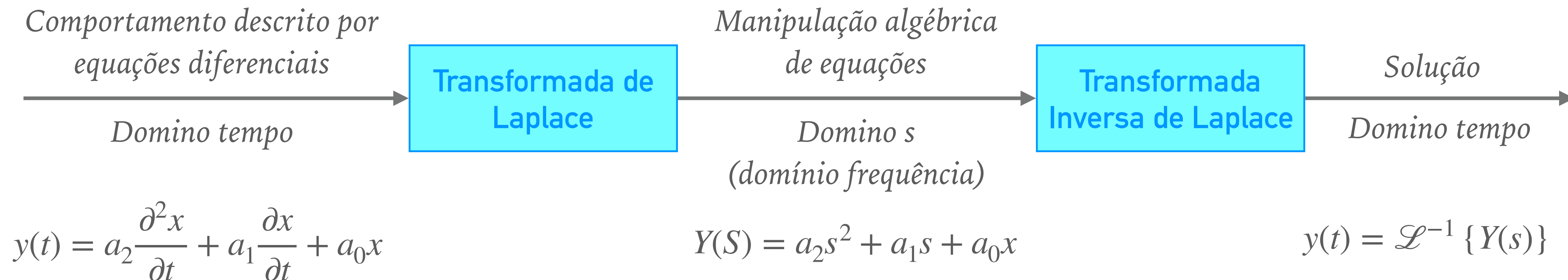


# 3) TRANSFORMADA DE LAPLACE

*Controle Automático I*  
*Prof. Fernando Passold*  
*2022*

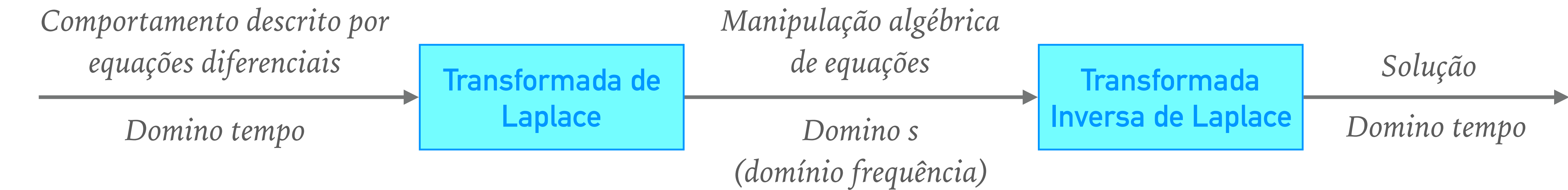


# INTRODUÇÃO



- Equações diferenciais que descrevem como um sistema se comporta com o tempo, são transformadas em relações algébricas não envolvendo o tempo, em que podemos realizar manipulações algébricas mais simples (normais).
- O comportamento do sistema, originalmente no domínio tempo será transladado para o domínio  $s$ , no qual são realizadas a manipulações algébricas.
- Usamos uma transformada inversa, para obter a solução de volta no domínio tempo.

# INTRODUÇÃO



$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 r(t)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ Y(s) \}$$

- Na eq. Diferencial acima,  $y(t)$  se refere à saída,  $r(t)$  se refere à entrada, e  $a_i$  e  $b_i$  se referem à parâmetros do sistema.
- Origem das Equações diferenciais: Lei das malhas (somatório de d.d.p.'s) de Kischoff, lei dos nós (somatório das correntes) e leis de Newton (o somatório das forças é nula; ou somatório dos momentos é nulo).

# DEFINIÇÃO

- O matemático francês P.S. de Laplace (1749–1827) descobriu um meio de resolver equações diferenciais: multiplicar cada termo na equação por  $e^{-st}$  e então integrar cada termo em relação ao tempo de zero para infinito:

$$\mathcal{L} \{f(t)\} = F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

onde:  $s = \sigma + j\omega$ , é uma variável complexa.

- A transformada inversa de Laplace é dada por:

$$\mathcal{L}^{-1} \{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds = f(t) u(t)$$

onde  $u(t)$  = função degrau:  $u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0; \end{cases}$

A notação para o limite inferior significa que mesmo que  $f(t)$  seja descontínuo em  $t = 0$ , podemos iniciar a integração antes da descontinuidade desde que a integral convirja. Assim, podemos encontrar a transformada de Laplace das funções impulso. Esta propriedade tem vantagens distintas ao aplicar a transformada de Laplace à solução de equações diferenciais onde as condições iniciais são descontínuas em  $t = 0$ .

# DEFINIÇÃO

---

- O matemático francês P.S. de Laplace (1749–1827) descobriu um meio de resolver equações diferenciais: multiplicar cada termo na equação por  $e^{-st}$  e então integrar cada termo em relação ao tempo de zero para infinito:

$$\mathcal{L} \{f(t)\} = F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

onde:  $s = \sigma + j\omega$ , é uma variável complexa.

- A transformada inversa de Laplace é dada por:

$$\mathcal{L}^{-1} \{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds = f(t) u(t)$$

onde  $u(t)$  = função degrau:  $u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0; \end{cases}$

- Exemplo: Seja um resistor  $R$ , por onde passa a corrente  $i$  e seja  $v$  a d.d.p. sobre ele. Geralmente escrevemos:

$$v = Ri$$

Se  $v$  e  $i$  são ambas funções do tempo, podemos escrever:

$$v(t) = Ri(t)$$

Tomando a transformada de Laplace de  $i$  e  $v$ , a equação anterior torna-se:

$$V(s) = RI(s)$$

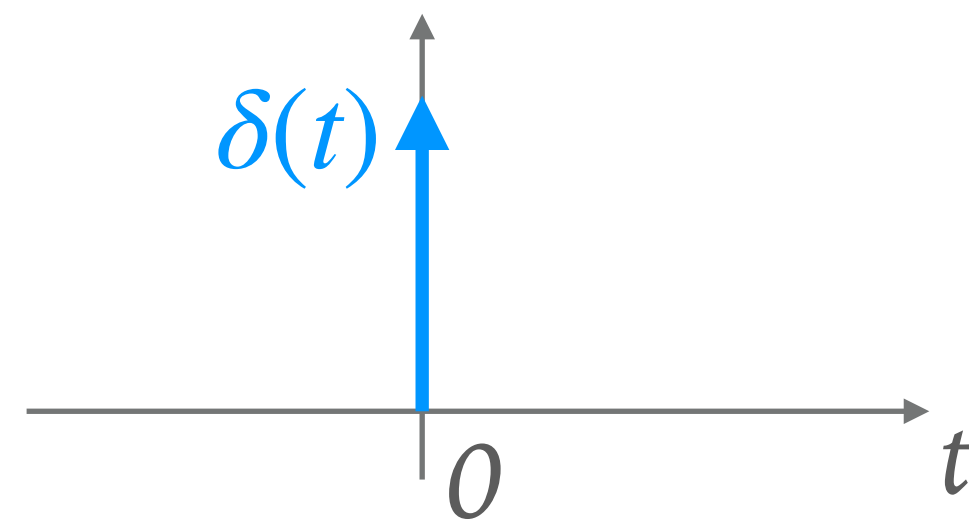
# TRANSFORMADA DE LAPLACE FUNÇÃO IMPULSO

---

► Definição:  $\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \forall 0^- < t < 0^+; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

►  $\mathcal{L} \{ \delta(t) \} = 1$

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$$





# TRANSFORMADA DE LAPLACE DA FUNÇÃO DEGRAU

► A equação para esta função é:  $f(t) = A \cdot u(t)$ ; (degrau de amplitude  $A$ ), onde:  $u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

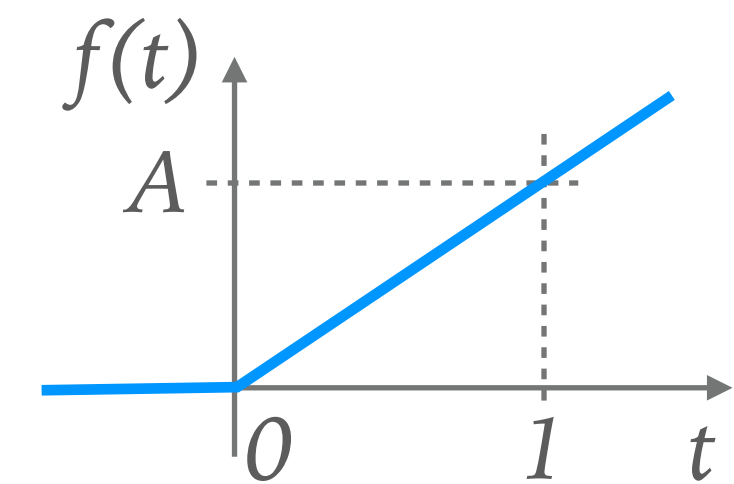
► Solução:

$$F(s) = \int_0^{\infty} A e^{-st} dt = A \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{A}{s} (e^{-st}) \Big|_0^{\infty}$$

quando  $t = \infty$ , o valor de  $e^{-\infty}$  é 0; e quando  $t = 0$ , o valor de  $e^{-0} = 1$ .

Então:

$$F(s) = \frac{A}{s}$$



# TRANSFORMADA DE LAPLACE FUNÇÃO EXPONENCIAL

► Encontrar a transformada de Laplace de:  $f(t) = Ae^{-at}u(t)$ .

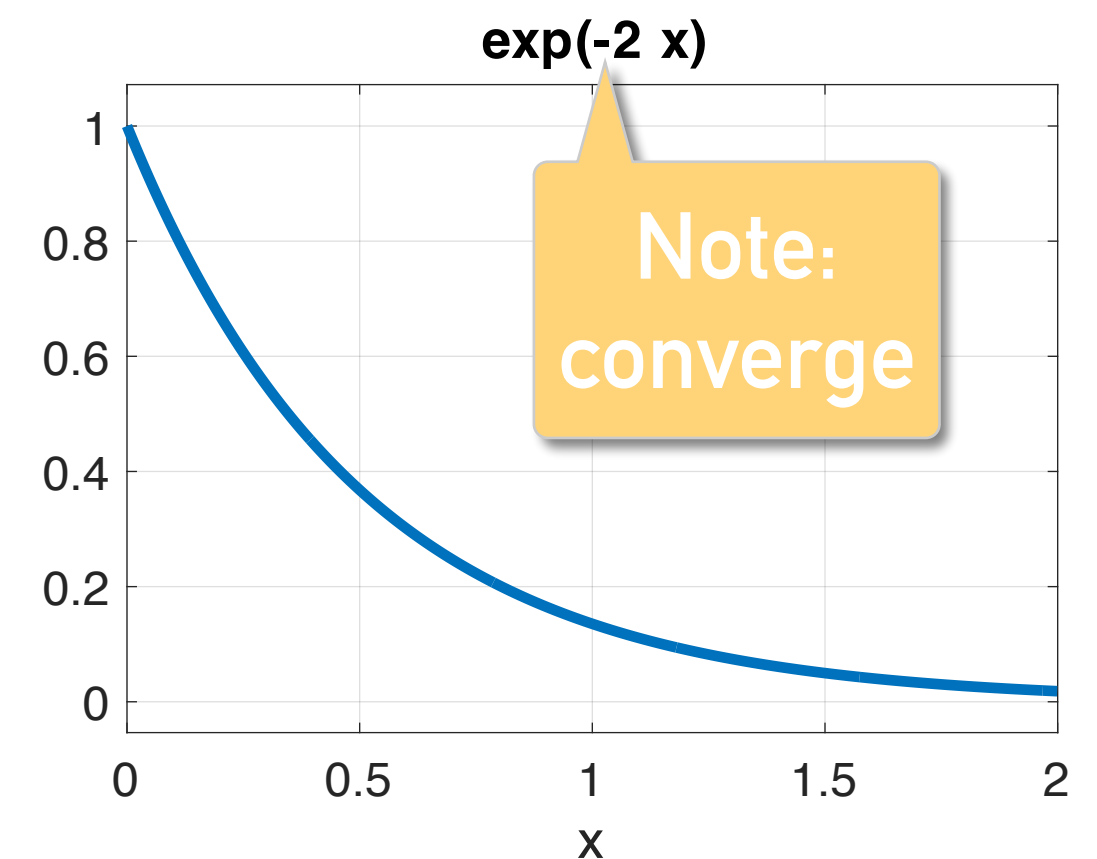
*Solução:*

*Como a função não contém uma função de impulso, podemos substituir o limite inferior da Eq. De definição da transformada de Laplace por 0.*

