Zadanie:

Dane są dwa int-y: $a, b \geq 0$. Zwróć a^b.

Rozwiązanie:

$$a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b \text{ razy}} \quad \Rightarrow \quad \text{złożoność czasowa } O(b)$$

Trick polega na tym, żeby wykorzystać fakt, że każdą liczbę n naturalną możemy przedstawić jako sumę potęg 2.

Rozpatrzmy przykład:

Niech $a = 5$, $b = 23$.

Wtedy $a^b = 5^{23} = 5^{10111_{(2)}} = 5^{16} \cdot 5^{4} \cdot 5^{2} \cdot 5^{1}$

Zatem wystarczy wymnożyć tylko niektóre z potęg:

$a^1, a^2, a^4, a^8, \ldots, a^{2^{\lfloor \log_2 b \rfloor}}$ aby otrzymać wynik.

Wyznaczenie tych potęg jest proste, bo: $a^{2i} = a^i \cdot a^i$

Natomiast informacja które potęgi wziąć do wyniku zakodowana jest w zapisie dwójkowym liczby b:

Bierzemy a^i do wyniku $\Leftrightarrow$ odpowiadający bit w b jest zapalony

Funkcja w C++:

```cpp
long long fast_pow(int a, int b) {
    long long res = 1;
    while (b > 0) {
        if (b & 1) res *= a;
        a *= a;
        b /= 2;
    }
    return res;
}
```

Uwaga:

Opisana wyżej metoda szybkiego potęgowania nie ogranicza się tylko do potęgowania liczb. Jedynym założeniem jest łączność operacji. A zatem stosuje się ją przy np. potęgowaniu macierzy, w arytmetyce modularnej, przy składaniu przekształceń.

Operacja $\circ$ jest łączna wtw. gdy:

$$\forall_{a,b,c} \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$