

8

Geometric Transformations

几何变换

线性变换的特征是原点不变、平行且等距的网格



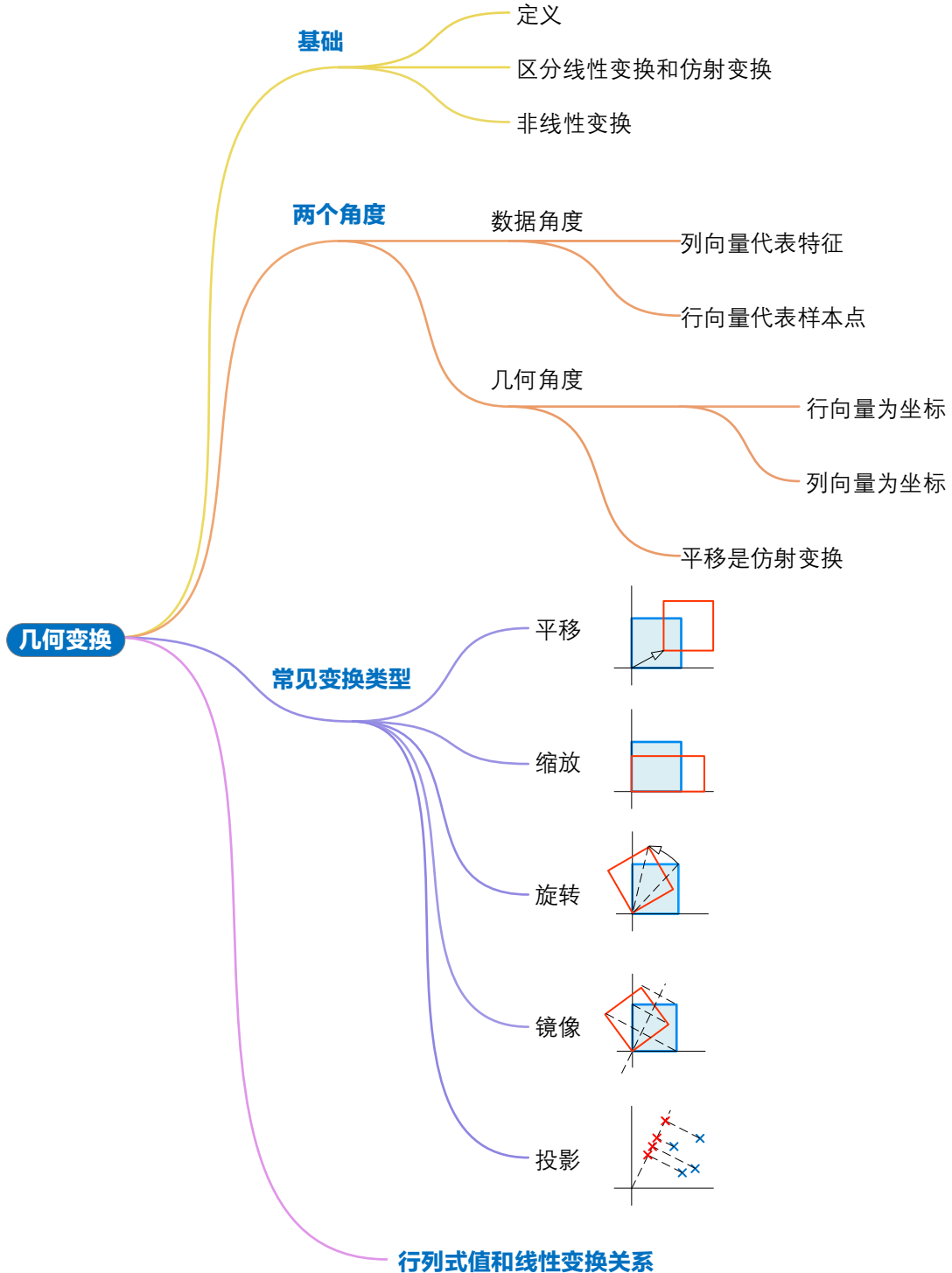
矩阵向来大有所为，它们从不游手好闲。

Matrices act. They don't just sit there.

—— 吉尔伯特·斯特朗 (Gilbert Strang) | MIT 数学教授 | 1934 ~



- ◀ `numpy.array()` 构造多维矩阵/数组
- ◀ `numpy.linalg.inv()` 矩阵逆运算
- ◀ `numpy.matrix()` 构造二维矩阵
- ◀ `numpy.multiply()` 矩阵逐项积
- ◀ `tranpose()` 矩阵转置，比如 `A.transpose()`，等同于 `A.T`



8.1 线性变换：线性空间到自身的线性映射

本章开始之前，我们先区分两个概念：**线性映射** (linear mapping) 和 **线性变换** (linear transformation)。

线性映射是指从一个空间到另外一个空间的映射，且保持加法和数量乘法运算。比如，映射 L 将向量空间 V 映射到向量空间 W ，对于所有的 $v_1, v_2 \in V$ 及所有的标量 α 和 β ，满足：

$$L(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha L(v_1) + \beta L(v_2) \quad (1)$$

白话说来，线性映射把一个空间的点或几何形体映射到另外一个空间。比如图 1 所示的三维物体投影到一个平面上，得到这个杯子在平面上的映像。

图 1 所示的“降维”过程显然不可逆，降维过程中信息被压缩。也就是说，不能通过杯子在平面的“映像”获得杯子在三维空间形状的所有信息。

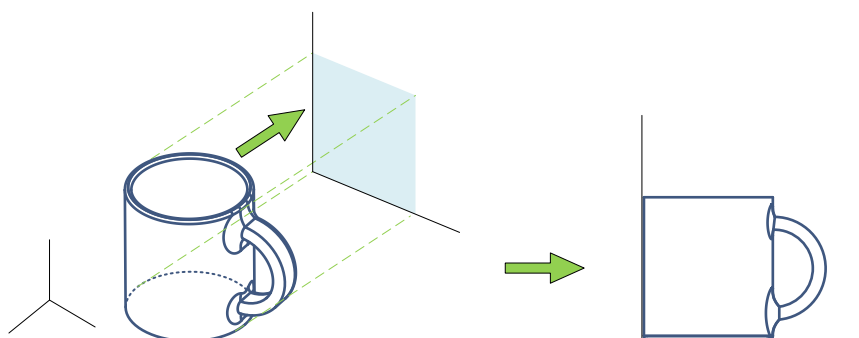


图 1. 线性映射

线性变换是线性空间到自身的线性映射，是一种特殊的线性映射。白话说，线性变换是在同一个坐标系中完成的图形变换。从几何角度来看，线性变换产生“平行且等距”的网格，并且原点保持固定，如图 2 所示。原点保持固定，这一性质很重要，因为大家马上就会看到“平移”不属于线性变换。

