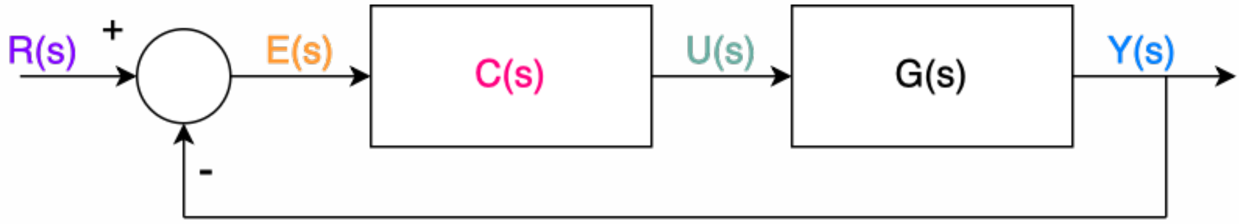
Gráficos de $u(t)$ e $e(t)$

O objetivo neste documento é apresentar uma forma de obter gráficos da ação de controle e do sinal de erro num sistema em malha-fechada, usando o Matlab, sem a necessidade de usar o Simulink.

Deduzindo $u(t)$

Observando o sistema realimentado unitário abaixo:



Notamos que:

$$U(s) = C(s) \cdot E(s)$$

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

então:

$$U(s) = C(s) \cdot [R(s) - Y(s)]$$

$$U(s) = C(s) \cdot R(s) - C(s) \cdot Y(s)$$

$$U(s) = C(s) \cdot R(s) - C(s) \cdot G(s) \cdot U(s)$$

$$U(s)\,[1 + C(s) \cdot G(s)] = C(s) \cdot R(s)$$

$$U(s) = \frac{C(s) \cdot R(s)}{1 + C(s) \cdot G(s)}$$

ou organizando melhor, notamos que:

$$U(s) = \left[\frac{C(s)}{1 + C(s) \cdot G(s)}\right] \cdot R(s)$$

note que: $C(s) \cdot G(s) = FTMA(s)$.

Perceba que quando usamos o comando `step(FTMF)` no Malab, o mesmo está realizando:

$$Step(FTMF) \rightarrow Grafico\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[Degrau(s) \cdot FTMF(s)\right]\right\}$$

A função `step` multiplica a *transfer function* passada como argumento de entrada pela transformada de Laplace da função Degrau, realiza a transformada inversa de Laplace, calcula as primeiras amostras (valores) do resultado desta inversa e "plota" o resultado destes cálculos na forma de um gráfico.

Normalmente quando fechamos uma malha tradicional de controle, como o mostrado na primeira figura acima, realizamos algo como:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}$$

$$Y(s) = R(s) \cdot FTMF(s)$$

$$FTMF(s) = \frac{FTMA(s)}{1 + FTMA(s)} = \frac{C(s) \cdot G(S)}{1 + C(s) \cdot G(S)}$$

e para obter o gráfico da resposta do sistema em malha-fechada, realizamos no Matlab:

```
>> step(FTMF)
```

este comando termina por realizar:

$$Step(FTMF) \rightarrow Grafico\left\{\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\underbrace{Degrau(s) \cdot FTMF(s)}_{Y(s)}\right]}_{y(t)}\right\}$$

Então, podemos adapatar a forma como trabalha a função `step` para gerar o gráfico de $u(t)$ ou $e(t)$.

Anteriormente deduzimos:

$$U(s) = \left[\frac{C(s)}{1 + C(s) \cdot G(s)}\right] \cdot R(s)$$

Então note que a parte da expressão transformamos em argumento de entrada para a função `step()` e conseguimos obter o gráfico de $u(t)$:

$$\left[\frac{C(s)}{1 + C(s) \cdot G(s)}\right] \quad \longrightarrow \quad \text{aux}$$

e assim, para obter o gráfico de $u(t)$ quando o sistema em malha fechada é submetido à uma entrada degrau, fazendo no Matlab, algo como:

```
>> aux=Kp/(1+Kp*G7);
>> % gráfico de u(t)
>> figure; step(aux)
```