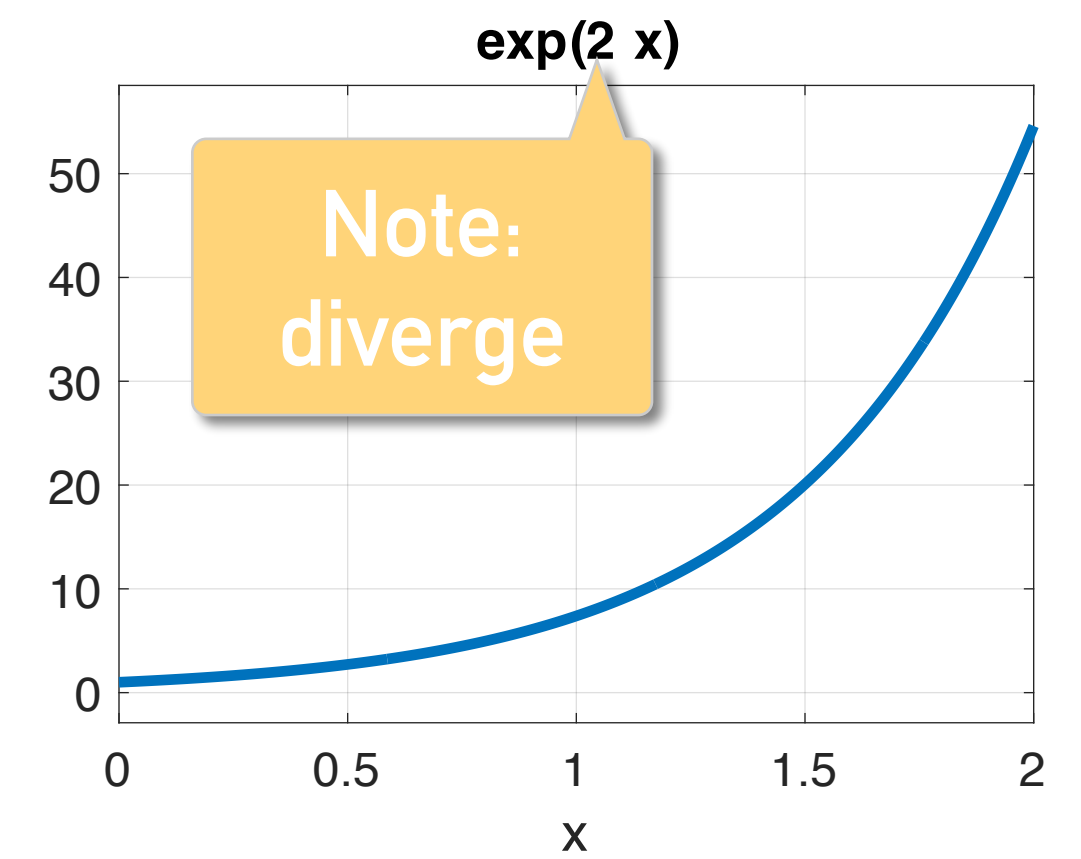
*Portanto,*

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} Ae^{-ate^{-st}}dt = A \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t}dt$$

$$F(s) = -\frac{A}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{A}{s+a}$$



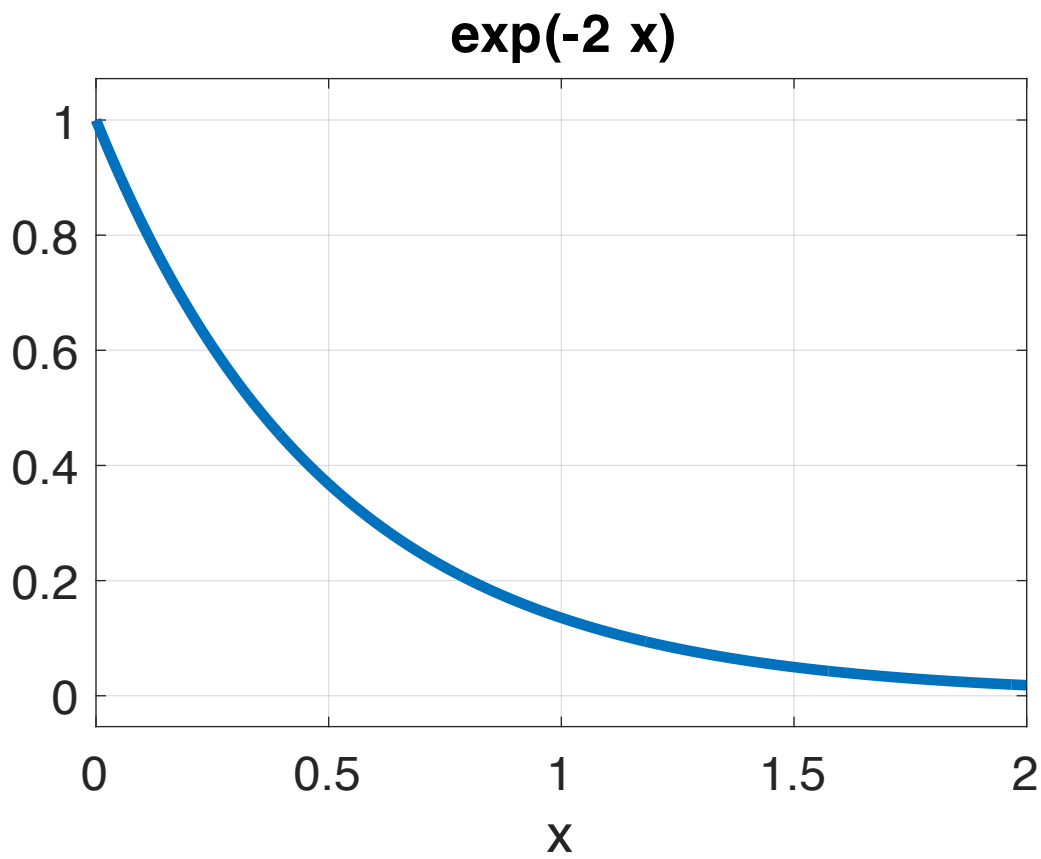
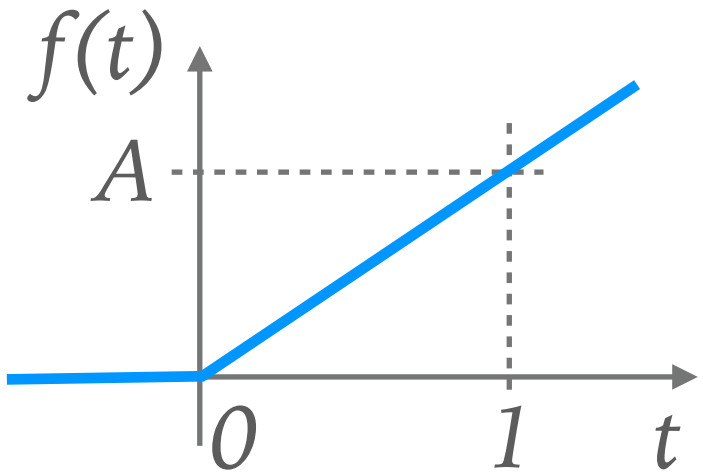
`>> ezplot('exp(-2*x)',[0 2])`



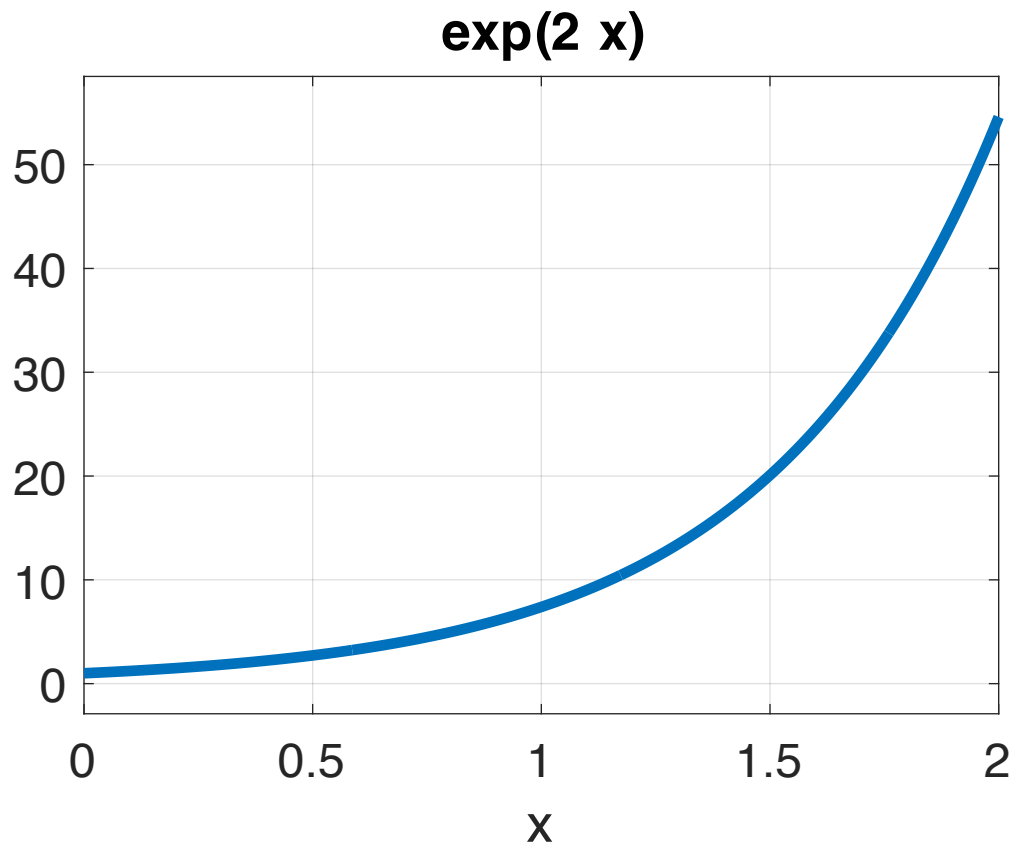
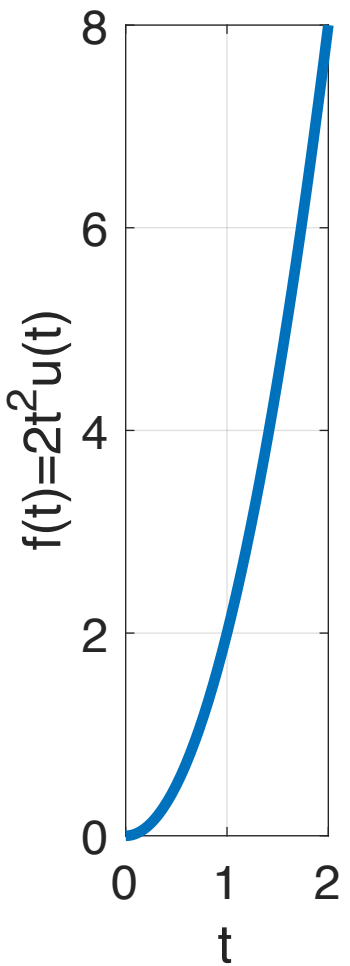


# TABELA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

#	Obs.	$f(t)$	$F(s)$
1.	Impulso	$\delta(t)$	1
2.	Degrau	$A \cdot u(t)$	$A \cdot \frac{1}{s}$
3.	Reta	$A \cdot t \cdot u(t)$	$A \cdot \frac{1}{s^2}$
4.	Polinômio	$t^n \cdot u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5.	Exponencial	$B \cdot e^{-(a \cdot t)} \cdot u(t)$	$\frac{B}{s+a}$
6.	Senóide	$\sin(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
7.	Cosseno	$\cos(\omega t) u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$



>> ezplot('exp(-2\*x)',[0 2])



# PROPRIEDADES TRANSFORMADA DE LAPLACE

#	Propriedade	Nome
1.	$\mathcal{L} \{f(t)\} = F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$	Definição
2.	$\mathcal{L} \{kf(t)\} = kF(s)$	Linearidade
3.	$\mathcal{L} \{f_1(t) + f_2(t)\} = F_1(s) + F_2(s)$	Linearidade
4.	$\mathcal{L} \{e^{-at}f(t)\} = F(s + a)$	Deslocamento em frequência
5.	$\mathcal{L} \{f(t - T)\} = e^{-sT}F(s)$	Deslocamento no tempo
6.	$\mathcal{L} \{f(at)\} = \frac{1}{a}F(s)$	Escalonamento
7.	$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial f(t)}{\partial t} \right\} = sF(s) - f(0-)$	Diferenciação
8.	$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} \right\} = s^2F(s) - sf(0-) - f'(0-)$	Diferenciação
9.	$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n} \right\} = s^nF(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k}f^{k-1}(0-)$	Diferenciação
10.	$\mathcal{L} \left\{ \int_{0-}^t f(\tau)\partial\tau \right\} = \frac{F(s)}{s}$	Integração
11.	$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$	Teorema Valor Final
12.	$f(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$	Teorema Valor Inicial



# EXEMPLO TRANSFORMADA INVERSA DE

► Encontre a transformada inversa de Laplace de:

$$F(s) = \frac{1}{(s + 3)^2}.$$

Solução:

Para resolver este item vamos fazer uso da teorema do deslocamento em frequência, item (4) da tabela anterior e lembrar da transformada de Laplace de  $f(t) = tu(t)$  (item 3 da tabela anterior).