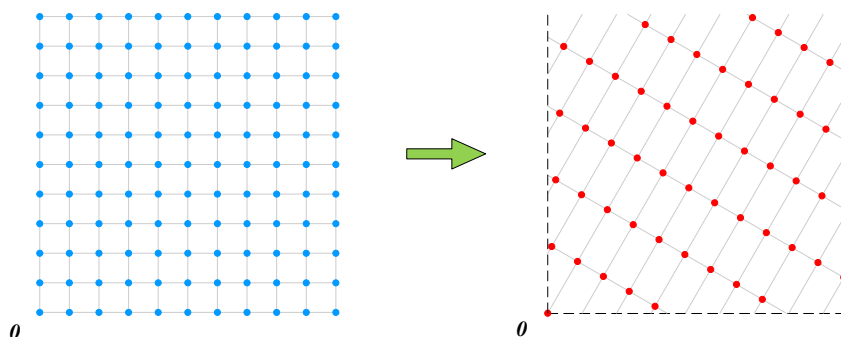


图 2. 线性变换产生平行且等距的网格

⚠ 请大家注意很多参考资料混用线性映射和线性变换。此外，本书把正交投影也算作是线性变换，虽然正交投影后维度降低，空间发生“压缩”。

非线性变换

与线性变换相对的是**非线性变换** (nonlinear transformation)。

图 3 和图 4 给出两个非线性变换的例子。图 3 所示为通过非线性变换产生平行但不等距网格。图 4 所示产生的网格甚至出现“扭曲”。

有了这两幅图做对比，相信读者能够更好地理解图 2 所展示的“平行且等距、原点保持固定”的网格所代表的线性变换。

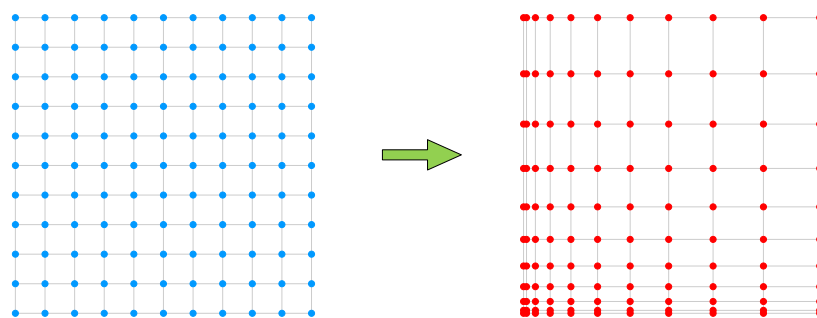


图 3. 非线性变换产生平行但不等距网格

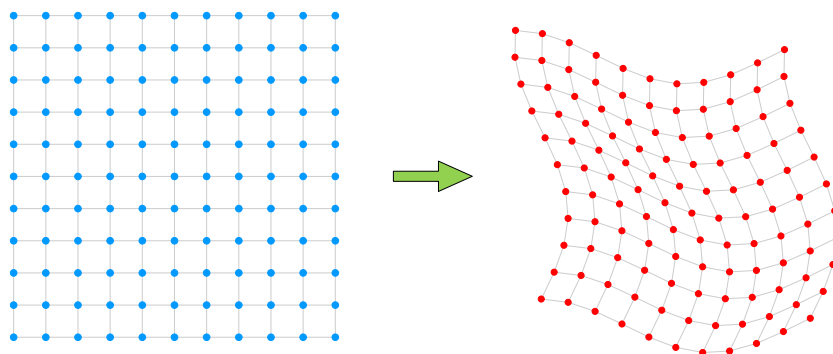


图 4. 非线性变换产生“扭曲”网格

常见平面几何变换

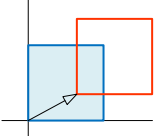
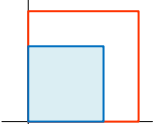
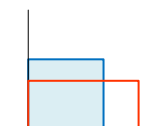
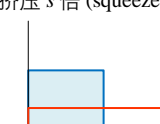
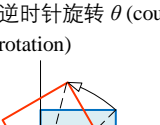
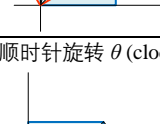
本章下一节开始就是要从线性代数运算视角讨论几何变换。表 1 总结本章将要介绍的常用二维几何变换。表中第二列以列向量形式表达坐标点，第三列以行向量形式表达坐标点。表 1 的第二列和第三列矩阵乘法互为转置关系。

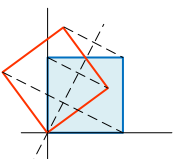
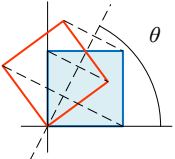
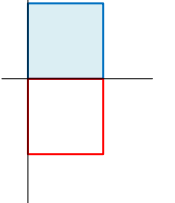
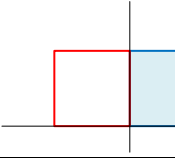
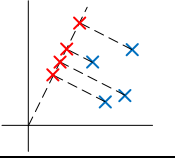
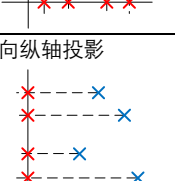
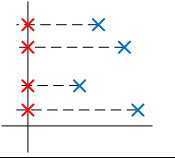
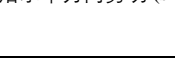
除了平移以外，表 1 中的几何变换都是从 \mathbb{R}^2 到自身。准确来说，正交投影相当于降维，结果在 \mathbb{R}^2 的子空间中。本章后续将展开讲解这些几何变换。

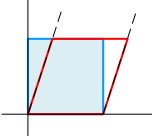
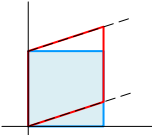
表 1 中所有操作统称几何变换，以便于将这些线性代数概念和本系列丛书《数学要素》中介绍的几何变换联系起来。这也正是本章题目叫“几何变换”的原因。

⚠ 请大家注意，平移并不是线性变换，平移是一种仿射变换 (affine transformation)，对应的运算为 $\mathbf{y} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$ 。几何角度来看，仿射变换是一个向量空间的线性映射 (\mathbf{Ax}) 叠加平移 (\mathbf{b})，变换结果在另外一个仿射空间。 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ ，平移导致原点位置发生变化。因此，线性变换可以看做是特殊的仿射变换。

表 1. 常用几何变换总结

几何变换	列向量坐标	行向量坐标
平移 (translation) 	$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{Z}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} + \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \end{bmatrix}$
等比例缩放 s 倍 (scaling) 	$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$ $\mathbf{Z}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$
非等比例缩放 (unequal scaling) 	$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{Z}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}$
挤压 s 倍 (squeeze) 	$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix}$ $\mathbf{Z}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix}$
逆时针旋转 θ (counterclockwise rotation) 	$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ $\mathbf{Z}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$
顺时针旋转 θ (clockwise rotation) 	$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ $\mathbf{Z}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$

<p>关于通过原点、切向量为 $\tau [\tau_1, \tau_2]^T$ 直线镜像 (reflection)</p> 	$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\ \tau\ ^2} \begin{bmatrix} \tau_1^2 - \tau_2^2 & 2\tau_1\tau_2 \\ 2\tau_1\tau_2 & \tau_2^2 - \tau_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\ \tau\ ^2} \begin{bmatrix} \tau_1^2 - \tau_2^2 & 2\tau_1\tau_2 \\ 2\tau_1\tau_2 & \tau_2^2 - \tau_1^2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{Z}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} \frac{1}{\ \tau\ ^2} \begin{bmatrix} \tau_1^2 - \tau_2^2 & 2\tau_1\tau_2 \\ 2\tau_1\tau_2 & \tau_2^2 - \tau_1^2 \end{bmatrix}$
<p>关于通过原点、方向和水平轴夹角为 θ 直线镜像; 等同于上例, 切向量相当于 $(\cos\theta, \sin\theta)$</p> 	$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$ $\mathbf{Z}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$
<p>关于横轴镜像对称</p> 	$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{Z}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
<p>关于纵轴镜像对称</p> 	$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{Z}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
<p>向通过原点、切向量为 $\tau [\tau_1, \tau_2]^T$ 直线投影 (projection)</p> 	$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\ \tau\ ^2} \begin{bmatrix} \tau_1^2 & \tau_1\tau_2 \\ \tau_1\tau_2 & \tau_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\ \tau\ ^2} \begin{bmatrix} \tau_1^2 & \tau_1\tau_2 \\ \tau_1\tau_2 & \tau_2^2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{Z}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} \frac{1}{\ \tau\ ^2} \begin{bmatrix} \tau_1^2 & \tau_1\tau_2 \\ \tau_1\tau_2 & \tau_2^2 \end{bmatrix}$
<p>向横轴投影</p> 	$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{Z}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
<p>向纵轴投影</p> 	$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{Z}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
<p>沿水平方向剪切 (shear), θ 为剪切角</p> 	$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cot(\theta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cot(\theta) & 1 \end{bmatrix}$

		$\mathbf{Z}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cot(\theta) & 1 \end{bmatrix}$
沿竖直线方向剪切, θ 为剪切角 	$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cot(\theta) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cot(\theta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{Z}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} \begin{bmatrix} 1 & \cot(\theta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

8.2 平移：仿射变换，原点变动

用列向量表达坐标时，平移可以写成：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \mathbf{t} \quad (2)$$

其中， \mathbf{t} 为平移向量：

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

(3) 代入 (2) 得到：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + t_1 \\ x_2 + t_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

