

Calcolo dei generatori di $SO(3)$ e $SU(2)$

Francesco Pedullà

Versione 0.9, 2018/12/05

1 Introduzione

Questo testo presenta in dettaglio il calcolo dei generatori infinitesimali dei gruppi di Lie $SO(3)$ e $SU(2)$. I simboli utilizzati ed i numeri delle equazioni si riferiscono al testo di Morton Hamermesh *Group Theory and its Application to Physical Problems*, pubblicato nel 1962.

2 Definizioni e notazione

La definizione di operatore infinitesimale del gruppo [eq.(8-46)] è:

$$X_k = \sum_{i=1}^n u_{ik}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2.1)$$

avendo definito in precedenza [eq. (8-39)]:

$$u_{ik} = \left[\frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r)}{\partial a_k} \right]_{a=0}. \quad (2.2)$$

Notiamo che questa definizione è quella normalmente utilizzata nei testi di matematica. Per le applicazioni fisiche si preferisce aggiungere un coefficiente $-i$ che rende hermitiani anche gli operatori antisimmetrici reali associati alle rotazioni. Nel seguito del testo restiamo allineati alla definizione di Hamermesh. Useremo però la seguente notazione, più compatta, in cui i vettori sono rappresentati come vettori colonna, adottando inoltre la convenzione di usare lettere minuscole per i vettori e maiuscole per le matrici. La trasformazione di coordinate risulta espressa dalle n equazioni

$$f(x; a) = \begin{pmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

dove gli argomenti delle funzioni f_i sono le n coordinate x_i e gli m parametri (angoli) a_i :

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ a_m \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Con questa notazione la definizione dei generatori può essere riscritta in forma compatta (riunendo le due definizioni)

$$X = (\nabla_a f^T|_{a=0}) \nabla_x \quad (2.6)$$

dove ∇_a indica l'operatore di derivazione rispetto ai parametri a , ∇_x l'operatore di derivazione rispetto alle coordinate x . Notiamo esplicitamente che il prodotto di un vettore riga per un vettore colonna indica il relativo prodotto tensoriale, che rappresentiamo con una matrice.

3 Calcolo dei generatori di $SO(3)$

Nel caso dello spazio \mathbb{R}^3 , la trasformazione ortogonale $SO(3)$ può essere definita tramite il prodotto di tre matrici di rotazione attorno ai tre assi ortogonali x, y, z . Se poniamo il vettore dei parametri $a = (\theta, \phi, \psi)^T$, le matrici sono:

$$R_\theta(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$R_\phi(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$R_\psi(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ 0 & -\sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

e la funzione di trasformazione di coordinate $x' = U(a)x$ vale

$$U(\theta, \phi, \psi) = R_\theta(\theta)R_\phi(\phi)R_\psi(\psi)x \quad (3.4)$$

avendo posto $v = (x, y, z)^T$. Notiamo che i segni degli elementi di matrice sono tali da ottenere rotazioni destrorse positive. Tale scelta è arbitraria ma deve essere consistente se si vogliono ottenere risultati direttamente confrontabili con

gli operatori di rotazione che si trovano in letteratura. Procediamo ora al calcolo delle righe della matrice

$$\nabla_a f^T|_{a=0} = \begin{pmatrix} \partial_\theta f^T \\ \partial_\phi f^T \\ \partial_\psi f^T \end{pmatrix}_{a=0} \quad (3.5)$$

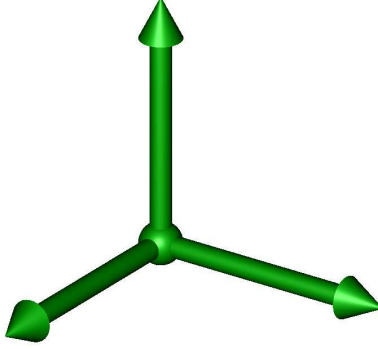
avendo indicato con ∂_a la derivata parziale rispetto ad a . Per effettuare tale calcolo osserviamo che, nel derivare rispetto ad un qualunque angolo a_i , le matrici associate agli altri angoli rimangono costanti e vengono valutate nell'origine, per cui coincidono con l'unità. Allora:

$$\begin{aligned} \partial_\theta f^T|_{a=0} &= \partial_\theta (Uv)^T|_{a=0} \\ &= \partial_\theta (v^T R_\psi^T R_\phi^T R_\theta^T)|_{a=0} \\ &= v^T \partial_\theta R_\theta^T|_{a=0} \\ &= (x, y, z) \begin{pmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ -\cos(\theta) & -\sin(\theta) & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{a=0} \\ &= (x, y, z) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-y, x, 0) \end{aligned} \quad (3.6)$$

e analogamente

$$\begin{aligned} \partial_\phi f^T|_{a=0} &= v^T \partial_\phi R_\phi^T|_{a=0} \\ &= (x, y, z) \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & -\sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix}_{a=0} \\ &= (x, y, z) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (z, 0, -x). \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \partial_\psi f^T|_{a=0} &= v^T \partial_\psi R_\psi^T|_{a=0} \\ &= (x, y, z) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\psi) & \cos(\psi) \\ 0 & -\cos(\psi) & \sin(\psi) \end{pmatrix}_{a=0} \\ &= (x, y, z) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (0, -z, y). \end{aligned} \quad (3.8)$$



