = constante universal dos gases, $\text{N}\cdot\text{m}/\text{kg}\cdot\text{mol} \text{ }^\circ\text{K}$

T = temperatura absoluta, K

v = volume específico do gás, m^3/kg

M = massa molecular do gás por mol, $\text{kg}/\text{kg}\cdot\text{mol}$

Assim,

$$p\bar{v} = \frac{p}{\rho} = \frac{\bar{R}}{M} T = R_{\text{gás}} T \quad (5-11)$$

onde $R_{\text{gás}}$ = constante do gás, $\text{N}\cdot\text{m}/\text{kg} \text{ }^\circ\text{K}$.

O expoente politrópico n é unitário para expansão isotérmica. Para expansão adiabática, n é igual à relação entre os calores específicos c_p/c_v , onde c_p é o valor do calor específico a pressão constante e c_v é o calor específico a volume constante. Em muitos casos práticos o valor de n é aproximadamente constante e portanto a capacidade pode ser considerada constante. O valor de $d\rho/dp$ é obtido das Eq. (5-10) e (5-11) como

$$\frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{nR_{\text{gás}} T}$$

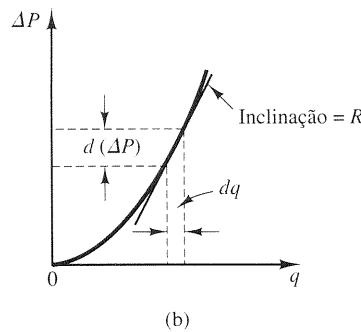
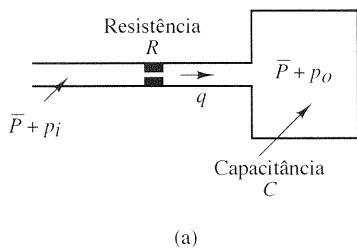


Fig. 5-25 (a) Diagrama esquemático de um sistema de pressão; (b) curva de diferença de pressão *versus* vazão.

A capacitância é então obtida como

$$C = \frac{V}{nR_{\text{gás}}T} \quad (5-12)$$

A capacitância de um dado recipiente é constante se a temperatura permanecer constante. (Em muitos casos práticos, o expoente politrópico n é aproximadamente $1,0 \sim 1,2$ para gases em recipientes metálicos não-isolados.)

Sistemas de pressão. Considere-se o sistema mostrado na Fig. 5-25(a). Supondo-se apenas pequenos desvios nos valores das variáveis, em relação a seus respectivos valores de regime estacionário, então este sistema pode ser considerado linear.

Seja a definição

\bar{P} = valor de regime estacionário da pressão do gás no interior do recipiente (antes da ocorrência de variações de pressão), N/m^2

p_i = pequena variação na pressão do gás que entra no recipiente, N/m^2

p_o = pequena variação na pressão do gás que sai do recipiente, N/m^2

V = volume do recipiente, m^3

m = massa do gás no interior do recipiente, kg

q = vazão do gás, kg/s

ρ = massa específica do gás, kg/m^3

Para pequenos valores de p_i e p_o , a resistência R dada pela Eq. (5-8) torna-se constante e pode ser escrita como

$$R = \frac{p_i - p_o}{q}$$

A capacitância C é dada pela Eq. (5-9), ou

$$C = \frac{dm}{dp}$$

Uma vez que a variação de pressão dp_o vezes a capacitância C é igual ao gás adicionado ao recipiente durante dt segundos, obtém-se

$$C dp_o = q dt$$

ou

$$C \frac{dp_o}{dt} = \frac{p_i - p_o}{R}$$

que pode ser escrita como

$$RC \frac{dp_o}{dt} + p_o = p_i$$

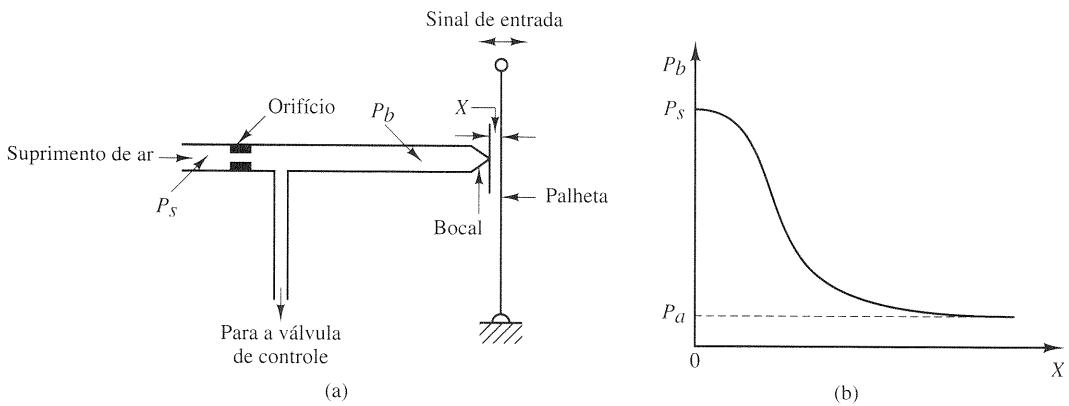


Fig. 5-26 (a) Diagrama esquemático de um amplificador pneumático bocal-palheta; (b) curva característica relacionando a pressão reversa e a distância bocal-palheta.

Se p_i e p_o forem consideradas, respectivamente, a grandeza de entrada e a grandeza de saída, então a função de transferência do sistema é

$$\frac{P_o(s)}{P_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

onde RC possui a dimensão de tempo e é a constante de tempo do sistema.

Amplificadores pneumáticos bocal-palheta (nozzle-flapper). Um diagrama esquemático de um amplificador pneumático do tipo bocal-palheta (*nozzle-flapper*) é indicado na Fig. 5-26(a). A fonte de potência para este amplificador é uma fonte de ar a pressão constante. O amplificador converte pequenas variações na posição da palheta em grandes variações na pressão do bocal. Portanto, uma grande potência de saída pode ser controlada através de uma pequena potência necessária para posicionar a palheta (*flapper*).

Na Fig. 5-26(a), o ar pressurizado é introduzido através de um orifício e o ar é ejetado do bocal (*nozzle*) para a palheta. Geralmente a pressão de alimentação para este controlador é de 20 psig (1,4 kg/cm²). O diâmetro do orifício é da ordem de 0,01 in. (0,25 mm), e o do bocal é da ordem de 0,016 in. (0,4 mm). O diâmetro do bocal deve ser maior que o do orifício, a fim de que o amplificador funcione apropriadamente.

Para operar este sistema, a palheta é posicionada contra a abertura do bocal. A pressão no bocal P_b é controlada pela distância X palheta-bocal. Conforme a palheta se aproxima do bocal, a oposição para o fluxo de ar através do bocal aumenta, resultando em um aumento da pressão P_b . Se o bocal for completamente fechado pela haste, a pressão do bocal é igual à pressão de alimentação P_s . Se a palheta for distanciada do bocal, de modo que a distância bocal-palheta seja grande (da ordem de 0,25 mm) então não há praticamente restrição ao fluxo e a pressão no bocal possui o seu valor mínimo, que depende do dispositivo haste-bocal utilizado. (A mínima pressão possível será a pressão ambiente P_a .)

Note-se que, como o jato de ar empurra a palheta, é necessário construir o diâmetro do bocal tão pequeno quanto possível.

Uma curva típica relacionando a pressão do bocal com a distância palheta-bocal X é mostrada na Fig. 5-26(b). A parte descendente e quase linear da curva é utilizada na operação real do amplificador bocal-palheta. Como o intervalo de deslocamentos da palheta é restrito a valores muito pequenos, a variação na pressão de saída também é pequena, a menos que se tenha uma curva muito íngreme.

O amplificador bocal-palheta converte deslocamentos em um sinal de pressão. Já que os sistemas de controle de processo industrial exigem grandes potências de saída para a operação de grandes válvulas atuantes pneumáticas, usualmente a amplificação de potência do amplificador bocal-palheta é insuficiente. Consequentemente, muitas vezes um relé pneumático serve como amplificador de potência em conexão com o amplificador bocal-palheta.

Relés pneumáticos. Na prática, em um controlador pneumático, um amplificador bocal-palheta atua como primeiro estágio amplificador e um relé pneumático como o segundo estágio amplificador. O relé pneumático é capaz de operar com uma grande quantidade de fluxo de ar.

Um diagrama esquemático de um relé pneumático é mostrado na Fig. 5-27(a). Conforme a pressão no bocal P_b aumenta, a válvula do diafragma se move para baixo. A abertura para a atmosfera diminui e a abertura para a válvula pneumática aumenta, aumentando desse modo a pressão de controle P_c . Quando a válvula de diafragma fecha a abertura para a atmosfera, a pressão de controle P_c torna-se igual à pressão de alimentação P_s . Quando a pressão inversa P_b no bocal diminui e a válvula de diafragma se move para cima e fecha o suprimento de ar, o valor da pressão de controle P_c cai para o valor da

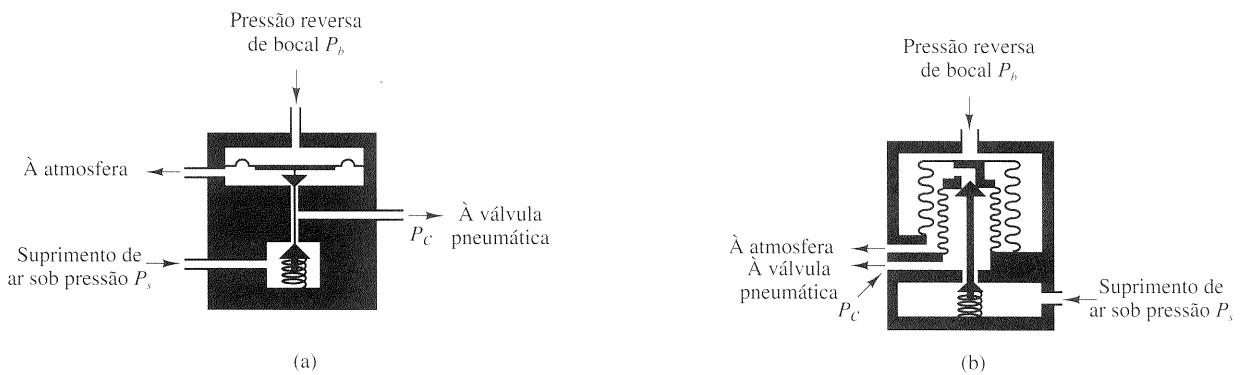


Fig. 5-27 (a) Diagrama esquemático de um relé do tipo com dreno; (b) diagrama esquemático de um relé do tipo sem dreno.

pressão ambiente P_a . Pode-se, portanto, fazer variar a pressão de controle desde 0 psig até a pressão de suprimento total, usualmente 20 psig.

O movimento total da válvula de diafragma é muito pequeno. Em todas as posições da válvula, exceto na posição de fechar o suprimento de ar, o ar continua a escapar para a atmosfera, mesmo após ser atingida a condição de equilíbrio entre a pressão inversa do bocal e a pressão de controle. Portanto, o relé mostrado na Fig. 5.27(a) é chamado relé do tipo dreno (*bleed*).

Há um outro tipo de relé, o tipo sem dreno. Neste tipo o ar deixa de escapar quando a condição de equilíbrio é atingida e, portanto, não há perda de ar pressurizado na operação em estado estacionário. Note-se, entretanto, que o relé do tipo sem dreno deve possuir um sistema de alívio para remover a pressão de controle P_c da válvula atuante pneumática. Um diagrama esquemático de um relé tipo sem dreno é mostrado na Fig. 5-27(b).

Em qualquer tipo de relé o suprimento de ar é controlado por uma válvula, que por sua vez é controlada pela pressão do bocal. Portanto, a pressão do bocal é convertida na pressão de controle com amplificação de potência.

Como o valor da pressão de controle P_c varia quase que instantaneamente em função das variações na pressão do bocal P_b , a constante de tempo do relé pneumático é desprezível se comparada com as outras constantes de tempo do controlador pneumático e do processo a controlar, que são usualmente maiores.

Observa-se que alguns relés pneumáticos são de ação reversa. Por exemplo, o relé mostrado na Fig. 5-28 é um relé de ação reversa. Aqui, quando a pressão inversa no bocal P_b aumenta, a válvula de esfera é forçada para a posição inferior, diminuindo desse modo a pressão de controle P_c . Assim, este relé é um relé de ação reversa.

Controladores proporcionais pneumáticos (tipo força-distância). Dois tipos de controladores pneumáticos, um denominado do tipo força-distância e outro do tipo balanceamento-de-força, são extensivamente utilizados na indústria. Independentemente de quão distintos os controladores pneumáticos industriais possam parecer, um estudo cuidadoso mostrará a grande similaridade nas funções do circuito pneumático. Serão considerados aqui apenas os controladores pneumáticos do tipo força-distância.

A Fig. 5-29(a) mostra um diagrama esquemático deste tipo de controlador proporcional. O amplificador bocal-palhetta constitui o primeiro estágio amplificador, e a pressão inversa do bocal é controlada pela distância palhetta-bocal. O amplificador do tipo relé constitui o segundo estágio de amplificação. A pressão inversa do bocal determina a posição da válvula de diafragma para o segundo estágio amplificador, que é capaz de operar com uma grande quantidade de fluxo de ar.

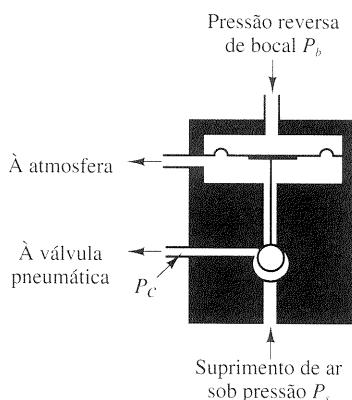


Fig. 5-28 Relé de ação reversa.

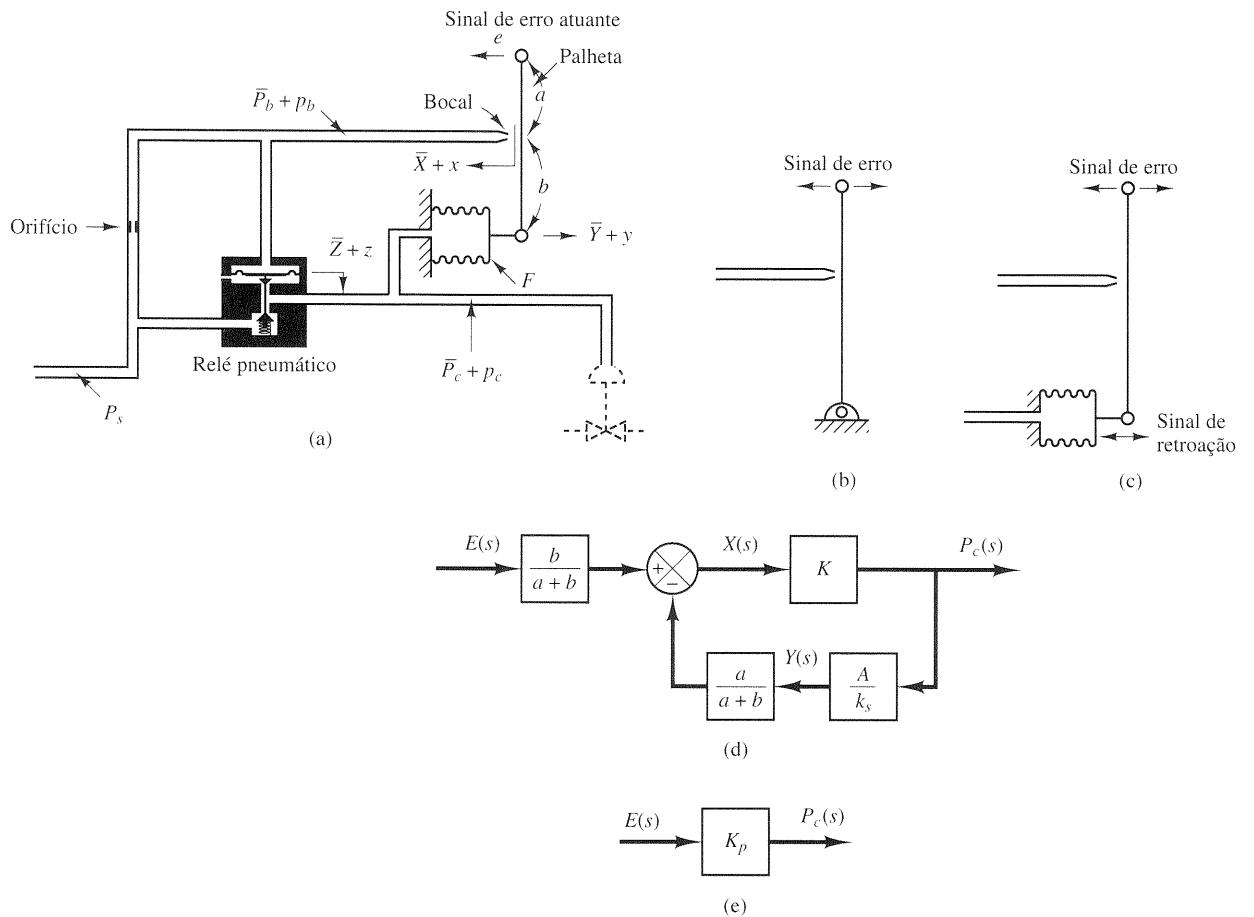


Fig. 5-29 (a) Diagrama esquemático de um controlador pneumático proporcional do tipo força-distância; (b) palheta montada num ponto fixo; (c) palheta montada num fole de retroação; (d) diagrama de blocos do controlador; (e) diagrama de blocos simplificado do controlador.

Na maioria dos controladores pneumáticos é empregado algum tipo de retroação pneumática. A retroação da saída pneumática reduz a excursão real da palheta. Em vez de montar a palheta apoiada em um ponto fixo, como indicado na Fig. 5-29(b), ela é normalmente pivotada no fole de retroação como mostrado na Fig. 5-29(c). A quantidade de retroação pode ser regulada pela introdução de uma ligação variável entre o fole de retroação e o ponto de conexão da palheta. A palheta torna-se então um elo flutuante. Ela pode mover-se tanto por ação do sinal de erro como pelo sinal de retroação.

A operação do controlador mostrado na Fig. 5-29(a) é da seguinte forma: o sinal de entrada para o amplificador pneumático de dois estágios é o sinal de erro atuante. Aumentando-se o sinal de erro atuante, a palheta se move para a esquerda. Este movimento, por sua vez, aumenta a pressão inversa do bocal, e a válvula de diafragma se move para baixo. Isto resulta em um aumento da pressão de controle. Este aumento fará com que o fole \$F\$ se expanda e mova a palheta para a direita, abrindo assim o bocal. Por causa desta retroação, o deslocamento bocal-palheta é muito pequeno, mas a variação na pressão de controle pode ser grande.

Deve-se notar que, para uma operação adequada do controlador, é necessário que o movimento induzido pelo fole de retroação sobre a palheta seja menor que aquele causado pelo sinal de erro sozinho. (Se estes dois movimentos fossem iguais, não resultaria nenhuma ação de controle.)

As equações para modelar este controlador podem ser deduzidas da seguinte forma: quando o erro atuante é nulo, ou seja, \$e = 0\$, existe um estado de equilíbrio com a distância bocal-palheta igual a \$\bar{X}\$, com o deslocamento do fole igual a \$\bar{Y}\$, com o deslocamento do diafragma igual a \$\bar{Z}\$, com a pressão do bocal igual a \$\bar{P}_b\$ e a pressão de controle igual a \$\bar{P}_c\$. Na presença de erro atuante, a distância palheta-bocal, o deslocamento do fole, o deslocamento do diafragma, a pressão no bocal e a pressão de controle se desviam de seus respectivos valores de equilíbrio. Considerem-se estes desvios como sendo \$x, y, z, p_b\$ e \$p_c\$, respectivamente. (O sentido positivo para cada variável de deslocamento é indicado no diagrama por uma seta.)

Supondo-se que a relação entre a variação na pressão do bocal e a variação na distância palheta-bocal seja linear, tem-se

$$p_b = K_1 x \quad (5-13)$$

onde K_1 é uma constante com valor positivo. Para a válvula de diafragma,

$$p_b = K_2 z \quad (5-14)$$

onde K_2 é uma constante com valor positivo. A posição da válvula de diafragma determina a pressão de controle. Se a válvula de diafragma for tal que a relação entre p_c e z seja linear, então

$$p_c = K_3 z \quad (5-15)$$

onde K_3 é uma constante com valor positivo. Das Eqs. (5-13), (5-14) e (5-15) obtém-se

$$p_c = \frac{K_3}{K_2} p_b = Kx \quad (5-16)$$

onde $K = K_1 K_3 / K_2$ é uma constante com valor positivo. Para o movimento da palheta tem-se

$$x = \frac{b}{a+b} e - \frac{a}{a+b} y \quad (5-17)$$

O fole F age como uma mola, e vale a seguinte equação

$$Ap_c = k_s y \quad (5-18)$$

onde A é a área efetiva do fole e k_s é a constante da mola equivalente ou a rigidez devida à ação da parte corrugada do fole.

Supondo-se que todas as variações nas variáveis estão dentro da faixa linear, pode-se obter um diagrama de blocos para este sistema a partir das Eqs. (5-16), (5-17) e (5-18), como mostrado na Fig. 5-29(d). Da Fig. 5-29(d) pode-se verificar claramente que o controlador pneumático mostrado na Fig. 5-29(a) é por si só um sistema com retroação. A função de transferência entre p_c e e é dada por

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\frac{b}{a+b} K}{1 + K \frac{a}{a+b} \frac{A}{k_s}} = K_p \quad (5-19)$$

Um diagrama de blocos simplificado é mostrado na Fig. 5-29(e). Uma vez que p_c e e são proporcionais, o controlador pneumático indicado na Fig. 5-29(a) é denominado *controlador proporcional pneumático*. Conforme visto na Eq. (5-19), o ganho do controlador proporcional pneumático pode variar amplamente pelo ajuste do valor efetivo dos segmentos a e b da palheta. [O sistema de ajuste destes segmentos não aparece na Fig. 5-29(a).] Na maioria dos controladores proporcionais comerciais é fornecido um botão de ajuste ou um outro mecanismo para variar o ganho pelo ajuste destes parâmetros.

Conforme observado de início, o sinal de erro atuante moveu a palheta em um sentido, e o fole de retroação moveu a palheta no sentido oposto, mas em um grau menor. O efeito do fole de retroação é, portanto, o de reduzir a sensibilidade do controlador. O princípio da retroação é comumente usado para obter controladores de banda proporcional ampla.

Os controladores pneumáticos que não possuem mecanismos de retroação [o que significa que um extremo da palheta é fixo, como indicado na Fig. 5-30(a)] possuem alta sensibilidade e são denominados *controladores pneumáticos de duas*

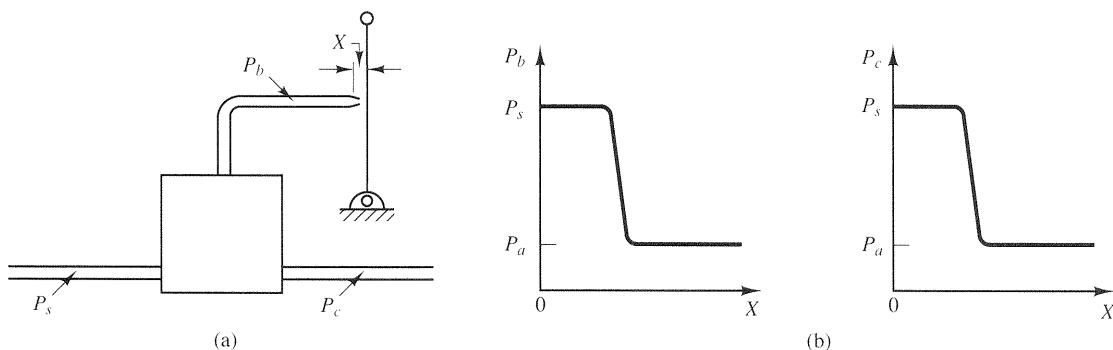


Fig. 5-30 (a) Controlador pneumático sem mecanismo de retroação; (b) curvas P_b versus X e P_c versus X .

posições ou controladores pneumáticos do tipo liga-desliga. Em tal controlador é requerido apenas um pequeno movimento entre o bocal e a palheta para se obter uma excursão completa na gama de valores da pressão de controle desde a pressão de controle máxima até a mínima. As curvas relacionando P_b a X e P_c a X são mostradas na Fig. 5-30(b). Note-se que uma pequena variação em X pode acarretar uma grande variação em P_b , o que faz a válvula de diafragma estar completamente aberta ou completamente fechada.

Controladores proporcionais pneumáticos (tipo balanceamento-de-força). A Fig. 5-31 mostra um diagrama esquemático de um controlador proporcional pneumático do tipo balanceamento-de-força. Controladores deste tipo são extensivamente usados na indústria. Tais controladores são muitas vezes denominados controladores em pilha. O princípio básico de operação não difere daquele do controlador força-distância. A principal vantagem do controlador de balanceamento-de-força é que ele elimina muitas perdas mecânicas e juntas articuladas, reduzindo, consequentemente, os efeitos de fricção.

A seguir considera-se o princípio do controlador de balanceamento-de-força. No controlador mostrado na Fig. 5-31 a pressão de entrada de referência P_r e a pressão de saída P_o são injetadas em grandes câmaras com diafragmas. Note-se que um controlador pneumático do tipo balanceamento-de-força opera apenas com sinais de pressão. Portanto, é necessário converter a entrada de referência e a saída do sistema em sinais de pressão correspondentes.

Como no caso do controlador força-distância, este controlador emprega uma palheta, um bocal e orifícios calibrados. Na Fig. 5-31 a abertura perfurada com broca, na câmara inferior, é o bocal. O diafragma exatamente acima do bocal atua como palheta.

A operação do controlador do tipo balanceamento-de-força mostrado na Fig. 5-31 pode ser resumida a seguir: o ar sob pressão de 20 psig flui através de um orifício calibrado, ocasionando uma redução de pressão na câmara inferior. O ar desta câmara escapa para a atmosfera através do bocal. O fluxo de ar para a atmosfera depende do intervalo entre o bocal e a palheta e da queda de pressão no bocal. Um aumento na pressão de entrada de referência P_r , enquanto a pressão de saída P_o estiver constante, acarreta o movimento da haste da válvula para baixo, reduzindo o intervalo entre o bocal e o diafragma-palheta. Isto produz um aumento da pressão de controle P_c . Seja

$$p_e = P_r - P_o \quad (5-20)$$

Quando $p_c = 0$, haverá um ponto de equilíbrio com a distância bocal-palheta igual a \bar{X} e a pressão de controle igual a \bar{P}_c . Neste ponto de equilíbrio, $P_1 = \bar{P}_c k$ (onde $k < 1$) e

$$\bar{X} = \alpha(\bar{P}_c A_1 - \bar{P}_c k A_1) \quad (5-21)$$

onde α é uma constante.