再次强调，平移并不是线性变换，平移是一种仿射变换，因为原点发生改变。

图 5 所示为几个平移的例子。

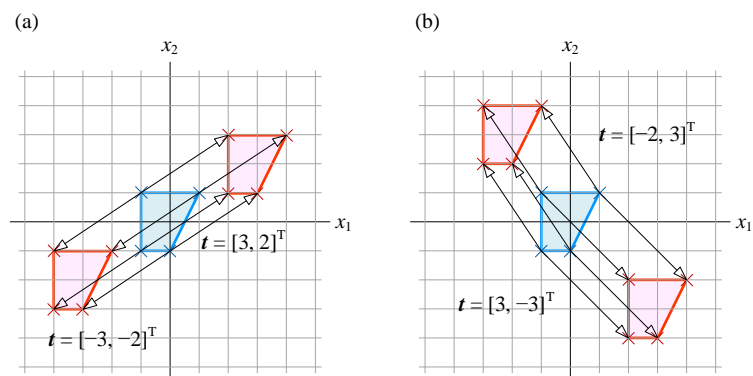


图 5. 平移



Bk4_Ch8_01.py 绘制图 5。



如图 6 所示，数据**中心化** (centralize)，也叫**去均值** (demean)，实际上就是一种平移。

对数据矩阵 \mathbf{X} 去均值处理得到 \mathbf{Y} ：

$$\mathbf{Y}_{n \times 2} = \mathbf{X}_{n \times 2} - \mathbf{E}(\mathbf{X}_{n \times 2}) \quad (5)$$

数据矩阵中一般用行向量表达坐标点，上式用到了广播原则。行向量 $\mathbf{E}(\mathbf{X})$ 叫做 \mathbf{X} 的**质心** (centroid)，它的每个元素是数据矩阵 \mathbf{X} 每一列数据的均值。去均值后， \mathbf{Y} 的质心位于原点，也就是说 $\mathbf{E}(\mathbf{Y}) = [0, 0]$ 。

将 \mathbf{Y} 写成 $[y_1, y_2]$ ，展开(5)得到：

$$[y_1 \ y_2] = [x_1 \ x_2] - [\mathbf{E}(x_1) \ \mathbf{E}(x_2)] \quad (6)$$

(6) 对应的统计运算表达为：

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 - \mathbf{E}(X_1) \\ Y_2 = X_2 - \mathbf{E}(X_2) \end{cases} \quad (7)$$

其中， X_1 、 X_2 、 Y_1 、 Y_2 为随机变量。注意，随机变量字母大写、斜体。从几何角度来看，平移运算将数据质心移动到原点，如图 6 所示。

大家应该已经注意到了图 6 中的椭圆，通过高斯二元分布可以建立随机数和椭圆的联系。从几何视角来看，椭圆/椭球可以用来代表服从多元高斯分布的随机数。这是本系列丛书《概率统计》要重点讲解的内容。

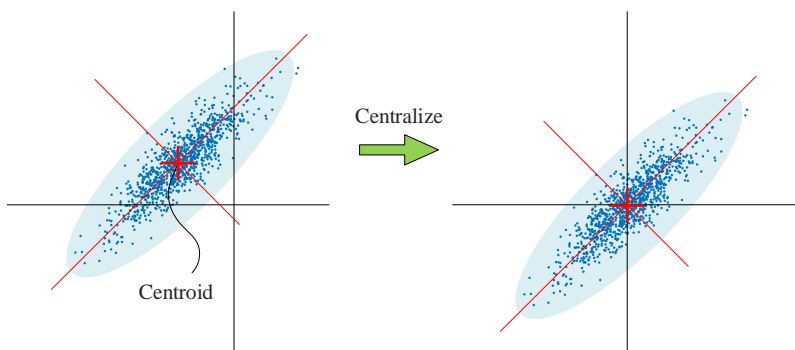


图 6. 数据中心化相当于平移

8.3 缩放：对角阵

等比例缩放 (equal scaling) 是指在缩放时各个维度采用相同缩放比例。举个例子，如图 7 所示，横、纵坐标等比例放大 2 倍，等比例缩放得到的图形和原图形相似。

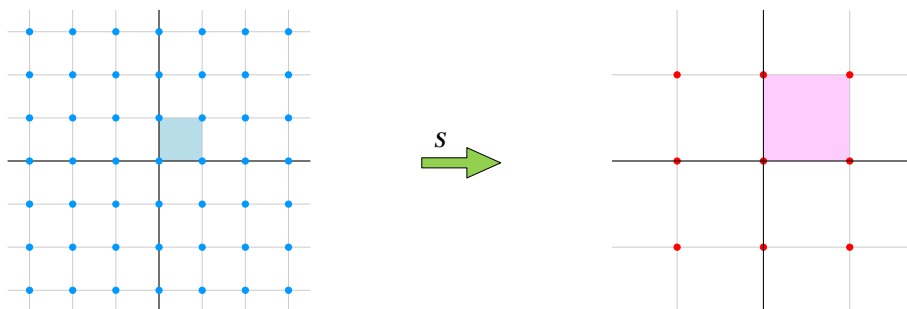


图 7. 等比例扩大 2 倍网格变化

等比例缩放对应的矩阵运算：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}}_S \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

上式中，等比例缩放矩阵 S 为对角方阵，对角线元素相同。(8) 整理得到：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sx_1 \\ sx_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

行列式值

计算 (8) 中转化矩阵 S 的行列式值：

$$\det \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} = s^2 \quad (10)$$

可以发现对于二维空间，等比例缩放对应图形面积变化 s^2 倍。

非等比例缩放

图 8 所示为**非等比例缩放** (unequal scaling) 的例子。

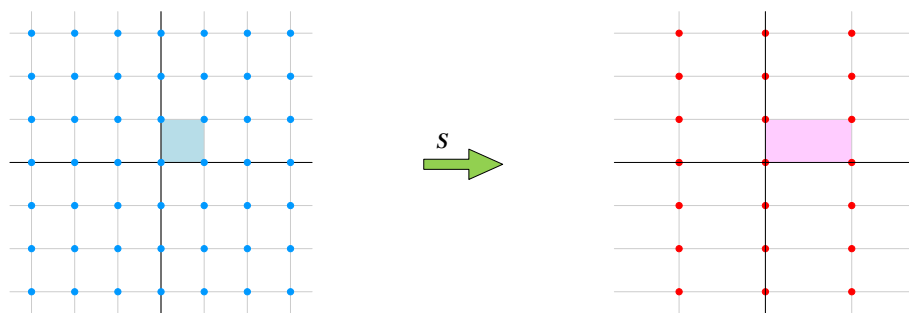


图 8. 非等比例缩放网格变化

非等比例缩放矩阵为：

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^T = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

数据点为列向量时，非等比例缩放运算为：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

数据点为行向量时，对 (12) 等式左右转置得到：

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \mathbf{S} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

请大家根据图 9 两幅子图中图形缩放前后横、纵轴坐标比例变化，来推断矩阵 \mathbf{S} 的值分别是多少。

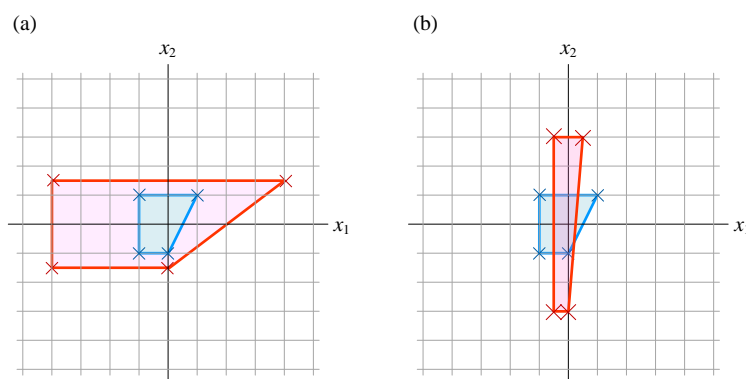


图 9. 非等比例缩放

逆矩阵

现在回过头来从几何变换角度再思考什么是矩阵的逆。

从线性变换角度，缩放矩阵 S 的逆 S^{-1} 无非就是 S 对应的几何变换“逆操作”。如图 10 所示，缩放操作的逆运算就是将缩放后图形再还原成原图形。

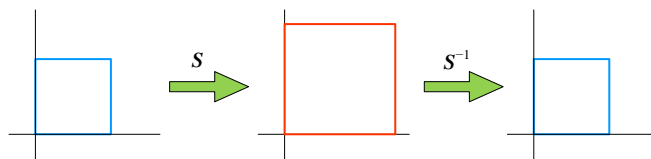


图 10. 缩放的逆运算

特别地，如果缩放时将图形“完全压扁”，比如：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_S \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

