

# Generating isocurvature modes and primordial features in multi-field Higgs- $R^2$ inflation

Flavio Pineda\* and Luis O. Pimentel†

*Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana  
Iztapalapa P. O. Box 55-534, 09340 México, CDMX., México*

(Dated: October 24, 2025)

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

## I. INTRODUCTION

La inflación cósmica se ha convertido en Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

A lo largo de este trabajo, usaremos la métrica de FLRW espacialmente plana

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (\text{I.1})$$

y usamos unidades naturales tal que  $c = 1$ ,  $\hbar = 1$ ,  $G = 1$  y  $M_p = 1$ .

## II. MULTI-FIELD HIGGS- $R^2$ INFLATION

Nuestro punto de partida es el modelo Higgs- $R^2$  [13, 19, 21] en el marco de Jordan en su forma completa, es decir, la teoría de la inflación de Higgs [5] con un término  $R^2$ , cuya acción está dada por

---

\*Electronic address: fpineda@xanum.uam.mx (Corresponding author)

†Electronic address: lovr@xanum.uam.mx )

$$S_J[g_{\mu\nu}, \mathcal{H}] = \int d^4x \sqrt{-g_J} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2\xi_h}{1} |\mathcal{H}|^2 \right) R_J + \xi_s R_J^2 - g_J^{\mu\nu} (D_\mu \mathcal{H})^\dagger (D_\nu \mathcal{H}) - \lambda |\mathcal{H}|^4 \right], \quad (\text{II.2})$$

donde las variables definidas en el marco de Jordan las denotamos con un subíndice  $J$ . El campo  $\mathcal{H}$  es el doblete del campo de Higgs con un acoplamiento no mínimo  $\xi_h$ , necesario para que  $\mathcal{H}$  produzca inflación, mientras que  $\lambda$  es la constante cuártica de acoplamiento y  $D_\mu \mathcal{H}$  es la derivada covariante del sector Higgs del SM, la cual incluye las interacciones con los campos de norma

$$D_\mu \mathcal{H} = \left( \partial_\mu - \frac{ig}{2} \tau_a W_\mu^a + \frac{ig'}{2} B_\mu \right) \mathcal{H}. \quad (\text{II.3})$$

Los campos  $W_\mu^a$  y  $B_\mu$  representan los campos de norma de los grupos  $SU(2)$  y  $U(1)$ , con sus respectivas constantes de acoplamiento  $g$  y  $g'$ , mientras que  $\tau_a$  son los generadores de  $SU(2)$ . Es usual definir el doblete de Higgs  $\mathcal{H}$  en la norma unitaria tal que  $\mathcal{H}$  esté parametrizado por un único campo  $h$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ h + v_{\text{ew}} \end{pmatrix}, \quad (\text{II.4})$$

donde  $v_{\text{ew}} \approx 246 \text{ GeV}$  es la escala de energía del sector electrodébil. En esta norma, y considerando que  $M_p = 2.18 \times 10^{18} \text{ GeV} \gg v_{\text{ew}}$ , la acción del modelo se puede reescribir como [13]

$$S_J[g_{\mu\nu}, h] = \int d^4x \sqrt{-g_J} \left[ \frac{1}{2} (1 + \xi_h h^2) R_J + \xi_s R_J^2 - \frac{1}{2} g_J^{\mu\nu} (\partial_\mu h) (\partial_\nu h) - \frac{\lambda}{4} h^4 \right], \quad (\text{II.5})$$

