TRANSformada ***Z***
(parte I)

Controle Automático III
Prof. Fernando Passold

1. Definição

- Seja $f^*(t)$ o resultado do sinal contínuo $f(t)$ que foi amostrado no tempo:

- Se este sinal foi amostrado de maneira ideal*, $f^*(t)$ pode ser escrito como:

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot \delta(t - kT) = f(t) \cdot \delta_T(t)$$

- Um sampler ideal é definido como aquele que abre e fecha o circuito instantaneamente, a cada T segundos, com tempo de duração zero - amostragem por trem de pulsos:

$$\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$$

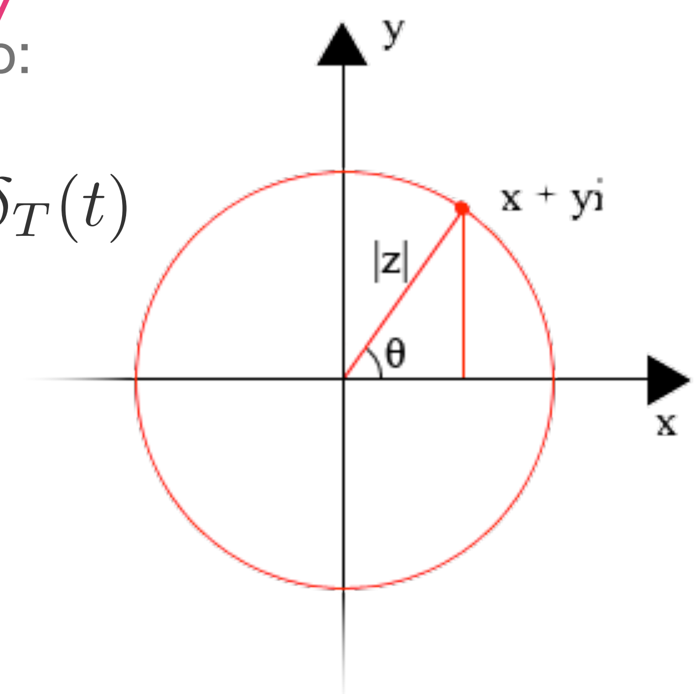
- Observação: estamos assumindo que a amostragem inicie em t=0.

$$p = e^{j\,\theta} = \underbrace{\cos(\theta)}_{\Re\{p\}} + \underbrace{j\sin(f)}_{\Im\{p\}} = x + jy$$

1. Definição

- Seja *f**(*t*) o resultado do sinal contínuo *f*(*t*) que foi amostrado no tempo:
- Se este sinal foi amostrado de maneira ideal*, *f**(*t*) pode ser escrito como:

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\cdot\delta(t-kT) = f(t)\cdot\delta_T(t)$$



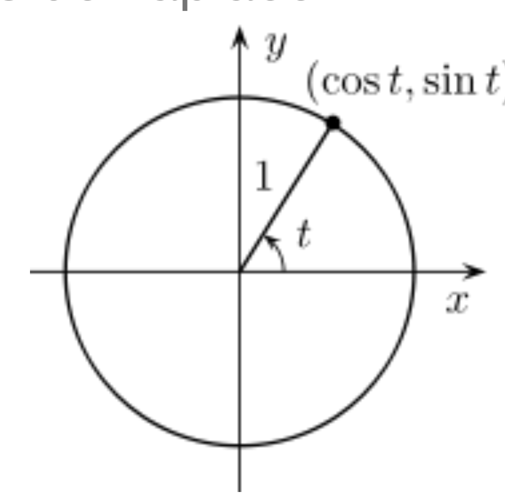
- A transformada de Laplace da função *f**(*t*) é dada por:

$$\mathscr{L}\left\{f^*(t)\right\} = F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\cdot \mathrm{e}^{-kTs}$$

- Note que o resultado contêm o termo e^{-kTs} que diferente da maioria das outras funções de sistemas com variáveis contínuas, não é uma função racional de s. Este termo gera dificuldades em operações posteriores em que serão necessárias transformadas inversas de Laplace!

Quando $s \to z$: plano cartesiano $(x, y) \to$ coordenadas polares $(1, \theta)$.

Note: $p = e^{j\,\theta} = \underbrace{\cos(\theta)}_{\Re\{p\}} + \underbrace{j\sin(\theta)}_{\Im\{p\}} = x + jy$



$$p = e^{j\,\theta} = \underbrace{\cos(\theta)}_{\Re\{p\}} + \underbrace{j\sin(f)}_{\Im\{p\}} = x + jy$$

1. Definição

- Seja $f^*(t)$ o resultado do sinal contínuo $f(t)$ que foi amostrado no tempo:

- Se este sinal foi amostrado de maneira ideal*, $f^*(t)$ pode ser escrito como:

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot \delta(t - kT) = f(t) \cdot \delta_T(t)$$

- A transformada de Laplace da função $f^*(t)$ é dada por:

$$\mathscr{L}\left\{f^*(t)\right\} = F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot e^{-kTs}$$

- Note que o resultado contêm o termo e^{-Ts} que diferente da maioria das outras funções de sistemas com variáveis contínuas, não é uma função racional de s. Este termo gera dificuldades em operações posteriores em que serão necessárias transformadas inversas de Laplace!

- Por isto é desejável transformar a função irracional $F^*(s)$ numa função racional, digamos $F(z)$ através da transformação de uma variáve; complexa em s em outra variável complexa z.

$$p = e^{j\,\theta} = \underbrace{\cos(\theta)}_{\Re\{p\}} + j\,\underbrace{\sin(f)}_{\Im\{p\}} = x + jy$$

1. Definição

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot \delta(t - kT) = f(t) \cdot \delta_T(t)$$

$$\mathscr{L}\left\{f^*(t)\right\} = F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot \mathrm{e}^{-kTs}$$

- Uma escolha óbvia para esta transformação ($s \rightarrow z$) é: $z = \mathrm{e}^{Ts}$
- Resolvendo esta equação de volta para s ($z \rightarrow s$), resulta em: $s = \dfrac{1}{T} \ln z$
- Nesta duas últimas equações, *T* é o período de amostragem (em segundos) e *z* a variável complexa cujas componentes real e imaginária estão relacionadas com a variável *s* da seguinte forma:

$$\mathbb{R}\{z\} = e^{T\sigma} \cos \omega T$$

$$\mathbb{I}\{z\} = e^{T\sigma} \sin \omega T$$

- Lembrando que: $s = \sigma + j\omega$
- Assim:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\, z^{-k}$$

$$p = e^{j\,\theta} = \underbrace{\cos(\theta)}_{\Re\{p\}} + j\underbrace{\sin(f)}_{\Im\{p\}} = x + jy$$

1. Definição

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot \delta(t - kT) = f(t) \cdot \delta_T(t)$$

$$\mathscr{L}\,\{f^*(t)\} = F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot e^{-T\,s}$$

- Uma escolha óbvia para esta transformação (
- Resolvendo esta equação de volta para s, res
- Nesta duas últimas equações, *T* é o período c cujas componentes real e imaginária estão re

$$\mathbb{R}\{z\} =$$

$$\mathbb{I}\{z\} = e^{T\sigma} \sin \omega T$$

- Lembrando que: $s = \omega + j\omega$
- Assim: $$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\, z^{-k}$$