Se a transformada inversa de  $F(s) = 1/s^2$  é  $tu(t)$ , então a transformada inversa de  $F(s + a) = 1/(s + a)^2$  é  $e^{-at}tu(t)$ .

Assim:

$$f(t) = e^{-3t}tu(t).$$

#	Propriedade	Nome
1.	$\mathcal{L} \{f(t)\} = F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$	Definição
2.	$\mathcal{L} \{kf(t)\} = kF(s)$	Linearidade
3.	$\mathcal{L} \{f_1(t) + f_2(t)\} = F_1(s) + F_2(s)$	Linearidade
4.	$\mathcal{L} \{e^{-at}f(t)\} = F(s + a)$	Deslocamento em frequência
5.	$\mathcal{L} \{f(t - T)\} = e^{-sT}F(s)$	Deslocamento no tempo
6.	$\mathcal{L} \{f(at)\} = \frac{1}{a}F(s)$	Escalonamento
7.	$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial f(t)}{\partial t} \right\} = sF(s) - f(0-)$	Diferenciação
8.	$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} \right\} = s^2F(s) - sf(0-) - f'(0-)$	Diferenciação
9.	$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n} \right\} = s^nF(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k}f^{k-1}(0-)$	Diferenciação
10.	$\mathcal{L} \left\{ \int_{0-}^t f(\tau)d\tau \right\} = \frac{F(s)}{s}$	Integração
11.	$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$	Teorema Valor Final
12.	$f(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$	Teorema Valor Inicial

# EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS

- Para encontrar a transformada de Laplace inversa de uma função complicada, podemos converter a função em uma soma de termos mais simples para os quais conhecemos a transformada de Laplace de cada termo. O resultado é chamado de expansão de frações parciais.


- Se  $F_1(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ , onde a ordem de  $N(s)$  é menor que a ordem de  $D(s)$  então uma expansão em frações parciais pode ser realizada.

- Se a ordem de  $N(s)$  é maior ou igual que a ordem de  $D(s)$ , então  $N(s)$  deve ser dividido por  $D(s)$  sucessivamente até que o resultando alcance um numerador possua ordem menor que o denominador. Por exemplo:

$$F_1(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 6s + 7}{s^2 + s + 5}$$

devemos realizar a divisão, assim:

$$F_1(s) = s + 1 + \frac{2}{s^2 + s + 5}$$



$$\begin{array}{r} s^3 + 2s^2 + 6s + 7 \\ -s^3 - 1s^2 - 5s \\ \hline s^2 + s + 7 \\ -s^2 - s - 5 \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} s^2 + s + 5 \\ s + 1 \\ \hline \end{array}$$

E então realizamos a transformada inversa de Laplace, obtendo:

$$f_1(t) = \frac{\partial \delta(t)}{\partial t} + \delta(t) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s^2 + s + 5} \right\}$$

E então usando expansão em frações parciais, expandimos  $F(s) = 1/(s^2 + s + 5)$ .



# EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS (2)

---

- Expandindo:  $F(s) = 1/(s^2 + s + 5)$ .
- 3 Casos:
  - 1) raízes reais e distintas:
  - 2) raízes reais repetidas:
  - 3) raízes complexas: 

```
>> roots([1 1 5])
```

```
ans =
```

```
    -0.5 +    2.1794i
```

```
    -0.5 -    2.1794i
```

# EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS – CASO DE RAÍZES REAIS E DISTINTAS

- Exemplo, seja:  $F(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$  (1).
- Esta função possui raízes em:  $s = -1$  e  $s = -2$ .
- Então podemos re-escrever a expressão acima como:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{R_1}{(s+1)} + \frac{R_2}{(s+2)} \quad (2)$$

onde  $R_1$  e  $R_2$  são os chamados “resíduos”, que podem ser calculados da seguinte forma:

- Para encontrar  $R_1$ , multiplicamos a eq. (2) por  $(s+1)$ , o que isola  $R_1$ :

$$\frac{\cancel{(s+1)} 2}{\cancel{(s+1)}(s+2)} = R_1 + \frac{(s+1)R_2}{(s+2)}$$
$$R_1 = \frac{2}{(s+2)} - \frac{(s+1)R_2}{(s+2)}$$

quando fazemos  $s$  valer  $-1$ , cancelamos o termo  $R_2$  e obtemos então:

$$R_1 = \frac{2}{(-1+2)} - \frac{\cancel{(-1+1)}^0 R_2}{(-1+2)} = 2$$

$$\text{Eq.: } ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Ou simplesmente:

>> roots([1 3 2])

ans =

-2

-1

>>



# EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS – CASO DE RAÍZES REAIS E DISTINTAS

- Exemplo, seja:  $F(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$  (1).
- Esta função possui raízes em:  $s = -1$  e  $s = -2$ .
- Então podemos re-escrever a expressão acima como:  

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{R_1}{(s+1)} + \frac{R_2}{(s+2)} \quad (2)$$
 onde  $R_1$  e  $R_2$  são os chamados “resíduos”, que podem ser calculados da seguinte forma:
  - Para encontrar  $R_1$ , multiplicamos a eq. (2) por  $(s+1)$ , o que isola  $R_1$ :  

$$\frac{2(s+1)}{(s+1)(s+2)} = R_1 + \frac{(s+1)R_2}{(s+2)}$$

$$R_1 = \frac{2}{(s+2)} - \frac{(s+1)R_2}{(s+2)}$$
 quando fazemos  $s$  valer  $-1$ , cancelamos o termo  $R_2$  e obtemos então:  

$$R_1 = \frac{2}{(-1+2)} - \frac{(-1+1)^0 R_2}{(-1+2)} = 2$$

- E  $R_2$  pode ser encontrado da mesma forma, multiplicando (2) por  $(s+2)$ :

$$\frac{2(s+2)}{(s+1)(s+2)} = \frac{R_1(s+2)}{(s+1)} + R_2$$

e então fazendo  $s$  valer  $-2$ :

$$R_2 = \frac{2}{(-2+1)} - \frac{R_1(-2+2)^0}{(-2+1)} = -2$$

- E assim (1) se transforma em:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{(s+1)} - \frac{2}{(s+2)}$$

- O que rende a seguinte transformada inversa de Laplace:  
 $f(t) = (2e^{-2} - 2e^{-2t})u(t)$

#	Obs.	$f(t)$	$F(s)$
5.	Exponencial	$B \cdot e^{-(a \cdot t)} \cdot u(t)$	$\frac{B}{s+a}$

# EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS – CASO DE RAÍZES REAIS E DISTINTAS

---

► De forma geral:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} = \frac{R_1}{(s + p_1)} + \frac{R_2}{(s + p_2)} + \dots + \frac{R_n}{(s + p_n)}$$

onde cada um dos resíduos  $R_i$  pode ser calculado multiplicando a eq. acima pela correspondente fração parcial.

Assim, se desejamos encontrar  $R_i$ , multiplicamos a eq. acima por  $(s + p_i)$  e vamos obter algo como:

$$\begin{aligned} (s + p_i)F(s) &= \frac{(s + p_i)N(s)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_i) \cdots (s + p_n)} \\ &= (s + p_i)\frac{R_1}{(s + p_1)} + (s + p_i)\frac{R_2}{(s + p_2)} + \dots + K_i + \dots + (s + p_i)\frac{R_n}{(s + p_n)} \end{aligned}$$

fazendo  $s = -p_i$ , obtemos:

$$R_i = (s + p_i)F(s) \Big|_{s=-p_i} = \frac{\cancel{(s + p_i)} N(s)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots \cancel{(s + p_i)} \cdots (s + p_n)} \Big|_{s=-p_i}$$



# EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS – CASO DE RAÍZES REAIS E DISTINTAS – EXEMPLO

➤ Dado a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 12\frac{dy(t)}{dt} + 32y(t) = 32u(t)$$

resolva para  $y(t)$  se as condições iniciais forem nulas.

Usar transformada de Laplace.

Tabela de Transformadas:

#	Obs.	$f(t)$	$F(s)$
2.	Degrau	$A \cdot u(t)$	$A \cdot \frac{1}{s}$

➤ Solução:

Usando uma tabela de transformadas de Laplace, suas Propriedades e lembrando das condições iniciais ( $y(0^-) = 0$  e  $\dot{y}(0^-) = 0$ ) temos que:

$$s^2Y(s) + 12sY(s) + 32Y(s) = \frac{32}{s}$$

Isolando  $Y(s)$ , temos:

$$Y(s) = \frac{32}{s(s^2 + 12s + 32)} = \frac{32}{s(s + 4)(s + 8)}$$

Expandindo  $Y(s)$ , teremos:

$$Y(s) = \frac{32}{s(s + 4)(s + 8)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{(s + 4)} + \frac{R_3}{(s + 8)}$$

Encontrando os resíduos:

#	Propriedade	Nome
7.	$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial f(t)}{\partial t} \right\} = sF(s) - f(0-)$	Diferenciação
8.	$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} \right\} = s^2F(s) - sf(0-) - f'(0-)$	Diferenciação

$$y(t) = (1 - 2e^{-4t} + e^{-8t}) u(t)$$

# EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS – CASO DE RAÍZES REAIS E DISTINTAS – EXEMPLO

► Dado a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 12\frac{dy(t)}{dt} + 32y(t) = 32u(t)$$

resolva para  $y(t)$  se as condições iniciais forem nulas.

Usar transformada de Laplace.

► Solução:

Usando uma tabela de transformadas de Laplace, suas Propriedades e lembrando das condições iniciais ( $y(0^-) = 0$  e  $\dot{y}(0^-) = 0$ ) temos que:

$$s^2Y(s) + 12sY(s) + 32Y(s) = \frac{32}{s}$$

Isolando  $Y(s)$ , temos:

$$Y(s) = \frac{32}{s(s^2 + 12s + 32)} = \frac{32}{s(s + 4)(s + 8)}$$

Expandindo  $Y(s)$ , teremos:

$$Y(s) = \frac{32}{s(s + 4)(s + 8)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{(s + 4)} + \frac{R_3}{(s + 8)}$$

Encontrando os resíduos:

#	Obs.	$f(t)$	$F(s)$
2.	Degrau	$A \cdot u(t)$	$A \cdot \frac{1}{s}$
5.	Exponencial	$B \cdot e^{-(a \cdot t)} \cdot u(t)$	$\frac{B}{s + a}$

$$R_1 = \left. \frac{32 \cdot s}{s(s + 4)(s + 8)} \right|_{s=0} = \frac{32}{(4)(8)} = 1$$

$$R_2 = \left. \frac{32 \cdot \cancel{(s + 4)}}{s\cancel{(s + 4)}(s + 8)} \right|_{s=-4} = \frac{32}{(-4)(-4 + 8)} = -2$$

$$R_3 = \left. \frac{32 \cdot \cancel{(s + 8)}}{s(s + 4)\cancel{(s + 8)}} \right|_{s=-8} = \frac{32}{(-8)(-8 + 4)} = 1$$

E então:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{(s + 4)} + \frac{1}{(s + 8)}$$

E então finalmente:

$$y(t) = (1 - 2e^{-4t} + e^{-8t}) u(t)$$

# EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS – CASO DE RAÍZES REAIS E REPETIDAS

► Exemplo:  $F(s) = \frac{2}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4} = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2}$  (1)

► O denominador de  $F(s)$  possui **raízes duplas** em  $s = -2$ .