donde hemos omitido las interacciones con los campos de norma. Es bien sabido que este modelo es una extensión natural del modelo de inflación de Higgs que resuelve el problema de la constante de grande de acoplamiento [19]. El modelo de Higgs necesita una constante de acoplamiento  $\xi_h \sim \mathcal{O}(10^4)$  para que el modelo sea compatible con los observables del CMB; sin embargo, el modelo sufre el problema del acoplamiento fuerte [3, 5, 6], el cual consiste en lo siguiente: el campo de Higgs se acopla fuertemente en la escala electrodébil y pierde la unitariedad perturbativa muy por debajo de la escala habitual de Planck [19]. La escala de energía es  $\Lambda_{\text{UV}} = M_p/\xi_h$ , lo cual hace cuestionable las predicciones del modelo. Para  $\xi_h \sim \mathcal{O}(10^4)$ , la escala de energía es del orden de  $\Lambda_{\text{UV}} \sim 10^{14}$ , que es menor que la escala de energía durante la inflación. Sin embargo, la inclusión del término  $R^2$  eleva la escala de energía del modelo hasta la escala de Planck de manera natural, recuperando el carácter perturbativo del modelo [13, 19]. El modelo (II.5) presenta dos grados de libertad: el campo  $h$  y un grado de libertad escalar proveniente de  $R_J^2$  conocido como escalarón, donde ambos campos son dinámicos y contribuyen a la historia de la expansión del universo. Dicha dinámica se puede entender de manera más sencilla reescalando la métrica  $g_{\mu\nu}$  del espacio-tiempo via una transformación conforme  $\Omega^2(x)$ , para que la acción (II.5) adopte la forma estándar Einstein-Hilbert más una acción de dos campos escalares  $\phi$  y  $h$  [23].

La transformación conforme que permite escribir (II.5) en el marco de Einstein es  $\Omega^2(x) = e^{-\alpha\phi}$ , con  $\alpha = \sqrt{2/3}$  y  $\phi$  el grado de libertad proveniente de  $R_J^2$  conocido como escalarón [13]. La acción resulta

$$S_J \rightarrow S_E = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) - \frac{1}{2}e^{-\alpha\phi}g^{\mu\nu}(\partial_\mu h)(\partial_\nu h) - V(\phi, h) \right], \quad (\text{II.6})$$

donde el potencial escalar  $V(\phi, h)$  depende de ambos campos en el marco de Einstein, y está definido como

$$V(\phi, h) = e^{-2\alpha\phi} \left[ \frac{1}{16\xi_s} \left( e^{\alpha\phi} - 1 - \xi_h h^2 \right)^2 + \frac{\lambda}{4} h^4 \right]. \quad (\text{II.7})$$

El término cinético no canónico de  $h$  define una métrica del espacio de campos no-trivial  $G_{IJ}$  con componentes no nulas

$$G_{\phi\phi} = 1, \quad G_{hh} = e^{-\alpha\phi}. \quad (\text{II.8})$$

Este tipo de modelos con un término cinético no canónico y dos campos escalares es bien conocido y ha sido ampliamente estudiado en la literatura [9, 11, 12, 25, 35, 36], explorando diferentes formas sencillas del potencial inflacionario. Con esto nos referimos a potenciales inflacionarios que usualmente se pueden factorizar como suma de potenciales de un solo campo  $V(\phi, \chi) = U(\phi) + W(\chi)$ , o como producto de potenciales  $V(\phi, \chi) = U(\phi)W(\chi)$ . El potencial (II.7) es más complicado en este sentido, ya que no es factorizable ni como suma ni como producto de potenciales individuales que solo dependan de  $\phi$  o  $h$ . Además, este modelo presenta 3 parámetros:  $\lambda$ ,  $\xi_h$  y  $\xi_s$ . De acuerdo con [13], existen tres casos que producen inflación en la escala de energía  $\phi \gg M_p$ :

1.  $\xi_h > 0, \xi_s > 0, \lambda > 0$
2.  $\xi_h < 0, \xi_s > 0, \lambda > 0$
3.  $\xi_h < 0, \xi_s > 0, \lambda < 0$

In the three cases, the inflationary dynamics is effectively reduce to a single field one for  $\xi_h \gg 1$ , since the isocurvature mode is heavy enough and we can integrated out. This inflationary dynamics reduction can be seen under the valley-approach that we briefly show in the appendix A. The former case corresponds to a mixture between Higgs field  $h$  and scalaron  $\phi$ ; the inflaton potential is given by (A.2). In addition, to reproduce the CMB normalization the parameters should fulfill the condition

$$4\xi_s + \frac{\xi_h^2}{\lambda} \simeq 2 \times 10^9 \quad (\text{II.9})$$

In the second case, inflation is caused solely by the scalaron  $\phi$ , and the last one corresponds to the metastable EW vacuum.