Note que:

$$\mathcal{Z}\,\{f(kT)\} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}$$

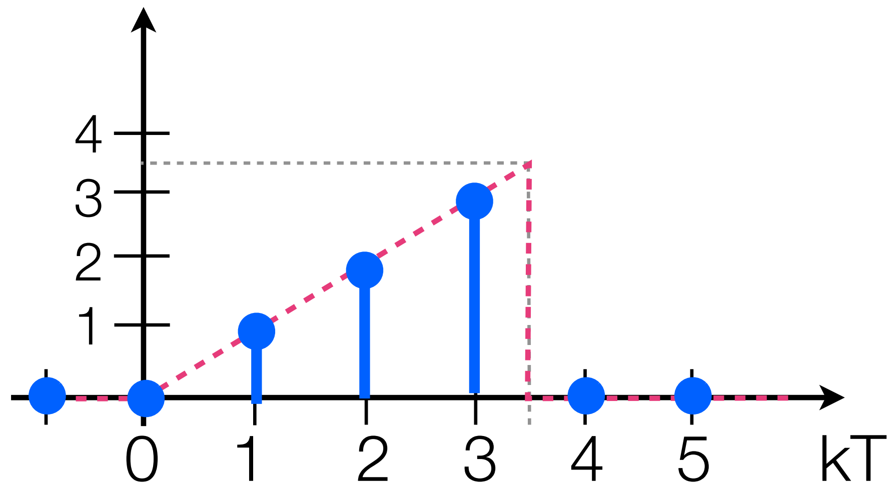
$$F(z) = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \ldots + f(kT)z^{-k} + \ldots$$

Exemplo_1) Transformada Z de um sinal...

- Suponha o sinal definido abaixo:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \forall \quad t < 0 \\ t, & \forall \quad 0 \leq t < 3,5 \\ 0, & \forall \quad t \geq 3,5 \end{cases}$$

De posse destes dados obtemos:



- e que T=1 segundo. Obtenha a F(z):

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot z^{-k}$$

- Temos que:

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(1) &= 1 \\ f(2) &= 2 \\ f(3) &= 3 \\ f(4) &= 0 \\ &\vdots \\ f(nT) &= 0, n > 3 \end{aligned}\right\}$$

$$F(z) = 0z^0 + 1z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 0 \cdot z^{-4} + \ldots$$

$$F(z) = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3}$$

$$F(z) = z^{-1}\left(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}\right)$$

Repare que este é um caso de uma função limitada no tempo.

Detalhes

$$F(s) = \mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-s\,t} dt$$

$$F(z) = \mathscr{L}\left\{f^*(t)\right\} = \sum_0^{\infty} f(kT)\, z^{-k}$$

- Mas:

$$\lim_{T \to 0} F(z) \neq F(s)$$

$$\lim_{T \to 0} f^*(t) = f(t)$$

- Uma vez que *f**(*t*) representa um trem de pulsos (ponderados) espaçados a *T* segundos, à medida que *T* se torna infinitezimalmente menor, o trem de impulsos simplesmente se colapsa num grupo de impulsos em *t*=0, mas o resultado de maneira nenhuma se parece com *f*(*t*).

Limitações da Transformada Z

- Quando se aplica o método da transformada Z, devemos ter em mente as limitações e condições deste método:

- Assumindo um "ideal sampler", a obtenção da transformada *Z* de um sinal (função) contínuo no tempo, $f(t)$ é baseada principalmente na amostragem da função por um sampler ideal. O resultado disto é que **a transformada *Z*, $F(z)$, representa a função $f(t)$ somente nos instantes de amostragem.**

- A transformada *Z* inversão não é única! Dado $F(z)$, sua transformada inversa fornece somente a solução para $f(kT)$. **Estritamente citando, a solução para $f(t)$ é desconhecida**.

- A exatidão do método depende da magnitude da freqüência de amostragem, ω_s, ou do período de amostragem *T* em relação ao componente de maior freqüência contido na função $f(t)$. Se o período de amostragem for muito grande (ou a freqüência de amostragem é muito baixa), a solução da transformada *Z* pode ser errônea, uma vez que $f^*(t)$ não será uma boa representação de $f(t)$.

- É necessário se atentar para o fato de que $F(z)$ foi formada à partir de uma sequencia e assim contêm apenas a informação de f(t) nos pontos de amostragem do sinal.

$$F(z) = \mathscr{L}\left\{f^*(t)\right\} = \sum_{0}^{\infty} f(kT)\, z^{-k}$$

Limitações da Transformada Z

Note que a transformada Z está sempre relacionada com uma sequencia de números, uma série que pode ser limitada (convergir) ou ser infinita!

- Quando se aplica o método da tran
  método:

- Assumindo um "ideal sampler", a obtenção da transformada *Z* de u sinal (função) contínuo no tempo, $f(t)$ é baseada principalmente na amostragem da função por um sampler al. O resultado disto é que **a transformada *Z*, $F(z)$, representa a função $f(t)$ somente nos inst tes de amostragem.**

- A transformada *Z* inversão não é única! Dado $F(z)$, sua transformad nversa fornece somente a solução para $f(kT)$. **Estritamente citando, a solução para $f(t)$ é desconhecida**

- A exatidão do método depende da magnitude da freqüência de amo tragem, ω_s, ou do período de amostragem *T* em relação ao componente de maior freqüência conti o na função $f(t)$. Se o período de amostragem for muito grande (ou a freqüência de amostragem é mui o baixa), a solução da transformada *Z* pode ser errônea, uma vez que $f^*(t)$ não será uma boa representaçã de $f(t)$.

- É necessário se atentar para o fato de que $F(z)$ foi formada à partir de uma sequencia e assim contêm apenas a informação de f(t) nos pontos de amostragem do sinal.

$$F(z) = \mathscr{L}\left\{f^*(t)\right\} = \sum_{0}^{\infty} f(kT)\, z^{-k}$$

Ex2) Transformada Z da função Impulso:

$$\mathcal{Z}\left\{\delta(t)\right\} = \mathcal{Z}\left\{\delta(kT)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = 1$$

Ex3) Transformada Z da função Degrau:

$$\mathcal{Z}\left\{u(t)\right\} = \mathcal{Z}\left\{u^*(T)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = \quad ?$$

Ex3) Transformada Z da função Degrau:

$$\mathcal{Z}\left\{u(t)\right\} = \mathcal{Z}\left\{u^*(T)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = \quad ?$$

- Lembrando de Séries Geométricas, ou P.G.s:

$$S(q) = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n = \sum_{k=0}^{n} a \cdot q^k$$

onde: *a* = 1º termo da série e *q* = razão da série.

- Estamos interessados em descobrir: $\sum_{k=0}^{n} a \cdot q^k$

$$\left.\begin{array}{rcl} S(q) & = & a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n \\ q \cdot S(q) & = & aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n+1} \\ \hline S(q) - qS(q) & = & a - aq^{n+1} \\ S(q)(1-q) & = & a - aq^{n+1} \end{array}\right\} \quad S(q) = \frac{a - aq^{n+1}}{1-q}$$

- Voltando ao nosso caso...