(14) 中矩阵 S 的行列式值为 0，也就是说变换矩阵不可逆。如图 11 所示，(14) 造成的形变也是不可逆的。

这样，我们从几何图形变换角度，解释为什么只有行列式值不为 0 的方阵才存在逆矩阵。本章后文还会继续介绍哪些几何操作“可逆”。

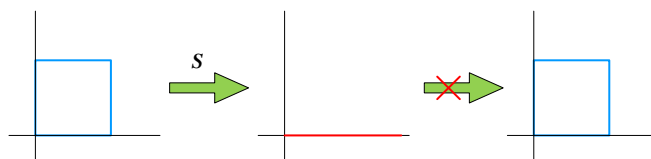


图 11. 不可逆地“压扁”



本节内容让我们联想到数据**标准化** (standardization) 这一概念。数据矩阵 X 标准化得到数据矩阵 Z ，对应运算如下：

$$Z_{n \times 2} = (X_{n \times 2} - E(X_{n \times 2})) \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

实际上，数据标准化就相当于先平移，然后再用标准差进行比例缩放。每个特征采用的缩放系数为标准差的倒数。

将 Z 写成 $[z_1, z_2]$ ，展开 (15) 得到：

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1 - E(x_1)}{\sigma_1} & \frac{x_2 - E(x_2)}{\sigma_2} \end{bmatrix} \quad (16)$$

上式对应的统计运算则是：

$$\begin{cases} Z_1 = \frac{X_1 - E(X_1)}{\sigma_1} \\ Z_2 = \frac{X_2 - E(X_2)}{\sigma_2} \end{cases} \quad (17)$$

图 6 所示为数据标准化过程。数据标准化并不改变相关性系数大小。

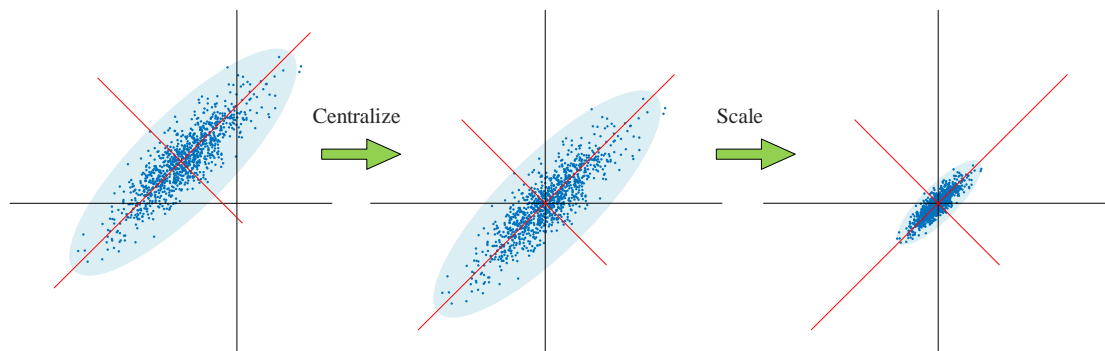


图 12. 数据标准化

挤压

还有一种特殊的缩放叫做**挤压** (squeeze)，比如竖直方向或水平方向压扁，但是面积保持不变。图 13 所示为挤压对应的网格图变化。

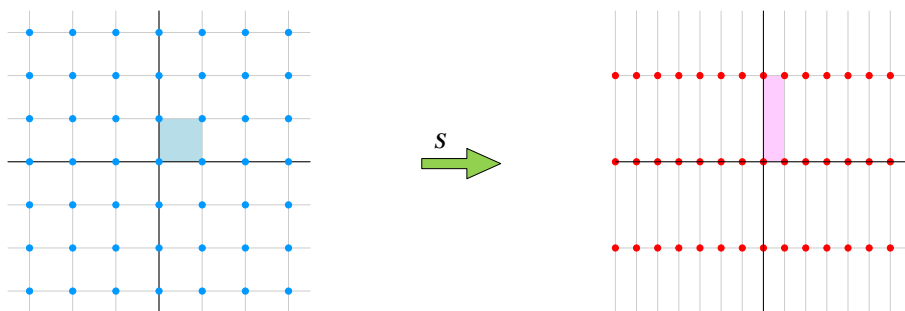


图 13. 挤压所对应的网格图变化

坐标为列向量时，挤压对应的矩阵运算为：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix}}_S \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

其中， s 不为 0。计算上式方阵 S 行列式值，发现结果为 1，这说明挤压前后面积没有变化：

$$\det \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix} = 1 \quad (19)$$

8.4 旋转：行列式值为 1

本节介绍旋转，如图 14 所示。旋转是非常重要的几何变换，我们会在本书后续特征值分解、奇异值分解等内容中看到旋转。

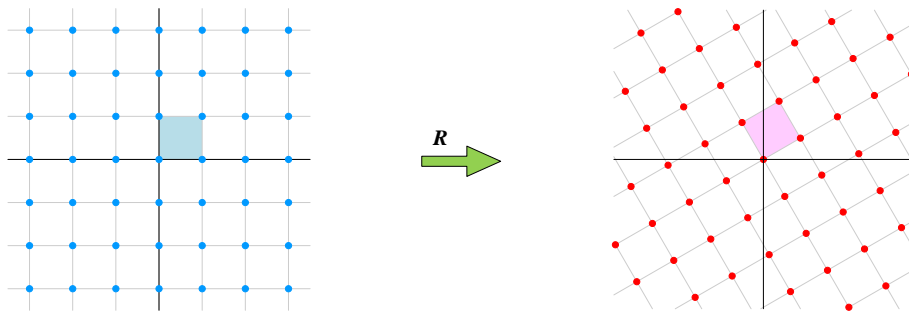


图 14. 旋转变换的网格

列向量坐标 \mathbf{x} 逆时针旋转 θ 得到 \mathbf{z} :

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

其中 \mathbf{R} 为,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (21)$$

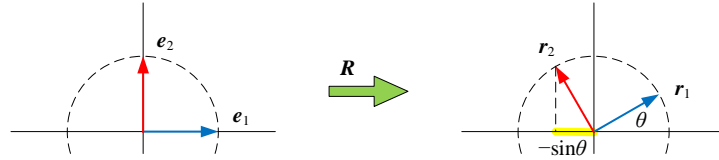
(21) 代入 (20)，得到下式：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

记住上式并不难，下面介绍一个小技巧。用 $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]$ 分别乘 \mathbf{e}_1 和 \mathbf{e}_2 得到 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R}\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R}\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

几何变换过程如图 15 所示, e_1 和 e_2 逆时针旋转 θ 分别得到 r_1 和 r_2 。图 15 告诉了我们 R 中哪些元素是 $\cos()$ 、还是 $\sin()$ 。此外, R 中唯一一个带负号的元素就是 r_2 的第一个元素, 对应 r_2 横轴坐标。

图 15. R 作用于 e_1 和 e_2

R 的行列式值为 1, 也就是说旋转前后面积不变:

$$\det \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \quad (24)$$

对于数据矩阵情况, 逆时针旋转 θ 的矩阵乘法如下:

$$Z_{n \times 2} = X_{n \times 2} R^T = X_{n \times 2} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (25)$$

(22) 和 (25) 两个等式的联系就是转置运算。图 16 所示为几何形状旋转操作的几个例子。

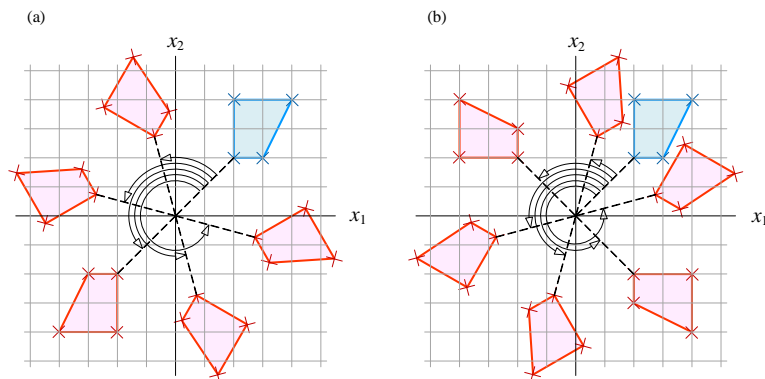


图 16. 旋转的两个例子



Bk4_Ch8_02.py 绘制图 16。



在 Bk4_Ch8_02.py 基础上，我们用 Streamlit 做了一个 App，大家可以输入不同角度，将代表标准正交基的“方方正正网格”旋转得到不同规范正交基。请大家参考 Streamlit_Bk4_Ch8_02.py。