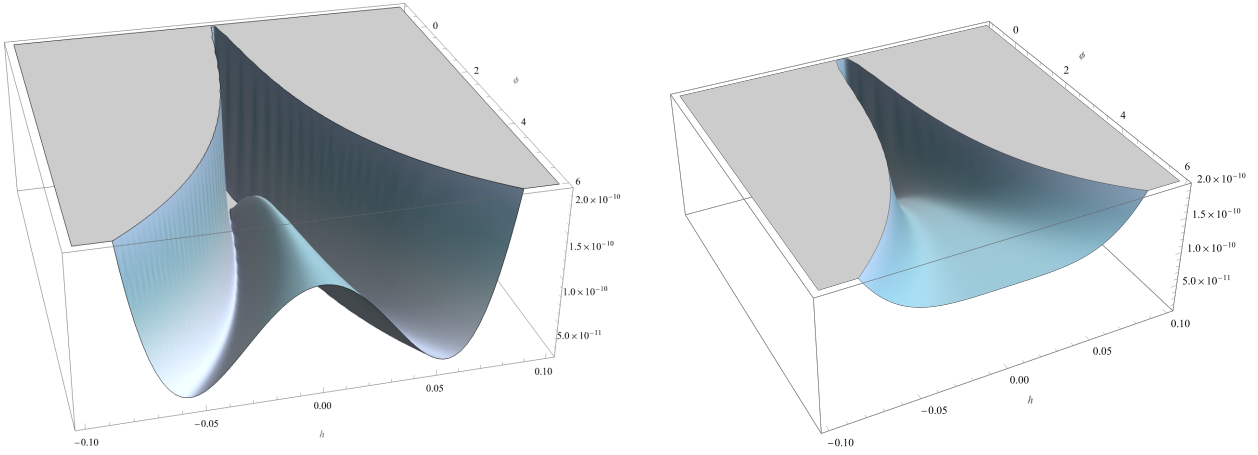


Figure 1: Potencial escalar  $V(\phi, h)/M_p^4$  en el marco de Einstein. Left panel: Potencial (II.7) usando el espacio de parámetros estándar  $\lambda = 0.13$ ,  $\xi_h = 4000$  y  $\xi_s \simeq 10^8$ . El potencial presenta una estructura de dos valles y una cresta en  $h = 0$ . Right panel: El mismo potencial (II.7) pero para un acoplamiento  $\xi_h = 0.3$ . Vemos que la estructura de los valles y de la cresta del potencial desaparecen en el límite  $\xi_h \ll 1$ .

Por otro lado, si  $\xi_s \gg \xi_h^2/\lambda$ , la inflación es tipo  $R^2$ , mientras que en el caso contrario la inflación es impulsada predominantemente por el campo de Higgs  $h$  [13]. Sin embargo, si no existe ninguna jerarquía en los parámetros, se asegura que tanto  $\phi$  como  $h$  contribuyen a la dinámica de la inflación y a la generación de las perturbaciones para  $\xi_h \gg 1$ . Este caso se conoce como espacio estándar de parámetros del modelo Higgs- $R^2$ , y es sabido que los efectos multi-campo están ausentes [21, 38]. En este trabajo exploramos el caso  $\xi_h > 0, \xi_s > 0, \lambda > 0$  con un espacio de parámetros que cumple  $\xi_h \sim \lambda \xi_s \lesssim \mathcal{O}(0.1)$  de tal manera que los modos de isocurvarura y sus características primordiales no sean despreciables durante la inflación [14]. Esta condición permite que el modo de isocurvarura no sea muy pesado para ser excitado durante la inflación, haciendo relevante su evolución para las perturbaciones primordiales. El valor de los parámetros, además de ser relevantes para la generación de modos de isocurvarura, tienen un impacto en la forma del potencial (II.7). En la Fig. 1 podemos ver la estructura del potencial para dos distintos espacios de parámetros. Para un análisis más detallado sobre la forma del potencial y sus consecuencias en las trayectorias del espacio de campos, recomendamos [21].