Admita-se que $p_e \neq 0$ e definam-se pequenas variações no afastamento bocal-palheta como sendo x e pequenas variações na pressão de controle como sendo p_c . Assim, obtém-se a seguinte equação:

$$\bar{X} + x = \alpha[(\bar{P}_c + p_c)A_1 - (\bar{P}_c + p_c)kA_1 - p_e(A_2 - A_1)] \quad (5-22)$$

Das Eq. (5-21) e (5-22) resulta

$$x = \alpha[p_c(1 - k)A_1 - p_e(A_2 - A_1)] \quad (5-23)$$

Neste ponto, deve-se examinar a grandeza x . No projeto de controladores pneumáticos, a distância bocal-palheta é muito pequena. Como x/α é um termo de ordem superior em relação a $p_c(1 - k)A_1$ ou a $p_e(A_2 - A_1)$, isto é, para $p_c \neq 0$,

$$\frac{x}{\alpha} \ll p_c(1 - k)A_1$$

$$\frac{x}{\alpha} \ll p_e(A_2 - A_1)$$

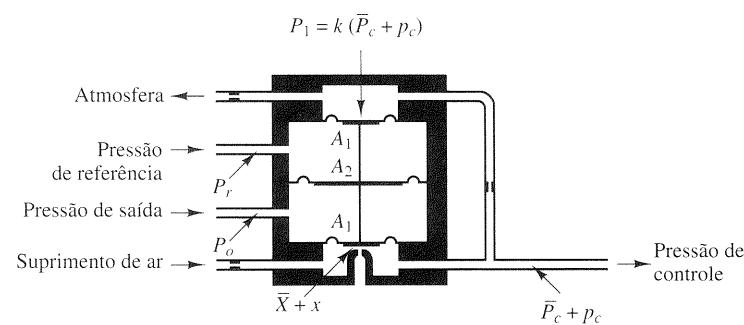


Fig. 5-31 Diagrama esquemático de um controlador pneumático proporcional do tipo balanceamento-de-força.

pode-se desprezar o termo x nesta análise. A Eq. (5-23) pode então ser reescrita, para refletir esta consideração, sob a seguinte forma:

$$p_c(1 - k)A_1 = p_e(A_2 - A_1)$$

e a função de transferência entre p_c e p_e se torna

$$\frac{P_c(s)}{P_e(s)} = \frac{A_2 - A_1}{A_1} \frac{1}{1 - k} = K_p$$

onde p_e é definido pela Eq. (5-20). O controlador mostrado na Fig. 5-31 é um controlador proporcional. O valor do ganho K_p aumenta conforme k se aproxima da unidade. Note-se que o valor de k depende dos diâmetros dos orifícios das tubulações de entrada e de saída da câmara de retroação. (O valor de k tende à unidade conforme a resistência ao fluxo no orifício da tubulação de entrada seja feita menor.)

Válvulas atuadoras pneumáticas. Uma característica dos sistemas de controle pneumáticos é que eles empregam, quase exclusivamente, válvulas atuadoras pneumáticas. Uma válvula atuadora pneumática pode fornecer uma grande potência de saída. (Uma vez que um atuador pneumático requer uma grande potência na entrada para produzir uma grande potência na saída, é necessário que esteja disponível uma quantidade suficiente de ar pressurizado.) Na prática, as válvulas atuadoras pneumáticas possuem características que podem ser não-lineares, isto é, o fluxo pode não ser diretamente proporcional à posição da haste da válvula, e também pode haver outros efeitos não-lineares, tais como histerese.

Considere-se o diagrama esquemático de uma válvula atuadora pneumática mostrado na Fig. 5-32. Supõe-se que a área do diafragma seja A . Supõe-se, ainda que, para erro atuante nulo, a pressão de controle seja igual a \bar{P}_c e o deslocamento da válvula seja igual a \bar{x} .

Na análise seguinte, consideram-se pequenas variações nas variáveis e é feita uma linearização da válvula atuadora pneumática. Serão definidos a pequena variação na pressão de controle e o correspondente deslocamento da válvula como sendo p_c e x , respectivamente. Uma vez que uma pequena variação na força de pressão pneumática aplicada ao diafragma reposiciona a carga, constituída de mola, fricção viscosa e massa, a equação de balanço de forças se torna

$$Ap_c = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx \quad (5-24)$$

onde m = massa do conjunto válvula e haste da válvula

b = coeficiente de fricção viscosa

k = constante da mola

Se a força devida à massa e à fricção viscosa forem desprezíveis, então a Eq. (5-24) pode ser simplificada para:

$$Ap_c = kx$$

A função de transferência entre x e p_c então se torna

$$\frac{X(s)}{P_c(s)} = \frac{A}{k} = K_c$$

onde $X(s) = \mathcal{L}[x]$ e $P_c(s) = \mathcal{L}[p_c]$.

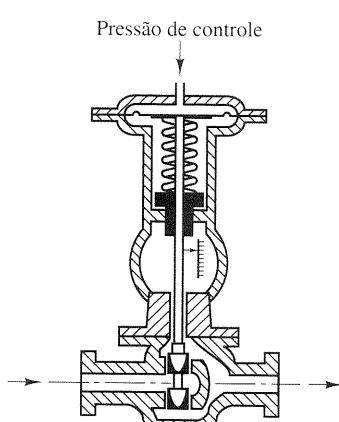


Fig. 5-32 Diagrama esquemático de uma válvula atuadora pneumática.

Se q_i , a variação na vazão através da válvula atuadora pneumática, for proporcional a x , a variação no deslocamento da haste da válvula, então,

$$\frac{Q_i(s)}{X(s)} = K_q$$

onde $Q_i(s) = \mathcal{L}[q_i]$ e K_q é uma constante. A função de transferência entre q_i e p_c se torna

$$\frac{Q_i(s)}{P_c(s)} = K_c K_q = K_v$$

onde K_v é uma constante.

A pressão de controle típica para este tipo de válvula atuadora pneumática é de 3 a 15 psig. O deslocamento da haste da válvula é limitado pelo curso possível do diafragma, correspondente a uns poucos centímetros. Nos casos em que se torna necessária uma excursão maior, pode ser empregada uma combinação êmbolo-mola.

Em válvulas atuadoras pneumáticas, a força de fricção estática deve ser limitada a um valor baixo, de modo a não resultar em histerese excessiva. Devido à compressibilidade do ar, a ação de controle não pode ser positiva, isto é, pode existir um erro na posição da válvula de haste. O uso de um posicionador de válvula acarreta melhorias no desempenho de uma válvula atuadora pneumática.

Princípio básico para obtenção das ações de controle derivativa e integral. Serão apresentados, agora, métodos de obtenção das ações de controle derivativa e integral. Novamente, aqui se dará ênfase ao princípio e não aos detalhes dos mecanismos reais.

O princípio básico para gerar uma ação de controle desejada é inserir o inverso da função de transferência desejada no caminho de retroação. Para o sistema mostrado na Fig. 5-33, a função de transferência a malha fechada é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Se $|G(s)H(s)| \gg 1$, então $C(s)/R(s)$ pode ser modificado para

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{H(s)}$$

Portanto, se for desejada uma ação de controle proporcional-derivativa, insere-se um elemento que possui a função de transferência $1/(Ts + 1)$ no caminho de retroação.

Seja o controlador pneumático mostrado na Fig. 5-34(a). Considerando-se pequenas variações nas variáveis, pode-se desenhar um diagrama de blocos deste controlador, conforme mostrado na Fig. 5-34(b). Do diagrama de blocos vê-se que o controlador é do tipo proporcional.

Será mostrado, a seguir, que a adição de uma restrição no caminho da retroação negativa transformará o controlador proporcional em controlador proporcional-derivativo, comumente chamado controlador PD.

Considere-se o controlador pneumático mostrado na Fig. 5-35(a). Supondo-se novamente pequenas variações no erro atuante, na distância bocal-palhetas e na pressão de controle, pode-se resumir a operação deste controlador como se segue: inicialmente se supõe uma pequena variação em degrau em e . Em decorrência disto, a variação na pressão de controle p_c será instantânea. A restrição R evitaria momentaneamente que o fole de retroação sinta a variação de pressão p_c . Portanto, o fole de realimentação não responderá momentaneamente, e a válvula atuante pneumática sentirá o efeito total do movimento da palhetas. Com o passar do tempo, o fole de retroação se expandirá ou se contrairá. A variação na distância bocal-palhetas x e a variação na pressão de controle p_c podem ser desenhadas em um gráfico em função do tempo t , como indicado na Fig. 5-35(b). Em regime estacionário, o fole de retroação atua como um mecanismo de retroação comum. A curva p_c versus t mostra claramente que este controlador é do tipo proporcional-derivativo.

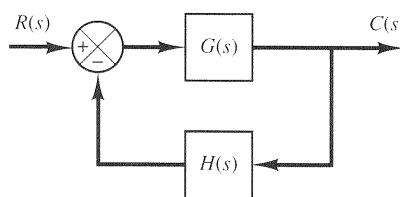


Fig. 5-33 Sistema de controle.

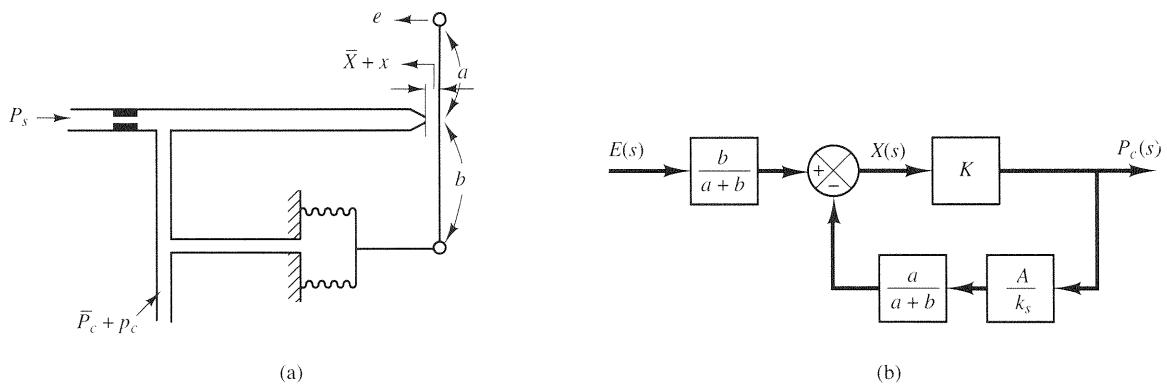


Fig. 5-34 (a) Controlador pneumático proporcional; (b) diagrama de blocos do controlador.

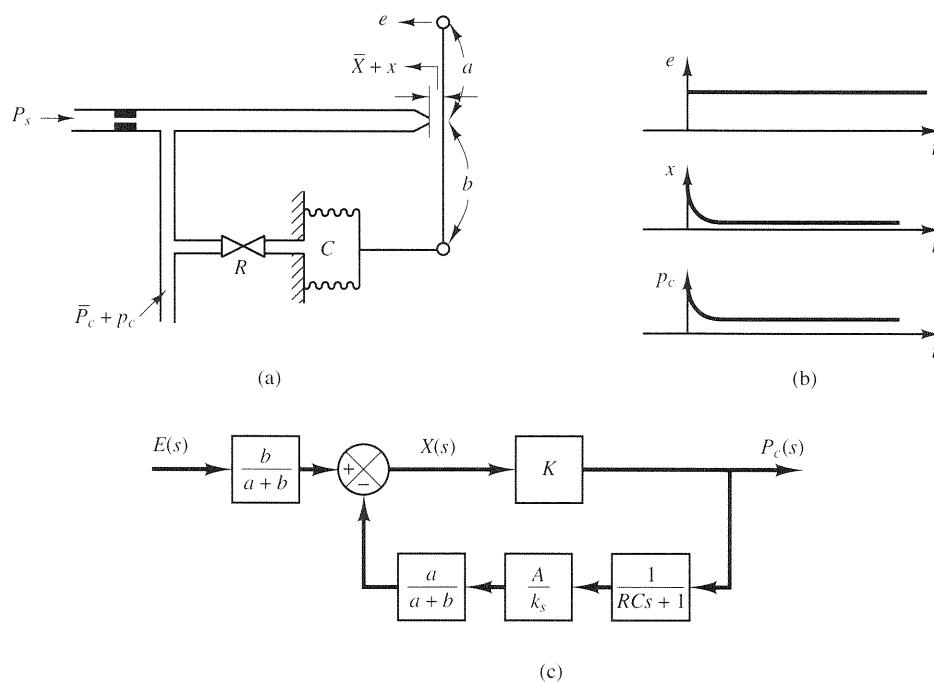


Fig. 5-35 (a) Controlador pneumático proporcional-derivativo; (b) mudança de \$e\$ em degrau e as mudanças correspondentes em \$x\$ e \$p_c\$ traçadas versus \$t\$; (c) diagrama de blocos do controlador.

Um diagrama de blocos correspondente a este controlador pneumático é mostrado na Fig. 5-35(c). No diagrama de blocos, \$K\$ é uma constante, \$A\$ é a área do fole e \$k_s\$ é a constante de mola equivalente do fole. A função de transferência entre \$p_c\$ e \$e\$ pode ser obtida do diagrama de blocos, resultando:

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\frac{b}{a+b} K}{1 + \frac{Ka}{a+b} \frac{A}{k_s} \frac{1}{RCs+1}}$$

Neste tipo de controlador o ganho de malha, expresso por \$|KaA/[(a+b)k_s(RCs+1)]|\$ normalmente é muito maior do que a unidade. Conseqüentemente, a função de transferência pode ser simplificada para

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = K_p(1 + T_d s)$$

onde

$$K_p = \frac{bk_s}{aA}, \quad T_d = RC$$

Portanto, a retroação negativa retardada, ou a função de transferência $1/(RCs + 1)$ no percurso de retroação, transforma o controlador proporcional em controlador proporcional-derivativo.

Note-se que se a válvula de retroação estiver completamente aberta, a ação de controle se torna proporcional. Se a válvula de retroação estiver completamente fechada, a ação de controle se torna proporcional com banda estreita (liga-desliga).

Obtenção da ação de controle proporcional-integral pneumática. Seja o controlador proporcional indicado na Fig. 5-34(a). Considerando-se pequenas variações nos valores das variáveis, pode-se mostrar que a adição de retroação positiva retardada transformará este controlador proporcional em controlador proporcional-integral, comumente chamado de controlador PI.

Seja o controlador pneumático mostrado na Fig. 5-36(a). A operação deste controlador é a seguinte: o fole designado por I é ligado à fonte de pressão de controle sem qualquer restrição. O fole designado por II é conectado à fonte de pressão de controle através de uma restrição. Vamos supor uma pequena variação em degrau no erro atuante. Isto acarretará uma variação instantânea na pressão do bocal. Portanto, uma variação também ocorrerá instantaneamente na pressão de controle p_c . Devido à restrição da válvula no percurso para o fole II, haverá uma queda de pressão na válvula. À medida que o tempo passa, o ar fluirá através da válvula, de tal modo que a variação na pressão do fole II atingirá o valor p_c . Consequentemente, o fole II se expandirá ou se contrairá com o passar do tempo, de tal modo a mover a palhetas de uma quantidade adicional no sentido do deslocamento original e . Isto acarretará uma variação contínua na pressão inversa p_c do bocal, conforme indicado na Fig. 5-36(b).

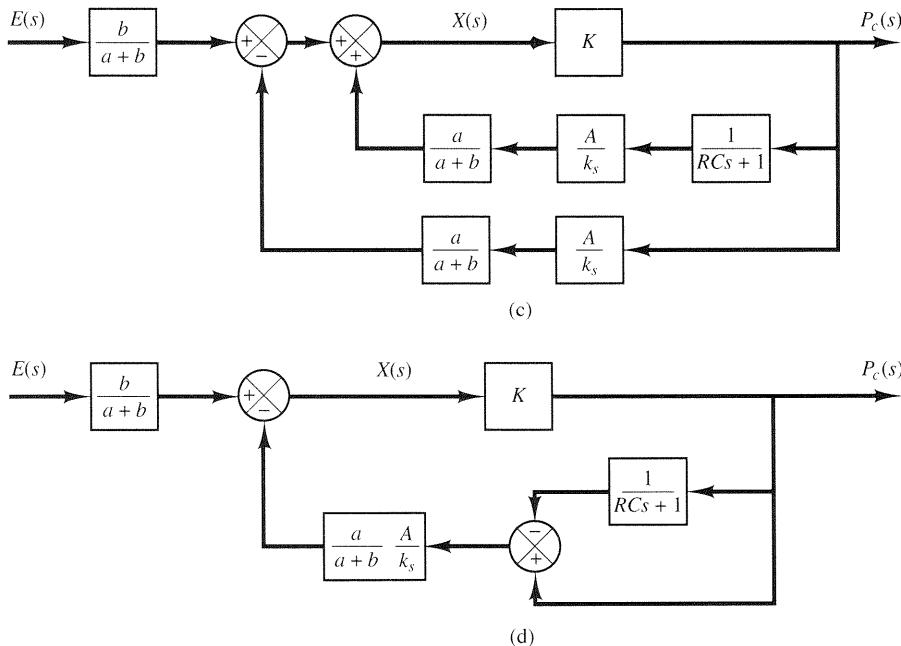
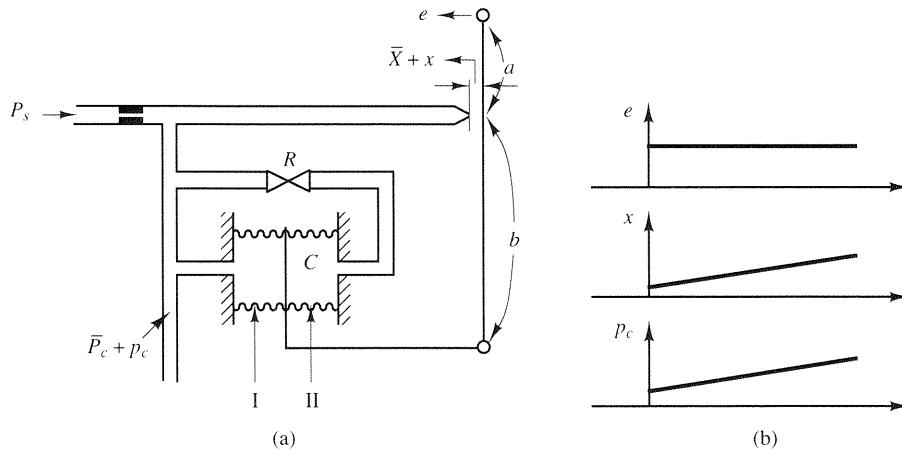


Fig. 5-36 (a) Controlador pneumático proporcional-integral; (b) mudança de e em degrau e as mudanças correspondentes em x e p_c , traçadas versus t ; (c) diagrama de blocos do controlador; (d) diagrama de blocos simplificado.

Note-se que a ação de controle integral no controlador assume a forma de um lento cancelamento na retroação fornecida originalmente pelo controle proporcional.

Um diagrama de blocos deste controlador sob a hipótese de pequenas variações nas variáveis é mostrado na Fig. 5-36(c). Uma simplificação deste diagrama de blocos resulta na Fig. 5-36(d). A função de transferência deste controlador é

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\frac{b}{a+b} K}{1 + \frac{Ka}{a+b} \frac{A}{k_s} \left(1 - \frac{1}{RCS + 1}\right)}$$

onde K é uma constante, A é a área dos foles e k_s a constante de mola equivalente dos foles combinados. Se $|KaARC/(a+b)k_s(RCs+1)| \gg 1$, que é normalmente o caso, a função de transferência pode ser simplificada para

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

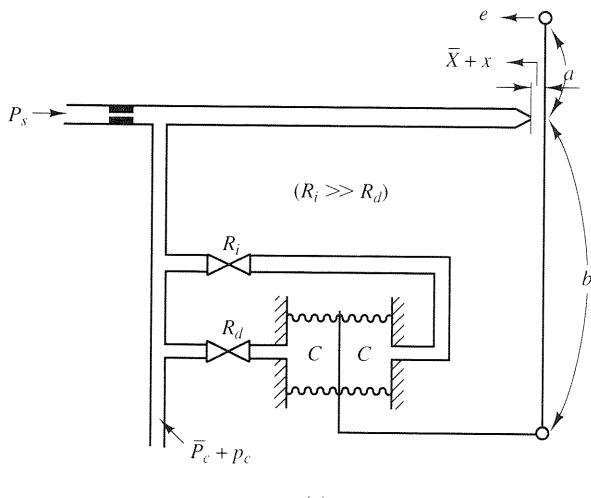
onde

$$K_p = \frac{bk_s}{aA}, \quad T_i = RC$$

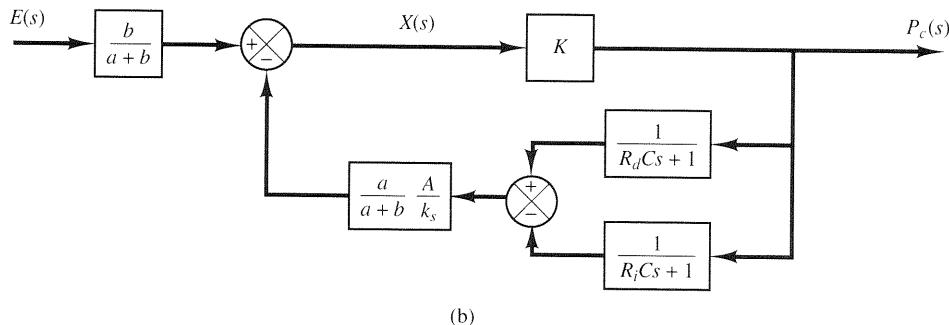
Obtenção da ação de controle proporcional-integral-derivativa pneumática. Uma combinação dos controladores pneumáticos mostrados nas Figs. 5-35(a) e 5-36(a) conduz a um controlador proporcional-integral-derivativo, comumente chamado controlador PID. A Fig. 5-37(a) mostra um diagrama esquemático de um tal controlador. A Fig. 5-37(b) mostra um diagrama de blocos deste controlador sob a hipótese de pequenas variações nas variáveis.

A função de transferência deste controlador é

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\frac{bK}{a+b}}{1 + \frac{Ka}{a+b} \frac{A}{k_s} \frac{(R_i C - R_d C)s}{(R_d Cs + 1)(R_i Cs + 1)}}$$



(a)



(b)

Fig. 5-37 (a) Controlador pneumático proporcional-integral-derivativo; (b) diagrama de blocos do controlador.

Definindo-se

$$T_i = R_i C, \quad T_d = R_d C$$

e observando que sob a operação normal $|KaA(T_i - T_d)s/(a + b)k_s(T_d s + 1)(T_i s + 1)| \gg 1$, e $T_i \gg T_d$, 1 obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{P_c(s)}{E(s)} &\doteq \frac{bk_s}{aA} \frac{(T_d s + 1)(T_i s + 1)}{(T_i - T_d)s} \\ &\doteq \frac{bk_s}{aA} \frac{T_d T_i s^2 + T_i s + 1}{T_i s} \\ &= K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \end{aligned} \quad (5-25)$$

onde

$$K_p = \frac{bk_s}{aA}$$

A Eq. (5-25) indica que o controlador mostrado na Fig. 5-37(a) é um controlador proporcional-integral-derivativo.

5-7 CONTROLADORES HIDRÁULICOS

Exetuando-se os controladores pneumáticos de baixa pressão, o ar comprimido raramente é usado no controle contínuo do movimento de dispositivos envolvendo grandes massas sob forças de cargas externas. Em tal caso, os controladores hidráulicos são geralmente preferidos.

Sistemas hidráulicos. O amplo uso de circuitos hidráulicos nas aplicações de máquinas ferramentas, nos sistemas de controle de aviões e de operações similares ocorre devido a fatores tais como positividade, precisão, flexibilidade, alta relação potência-peso, partida rápida, parada e reversão com suavidade e precisão, e simplicidade de operações.

A pressão de operação em sistemas hidráulicos está situada entre 145 e 5.000 lb./pol² (entre 1 e 35 MPa). Em algumas aplicações especiais, a pressão de operação pode ir até 10.000 lb./pol² (70 MPa). Para um mesmo valor de potência requerida, o peso e o tamanho da unidade hidráulica podem ser reduzidos aumentando-se a pressão de alimentação. Com sistemas hidráulicos de alta pressão, podem ser obtidos valores muito grandes de força. O posicionamento preciso e a atuação rápida de cargas pesadas é possível com sistemas hidráulicos. Uma combinação de sistemas eletrônicos e hidráulicos é amplamente usada porque ela combina as vantagens tanto do controle eletrônico quanto da potência hidráulica.

Vantagens e desvantagens dos sistemas hidráulicos. Há um certo número de vantagens e de desvantagens na utilização de sistemas hidráulicos no lugar de outros sistemas. Algumas vantagens são:

1. O fluido hidráulico atua como lubrificante, além de transportar o calor gerado no sistema para um trocador de calor conveniente.
2. Atuadores hidráulicos de tamanho comparativamente pequeno podem desenvolver grandes forças ou torques.
3. Atuadores hidráulicos possuem uma velocidade de resposta mais alta com partidas e paradas rápidas e inversões de velocidade.
4. Atuadores hidráulicos podem ser operados sob condições contínuas, intermitentes, de reversão e de parada repentina, sem avarias.
5. A disponibilidade tanto de atuadores lineares quanto rotativos dá flexibilidade ao projeto.
6. Em virtude das baixas fugas nos atuadores hidráulicos, a queda de velocidade é pequena quando as cargas são aplicadas.

Por outro lado, várias desvantagens tendem a limitar seu uso.

1. Energia sob forma hidráulica não está prontamente disponível se comparada à energia elétrica.
2. O custo de um sistema hidráulico pode ser mais alto do que o de um sistema elétrico comparável que desempenhe uma função similar.
3. Há perigo de incêndio e de explosões, a menos que sejam usados fluidos à prova de fogo.
4. Em função da dificuldade de manter um sistema hidráulico livre de vazamentos, o sistema tende a ser sujo.