Ex3) Transformada Z da função Degrau:

$$\mathcal{Z}\left\{u(t)\right\} = \mathcal{Z}\left\{u^*(T)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = \quad ?$$

- Lembrando de Séries Geométricas, ou P.G.s:

$$S(q) = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n = \sum_{k=0}^{n} a \cdot q^k \longrightarrow S(q) = \frac{a - aq^{n+1}}{1-q}$$

- Voltando ao nosso caso...

$$\mathcal{Z}\left\{u(t)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1z^{-k} = 1 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + \ldots = \left.\frac{1 - 1(z^{-1})^{n+1}}{1 - z^{-1}}\right|_0^{\infty}$$

- Verificando se a série converge:

$$\mathcal{Z}\left\{u(t)\right\} = \lim_{n\to\infty} \left.\frac{1 - 1(z^{-1})^{n+1}}{1 - z^{-1}}\right|_0^{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \overbrace{z^{-n}}^{=0} \cdot 1}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

- Assim:

$$\mathcal{Z}\left\{u(t)\right\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad \text{Se } |z| > 1$$

Ex3) Transformada Z da função Degrau:

Adaptando como "regra" geral para uma P.G.:

$$\sum_{n=0}^{\infty} Ax^n = \frac{A}{1-x}, \quad \text{Se } |x| < 1$$

$$\cdots^{k} = \quad ?$$

$$S(q) = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n = \sum_{k=0} a \cdot q^k \longrightarrow S(q) = \frac{a - aq^{n+1}}{1-q}$$

- Voltando ao nosso caso...

$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1z^{-k} = 1 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + \ldots = \left. \frac{1 - 1(z^{-1})^{n+1}}{1 - z^{-1}} \right|_0^{\infty}$$

- Verificando se a série converge:

$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \lim_{n\to\infty} \left. \frac{1 - 1(z^{-1})^{n+1}}{1 - z^{-1}} \right|_0^{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \overbrace{z^{-n}}^{=0} \cdot 1}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

- Assim:

$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad \text{Se } |z| > 1$$

Ex3) Transformada Z da função Degrau:

$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \mathcal{Z}\{u^*(T)\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = \quad ?$$

- Lembrando de Séries Geométricas, ou P.G.s:

$$S(q) = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n = \sum_{k=0}^{n} a \cdot q^k \longrightarrow S(q) = \frac{a - aq^{n+1}}{1-q}$$

- Voltando ao nosso caso...

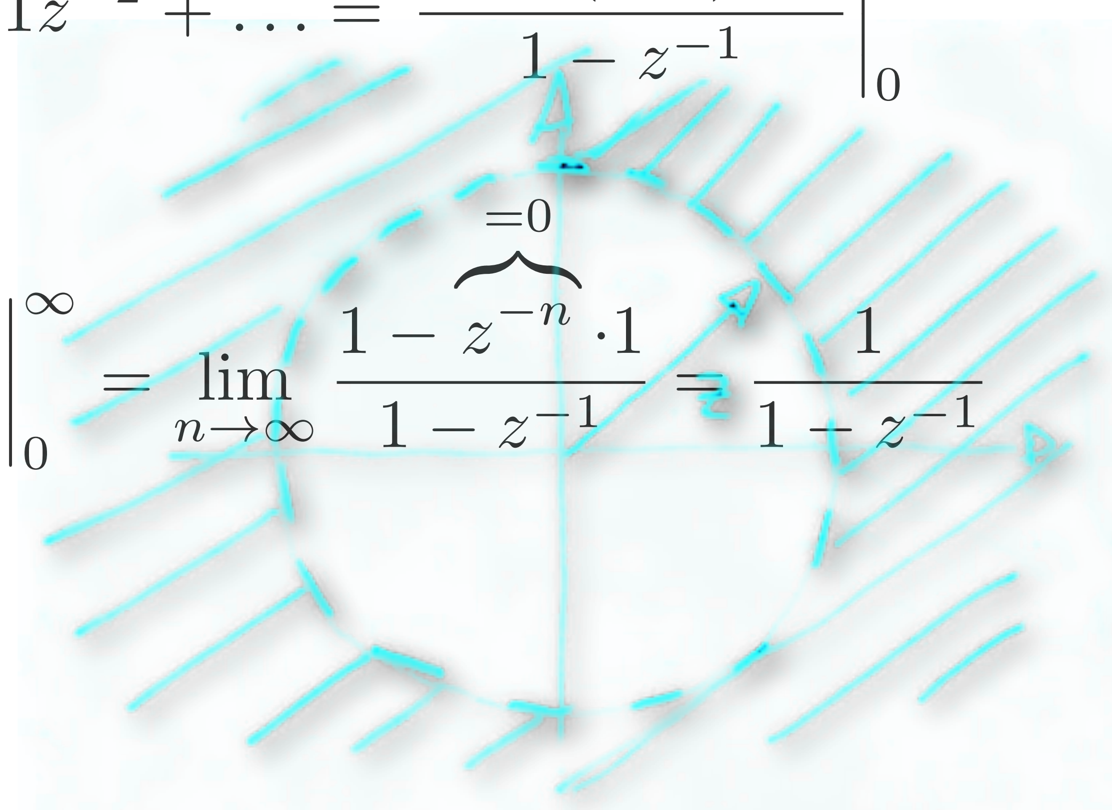
$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1z^{-k} = 1 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + \ldots = \left.\frac{1 - 1(z^{-1})^{n+1}}{1 - z^{-1}}\right|_0^{\infty}$$

- Verificando se a série converge:

$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \lim_{n\to\infty} \left.\frac{1 - 1(z^{-1})^{n+1}}{1 - z^{-1}}\right|_0^{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \overbrace{z^{-n}}^{=0} \cdot 1}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

- Assim:

$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad \text{Se } |z| > 1$$



Ex3) Transformada Z da função Degrau:

$$\mathcal{Z}\left\{u(t)\right\} = \mathcal{Z}\left\{u^*(T)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = \quad ?$$

Note:

$r^{-n} \Rightarrow$ exponencial

crescente p/ $r < 1 \therefore$ Ex.: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$

decrescente p/ $r > 1 \therefore$ Ex.: $(2)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = 0,125$

$$S(q) = \frac{a - aq^{n+1}}{1 - q}$$

$$\left. \frac{1 - 1(z^{-1})^{n+1}}{1 - z^{-1}} \right|_{0}^{\infty}$$

- Verificando se a série converge:

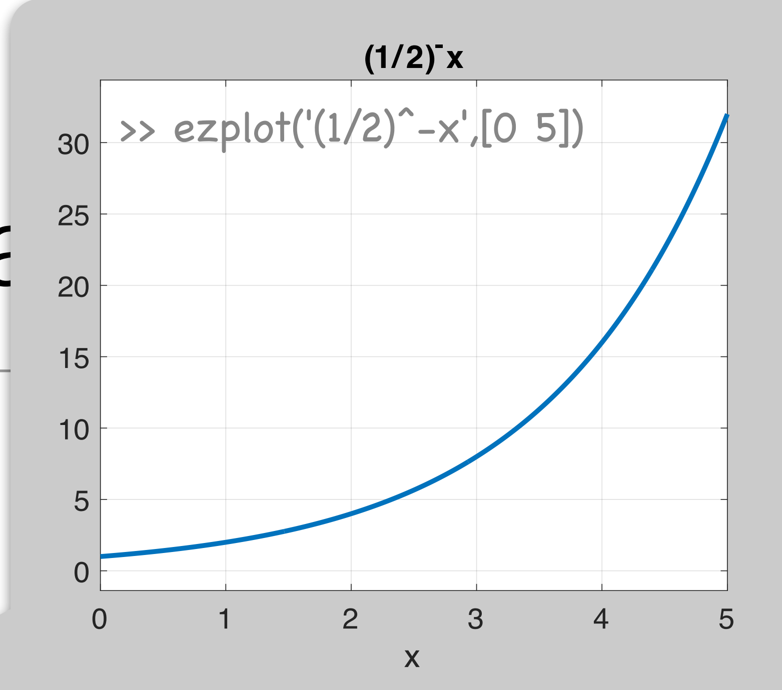
$$\mathcal{Z}\left\{u(t)\right\} = \lim_{n\to\infty} \left. \frac{1 - 1(z^{-1})^{n+1}}{1 - z^{-1}} \right|_{0}^{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \overbrace{z^{-n}}^{=0} \cdot 1}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

- Assim:

$$\mathcal{Z}\left\{u(t)\right\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad \text{Se } |z| > 1$$

Ex3) Transformada Z da função Degra

$$\mathcal{Z}\left\{u(t)\right\} = \mathcal{Z}\left\{u^*(T)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} =$$



Note:

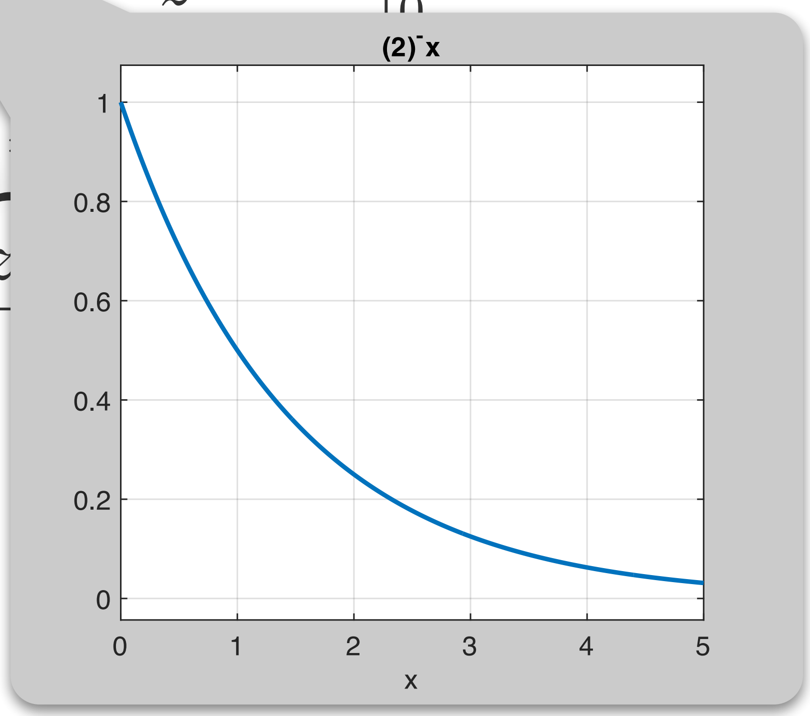
$r^{-n} \Rightarrow$ exponencial

crescente p/ $r < 1 \therefore$ Ex.: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$

decrescente p/ $r > 1 \therefore$ Ex.: $(2)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = 0,125$

$$S(q) = \frac{a - aq^{n+1}}{1 - q}$$

$$\left.\frac{1 - 1(z^{-1})^{n+1}}{1 - z^{-1}}\right|_0^{\infty}$$



- Verificando se a série converge:

$$\mathcal{Z}\left\{u(t)\right\} = \lim_{n\to\infty} \left.\frac{1 - 1(z^{-1})^{n+1}}{1 - z^{-1}}\right|_0^{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - z}{1 -}$$

- Assim: $\mathcal{Z}\left\{u(t)\right\} = \dfrac{1}{1 - z^{-1}}$ Se $|z| > 1$

Ex4) Transformada Z de uma série:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \, z^{-k} = 1 + 2z^{-1} + 4z^{-2} + 8z^{-3} + \ldots = \quad ?$$

$f[k] = (a)^k$, p/ $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\downarrow$$

$f[k] = [1, a, a^2, a^3, \ldots]$

$$\Big\downarrow Z$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot z^{-1})^n = \underbrace{1 + a \cdot z^{-1} + a^2 \cdot z^{-2} + \ldots}_{}$$

P.G. $\Rightarrow$ $a = 1$

$q = a$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A \cdot x^n = \frac{A}{1 - x}, \text{ se } |x| < 1$$

$$F(z) = \frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}} \cdot \frac{z^{+1}}{z^{+1}}$$

$$F(z) = \frac{z}{z - a}$$

$$F(z) = \frac{z}{z - 2}$$

Ex5) Transformada Z da função Exponencial:

$$\mathcal{Z}\left\{e^{-a\,t}\right\} = \mathcal{Z}\left\{e^{-a(kT)}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-aT}\cdot z^{-1}\right)^{k} = 1 + e^{-aT}z^{-1} + e^{-2aT}z^{-2} + \ldots + \quad ?$$

$$F(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{1-(\overbrace{e^{-aT}z^{-1}}^{=0})^{n+1}}{1-e^{-aT}z^{-1}} \qquad \therefore \left[\longleftarrow \quad \sum_{k=0}^{n} aq^{k} = S(q) = \frac{a-aq^{n+1}}{1-q}\right]$$

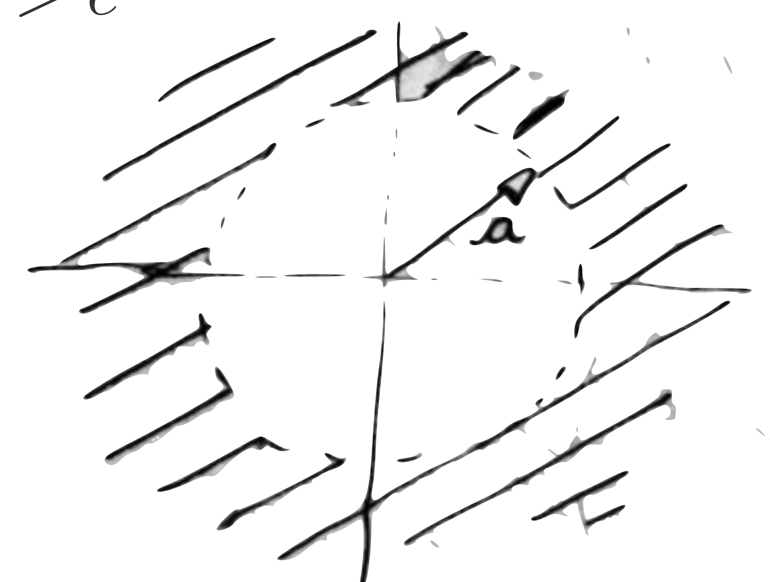
Este limite converge se:

$$F(z) = \frac{z}{z-e^{-aT}}$$

$$\left[\frac{e^{-aT}}{|z|}\right] < 1 \quad \therefore \quad |z| > e^{-aT}$$

Note também que:

$$\mathscr{L}\left\{e^{-at}\right\} = \frac{1}{s+a}$$



Plano z

Ex5) Transformada Z da função Exponencial:

Se: $f[kT] = e^{-a\cdot(kT)}$ $\therefore$ $F(z) = \dfrac{z}{z - e^{-aT}}$ $\mathscr{L}\{e^{-at}\} = \dfrac{1}{s+a}$

Suponha a = 0,5 ➛ Pólo em s = – 0,5 (**estável**) e T = 1,0 (segundo): $F(s) = \dfrac{1}{s + 0{,}5}$; $a = -0{,}5$

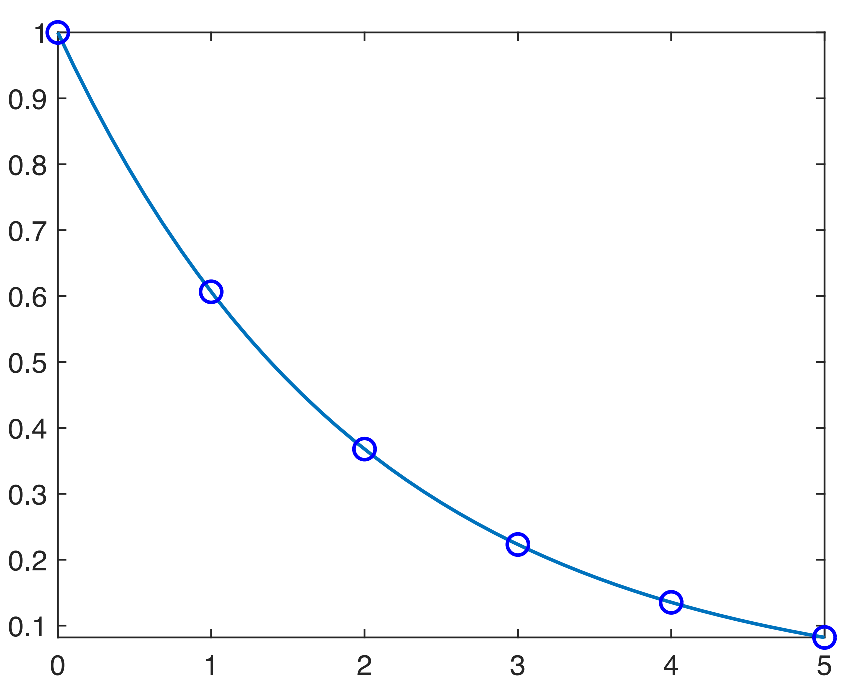
$$F(z) = \frac{z}{z - e^{(-0{,}5\cdot 1{,}0)}}$$

$$F(z) = \frac{z}{z - 0.6065}$$

$$\mathscr{Z}^{-1} = e^{-0{,}5\cdot k\cdot 1}$$

Resposta (ao impulso) no tempo:

```
>> fplot(@(k) (0.6065).^k, [0 5])
```




```
>> k = 0:1:5;
>> f = (0.6065).^k;
>> [k' f']
         0    1.0000
    1.0000    0.6065
    2.0000    0.3678
    3.0000    0.2231
    4.0000    0.1353
    5.0000    0.0821
>> hold on
>> plot(k, f, 'bo')
```

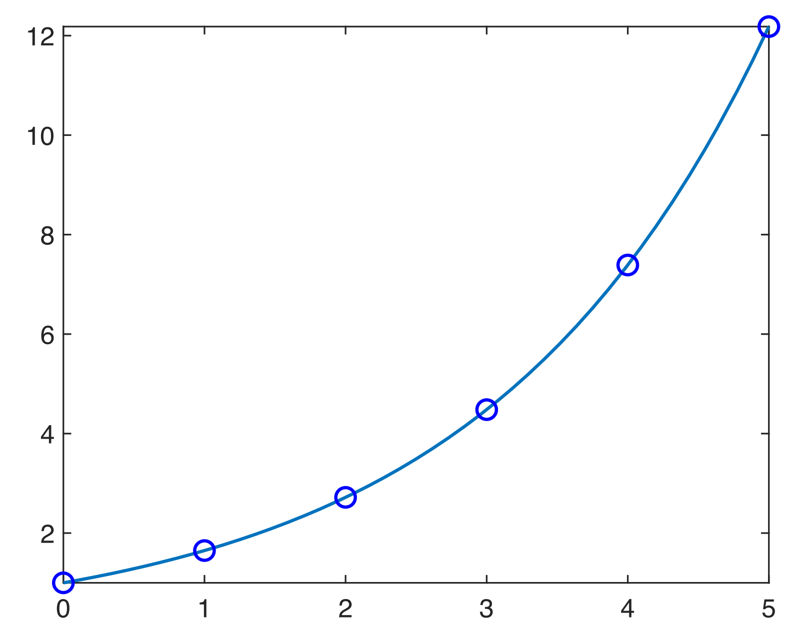
Se entretanto: a = – 0,5 (pólo **instável**; em s = +0,5)

$$F(s) = \frac{1}{s - 0{,}5}$$

$$F(z) = \frac{z}{z - e^{(0{,}5\cdot 1{,}0)}}$$

$$F(z) = \frac{z}{z - 1.6487}$$

```
>> f=(1.6487).^k;
>> [k' f']
         0    1.0000
    1.0000    1.6487
    2.0000    2.7182
    3.0000    4.4815
    4.0000    7.3887
    5.0000   12.1817
```



Note (1):

Função: $y[K]=(a)^K$, p/ $K=0,1,2,3,\ldots$

$$\underbrace{y[K]=[1, a, a^2, a^3, \ldots]}_{\text{converge ?}}$$

$$\Leftarrow Y(z)=\frac{1}{1-a\cdot z^{-1}}\cdot\frac{z^{+1}}{z^{+1}}=\frac{z}{z-a}$$

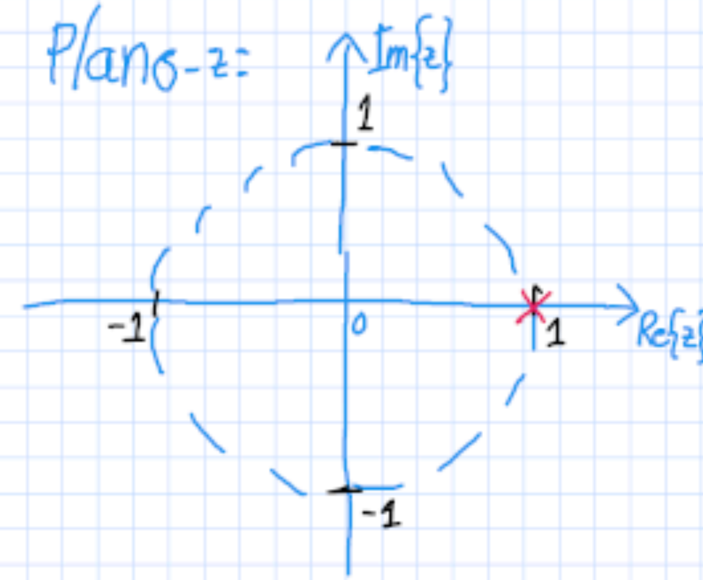
Caso 1) $y[K]=(1)^K$ ← Degrau

Converge p/ 1!