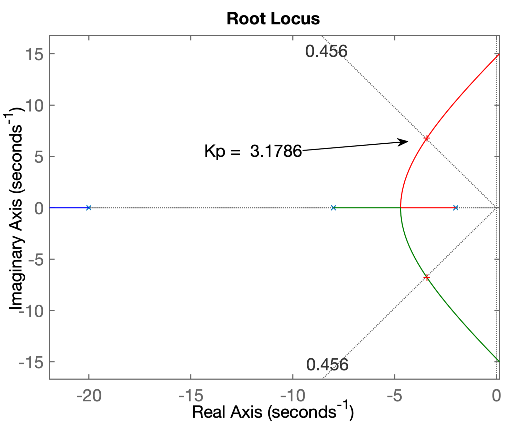
Exemplo: suponha o sesguinte sistema:

$$G_7(s) = \frac{320}{(s+20)(s+8)(s+2)}$$

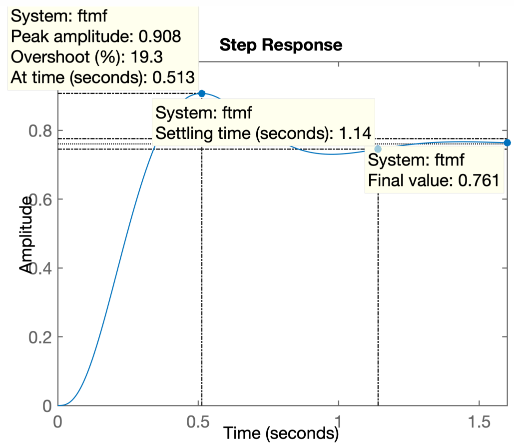
No Matlab:

```
>> % ingressando a planta:
>> G7=tf(320,poly([-20 -8 -2]));
>> % fechando a malha com granho proporcional e %OS=20%
>> rlocus(G7)
>> OS=20;
>> zeta=(-log(OS/100))./(sqrt(pi^2+(log(OS/100)^2)))
zeta =
    0.4559
>> [Kp,polosMF]=rlocfind(G7)
Select a point in the graphics window
selected_point =
  -3.4410 + 6.7943i
Kp =
    3.1786
polosMF =
 -23.1680 + 0.0000i
  -3.4160 + 6.7857i
  -3.4160 - 6.7857i
>> ftmf=feedback(Kp*G7, 1);
>> figure; step(ftmf)
```

Que gerou o seguinte RL e resposta ao degrau:



(a) RL para $G_7(s)$



(b) Resposta ao degrau, $y(t)$

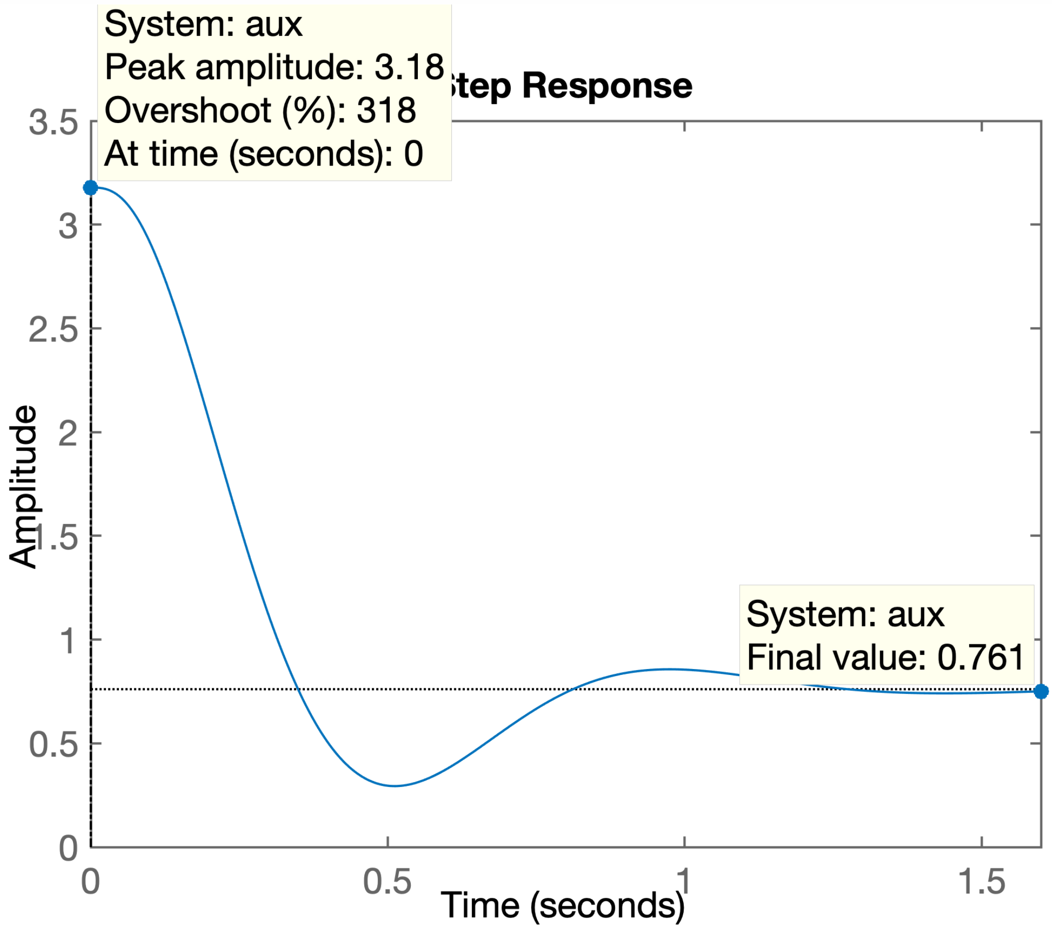
Para se obter também o gráfico de $u(t)$ fazemos então:

Calculamos:

$$U(s) = \underbrace{\left[\frac{K_p}{1 + K_p \cdot G_7(s)} \right]}_{\text{aux}} \cdot R(s)$$

```
>> aux=Kp/(1+Kp*G7);
>> zpk(aux)

ans =

      3.1786 (s+20) (s+8) (s+2)
  --------------------------------
  (s+23.17) (s^2 + 6.832s + 57.72)

Continuous-time zero/pole/gain model.

>> figure; step(aux)
```

O que nos permite vizualizar as amplitudes desenvolvidas pela ação de controle $u(t)$:



Porém a função `step` só trabalha com polinômios de entrada causais.

Por exemplo, observe o que acontece se projetamos um PD e queremos observar as amplitudes desenvolvidas por este controlador:

Exemplo$_2$: observando ação de controle desenvolvida por um PD.

Neste exemplo, vamos incorporar um PD à planta já adotada anteriormente

Obs.: Não estará sendo mostrado aqui, como o PD foi obtido.

A equação do PD é:

$$C_{PD} = 0.690759 \cdot (s + 14.28)$$

Tentado obter o gráfico de $u(t)$ gerado pelo PD:

```
>> C_PD=tf([1 14.28], 1)

C_PD =

  s + 14.28

Continuous-time transfer function.

>> K_PD=0.690759;
>> aux=K_PD*C_PD/(1+K_PD*C_PD*G7);
>> zpk(aux)

ans =

  0.69076 (s+20) (s+14.28) (s+8) (s+2)
  ------------------------------------
    (s+16.27) (s^2 + 13.73s + 213.7)

Continuous-time zero/pole/gain model.

>> figure; step(aux)
Error using DynamicSystem/step (line 95)
Cannot simulate the time response of improper
(non-causal) models.
```

Neste caso, o Matlab não finalizou a funçã `step()` por considerar a função transferência passada como argumento de de entrada, como um sistema não causal.

De fato, analizando a equação de `aux` notamos que o grau do numerador é superior ao grau do denominador:

$$\begin{aligned}
\text{aux} &= \left[\frac{C(s)}{1 + C(s) \cdot G(s)} \right] \\
&= \frac{N(s)}{D(s)} \\
&= \frac{0.69076(s+20)(s+14.28)(s+8)(s+2)}{(s+16.27)(s^2+13.73s+213.7)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N(s) &\leftarrow \text{polinômio de grau } 4 \\
D(s) &\leftarrow \text{polinômio de grau } 3
\end{aligned}$$

Como contornar este problema?