5. Óleo contaminado pode causar falhas no funcionamento adequado de um sistema hidráulico.
6. Em consequência das não-linearidades e de outras características complexas envolvidas, o projeto de sistemas hidráulicos sofisticados é bastante elaborado.
7. Circuitos hidráulicos têm geralmente características de amortecimento deficientes. Se um circuito hidráulico não for projetado adequadamente, alguns fenômenos instáveis podem ocorrer ou desaparecer, dependendo da condição de operação.

Comentários. Uma atenção particular é necessária para garantir que o sistema hidráulico seja estável e satisfatório sob todas as condições de operação. Uma vez que a viscosidade do fluido hidráulico pode afetar grandemente os efeitos do amortecimento e do atrito dos circuitos hidráulicos, testes de estabilidade devem ser realizados na temperatura de operação mais alta possível.

Note-se que os sistemas hidráulicos em sua maioria são não-lineares. Às vezes, no entanto, é possível linearizar sistemas não-lineares de modo a reduzir sua complexidade e permitir soluções que sejam suficientemente precisas para a maioria dos propósitos. Uma técnica de linearização útil para se tratar dos sistemas não-lineares foi apresentada na Seção 3-10.

Controladores integrais hidráulicos. O servomotor hidráulico mostrado na Fig. 5-38 é essencialmente um amplificador hidráulico de potência controlado por válvula-piloto e um atuador. A válvula-piloto é uma válvula balanceada no sentido de que as forças de pressão que atuam sobre ela são todas平衡adas. Uma potência de saída muito grande pode ser controlada por uma válvula-piloto, que pode ser posicionada com muito pouca potência.

Será mostrado a seguir que para uma carga com massa desprezivelmente pequena o servomotor mostrado na Fig. 5-38 atua como um integrador ou como um controlador integral. Um tal servomotor constitui a base do circuito de controle hidráulico.

No servomotor hidráulico mostrado na Fig. 5-38, a válvula-piloto (uma válvula de quatro vias) tem duas saliências sobre o carretel. Se a largura da saliência for menor que o acesso na camisa da válvula, diz-se que a válvula está *subposta*. Válvulas *sobrepostas* têm uma largura de saliência maior do que a largura do acesso. Uma válvula de sobreposição nula tem uma largura da saliência que é idêntica à largura do acesso. (Se a válvula-piloto não for uma válvula de sobreposição nula, a análise dos servomotores hidráulicos torna-se muito complicada.)

Na presente análise, admite-se que o fluido hidráulico é incompressível e que a força de inércia do êmbolo de potência e carga é desprezível comparada à força hidráulica no êmbolo de potência. Admite-se também que a válvula-piloto é uma válvula de sobreposição nula e que a vazão de óleo é proporcional ao deslocamento da válvula-piloto.

A operação deste servomotor hidráulico é a seguinte: se a entrada x mover a válvula-piloto para a direita, o acesso II é descoberto e, portanto, óleo sob alta pressão entra no lado direito do êmbolo de potência. Uma vez que o acesso I está conectado ao acesso do dreno, o óleo no lado esquerdo do êmbolo de potência retorna ao dreno. O óleo que flui para dentro do cilindro de potência está em alta pressão; o óleo que flui para fora do cilindro de potência para dentro do dreno está em baixa pressão. A diferença resultante na pressão em ambos os lados do êmbolo de potência fará com que ele se mova para a esquerda.

Note-se que a vazão de óleo $q(\text{kg/s})$ vezes $dt(\text{s})$ é igual ao deslocamento $dy(\text{m})$ do êmbolo de potência vezes a área $A(\text{m}^2)$ do êmbolo vezes a densidade do óleo $\rho(\text{kg/m}^3)$. Portanto,

$$A\rho dy = q dt \quad (5-26)$$

Em virtude da hipótese de que a vazão q do fluxo de óleo é proporcional ao deslocamento x da válvula-piloto, tem-se

$$q = K_1 x \quad (5-27)$$

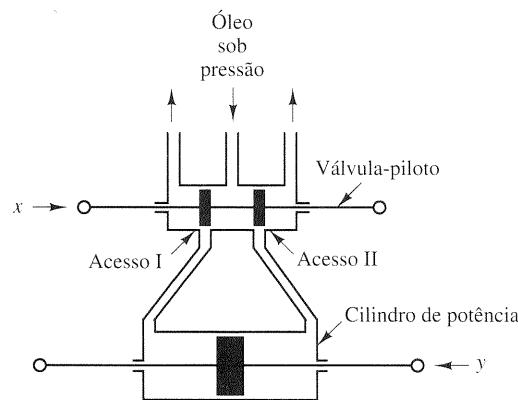


Fig. 5-38 Servomotor hidráulico.

onde K_1 é uma constante positiva. Das Eqs. (5-26) e (5-27), obtém-se

$$A\rho \frac{dy}{dt} = K_1 x$$

Aplicando-se a transformada de Laplace a esta última equação, admitindo-se condição inicial nula, vem

$$A\rho s Y(s) = K_1 X(s)$$

ou

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_1}{A\rho s} = \frac{K}{s}$$

onde $K = K_1/(A\rho)$. Assim o servomotor hidráulico mostrado na Fig. 5-38 atua como um controlador integral.

Controladores proporcionais hidráulicos. Foi mostrado que o servomotor na Fig. 5-38 atua como um controlador integral. Este servomotor pode ser transformado em controlador proporcional por meio de um elo de retroação. Seja o controlador hidráulico mostrado na Fig. 5-39(a). O lado esquerdo da válvula-piloto está ligado ao lado esquerdo do êmbolo de potência através do elo ABC. Este elo é um elo flutuante, em vez de um elo móvel em torno de um pivô fixo.

Aqui o controlador opera da seguinte maneira: se a entrada x mover a válvula-piloto para a direita, o acesso II será descoberto e o óleo sob alta pressão fluirá do acesso II para o lado direito do êmbolo de potência, forçando este êmbolo para a esquerda. O êmbolo de potência, ao se mover para a esquerda, transportará o elo ABC de retroação com ele, movendo desse modo a válvula-piloto para a esquerda. Esta ação continua até que o êmbolo-piloto novamente cubra os acessos I e II. Um diagrama de blocos do sistema pode ser desenhado como na Fig. 5-39(b). A função de transferência entre $Y(s)$ e $E(s)$ é dada por

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{E(s)} &= \frac{\frac{b}{a+b} \frac{K}{s}}{1 + \frac{K}{s} \frac{a}{a+b}} \\ &= \frac{bK}{s(a+b) + Ka} \end{aligned}$$

Observando-se que sob as condições normais de operação tem-se $|Ka/[s(a+b)]| \gg 1$, esta última equação pode ser simplificada para

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{b}{a} = K_p$$

A função de transferência entre y e e torna-se uma constante. Assim, o controlador hidráulico mostrado na Fig. 5-39(a) atua como um controlador proporcional, cujo ganho é K_p . Este ganho pode ser ajustado variando-se efetivamente a relação de braços de alavancas b/a . (O mecanismo de ajuste não está indicado no diagrama.)

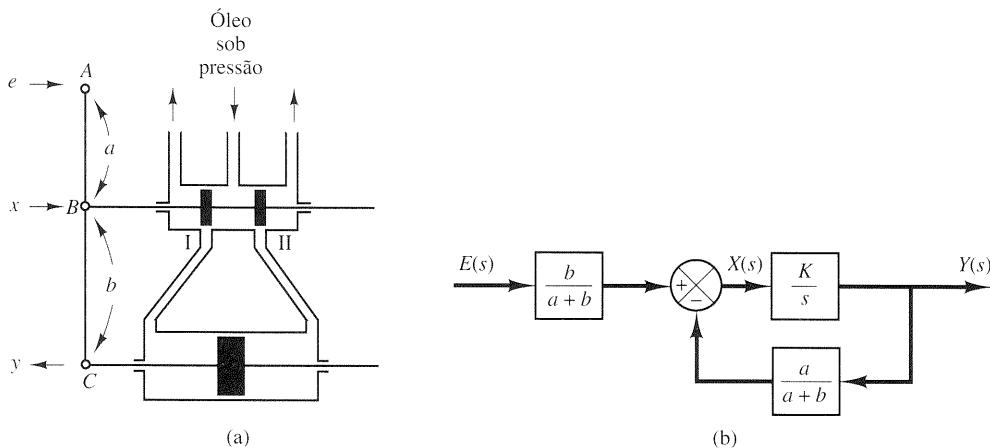


Fig. 5-39 (a) Servomotor que atua como um controlador proporcional; (b) diagrama de blocos do servomotor.

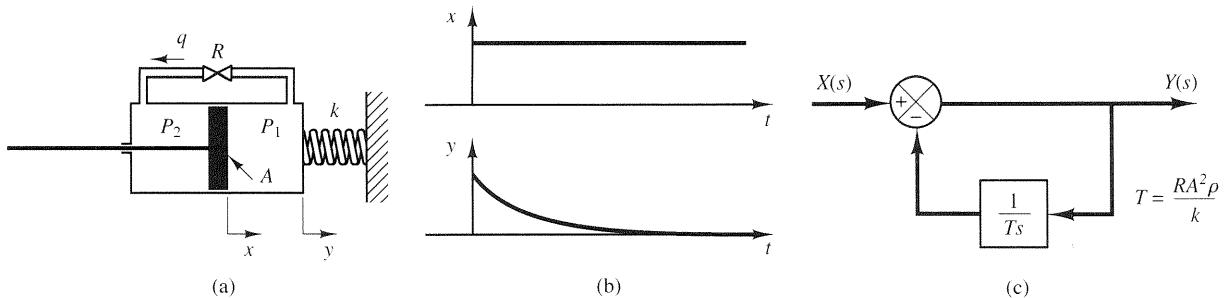


Fig. 5-40 (a) Amortecedor viscoso; (b) mudança de x em degrau e as mudanças correspondentes em y traçadas versus t ; (c) diagrama de blocos do amortecedor visoso.

Vê-se, portanto, que o acréscimo de uma alavanca de retroação fará com que o servomotor hidráulico atue como um controlador proporcional.

Amortecedores viscosos. O amortecedor viscoso indicado na Fig. 5-40(a) atua como um elemento diferenciador. Suponha-se a aplicação de um deslocamento em degrau na posição x do êmbolo. Então, momentaneamente, o deslocamento y se torna igual a x . Devido à força da mola, entretanto, o óleo fluirá através da resistência R e o cilindro retornará à posição original. As curvas de x versus t e de y versus t são mostradas na Fig. 5-40(b).

Agora, será deduzida a função de transferência entre o deslocamento y e o deslocamento x . Definam-se as pressões existentes nos lados direito e esquerdo do êmbolo como sendo P_1 (N/m^2) e P_2 (N/m^2), respectivamente. Suponha-se que a força de inércia envolvida seja desprezível. Então, a força que atua sobre o êmbolo deve equilibrar a força da mola. Portanto,

$$A(P_1 - P_2) = ky$$

onde A = área do êmbolo, m^2

k = constante da mola, N/m^2

A vazão q é dada por

$$q = \frac{P_1 - P_2}{R}$$

onde q = vazão através da restrição kg/s

R = resistência ao fluxo na restrição, $N\cdot s/m^2\cdot kg$

Como o fluxo através da restrição durante dt segundos deve ser igual à variação da massa de óleo na parte à esquerda do êmbolo durante os mesmos dt segundos, obtém-se

$$q dt = A\rho(dx - dy)$$

onde ρ = densidade, kg/m^3 . (Supõe-se que o fluido seja incompressível ou ρ = constante.) Esta última equação pode ser reescrita como

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = \frac{q}{A\rho} = \frac{P_1 - P_2}{RA\rho} = \frac{ky}{RA^2\rho}$$

ou

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} + \frac{ky}{RA^2\rho}$$

Aplicando-se a transformada de Laplace a ambos os membros desta última equação, supondo condições iniciais nulas, obtém-se

$$sX(s) = sY(s) + \frac{k}{RA^2\rho} Y(s)$$

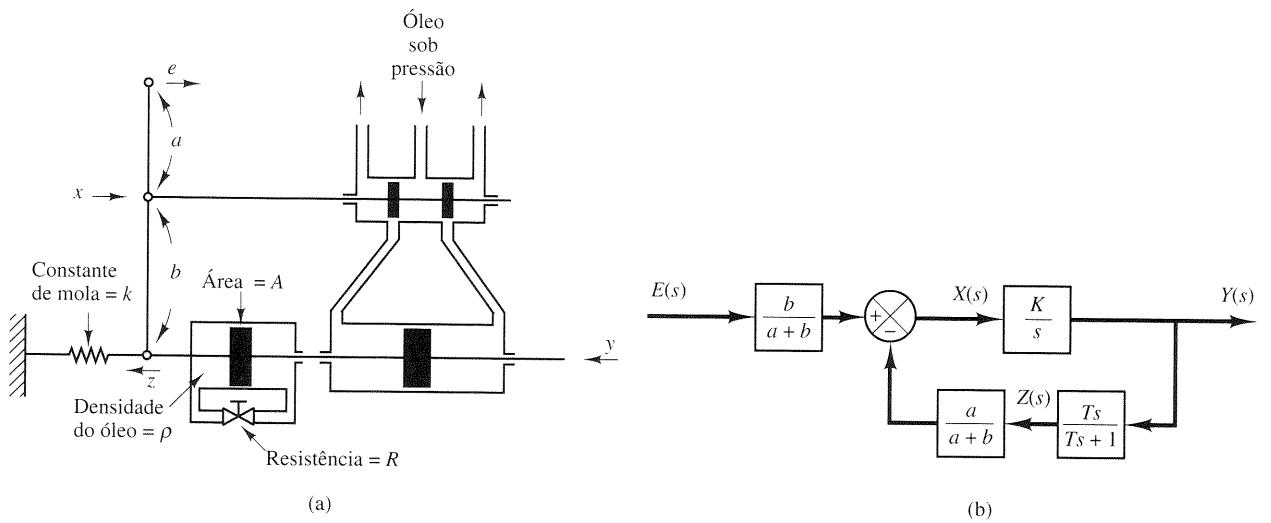


Fig. 5-41 (a) Diagrama esquemático de um controlador hidráulico proporcional-integral; (b) diagrama de blocos do controlador.

A função de transferência deste sistema resulta

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s}{s + \frac{k}{RA^2\rho}}$$

Seja, por definição, $RA^2\rho/k = T$. Em consequência,

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Ts}{Ts + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{Ts}}$$

A Fig. 5-40(c) mostra uma representação em diagrama de blocos para este sistema.

Obtenção da ação de controle proporcional-integral hidráulica. A Fig. 5-41(a) mostra um diagrama esquemático de um controlador proporcional-integral hidráulico. Um diagrama de blocos deste controlador é indicado na Fig. 5-41(b). A função de transferência $Y(s)/E(s)$ é dada por

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\frac{b}{a+b} \frac{K}{s}}{1 + \frac{Ka}{a+b} \frac{T}{Ts+1}}$$

Sob operação normal, $|KaT|/[(a+b)(Ts+1)] \gg 1$, neste controlador resultando

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

onde

$$K_p = \frac{b}{a}, \quad T_i = T = \frac{RA^2\rho}{k}$$

Portanto, o controlador indicado na Fig. 5-42(a) é um controlador proporcional-integral (controlador PI).

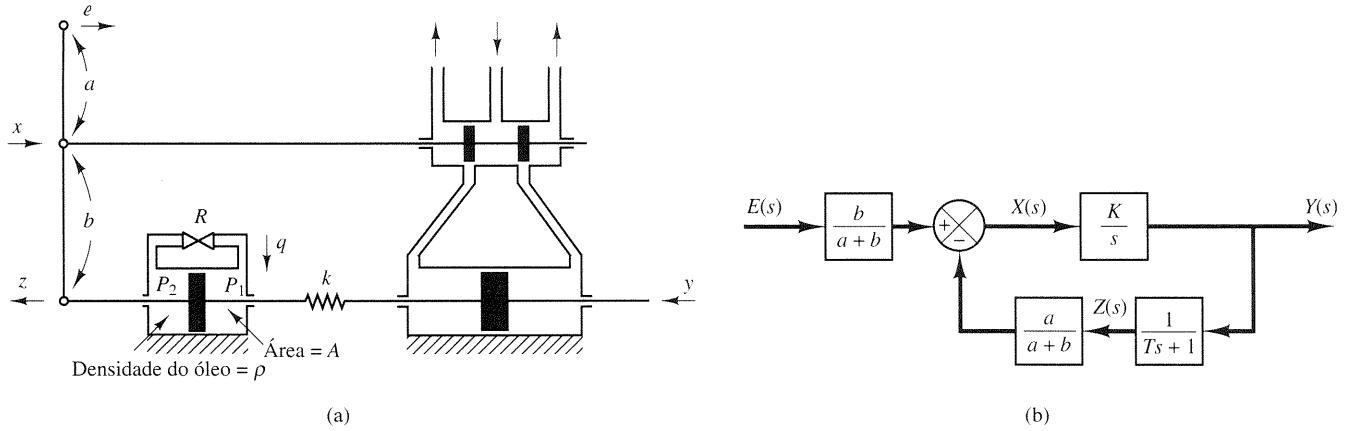


Fig. 5-42 (a) Diagrama esquemático de um controlador hidráulico proporcional-derivativo; (b) diagrama de blocos do controlador.

Obtenção de ação de controle proporcional-derivativa hidráulica. A Fig. 5-42(a) mostra um diagrama esquemático de um controlador proporcional-derivativo hidráulico. Os cilindros permanecem fixos no espaço e os êmbolos podem mover-se. Para este sistema, observe-se que

$$k(y - z) = A(P_2 - P_1)$$

$$q = \frac{P_2 - P_1}{R}$$

$$q dt = \rho A dz$$

Por conseguinte,

$$y = z + \frac{A}{k} q R = z + \frac{RA^2\rho}{k} \frac{dz}{dt}$$

ou

$$\frac{Z(s)}{Y(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

onde

$$T = \frac{RA^2\rho}{k}$$

Um diagrama de blocos deste sistema é mostrado na Fig. 5-42(b). Do diagrama de blocos pode ser obtida a função de transferência $Y(s)/E(s)$, como sendo

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\frac{b}{a+b} \frac{K}{s}}{1 + \frac{a}{a+b} \frac{K}{s} \frac{1}{Ts+1}}$$

Sob condição normal de operação $|aK|/[(a+b)s(Ts+1)] \gg 1$. Assim,

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = K_p(1 + Ts)$$

onde

$$K_p = \frac{b}{a}, \quad T = \frac{RA^2\rho}{k}$$

Portanto, o controlador mostrado na Fig. 5-42(a) é um controlador proporcional-derivativo (controlador PD).

5-8 CONTROLADORES ELETRÔNICOS

Esta seção discute os controladores eletrônicos que usam amplificadores operacionais. De início, deduzem-se as funções de transferência relativas a circuitos simples, com amplificadores operacionais. Em seguida, são obtidas as funções de transferência de alguns controladores com amplificadores operacionais. Finalmente, é fornecido um conjunto de controladores com a respectiva função de transferência, sob forma de tabela.

Amplificadores operacionais. Amplificadores operacionais, às vezes denominados *amp op*, são freqüentemente usados para amplificar sinais em circuitos sensores. Os amp op são também freqüentemente usados em filtros com propósitos de compensação. A Fig. 5-43 mostra um amp op. É prática comum escolher o ponto de terra como sendo 0 volt e medir as tensões de entrada e_1 e e_2 em relação a este ponto. O sinal de entrada e_1 aplicado ao terminal com o sinal negativo tem sua polaridade invertida, e o sinal de entrada aplicado ao terminal com o sinal positivo não é submetido à inversão de polaridade. A entrada total para o amplificador torna-se, portanto, $e_2 - e_1$. Por conseguinte, para o circuito mostrado na Fig. 5-54 tem-se

$$e_o = K(e_2 - e_1) = -K(e_1 - e_2)$$

onde e_1 e e_2 podem ser sinais cc ou ca e K é o ganho diferencial ou ganho de tensão. A magnitude de K é de aproximadamente $10^5 \sim 10^6$ para sinais cc e sinais ca com freqüências menores do que aproximadamente 10 Hz. (O ganho diferencial K diminui com a freqüência do sinal e torna-se próximo da unidade para freqüências de 1 MHz \sim 50 MHz). Note-se que o amp op amplifica a diferença entre as tensões e_1 e e_2 . Um tal amplificador é comumente chamado amplificador diferencial. Como o ganho do amp op é muito alto, é necessário ter uma retroação negativa da saída para a entrada a fim de tornar o amplificador estável. (A retroação é feita da saída para a entrada inversora, de modo que se tenha uma retroação negativa.)

No amp op ideal, não flui corrente através dos terminais de entrada, e a tensão de saída não é afetada pela carga conectada ao terminal de saída. Em outras palavras, a impedância de entrada é infinita e a impedância de saída é nula. Em um amp op real, uma corrente muito pequena (quase desprezível) flui para um terminal de entrada e a saída não pode ser carregada demasiadamente. Na análise que se faz aqui, admite-se, por hipótese, que os amps op são ideais.

Amplificador inversor. Considere-se o circuito amplificador operacional mostrado na Fig. 5-44. Seja obter a tensão de saída e_o .

A equação deste circuito pode ser obtida como se segue: sejam, por definição,

$$i_1 = \frac{e_i - e'}{R_1}, \quad i_2 = \frac{e' - e_o}{R_2}$$

Uma vez que apenas uma corrente desprezível flui para o amplificador, a corrente i_1 deve ser aproximadamente igual à corrente i_2 . Assim,

$$\frac{e_i - e'}{R_1} = \frac{e' - e_o}{R_2}$$

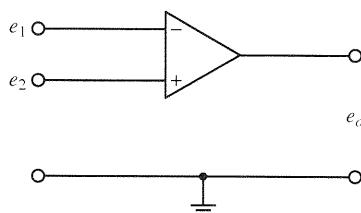


Fig. 5-43 Amplificador operacional.

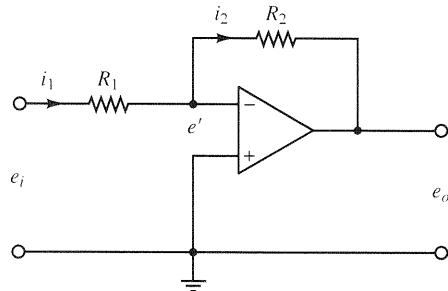


Fig. 5-44 Amplificador inversor.

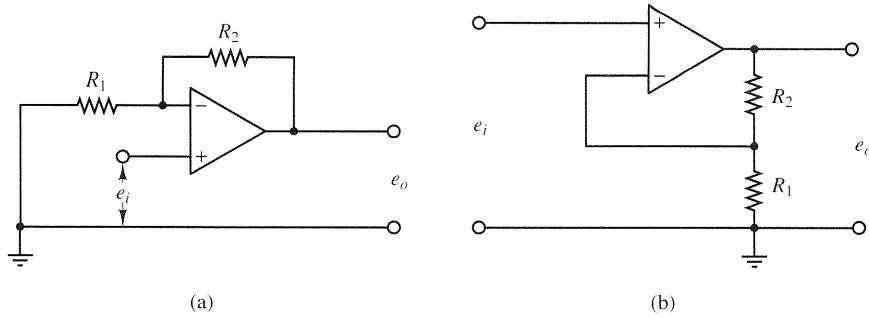


Fig. 5-45 (a) Amplificador operacional não-inversor; (b) circuito equivalente.

Como $K(0 - e') = e_o$ e $K \gg 1$, o valor de e' deve ser quase zero, ou $e' \approx 0$. Daí, se tem

$$\frac{e_i}{R_1} = \frac{-e_o}{R_2}$$

ou

$$e_o = -\frac{R_2}{R_1} e_i$$

Assim, o circuito mostrado é um amplificador com inversão de sinal. Se $R_1 = R_2$, então o circuito amp op mostrado age como um inversor de sinal.

Amplificador não-inversor. A Fig. 5-45(a) mostra um amplificador não-inversor. Um circuito equivalente a este é mostrado na Fig. 5-45(b). Para o circuito da Figura 4-45(b), tem-se

$$e_o = K \left(e_i - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e_o \right)$$

onde K é o ganho diferencial do amplificador. Desta última equação, obtém-se

$$e_i = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{K} \right) e_o$$

Como $K \gg 1$, se $R_1/(R_1 + R_2) \gg 1/K$ então,

$$e_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) e_i$$

Esta equação dá a tensão de saída e_o . Como e_o e e_i têm os mesmos sinais, o circuito amp op mostrado na Fig. 5-45(a) é não-inversor.

EXEMPLO 5-3

A Fig. 5-46 mostra um circuito elétrico envolvendo um amplificador operacional. Obter o sinal de saída e_o . Seja, por definição,

$$i_1 = \frac{e_i - e'}{R_1}, \quad i_2 = C \frac{d(e' - e_o)}{dt}, \quad i_3 = \frac{e' - e_o}{R_2}$$

Observando-se que a corrente que flui para o amplificador é desprezível, tem-se

$$i_1 = i_2 + i_3$$

Daí

$$\frac{e_i - e'}{R_1} = C \frac{d(e' - e_o)}{dt} + \frac{e' - e_o}{R_2}$$

Como, $e' \equiv 0$, tem-se

$$\frac{e_i}{R_1} = -C \frac{de_o}{dt} - \frac{e_o}{R_2}$$

Aplicando-se a transformada de Laplace a esta última equação, admitindo-se condição inicial nula, tem-se

$$\frac{E_i(s)}{R_1} = -\frac{R_2Cs + 1}{R_2} E_o(s)$$

que pode ser escrita

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{R_2Cs + 1}$$

O circuito amp op mostrado na Fig. 5-46 é um circuito com dinâmica de primeira ordem. (Vários outros circuitos envolvendo amplificadores operacionais são mostrados na Tabela 5-1, juntamente com as respectivas funções de transferência.)