$$Y(z)=\sum_{K=0}^{\infty}(1)^K\cdot z^{-K}=1+1\cdot z^{-1}+1\cdot z^{-2}+1\cdot z^{-3}+\ldots$$

$$Y(z)=\frac{1}{1-1\cdot z^{-1}}=\frac{z}{z-1}$$

Plano-z:



Note (2):

Função: $y[K] = (a)^K$, p/ $K = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$y[K] = \underbrace{[1, a, a^2, a^3, \ldots]}_{\text{converge ?}}$

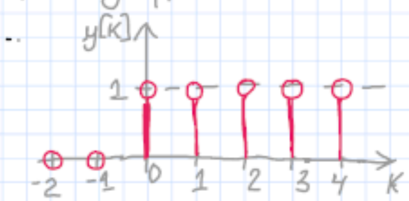
$\Leftarrow Y(z) = \dfrac{1}{1 - a \cdot z^{-1}} \cdot \dfrac{z^{+1}}{z^{+1}} = \dfrac{z}{z-a}$

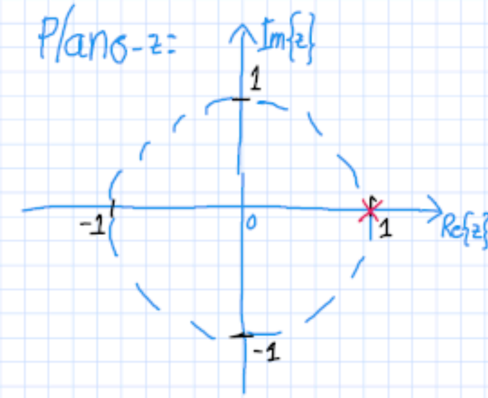
Caso$_1$) $y[K] = (1)^K \leftarrow$ Degrau

$Y(z) = \sum_{K=0}^{\infty} (1)^K \cdot z^{-K} = 1 + 1 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + 1 \cdot z^{-3} + \ldots$

Converge p/ 1!

$Y(z) = \dfrac{1}{1 - 1 \cdot z^{-1}} = \dfrac{z}{z-1}$



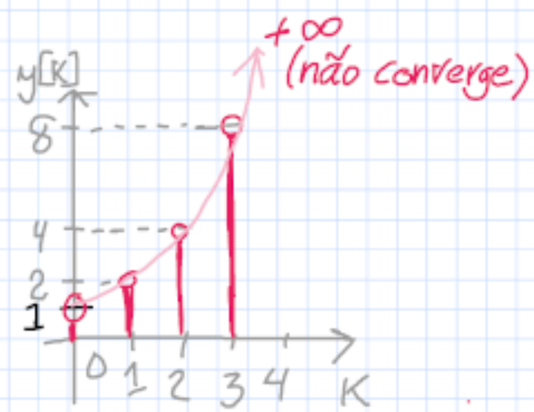


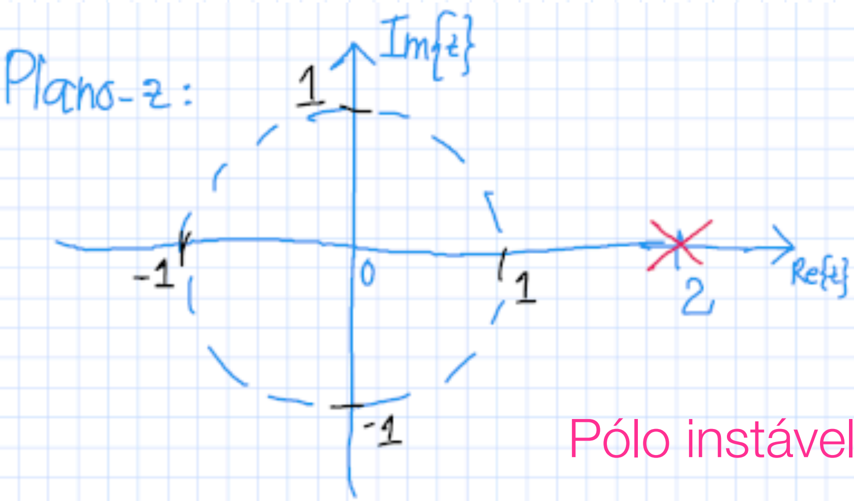
Caso$_2$) $y[K] = (2)^K$

$Y(z) = ?$

$F(z) = \sum_{K=0}^{\infty} 2^K \cdot z^{-K} = 1 + 2 \cdot z^{-1} + 4 \cdot z^{-2} + 8 \cdot z^{-3} + \ldots$

$F(z) = \dfrac{z}{z-2}$





Pólo instável

Caso$_3$) $y[K] = \left(\dfrac{1}{2}\right)^K$

converge

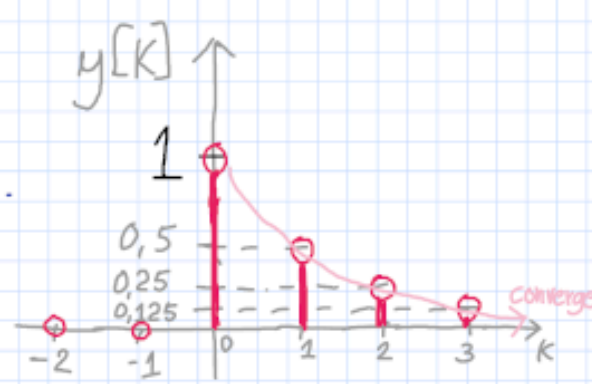
$Y(z) = ?$

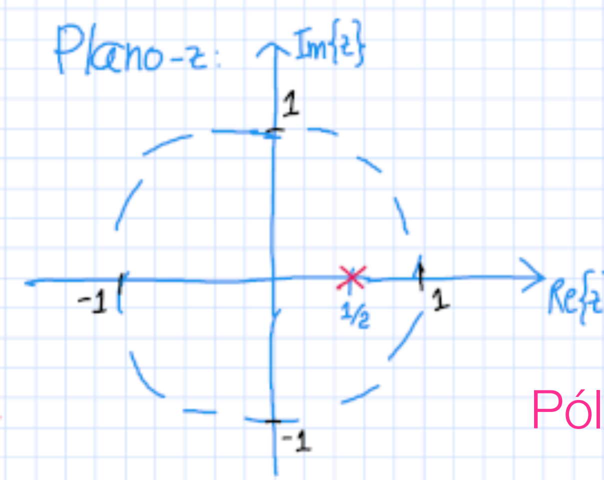
$Y(z) = \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^K \cdot z^{-K} = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot z^{-0} + \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot z^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot z^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot z^{-3} + \ldots$

$Y(z) = 1 + \frac{1}{2} \cdot z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2} + \frac{1}{8} z^{-3} + \ldots$

$Y(z) = 1 + 0{,}5 z^{-1} + 0{,}25 z^{-2} + 0{,}125 z^{-3} + \ldots$

$Y(z) = \dfrac{z}{z - 0{,}5}$





Pólo estável

Note (3):

