Calcolo dei generatori di SO(3) e SU(2)

Francesco Pedullà

Versione 0.9, 2011/05/20

1 Introduzione

Questo testo presenta in dettaglio il calcolo dei generatori infinitesimali dei gruppi di Lie $SO(3)$ e $SU(2)$. I simboli utilizzati ed i numeri delle equazioni si riferiscono al testo di Morton Hamermesh *Group Theory and its Application to Physical Problems*, pubblicato nel 1962.

2 Definizioni e notazione

La definizione di operatore infinitesimale del gruppo [eq.(8-46)] è:

$$X_k = \sum_{i=1}^{n} u_{ik}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.1}$$

avendo definito in precedenza [eq. (8-39)]:

$$u_{ik} = \left[\frac{\partial f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r)}{\partial a_k} \right]_{a=0} . \tag{2.2}$$

Notiamo che questa definizione è quella normalmente utilizzata nei testi di matematica. Per le applicazioni fisiche si preferisce aggiungere un coefficiente $-i$ che rende hermitiani anche gli operatori antisimmetrici reali associati alle rotazioni. Nel seguito del testo restiamo allineati alla definizione di Hamermesh. Useremo però la seguente notazione, più compatta, in cui i vettori sono rappresentati come vettori colonna, adottando inoltre la convenzione di usare lettere minuscole per i vettori e maiuscole per le matrici. La trasformazione di coordinate risulta espressa dalle n equazioni

$$f(x; a) = \begin{pmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

dove gli argomenti delle funzioni f_i sono le n coordinate x_i e gli m parametri (angoli) a_i:

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Con questa notazione la definizione dei generatori può essere riscritta in forma compatta (riunendo le due definizioni)

$$X = (\nabla_a f^T|_{a=0})\nabla_x \tag{2.6}$$

dove ∇_a indica l'operatore di derivazione rispetto ai parametri a, ∇_x l'operatore di derivazione rispetto alle coordinate x. Notiamo esplicitamente che il prodotto di un vettore riga per un vettore colonna indica il relativo prodotto tensoriale, che rappresentiamo con una matrice.

3 Calcolo dei generatori di SO(3)

Nel caso dello spazio $\mathbb{R}^3$, la trasformazione ortogonale SO(3) può essere definita tramite il prodotto di tre matrici di rotazione attorno ai tre assi ortogonali x, y, z. Se poniamo il vettore dei parametri $a = (\theta, \phi, \psi)^T$, le matrici sono:

$$R_\theta(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

$$R_\phi(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

$$R_\psi(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ 0 & -\sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

e la funzione di trasformazione di coordinate $x' = U(a)x$ vale

$$U(\theta, \phi, \psi) = R_\theta(\theta)R_\phi(\phi)R_\psi(\psi)x \tag{3.4}$$

avendo posto $v = (x, y, z)^T$. Notiamo che i segni degli elementi di matrice sono tali da ottenere rotazioni destrorse positive. Tale scelta è arbitraria ma deve essere consistente se si vogliono ottenere risultati direttamente confrontabili con gli operatori di rotazione che si trovano in letteratura. Procediamo ora al calcolo delle righe della matrice

$$\nabla_a f^T|_{a=0} = \begin{pmatrix} \partial_\theta f^T \\ \partial_\phi f^T \\ \partial_\psi f^T \end{pmatrix}_{a=0} \tag{3.5}$$

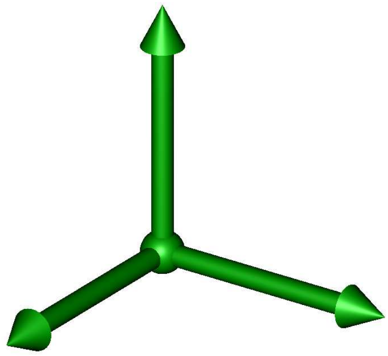
avendo indicato con ∂_a la derivata parziale rispetto ad a. Per effettuare tale calcolo osserviamo che, nel derivare rispetto ad un qualunque angolo a_i, le matrici associate agli altri angoli rimangono costanti e vengono valutate nell'origine, per cui coincidono con l'unità. Allora:

$$\begin{aligned}
\partial_\theta f^T|_{a=0} &= \partial_\theta (Uv)^T|_{a=0} \\
&= \partial_\theta (v^T R_\psi^T R_\phi^T R_\theta^T)|_{a=0} \\
&= v^T \partial_\theta R_\theta^T|_{a=0} \\
&= (x,y,z) \begin{pmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ -\cos(\theta) & -\sin(\theta) & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{a=0} \\
&= (x,y,z) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (-y, x, 0)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

e analogamente

$$\begin{aligned}
\partial_\phi f^T|_{a=0} &= v^T \partial_\phi R_\phi^T|_{a=0} \\
&= (x,y,z) \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & -\sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix}_{a=0} \\
&= (x,y,z) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (z, 0, -x).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\psi f^T|_{a=0} &= v^T \partial_\psi R_\psi^T|_{a=0} \\
&= (x,y,z) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\psi) & \cos(\psi) \\ 0 & -\cos(\psi) & \sin(\psi) \end{pmatrix}_{a=0} \\
&= (x,y,z) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (0, -z, y).
\end{aligned} \tag{3.8}$$