Método das impedâncias para obtenção das funções de transferência. Considere-se o circuito amp op indicado na Fig. 5-47. Semelhante ao caso dos circuitos elétricos, discutido anteriormente, a técnica das impedâncias pode ser aplicada aos circuitos com amplificadores operacionais para se obterem funções de transferência. Para o circuito mostrado na Fig. 5-47, tem-se

$$E_i(s) = Z_1(s)I(s), \quad E_o(s) = -Z_2(s)I(s)$$

Daí, a função de transferência para o circuito é obtida como sendo

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$

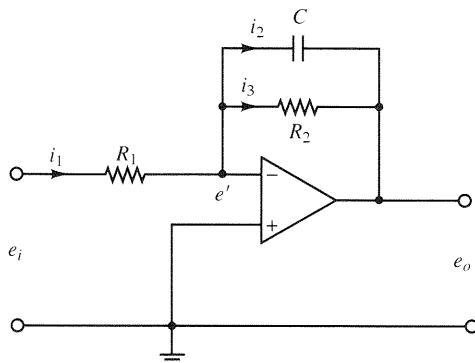


Fig. 5-46 Circuito com dinâmica de primeira ordem usando amplificador operacional.

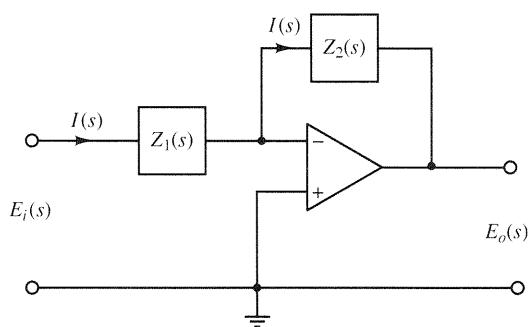


Fig. 5-47 Circuito com amplificador operacional.

EXEMPLO 5-4

Com referência ao circuito amp op indicado na Fig. 5-46, obter a função de transferência $E_o(s)/E_i(s)$ pelo uso da técnica das impedâncias.

As impedâncias complexas $Z_1(s)$ e $Z_2(s)$ para este circuito são

$$Z_1(s) = R_1 \quad \text{e} \quad Z_2(s) = \frac{1}{Cs + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_2}{R_2 Cs + 1}$$

Por conseguinte, $E_i(s)$ e $E_o(s)$ são obtidas como

$$E_i(s) = R_1 I(s), \quad E_o(s) = -\frac{R_2}{R_2 Cs + 1} I(s)$$

A função de transferência $E_o(s)/E_i(s)$ é, portanto, obtida como

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{R_2 Cs + 1}$$

que é, naturalmente, a mesma obtida no Exemplo 5-3.

Estruturas de avanço e atraso de fase com amplificadores operacionais. A Fig. 5-48(a) mostra um circuito eletrônico utilizando um amplificador operacional. A função de transferência deste circuito pode ser obtida como a seguir: sejam, por definição, as impedâncias de entrada $Z_1(s)$ e de retroação $Z_2(s)$, respectivamente. Então,

$$Z_1 = \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1}, \quad Z_2 = \frac{R_2}{R_2 C_2 s + 1}$$

Como a corrente de entrada do amplificador é desprezível, a corrente i_1 é igual à corrente i_2 . Assim, $i_1 = i_2$, ou seja,

$$\frac{E_i(s) - E'(s)}{Z_1} = \frac{E'(s) - E(s)}{Z_2}$$

Como $E'(s) \cong 0$, tem-se

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{R_1 C_1 s + 1}{R_2 C_2 s + 1} = -\frac{C_1}{C_2} \frac{s + \frac{1}{R_1 C_1}}{s + \frac{1}{R_2 C_2}} \quad (5-28)$$

Observe-se que a função de transferência na Eq. (5-28) contém um sinal menos. Assim, este circuito é inversor de sinal. Caso esta inversão de sinal não seja conveniente para a aplicação real, pode-se conectar um circuito inversor de sinal

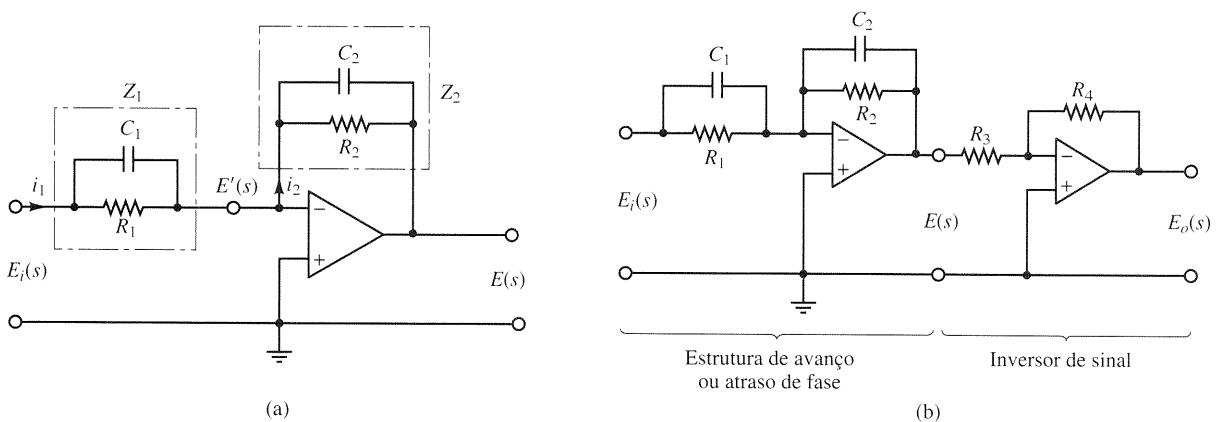


Fig. 5-48 (a) Circuito com amplificador operacional; (b) circuito com amplificador operacional usado como compensador de avanço ou atraso de fase.

ao terminal de entrada ou ao terminal de saída do circuito da Fig. 5-48(a). Um exemplo é mostrado na Fig. 5-48(b). A função de transferência do inversor de sinal é

$$\frac{E_o(s)}{E(s)} = -\frac{R_4}{R_3}$$

O inversor de sinal possui um ganho igual a $-R_4/R_3$. Assim, a estrutura mostrada na Fig. 5-48(b) tem a seguinte função de transferência:

$$\begin{aligned} \frac{E_o(s)}{E_i(s)} &= \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} \frac{R_1 C_1 s + 1}{R_2 C_2 s + 1} = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2} \frac{s + \frac{1}{R_1 C_1}}{s + \frac{1}{R_2 C_2}} \\ &= K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \end{aligned} \quad (5-29)$$

onde

$$T = R_1 C_1, \quad \alpha T = R_2 C_2, \quad K_c = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2}$$

Note-se que

$$K_c \alpha = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2} \frac{R_2 C_2}{R_1 C_1} = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3}, \quad \alpha = \frac{R_2 C_2}{R_1 C_1}$$

Esta estrutura possui um ganho estático de $K_c \alpha = R_2 R_4 / R_1 R_3$.

Com base na Eq. (5-29), esta estrutura se comporta como avanço de fase se $R_1 C_1 > R_2 C_2$, ou $\alpha < 1$; como atraso de fase se $R_1 C_1 < R_2 C_2$. (Para as definições de circuitos de avanço e de atraso de fase, reportar-se à Seção 5-9.)

Controlador PID usando amplificadores operacionais. A Fig. 5-49 mostra um controlador eletrônico proporcional-integral-derivativo (controlador PID) usando amplificadores operacionais. A função de transferência $E(s)/E_i(s)$ é dada por

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

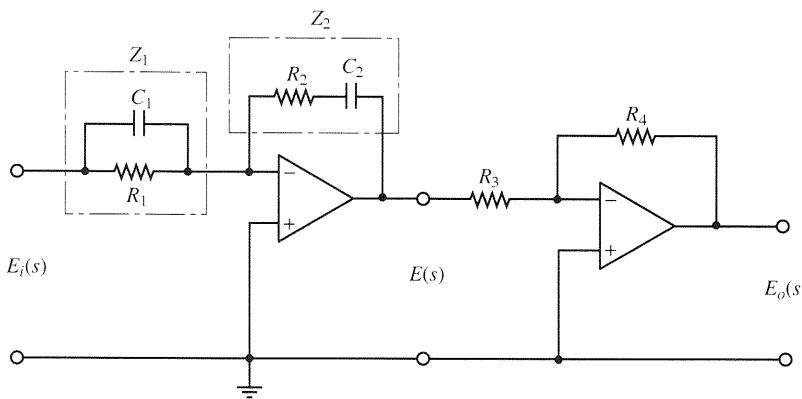


Fig. 5-49 Controlador PID eletrônico.

onde

$$Z_1 = \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1}, \quad Z_2 = \frac{R_2 C_2 s + 1}{C_2 s}$$

Assim,

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\left(\frac{R_2 C_2 s + 1}{C_2 s}\right)\left(\frac{R_1 C_1 s + 1}{R_1}\right)$$

Levando-se em conta que

$$\frac{E_o(s)}{E(s)} = -\frac{R_4}{R_3}$$

tem-se

$$\begin{aligned} \frac{E_o(s)}{E_i(s)} &= \frac{E_o(s)}{E(s)} \frac{E(s)}{E_i(s)} = \frac{R_4 R_2}{R_3 R_1} \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{R_2 C_2 s} \\ &= \frac{R_4 R_2}{R_3 R_1} \left(\frac{R_1 C_1 + R_2 C_2}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2 s} + R_1 C_1 s \right) \\ &= \frac{R_4 (R_1 C_1 + R_2 C_2)}{R_3 R_1 C_2} \left[1 + \frac{1}{(R_1 C_1 + R_2 C_2)s} + \frac{R_1 C_1 R_2 C_2}{R_1 C_1 + R_2 C_2} s \right] \end{aligned} \quad (5-30)$$

Assim,

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{R_4 (R_1 C_1 + R_2 C_2)}{R_3 R_1 C_2} \\ T_i &= R_1 C_1 + R_2 C_2 \\ T_d &= \frac{R_1 C_1 R_2 C_2}{R_1 C_1 + R_2 C_2} \end{aligned}$$

Em termos de ganho proporcional, ganho integral e ganho derivativo tem-se

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{R_4 (R_1 C_1 + R_2 C_2)}{R_3 R_1 C_2} \\ K_i &= \frac{R_4}{R_3 R_1 C_2} \\ K_d &= \frac{R_4 R_2 C_1}{R_3} \end{aligned}$$

Note-se que o segundo estágio do circuito com amplificadores operacionais se comporta, ao mesmo tempo, como inversor de sinal e como ajuste de ganho. A Tabela 5-1 apresenta uma lista de circuitos com amplificadores operacionais que podem ser utilizados como controladores ou compensadores.

5-9 RESPOSTA SENOIDAL DE ESTRUTURAS DE AVANÇO E DE ATRASO DE FASE

A resposta, em regime estacionário, de um sistema linear e invariante no tempo a uma excitação senoidal é um sinal senoidal com uma defasagem que é função da freqüência do sinal de entrada. Esta defasagem angular varia à medida que a freqüência é aumentada de zero a infinito. Se o sinal senoidal de saída de uma estrutura estiver adiantado (atrasado) em relação ao sinal senoidal de entrada, diz-se que a estrutura é de avanço (atraso) de fase. Inicialmente, será obtida a resposta estacionária de uma estrutura linear e invariante no tempo a uma excitação senoidal.

Tabela 5-1 Circuitos com amplificadores operacionais que podem ser usados como compensadores

	Ação de controle	$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)}$	Circuitos com amplificadores operacionais
1	P	$\frac{R_4}{R_3} \frac{R_2}{R_1}$	
2	I	$\frac{R_4}{R_3} \frac{1}{R_1 C_2 s}$	
3	PD	$\frac{R_4}{R_3} \frac{R_2}{R_1} (R_1 C_1 s + 1)$	
4	PI	$\frac{R_4}{R_3} \frac{R_2}{R_1} \frac{R_2 C_2 s + 1}{R_2 C_2 s}$	
5	PID	$\frac{R_4}{R_3} \frac{R_2}{R_1} \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{R_2 C_2 s}$	
6	Avanço ou atraso de fase	$\frac{R_4}{R_3} \frac{R_2}{R_1} \frac{R_1 C_1 s + 1}{R_2 C_2 s + 1}$	
7	Avanço - Atraso de Fase	$\frac{R_6}{R_5} \frac{R_4}{R_3} \frac{[(R_1 + R_3) C_1 s + 1](R_2 C_2 s + 1)}{(R_1 C_1 s + 1)[(R_2 + R_4) C_2 s + 1]}$	

Obtenção de saídas em regime estacionário para entradas senoidais. Será mostrado que a resposta em regime estacionário de um sistema pode ser obtida diretamente da função de transferência senoidal, isto é, a função de transferência na qual s é substituída por $j\omega$, onde ω é a freqüência.

Considere-se o sistema linear e invariante no tempo indicado na Fig. 5-50. Os sinais de entrada e de saída do sistema, cuja função de transferência é $G(s)$, são designados por $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente. Se o sinal de entrada $x(t)$ for um sinal senoidal, o sinal de saída em regime estacionário será também um sinal senoidal da mesma freqüência mas, possivelmente, com amplitude e ângulo de fase diferentes.

Admita-se que o sinal de entrada seja dado por

$$x(t) = X \operatorname{sen} \omega t$$

Suponha-se que a função de transferência $G(s)$ possa ser escrita como uma relação de dois polinômios em s , isto é,

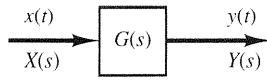


Fig. 5-50 Sistema linear, invariante no tempo e estável.

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{p(s)}{(s + s_1)(s + s_2) \cdots (s + s_n)}$$

A transformada de Laplace de saída $Y(s)$ é então

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{p(s)}{q(s)} X(s) \quad (5-31)$$

onde $X(s)$ é a transformada de Laplace do sinal de entrada $x(t)$.

Será mostrado que, depois de se esperar até que as condições de regime estacionário sejam alcançadas, a resposta em freqüência pode ser calculada substituindo s por $j\omega$ na função transferência. Será mostrado também que a resposta em regime estacionário pode ser dada por

$$G(j\omega) = M e^{j\phi} = M/\underline{\phi}$$

onde M é a relação de amplitude das senóides de saída e de entrada e ϕ é o deslocamento de fase entre a senóide de entrada e a senóide de saída. No teste da resposta em freqüência, varia-se a freqüência do sinal de entrada ω até que toda a faixa de freqüências de interesse esteja coberta.

A resposta em regime estacionário de um sistema linear invariante no tempo a uma excitação senoidal não depende das condições iniciais. (Portanto, pode-se admitir a condição inicial zero.) Se $Y(s)$ possuir apenas pólos distintos, então a expansão em frações parciais da Eq. (5-31) fornece

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)X(s) = G(s) \frac{\omega X}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} + \frac{b_1}{s + s_1} + \frac{b_2}{s + s_2} + \cdots + \frac{b_n}{s + s_n} \end{aligned} \quad (5-32)$$

onde a e b_i (onde $i = 1, 2, \dots, n$) são constantes e \bar{a} é o complexo conjugado de a . Aplicando-se a transformada de Laplace inversa à Eq. (5-32) resulta

$$y(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} + b_1 e^{-s_1 t} + b_2 e^{-s_2 t} + \cdots + b_n e^{-s_n t} \quad (t \geq 0) \quad (5-33)$$

Para um sistema estável $-s_1, -s_2, \dots, -s_n$ possuem partes reais negativas. Portanto, à medida que t tende a infinito, os termos $e^{-s_1 t}, e^{-s_2 t}, \dots, e^{-s_n t}$ tendem a zero. Portanto, todos os termos do segundo membro da Eq. (5-33), exceto os dois primeiros, se anulam em regime estacionário.

Se $Y(s)$ envolver pólos múltiplos s_j de multiplicidade m_j , então $y(t)$ envolverá termos do tipo $t^{h_j} e^{-s_j t}$ com o valor ($h_j = 0, 1, 2, \dots, m_j - 1$). Para sistemas estáveis, os termos $t^{h_j} e^{-s_j t}$ tendem a zero quando t tende a infinito.

Portanto, independentemente de o sistema possuir pólos distintos ou não, a resposta em regime estacionário resulta em

$$y_{ss}(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} \quad (5-34)$$

onde a constante a pode ser calculada a partir da Eq. (5-32) da seguinte forma:

$$a = G(s) \frac{\omega X}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = -\frac{XG(-j\omega)}{2j}$$

Note-se que

$$\bar{a} = G(s) \frac{X}{s^2 + \omega^2} (s - j\omega) \Big|_{s=j\omega} = \frac{XG(j\omega)}{2j}$$

Como $G(j\omega)$ é uma grandeza complexa, pode ser escrita da seguinte forma

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi}$$

onde $|G(j\omega)|$ representa o módulo e ϕ representa o ângulo de fase de $G(j\omega)$, isto é,

$$\phi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left[\frac{\text{parte imaginária de } G(j\omega)}{\text{parte real de } G(j\omega)} \right]$$

O ângulo ϕ pode ser negativo, positivo ou nulo. Analogamente, obtém-se a seguinte expressão para $G(-j\omega)$:

$$G(-j\omega) = |G(-j\omega)|e^{-j\phi} = |G(j\omega)|e^{-j\phi}$$

Em seguida, observando-se que

$$a = -\frac{X|G(j\omega)|e^{-j\phi}}{2j}, \quad \bar{a} = \frac{X|G(j\omega)|e^{j\phi}}{2j}$$

A Eq. (5-34) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} y_{ss}(t) &= X|G(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} \\ &= X|G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi) \\ &= Y \sin(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (5-35)$$

onde $Y = X|G(j\omega)|$. Verifica-se que um sistema linear, estável, invariante no tempo quando submetido a uma excitação senoidal, apresentará, em regime estacionário, um sinal de saída senoidal com a mesma freqüência do sinal de entrada. Porém, de um modo geral, a amplitude e o ângulo de fase do sinal de saída serão diferentes daqueles do sinal de entrada. Com efeito, a amplitude do sinal de saída é dada pelo produto da amplitude do sinal de entrada por $|G(j\omega)|$, enquanto o ângulo de fase do sinal de saída difere do sinal de entrada de um valor $\phi = \angle G(j\omega)$. Um exemplo de sinais senoidais de entrada e de saída é mostrado na Fig. 5-51.

Com base no exposto, obtém-se este importante resultado: para sinais de entrada senoidais,

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \right| = \text{relação de amplitudes das senóides de entrada e saída}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \text{defasagem da senóide de saída em relação à senóide de entrada}$$

Portanto, as características de resposta de um sistema a uma excitação senoidal podem ser obtidas diretamente de

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = G(j\omega)$$

A função $G(j\omega)$ é chamada *função de transferência senoidal*. É a relação entre $Y(j\omega)$ e $X(j\omega)$, é uma grandeza complexa, e pode ser representada pelo módulo e ângulo de fase, tendo a freqüência como parâmetro. (Um ângulo de fase nega-

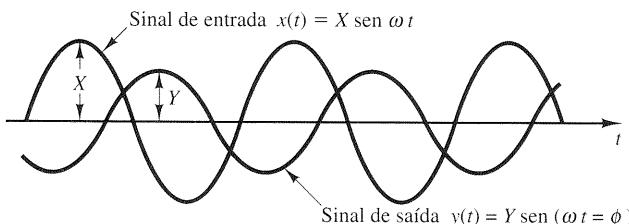


Fig. 5-51 Sinais senoidais de entrada e saída.

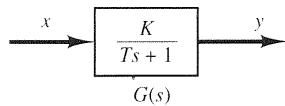


Fig. 5-52 Sistema de primeira ordem.

tivo é denominado *atraso de fase*, e um ângulo de fase positivo é denominado *avanço de fase*.) A função de transferência senoidal de qualquer sistema linear é obtida substituindo-se s por $j\omega$ na função de transferência do sistema.

Uma estrutura com características de avanço de fase é comumente chamada de estrutura de avanço de fase. De modo análogo, uma estrutura com características de atraso de fase é dita estrutura de atraso de fase.

EXEMPLO 5-5

Considere-se o sistema indicado na Fig. 5-52. A função de transferência $G(s)$ é

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

Para um sinal de entrada senoidal $x(t) = X \operatorname{sen} \omega t$, a saída em regime estacionário $y_{ss}(t)$ pode ser achada como se segue. Substituindo-se s por $j\omega$ em $G(s)$, resulta

$$G(j\omega) = \frac{K}{jT\omega + 1}$$

A relação entre as amplitudes dos sinais de saída e de entrada é

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}$$

enquanto o ângulo de fase ϕ é

$$\phi = \angle G(j\omega) = -\tan^{-1} T\omega$$

Portanto, para o sinal de entrada $x(t) = X \operatorname{sen} \omega t$, o sinal de saída em regime estacionário, $y_{ss}(t)$ pode ser obtido a partir da Eq. (5-35) como se segue:

$$y_{ss}(t) = \frac{XK}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \tan^{-1} T\omega) \quad (5-36)$$

Da Eq. (5-36) observa-se que, para valores pequenos de ω , a amplitude do sinal de saída em regime estacionário $y_{ss}(t)$ é praticamente igual a K vezes a amplitude do sinal de entrada. A defasagem do sinal de saída é pequena para valores pequenos de ω . Para valores grandes de ω a amplitude do sinal de saída é pequena e quase inversamente proporcional a ω . A defasagem tende a -90° quando ω tende a infinito.

EXEMPLO 5-6

Considere-se o circuito definido por

$$G(s) = \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{1}{T_2}}$$

Determinar se esta estrutura é de avanço ou de atraso de fase.

Para uma excitação senoidal $x(t) = X \operatorname{sen} \omega t$, a resposta em regime permanente $y_{ss}(t)$ pode ser determinada como a seguir: uma vez que

$$G(j\omega) = \frac{j\omega + \frac{1}{T_1}}{j\omega + \frac{1}{T_2}} = \frac{T_2(1 + T_1 j\omega)}{T_1(1 + T_2 j\omega)}$$

tem-se

$$|G(j\omega)| = \frac{T_2 \sqrt{1 + T_1^2 \omega^2}}{T_1 \sqrt{1 + T_2^2 \omega^2}}$$

e

$$\phi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} T_1 \omega - \tan^{-1} T_2 \omega$$

Assim, a resposta em regime permanente é

$$y_{ss}(t) = \frac{XT_2 \sqrt{1 + T_1^2 \omega^2}}{T_1 \sqrt{1 + T_2^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \tan^{-1} T_1 \omega - \tan^{-1} T_2 \omega)$$

Constata-se, a partir desta expressão, que se $T_1 > T_2$ então $\tan^{-1} T_1 \omega - \tan^{-1} T_2 \omega > 0$. Portanto, se $T_1 > T_2$, a estrutura é de avanço de fase. Se $T_1 < T_2$, o circuito é uma estrutura de atraso de fase.

5-10 ERRO ESTACIONÁRIO EM SISTEMAS DE CONTROLE COM RETROAÇÃO UNITÁRIA

Num sistema de controle, os erros podem ser atribuídos a muitos fatores. Mudanças no sinal de referência acarretarão erros inevitáveis durante o regime transitório e também podem ocasionar erros em regime estacionário. Imperfeições tais como atrito seco, folgas e derivas dos amplificadores, bem como envelhecimento ou deterioração dos componentes, produzirão erros em regime permanente. Nesta seção, contudo, não serão discutidos erros devidos a imperfeições dos componentes do sistema. Em vez disto, será investigado um tipo de erro estacionário que é causado pela incapacidade do sistema em seguir tipos particulares de sinais de excitação. Qualquer sistema de controle físico apresenta inherentemente erro estacionário na resposta a certos tipos de sinais de entrada. Um sistema pode não apresentar erro estacionário quando submetido a solicitações em degrau, mas o mesmo sistema pode apresentar erro estacionário não-nulo para uma excitação em rampa. (A única maneira de se eliminar este erro é modificando a estrutura do sistema.) O fato de um sistema apresentar erro estacionário para um dado tipo de sinal de entrada depende do tipo de função de transferência a malha aberta do sistema, o que será discutido a seguir.

Classificação dos sistemas de controle. Os sistemas de controle podem ser classificados de acordo com a sua habilidade em seguir sinais de entrada em degrau, em rampa, em parábola etc. Este é um critério razoável de classificação porque as excitações reais podem ser freqüentemente consideradas como uma combinação de tais sinais. Os valores dos erros estacionários devidos a estas entradas individuais são indicativos da “qualidade” do sistema.

Considere-se o sistema de controle com retroação unitária com a seguinte função de transferência a malha aberta $G(s)$:

$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_p s + 1)}$$

Ela envolve o termo s^N no denominador, representando um pólo de multiplicidade N na origem. O presente critério de classificação é baseado no número de integrações indicadas pela função de transferência a malha aberta. Um sistema é chamado de tipo 0, do tipo 1, do tipo 2 ... se $N = 0, N = 1, N = 2 \dots$, respectivamente. Note-se que esta classificação é diferente daquela que diz respeito à ordem de um sistema. À medida que se aumenta o número N , melhora a precisão mas agrava o problema da estabilidade. É sempre necessário um compromisso entre precisão em regime estacionário e estabilidade relativa. Na prática, raramente se tem um sistema de tipo 3 ou maior porque, em geral, é difícil projetar sistemas estáveis com mais de duas integrações no percurso direto.

Será visto mais tarde que, se $G(s)$ for escrita de tal forma que cada termo no numerador e no denominador, exceto o termo s^N , tenda à unidade quando s tende a zero, então o ganho de malha aberta K está diretamente relacionado com o erro estacionário.

Erros estacionários. Considere-se o sistema mostrado na Fig. 5-53. A função de transferência a malha fechada é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

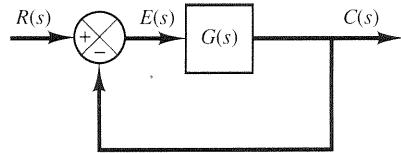


Fig. 5-53 Sistema de controle.

A função de transferência entre o sinal de erro atuante $e(t)$ e o sinal de entrada $r(t)$ é

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)}$$

onde o erro atuante $e(t)$ é a diferença entre o sinal de entrada e o sinal de saída.

O teorema do valor final provê uma maneira conveniente de se determinar o desempenho em regime estacionário de um sistema estável. Como $E(s)$ é

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s)$$

o erro estacionário é

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)}$$

Os coeficientes de erro estático definidos a seguir são figuras de mérito dos sistemas de controle. Quanto maiores os valores dos coeficientes, menor o erro estacionário. Em um dado sistema, a grandeza de saída pode ser posição, velocidade, pressão, temperatura etc. A forma física da grandeza de saída é, entretanto, irrelevante nesta análise. Assim, daqui em diante, o sinal de saída será chamado de “posição”, a taxa de variação do sinal de saída de “velocidade” etc. Isto significa que, em um sistema de controle de temperatura, “posição” representa a temperatura de saída, “velocidade” representa a taxa de variação da temperatura de saída etc.