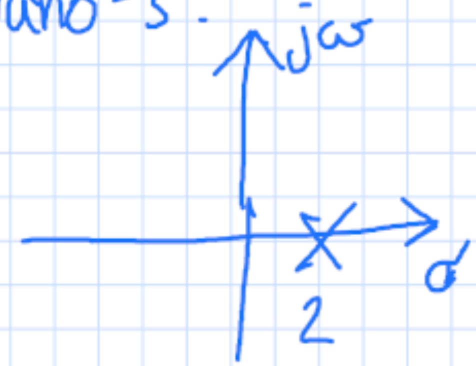
Função exponencial:

$y = e^{at}$

Caso 1) $a > 0$

EX: $a = 2$

Plano-S:



$\therefore\ y(t) = e^{2t}$

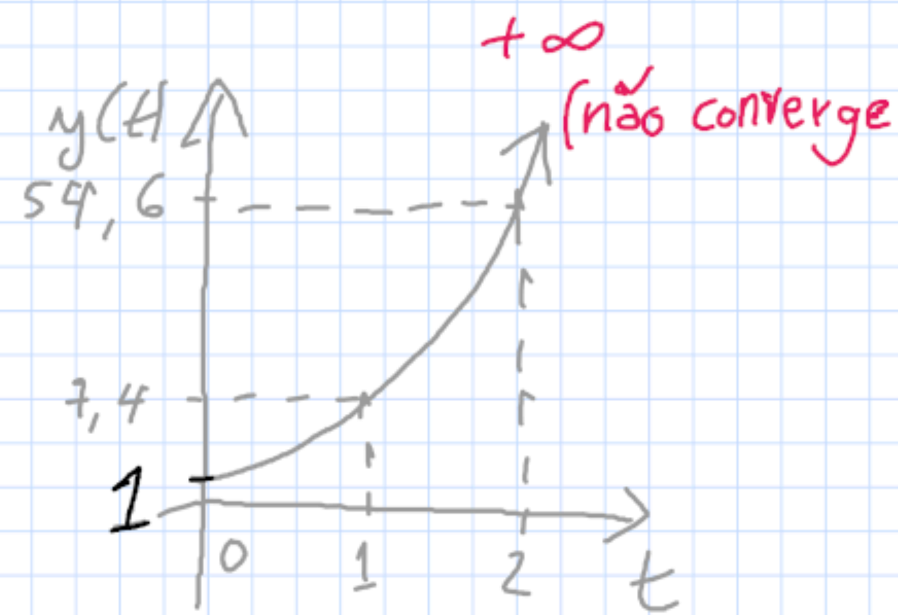
$y(0) = e^{2\cdot 0} = 1$

$y(1) = e^{2\cdot 1} = 7{,}3891$

$y(2) = e^{2\cdot 2} = 54{,}5982$

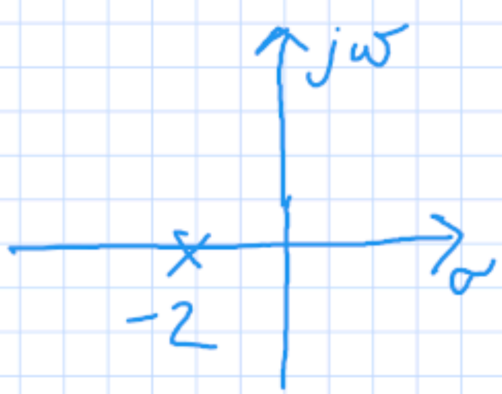
$\vdots$

$y(\infty) = \infty$ (não converge)



Caso 2) $a < 0$

EX: $a = -2$



$\therefore\ y(t) = e^{-2\cdot t}$

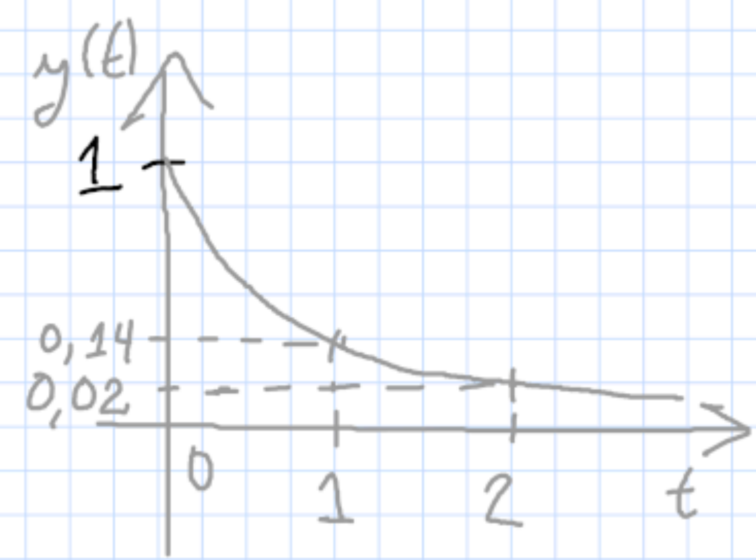
$y(0) = e^{-2\cdot 0} = 1$

$y(1) = e^{-2\cdot 1} = 0{,}1353$

$y(2) = e^{-2\cdot 2} = 0{,}0183$

$\vdots$

$y(\infty) = 0$ (converge)



Exercícios:

1. Esboce o sinal: $y(kT) = 1 - 0,5^k$

2. Note que o sinal anterior: $y(kT)_{k\to\infty} = 1,0$

3. Dada a seguinte relação de pontos, obtenha sua equivalente transformada Z:

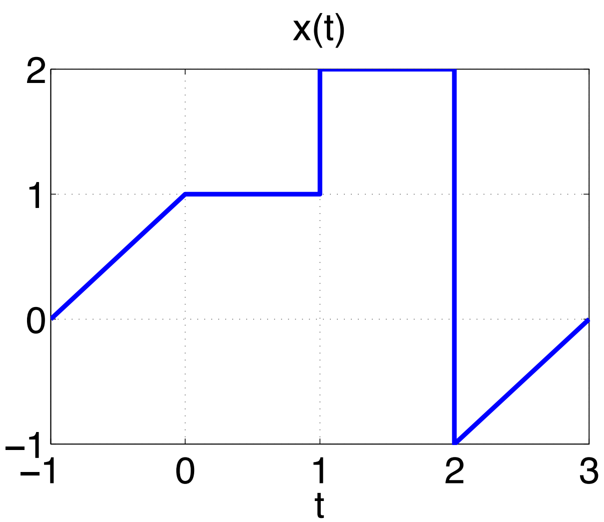
$$\begin{array}{rcl} x(0) & = & 5 \\ x(1) & = & 4 \\ x(2) & = & 3 \\ x(3) & = & 2 \\ x(4) & = & 1 \\ x(k) & = & 0 \quad \forall\, k \geq 5 \end{array}$$