► A expansão em frações parciais de (1) rende:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{R_1}{(s+1)} + \frac{R_2}{(s+2)^2} + \frac{R_3}{(s+2)} \quad (2)$$

►  $R_1$  pode ser encontrado como já realizado antes:

$$R_1 = \frac{2\cancel{(s+1)}}{\cancel{(s+1)}(s+2)^2} \Big|_{s=-1} = \frac{2}{(-1+2)^2} = 2$$

►  $R_2$  pode ser calculado, multiplicando-se a eq. (2) por  $(s+2)^2$ , o que leva à:

$$\frac{2}{(s+1)} = (s+2)^2 \frac{R_1}{(s+1)} + R_2 + (s+2)R_3 \quad (3)$$

$$R_2 = \frac{2}{(s+1)} - (s+2)^2 \frac{R_1}{(s+1)} - (s+2)R_3$$

e depois fazendo  $s = -2$ , o que leva à:

$$R_2 = \frac{2}{(-2+1)} - \cancel{(-2+2)^0} \frac{R_1}{(-2+1)} + \cancel{(-2+2)^0} R_3 = -2$$

► Mas para determinar  $R_3$ , precisamos **diferenciar** a eq. (3) em relação à  $s$ :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{2}{(s+1)} \right] = 2 \cdot \frac{(-1)}{(s+1)^2} = \frac{-2}{(s+1)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{(s+2)^2 R_1}{(s+1)} \right] = R_1 \left[ \frac{(2s+4)}{(s+1)} - \frac{(s+2)^2}{(s+1)^2} \right] = R_1 \left[ \frac{(2s+4)(s+1) - (s+2)^2}{(s+1)^2} \right]$$

$$= R_1 \left[ \frac{(2s^2 + 6s + 4) - (s^2 + 4s + 4)}{(s+1)^2} \right] = R_1 \left[ \frac{s^2 + 2s}{(s+1)^2} \right] = R_1 \left[ \frac{s(s+2)}{(s+1)^2} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial s} [(s+2)R_3] = 1 \cdot R_3$$

Juntando a expressão com as 3 derivadas da eq. (3):

$$\frac{-2}{(s+1)^2} = \frac{(s+2)s}{(s+1)^2} R_1 + R_3$$

$$R_3 = \frac{-2}{(s+1)^2} - \frac{(s+2)s}{(s+1)^2} R_1$$

fazendo-se  $s = -2$ , teremos agora:

$$R_3 = \frac{-2}{(-2+1)^2} - \frac{\cancel{(-2+2)^0}(-2)}{(-2+1)^2} R_1 = -2$$

► Finalmente:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{2}{(s+1)} - \frac{2}{(s+2)^2} - \frac{2}{(s+2)}$$



# EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS – CASO DE RAÍZES REAIS E REPETIDAS

- Exemplo:  $F(s) = \frac{2}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4} = \frac{2}{(s + 1)(s + 2)^2}$   
(1)
- O denominador de  $F(s)$  possui **raízes duplas** em  $s = -2$ .
- A expansão em frações parciais de (1) rende:  
$$F(s) = \frac{2}{(s + 1)(s + 2)^2} = \frac{R_1}{(s + 1)} + \frac{R_2}{(s + 2)^2} + \frac{R_3}{(s + 2)}$$
- Encontrando os resíduos temos:  
$$F(s) = \frac{2}{(s + 1)(s + 2)^2} = \frac{2}{(s + 1)} - \frac{2}{(s + 2)^2} - \frac{2}{(s + 2)}$$
- Consultando-se uma tabela de transformadas de Laplace, temos então que:  
$$f(t) = 2e^{-t} - 2te^{-2t} - 2e^{-2t}$$

#	Obs.	$f(t)$	$F(s)$
1.	Impulso	$\delta(t)$	1
2.	Degrau	$A \cdot u(t)$	$A \cdot \frac{1}{s}$
3.	Reta	$A \cdot t \cdot u(t)$	$A \cdot \frac{1}{s^2}$
4.	Polinômio	$t^n \cdot u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5.	Exponencial	$B \cdot e^{-(a \cdot t)} \cdot u(t)$	$\frac{B}{s + a}$
6.	Senóide	$\sin(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
7.	Cosseno	$\cos(\omega t) u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

# EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS – CASO DE RAÍZES REAIS E REPETIDAS

► Exemplo:  $F(s) = \frac{2}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4} = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2}$  (1)

► O denominador de  $F(s)$  possui **raízes duplas** em  $s = -2$ .

► A expansão em frações parciais de (1) rende:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{R_1}{(s+1)} + \frac{R_2}{(s+2)^2} + \frac{R_3}{(s+2)} \quad (2)$$

De forma geral:

Se  $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s+p_1)^r(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$ , então:

$$F(s) = \frac{R_1}{(s+p_1)^r} + \frac{R_2}{(s+p_1)^{r-1}} + \dots + \frac{R_r}{(s+p_1)} + \frac{R_{r+1}}{(s+p_2)} + \dots + \frac{R_n}{(s+p_n)} \quad (1)$$

Para encontrar  $K_1$  até  $K_r$ , temos que primeiramente multiplicar a eq. (1) por  $(s+p_1)^r$ , obtendo  $F_1(s)$  que é:

$$F_1(s) = (s+p_1)^r F(s) = \frac{(s+p_1)^r N(s)}{(s+p_1)^r(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

$$F_1(s) = R_1 + (s+p_1)R_2 + (s+p_1)^2R_3 + \dots + (s+p_1)^{r-1}R_r + \frac{R_{r+1}(s+p_1)^r}{(s+p_2)} + \dots + \frac{K_n(s+p_1)^r}{(s+p_n)}.$$

E então os resíduos são calculados na forma:

$$K_i = \frac{1}{(i-1)!} \cdot \frac{d^{i-1} F_1(s)}{ds^{i-1}} \Big|_{s=-p_i} \quad i = 1, 2, \dots, r; \quad 0! = 1$$

► Mas para determinar  $R_3$ , necessitamos diferenciar a eq. (3) em relação à  $s$ :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{2}{(s+1)} \right] = 2 \cdot \frac{(-1)}{(s+1)^2} = \frac{-2}{(s+1)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{(s+2)^2 R_1}{(s+1)} \right] = R_1 \left[ \frac{(2s+4)}{(s+1)} - \frac{(s+2)^2}{(s+1)^2} \right] = R_1 \left[ \frac{(2s+4)(s+1) - (s+2)^2}{(s+1)^2} \right]$$

$$= R_1 \left[ \frac{(2s^2 + 6s + 4) - (s^2 + 4s + 4)}{(s+1)^2} \right] = R_1 \left[ \frac{s^2 + 2s}{(s+1)^2} \right] = R_1 \left[ \frac{s(s+2)}{(s+1)^2} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial s} [(s+2) R_3] = 1 \cdot R_3$$

Juntando a expressão com as 3 derivadas da eq. (3):

$$\frac{-2}{(s+1)^2} = \frac{(s+2)s}{(s+1)^2} R_1 + R_3$$

$$R_3 = \frac{-2}{(s+1)^2} - \frac{(s+2)s}{(s+1)^2} R_1$$

fazendo-se  $s = -2$ , teremos agora:

$$R_3 = \frac{-2}{(-2+1)^2} - \frac{(-2+2)^0(-2)}{(-2+1)^2} R_1 = -2$$

► Finalmente:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{2}{(s+1)} - \frac{2}{(s+2)^2} - \frac{2}{(s+2)}$$

# EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS – CASO DE RAÍZES COMPLEXAS

► Exemplo:  $F(s) = \frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)}$  (1)

cujas raízes resultam em:  $s = 0$  e  $s = -1 \pm j2$

A expansão em frações, neste caso, fica:

$$\frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2s + R_3}{(s^2 + 2s + 5)} \quad (2)$$

$R_1$  pode ser encontrado da forma usual e resultará em  $R_1 = 3/5$ :

$$R_1 = \frac{3 \cancel{s}}{\cancel{s}(s^2 + 2s + 5)} \Big|_{s=0} = \frac{3}{5}$$

Já  $R_2$  e  $R_3$  são encontrados, multiplicando a eq. (2) pelo menor denominador comum ( $s(s^2 + 2s + 5)$ ):

$$\frac{3 \cdot \cancel{s(s^2 + 2s + 5)}}{\cancel{s(s^2 + 2s + 5)}} = \frac{3 \cdot \cancel{s}(s^2 + 2s + 5)}{5 \cancel{s}} + \frac{(R_2s + R_3) \cdot s \cancel{(s^2 + 2s + 5)}}{\cancel{(s^2 + 2s + 5)}}$$

$$3 = \frac{3}{5}(s^2 + 2s + 5) + (R_2s + R_1)s$$

$$3 = \frac{3}{5}s^2 + \frac{6}{5}s + \frac{3}{\cancel{5}} \cdot \cancel{s} + R_2s^2 + R_1s$$

$$3 = \left( \frac{3}{5} + R_2 \right) s^2 + \left( \frac{6}{5} + R_3 \right) s + 3$$

Comparando os termos:

$$3 = \underbrace{\left( \frac{3}{5} + R_2 \right)}_{=0} s^2 + \underbrace{\left( \frac{6}{5} + R_3 \right)}_{=0} s + 3$$

Dai:  $R_2 = -\frac{3}{5}$  e  $R_3 = -\frac{6}{5}$ .

Finalmente:  $F(s) = \frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{3/5}{s} + \frac{(-3/5)s + (-6/5)}{s^2 + 2s + 5}$

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{5} \left( \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 5} \right)$$

```
>> roots([1 2 5])
ans =
-1 + 2i
-1 - 2i
```



# EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS – CASO DE RAÍZES COMPLEXAS

➤ Exemplo:  $F(s) = \frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)}$  (1)

cuja raízes resultam em:  $s = 0$  e  $s = -1 \pm j2$

➤ A expansão em frações, resulta:

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{3/5}{s} + \frac{(-3/5)s + (-6/5)}{s^2 + 2s + 5}$$

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{5} \left( \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 5} \right)$$

Com base em relações trigonométricas, pode-se escrever:

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \sqrt{1^2 + (1/2)^2} e^{-t} \left( \frac{1}{\sqrt{1^2 + (1/2)^2}} \cos 2t + \frac{1}{\sqrt{1^2 + (1/2)^2}} \sin 2t \right)$$

onde:

$$\cos \phi = 1/\sqrt{1^2 + (1/2)^2} \text{ e } \sin \phi = (1/2)/\sqrt{1^2 + (1/2)^2}$$

Assim:

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \sqrt{1^2 + (1/2)^2} e^{-t} (\cos \phi \cos 2t + \sin \phi \sin 2t)$$

➤ Adaptando ao nosso caso, temos:

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{5} \left[ \frac{(s + 1) + (1/2)(2)}{(s + 1)^2 + 2^2} \right]$$

➤ Consultando uma tabela de transformadas:

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} e^{-t} \left[ \cos(2t) + \frac{1}{2} \sin(2t) \right]$$

Ou:

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \sqrt{1^2 + (1/2)^2} e^{-t} [\cos(2t - \phi)]$$

onde  $\phi = \arctan(1/2) = 26,57^\circ$ , ou:

$$f(t) = 0,6 - 0,6 \cdot 1,118 e^{-t} \cos(2t + 26,57^\circ)$$

$$f(t) = 0,6 [1 - 1,118 e^{-t} \cos(2t + 26,57^\circ)]$$

# EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS – CASO DE RAÍZES COMPLEXAS

➤ Exemplo:  $F(s) = \frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)}$  (1)

cuja raízes resultam em:  $s = 0$  e  $s = -1 \pm j2$

➤ A expansão em frações, resulta:

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{3/5}{s} + \frac{(-3/5)s + (-6/5)}{s^2 + 2s + 5}$$

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{5} \left( \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 5} \right)$$

➤ O último termo envolve a transformadas de Laplace de uma função exponencial que amortece um cosseno e um seno:

$$\mathcal{L} \{ Ae^{-at} \cos(\omega t) \} = \frac{A(s + a)}{(s + a)^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L} \{ Be^{-at} \sin(\omega t) \} = \frac{B\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L} \{ Ae^{-at} \cos(\omega t) + Be^{-at} \sin(\omega t) \} = \frac{A(s + a) + B\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$$

➤ Adaptando ao nosso caso, temos:

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{5} \left[ \frac{(s + 1) + (1/2)(2)}{(s + 1)^2 + 2^2} \right]$$

➤ Consultando uma tabela de transformadas:

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} e^{-t} \left[ \cos(2t) + \frac{1}{2} \sin(2t) \right]$$