Neste caso, lembrando que queremos:

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ U(s) \right\}$$

$$U(s) = \underbrace{\left[\frac{C(s)}{1 + C(s) \cdot G(s)}\right]}_{\text{aux}(s)} \cdot R(s)$$

Falta multiplicar a expressão anterior `aux` pela transformada de Laplace do Degrau:

$$\text{Degrau}(s) = \frac{1}{s}$$

Calculando a nova expressão, teremos:

$$\text{aux}_2(s) = \frac{1}{s} \cdot \text{aux}(s)$$

Se à expressão `aux2` aplicarmos uma entrada impulso, realizarmos a transformada inversa de Laplace da mesma e plotamos os resultado para o período inicial de tempo, teremos obtido nosso objetivo que é o gráfico de $u(t)$:

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Delta(s) \cdot \text{aux}_2(s)\}$$

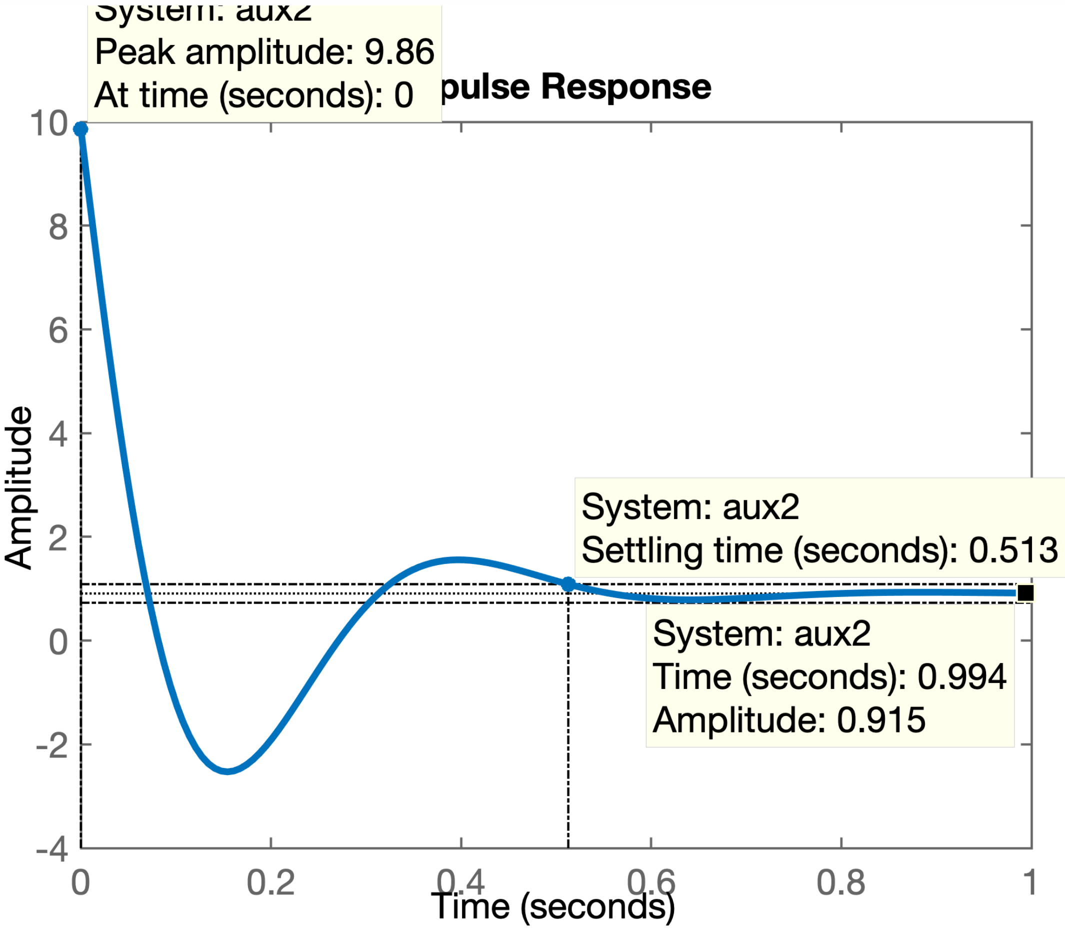
Notamos que a função `impulse()` do Matlab fornece justamente a resposta temporal ao impulso da função transferência passada como argumento de entrada para a mesma.