Coeficiente de erro estático de posição K_p . O erro estacionário do sistema a uma excitação em degrau unitário é

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{1 + G(0)} \end{aligned}$$

O coeficiente de erro estático de posição K_p é definido por

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = G(0)$$

Assim, o erro estacionário, em termos do coeficiente de erro estático de posição K_p , é dado pela expressão

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}$$

Para um sistema do tipo 0

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = K$$

Para um sistema do tipo 1 ou maior

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = \infty, \quad \text{para } N \geq 1$$

Portanto, para um sistema do tipo 0, o coeficiente de erro estático de posição K_p é finito, enquanto para um sistema do tipo 1 ou maior, K_p é infinito.

Para uma excitação em degrau unitário, o erro estacionário e_{ss} pode ser resumido como se segue:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K}, \text{ para sistemas do tipo 0}$$

$$e_{ss} = 0, \text{ para sistemas do tipo 1 ou maior}$$

Da análise feita, vê-se que a resposta de um sistema de controle com retroação unitária para uma entrada em degrau envolve um erro estacionário se não houver integração no percurso direto. (Se erros pequenos à solicitação em degrau puderem ser tolerados, então um sistema do tipo 0 pode ser admissível, contanto que o ganho K seja suficientemente grande. Entretanto, se o ganho K for grande demais, fica difícil obter-se uma estabilidade relativa adequada.) Se for desejado um erro estacionário nulo para uma solicitação em degrau, então o tipo do sistema deve ser 1 ou maior.

Coeficiente de erro estático de velocidade K_v . O erro estacionário do sistema a uma excitação em rampa unitária é dado por

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG(s)} \end{aligned}$$

O coeficiente de erro estático de velocidade K_v é definido por

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$$

Assim, o erro estacionário, em termos do coeficiente de erro estático de velocidade, é dado pela expressão

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$$

O termo *erro de velocidade* é usado aqui para designar o erro estacionário a uma excitação em rampa. A dimensão do erro de velocidade é a mesma do erro do sistema, isto é, o erro de velocidade não é um erro na velocidade, mas um erro na posição devido a uma entrada em rampa.

Para um sistema do tipo 0,

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = 0$$

Para um sistema do tipo 1,

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = K$$

Para um sistema do tipo 2 ou maior,

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s^N(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = \infty, \quad \text{para } N \geq 2$$

O erro estacionário e_{ss} para uma entrada em rampa unitária pode ser resumido como se segue:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \infty, \quad \text{para sistemas tipo 0}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K}, \quad \text{para sistemas tipo 1}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0, \quad \text{para sistemas tipo 2 ou maior}$$

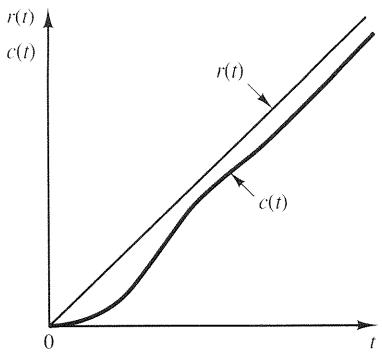


Fig. 5-54 Resposta de um sistema com retroação unitária, do tipo 1, a uma solicitação em rampa unitária.

A análise feita mostra que um sistema do tipo 0 é incapaz de seguir, em regime estacionário, uma solicitação em rampa. O sistema do tipo 1 com retroação unitária pode seguir o sinal de entrada em rampa com um erro finito. Em operação estacionária, a velocidade de saída é exatamente igual à velocidade de entrada, mas há um erro de posição. Este erro é proporcional à velocidade de entrada e inversamente proporcional ao ganho K . A Fig. 5-54 mostra um exemplo da resposta de sistema tipo 1 com retroação unitária a uma entrada em rampa. O sistema de ordem 2 ou maior pode seguir uma entrada em rampa com erro estacionário nulo.

Coeficiente de erro estático de aceleração K_a . O erro estacionário do sistema a uma solicitação em parábola unitária (entrada de aceleração), que é definida por

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{t^2}{2}, \quad \text{para } t \geq 0 \\ &= 0, \quad \text{para } t < 0 \end{aligned}$$

é dado por

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s^3} \\ &= \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)} \end{aligned}$$

O coeficiente de erro de aceleração estático K_a é definido pela equação

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$$

O erro estacionário é então

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a}$$

Note-se que o erro de aceleração, o erro estacionário devido a uma solicitação em parábola, é um erro em posição.

Os valores de K_a são obtidos como a seguir:

Para sistemas do tipo 0,

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = 0$$

Para sistemas do tipo 1,

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = 0$$

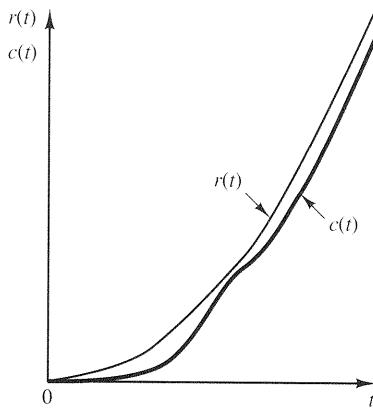


Fig. 5-55 Resposta de um sistema com retroação unitária, do tipo 2, a uma solicitação em parábola.

Para sistemas do tipo 2,

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K (T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s^2 (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = K$$

Para um sistema do tipo 3 ou maior,

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K (T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = \infty, \quad \text{para } N \geq 3$$

Portanto, o erro estacionário para um sinal de entrada em parábola unitária é

$$e_{ss} = \infty, \quad \text{para sistemas do tipo 0 e do tipo 1}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K}, \quad \text{para sistemas do tipo 2}$$

$$e_{ss} = 0, \quad \text{para sistemas do tipo 3 ou maior}$$

Note-se que tanto sistemas do tipo 0 como do tipo 1 são incapazes de seguir, em regime permanente, uma solicitação em parábola. Os sistemas do tipo 2 com retroação unitária podem seguir uma entrada em parábola com um erro finito. A Fig. 5-55 mostra um exemplo da resposta de um sistema do tipo 2 com retroação unitária a uma excitação em parábola. O sistema do tipo 3 ou maior com retroação unitária segue uma entrada em parábola com erro nulo em regime estacionário.

Resumo. A Tabela 5-2 resume os erros estacionários para sistemas do tipo 0, tipo 1 e tipo 2 quando sujeitos aos vários sinais de entrada. Os valores finitos para erro estacionário aparecem na linha diagonal. Acima da diagonal, os erros estacionários são infinitos; abaixo da diagonal eles são nulos.

É bom lembrar que os termos *erro de posição*, *erro de velocidade* e *erro de aceleração* significam desvios em regime estacionário na posição de saída. Um erro de velocidade finita significa que depois de os transitórios desaparecerem, a entrada e a saída se movem com a mesma velocidade, mas com uma diferença de posição finita.

Tabela 5-2 Erro estacionário em função do ganho K

	Entrada em degrau $r(t) = 1$	Entrada em rampa $r(t) = t$	Entrada em aceleração $r(t) = \frac{1}{2} t^2$
Sistema tipo 0	$\frac{1}{1 + K}$	∞	∞
Sistema tipo 1	0	$\frac{1}{K}$	∞
Sistema tipo 2	0	0	$\frac{1}{K}$

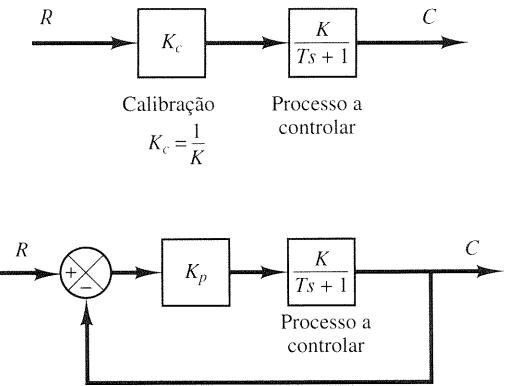


Fig. 5-56 Diagramas de blocos de um sistema de controle a malha aberta e de um sistema de controle a malha fechada.

Os coeficientes de erro K_p , K_v e K_a descrevem a habilidade de um sistema com retroação unitária em reduzir ou eliminar erros estacionários. Portanto, eles são indicativos de desempenho em regime estacionário. Em geral é desejável aumentar os coeficientes de erro, enquanto se mantém a resposta transitória dentro de limites aceitáveis. Se houver algum conflito entre o coeficiente de erro de velocidade e o coeficiente de erro de aceleração, então o último pode ser considerado menos importante do que o anterior. Nota-se que para melhorar o desempenho em regime estacionário, pode-se aumentar o tipo do sistema adicionando um integrador ou integradores no percurso direto. Entretanto, isto introduz problemas adicionais de estabilidade. O projeto de um sistema satisfatório com mais de dois integradores no percurso direto é geralmente difícil.

Comparação entre os erros estacionários de sistemas a malha aberta e de sistemas a malha fechada. Sejam os sistemas de controle a malha aberta e a malha fechada mostrados na Fig. 5-56. No sistema a malha aberta o ganho K_c é calibrado de modo a se ter $K_c = 1/K$. Assim, a função de transferência do sistema de controle a malha aberta é

$$G_0(s) = \frac{1}{K} \frac{K}{Ts + 1} = \frac{1}{Ts + 1}$$

No sistema de controle a malha fechada, o ganho K_p do controlador é ajustado de modo que $K_p K \gg 1$.

Admitindo-se uma excitação em degrau unitário, vamos comparar os erros estacionários nestes dois sistemas. Para o sistema de controle a malha aberta, o sinal de erro é

$$e(t) = r(t) - c(t)$$

ou

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - C(s) \\ &= [1 - G_0(s)]R(s) \end{aligned}$$

O erro estacionário a uma solicitação em degrau unitário é

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s[1 - G_0(s)] \frac{1}{s} \\ &= 1 - G_0(0) \end{aligned}$$

Se $G_0(0)$, o ganho estático do sistema de controle a malha aberta, for igual à unidade, então o erro de regime permanente será nulo. Contudo, devido a mudanças no ambiente e ao envelhecimento dos componentes, o ganho estático $G_0(0)$ se afastará do valor unitário à medida que o tempo passa e o erro estacionário deixará de ser nulo. Este erro permanecerá no sistema a malha aberta até que se faça uma nova calibração do sistema.

Para o sistema de controle a malha fechada, o sinal de erro é

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - C(s) \\ &= \frac{1}{1 + G(s)} R(s) \end{aligned}$$

onde

$$G(s) = \frac{K_p K}{Ts + 1}$$

O erro estacionário a uma excitação em degrau unitário é

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{1 + G(s)} \right] \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{1 + G(0)} \\ &= \frac{1}{1 + K_p K} \end{aligned}$$

No sistema de controle a malha fechada, o ganho K_p é ajustado para ter um valor grande em comparação com $1/K$. Assim, o erro estacionário pode ser feito muito pequeno, embora não exatamente igual a zero.

Admita-se a seguinte variação na função de transferência do processo a controlar, supondo-se K_c e K_p constantes:

$$\frac{K + \Delta K}{Ts + 1}$$

Por simplicidade, sejam os seguintes valores, $K = 10$, $\Delta K = 1$, ou $\Delta K/K = 0,1$. Então o erro estacionário na resposta ao degrau unitário se torna, para o sistema de controle a malha aberta,

$$\begin{aligned} e_{ss} &= 1 - \frac{1}{K} (K + \Delta K) \\ &= 1 - 1,1 = -0,1 \end{aligned}$$

Para o sistema de controle a malha fechada, se K_p for ajustado no valor $100/K$, então o erro de regime estacionário da resposta ao degrau unitário se torna

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \frac{1}{1 + G(0)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{100}{K} (K + \Delta K)} \\ &= \frac{1}{1 + 110} = 0,009 \end{aligned}$$

Assim, o sistema de controle a malha fechada é superior ao sistema de controle a malha aberta, em presença de mudanças no ambiente, envelhecimento dos componentes e efeitos similares que afetam o desempenho em regime permanente.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS E SOLUÇÕES

- A-5-1.** Explicar por que o controle proporcional de um processo que não possua propriedade de integração (o que significa que a função de transferência do processo não inclui o fator $1/s$) apresenta um erro residual na resposta a excitações em degrau.

Solução. Considere-se, por exemplo, o sistema mostrado na Fig. 5-57. Em regime permanente, se c fosse igual a uma constante r nula, então $e = 0$ e $u = Ke = 0$, resultando em $c = 0$, o que contradiz a hipótese de se ter $c = r = \text{constante não-nula}$.

Para que um tal sistema de controle funcione de forma adequada, deve existir, necessariamente, um erro residual. Em outras palavras, em regime permanente, se e for igual a $r/(1 + K)$, então $u = Kr/(1 + K)$ e $c = Kr/(1 + K)$, que resulta no valor de erro anteriormente suposto $e = r/(1 + K)$. Portanto, o erro residual $r/(1 + K)$ é inerente a um sistema como este.

- A-5-2.** Seja o sistema mostrado na Fig. 5-58. Mostrar que o valor de regime permanente do erro de acompanhamento de um sinal em rampa unitária é B/K . Este erro pode ser feito pequeno escolhendo-se B pequeno e/ou K grande. Contudo, reduzir o valor de B e/ou aumentar

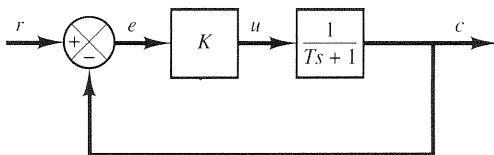


Fig. 5-57 Sistema de controle.

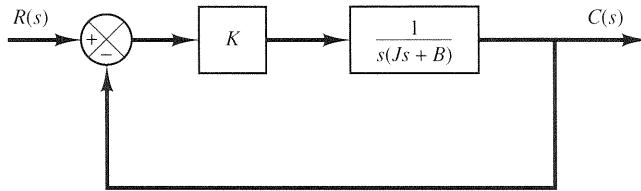


Fig. 5-58 Sistema de controle.

o valor de K tem como efeito a redução do coeficiente de amortecimento, o que normalmente não é desejável. Descrever um método ou métodos para reduzir a relação B/K e manter um valor razoável para o coeficiente de amortecimento ($0,5 < \zeta < 0,7$).

Solução. A partir da Fig. 5-58 obtém-se

$$E(s) = R(s) - C(s) = \frac{Js^2 + Bs}{Js^2 + Bs + K} R(s)$$

O erro estacionário a uma solicitação em rampa unitária pode ser obtido da seguinte forma: para um sinal de entrada em rampa unitária o erro em regime permanente e_{ss} é dado por

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Js^2 + Bs}{Js^2 + Bs + K} \frac{1}{s^2} \\ &= \frac{B}{K} \\ &= \frac{2\zeta}{\omega_n} \end{aligned}$$

onde

$$\zeta = \frac{B}{2\sqrt{KJ}}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}}$$

Para assegurar uma resposta transitória e um erro de regime permanente aceitáveis, a uma excitação em rampa unitária, ζ não precisa ser muito pequeno, nem ω_n muito grande. É possível ter o valor do erro estacionário e_{ss} bem pequeno fazendo-se o valor de K ser grande. (Um valor elevado de K apresenta uma vantagem adicional de suprimir efeitos indesejáveis causados por zona morta, folgas, atrito seco etc.) Um valor elevado para K , contudo, produziria um valor pequeno de ζ e aumentaria o valor máximo de ultrapassagem, o que é indesejável.

Torna-se necessário, portanto, estabelecer um compromisso entre as magnitudes do erro estacionário e do valor máximo de ultrapassagem a uma excitação em rampa unitária. Para o sistema mostrado na Fig. 5-58, pode não ser muito fácil obter uma solução de compromisso. É, então, desejável que se considerem outros tipos de ação de controle que possam melhorar, simultaneamente, a resposta transitória e o comportamento em regime permanente. Há dois esquemas disponíveis para melhorar, ao mesmo tempo, a resposta transitória e o comportamento em regime permanente. Um deles consiste em utilizar um controlador proporcional-integral-derivativo; o outro diz respeito ao uso de retroação tacométrica.

- A-5-3.** O diagrama de blocos da Fig. 5-59 mostra um sistema de controle de velocidade no qual o dispositivo de saída é submetido a um torque perturbador. No diagrama, $\Omega_r(s)$, $\Omega(s)$, $T(s)$ e $D(s)$ são, respectivamente, as transformadas de Laplace da velocidade de referência, da velocidade de saída, do torque acionador e do torque perturbador. Na ausência de torque perturbador, a velocidade de saída é igual à velocidade de referência.

Determinar a resposta deste sistema a um torque perturbador em degrau unitário. Admitir que a velocidade de referência é nula, isto é, $\Omega_r(s) = 0$.

Solução. A Fig. 5-60 é um diagrama de blocos modificado, conveniente para a presente análise. A função de transferência a malha fechada é

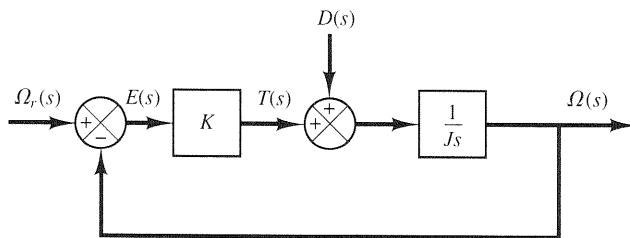


Fig. 5-59 Diagrama de blocos de um sistema de controle de velocidade.

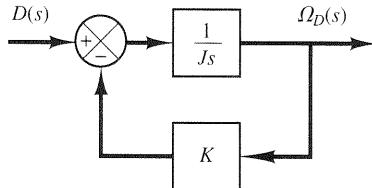


Fig. 5-60 Diagrama de blocos do sistema de controle de velocidade da Fig. 5-59 quando $\Omega_r(s) = 0$.

$$\frac{\Omega_D(s)}{D(s)} = \frac{1}{J_s + K}$$

onde $\Omega_D(s)$ é a transformada de Laplace da velocidade de saída devida ao torque perturbador. Para um torque perturbador em degrau unitário, a velocidade em regime permanente é

$$\begin{aligned} \omega_D(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s\Omega_D(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{J_s + K} \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{K} \end{aligned}$$

A partir desta análise, conclui-se que, ao ser aplicado um torque perturbador em degrau ao elemento de saída do sistema, resulta um erro em velocidade de modo que o torque motor decorrente equilibra, exatamente, o torque perturbador. Para desenvolver este torque motor, com valor não-nulo, há necessidade de existir um erro de velocidade.

- A-5-4.** No sistema considerado no Problema A-5-3, deseja-se eliminar, tanto quanto possível, o erro de velocidade devido a torques perturbadores.

É possível cancelar, em regime estacionário, o efeito de um torque perturbador constante aplicado ao elemento de saída, de modo que não haja mudança de velocidade em regime permanente?

Solução. Admita-se a escolha de um controlador adequado cuja função de transferência seja $G_c(s)$, conforme mostrado na Fig. 5-61. Então, na ausência de sinal de referência, a função de transferência entre a velocidade de saída $\Omega_D(s)$ e o torque perturbador $D(s)$ é

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_D(s)}{D(s)} &= \frac{\frac{1}{J_s}}{1 + \frac{1}{J_s} G_c(s)} \\ &= \frac{1}{J_s + G_c(s)} \end{aligned}$$

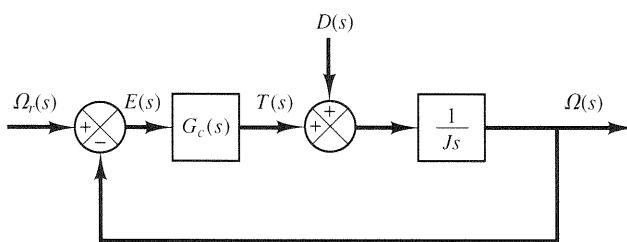


Fig. 5-61 Diagrama de blocos de um sistema de controle de velocidade.

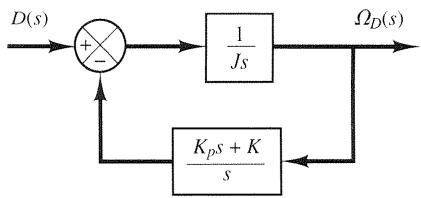


Fig. 5-62 Diagrama de blocos do sistema de controle de velocidade da Fig. 5-61 quando $G_c(s) = K_p + (K/s)$ e $\Omega_r(s) = 0$.

O valor de regime estacionário da velocidade devido a um torque perturbador em degrau unitário é

$$\begin{aligned}\omega_D(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s\Omega_D(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{Js + G_c(s)} \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{G_c(0)}\end{aligned}$$

Para satisfazer o requisito

$$\omega_D(\infty) = 0$$

Deve-se escolher $G_c(0) = \infty$. Isto pode ser conseguido escolhendo-se

$$G_c(s) = \frac{K}{s}$$

A ação de controle integral continua a corrigir o erro até que este seja nulo. Este controlador, contudo, apresenta um problema de estabilidade porque a equação característica terá duas raízes imaginárias.

Um método de estabilização para um tal sistema consiste em adicionar o modo proporcional ao controlador, ou seja, escolher

$$G_c(s) = K_p + \frac{K}{s}$$

Com este controlador, o diagrama de blocos da Fig. 5-61, na ausência de um sinal de referência, pode ser modificado para o da Fig. 5-62. A função de transferência a malha fechada $\Omega_D(s)/D(s)$ se transforma em

$$\frac{\Omega_D(s)}{D(s)} = \frac{s}{Js^2 + K_p s + K}$$

Para um torque perturbador em rampa unitária velocidade estacionária de saída é

$$\omega_D(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Omega_D(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2}{Js^2 + K_p s + K} \frac{1}{s} = 0$$

Constata-se, assim, que o controlador proporcional-integral elimina o erro de velocidade em regime estacionário.

O uso da ação de controle integral aumenta de uma unidade a ordem do sistema. (Isto tende a produzir uma resposta oscilatória.)

No presente caso, um torque perturbador em degrau produzirá um erro transitório na velocidade, mas, em regime estacionário, este erro se anulará. O integrador provê uma saída não-nula para um erro nulo de entrada. (A saída não-nula do integrador produz o torque motor que equilibra, exatamente, o torque perturbador.)

Observe-se que o integrador presente na função de transferência do processo a controlar não elimina o erro em regime estacionário devido a um torque perturbador em degrau. Para eliminar isto, deve-se ter um integrador antes do ponto de entrada do torque perturbador.

A-5-5. Seja o sistema mostrado na Fig. 5-63(a). O erro em regime estacionário a uma excitação em rampa unitária é $e_{ss} = 2\zeta/\omega_n$. Mostrar que o erro em regime estacionário, resultante da aplicação de uma excitação em rampa, pode ser eliminado pela interposição de um filtro proporcional-derivativo entre o sinal de entrada e o sistema, conforme mostrado na Fig. 5-63(b), e pelo ajuste adequado de k . Note-se que o erro $e(t)$ é dado por $r(t) - c(t)$.

Solução. A função de transferência a malha fechada do sistema mostrado na Fig. 5-63(b) é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(1+ks)\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

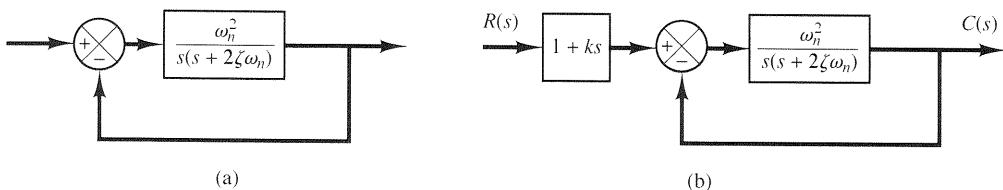


Fig. 5-63 (a) Sistema de controle; (b) sistema de controle com filtro na entrada.

Então

$$R(s) - C(s) = \left(\frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s - \omega_n^2 k s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right) R(s)$$

Se a excitação for uma rampa unitária, então o erro estacionário é

$$\begin{aligned} e(\infty) &= r(\infty) - c(\infty) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s - \omega_n^2 k s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right) \frac{1}{s^2} \\ &= \frac{2\zeta\omega_n - \omega_n^2 k}{\omega_n^2} \end{aligned}$$

Portanto, se \$k\$ for escolhido com o valor

$$k = \frac{2\zeta}{\omega_n}$$

então é possível anular o erro estacionário resultante de uma solicitação em rampa. Observe-se que, se ocorrerem variações nos valores dos parâmetros \$\zeta\$ e/ou \$\omega_n\$ ocasionadas por influência do meio externo ou por envelhecimento dos componentes, pode resultar um erro estacionário não-nulo na resposta a uma excitação em rampa.

A-5-6. Seja o sistema de controle de nível de líquido mostrado na Fig. 5-64. Admite-se que o valor do ponto de ajuste seja fixado. Supondo-se uma perturbação em degrau de amplitude \$D_0\$, determinar o erro. Supor que \$D_0\$ é um valor pequeno e que as variações nos valores das variáveis em relação aos respectivos valores de regime permanente são também pequenas. O controlador é proporcional.

Se, em vez de um controlador proporcional, for usado um controlador integral, qual o erro em regime permanente?

Solução. A Fig. 5-65 é um diagrama de blocos do sistema quando o controlador é do tipo proporcional, com ganho \$K_p\$. (Considera-se que a função de transferência da válvula pneumática seja a unidade.) Uma vez que o valor do ponto de ajuste é constante, sua variação é nula, ou seja, \$X(s) = 0\$. A transformada de Laplace de \$h(t)\$ é

$$H(s) = \frac{K_p R}{RCs + 1} E(s) + \frac{R}{RCs + 1} D(s)$$

Então

$$E(s) = -H(s) = -\frac{K_p R}{RCs + 1} E(s) - \frac{R}{RCs + 1} D(s)$$

Assim

$$E(s) = -\frac{R}{RCs + 1 + K_p R} D(s)$$

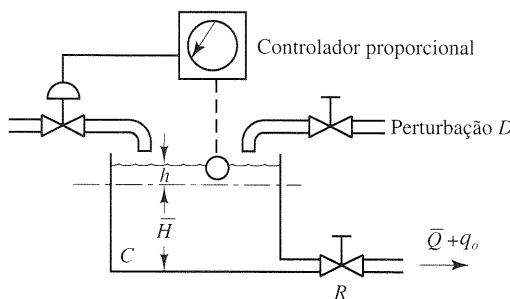


Fig. 5-64 Sistema de controle de nível de líquido.