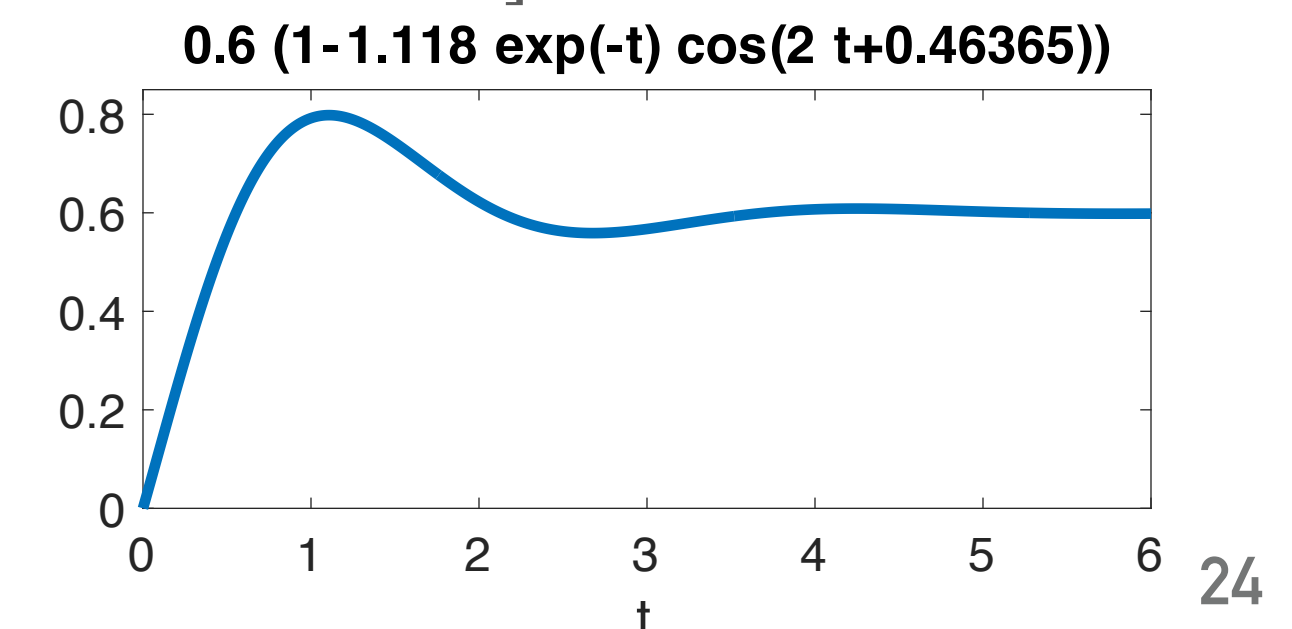
➤ Ou:

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \sqrt{1^2 + (1/2)^2} e^{-t} [\cos(2t - \phi)]$$

onde  $\phi = \arctan(1/2) = 26,57^\circ$ , ou:

$$f(t) = 0,6 - 0,6 \cdot 1,118 e^{-t} \cos(2t + 26,57^\circ)$$

$$f(t) = 0,6 [1 - 1,118 e^{-t} \cos(2t + 26,57^\circ)]$$



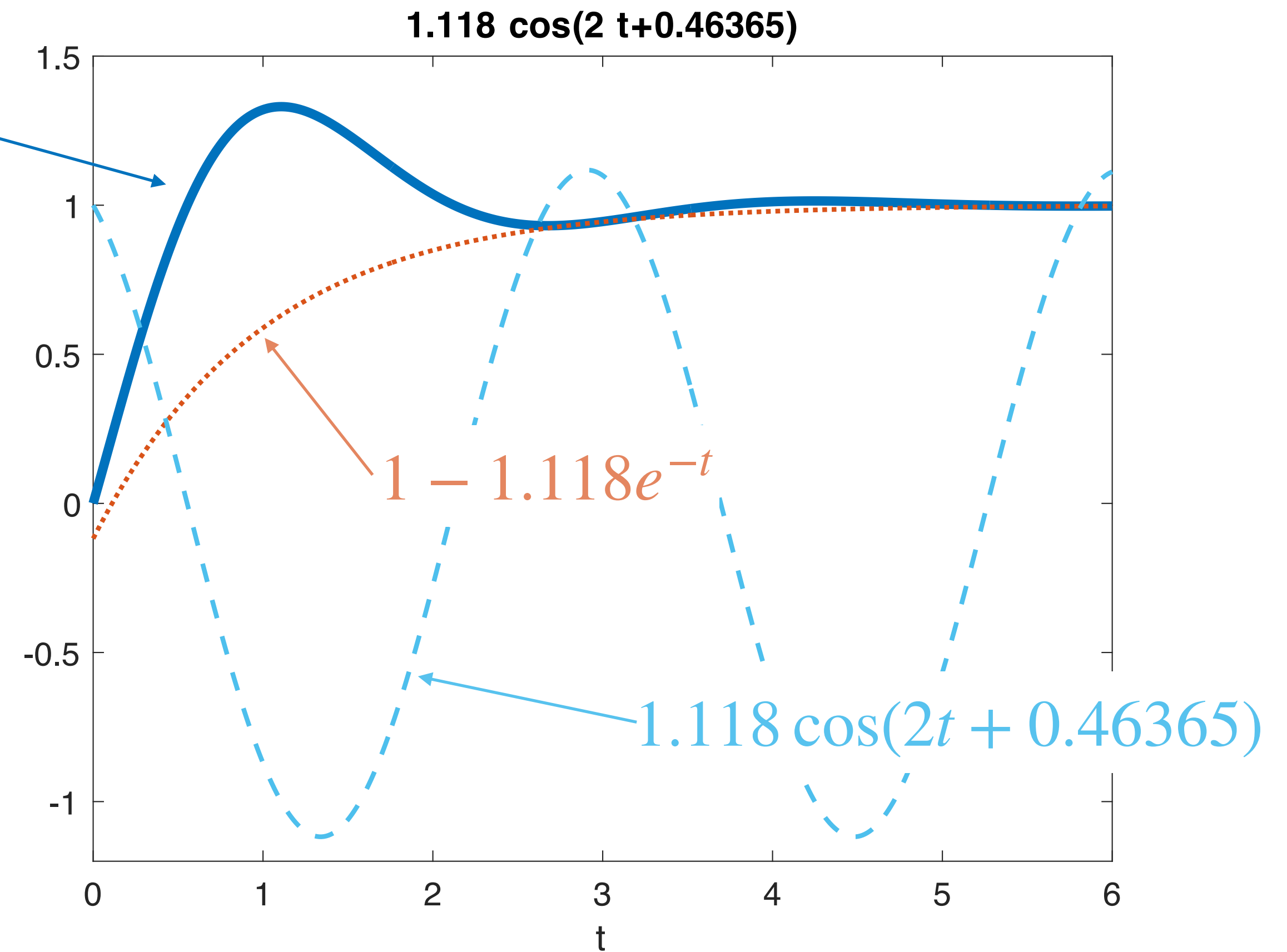
Comandos Matlab:

$$1 - 1.118e^{-t} \cos(2t + 0.46365)$$

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

$$f(t) = 0,6 \left[ 1 - 1,118e^{-t} \cos(2t + 26,57^\circ) \right]$$

```
>> atan(1/2)
ans =    0.46365 % (rad)
>> ezplot('1-1.118*exp(-t)*cos(2*t+0.46365)', [0 6])
>> hold on
>> ezplot('1-1.118*exp(-t)', [0 6])
>> ezplot('1.118*cos(2*t+0.46365)', [0 6])
>> axis([0 6 -1.2 1.5])
```





# EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS – CASO DE RAÍZES COMPLEXAS

► Outra forma de resolver:

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

Raízes de  $(s^2 + 2s + 5)$  são  $s = -1 \pm j2$ , então:

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{(s + 1 + j2)} + \frac{R_3}{(s + 1 - j2)}$$

$$R_1 = \frac{3 \cancel{s}}{\cancel{s}(s^2 + 2s + 5)} \Big|_{s=0} = \frac{3}{5}$$

$$R_2 = \frac{3}{s(s + 1 - j2)} \Big|_{s=-1-j2} = -\frac{3}{20}(2 + j1)$$

$R_3$  é o conjugado de  $R_2$ .

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{20} \left( \frac{2 + j1}{s + 1 + j2} + \frac{2 - j1}{s + 1 - j2} \right)$$

Lembrando relações trigonométricas:

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{20} [(2 + j1)e^{-(1+j2)t} + (2 - j1)e^{-(1-j2)t}]$$

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{20}e^{-t} \left[ 4 \left( \frac{e^{j2t} + e^{-j2t}}{2} \right) + 2 \left( \frac{e^{j2t} - e^{-j2t}}{2j} \right) \right]$$

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-t} \left( \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t \right)$$

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \sqrt{1^2 + (1/2)^2} (\cos 2t - \phi)$$

onde:  $\phi = \tan^{-1}(1/2) = 26,57^\circ$ .

Lembrando que:

$$\frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} = \cos \theta$$

e:

$$\frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} = \sin \theta$$

# USANDO MATLAB

- A função '[R,p,k]=residue(N,D)', onde:

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{R_n}{s - p_n} + \dots + \frac{R_2}{s - p_2} + \frac{R_1}{s - p_1} + k(s)$$

- Parâmetros de entrada:

N é o vetor que contém os coeficientes de  $N(s)$ ,

$$N = [b_m \quad b_{m-1} \quad \dots \quad b_1 \quad b_0];$$

D é o vetor que contém os coeficientes de  $D(s)$ ,

$$D = [a_n \quad a_{n-1} \quad \dots \quad a_1 \quad a_0];$$

- Parâmetros de saída:

R é o vetor que contém os resíduos,

$$R = [R_n \quad R_{n-1} \quad \dots \quad R_1 \quad R_0];$$

P é o vetor que relaciona os pólos (raízes de  $D(s)$ ),

$$p = [p_n \quad p_{n-1} \quad \dots \quad p_1 \quad p_0];$$

e k corresponde ao (eventual) polinômio resultante (quando  $\text{grau}\{N(s)\} > \text{grau}\{D(s)\}$ ; na maioria das vezes  $k=[ ]$ ).

Exemplo<sub>1</sub>:  $F(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$

```
>> N=2;  
>> D=[1 3 2];  
>> [R,p,k]=residue(N,D)
```

R =

-2

2

p =

-2

-1

k =

[]

```
>>
```

Ou seja:

$$F(s) = -\frac{2}{(s+2)} + \frac{2}{(s+1)} + 0$$

```
>> roots(D)
```

ans =

-2

-1

```
>>
```

# USANDO MATLAB

- A função '[R,p,k]=residue(N,D)', onde:

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{R_n}{s - p_n} + \dots + \frac{R_2}{s - p_2} + \frac{R_1}{s - p_1} + k(s)$$

- Parâmetros de entrada:

N é o vetor que contém os coeficientes de  $N(s)$ ,

$$N = [b_m \quad b_{m-1} \quad \dots \quad b_1 \quad b_0];$$

D é o vetor que contém os coeficientes de  $D(s)$ ,

$$D = [a_n \quad a_{n-1} \quad \dots \quad a_1 \quad a_0];$$

- Parâmetros de saída:

R é o vetor que contém os resíduos,

$$R = [R_n \quad R_{n-1} \quad \dots \quad R_1 \quad R_0];$$

P é o vetor que relaciona os pólos (raízes de  $D(s)$ ),

$$p = [p_n \quad p_{n-1} \quad \dots \quad p_1 \quad p_0];$$

e k corresponde ao (eventual) polinômio resultante (quando  $\text{grau}\{N(s)\} > \text{grau}\{D(s)\}$ ; na maioria das vezes  $k=[ ]$ ).

Exemplo<sub>2</sub>:  $F(s) = \frac{2}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$

```
>> N=2;  
>> D=[1 5 8 4];  
>> roots(D)  
ans =  
    -2  
    -2  
    -1
```

Ou seja:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{R_1}{(s+1)} + \frac{R_2}{(s+2)^2} + \frac{R_3}{(s+2)}$$

```
>> [R,p,k]=residue(N,D)  
R =  
    -2  
    -2  
     2  
p =  
    -2  
    -2  
    -1  
k =  
    []
```

Ou seja:

$$F(s) = -\frac{2}{(s+2)^2} - \frac{2}{(s+2)} + \frac{2}{(s+1)}$$



# USANDO MATLAB

- A função '[R,p,k]=residue(N,D)', onde:

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{R_n}{s - p_n} + \dots + \frac{R_2}{s - p_2} + \frac{R_1}{s - p_1} + k(s)$$

- Parâmetros de entrada:

N é o vetor que contém os coeficientes de  $N(s)$ ,

$$N = [b_m \quad b_{m-1} \quad \dots \quad b_1 \quad b_0];$$

D é o vetor que contém os coeficientes de  $D(s)$ ,

$$D = [a_n \quad a_{n-1} \quad \dots \quad a_1 \quad a_0];$$

- Parâmetros de saída:

R é o vetor que contém os resíduos,

$$R = [R_n \quad R_{n-1} \quad \dots \quad R_1 \quad R_0];$$

P é o vetor que relaciona os pólos (raízes de  $D(s)$ ),

$$p = [p_n \quad p_{n-1} \quad \dots \quad p_1 \quad p_0];$$

e k corresponde ao (eventual) polinômio resultante (quando  $\text{grau}\{N(s)\} > \text{grau}\{D(s)\}$ ; na maioria das vezes  $k=[ ]$ ).