### A. Background analysis

Para caracterizar la evolución del sistema en modelos multi-campo de inflación, se suele utilizar un enfoque covariante del espacio de campos [1, 17, 18, 24]. Las ecuaciones de movimiento de los campos  $\phi, h$  se deducen directamente de (II.6), que usando el enfoque covariante del espacio de campos y la métrica (I.1), se escriben como

$$D_t \dot{\phi}^I + 3H \dot{\phi}^I + G^{IJ} V_J = 0, \quad (\text{II.10})$$

donde  $D_t$  es la derivada covariante direccional en  $t$ , la cual se define sobre un vector arbitrario del espacio de campos  $A^I$  como  $D_t A^I = \dot{\phi}^J \nabla_J A^I = \dot{A}^I + \Gamma^I_{JK} \dot{\phi}^J A^K$ , mientras que

los símbolos de Christoffel están evaluados en términos de  $G_{IJ}$  y sus derivadas a través de la expresión  $\Gamma^I_{JK} = G^{IM}(\partial_J G_{KM} + \partial_K G_{JM} - \partial_M G_{JK})/2$ , donde  $\partial_J G_{KM} = \partial G_{KM}/\partial \phi^J$ . Para la métrica (II.8), las componentes no nulas de  $\Gamma^I_{JK}$  son

$$\Gamma^\phi_{hh} = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha\phi}, \quad \Gamma^h_{\phi h} = \Gamma^h_{h\phi} = -\frac{\alpha}{2}. \quad (\text{II.11})$$

En un espacio-tiempo dado por la métrica de FLRW (I.1), y suponiendo que los campos escalares son homogéneos,  $\phi = \phi(t)$ ,  $h = h(t)$ , las ecuaciones de movimiento (II.10) que satisfacen los campos  $(\phi, h)$  están dadas por

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = -\frac{\alpha}{2} e^{-\alpha\phi} \dot{h}, \quad \ddot{h} + (3H - \alpha\dot{\phi})\dot{h} + e^{\alpha\phi} V_h = 0 \quad (\text{II.12})$$

donde, como es usual,  $\dot{\phantom{x}} = \partial_t$ , los sub-índices del potencial indican derivación y  $H(t)$  es el parámetro de Hubble dado por  $H = \dot{a}/a$ , siendo  $a(t)$  el factor de escala. La evolución y dinámica de  $H$  está dado por las ecuaciones de Friedmann

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}\dot{\sigma}^2, \quad 3H^2 = \frac{1}{2}\dot{\sigma}^2 + V(\phi, h), \quad (\text{II.13})$$

donde  $\dot{\sigma}^2 = G_{IJ}\dot{\phi}^I\dot{\phi}^J = \dot{\phi}^2 + e^{-\alpha\phi}\dot{h}^2$ . La solución numérica de (II.12), (II.13) con una adecuada elección de las condiciones iniciales, proporciona la trayectoria del background. Para discutir las características de dicha trayectoria y de la geometría del espacio de campos, es útil definir los vectores tangente  $T^I$  y normal  $N^I$  a la trayectoria como  $T^I = \dot{\phi}^I/\dot{\sigma}$  y  $N^I = \sqrt{\det G} \epsilon_{IJ} T^J$ , donde  $\epsilon_{IJ}$  es el símbolo de Levi-Civita totalmente antisimétrico, y  $\det G$  es el determinante de la métrica (II.8). De manera explícita, estos vectores para el modelo (II.5) están dados por

$$T^I = \frac{(\dot{\phi}, \dot{h})}{\dot{\sigma}}, \quad N^I = \frac{e^{\alpha\phi/2}}{\dot{\sigma}} (-e^{-\alpha\phi}\dot{h}, \dot{\phi}). \quad (\text{II.14})$$