Raccogliendo i vettori nella matrice $\nabla_a f^T|_a$ e moltiplicando per ∇_x si ottiene che gli operatori X valgono

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z\partial_y + y\partial_z \\ z\partial_x - x\partial_z \\ -y\partial_x + x\partial_y \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Come atteso, coincidono (a meno di una costante moltiplicativa) con gli operatori di momento angolare.

4 Calcolo dei generatori di SU(2)

Nel caso dello spazio $\mathbb{C}^2$, la trasformazione ortogonale SU(2) può essere definita dal prodotto di una matrice hermitiana e unitaria U per il vettore delle coordinate da trasformare

$$v = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Cioè, U deve soddisfare le seguenti condizioni:

$$UU^\dagger = I \tag{4.2}$$

$$\det(U) = 1. \tag{4.3}$$

È facile verificare che la matrice

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

le soddisfa entrambe. Infatti

$$\begin{aligned} UU^\dagger &= \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\beta} \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} & \alpha\overline{\beta} - \overline{\beta}\alpha \\ \beta\overline{\alpha} - \overline{\alpha}\beta & \beta\overline{\beta} + \overline{\alpha}\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.5}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo imposto la condizione che

$$det(U) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \tag{4.6}$$

Dal momento che il numero di parametri reali liberi che abbiamo è 8 (i 4 numeri complessi in U) ed abbiamo 5 equazioni (4+1 scritte sopra), ci aspettiamo che rimangano 3 parametri reali indipendenti. In analogia con il caso reale indichiamo con $a = (\theta, \phi, \psi)^T$ tali parametri. Quindi possiamo porre

$$\begin{aligned} \alpha &= \sin\theta e^{i\phi} \\ \beta &= \cos\theta e^{i\psi} \end{aligned} \tag{4.7}$$

ed è facile verificare che, con queste definizioni, U rispetta tutte le condizioni imposte. Possiamo scrivere U e U^T:

$$U = \begin{pmatrix} \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta e^{-i\psi} \\ \cos\theta e^{i\psi} & \sin\theta e^{-i\phi} \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

$$U^T = \begin{pmatrix} \sin\theta e^{i\phi} & \cos\theta e^{i\psi} \\ -\cos\theta e^{-i\psi} & \sin\theta e^{-i\phi}. \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

Al fine di calcolare gli operatori a partire dalla definizione, abbiamo bisogno della matrice $\nabla_a U^T$ per ogni parametro del vettore a. Infatti, dalla definizione abbiamo:

$$\nabla_a f^T = \nabla_a v^T U^T = v^T \nabla_a U^T. \tag{4.10}$$

Il calcolo diretto di tali matrici ci dà:

$$\begin{aligned} \partial_\theta U^T|_{a=0} &= \begin{pmatrix} \cos\theta e^{i\phi} & -\sin\theta e^{i\psi} \\ \sin\theta e^{-i\psi} & \cos\theta e^{-i\phi} \end{pmatrix}_{a=0} &&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \partial_\phi U^T|_{a=0} &= \begin{pmatrix} i\sin\theta e^{i\phi} & \cos\theta e^{i\psi} \\ -\cos\theta e^{-i\psi} & -i\sin\theta e^{-i\phi} \end{pmatrix}_{a=0} &&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \partial_\psi U^T|_{a=0} &= \begin{pmatrix} \sin\theta e^{i\phi} & i\cos\theta e^{i\psi} \\ -i\sin\theta e^{-i\psi} & \sin\theta e^{-i\phi} \end{pmatrix}_{a=0} &&= \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

che coincidono con le matrici di Dirac a meno dello scambio delle colonne (che dipende solo dalla definizione di α e β). Completiamo il calcolo degli operatori:

$$\begin{aligned}
X_\theta = v^T \partial_\theta U^T \quad &= (z_1, z_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &&= (z_1, z_2) \\
X_\phi = v^T \partial_\phi U^T \quad &= (z_1, z_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} &&= (-z_2, z_1) \\
X_\psi = v^T \partial_\psi U^T \quad &= (z_1, z_2) \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} &&= (-iz_2, iz_1).
\end{aligned} \tag{4.12}$$