4. Dada outra sequencia de pontos, determine sua Y(z):
   Obs.: condição inicial: $y(-1) = 8$

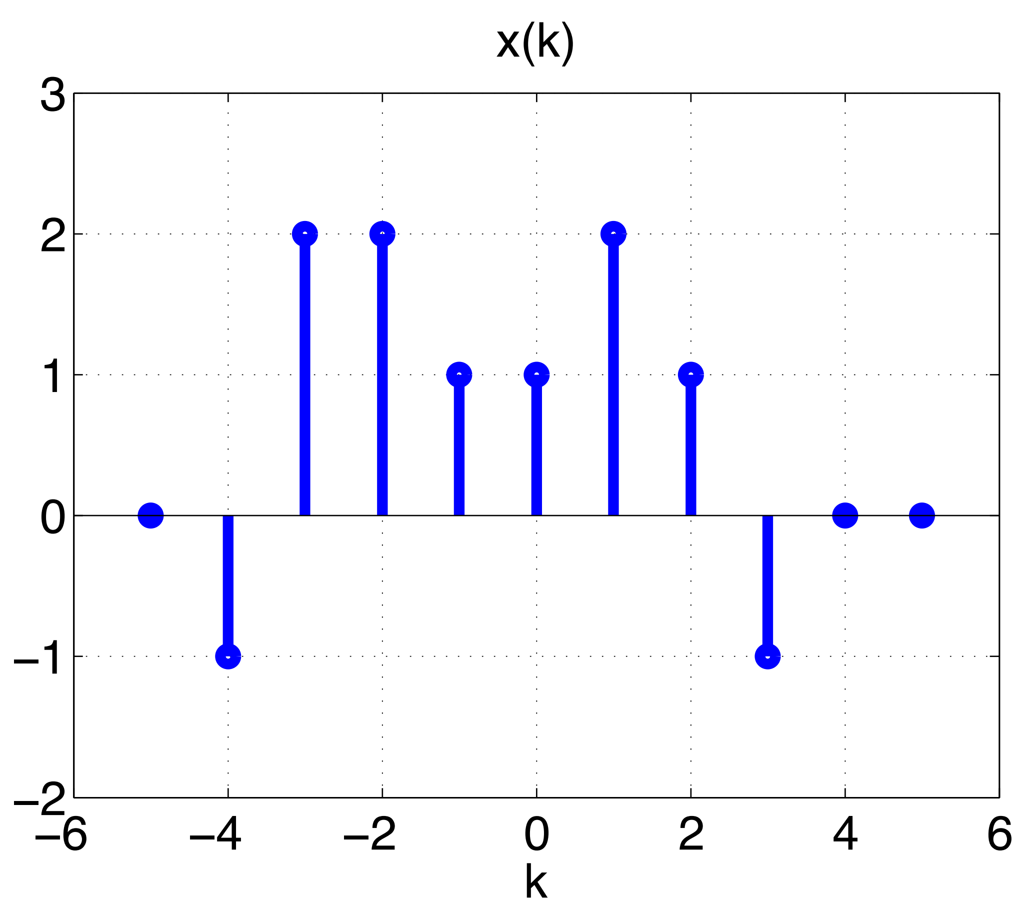
$$\left\{ \begin{array}{rcl} y(0) & = & 4 \\ y(1) & = & 1 \\ y(2) & = & 1 \\ y(3) & = & 0,5 \\ & \vdots & \\ y(k)_{k\to\infty} & = & ? \end{array} \right.$$

Problemas

5. Esboce os sinais resultantes para:

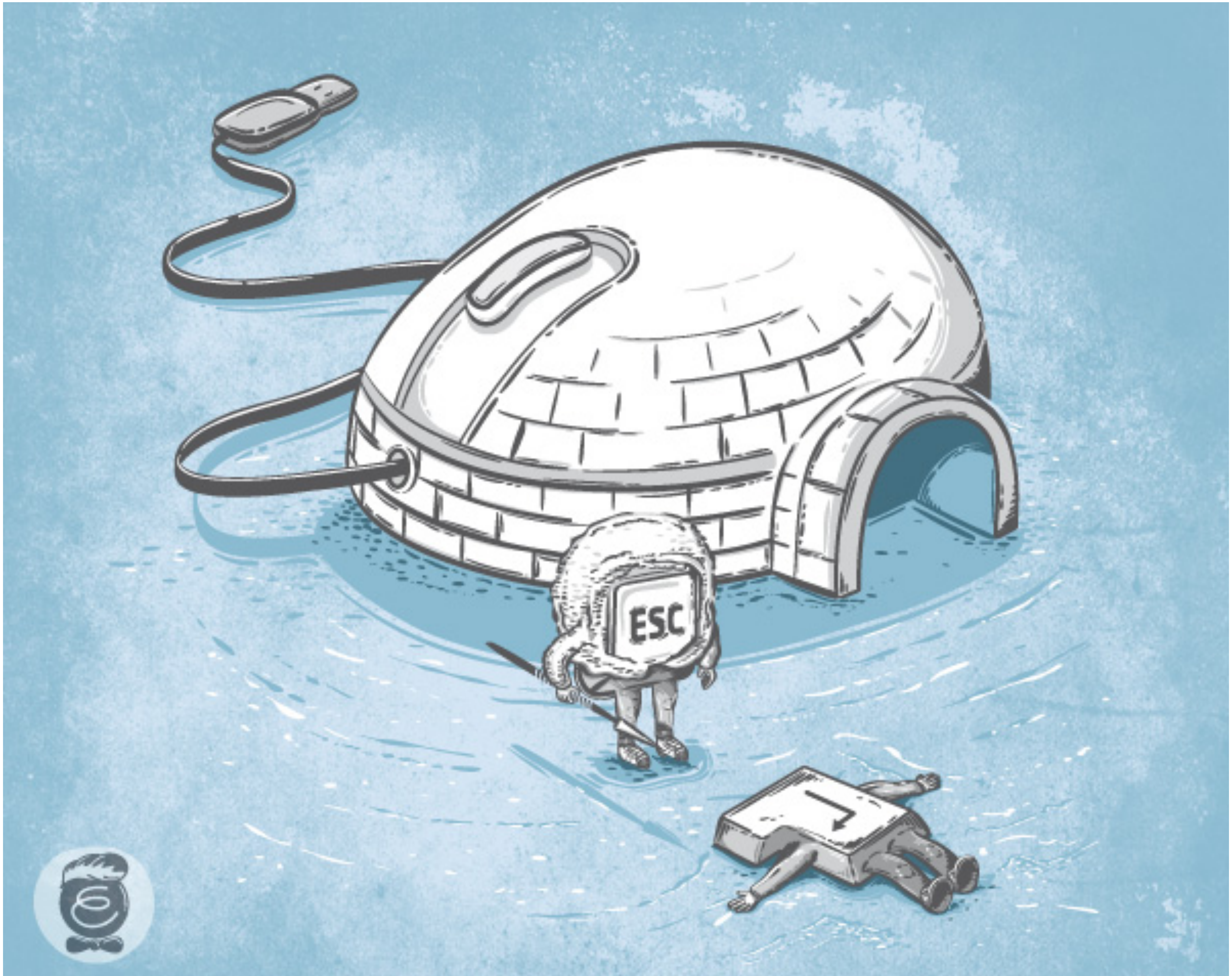


$$
\begin{array}{lll}
a) & x(t-2) & \leftarrow \text{Deslocamento no tempo} \\
b) & x(1-t) & \\
c) & x(-t+1) & \leftarrow \text{Reflexão de sinal + Deslocamento no tempo}
\end{array}
$$



$$x_E(k) = \frac{1}{2}\{x(k) + x(-k)\}$$

$$x_O(k) = \frac{1}{2}\{x(k) - x(-k)\}$$


ESC