Então para ober o gráfico de $u(t)$ para o nosso PD, terminamos de fazer agora:

```
>> degrau=tf(1,[1 0])

degrau =

  1
  -
  s

Continuous-time zero/pole/gain model.

>> aux2=degrau*aux;
>> zpk(aux2)

ans =

  0.69076 (s+20) (s+14.28) (s+8) (s+2)
  ------------------------------------
   s (s+16.27) (s^2 + 13.73s + 213.7)

Continuous-time zero/pole/gain model.

>> figure; impulse(aux2)
```

Note que desta vez a função `aux2` é causal.

O gráfico de $u(t)$ para o PD fica então:

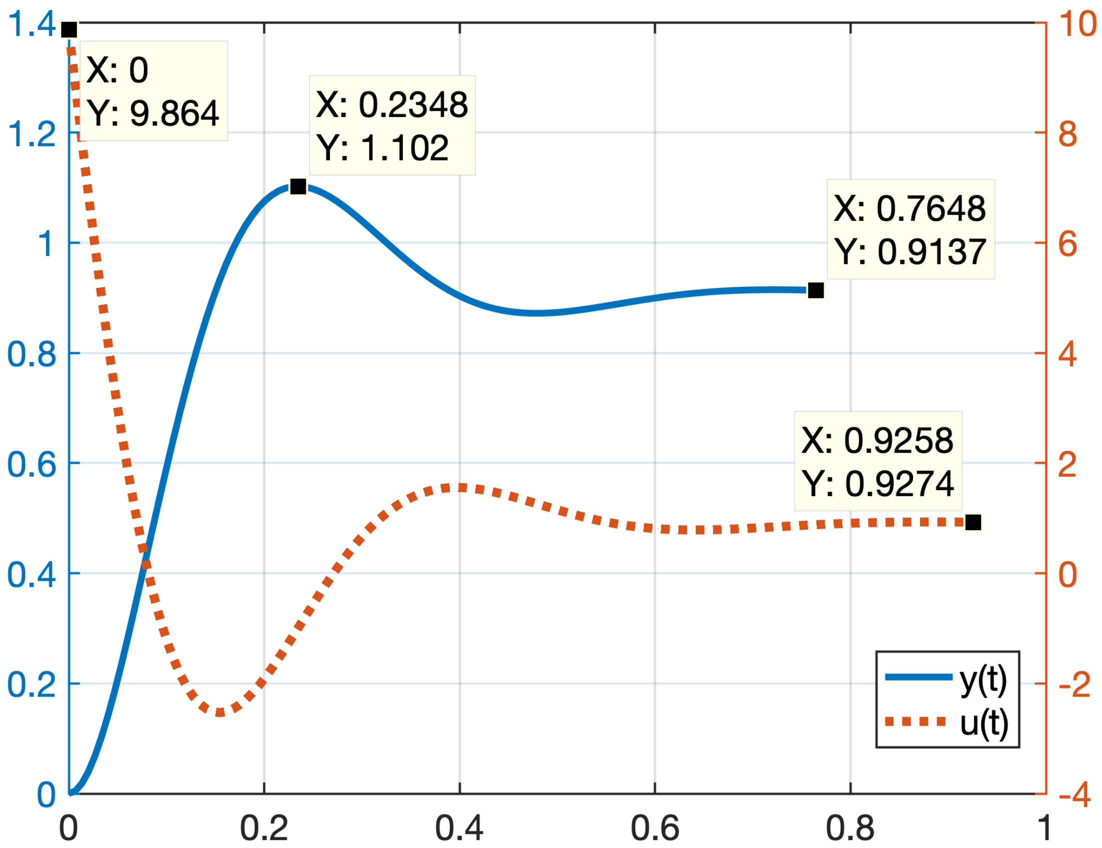


Podemos opcionalmente, mesclar num mesmo gráfico, a resposta temporal do sistema, $y(t)$ com o gráfico de $u(t)$ anterior, usando a função `plotyy` do Matlab.

