2016 年网络赛简要题解（吐槽）

裁判组

April 23, 2016

Problem A　$z_1 + z_2$

题解　签到题，只要会用 `scanf`/ `printf` 就行了。

吐槽　用 Pascal 或者 Java 的同志要处理复杂的输入格式。

Problem B　猴子吃桃 II

题解　送分题，暴力模拟就行了。因为 Fibonacci 数列增长得很快，能吃到桃子的猴子很少，所以不会超时。

吐槽

- 写矩阵快速幂的是什么心态？
- “许多教科书都把计算阶乘和 Fibonacci 数列用来说明递归，这是非常不幸的。在第一个例子里，递归并没有提供任何优越之处。在第二个例子里，它的效率之低是非常恐怖的。”[1]

Problem C　寻找万神

题解　送分题，暴力模拟就行了。因为模式串 `"wanshen"` 已经给定，不会像 `"wwwwwwwx"` 一样可以最大化暴力模式匹配的比较次数，所以不会超时。

吐槽　写 KMP 的是什么心态？

Problem D　抢人头

题解　简单题，暴力模拟会超时，但是注意到如果 $a > x + y$，多出来的部分是两人各打一下，其实是没有用的，所以把 a 对 $(x + y)$ 取模再分类讨论就行了。

吐槽　怎么有人不会用运算符 `'%'` ？

[1] K. A. Reek. *Pointers On C*. Chinese. Trans. by 徐波. 人民邮电出版社, 1998, p. 127.

Problem E　删除字符

题解　简单题，开个数组记录一下每个字母是否在 B 里面出现过，然后扫描一遍 A 就行了。

吐槽　写暴力 $O(|A| \times |B|)$ 的是什么心态？

Problem F　方格填数

题解　简单题，暴力 DFS 找到所有解，然后暴力判断是否合法。因为只有 $9! = 362880$ 个解，所以不会超时。

吐槽　STL `next_permutation` 真是慢得一笔，我们本来无意卡时间，但没想到它这么慢。

Problem G　合并模板

题解　中等偏难，增加 n，在 s 后面补 0，直到 $n \equiv 1 \ (mod \ (k-1))$，然后每次取前 k 小贪心。因为 n 很小，只要用插入排序维护一个有序序列就行了，不用写高级数据结构。

吐槽　这题来自某个裁判的信息论老师，简直太坑了，与有良心的裁判们形成了鲜明对比。

Problem H　数学题

题解　中等偏易，裸矩阵快速幂。令

$$S(k) = \sum_{j=1}^{r} T(j)$$

则

$$\begin{pmatrix} T(k) \\ T(k-1) \\ T(k-2) \\ S(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(k-1) \\ T(k-2) \\ T(k-3) \\ S(k-1) \end{pmatrix}$$

答案就是

$$S(l, r) = S(r) - S(l-1)$$

吐槽　写暴力的是什么心态？

Problem I 万神的竞赛

题解 中等题，用 $f(i,v)$ 表示前 i 门竞赛，获得 v 点智商需要的最小体力，则

$$f(i,v) = min\{f(i-1,v), f(i-1,v-v_i)+w_i\}$$

然后找一个最大的 v 使得 $f(n,v) \leq W$ 就行了。时间复杂度是 $O(\sum v_i)$，使用滚动数组后空间复杂度也是 $O(\sum v_i)$。

吐槽 粘 0-1 背包模板、分 (bao) 支 (li) 限 (sou) 界 (suo) 模板的都是什么心态？

Problem J 万神的数列

题解 中等偏易，先把所有数初始化成最小值，然后计算一下和，如果和已经超过了 S 就无解了，如果和不到 S 就要加某个数，为了字典序最小，显然是从后往前加。

吐槽 某个裁判坚持认为这题很难，所以裁判组把它放到了倒数第三题，实际上根本没有那么难。

Problem K 修理 OJ II

题解 较难。将 y 分解成 $f \times g$，其中 f 是最大的和 y 互质的因子。根据欧拉定理，a 的幂次模 f 必然以 $\phi(f)$ 为周期循环。另一方面，a 包含了 g 的所有素因子（不然就可以把没包含的移到 f 里面了），所以存在 t_0，使得对于所有 $t \geq t_0$ 都有 $a^t \equiv 0 \ (mod\ g)$。由中国剩余定理可得，对于 $t \geq t_0$，有

$$a^t \equiv a^{t_0+[(t-t_0)\ mod\ \phi(f)]} \ (mod\ y)$$

这就解决了 $b^c \geq t_0$ 的情况。因为 g 中素因子的个数至多是 $log_2 g$，t_0 很小，所以对于 $b^c < t_0$ 的情况直接用不取模的快速幂（甚至直接用`pow`都行）求 b^c 就行了。

吐槽

- $b^c < t_0$ 时 c 不一定很小，因为 b 可能是 1，理论上暴力算 b^c 会超时。但是裁判比较有良心，没有出
  `233 1 1000000000 233333333`
  这样的数据。所以这样也能过。
- 直接粘费马小定理、欧拉定理的是什么心态？

Problem L 卡尔的技能 II

题解 很难。用 $f_n(m)$ 表示 n 个元素，选 m 次，每种元素选择次数不超过 k 的方案数，有

$$f_n(m) = \sum_{i=m-k}^{m} f_{n-1}(i)$$

其母函数形式为

$$\begin{aligned} G_n(z) &= G_{n-1}(z)(z^0 + z^1 + \cdots z^k) \quad (1) \\ &= G_{n-1}(z)\left(\frac{1-z^{k+1}}{1-z}\right) \quad (2) \end{aligned}$$

边界条件是 $f_0(m) = \delta(m)$，即 $G_0(z) = 1$，可见

$$G_n(z) = \left(\frac{1}{1-z}\right)^n (1-z^{k+1})^n$$

这就告诉我们，序列 f_n 可以看作两个序列的卷积。第一个数列是问题“卡尔的技能”的解

$$a_n(i) = C_{n+i-1}^{i}$$

第二个数列是

$$b_n(i \times (k+1)) = (-1)^i C_n^i$$

它们的卷积就是

$$f_n(m) = \sum_i (-1)^i C_n^i C_{n+m-1-i\times(k+1)}^{m-i\times(k+1)}$$

预处理阶乘及其逆元就能在 $O(1)$ 时间内计算组合数，所以总的时间复杂度和循环次数一样，是 $O(1 + min\{n, m/(k+1)\})$。因为大多数数据是随机的，假设 m 和 k 相互独立，且服从均匀分布，则 $m/(k+1)$ 的期望是

$$\begin{aligned} E(m/(k+1)) &= \int_1^{10^6}\int_1^{10^6} \frac{m}{k+1}\frac{1}{10^{12}} dmdk \quad (3) \\ &= \frac{(10^6)^2-1}{2\times 10^{12}}[ln(10^6+1) - ln2] \quad (4) \\ &= 6.55 \quad (5) \end{aligned}$$

所以不会超时。

吐槽 有的人，不好好做题，成天想着高调，搞一个大新闻，把命题人批判一番。