El vector  $T^I$  define la dirección paralela a la trayectoria (adiabática) de cualquier vector  $A^I$  del espacio de campos, mientras que  $N^I$  define la primera componente normal (isocurvatura) de  $A^I$ . De esta manera, estos vectores nos permiten descomponer cualquier vector  $A^I$  en sus componentes adiabática  $A_\sigma$  y de isocurvatura  $A_s$  como  $A^I = A_\sigma T^I + A_s N^I$ . Por otro lado, el vector  $T^I$  ofrece una alternativa de escribir la ecuación de movimiento (II.10) en dos ecuaciones independientes  $\ddot{\sigma} + 3H\dot{\sigma} + V_\sigma = 0$  y  $D_t T^I = -H\eta_\perp N^I$ , donde hemos definido  $V_\sigma = T^I V_I$ ,  $V_N = N^I V_I$  como las proyecciones de  $\partial_I V = V_I$  en sus direcciones adiabática y de isocurvatura. El parámetro  $\eta_\perp$  se conoce como bending e indica el cambio de  $T^I$  en la dirección  $N^I$ . Si  $\eta_\perp = 0$ , los vectores (II.14) permanecen covariantemente sin cambios a lo largo de la trayectoria clásica, mientras que si  $\eta_\perp \neq 0$ , los vectores  $T^I$  y  $N^I$  pueden rotar a la derecha o a la izquierda, dependiendo del signo de  $\eta_\perp$ . Es importante notar que si la trayectoria  $\phi^I(t)$  es una geodésica en el espacio de campos  $D_t \dot{\phi}^I = 0$ , el bending se anula. Además, dicho parámetro es el encargado de mezclar los modos adiabático y de isocurvatura de las perturbaciones primordiales, y parametriza la interacción entre dichos modos, por lo que

si tenemos movimientos geodésicos en el espacio de campos, ambas perturbaciones evolucionan de manera independiente (ver la sección III).

La caracterización de la dinámica de este tipo de modelos involucra un análisis slow-roll tal y como los modelos de inflación de un solo campo. Podemos definir los parámetros slow-roll como

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad \eta^I = -\frac{D_t \dot{\phi}^I}{H\dot{\sigma}}, \quad (\text{II.15})$$

donde  $\epsilon$  es el parámetro slow-roll usual, mientras que  $\eta^I$  es un vector en el espacio de campos que contiene información sobre el segundo parámetro slow-roll. Descomponemos  $\eta^I$  en sus componentes adiabáticas y de isocurvarura  $\eta^I = \eta_{||} T^I + \eta_{\perp} N^I$  donde  $\eta_{||} = \eta^I T_I$  y  $\eta_{\perp} = \eta^I N_I$  están dados por

$$\eta_{||} = -\frac{\ddot{\sigma}}{H\dot{\sigma}}, \quad \eta_{\perp} = \frac{V_N}{H\dot{\sigma}}. \quad (\text{II.16})$$

Es claro que la componente  $\eta_{||}$  es la contraparte del segundo parámetro slow-roll de los modelos de un solo campo, mientras que  $\eta_{\perp}$  es el bending que aparece la ecuación  $D_t T^I = -H\eta_{\perp} N^I$ . Las condiciones slow-roll en este tipo de modelos están dadas por  $\epsilon \ll 1$ ,  $|\eta_{||}| \ll 1$ , lo cual equivale a  $\ddot{\sigma} \ll |H\dot{\sigma}|$ . Estas condiciones no implican un bending  $\eta_{\perp} \ll 1$ , por lo que  $\eta_{\perp} \gtrsim 1$  es compatible con la aproximación slow-roll. Con la forma explícita de  $N^I$ , podemos construir la proyección de la derivada covariante del potencial (II.7) en la dirección de isocurvarura

$$V_N = N^I V_I = \frac{e^{\alpha\phi/2}}{\dot{\sigma}} (V_h \dot{\phi} - e^{-\alpha\phi} \dot{h} V_{\phi}) \quad (\text{II.17})$$