下面采用《数学要素》一册介绍的极坐标推导本节给出的旋转变换矩阵 \mathbf{R} 。

图 17 给出的是向量 \mathbf{a} 在极坐标系坐标为 (r, α) ，在正交系中向量 \mathbf{a} 的横纵坐标为：

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (26)$$

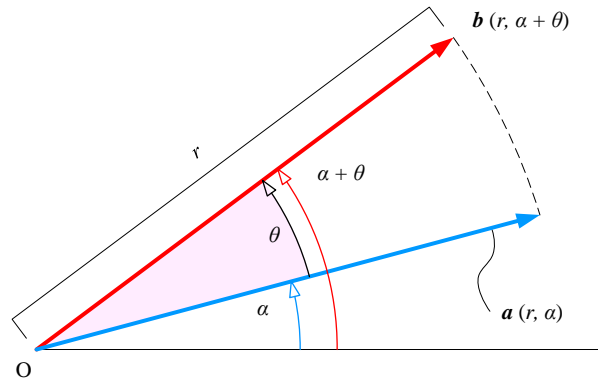


图 17. 极坐标中解释旋转

向量 \mathbf{a} 逆时针旋转 θ 后，得到向量 \mathbf{b} 。 \mathbf{b} 对应极坐标为 $(r, \alpha + \theta)$ 。向量 \mathbf{b} 对应的横纵坐标为：

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\alpha + \theta) \\ r \sin(\alpha + \theta) \end{bmatrix} \quad (27)$$

(27) 展开得到：

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\alpha + \theta) \\ r \sin(\alpha + \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{r \cos \alpha \cos \theta}_{x_1} - \underbrace{r \sin \alpha \sin \theta}_{x_2} \\ \underbrace{r \sin \alpha \cos \theta}_{x_2} + \underbrace{r \cos \alpha \sin \theta}_{x_1} \end{bmatrix} \quad (28)$$

将 (26) 中 x_1 和 x_2 代入 (28)，得到：

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta \\ x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

逆矩阵

旋转矩阵 \mathbf{R} 求逆得到 \mathbf{R}^{-1} ：

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \quad (30)$$

如图 18 所示，几何角度来看， \mathbf{R}^{-1} 代表朝着相反方向旋转。

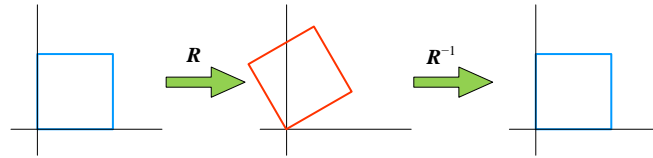


图 18. 旋转的逆运算



图 19 所示为从数据角度看旋转操作。数据完成中心化 (平移) 后，质心位于原点，即椭圆中心位于原点。然后，中心化数据按照特定的角度绕原点旋转后，让椭圆的长轴位于横轴。也就是说，旋转椭圆变成正椭圆。图 19 中正椭圆经过缩放后可以得到单位圆。单位圆意味着随机变量满足二元高斯分布 $N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{2 \times 2})$ 。

图 19 中，“旋转 → 缩放”过程是**主成分分析** (principal component analysis, PCA) 的思路。反方向来看，“缩放 → 旋转”将单位圆变成旋转椭圆的过程，代表利用满足 IID $N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{2 \times 2})$ 二元随机数产生具有指定相关性系数、指定均方差的随机数。IID 指的是**独立同分布** (Independent and Identically Distributed)。

这些内容，我们会在《概率统计》和《数据科学》两册书中深入讲解。

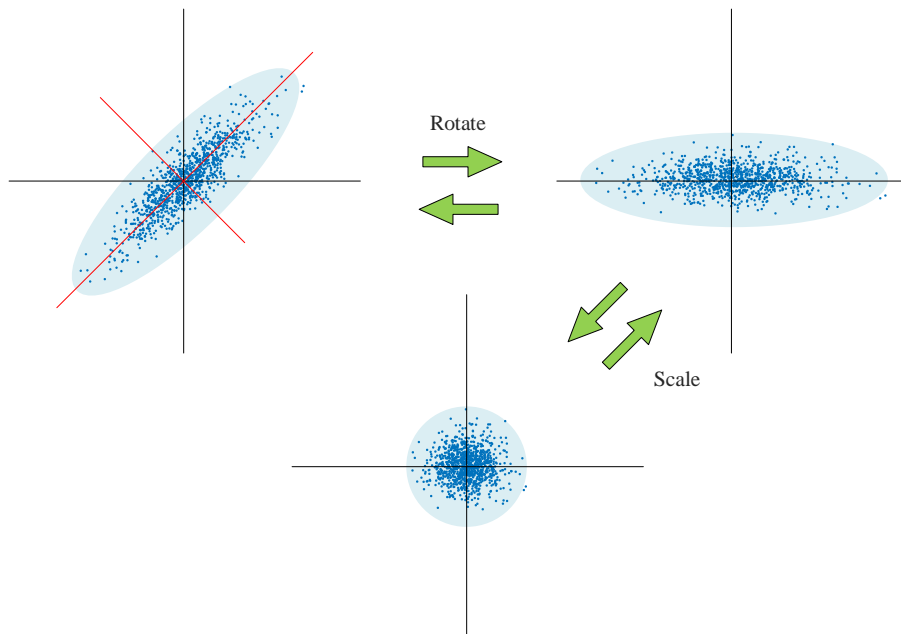


图 19. 数据视角下的旋转和缩放

矩阵乘法不满足交换律

本书第 4 章讲过，一般来说，矩阵乘法不满足交换律，即，

$$AB \neq BA \quad (31)$$

现在我们用图形的几何变换来说明这一点。

图 20 所示左侧方格，先经过 S 缩放，再通过 R 旋转得到右侧红色网格。图 20 红色网格显然不同于图 21。因为图 21 红色网格是先通过 R 旋转、再经过 S 缩放得到的。

再次强调，如果用列向量 $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ 代表坐标点时，矩阵乘法 $RS\mathbf{x}$ 代表先缩放 (S)、后旋转 (R)；而矩阵乘法 $SR\mathbf{x}$ 代表先旋转 (R)、后缩放 (S)。

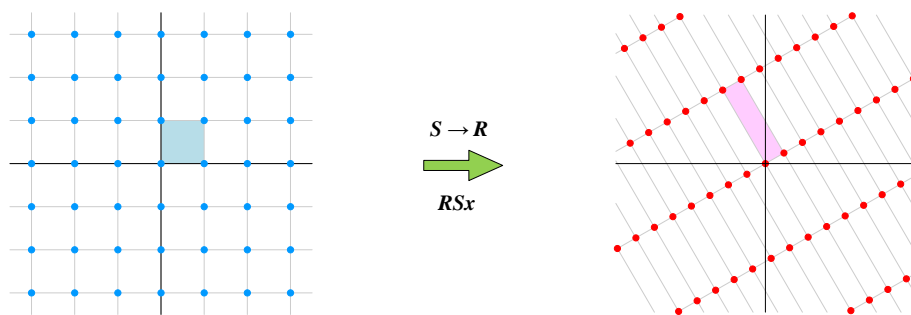


图 20. 先缩放再旋转

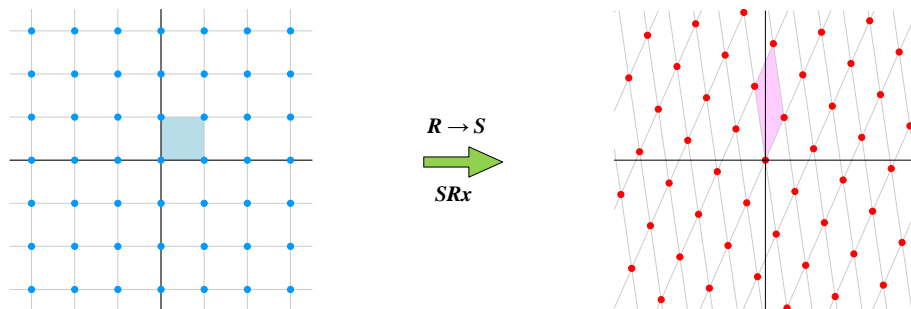
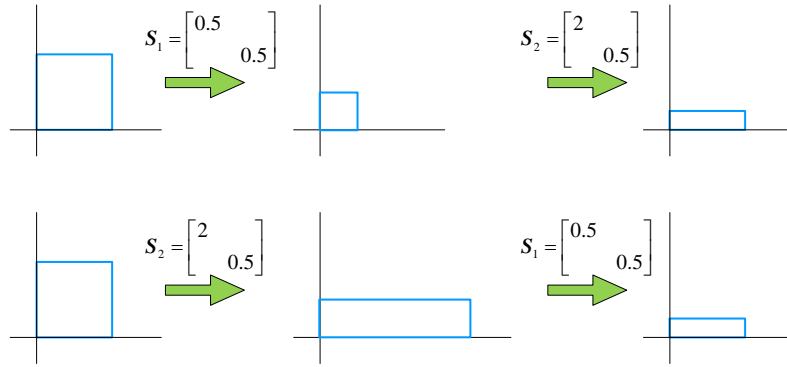