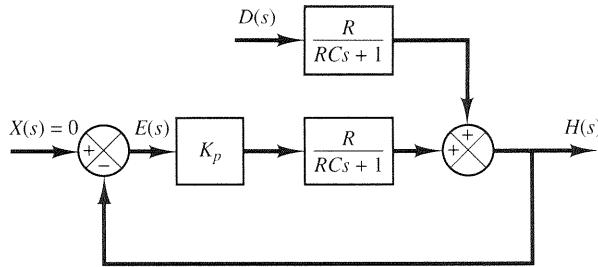


Fig. 5-65 Diagrama de blocos do sistema de controle de nível mostrado na Fig. 5-64.

Uma vez que

$$D(s) = \frac{D_0}{s}$$

obtém-se

$$\begin{aligned} E(s) &= -\frac{R}{RCs + 1 + K_p R} \frac{D_0}{s} \\ &= \frac{RD_0}{1 + K_p R} \left(\frac{1}{s + \frac{1 + K_p R}{RC}} \right) - \frac{RD_0}{1 + K_p R} \frac{1}{s} \end{aligned}$$

A solução no domínio do tempo para $t > 0$ é

$$e(t) = \frac{RD_0}{1 + K_p R} \left[\exp \left(-\frac{1 + K_p R}{RC} t \right) - 1 \right]$$

Assim, a constante de tempo é $RC/(1 + K_p R)$. (Na ausência do controlador, a constante de tempo é RC .) À medida que o ganho do controlador aumenta, a constante de tempo é reduzida. O valor de regime permanente do erro é

$$e(\infty) = -\frac{RD_0}{1 + K_p R}$$

À medida que se aumenta o ganho K_p do controlador, o erro em regime permanente, ou erro residual, diminui. Assim, matematicamente, quanto maior o valor do ganho K_p , menores os valores do erro residual e da constante de tempo. Na prática, contudo, se o ganho K_p do controlador for ajustado para um valor muito alto, podem resultar oscilações no valor do sinal de saída uma vez que nesta análise foram desprezadas todas as constantes de tempo e retardos pequenos que existem no sistema de controle real. (Se estes pequenos retardos e constantes de tempo forem incluídos na análise, a função de transferência se torna de maior ordem, e para valores grandes de K_p existe a possibilidade de ocorrerem oscilações e, mesmo, instabilidade.)

Se o controlador for do tipo integral, admitindo-se que sua função de transferência seja

$$G_c = \frac{K}{s}$$

obtém-se

$$E(s) = -\frac{Rs}{RCs^2 + s + KR} D(s)$$

O erro estacionário, devido a uma perturbação em degrau $D(s) = D_0/s$, é

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-Rs^2}{RCs^2 + s + KR} \frac{D_0}{s} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Assim, um controlador integral elimina o erro estacionário, ou erro residual, devido a uma perturbação em degrau. (O valor de K deve ser escolhido de modo que a resposta transitória devida a um sinal de comando e/ou a uma perturbação seja amortecida com uma velocidade razoável.)

- A-5-7.** Obter ambas as soluções, analítica e computacional, da resposta ao degrau unitário de um sistema com retroação unitária cuja função de transferência a malha aberta é

$$G(s) = \frac{5(s + 20)}{s(s + 4,59)(s^2 + 3,41s + 16,35)}$$

Solução. A função de transferência a malha fechada é

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{5(s + 20)}{s(s + 4,59)(s^2 + 3,41s + 16,35) + 5(s + 20)} \\ &= \frac{5s + 100}{s^4 + 8s^3 + 32s^2 + 80s + 100} \\ &= \frac{5(s + 20)}{(s^2 + 2s + 10)(s^2 + 6s + 10)} \end{aligned}$$

A resposta deste sistema ao degrau unitário é, então,

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{5(s + 20)}{s(s^2 + 2s + 10)(s^2 + 6s + 10)} \\ &= \frac{1}{s} + \frac{\frac{3}{8}(s + 1) - \frac{17}{8}}{(s + 1)^2 + 3^2} + \frac{-\frac{11}{8}(s + 3) - \frac{13}{8}}{(s + 3)^2 + 1^2} \end{aligned}$$

A resposta no domínio do tempo $c(t)$ pode ser obtida tomando-se a transformada de Laplace inversa de $C(s)$ como a seguir:

$$c(t) = 1 + \frac{3}{8}e^{-t} \cos 3t - \frac{17}{24}e^{-t} \sin 3t - \frac{11}{8}e^{-3t} \cos t - \frac{13}{8}e^{-3t} \sin t, \quad \text{para } t \geq 0$$

Um programa em MATLAB para obter a resposta deste sistema a uma excitação em degrau unitário é mostrado no Programa MATLAB 5-2. A curva de resposta ao degrau unitário resultante é mostrada na Fig. 5-66.

Programa MATLAB 5-2 <pre>% ----- Resposta ao degrau unitário ----- num = [0 0 0 5 100]; den = [1 8 32 80 100]; step(num,den) grid title('Resposta ao Degrau Unitário de C(s)/R(s) = (5s + 100)/(s^4 + 8s^3 + 32s^2 + 80s + 100)')</pre>
--

- A-5-8.** Considere-se a seguinte equação característica:

$$s^4 + Ks^3 + s^2 + s + 1 = 0$$

Determinar a faixa de K para estabilidade.

Solução. O arranjo de coeficientes do critério de Routh é

$$\begin{array}{ccccc} s^4 & 1 & 1 & 1 & \\ s^3 & K & 1 & 0 & \\ s^2 & \frac{K-1}{K} & 1 & 0 & \\ s^1 & 1 - \frac{K^2}{K-1} & 0 & & \\ s^0 & 1 & & & \end{array}$$

Para estabilidade, são requeridas as condições

$$K > 0$$

$$\frac{K-1}{K} > 0$$

$$1 - \frac{K^2}{K-1} > 0$$

Resposta ao degrau unitário de $C(s)/R(s) =$
 $(5s + 100)/(s^4 + 8s^3 + 32s^2 + 80s + 100)$

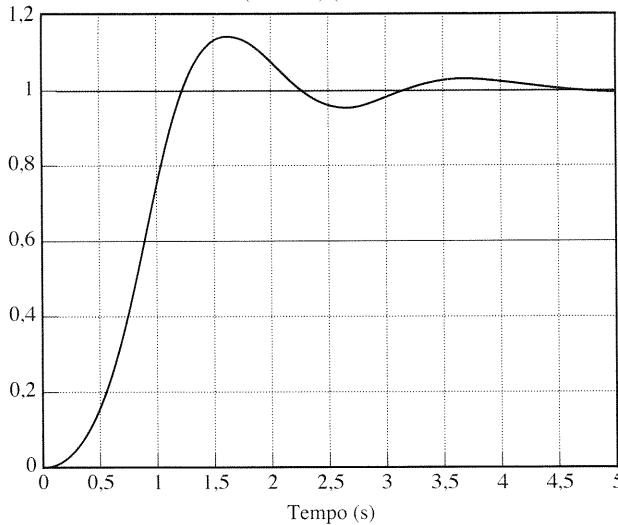


Fig. 5-66 Curva de resposta ao degrau unitário.

A partir da primeira e da segunda condições, deve-se ter $K > 1$. Para $K > 1$, note-se que o termo $1 - [K^2/(K - 1)]$ é sempre negativo uma vez que

$$\frac{K - 1 - K^2}{K - 1} = \frac{-1 + K(1 - K)}{K - 1} < 0$$

Assim, as três condições não podem ser atendidas simultaneamente. Em consequência, não existe valor de K que assegure a estabilidade do sistema.

- A-5-9.** Considere-se a equação característica dada por

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (5-37)$$

O critério de estabilidade de Hurwitz, apresentado a seguir, fornece condições para que todas as raízes possuam parte real negativa, em função dos coeficientes do polinômio. Conforme assinalado nas discussões da Seção 5-5 sobre o critério de estabilidade de Routh, para que todas as raízes possuam parte real negativa todos os coeficientes a_i devem ser positivos. Esta é uma condição necessária mas não suficiente. Se esta condição não for satisfeita, fica indicado que algumas das raízes podem ter parte real positiva, serem imaginárias ou iguais a zero. Uma condição suficiente para que todas as raízes possuam partes reais negativas é dada pelo seguinte critério de estabilidade de Hurwitz: Se todos os coeficientes do polinômio forem positivos, arranjam-se os coeficientes no seguinte determinante:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_n & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & a_{n-2} & a_n & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & a_{n-3} & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-4} & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}$$

onde se substitui a_i por zero, para $s > n$. Para que todas as raízes possuam parte real positiva, é necessário e suficiente que os menores principais sucessivos de Δ_n sejam positivos. Os menores principais sucessivos são os seguintes determinantes:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \cdots & a_{2i-1} \\ a_0 & a_2 & \cdots & a_{2i-2} \\ 0 & a_1 & \cdots & a_{2i-3} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_i \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

onde $a_s = 0$ para $s > n$. (Nota-se que algumas das condições para os determinantes de ordem inferior estão incluídas nas condições para os determinantes de maior ordem.) Se todos estes determinantes forem positivos e se $a_0 > 0$, como admitido anteriormente, o estado de equilíbrio cuja equação característica é dada pela Eq. (5-37) é assintoticamente estável. Observe-se que os valores exatos

dos determinantes não são necessários; em vez disto, somente o sinal destes determinantes é necessário para o critério de estabilidade.

Considere-se, agora, a seguinte equação característica:

$$a_0s^4 + a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s + a_4 = 0$$

Obter a condição de estabilidade usando o critério de Hurwitz.

Solução. A condição para se ter estabilidade é que todos os coeficientes sejam positivos e que

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_0a_3 > 0$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1(a_2a_3 - a_1a_4) - a_0a_3^2 \\ &= a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_1^2a_4 > 0 \end{aligned}$$

É evidente que, se todos os valores de a_i forem positivos e se a condição $\Delta_3 > 0$ for satisfeita, a condição $\Delta_2 > 0$ também será atendida. Em consequência, para que todas as raízes da equação característica possuam parte real negativa, é necessário e suficiente que todos os valores dos coeficientes a_i sejam positivos e que $\Delta_3 > 0$.

A-5-10. Mostrar que os critérios de estabilidade de Routh e de Hurwitz são equivalentes.

Solução. Escrevendo-se os determinantes de Hurwitz sob forma triangular

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{ii} \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

onde os elementos abaixo da diagonal são todos nulos e os elementos acima da diagonal são quaisquer valores, então as condições de Hurwitz para estabilidade assintótica se tornam

$$\Delta_i = a_{11}a_{22} \cdots a_{ii} > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

que são equivalentes às condições

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad \dots, \quad a_{nn} > 0$$

Será mostrado que estas condições são equivalentes a

$$a_1 > 0, \quad b_1 > 0, \quad c_1 > 0, \quad \dots$$

onde a_1, b_1, c_1, \dots são os elementos da primeira coluna do arranjo de Routh.

Considere-se, por exemplo, o seguinte determinante de Hurwitz, que corresponde a $n = 4$:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}$$

O determinante permanece inalterado se k vezes a j -ésima linha for subtraída da i -ésima linha. Subtraindo-se da segunda linha a_0/a_1 vezes a primeira linha, obtém-se

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_3 & a_5 & a_7 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}$$

onde

$$a_{11} = a_1$$

$$a_{22} = a_2 - \frac{a_0}{a_1} a_3$$

$$a_{23} = a_4 - \frac{a_0}{a_1} a_5$$

$$a_{24} = a_6 - \frac{a_0}{a_1} a_7$$

De modo semelhante, subtraindo-se da quarta linha a_0/a_1 vezes a terceira linha, tem-se

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_3 & a_5 & a_7 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & 0 & \hat{a}_{43} & \hat{a}_{44} \end{vmatrix}$$

onde

$$\hat{a}_{43} = a_2 - \frac{a_0}{a_1} a_3$$

$$\hat{a}_{44} = a_4 - \frac{a_0}{a_1} a_5$$

Em seguida, subtraindo-se da terceira linha a_1/a_{22} vezes a segunda linha vem

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_3 & a_5 & a_7 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & \hat{a}_{43} & \hat{a}_{44} \end{vmatrix}$$

em que

$$a_{33} = a_3 - \frac{a_1}{a_{22}} a_{23}$$

$$a_{34} = a_5 - \frac{a_1}{a_{22}} a_{24}$$

Finalmente, subtraindo-se da última linha \hat{a}_{43}/a_{33} vezes a terceira linha, vem:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_3 & a_5 & a_7 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

onde

$$a_{44} = \hat{a}_{44} - \frac{\hat{a}_{43}}{a_{33}} a_{34}$$

Desta análise observa-se que

$$\Delta_4 = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$$

$$\Delta_3 = a_{11} a_{22} a_{33}$$

$$\Delta_2 = a_{11} a_{22}$$

$$\Delta_1 = a_{11}$$

As condições de Hurwitz para estabilidade assintótica

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0, \quad \Delta_4 > 0, \quad \dots$$

se reduzem às condições

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad a_{33} > 0, \quad a_{44} > 0, \quad \dots$$

O arranjo de Routh para o polinômio

$$a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0$$

em que $a_0 > 0$ é dado por

$$\begin{array}{ccc} a_0 & a_2 & a_4 \\ a_1 & a_3 & \\ b_1 & b_2 & \\ c_1 & & \\ d_1 & & \end{array}$$

A partir deste arranjo de Routh, observa-se que

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_1 \\ a_{22} &= a_2 - \frac{a_0}{a_1} a_3 = b_1 \\ a_{33} &= a_3 - \frac{a_1}{a_2} a_{23} = \frac{a_3 b_1 - a_1 b_2}{b_1} = c_1 \\ a_{44} &= \hat{a}_{44} - \frac{\hat{a}_{43}}{a_{33}} a_{34} = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{c_1} = d_1 \end{aligned}$$

Assim, as condições de Hurwitz para estabilidade assintótica se tornam

$$a_1 > 0, \quad b_1 > 0, \quad c_1 > 0, \quad d_1 > 0, \quad \dots$$

Foi demonstrado, assim, que as condições de Hurwitz para estabilidade assintótica podem ser reduzidas às condições de estabilidade assintótica de Routh. O mesmo argumento pode ser estendido aos determinantes de Hurwitz, de qualquer ordem, e se pode estabelecer a equivalência entre os critérios de estabilidade de Routh e de Hurwitz.

A-5-11. Mostrar que a primeira coluna do arranjo de Routh relativo a

$$s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

é dado por

$$1, \quad \Delta_1, \quad \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \quad \dots, \quad \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

onde

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{2r-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & a_r \end{vmatrix}$$

$$a_k = 0 \quad \text{se } k > n$$

Solução. O arranjo de coeficientes de Routh tem a forma

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & a_n \\ a_1 & a_3 & a_5 & \dots & & \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & & \\ c_1 & c_2 & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \end{array}$$

O primeiro termo da primeira coluna da tabela de Routh é 1. O próximo termo da primeira coluna é a_1 , que é igual a Δ_1 . O termo seguinte é b_1 , que é igual a

$$\frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$$

O termo que se segue, na primeira coluna é c_1 que é igual a

$$\begin{aligned} \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} &= \frac{\left[\frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1} \right] a_3 - a_1 \left[\frac{a_1 a_4 - a_5}{a_1} \right]}{\left[\frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1} \right]} \\ &= \frac{a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 + a_1 a_5}{a_1 a_2 - a_3} \\ &= \frac{\Delta_3}{\Delta_2} \end{aligned}$$

Os demais termos da primeira coluna da tabela de Routh podem ser obtidos de forma similar.

O arranjo tabular de Routh tem a seguinte propriedade: os últimos termos não-nulos de qualquer coluna são iguais, isto é, se o arranjo for dado por

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \\ c_1 & c_2 & c_3 & \\ d_1 & d_2 & & \\ e_1 & e_2 & & \\ f_1 & & & \\ g_1 & & & \end{array}$$

então,

$$a_7 = c_3 = e_2 = g_1$$

e se o arranjo tabular for dado por

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \\ c_1 & c_2 & 0 & \\ d_1 & d_2 & & \\ e_1 & 0 & & \\ f_1 & & & \end{array}$$

então

$$a_6 = b_3 = d_2 = f_1$$

Em qualquer caso, o último termo da primeira coluna é igual a a_n ou

$$a_n = \frac{\Delta_{n-1} a_n}{\Delta_{n-1}} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

Por exemplo, se $n = 4$, então

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = \Delta_3 a_4$$

Assim, foi mostrado que a primeira coluna do arranjo tabular de Routh é dada por

$$1, \quad \Delta_1, \quad \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \quad \dots, \quad \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

- A-5-12.** O valor da constante de um gás pode ser determinado, para qualquer gás, a partir de observações experimentais precisas dos valores simultâneos de p , v e T .

Obter a constante de gás R_{ar} para o ar. Note-se que a 32°F e sob 14,7 psia o volume específico do ar é 12,39 ft³/lb. Em seguida, obter a capacidade de um recipiente de pressão de 20 ft³ que contém ar a 160°F. Admitir que o processo de expansão seja isotérmico.

Solução.

$$R_{ar} = \frac{pV}{T} = \frac{14,7 \times 144 \times 12,39}{460 + 32} = 53,3 \text{ ft-lb/lb } ^\circ\text{R}$$

Com base na Eq. (5-12), a capacidade de um recipiente de 20 ft³ é

$$C = \frac{V}{nR_{ar} T} = \frac{20}{1 \times 53,3 \times 620} = 6,05 \times 10^{-4} \frac{\text{lb}}{\text{lb}_f/\text{ft}^2}$$

Note-se que, em unidades do Sistema Internacional (SI), o valor de R_{ar} é dado por

$$R_{ar} = 287 \text{ N-m/kg K}$$

- A-5-13.** A Fig. 5-67 é um diagrama esquemático de uma válvula pneumática de diafragma. Em estado estacionário, a pressão de controle proveniente de um controlador é \bar{P}_c , a pressão na válvula é também \bar{P}_c e o posicionamento da haste da válvula é \bar{X} . Supõe-se que no instante $t = 0$ o valor da pressão de controle muda de \bar{P}_c para $\bar{P}_c + p_c$. Em consequência, o valor da pressão na válvula muda de \bar{P}_c para $\bar{P}_c + p_v$. A variação p_v na pressão da válvula acarreta uma mudança no valor do posicionamento da haste da válvula de \bar{X} para $\bar{X} + x$. Obter a função de transferência entre uma variação x no posicionamento da haste e uma variação p_c na pressão de controle.

Solução. Defina-se como q a vazão de ar aplicada à válvula de diafragma através da resistência R . Então

$$q = \frac{p_c - p_v}{R}$$

Para o ar no interior da câmara da válvula de diafragma, tem-se

$$C dp_v = q dt$$

Conseqüentemente,

$$C \frac{dp_v}{dt} = q = \frac{p_c - p_v}{R}$$

donde

$$RC \frac{dp_v}{dt} + p_v = p_c$$

Observando-se que

$$Ap_v = kx$$

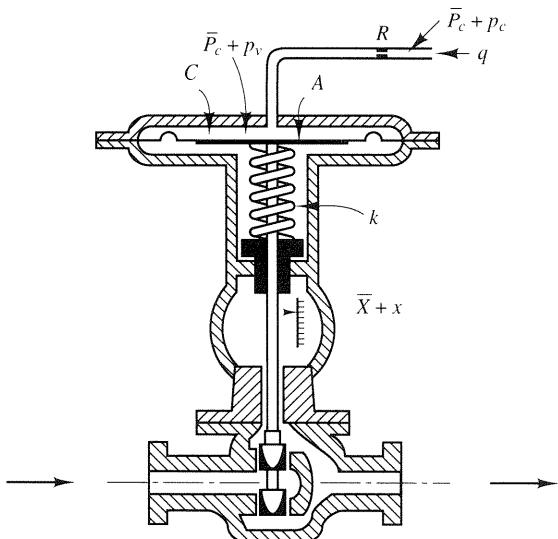


Fig. 5-67 Válvula pneumática de diafragma.

Tem-se

$$\frac{k}{A} \left(RC \frac{dx}{dt} + x \right) = p_c$$

A função de transferência entre x e p_c é

$$\frac{X(s)}{P_c(s)} = \frac{A/k}{RCs + 1}$$

- A-5-14.** No sistema pneumático de pressão da Fig. 5-68(a), admite-se que, para $t < 0$, o sistema se encontra em estado estacionário e que a pressão em todo o sistema é \bar{P} . Admite-se também que os dois foles são idênticos. Em $t = 0$, o valor da pressão de entrada muda de \bar{P} para $\bar{P} + p_i$. Então os valores das pressões nos foles 1 e 2 mudam, respectivamente, de \bar{P} para $\bar{P} + p_1$ e $\bar{P} + p_2$. A capacidade (volume) de cada fole é $5 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ e a diferença de pressão operacional Δp (diferença entre p_i e p_1 ou entre p_i e p_2) fica situada entre os valores de $-0,5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ e $0,5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$. As correspondentes vazões de massa (kg/s) através das válvulas estão mostradas na Fig. 5-68(b). Admita-se que os foles se expandam ou se contraíam linearmente com as pressões de ar aplicadas a eles, que a constante de mola equivalente do sistema de foles seja $k = 1 \times 10^5 \text{ N/m}$, e que cada fole tenha uma área $A = 15 \times 10^{-4} \text{ m}^2$.

Definindo-se como x o deslocamento do ponto central da haste que conecta os dois foles, obter a função de transferência $X(s)/P_i(s)$. Admitir que o processo de expansão seja isotérmico e que a temperatura de todo o sistema permaneça em 30°C .

Solução. Com base na Seção 5-6, pode-se obter a função de transferência $P_i(s)/P_i(s)$ como sendo

$$\frac{P_i(s)}{P_i(s)} = \frac{1}{R_1 Cs + 1} \quad (5-38)$$

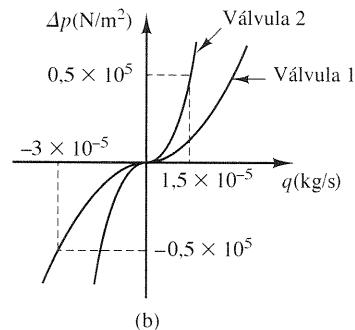
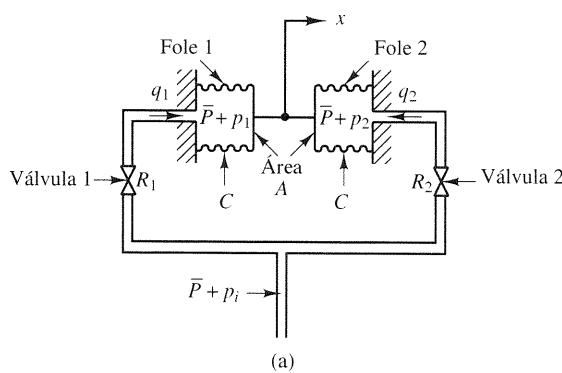


Fig. 5-68 (a) Sistema pneumático de pressão; (b) curva de pressão diferencial versus vazão de massa.

De maneira semelhante, a função de transferência $P_2(s)/P_i(s)$ é

$$\frac{P_2(s)}{P_i(s)} = \frac{1}{R_2Cs + 1} \quad (5-39)$$

A força atuante sobre o fole 1 na direção x é $A(\bar{P} + p_1)$, e a força atuante no fole 2 na direção negativa de x é $A(\bar{P} + p_2)$. A força resultante se equilibra com o valor kx , força de mola equivalente devida à parte corrugada dos foles.

$$A(p_1 - p_2) = kx$$

ou

$$A[P_1(s) - P_2(s)] = kX(s) \quad (5-40)$$

Com base nas Eqs. (5-38) e (5-39), constata-se que

$$\begin{aligned} P_1(s) - P_2(s) &= \left(\frac{1}{R_1Cs + 1} - \frac{1}{R_2Cs + 1} \right) P_i(s) \\ &= \frac{R_2Cs - R_1Cs}{(R_1Cs + 1)(R_2Cs + 1)} P_i(s) \end{aligned}$$

Substituindo-se esta última expressão na Eq. (5-40), reescrevendo-a, obtém-se a função de transferência $X(s)/P_i(s)$ como sendo

$$\frac{X(s)}{P_i(s)} = \frac{A}{k} \frac{(R_2C - R_1C)s}{(R_1Cs + 1)(R_2Cs + 1)} \quad (5-41)$$

Os valores numéricos médios das resistências R_1 e R_2 são

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{d\Delta p}{dq_1} = \frac{0,5 \times 10^5}{3 \times 10^{-5}} = 0,167 \times 10^{10} \frac{\text{N/m}^2}{\text{kg/s}} \\ R_2 &= \frac{d\Delta p}{dq_2} = \frac{0,5 \times 10^5}{1,5 \times 10^{-5}} = 0,333 \times 10^{10} \frac{\text{N/m}^2}{\text{kg/s}} \end{aligned}$$

O valor numérico da capacidade C de cada um dos foles é

$$C = \frac{V}{nR_{ar}T} = \frac{5 \times 10^{-4}}{1 \times 287 \times (273 + 30)} = 5,75 \times 10^{-9} \frac{\text{kg}}{\text{N/m}^2}$$

em que $R_{ar} = 287 \text{ N}\cdot\text{m/kg K}$. (Ver Problema A-5-12.) Conseqüentemente,

$$R_1C = 0,167 \times 10^{10} \times 5,75 \times 10^{-9} = 9,60 \text{ s}$$

$$R_2C = 0,333 \times 10^{10} \times 5,75 \times 10^{-9} = 19,2 \text{ s}$$

Substituindo os valores numéricos de A , k , R_1C e R_2C na Eq. (5-41), obtém-se

$$\frac{X(s)}{P_i(s)} = \frac{1,44 \times 10^{-7}s}{(9,6s + 1)(19,2s + 1)}$$

- A-5-15.** Esboçar um diagrama de blocos do controlador pneumático mostrado na Fig. 5-69. Obter, em seguida, a função de transferência deste controlador.

Se a resistência R_d for removida (substituída por um pedaço de tubulação com o mesmo diâmetro da linha) que tipo de ação de controle será obtido? Removendo-se a restrição R_i (substituição por um tubo de diâmetro igual ao da linha pneumática), que tipo de ação de controle será obtido?

