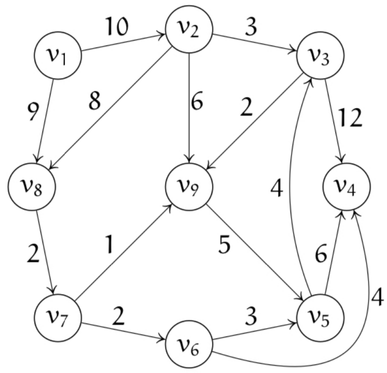
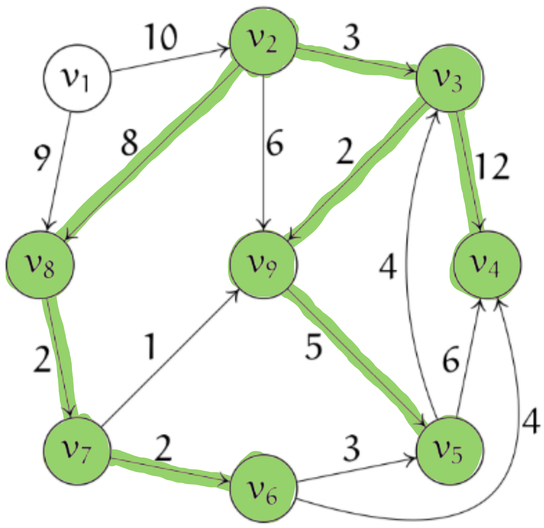
3. Przy krawędziach grafu skierowanego narysowanego obok są podane ich długości.



a) Za pomocą algorytmu Dijkstry znajdź drzewo najkrótszych ścieżek od wierzchołka v_2 do pozostałych wierzchołków. Czy istnieje tylko jedno takie drzewo? Odpowiedź uzasadnij.

b) Algorytm Bellmana-Forda w każdej iteracji dokonuje relaksacji wszystkich krawędzi w pewnej kolejności; dla grafu o n wierzchołkach algorytm wykonuje $n-1$ takich iteracji. Czy można uporządkować krawędzie grafu tak, aby wszystkie krawędzie drzewa najkrótszych ścieżek były znalezione w pierwszej iteracji? Czy dla dowolnego grafu można uporządkować krawędzie grafu tak, aby pewne krawędzie drzewa najkrótszych ścieżek były znalezione dopiero w ostatniej iteracji? Odpowiedź uzasadnij.

a)



v_i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
dist:	∞	0	3	15	10	12	10	8	5
poprz:	NULL	NULL	2	3	9	7	8	2	3

Istnieje dokładnie jedno takie drzewo, ponieważ dla każdego wierzchołka $v_1, \dots, v_9$ istnieje dokładnie jedna ścieżka o minimalnej sumie wag krawędzi.

b)

Zacznijmy od drugiego pytania. Skoro graf jest dowolny, to niech będzie ścieżką postaci:

$$v_1 \to v_2 \to v_3 \to \dots \to v_{n-1} \to v_n$$

Istnieje tylko jedna ścieżka z v_1 do v_n więc niezależnie od wag krawędzi będzie ona najkrótszą ścieżką.

Teraz ustalmy, że krawędzie będziemy rozpatrywać w kolejności:

$v_{n-1} \to v_n$

$v_{n-2} \to v_{n-1}$

$v_{n-3} \to v_{n-2}$

$\vdots$

⋮

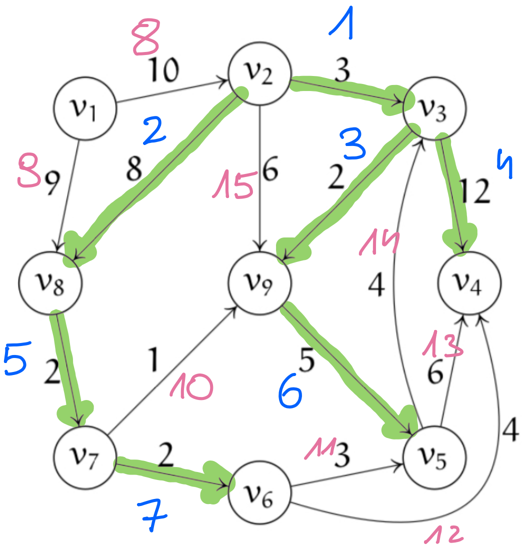
$v_2 \to v_3$

$v_1 \to v_2$

Wtedy w podczas przebiegu algorytmu Bellmana-Forda dla v_1 (– wierzchołek startowy) w k-tej, $k \geq 1$ iteracji znajdziemy wartość najkrótszej ścieżki – wyniku dla k+1-tego wierzchołka. A zatem dopiero w n-1 iteracji wyznaczony zostanie wynik dla n-tego wierzchołka i algorytm się skończy.

Wracając do pierwszego pytania:

Zakładam, że pytanie odnosi się do grafu z podpunktu e).



Wtedy aby w 1 iteracji znaleźć wszystkie krawędzie drzewa najkrótszych ścieżek wystarczy:

↳ uporządkować krawędzie należące do drzewa najkrótszych ścieżek w sposób bfs-o podobny (lub dfs-o podobny) [A dopiero potem]:

↳ pozostałe krawędzie uporządkować dowolnie, ponieważ żadna z nich nie zmieni już wyznaczonego wcześniej wyniku.

Na rysunku kolorem niebieskim zaznaczyłem przykładową kolejność rozpatrywania krawędzi z drzewa najkrótszych ścieżek, a kolorem różowym kolejność pozostałych krawędzi.