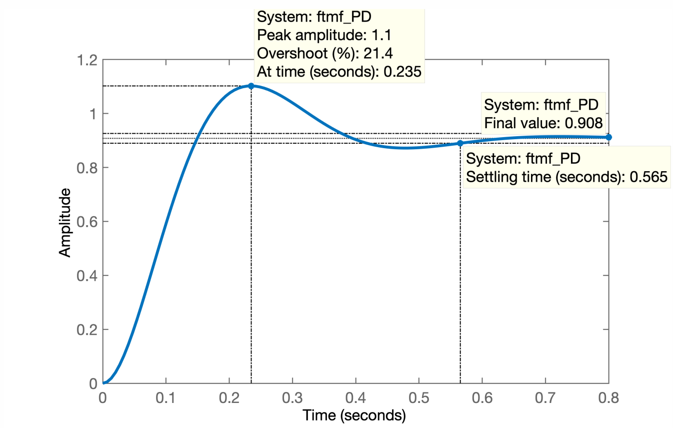
Mas para usar esta função temos que criar os vetores usados como dados de entrada para a função `plotyy()`:

```
>> % fechando malha do PD (não feito anteriormente)
>> ftmf_PD=feedback(K_PD*C_PD*G7, 1);
>> [u, t]=impulse(aux2); % gera vetores t x u(t)
>> [y, t2]=step(ftmf_PD);   % gera vetoree t2 x y(t)
>> figure; plotyy(t2,y, t,u)
>> legend('y(t)','u(t)')
```

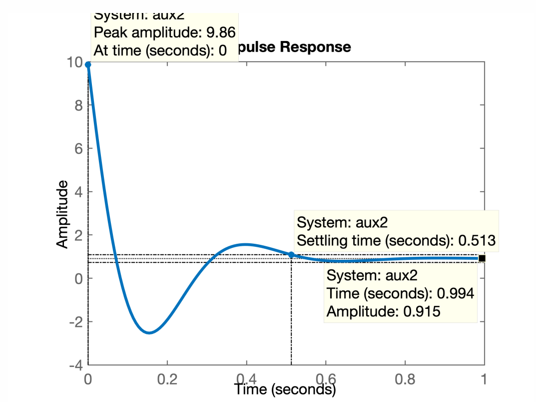
O que gera o gráfico:



Mas talvez, mostrar os gráficos de $y(t)$ e $u(t)$ de maneira isolada seja melhor para mostrar pontos importantes em cada um deles:



(a) Resposta ao degrau, $y(t)$

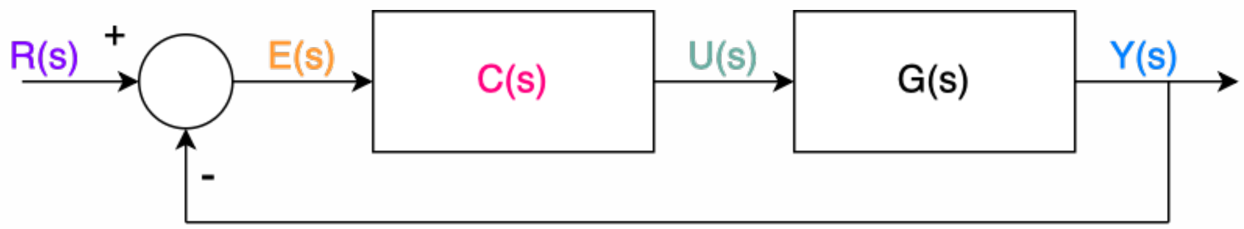


(b) Resposta ao degrau, $u(t)$

Gráfico de $e(t)$

O gráfico de $e(t)$ pode ser obtido usando uma estratégia semelhante à adotada para plotar o gráfico de $u(t)$.