Raccogliendo i vettori nella matrice $\nabla_a f^T|_a$ e moltiplicando per ∇_x si ottiene che gli operatori X valgono

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z\partial_y + y\partial_z \\ z\partial_x - x\partial_z \\ -y\partial_x + x\partial_y \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Come atteso, coincidono (a meno di una costante moltiplicativa) con gli operatori di momento angolare.

4 Calcolo dei generatori di $SU(2)$

Nel caso dello spazio \mathbb{C}^2 , la trasformazione ortogonale $SU(2)$ può essere definita dal prodotto di una matrice hermitiana e unitaria U per il vettore delle coordinate da trasformare

$$v = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Cioè, U deve soddisfare le seguenti condizioni:

$$UU^\dagger = I \quad (4.2)$$

$$\det(U) = 1. \quad (4.3)$$

È facile verificare che la matrice

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

le soddisfa entrambe. Infatti

$$\begin{aligned}
 UU^\dagger &= \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} & \alpha\bar{\beta} - \bar{\beta}\alpha \\ \beta\bar{\alpha} - \bar{\alpha}\beta & \beta\bar{\beta} + \bar{\alpha}\alpha \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo imposto la condizione che

$$\det(U) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \tag{4.6}$$

Dal momento che il numero di parametri reali liberi che abbiamo è 8 (i 4 numeri complessi in U) ed abbiamo 5 equazioni (4+1 scritte sopra), ci aspettiamo che rimangano 3 parametri reali indipendenti. In analogia con il caso reale indichiamo con $a = (\theta, \phi, \psi)^T$ tali parametri. Quindi possiamo porre

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \sin \theta e^{i\phi} \\
 \beta &= \cos \theta e^{i\psi}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

ed è facile verificare che, con queste definizioni, U rispetta tutte le condizioni imposte. Possiamo scrivere U e U^T :

$$U = \begin{pmatrix} \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta e^{-i\psi} \\ \cos \theta e^{i\psi} & \sin \theta e^{-i\phi} \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

$$U^T = \begin{pmatrix} \sin \theta e^{i\phi} & \cos \theta e^{i\psi} \\ -\cos \theta e^{-i\psi} & \sin \theta e^{-i\phi} \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

Al fine di calcolare gli operatori a partire dalla definizione, abbiamo bisogno della matrice $\nabla_a U^T$ per ogni parametro del vettore a . Infatti, dalla definizione abbiamo:

$$\nabla_a f^T = \nabla_a v^T U^T = v^T \nabla_a U^T. \tag{4.10}$$

Il calcolo diretto di tali matrici ci dà:

$$\begin{aligned}
 \partial_\theta U^T|_{a=0} &= \begin{pmatrix} \cos \theta e^{i\phi} & -\sin \theta e^{i\psi} \\ \sin \theta e^{-i\psi} & \cos \theta e^{-i\phi} \end{pmatrix}_{a=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \partial_\phi U^T|_{a=0} &= \begin{pmatrix} i \sin \theta e^{i\phi} & \cos \theta e^{i\psi} \\ -\cos \theta e^{-i\psi} & -i \sin \theta e^{-i\phi} \end{pmatrix}_{a=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \partial_\psi U^T|_{a=0} &= \begin{pmatrix} \sin \theta e^{i\phi} & i \cos \theta e^{i\psi} \\ -i \sin \theta e^{-i\psi} & \sin \theta e^{-i\phi} \end{pmatrix}_{a=0} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

che coincidono con le matrici di Dirac a meno dello scambio delle colonne (che dipende solo dalla definizione di α e β). Completiamo il calcolo degli operatori:

$$\begin{aligned} X_\theta = v^T \partial_\theta U^T &= (z_1, z_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (z_1, z_2) \\ X_\phi = v^T \partial_\phi U^T &= (z_1, z_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (-z_2, z_1) \\ X_\psi = v^T \partial_\psi U^T &= (z_1, z_2) \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = (-iz_2, iz_1). \end{aligned} \tag{4.12}$$