Solução. Seja \bar{X} a distância bocal-palheta quando $e = 0$ e a pressão do controlador for igual a \bar{P}_c . Na presente análise, serão considerados pequenos desvios, definidos a seguir, a partir dos respectivos valores de referência:

e = sinal de erro (valor pequeno)

x = pequena mudança no valor da distância bocal-palheta

p_c = pequena mudança no valor da pressão de controle

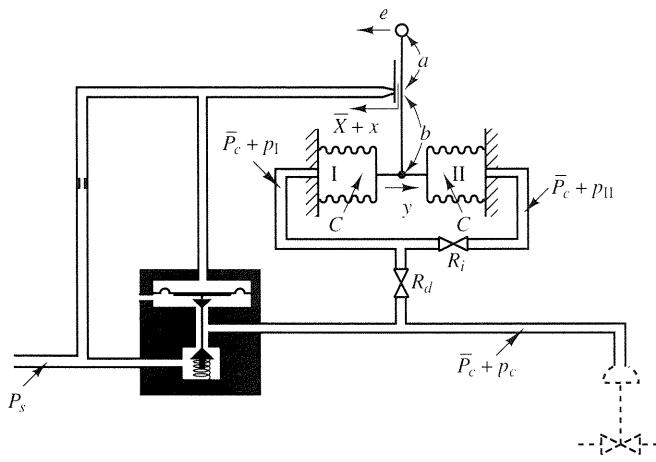


Fig. 5-69 Diagrama esquemático de um controlador pneumático.

p_i = pequena mudança no valor da pressão no interior do fole I, devida a uma pequena mudança no valor da pressão de controle

p_{II} = pequena mudança no valor da pressão no interior do fole II, devida a uma pequena mudança no valor da pressão de controle

y = pequeno deslocamento da extremidade inferior da palheta

Neste controlador, p_c é transmitida ao fole I através da restrição R_d . De modo semelhante, a pressão p_c é transmitida ao fole II através das restrições em série R_d e R_r . Uma relação aproximada entre p_i e p_c é

$$\frac{P_I(s)}{P_c(s)} = \frac{1}{R_d C s + 1} = \frac{1}{T_d s + 1}$$

onde $T_d = R_d C$ = tempo derivativo. De modo análogo, p_u e p_i são relacionadas através da função de transferência

$$\frac{P_{II}(s)}{P_I(s)} = \frac{1}{R_i Cs + 1} = \frac{1}{T_i s + 1}$$

onde $T_i = R_i C$ = tempo integral. A equação de equilíbrio de forças para os dois foles é

$$(p_I - p_{II})A = k_s y$$

onde k_s é a rigidez dos dois foles conectados e A é a área da seção reta dos foles. A relação entre as variáveis e , x e y é

$$x = \frac{b}{a+b} e - \frac{a}{a+b} y$$

A relação entre p_c e x é

$$p_c = Kx \quad (K > 0)$$

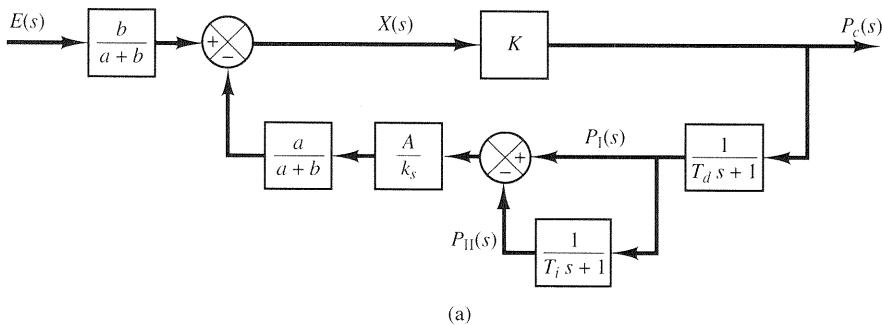
A partir das equações que acabam de ser obtidas, pode ser esboçado o diagrama de blocos mostrado na Fig. 5-70(a). A simplificação deste diagrama de blocos resulta na Fig. 5-70(b).

A função de transferência entre $P_c(s)$ e $E(s)$ é

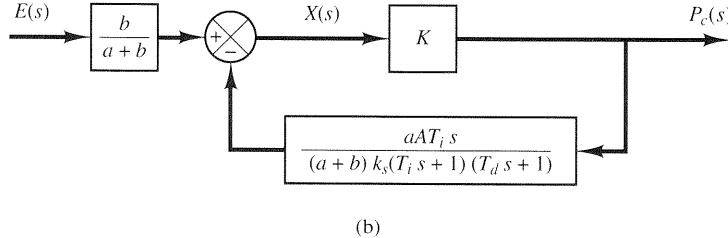
$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\frac{b}{a+b}K}{1 + K \frac{a}{a+b} \frac{A}{k_s} \left(\frac{T_i s}{T_i s + 1} \right) \left(\frac{1}{T_d s + 1} \right)}$$

Para um controlador prático, sob condições normais de operação, $|KaAT_s/(a + b)k_s(T_i s + 1)(T_d s + 1)|$ é muito maior que a unidade e $T_i \gg T_d$. Assim, a função de transferência pode ser simplificada como a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{P_c(s)}{E(s)} &\doteq \frac{bk_s(T_i s + 1)(T_d s + 1)}{a A T_i s} \\ &= \frac{bk_s}{a A} \left(\frac{T_i + T_d}{T_i} + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \\ &\doteq K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \end{aligned}$$



(a)



(b)

Fig. 5-70 (a) Diagrama de blocos do controlador pneumático mostrado na Fig. 5-69; (b) diagrama de blocos simplificado.

onde

$$K_p = \frac{bk_s}{aA}$$

Assim, o controlador mostrado na Fig. 5-69 é do tipo proporcional-integral-derivativo.

Se a restrição R_d for suprimida, ou seja $R_d = 0$, a ação de controle se transforma na de um controlador proporcional-integral.

Se a restrição R_i for removida, isto é, se $R_i = 0$, a ação de controle se torna a de um controlador proporcional de banda estreita, ou controlador de duas posições. (Note-se que as ações dos dois foles de retroação se cancelam mutuamente e inexiste retroação.)

- A-5-16.** Em virtude das tolerâncias de fabricação, as válvulas de carretel reais ou são do tipo sobreposta ou do tipo subposta. Considerem-se as válvulas de carretel sobreposta e subposta mostradas na Fig. 5-71(a) e (b). Esboçar curvas relacionando a área A descoberta no acesso em função do deslocamento x do carretel.

Solução. Para a válvula do tipo sobreposta, existe uma zona morta entre $-\frac{1}{2}x_0$ e $-\frac{1}{2}x_0$, ou seja, para $-\frac{1}{2}x_0 < x < \frac{1}{2}x_0$. A curva relacionando a área exposta A versus deslocamento x é mostrada na Fig. 5-72(a). Tal válvula sobreposta é inadequada como válvula de controle.

Para a válvula do tipo subposta, a curva relacionando área exposta A versus deslocamento x é mostrada na Fig. 5-72(b). A curva efetiva para a região subposta apresenta uma inclinação maior, significando uma maior sensibilidade. As válvulas de carretel usadas para controle são, usualmente, do tipo subposta.

- A-5-17.** A Fig. 5-73 mostra um controlador hidráulico com bocal de jato. O fluido hidráulico é ejetado através do bocal. Se este for deslocado da posição neutra para a direita, o êmbolo se movimenta para a esquerda e vice-versa. A válvula do tipo bocal de jato não é tão usada como a do tipo bocal-palhetas em função de sua maior vazão de nulo, de sua resposta mais lenta e de outras características de imprevisibilidade. Sua principal vantagem consiste na insensibilidade a fluidos sujos.

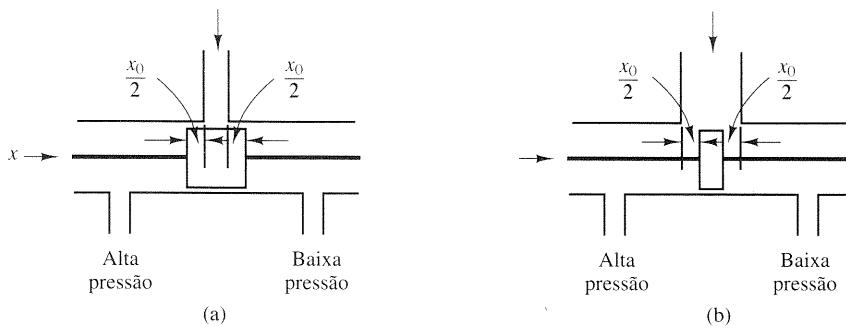


Fig. 5-71 (a) Válvula de carretel do tipo sobreposta; (b) válvula de carretel do tipo subposta.

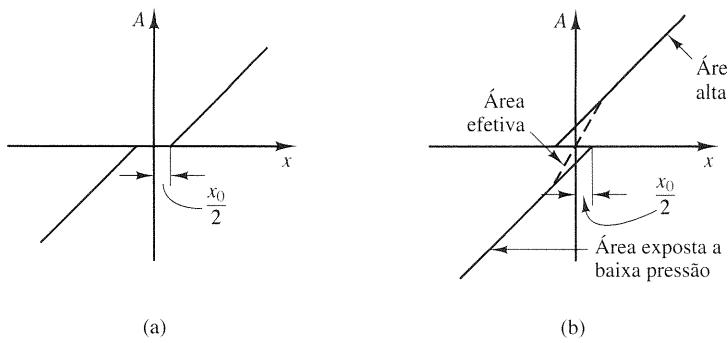


Fig. 5-72 (a) Curva da área A não-coberta versus deslocamento x para uma válvula do tipo sobreposta; (b) curva da área A não-coberta versus deslocamento x para uma válvula do tipo subposta.

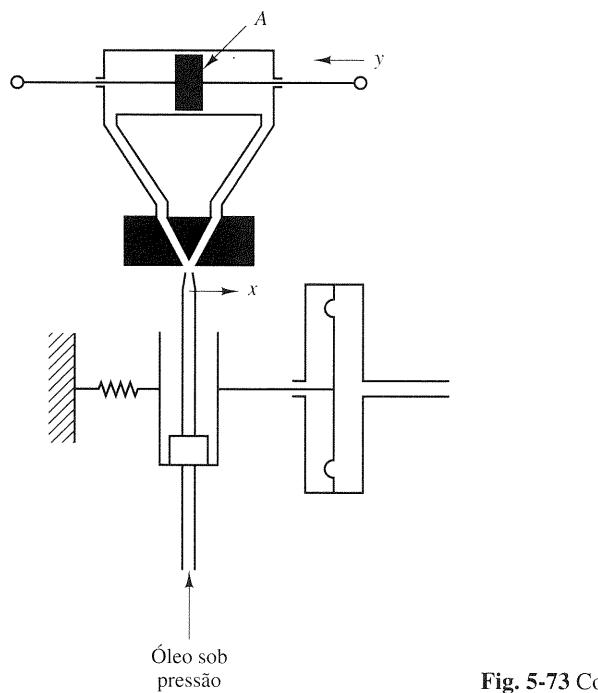


Fig. 5-73 Controlador hidráulico do tipo bocal de jato.

Suponha-se que o êmbolo de potência seja conectado a uma carga leve de tal sorte que a força de inércia seja insignificante em comparação com a força hidráulica desenvolvida pelo êmbolo de potência. Que tipo de ação de controle é produzida por este controlador?

Solução. Definam-se como x o deslocamento do bocal de jato em relação à posição neutra e como y o deslocamento do êmbolo de potência. Se o bocal de jato for movimentado para a direita de um pequeno deslocamento x , o óleo flui para o lado direito do êmbolo de potência e o óleo existente no lado esquerdo do êmbolo flui em direção ao dreno. O óleo que entra no cilindro de potência está sob alta pressão; o óleo que escoa do cilindro de potência para o dreno está a baixa pressão. A diferença de pressão resultante ocasiona o movimento do êmbolo de potência para a esquerda.

Para pequenos deslocamentos x do bocal de jato, a vazão q para o cilindro de potência é proporcional a x , isto é,

$$q = K_F x$$

Para o cilindro de potência,

$$A\rho dy = q dt$$

onde A é a área do êmbolo de potência e ρ é a densidade do óleo. Assim

$$\frac{dy}{dt} = \frac{q}{A\rho} = \frac{K_F}{A\rho} x = Kx$$

onde $K = K_F/A\rho = \text{constante}$. A função de transferência $Y(s)/X(s)$ é, por conseguinte,

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s}$$

O controlador produz uma ação de controle integral.

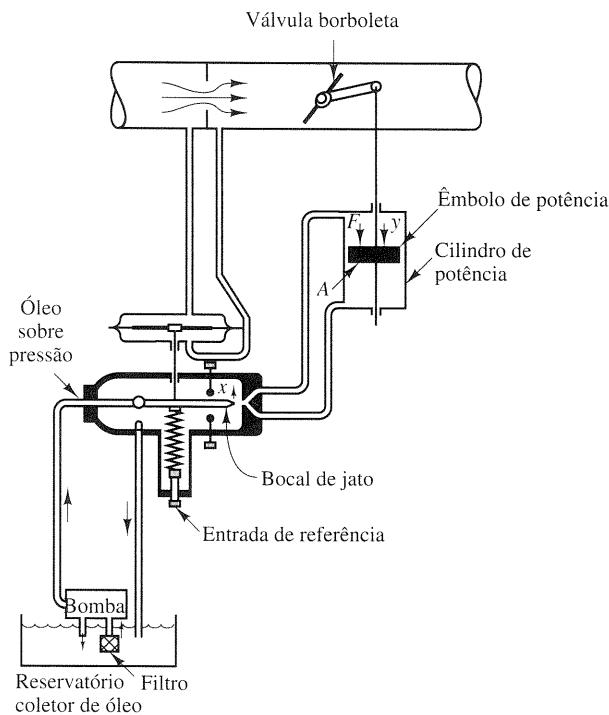


Fig. 5-74 Diagrama esquemático de um sistema de controle de vazão usando um controlador hidráulico do tipo bocal de jato.

- A-5-18.** A Fig. 5-74 mostra um controlador hidráulico com bocal de jato aplicado a um sistema de controle de vazão. O controlador de bocal governa a posição da válvula borboleta. Discutir a operação do sistema. Traçar uma curva possível de relacionar o deslocamento x do bocal de jato e a força total atuando sobre o êmbolo de potência.

Solução. A operação deste sistema é a seguinte: a vazão é medida pela placa de orifício e a diferença de pressão produzida pelo orifício é transmitida ao diafragma do dispositivo medidor de pressão. O diafragma está conectado a um bocal oscilante, ou bocal de jato, através de um sistema de articulação. O óleo sob alta pressão é ejetado continuamente através do bocal. Quando o bocal se encontra na posição neutra, não há escoamento de óleo por nenhuma das tubulações que movem o êmbolo de potência. Se o bocal for deslocado pelo movimento do braço de alavanca para um dos lados, o óleo sob alta pressão fluirá através da tubulação correspondente e o óleo existente no cilindro de potência fluirá de volta para o reservatório coletor de óleo através da outra tubulação.

Admita-se que o sistema esteja inicialmente em repouso. Se o sinal de entrada de referência for mudado instantaneamente para um maior valor de vazão, então o bocal se move num sentido tal que ocasiona o deslocamento do êmbolo de potência para abrir a válvula borboleta. Em consequência disto, a vazão aumenta, a diferença de pressão na placa de orifício se torna maior e o bocal se moverá de volta à posição neutra. O movimento do êmbolo de potência será interrompido quando o deslocamento x do bocal corresponder à volta e à permanência deste à posição neutra. (O controlador de bocal de jato possui, assim, uma propriedade de integrador.)

A relação entre a força líquida F atuante sobre o êmbolo de potência e o deslocamento x do bocal está mostrada na Fig. 5-75. A força resultante é igual à diferença de pressão ΔP através do êmbolo vezes a área deste. Para um pequeno deslocamento x do bocal, a força F e o deslocamento x podem ser considerados proporcionais.

- A-5-19.** Explicar a operação do sistema de controle de velocidade mostrado na Fig. 5-76.

Solução. Se a velocidade do motor aumenta, a luva do regulador de esferas se move para cima. Este movimento funciona como o sinal de entrada para o controlador hidráulico. Um sinal de erro positivo (movimento da luva para cima) acarreta o movimento do êmbolo de

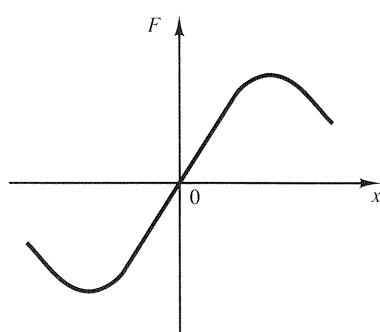


Fig. 5-75 Curva força versus deslocamento.

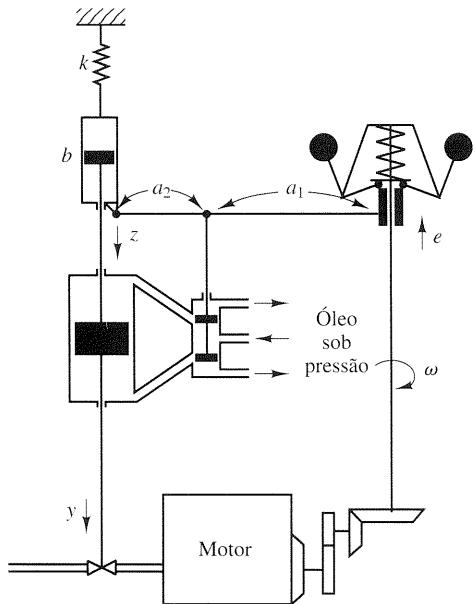


Fig. 5-76 Sistema de controle de velocidade.

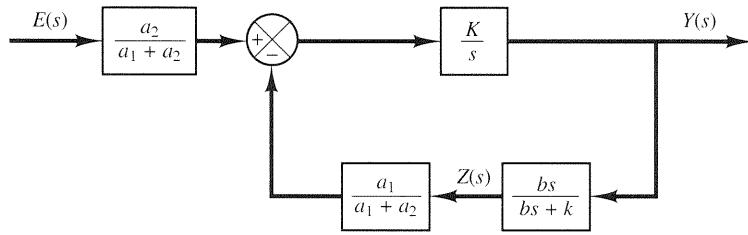


Fig. 5-77 Diagrama de blocos do sistema de controle de velocidade mostrado na Fig. 5-76.

potência para baixo, a redução da abertura da válvula de combustível e a redução da velocidade do motor. Um diagrama de blocos do sistema é mostrado na Fig. 5-77.

A partir do diagrama de blocos pode-se obter a função de transferência $Y(s)/E(s)$ como sendo

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{a_2}{a_1 + a_2} \frac{\frac{K}{s}}{1 + \frac{a_1}{a_1 + a_2} \frac{bs}{bs + k} \frac{K}{s}}$$

Se for aplicável a seguinte condição

$$\left| \frac{a_1}{a_1 + a_2} \frac{bs}{bs + k} \frac{K}{s} \right| \gg 1$$

a função de transferência $Y(s)/E(s)$ se torna

$$\frac{Y(s)}{E(s)} \doteq \frac{a_2}{a_1 + a_2} \frac{a_1 + a_2}{a_1} \frac{bs + k}{bs} = \frac{a_2}{a_1} \left(1 + \frac{k}{bs} \right)$$

O controlador de velocidade apresenta uma ação de controle proporcional-integral.

- A-5-20.** Considere-se o servossistema hidráulico mostrado na Fig. 5-78. Admitindo-se que o sinal $e(t)$ seja a excitação e o deslocamento $y(t)$ a resposta do sistema, determinar a função de transferência $Y(s)/E(s)$.

Solução. Um diagrama de blocos para o sistema pode ser esboçado como consta na Fig. 5-79. Admitindo-se que as condições $|K_1 a_1/[s(a_1 + a_2)]| \gg 1$ e $|K_2 b_1/[s(b_1 + b_2)]| \gg 1$ sejam satisfeitas, obtém-se

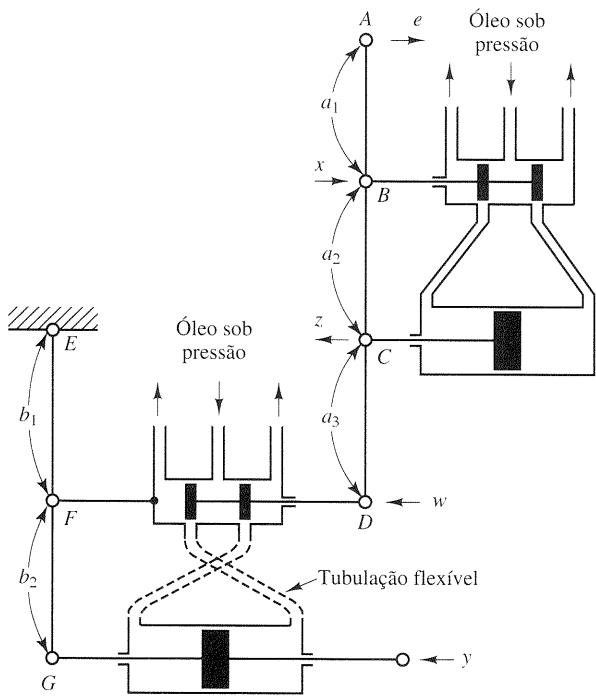


Fig. 5-78 Servossistema hidráulico.

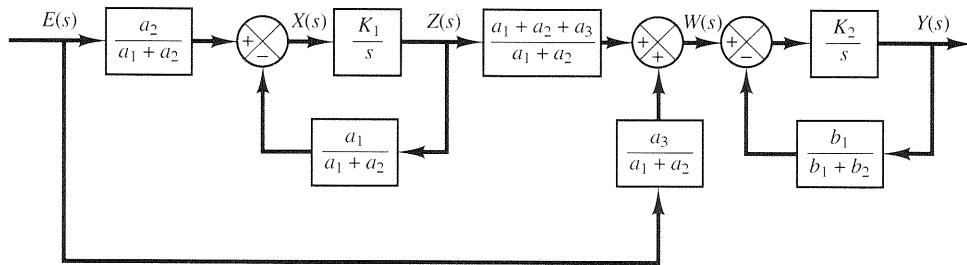


Fig. 5-79 Diagrama de blocos do sistema mostrado na Fig. 5-78.

$$\frac{Z(s)}{E(s)} = \frac{\frac{a_2}{a_1 + a_2} \cdot \frac{K_1}{s}}{1 + \frac{K_1}{s} \cdot \frac{a_1}{a_1 + a_2}} \doteq \frac{a_2}{a_1 + a_2} \cdot \frac{a_1 + a_2}{a_1} = \frac{a_2}{a_1}$$

$$\frac{W(s)}{E(s)} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_1 + a_2} \cdot \frac{Z(s)}{E(s)} + \frac{a_3}{a_1 + a_2} = \frac{a_2 + a_3}{a_1}$$

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{\frac{K_2}{s}}{1 + \frac{b_1}{b_1 + b_2} \frac{K_2}{s}} \doteq \frac{b_1 + b_2}{b_1}$$

Assim,

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{Y(s)}{W(s)} \cdot \frac{W(s)}{E(s)} = \frac{(a_2 + a_3)(b_1 + b_2)}{a_1 b_1}$$

O servossistema é um controlador proporcional.

- A-5-21.** Obter a função de transferência $E_o(s)/E_i(s)$ do circuito com amplificador operacional mostrado na Fig. 5-80.

Solução. Seja, por definição, e_A a tensão no ponto A. Então,

$$\frac{E_A(s)}{E_i(s)} = \frac{R_1}{\frac{1}{Cs} + R_1} = \frac{R_1 Cs}{R_1 Cs + 1}$$

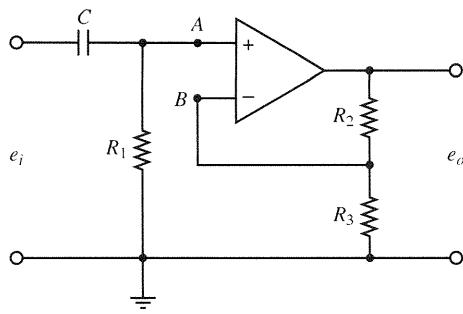


Fig. 5-80 Circuito com amplificador operacional.

Seja, por definição, e_B a tensão no ponto B . Então

$$E_B(s) = \frac{R_3}{R_2 + R_3} E_o(s)$$

Observando-se que

$$[E_A(s) - E_B(s)]K = E_o(s)$$

e $K \gg 1$, deve-se ter

$$E_A(s) = E_B(s)$$

Assim,

$$E_A(s) = \frac{R_1 Cs}{R_1 Cs + 1} E_i(s) = E_B(s) = \frac{R_3}{R_2 + R_3} E_o(s)$$

de onde se obtém

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_2 + R_3}{R_3} \frac{R_1 Cs}{R_1 Cs + 1} = \frac{\left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right)s}{s + \frac{1}{R_1 C}}$$

A-5-22. Obter a função de transferência $E_o(s)/E_i(s)$ relativa ao circuito com amplificadores operacionais mostrado na Fig. 5-81.

Solução. A tensão elétrica no ponto A é

$$e_A = \frac{1}{2} (e_i - e_o) + e_o$$

A versão desta equação no domínio da transformada de Laplace é

$$E_A(s) = \frac{1}{2} [E_i(s) + E_o(s)]$$

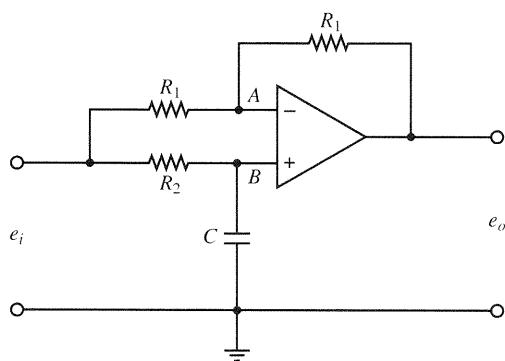


Fig. 5-81 Circuito com amplificador operacional.