图 21. 先旋转再缩放

两个 2×2 缩放矩阵相乘满足交换律，因为它们都是对角阵。下式的 S_1 和 S_2 均为缩放矩阵，相乘时交换顺序不影响结果：

$$S_1 S_2 = S_2 S_1 \quad (32)$$

其中，缩放比例都不为 0。图 22 所示为，按不同顺序先后缩放最终结果相同。

图 22. 两个 2×2 缩放矩阵连乘满足交换律

此外，两个形状相同的旋转矩阵相乘也满足交换律。令 R_1 和 R_2 分别为：

$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (33)$$

根据三角恒等式， R_1 和 R_2 的乘积可以整理为：

$$\begin{aligned} R_1 R_2 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) & -\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) & -\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (34)$$

同理， R_2 和 R_1 的乘积也可以整理为：

$$R_2 R_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (35)$$

图 23 给出的例子从几何角度说明上述规律。此外，请大家注意图中原点位置不变。

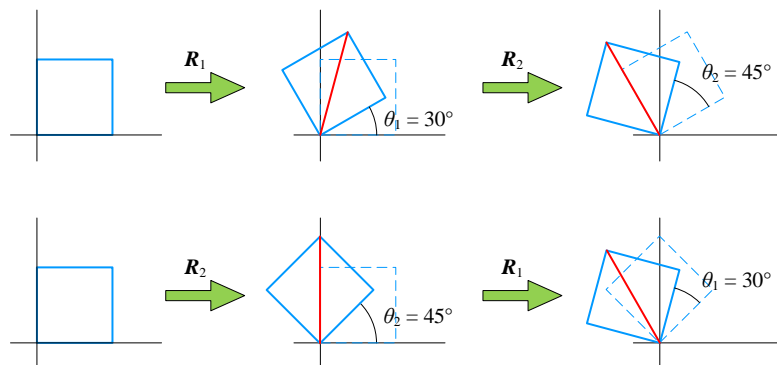


图 23. 两个 2×2 旋转矩阵连乘满足交换律

8.5 镜像：行列式值为负

本节介绍两种方式完成镜像计算的方法。

切向量

第一种镜像用切向量来完成。切向量 τ 具体为：

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (36)$$

关于通过原点、切向量为 τ 直线**镜像** (reflection) 的线性变换操作如下：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\|\tau\|^2} \begin{bmatrix} \tau_1^2 - \tau_2^2 & 2\tau_1\tau_2 \\ 2\tau_1\tau_2 & \tau_2^2 - \tau_1^2 \end{bmatrix}}_T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

对 T 求行列式值：

$$\det \left(\frac{1}{\|\tau\|^2} \begin{bmatrix} \tau_1^2 - \tau_2^2 & 2\tau_1\tau_2 \\ 2\tau_1\tau_2 & \tau_2^2 - \tau_1^2 \end{bmatrix} \right) = \frac{-(\tau_1^2 - \tau_2^2)^2 - 4\tau_1^2\tau_2^2}{\|\tau\|^4} = \frac{-(\tau_1^2 + \tau_2^2)^2}{(\tau_1^2 + \tau_2^2)^2} = -1 \quad (38)$$

T 的行列式值为负数，这说明线性变换前后图形发生翻转。图 24 给出两个镜像的例子。

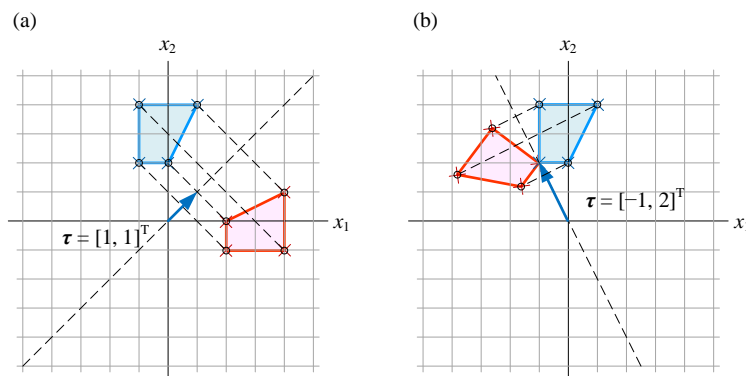


图 24. 两个镜像变换的例子

角度

第二种镜像通过角度定义。关于通过原点、方向和水平轴夹角为 θ 直线镜像，类比 (36)，直线的切向量相当于 $[\cos\theta, \sin\theta]^T$ ，完成镜像的运算为：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (39)$$



实质上，(38) 和 (39) 完全等价。下一章将利用正交投影这个工具推导 (39)。

关于横纵轴镜像

关于横轴镜像对称的矩阵运算为：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

关于纵轴镜像对称的矩阵运算为：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

请大家自行计算以上两个转化矩阵 \mathbf{T} 的行列式值。

8.6 投影：降维操作

本节从几何角度简单介绍投影。不做特殊说明的话，本书中提到的投影都是**正交投影** (orthogonal projection)。

切向量

给定某点的坐标为 (x_1, x_2) ，向通过原点、切向量为 $\boldsymbol{\tau} [\tau_1, \tau_2]^T$ 直线方向**投影** (projection)，投影点坐标 (z_1, z_2) 为：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|^2} \underbrace{\begin{bmatrix} \tau_1^2 & \tau_1\tau_2 \\ \tau_1\tau_2 & \tau_2^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (42)$$

正交投影的特点是， (x_1, x_2) 和 (z_1, z_2) 两点连线垂直于 $\boldsymbol{\tau}$ 。如图 25 所示，投影是一个降维的过程，平面网格“坍塌”成一条直线。

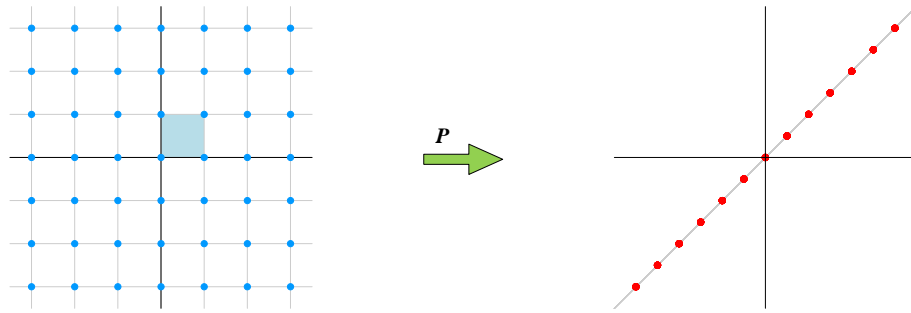


图 25. 投影网格

(42) 中矩阵 P 的行列式值为 0:

$$\det \left(\frac{1}{\|\tau\|^2} \begin{bmatrix} \tau_1^2 & \tau_1 \tau_2 \\ \tau_1 \tau_2 & \tau_2^2 \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (43)$$

横、纵轴

向横轴投影，相当于将图形压扁到横轴：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_P \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (44)$$

向纵轴投影对应的矩阵运算为：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_P \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (45)$$

显然 (44) 和 (45) 中两个不同矩阵 P 的行列式值都为 0。

秩

简单整理 P 得到：

$$P = \frac{1}{\|\tau\|^2} \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_1 & \tau_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (46)$$