Exemplo<sub>3</sub>:  $F(s) = \frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)}$

```
>> N=3;
```

```
>> D=[1 2 5 0];
```

```
>> roots(D)
```

```
ans =
```

$$\begin{array}{l} 0 + \quad 0i \\ -1 + \quad 2i \\ -1 - \quad 2i \end{array}$$

Ou seja:

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{(s + 1 + j2)} + \frac{R_3}{(s + 1 - j2)}$$

```
>> [R,p,k]=residue(N,D)
```

```
R =
```

$$\begin{array}{l} -0.3 + \quad 0.15i \\ -0.3 - \quad 0.15i \\ 0.6 + \quad 0i \end{array}$$

```
p =
```

$$\begin{array}{l} -1 + \quad 2i \\ -1 - \quad 2i \\ 0 + \quad 0i \end{array}$$

```
k =
```

```
[]
```

Ou seja:

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \left( \frac{(3/10) + j(1,5/10)}{s + 1 + j2} + \frac{(3/10) - j(1,5/10)}{s + 1 - j2} \right)$$

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{20} \left( \frac{2 + j1}{s + 1 + j2} + \frac{2 - j1}{s + 1 - j2} \right)$$

$$0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; \quad 0,15 = \frac{15}{100} = \frac{1,5}{10}$$

# USANDO MATLAB

► Função: 'ilaplace(F)' :

retorna a Transformada Inversa de Laplace de F. Por padrão, a variável independente é  $s$  e a variável transformada é  $t$ . É esperado que  $F$  contenha a variável  $s$  do tipo 'syms', caso contrário, `ilaplace` usará a função `symvar` para avaliar a expressão  $F$ .

► Exemplo<sub>1</sub>:

$$F(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$$

```
>> roots([1 3 2])
ans =
    -2
    -1
>> syms s
>> F=2/(s^2+3*s+2)
F =
2/(s^2 + 3*s + 2)
>> f=ilaplace(F)
f =
2*exp(-t) - 2*exp(-2*t)
>> pretty(f)
2 exp(-t) - exp(-2 t) 2
>>
y(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}
```

► Exemplo<sub>2</sub>:

$$F(s) = \frac{2}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$$

```
>> roots([1 5 8 4])
ans =
    -2
    -2
    -1
>> syms s
>> F=2/(s^3+5*s^2+8*s+4);
>> f=ilaplace(F);
>> pretty(f)
2 exp(-t) - exp(-2 t) 2 - t exp(-2 t) 2
>>
y(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t} - 2te^{-2t}
```

► Exemplo<sub>3</sub>:

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

```
>> roots([1 2 5 0])
ans =
    0 + 0i
   -1 + 2i
   -1 - 2i
>> syms s
>> F=3/(s^3+2*s^2+5*s);
>> f=ilaplace(F);
>> pretty(f)
      /      sin(2 t) \
exp(-t) | cos(2 t) + ----- | 3
3      \      2      /
-----
5          5

>>
y(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-t} \left( \cos 2t + \frac{\sin 2t}{2} \right)
```

## + EXEMPLOS

- Seja a função transferência de um sistema dado por:  
 $G(s) = \frac{s+3}{s^2+7s+10}$ ; encontre sua resposta quando o mesmo é submetido a uma entrada degrau.

► *Solução:*

$$Y(s) = U(s) \cdot G(s)$$

$$Y(s) = \frac{s+3}{s^3+7s^2+10s} = \frac{s+3}{s(s^2+7s+10)}$$

Cujas raízes estão em:  $s = 0$ ,  $s = -2$  e  $s = -5$ .

$$\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 9$$

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 \pm 3}{2 \cdot 1}$$

Então  $Y(s)$  pode ser re-escrito para:

$$Y(s) = \frac{s+3}{s^3+7s^2+10s} = \frac{s+3}{s(s+2)(s+5)}$$

$$Y(s) = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+2} + \frac{R_3}{s+5}$$

Encontrando os resíduos:

$$R_1 = F(s) s \Big|_{s=0} = \frac{s(s+3)}{s(s+2)(s+5)} \Big|_{s=0} = \frac{3}{(2)(5)} = \frac{3}{10} = 0,3$$

$$R_2 = F(s)(s+2) \Big|_{s=-2} = \frac{(s+3)}{s(s+5)} \Big|_{s=-2} = \frac{1}{(-2)(3)} = -\frac{1}{6} = -0,16667$$

$$R_3 = F(s)(s+5) \Big|_{s=-5} = \frac{(s+3)}{s(s+2)} \Big|_{s=-5} = \frac{-2}{(-5)(-3)} = -\frac{2}{15} = -0,13333$$

Então:

$$Y(s) = \left(\frac{3}{10}\right) \frac{1}{s} - \left(\frac{1}{6}\right) \frac{1}{s+2} - \left(\frac{2}{15}\right) \frac{1}{s+5}$$

$$y(t) = \left(\frac{3}{10}\right) - \left(\frac{1}{6}\right) e^{-2t} - \left(\frac{2}{15}\right) e^{-5t}$$

# + EXEMPLOS

- Seja a função transferência de um sistema dado por:  

$$G(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 7s + 10}$$
; encontre sua resposta quando o mesmo é submetido a uma entrada degrau.

```

Usando Matlab:
>> N=[1 3];
>> D=[1 7 10 0];
>> roots(D)
ans =
    0
   -5
   -2
>> [R,p,k]=residue(N,D)
R =
 -0.13333
 -0.16667
    0.3
p =
   -5
   -2
    0
k =
    []

>> syms s
>> Y=(s+3)/(s^3+7*s^2+10*s)
>> y=ilaplace(Y);
>> pretty(y)
3 exp(-5 t) 2 exp(-2 t)
-----
10      15      6
>>

```

$$Y(s) = \frac{s + 3}{s^3 + 7s^2 + 10s} = \frac{s + 3}{s(s + 2)(s + 5)}$$

$$Y(s) = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s + 2} + \frac{R_3}{s + 5}$$

Encontrando os resíduos:

$$R_1 = F(s) s \Big|_{s=0} = \frac{s(s + 3)}{s(s + 2)(s + 5)} \Big|_{s=0} = \frac{3}{(2)(5)} = \frac{3}{10} = 0,3$$

$$R_2 = F(s)(s + 2) \Big|_{s=-2} = \frac{(s + 3)}{s(s + 5)} \Big|_{s=-2} = \frac{1}{(-2)(3)} = -\frac{1}{6} = -0,16667$$

$$R_3 = F(s)(s + 5) \Big|_{s=-5} = \frac{(s + 3)}{s(s + 2)} \Big|_{s=-5} = \frac{-2}{(-5)(-3)} = -\frac{2}{15} = -0,13333$$

Então:

$$Y(s) = \left(\frac{3}{10}\right) \frac{1}{s} - \left(\frac{1}{6}\right) \frac{1}{s + 2} - \left(\frac{2}{15}\right) \frac{1}{s + 5}$$

$$y(t) = \left(\frac{3}{10}\right) - \left(\frac{1}{6}\right) e^{-2t} - \left(\frac{2}{15}\right) e^{-5t}$$



## + EXEMPLOS

- Encontre  $y(t)$  para:

$$Y(s) = \frac{s+3}{s(s+2)^2(s+5)}$$

- Solução:

Neste caso:

$$Y(s) = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{(s+2)^2} + \frac{R_3}{s+2} + \frac{R_4}{s+5}$$

$$R_1 = sY(s) \Big|_{s=0} = \frac{\cancel{s}(s+3)}{\cancel{s}(s+2)^2(s+5)} \Big|_{s=0} = \frac{3}{(4)(5)} = \frac{3}{20} = 0,15$$

$$R_2 = (s+2)^2 Y(s) = \frac{\cancel{(s+2)}(s+3)}{s\cancel{(s+2)}(s+5)} \Big|_{s=-2}$$

$$R_2 = \frac{1}{(-2)(3)} = -\frac{1}{6}$$

$$R_3 = \frac{d}{ds} [(s+2)^2 Y(s)] \Big|_{s=-2}$$

$$R_3 = \frac{d}{ds} \left[ \frac{s+3}{s(s+5)} \right] \Big|_{s=-2} = \frac{s(s+5) - (s+3)(2s+5)}{[s(s+5)]^2} \Big|_{s=-2}$$

$$R_3 = -\frac{7}{36} = -0,19444$$

$$R_4 = (s+5)Y(s) \Big|_{s=-5} = \frac{(s+3)\cancel{s+5}}{s(s+2)^2\cancel{(s+5)}} \Big|_{s=-5} = \frac{-2}{(-5)(9)} = \frac{2}{45} = 0,044444$$

$$Y(s) = \left(\frac{3}{20}\right) \frac{1}{s} - \left(\frac{7}{36}\right) \frac{1}{s+2} - \left(\frac{1}{6}\right) \frac{1}{(s+2)^2} + \left(\frac{2}{45}\right) \frac{1}{s+5}$$

$$y(t) = \frac{3}{20} - \left(\frac{7}{36}\right) e^{-2t} - \left(\frac{1}{6}\right) t e^{-2t} + \left(\frac{2}{45}\right) e^{-5t}$$

# + EXEMPLOS

- Encontre  $y(t)$  para:

$$Y(s) = \frac{s+3}{s(s+2)^2(s+5)}$$

- Solução:

$$R_3 = \frac{d}{ds} [(s+2)^2 Y(s)] \Big|_{s=-2}$$

$$R_3 = \frac{d}{ds} \left[ \frac{s+3}{s(s+5)} \right] \Big|_{s=-2} = \frac{s(s+5) - (s+3)(2s+5)}{[s(s+5)]^2} \Big|_{s=-2}$$

$$R_3 = -\frac{7}{36} = -0,19444$$

$$R_4 = (s+5)Y(s) \Big|_{s=-5} = \frac{(s+3)\cancel{s+5}}{s(s+2)^2\cancel{(s+5)}} \Big|_{s=-5} = \frac{-2}{(-5)(9)} = \frac{2}{45} = 0,044444$$

$$Y(s) = \left(\frac{3}{20}\right) \frac{1}{s} - \left(\frac{7}{36}\right) \frac{1}{s+2} - \left(\frac{1}{6}\right) \frac{1}{(s+2)^2} + \left(\frac{2}{45}\right) \frac{1}{s+5}$$

$$y(t) = \frac{3}{20} - \left(\frac{7}{36}\right) e^{-2t} - \left(\frac{1}{6}\right) t e^{-2t} + \left(\frac{2}{45}\right) e^{-5t}$$

Usando Matlab:

```
>> N=[1 3];
>> D=poly([0 -2 -2 -5]);
>> [R,p,k]=residue(N,D)
R =
    0.044444
   -0.19444
  -0.16667
    0.15
p =
   -5
   -2
   -2
    0
k =
     []
>>
```

```
>> syms s
>> Y=(s+3)/(s*(s+2)^2*(s+5))
Y =
(s + 3)/(s*(s + 2)^2*(s + 5))
>> pretty(Y)
      s + 3
-----
      2
s (s + 2) (s + 5)
>> y=ilaplace(Y);
>> pretty(y)
exp(-5 t) 2   exp(-2 t) 7   t exp(-2 t)   3
----- + ---
      45      36      6      20
>>
```

# + EXEMPLOS

- Encontre  $f(t)$  para:

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+5)(s^2+4s+5)}$$

- Solução:

>> roots([1 4 5])

ans =

-2 + 1i  
-2 - 1i

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+5)(s+2-j)(s+2+j)}$$

$$F(s) = \frac{R_1}{s+5} + \frac{R_2}{s+2-j} + \frac{R_3}{s+2+j}$$

$$R_1 = (s+5)F(s) \Big|_{s=-5}$$

$$R_2 = (s+2-j)F(s) \Big|_{s=-2+j}$$

$$R_3 = (s+2+j)F(s) \Big|_{s=-2-j} = R_2^*$$

$$R_1 = \frac{s+3}{s^2+4s+5} \Big|_{s=-5} = -0,2$$

$$R_2 = \frac{s+3}{(s+5)(s+2+j)} \Big|_{s=-2+j} = \frac{-2+j+3}{(-2+j+5)(-2+j+2+j)}$$

$$R_2 = 0,1 - j0,2$$

$$R_3 = R_2^* = 0,1 + j0,2$$

$$F(s) = -\frac{0,2}{s+5} + \frac{0,1-j0,2}{s+2-j} + \frac{0,1+j0,2}{s+2+j}$$

$$f(t) = -0,2e^{-5t} + (0,1-j0,2)e^{(-2+j)t} + (0,1+j0,2)e^{(-2-j)t}$$

$$f(t) = -0,2e^{-5t} + e^{-2t} \left[ 0,1(e^{jt} + e^{-jt}) - j0,2(e^{jt} - e^{-jt}) \right]$$

$$f(t) = -0,2e^{-5t} + e^{-2t} \left[ 0,2 \frac{(e^{jt} + e^{-jt})}{2} + 0,4 \frac{(e^{jt} - e^{-jt})}{j2} \right]$$

$$f(t) = 0,2e^{-5t} + e^{-2t} (0,2 \cos t + 0,4 \sin t)$$

$$f(t) = 0,2e^{-5t} + e^{-2t} \sqrt{0,2^2 + 0,4^2} \cos(t + \phi)$$

$$f(t) = -0,2e^{-5t} + 0,44721e^{-2t} \cos(t + \phi)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{0,2}{0,1} \right) = 63,4^\circ$$

Lembrando que:

$$\frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} = \cos \theta$$

$$\frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} = \sin \theta$$

# + EXEMPLOS

- Encontre  $f(t)$  para:

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+5)(s^2+4s+5)}$$

- Solução:

**Note:**

$$\begin{aligned} \frac{R_2}{(s+2-j)} + \frac{R_3}{(s+2+j)} &= \frac{Ke^{j\phi}}{(s+2-j)} + \frac{Ke^{-j\phi}}{(s+2+j)} \\ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{Ke^{j\phi}}{(s+2-j)} + \frac{Ke^{-j\phi}}{(s+2+j)} \right] &= \\ &= Ke^{j\phi} e^{-(2-j)t} + Ke^{-j\phi} e^{-(2+j)t} \\ &= Ke^{-2t} [e^{j(t+\phi)} + e^{-j(t+\phi)}] \\ &= 2Ke^{-2t} \frac{[e^{j(t+\phi)} + e^{-j(t+\phi)}]}{2} \\ &= Me^{-2t} \cos(t + \phi) \\ &= Me^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

$$K = |R_2| = |R_3| = \sqrt{0,1^2 + 0,2^2} = 0,224$$

$$\phi = \angle K = \tan^{-1}(0,2/0,1) = 63,4^\circ$$

$$M = 2K = 0,448$$

$$R_2 = \frac{s+3}{(s+5)(s+2+j)} \Big|_{s=-2+j} = \frac{-2+j+3}{(-2+j+5)(-2+j+2+j)}$$

$$R_2 = 0,1 - j0,2$$

$$R_3 = R_2^* = 0,1 + j0,2$$

$$F(s) = -\frac{0,2}{s+5} + \frac{0,1-j0,2}{s+2-j} + \frac{0,1+j0,2}{s+2+j}$$

$$f(t) = -0,2e^{-5t} + (0,1-j0,2)e^{(-2+j)t} + (0,1+j0,2)e^{(-2-j)t}$$

$$f(t) = -0,2e^{-5t} + e^{-2t} [0,1(e^{jt} + e^{-jt}) - j0,2(e^{jt} - e^{-jt})]$$

$$f(t) = -0,2e^{-5t} + e^{-2t} \left[ 0,2 \frac{(e^{jt} + e^{-jt})}{2} + 0,4 \frac{(e^{jt} - e^{-jt})}{j2} \right]$$

$$f(t) = 0,2e^{-5t} + e^{-2t} (0,2 \cos t + 0,4 \sin t)$$

$$f(t) = 0,2e^{-5t} + e^{-2t} \sqrt{0,2^2 + 0,4^2} \cos(t + \phi)$$

$$f(t) = -0,2e^{-5t} + 0,44721e^{-2t} \cos(t + \phi)$$

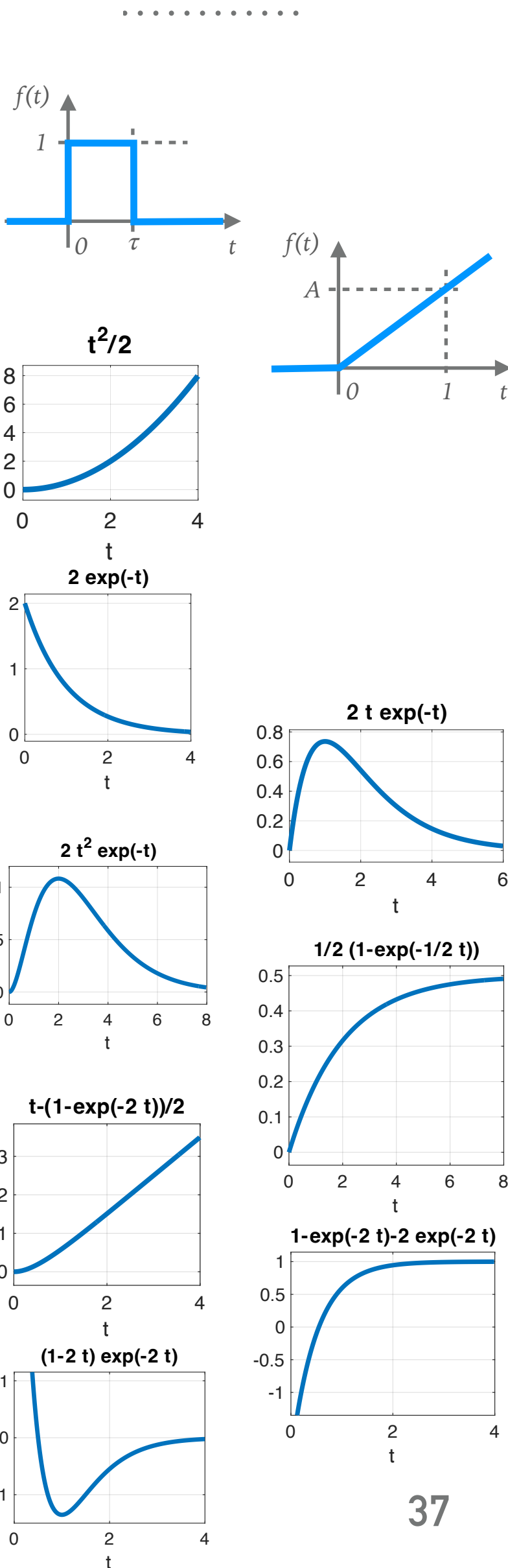
$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{0,2}{0,1} \right) = 63,4^\circ$$



# TABELA

## (AUMENTADA) DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

#	Obs.	$f(t)$	$F(s)$
1.	Impulso	$\delta(t)$	1
2.	Degrau	$A \cdot u(t)$	$A \cdot \frac{1}{s}$
3.	Degrau com atraso no tempo	$u(t - \tau)$	$\frac{e^{-s\tau}}{s}$
4.	Pulso retangular (duração $\tau$ )		$\frac{1 - e^{-s\tau}}{s}$
5.	Rampa (reta)	$A \cdot t \cdot u(t)$	$\frac{A}{s^2}$
6.	Função Quadrática	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$
7.	Polinômio	$t^n \cdot u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
8.	Exponencial	$B \cdot e^{-(a \cdot t)} \cdot u(t)$	$\frac{B}{s+a}$
9.	Tempo $\times$ exponencial	$t e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
10.	Exponencial assintótica	$t^2 e^{-at}$	$\frac{2}{(s+a)^3}$
		$\frac{1}{a} (1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
		$t - \frac{1 - e^{-at}}{a}$	$\frac{a}{s^2(s+a)}$
		$1 - e^{-at} - ate^{-at}$	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$
		$(1 - at)e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^2}$

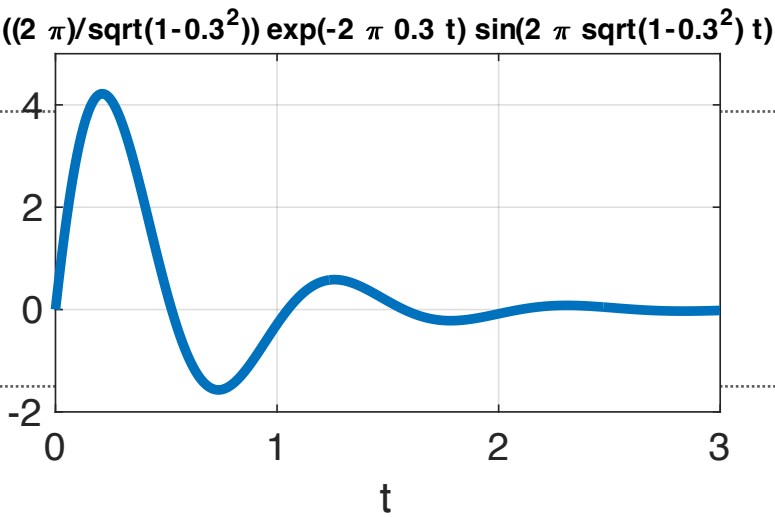
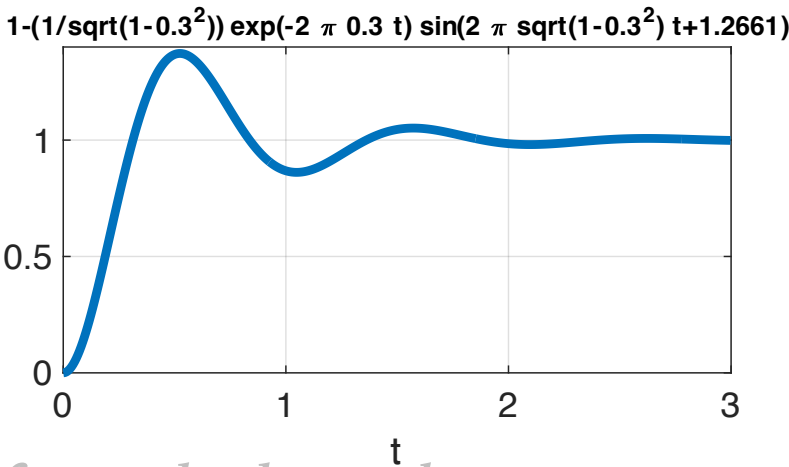
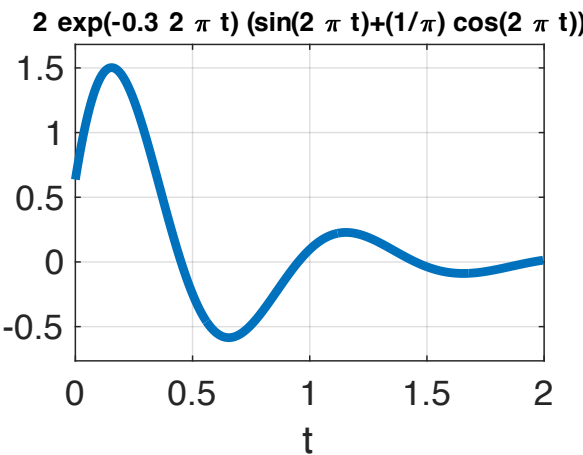
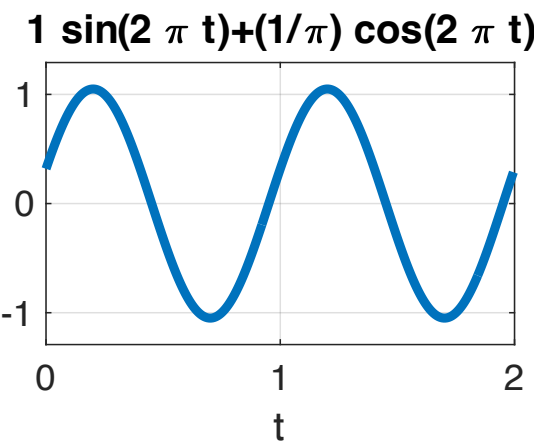