A tensão elétrica no ponto B é

$$E_B(s) = \frac{\frac{1}{Cs}}{R_2 + \frac{1}{Cs}} E_i(s) = \frac{1}{R_2 Cs + 1} E_i(s)$$

Como $[E_b(s) - E_o(s)]K = E_o(s)$ e $K \gg 1$, deve-se ter $E_o(s) = E_b(s)$. Assim,

$$\frac{1}{2} [E_i(s) + E_o(s)] = \frac{1}{R_2 Cs + 1} E_i(s)$$

Em consequência,

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{R_2 Cs - 1}{R_2 Cs + 1} = -\frac{s - \frac{1}{R_2 C}}{s + \frac{1}{R_2 C}}$$

A-5-23. Seja o sistema de controle com retroação unitária e estável cuja função de transferência do canal direto é $G(s)$. Suponha-se que a função de transferência a malha fechada possa ser escrita sob a forma

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots (T_m s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1)} \quad (m \leq n)$$

Mostrar que

$$\int_0^\infty e(t) dt = (T_1 + T_2 + \cdots + T_n) - (T_a + T_b + \cdots + T_m)$$

sendo $e(t)$ o erro a uma solicitação em degrau unitário. Mostrar, também, que

$$\frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s G(s)} = (T_1 + T_2 + \cdots + T_n) - (T_a + T_b + \cdots + T_m)$$

Solução. Seja, por definição,

$$(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots (T_m s + 1) = P(s)$$

e

$$(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1) = Q(s)$$

Então

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

e

$$E(s) = \frac{Q(s) - P(s)}{Q(s)} R(s)$$

Para uma excitação em degrau unitário $R(s) = 1/s$ e

$$E(s) = \frac{Q(s) - P(s)}{s Q(s)}$$

Como o sistema é estável, $\int_0^\infty e(t) dt$ converge para um valor constante. Com base na Tabela 2-2 (item 10), tem-se

$$\int_0^\infty e(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{E(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} E(s)$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e(t) dt &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Q(s) - P(s)}{sQ(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Q'(s) - P'(s)}{Q(s) + sQ'(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} [Q'(s) - P'(s)]\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow 0} P'(s) &= T_a + T_b + \cdots + T_m \\ \lim_{s \rightarrow 0} Q'(s) &= T_1 + T_2 + \cdots + T_n\end{aligned}$$

tem-se

$$\int_0^\infty e(t) dt = (T_1 + T_2 + \cdots + T_n) - (T_a + T_b + \cdots + T_m)$$

Para uma excitação $r(t)$ em degrau unitário, como

$$\int_0^\infty e(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)} \frac{1}{s} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)} = \frac{1}{K_v}$$

tem-se

$$\frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)} = (T_1 + T_2 + \cdots + T_n) - (T_a + T_b + \cdots + T_m)$$

Note-se que zeros no semiplano da esquerda (isto é, valores positivos de T_a, T_b, \dots, T_m) melhoram o valor de K_v . Pólos próximos da origem acarretam valores pequenos para a constante de erro de velocidade, a menos que existam zeros nas proximidades.

PROBLEMAS

B-5-1. Se o percurso direto de um sistema de controle contiver pelo menos um elemento integrador, então o sinal de saída continua a evoluir enquanto o erro estiver presente. O sinal de saída pára de evoluir quando o sinal de erro for exatamente igual a zero. Se uma perturbação externa for aplicada ao sistema, é desejável possuir um elemento integrador entre o elemento de medição do erro e o ponto de entrada da perturbação. Deste modo é possível anular, em regime estacionário, o efeito da perturbação.

Mostrar que, se a perturbação for uma função rampa, então o erro estacionário devido a esta perturbação só poderá ser eliminado se ao menos dois integradores precederem o ponto de inserção da perturbação.

B-5-2. Considerem-se os controladores industriais cujas ações de controle são proporcional, integral, proporcional-integral, proporcional-derivativa e proporcional-integral-derivativa. As funções de transferência destes controladores são dadas, respectivamente, por

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p (1 + T_d s)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

onde $U(s)$ é a transformada de Laplace de $u(t)$, sinal de saída do controlador, e $E(s)$ a transformada de Laplace de $e(t)$, sinal de erro atuante. Esboçar as curvas de $u(t)$ versus t para cada um dos cinco tipos de controlador quando o sinal de erro for:

- (a) $e(t) =$ função degrau unitário
(b) $e(t) =$ função rampa unitária

Ao esboçar as curvas, admita que os valores numéricos de K_p, K_i, T_i e T_d são dados

$$\begin{aligned}K_p &= \text{ganho proporcional} = 4 \\ K_i &= \text{ganho integral} = 2 \\ T_i &= \text{tempo integral} = 2 \text{ s} \\ T_d &= \text{tempo derivativo} = 0,8 \text{ s}\end{aligned}$$

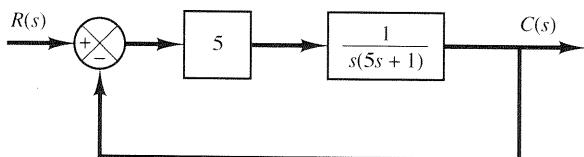
B-5-3. Seja o sistema de controle com retroação unitária cuja função de transferência a malha aberta é

$$G(s) = \frac{K}{s(Js + B)}$$

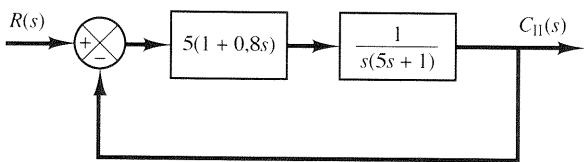
Discussir os efeitos dos valores de K e de B sobre o erro estacionário a uma excitação em rampa unitária. Esboçar curvas típicas de resposta à rampa unitária para valores pequenos, médios e grandes de K .

B-5-4. A Fig. 5-82 mostra três sistemas. O Sistema I é um servossistema de posição. O Sistema II é um servossistema com ação de controle PD. O Sistema III é um servossistema com retroação de velocidade. Comparar as respostas dos três sistemas a uma excitação em degrau unitário, em impulso unitário e em rampa unitária. Qual dos sistemas é melhor, no que tange a velocidade de resposta e valor máximo de ultrapassagem, na resposta a uma solicitação em degrau?

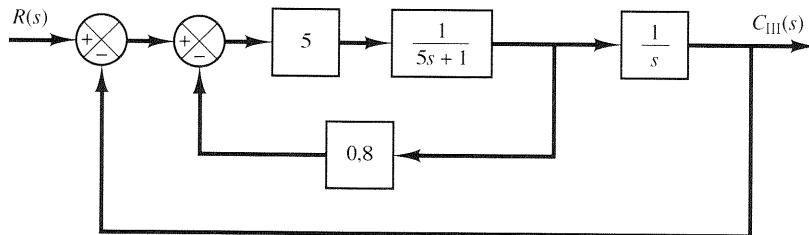
B-5-5. Considere-se o sistema de controle de posição mostrado na Fig. 5-83. Escrever um programa em MATLAB para obter a resposta do



Sistema I



Sistema II



Sistema III

Fig. 5-82 (a) Servossistema de posição; (b) servossistema de posição com ação de controle PD; (c) servossistema de posição com retroação de velocidade.

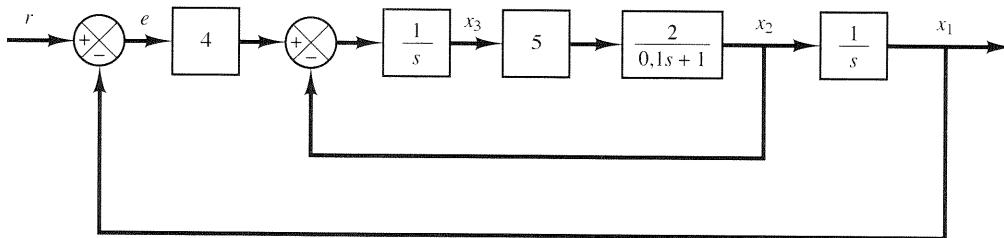


Fig. 5-83 Sistema de controle de posição.

sistema a uma excitação em degrau unitário e em rampa unitária. Traçar as curvas $x_1(t)$ versus t , $x_2(t)$ versus t , $x_3(t)$ versus t e $e(t)$ versus t [onde $e(t) = r(t) - x_1(t)$] para ambos os sinais de entrada, em degrau unitário e em rampa unitária.

B-5-6. Determinar a faixa de valores de K para estabilidade do sistema de controle com retroação unitária cuja função de transferência a malha aberta é

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

B-5-7. Considere-se o sistema de controle com retroação unitária com a seguinte função de transferência a malha aberta:

$$G(s) = \frac{10}{s(s-1)(2s+3)}$$

Este sistema é estável?

B-5-8. Seja o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$$

onde a matriz \mathbf{A} é dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -b_3 & 0 & 1 \\ 0 & -b_2 & -b_1 \end{bmatrix}$$

(\mathbf{A} é chamada matriz de Schwarz). Mostrar que a primeira coluna do arranjo tabular de Routh referente à equação característica $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ consiste em 1, b_1 , b_2 e $b_1 b_3$.

B-5-9. Considere-se o sistema pneumático mostrado na Fig. 5-84. Obter a função de transferência $X(s)/P_i(s)$.

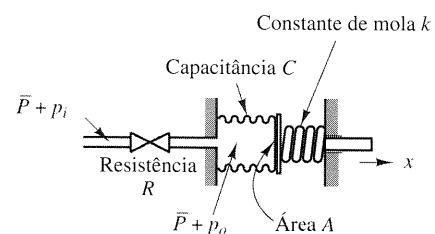


Fig. 5-84 Sistema pneumático.

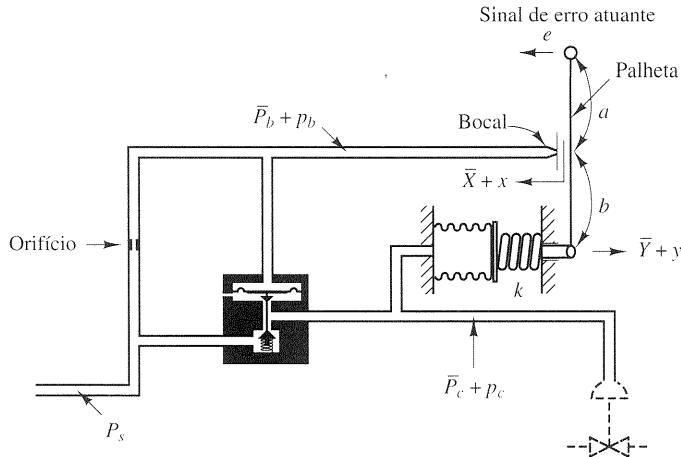


Fig. 5-85 Controlador pneumático.

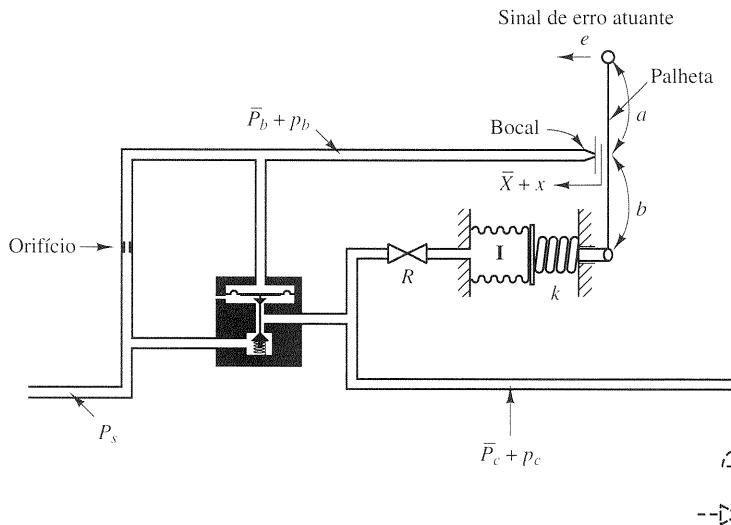


Fig. 5-86 Controlador pneumático.

B-5-10. A Fig. 5-85 mostra um controlador pneumático. Que tipo de ação de controle este controlador produz? Deduzir a função de transferência $P_c(s)/E(s)$.

B-5-11. Seja o controlador pneumático mostrado na Fig. 5-86. Admitindo-se que o relé pneumático possua características tais que $p_c = Kp_b$ (onde $K > 0$), determinar a lei de controle deste controlador. O sinal de entrada é e e o sinal de saída é p_c .

B-5-12. A Fig. 5-87 mostra um controlador pneumático. O sinal de entrada é e e o sinal de saída é a variação de pressão de controle p_c . Obter a função de transferência $P_c(s)/E(s)$. Admitir que o relé pneumático tenha características tais que $p_c = Kp_b$, onde $K > 0$.

B-5-13. Considere o controlador pneumático mostrado na Fig. 5-88. Qual a lei de controle produzida por este controlador? Admitir que o relé pneumático tenha características tais que $p_c = Kp_b$, onde $K > 0$.

B-5-14. A Fig. 5-89 mostra um transdutor eletropneumático. Mostrar que uma variação na pressão de saída é proporcional a uma variação na corrente de entrada.

B-5-15. A Fig. 5-90 mostra uma válvula de palhetas. Ela é colocada entre dois bocais opostos. Se a palhetas for ligeiramente deslocada para a direita, haverá um desequilíbrio de pressão nos bocais e o êmbolo de potência se deslocará para a esquerda e vice-versa. Tal dispositivo é freqüentemente usado em servos hidráulicos como primeiro estágio de servoválvulas de dois estágios. Esta utilização ocorre em virtude de haver

necessidade de se contar com forças consideráveis para mover o carretel de válvulas grandes. As forças de escoamento em regime permanente tendem a se opor ao movimento do carretel. Para reduzir ou compensar estas forças, emprega-se, com freqüência, a configuração de dois estágios. Uma válvula de palhetas ou de bocal de jato é utilizada como válvula de primeiro estágio para produzir a força necessária de acionamento do carretel existente no segundo estágio.

A Fig. 5-91 mostra um diagrama esquemático de um servomotor hidráulico no qual o sinal de erro é amplificado por meio de dois estágios, utilizando uma válvula de bocal de jato e uma válvula-piloto. Construir o diagrama de blocos do sistema da Fig. 5-91 e, em seguida, determinar a função de transferência entre y e x , onde x é a pressão do ar e y o deslocamento do êmbolo de potência.

B-5-16. A Fig. 5-92 é um diagrama esquemático do sistema de controle do profundor de uma aeronave. O sinal de entrada do sistema é uma deflexão angular θ da manete de controle e o sinal de saída é o ângulo de elevação ϕ . Admitir que os ângulos θ e ϕ são relativamente pequenos. Mostrar que para cada valor de ângulo θ da manete de controle existe um valor correspondente (estacionário) do ângulo ϕ do profundor.

B-5-17. Seja o sistema de controle mostrado na Fig. 5-93. O sinal de entrada é a pressão de ar p_i e o sinal de saída é o deslocamento y do êmbolo de potência. Obter a função de transferência $Y(s)/P_i(s)$.

B-5-18. Obter a função de transferência $E_y(s)/E_x(s)$ do circuito com amplificadores operacionais mostrado na Fig. 5-94.

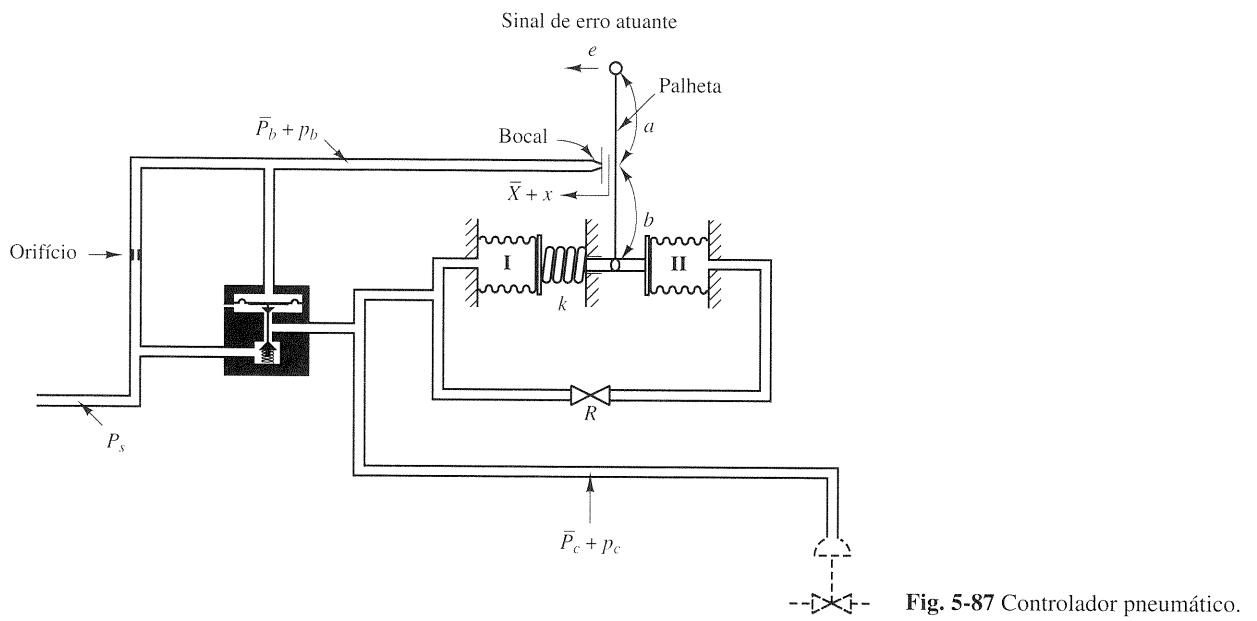


Fig. 5-87 Controlador pneumático.

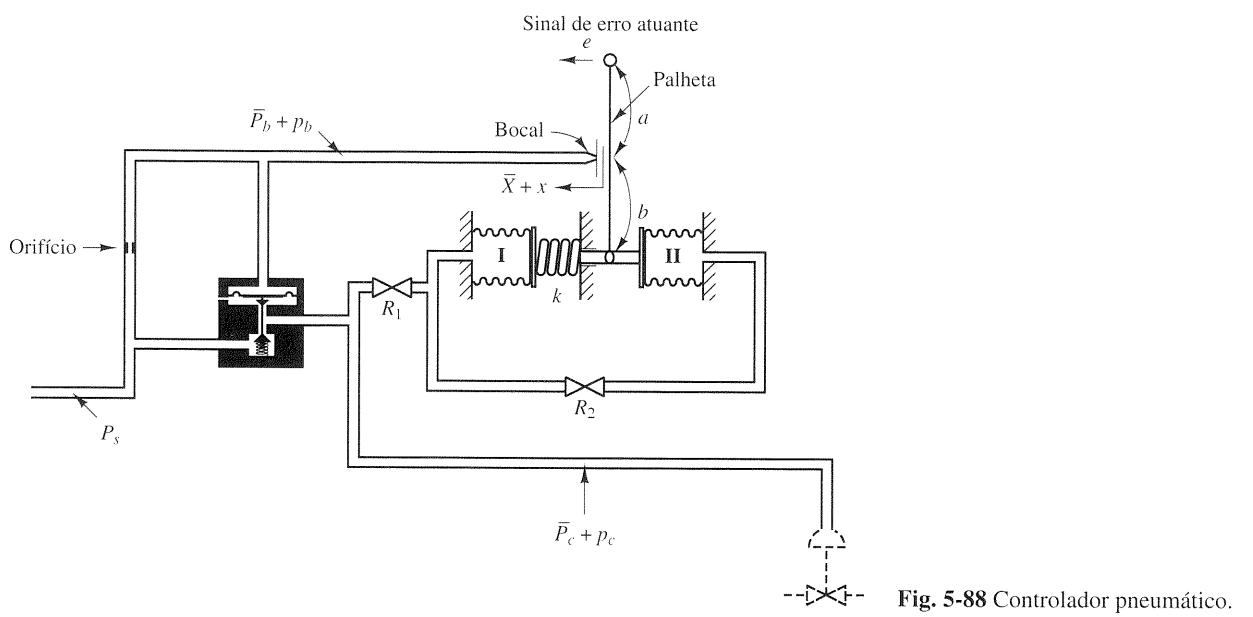


Fig. 5-88 Controlador pneumático.

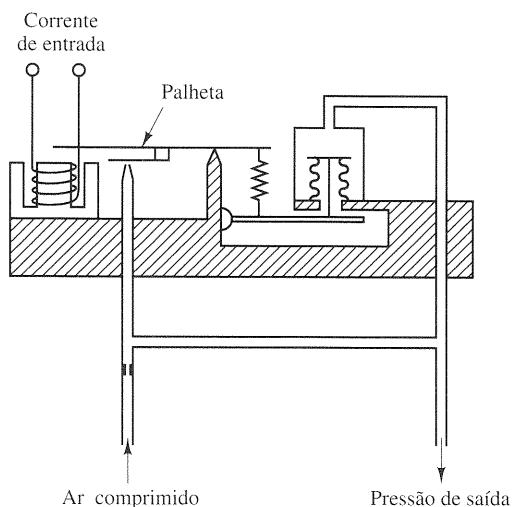


Fig. 5-89 Transdutor eletropneumático.

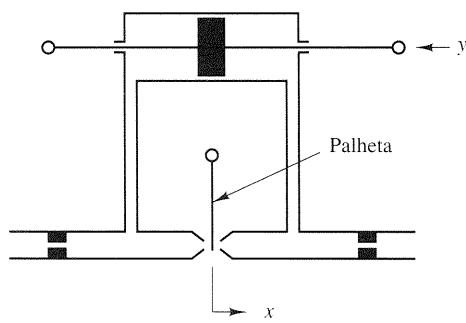


Fig. 5-90 Válvula de palhetas.

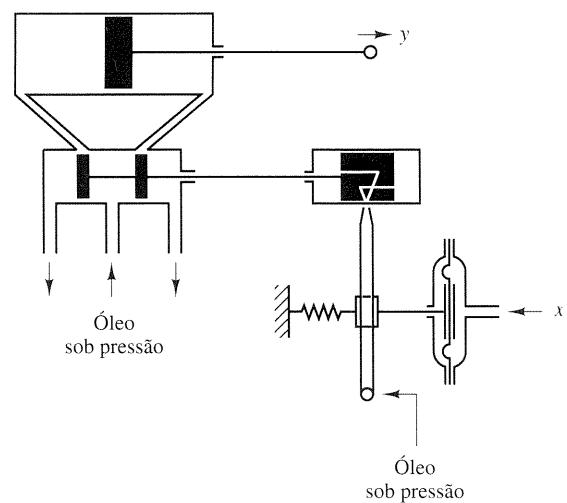


Fig. 5-91 Diagrama esquemático de um servomotor hidráulico.

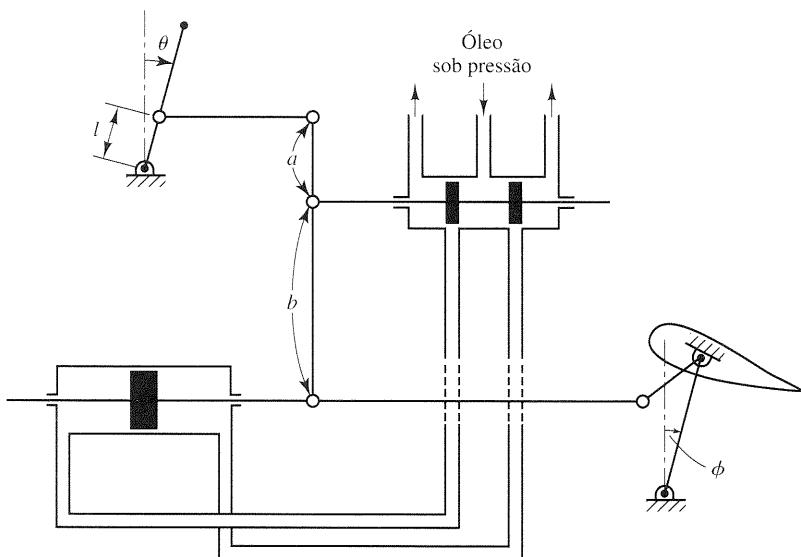


Fig. 5-92 Sistema de controle do profundo de um avião.

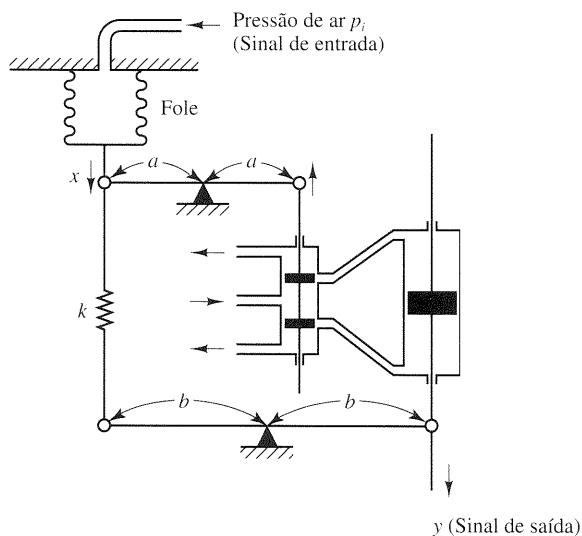


Fig. 5-93 Controlador.

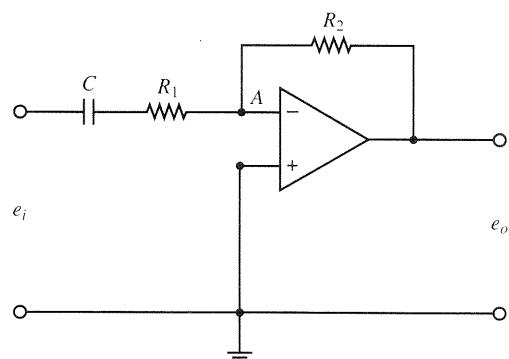


Fig. 5-94 Circuito com amplificador operacional.

B-5-19. Obter a função de transferência $E_o(s)/E_i(s)$ do circuito com amplificadores operacionais mostrado na Fig. 5-95.

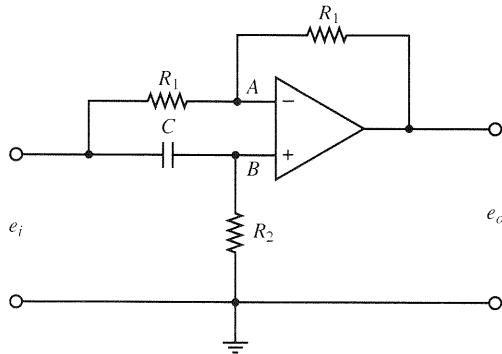


Fig. 5-95 Circuito com amplificador operacional.

B-5-20. Considere-se o sistema de controle com retroação unitária com a função de transferência a malha fechada

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{Ks + b}{s^2 + as + b}$$

Determinar a função de transferência a malha aberta $G(s)$.

Mostrar que o erro estacionário da resposta a uma excitação em rampa unitária é dado por

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{a - K}{b}$$

B-5-21. Mostrar que o erro estacionário da resposta a uma excitação em rampa unitária pode ser anulado se a função de transferência a malha fechada for dada por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{a_{n-1}s + a_n}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n}$$