Neste caso, analisando o diagrama em blocos abaixo e extraíndo equações, teremos:



$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

$$Y(s) = E(s) \cdot C(s) \cdot G(s)$$

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - E(s) \cdot C(s) \cdot G(s) \\ E(s)\left[1 + C(s) \cdot G(s)\right] &= R(s) \\ E(s) &= \frac{R(s)}{1 + C(s) \cdot G(s)} \\ &= \left[\frac{1}{1 + C(s) \cdot G(s)}\right] \end{aligned}$$

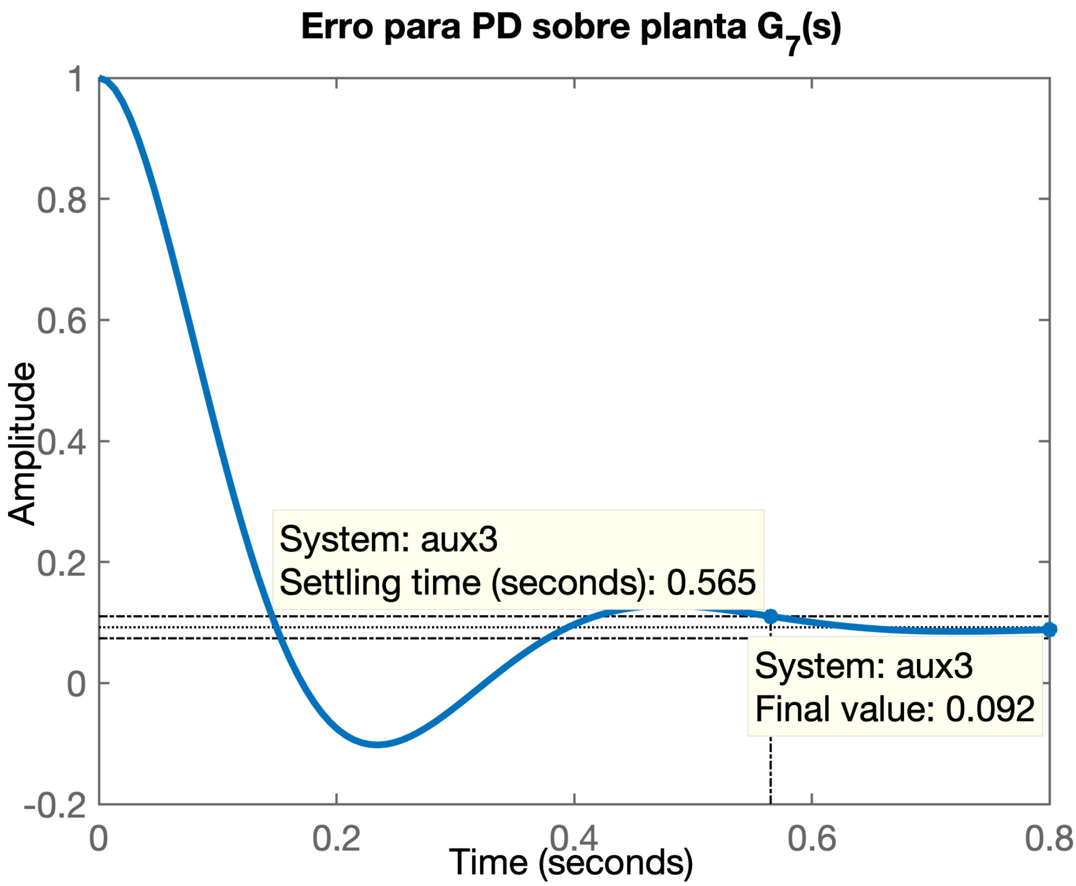
e no Matlab, realizamos então:

$$e(t) = \text{step}\left(\underbrace{\frac{1}{1 + C(s) \cdot G(s)}}_{\text{aux3}} \right)$$

testando:

```
>> aux3=1/(1+K_PD*C_PD*G7);
>> zpk(aux3)

ans =

         (s+20) (s+8) (s+2)
  --------------------------------
  (s+16.27) (s^2 + 13.73s + 213.7)

Continuous-time zero/pole/gain model.

>> figure; step(aux3)
>> title('Erro para PD sobre planta G_7(s)')
```

O que gera o gráfico:



Fim

Fernando Passold, em 11/06/2020