Pravděpodobnost a statistika

Filip Peterek

15. květen 2022

1 Pravděpodobnost

1.1 Zakladni vzorce

Variace bez opakovani:

$$V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Kombinace bez opakovani:

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Permutace:

$$P(n) = n!$$

Variace s opakovanim:

$$V*(n,k) = n^k$$

Kombinace s opakovanim:

$$C*(n,k) = C*(n+k-1,k) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!*k!}$$

Permutace s opakovanim:

$$P*(n_1,n_2,...,n_k) = \frac{P(n)}{P(n_1)*P(n_2)*...*P(n_k)} = \frac{n!}{n_1!*n_2!*...*n_3!}$$

Prunik jevu:

$$P(A \cap B) = P(A|B) * P(B)$$

Prunik nezavislych jevu:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

Podminena pravdepodobnost:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

1.2 Bayesuv vzorec

Nastal jev A, hledam pravdepodobnost, ktery z jevu B_i jev A zpusobil.

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k) * P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) * P(B_i)}$$

1.3 Nahodna velicina

Stredni hodnota:

$$\mu = \sum_{(i)} x_i * P(x_i)$$

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x_i * P(x_i)$$

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$E(\sum_{i}^{n} X_i) = \sum_{i}^{n} E(X_i)$$

Centralni moment r-teho radu:

$$\mu_r' = \sum_{(i)} (x_i - E(X))^r * P(x_i)$$

$$\mu_r' = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - E(X))^r * P(x_i)$$

Variance:

$$D(X) = \sum_{(i)} (x_i - E(X))^2 * P(x_i)$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - E(X))^2 * P(x_i)$$

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$D(aX + b) = a^2 D(X)$$

Smerodatna odchylka:

$$\sigma = \sqrt{D(X)}$$

Sikmost:

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

Spicatost:

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

Modus: nejpocetnejsi prvek, prvek s nejvyssi pravdepodobnosti

1.4 Nahodny vektor

Vektor, jehoz slozky jsou nahodne veliciny

Vztahy jsou ekvivalentni nahodne velicine, ale upravene pro vektor

Ukazka:

Necht $\boldsymbol{X} = (X, Y)$ je nahodny vektor. Potom plati:

$$E(\boldsymbol{X}) = (E(X), E(Y))$$

1.5 Nezavislost nahodnych velicin

Necht $\boldsymbol{X} = (X, Y)$ je nahodny vektor. X, Y jsou nezavisle, prave kdyz plati:

$$F(x, y) = F_X(x) * F_Y(y)$$

1.6 Kovariance a koeficient korelace

Kovariance $cov(X, Y)$

$$cov(X, Y) = E[(X - E(X)) * (Y - E(Y))]$$

Kladna hodnota kovariance: zvysi se X $\implies$ pravdepodobne se zvysi Y Zaporna hodnota kovariance: zvysi se X $\implies$ pravdepodobne se snizi Y

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X) * E(Y)$$
$$cov(X, X) = D(X)$$
$$cov(a_1 X + b_1, a_2 X + b_2) = a_1 a_2 cov(X, Y)$$

Jsou-li X, Y nezavisle $\implies$ $cov(X, Y) = 0$

Korelacni koeficient $\rho(X, Y)$

$$\rho(X, Y) = \begin{cases} \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)*D(Y)}}, & D(X), D(Y) \neq 0 \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{1}$$

Korelacni koeficient je mirou linearni zavislosti dvou slozek nahodneho vektoru.

$$\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$$

$$\rho(X, X) = 1$$

$$X, Y \text{ jsou nezavisle } \implies \rho(X, Y) = 0$$

Implikace, naopak predchozi vztah neplati

$$\rho(X, Y) = 0 \implies X, Y jsounekorelovane$$

1.7 Alternativni rozdeleni

Pouze dve moznosti, kazde ma svou pravdepodobnost

$$P(X = 1) = p$$
$$P(X = 0) = 1 - p$$

$$E(X) = p, D(X) = p * (1 - p)$$

1.8 Binomicke rozdeleni

Provadim nezavisle pokusy (Bernoulliho pokusy), pravdepodobnost uspechu je konstantni

Binomicke rozdeleni - pravdepodobnost, ze v x pokusech se objevi y uspechu

```
20 pokusu
Pravdepodobnost jednoho uspechu je 0.3
Pravdepodobnost, ze uspechu bude pet a mene ziskame

pbinom(5, 20, 0.3)

Pravdepodobnost, ze uspechu bude nad pet

1 - pbinom(5, 20, 0.3)
```

```
Pocet uspechu je 6
Pozadovana pravdepodobnost pro 6 uspechu je 0.7
Pravdepodobnost uspechu pri jednom pokusu je 0.3

qnbinom(0.7, 6, 0.3) + 6

Je treba pricist 6, bo R pocita jen neuspechy,
kdezto my chceme vsechny pokusy

nbinom - negativne binomicke rozdeleni
```