我们发现， P 的列向量之间存在倍数关系，即 P 的列向量线性相关。也就是说， P 的秩为 1，即 $\text{rank}(P) = 1$ 。也请大家自行计算 (44) 和 (45) 中矩阵 P 的秩。

张量积

再进一步，我们发现 (46) 可以写成：

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|^2} \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_1 \\ \tau_2 & \tau_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|^2} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \right) @ \left(\frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \right)^T \quad (47)$$

容易发现，上式中存在本书第 2 章讲过的向量**单位化** (vector normalization)。 $\boldsymbol{\tau}$ 单位化得到**单位向量** (unit vector) $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ ：

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (48)$$

(47) 可以进一步写成张量积的形式，具体如下：

$$\mathbf{P} = \hat{\boldsymbol{\tau}} \hat{\boldsymbol{\tau}}^T = \hat{\boldsymbol{\tau}} \otimes \hat{\boldsymbol{\tau}} \quad (49)$$

➡ 大家可能已经疑惑了，正交投影怎么和张量积联系起来了？卖个关子，我们把这个问题留给下两章回答。

8.7 再谈行列式值：几何视角

有了本章之前的内容，本节总结行列式值的几何意义。

对于一个 2×2 矩阵 \mathbf{A} ， $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 代表某种几何变换，而 \mathbf{A} 的行列式值决定了变换前后面积缩放比例。

2×2 矩阵 \mathbf{A} 写成 $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$ 。在 \mathbf{A} 的作用下， \mathbf{e}_1 和 \mathbf{e}_2 单位向量变成 \mathbf{a}_1 和 \mathbf{a}_2 ：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}_1} = \mathbf{a}_1, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}_2} = \mathbf{a}_2 \quad (50)$$

本节前文提过以 \mathbf{e}_1 和 \mathbf{e}_2 为边构成的平行四边形为正方形，对应的面积为 1。以 \mathbf{a}_1 和 \mathbf{a}_2 为边构成的一个平行四边形对应的面积就是矩阵 \mathbf{A} 的行列式值。

行列值为正

举个例子，给定矩阵 \mathbf{A} ：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (51)$$

把 \mathbf{A} 写成 $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$ ，其中：

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (52)$$

e_1 和 e_2 向量经过矩阵 A 线性变换分别得到 a_1 和 a_2 :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (53)$$

$e_1 \quad a_1 \quad e_2 \quad a_2$

如图 26 所示, e_1 和 e_2 向量构成的正方形面积为 1。而 a_1 和 a_2 向量构成的平行四边形面积为 11, 即对应 $|A| = 11$, 平面几何形状放大 11 倍。

反之, 如果 $0 < |A| < 1$, 变换之后平面几何形状面积缩小。当然, 行列式值可以为 0, 也可以为负数。

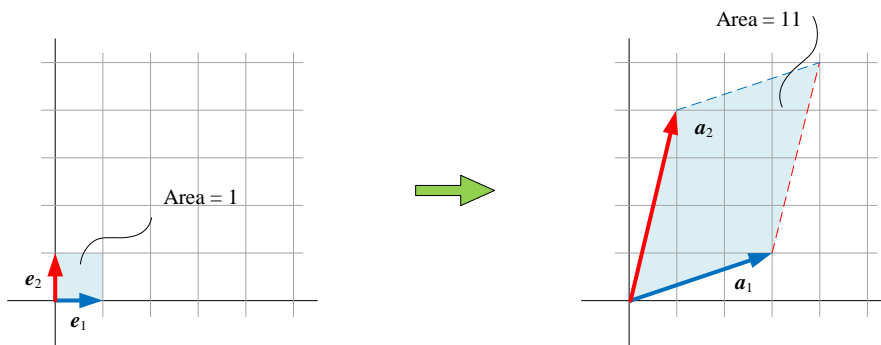


图 26. 行列式值为正

行列式值为 0

如果矩阵 A 行列式值为 0, 从几何上来讲, A 中肯定含有“降维”变换成分。我们看下面这个例子, e_1 和 e_2 向量经过矩阵线性变换得到 a_1 和 a_2 :