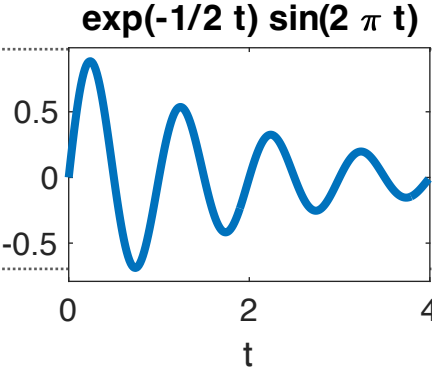
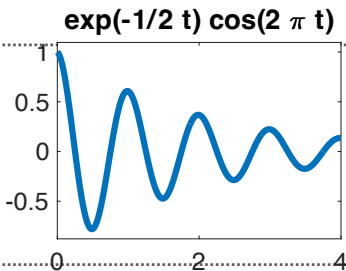
TABELA

(AUMENTADA) DE

TRANSFORMADAS

DE LAPLACE



#	Obs.	$f(t)$	$F(s)$
11.	Senóide	$\sin(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
12.	Cosseno	$\cos(\omega t) u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
13.	Senoide amortecida	$e^{-at} \sin(\omega_d t)$ 	$\frac{\omega_d}{(s + a)^2 + \omega_d^2}$
14.	Cosseno amortecido	$e^{-at} \cos(\omega_d t)$ 	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega_d^2}$
15.	Oscilação amortecida	$e^{-at} \left[ B \cos(\omega_d t) + \frac{C - aB}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right]$	$\frac{Bs + C}{(s + a)^2 + \omega_d^2}$
16.	Oscilação amortecida	$Me^{-at} \cos(\omega_d t + \phi)$ $M = \sqrt{B^2 + \left( \frac{C - aB}{\omega_d} \right)^2}$ $\phi = - \operatorname{atan} \left( \frac{C - aB}{B\omega_d} \right) = - \operatorname{atan2}(C - aB, B\omega_d)$	$\frac{Bs + C}{(s + a)^2 + \omega_d^2}$
17.		$\frac{\omega}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega t} \sin \left[ \omega \sqrt{(1 - \zeta^2)} t \right]$	$\frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta \omega s + \omega^2}$
18.		$1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega t} \sin \left[ \omega \sqrt{(1 - \zeta^2)} t + \phi \right]$ (para $\zeta = \cos \phi$ )	$\frac{\omega^2}{s(s^2 + 2\zeta \omega s + \omega^2)}$ (para $\zeta < 1$ )

# + EXEMPLOS

- Encontre  $y(t)$  para:

$$Y(s) = \frac{s+3}{s(s+2)^2(s+5)}$$

- Solução:

Neste caso:

$$Y(s) = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{(s+2)^2} + \frac{R_3}{s+2} + \frac{R_4}{s+5}$$

$$R_1 = sY(s) \Big|_{s=0} = \frac{\cancel{s}(s+3)}{\cancel{s}(s+2)^2(s+5)} \Big|_{s=0} = \frac{3}{(4)(5)} = \frac{3}{20} = 0,15$$

$$R_2 = (s+2)^2 Y(s) = \frac{\cancel{(s+2)}(s+3)}{s\cancel{(s+2)}(s+5)} \Big|_{s=-2}$$

$$R_3 = \frac{d}{ds} [(s+2)^2 Y(s)] \Big|_{s=-2}$$

$$R_3 = \frac{d}{ds} \left[ \frac{s+3}{s(s+5)} \right] \Big|_{s=-2} = \frac{s(s+5) - (s+3)(2s+5)}{[s(s+5)]^2} \Big|_{s=-2}$$

$$R_3 = -\frac{7}{36} = -0,19444$$

$$R_4 = (s+5)Y(s) \Big|_{s=-5} = \frac{(s+3)\cancel{s+5}}{s(s+2)^2\cancel{(s+5)}} \Big|_{s=-5} = \frac{-2}{(-5)(9)} = \frac{2}{45} = 0,044444$$

$$Y(s) = \left( \frac{3}{20} \right) \frac{1}{s} - \left( \frac{7}{36} \right) \frac{1}{s+2} - \left( \frac{1}{6} \right) \frac{1}{(s+2)^2} + \left( \frac{2}{45} \right) \frac{1}{s+5}$$

$$y(t) = \frac{3}{20} - \left( \frac{7}{36} \right) e^{-2t} - \left( \frac{1}{6} \right) t e^{-2t} + \left( \frac{2}{45} \right) e^{-5t}$$

# + EXEMPLOS

- Encontre  $y(t)$  para:

$$Y(s) = \frac{s+3}{s(s+2)^2(s+5)}$$

- Solução:

$$R_3 = \frac{d}{ds} [(s+2)^2 Y(s)] \Big|_{s=-2}$$

$$R_3 = \frac{d}{ds} \left[ \frac{s+3}{s(s+5)} \right] \Big|_{s=-2} = \frac{s(s+5) - (s+3)(2s+5)}{[s(s+5)]^2} \Big|_{s=-2}$$

$$R_3 = -\frac{7}{36} = -0,19444$$

$$R_4 = (s+5)Y(s) \Big|_{s=-5} = \frac{(s+3)\cancel{s+5}}{s(s+2)^2\cancel{(s+5)}} \Big|_{s=-5} = \frac{-2}{(-5)(9)} = \frac{2}{45} = 0,044444$$

$$Y(s) = \left(\frac{3}{20}\right) \frac{1}{s} - \left(\frac{7}{36}\right) \frac{1}{s+2} - \left(\frac{1}{6}\right) \frac{1}{(s+2)^2} + \left(\frac{2}{45}\right) \frac{1}{s+5}$$

$$y(t) = \frac{3}{20} - \left(\frac{7}{36}\right) e^{-2t} - \left(\frac{1}{6}\right) t e^{-2t} + \left(\frac{2}{45}\right) e^{-5t}$$

Usando Matlab:

```
>> N=[1 3];
>> D=poly([0 -2 -2 -5]);
>> [R,p,k]=residue(N,D)
R =
    0.044444
   -0.19444
  -0.16667
    0.15
p =
   -5
   -2
   -2
    0
k =
    []
>>
```

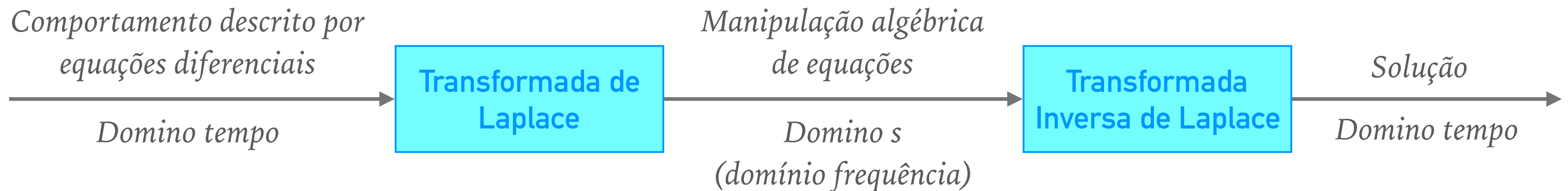
```
>> syms s
>> Y=(s+3)/(s*(s+2)^2*(s+5))
Y =
(s + 3)/(s*(s + 2)^2*(s + 5))
>> pretty(Y)
      s + 3
-----
      2
s (s + 2) (s + 5)
>> y=ilaplace(Y);
>> pretty(y)
exp(-5 t) 2   exp(-2 t) 7   t exp(-2 t)   3
----- + ---
      45      36      6      20
>>
```



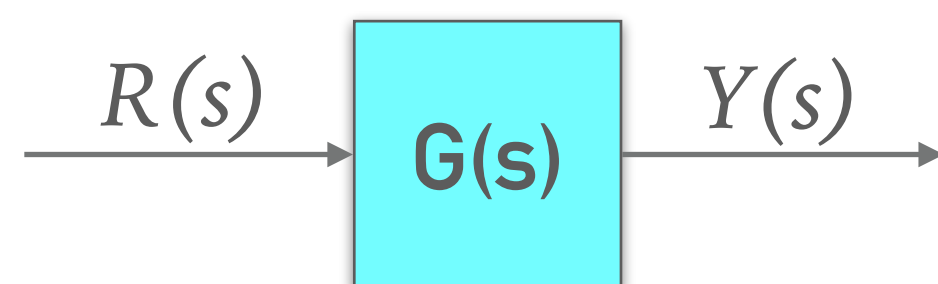
# REVISANDO A FUNÇÃO TRANSFERÊNCIA

- Um sistema de  $n$ -ésima ordem, linear, invariante no tempo, pode ser descrito pela equação diferencial:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t)$$



$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) R(s)$$



$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

$$\therefore Y(s) = R(s)G(s)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ Y(s) \}$$

# EXEMPLOS DE USO:

---

- Ex\_1: Encontre a função transferência para:

$$\frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = u(t).$$

- Solução:

$$sC(s) + 2C(s) = U(s)$$

A função transferência,  $G(s)$ , fica então:

$$G(s) = \frac{C(s)}{U(s)} = \frac{1}{s + 2}$$

# EXEMPLOS DE USO:

- Ex\_1: Encontre a função transferência para:

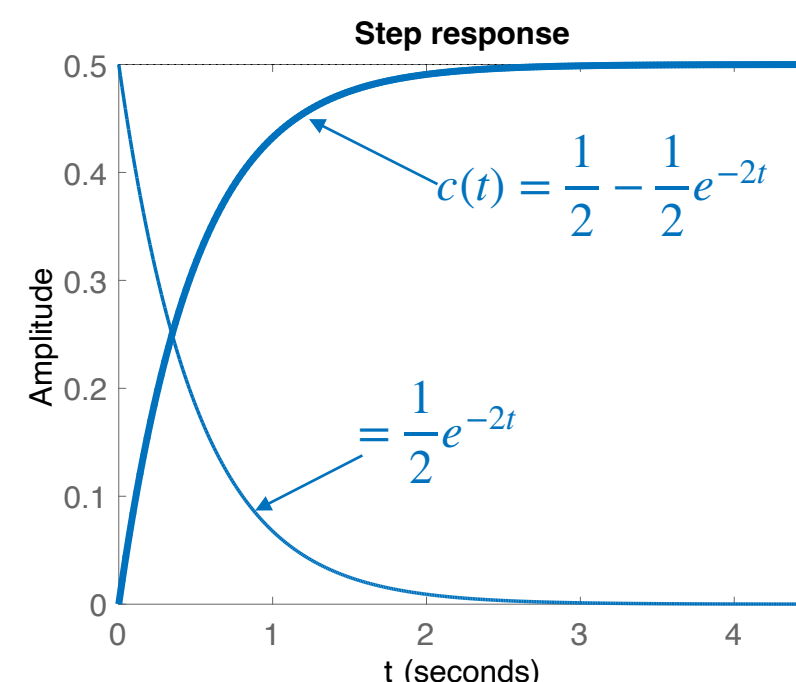
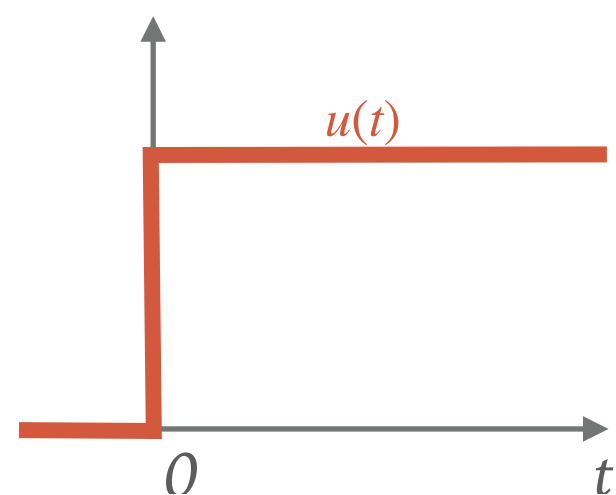
$$\frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = u(t).$$

- Solução:

$$sC(s) + 2C(s) = U(s)$$

A função transferência,  $G(s)$ , fica então:

$$G(s) = \frac{C(s)}{U(s)} = \frac{1}{s + 2}$$



- Ex\_2: Encontre o resultado para  $c(t)$ , quando este sistema é submetido a uma entrada degrau.

- Solução:

$$C(s) = U(s) \cdot G(s)$$

A transformada de Laplace de um degrau é:  $U(s) = 1/s$ , então:

$$C(s) = \frac{1}{s(s + 2)}$$

A expansão da expressão anterior leva à:

$$C(s) = \frac{1/2}{s} - \frac{1/2}{s + 2}$$

Realizando a transformada inversa de Laplace, encontramos  $c(t)$ :

$$c(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$