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (54)$$

$e_1 \quad a_1 \quad e_2 \quad a_2$

如图 27 所示, a_1 和 a_2 向量共线, 夹角为 0° 。 a_1 和 a_2 构成图形的面积为 0, 对应 $|A| = 0$ 。

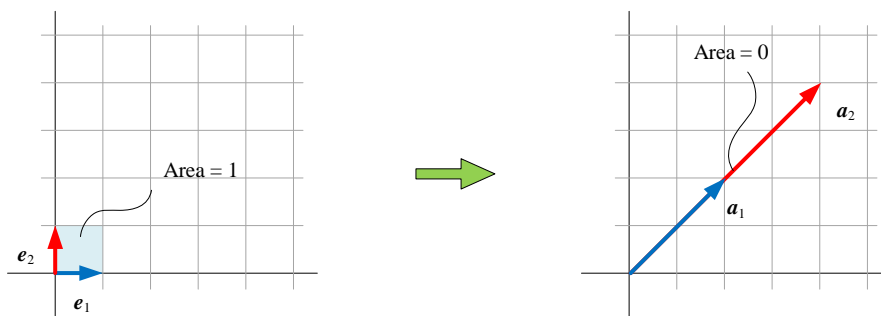


图 27. 行列式值为零

行列式值为负

如果矩阵 A 行列式值为负，几何上来看，图形翻转。如图 28 所示，几何变换前后，逆时针来看，蓝色箭头和红色箭头“先后次序”发生调转。

图 28 中图形几何变换后面积则放大了 10 倍（行列式值的绝对值为 10）。请大家根据图 28 中 a_1 和 a_2 两个向量确定 A 的具体值。

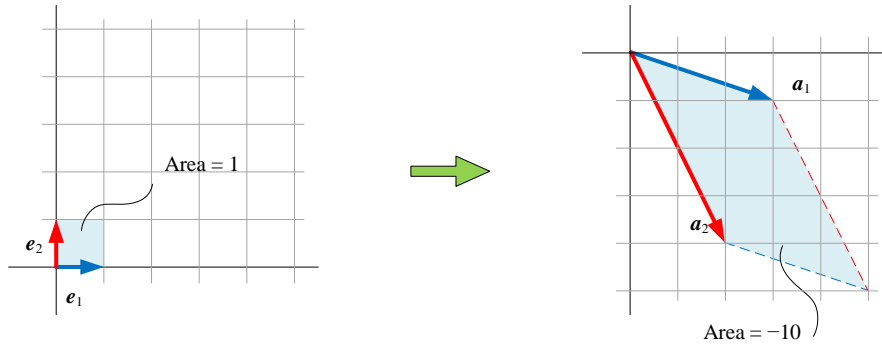
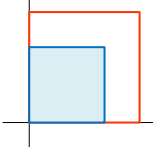
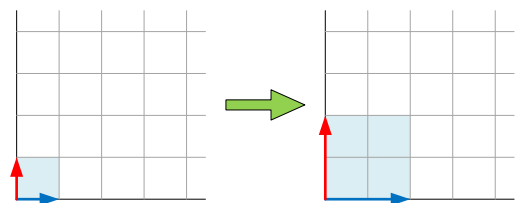
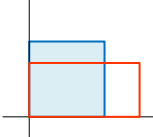
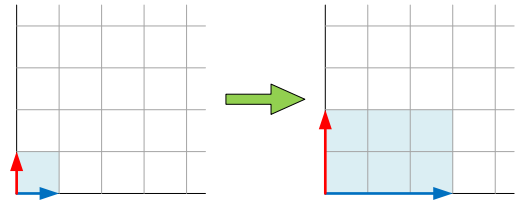
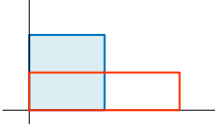
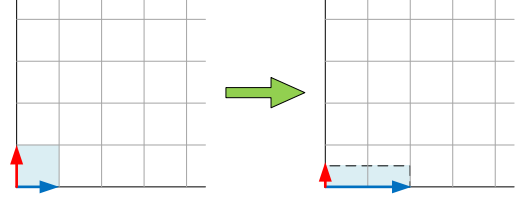
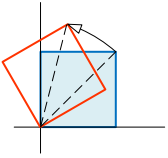
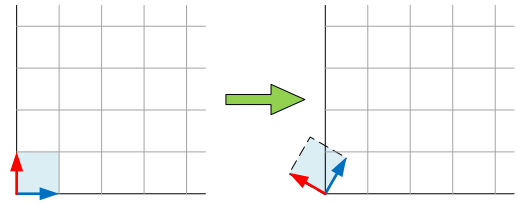
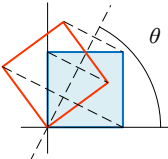
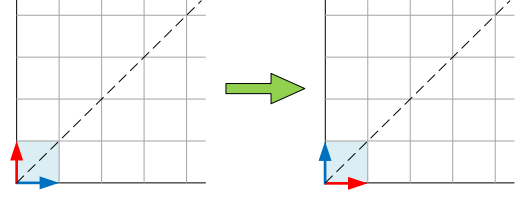
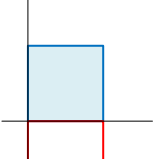
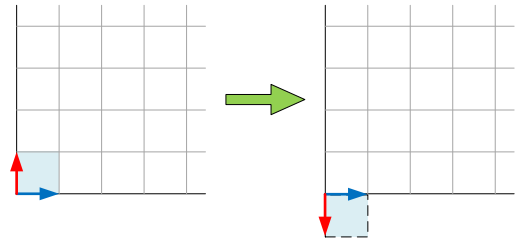
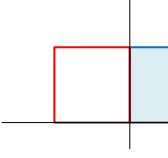
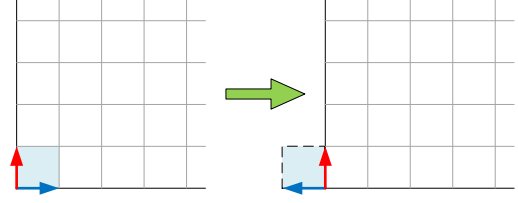
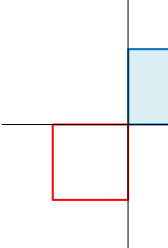
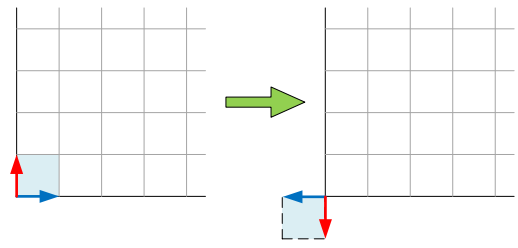
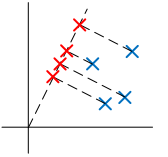
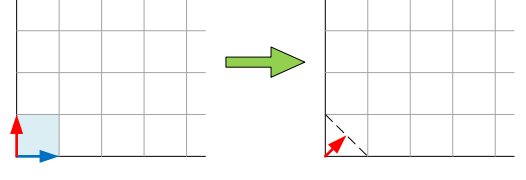


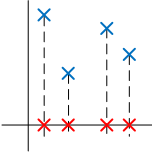
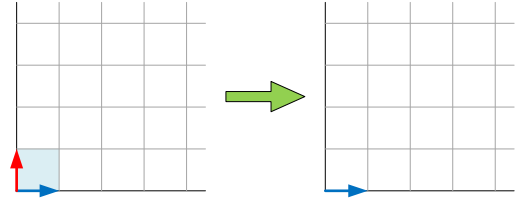
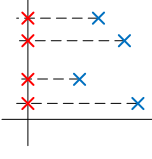
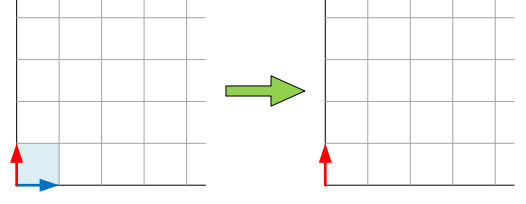
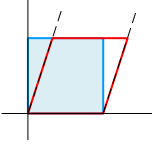
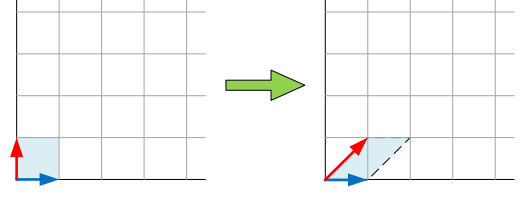
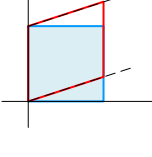
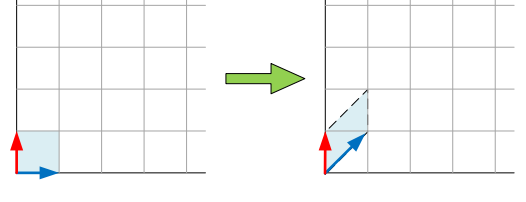
图 28. 行列式值为负

表 2 总结本章主要几何变换。表中还给出具体示例、行列式值、秩，并比较几何变换前后图形变化。

表 2. 本章主要几何变换示例

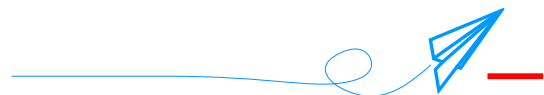
几何变换	示例、行列式值、秩	图形变化
等比例缩放 	$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ $ A = 4, \text{rank}(A) = 2$	
非等比例缩放 	$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ $ A = 6, \text{rank}(A) = 2$	
挤压 s 倍 	$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ $ A = 1, \text{rank}(A) = 2$	

<p>逆时针旋转 θ</p> 	$A = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ $ A = 1, \text{rank}(A) = 2$ 逆时针旋转 60°	
<p>关于通过原点、方向和水平轴夹角为 θ 直线镜像</p> 	$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $ A = -1, \text{rank}(A) = 2$ 夹角为 45°	
<p>关于横轴镜像对称</p> 	$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ $ A = -1, \text{rank}(A) = 2$	
<p>关于纵轴镜像对称</p> 	$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $ A = -1, \text{rank}(A) = 2$	
<p>关于原点对称</p> 	$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ $ A = 1, \text{rank}(A) = 2$	
<p>向通过原点、切向量为 $\tau [\tau_1, \tau_2]^T$ 直线投影</p> 	$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $ A = 0, \text{rank}(A) = 1$	

<p>向横轴投影</p> 	$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $ A = 0, \text{ rank}(A) = 1$	
<p>向纵轴投影</p> 	$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $ A = 0, \text{ rank}(A) = 1$	
<p>沿水平方向剪切</p> 	$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $ A = 1, \text{ rank}(A) = 2$	
<p>沿竖直方向剪切</p> 	$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $a_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $a_2 = Ae_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $ A = 1, \text{ rank}(A) = 2$	



在上一章第一个 Streamlit 应用中，我们看到如何产生不同“平行且等距网格”。在此基础上，本章 Streamlit 应用增加了矩阵 A 对单位圆的线性变换。请大家参考 Streamlit_Bk4_Ch8_03.py。



本章讲了很多种几何变换，请大家格外关注平移、缩放、旋转和投影。我们将会在接下来的内容中反复使用这四种几何变换。

此外，本章在讲解几何变换的同时，还和大家从几何角度回顾并探讨了矩阵可逆性、矩阵乘法不满足交换律、秩、行列式值等线性代数概念。请大家特别注意行列式值的几何视角，我们将在特征值分解中再进一步探讨。

用几何视角理解线性代数概念，是学习线性代数的唯一“捷径”。此外，数据视角会让大家看到线性代数的实用性，并直接和编程联结起来。

希望大家记住：

有数据的地方，就有向量！

有向量的地方，就有几何！

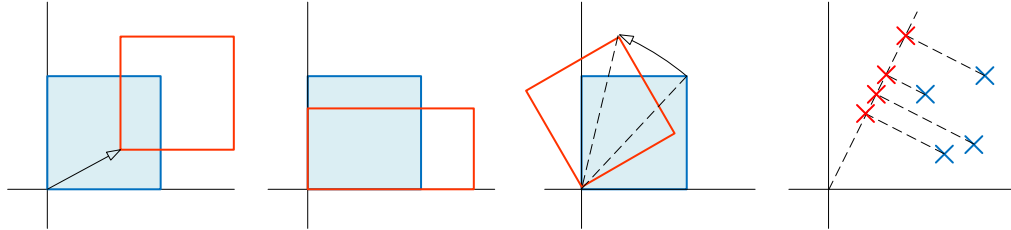


图 29. 总结本章重要内容的四副图