Esto permite escribir el bending del modelo como

$$\eta_{\perp} = \frac{e^{\alpha\phi/2}}{H\dot{\sigma}^2} (V_h \dot{\phi} - e^{-\alpha\phi} \dot{h} V_{\phi}). \quad (\text{II.18})$$

Dentro de valley-approach, el bending y los vectores ortonormales a la trayectoria del espacio de campos están dados en (A.4). En el espacio de parámetros usual y dentro de valley-approach, el bending es despreciable, pero para el espacio de parámetros que cumple  $\xi_h \sim \lambda \xi_s$ , el bending es del orden de  $\eta_{\perp} \sim \mathcal{O}(0.1)$ . Sin embargo, para un adecuado entendimiento de la evolución del background, es conveniente hacer un análisis numérico tanto de las variables del background como de las perturbaciones. Para ello es conveniente usar el número de e-folds  $N_e$  como parámetro temporal dada la relación  $dN_e = H dt$ . En este caso, las ecuaciones (II.12) y (II.13) toman la forma

$$\begin{aligned} \phi'' + (3 - \epsilon) \phi' + \frac{V_{\phi}}{H^2} &= -\frac{\alpha}{2} e^{-\alpha\phi} h', \\ h'' + (3 - \epsilon - \alpha\phi') h' + e^{\alpha\phi} \frac{V_h}{H^2} &= 0, \\ H^2 &= \frac{V}{3 - \epsilon}. \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

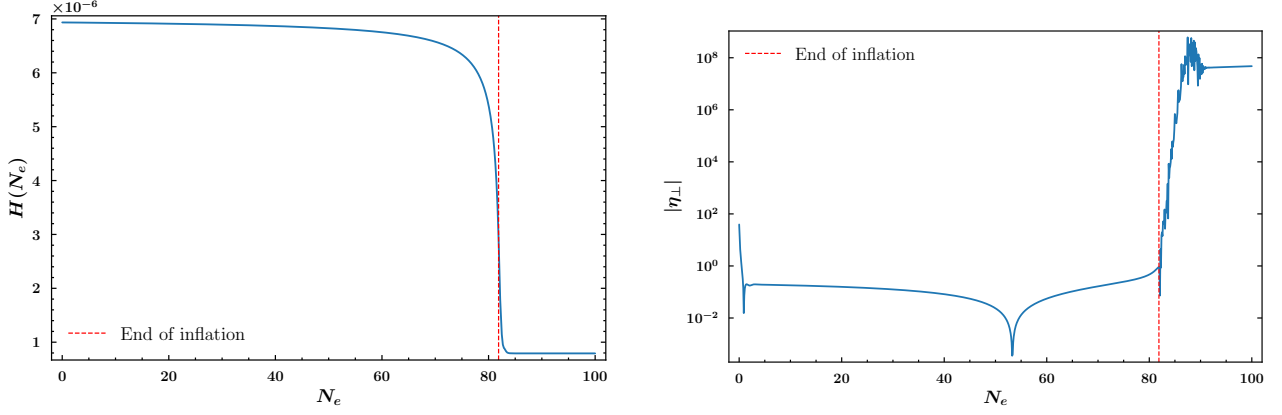


Figure 2: Mostramos la evolución del parámetro de Hubble,  $H(N_e)$ , y del bending,  $\eta_\perp(N_e)$ , en función del número de e-folds  $N_e$ , obtenida al resolver las ecuaciones de fondo (II.19). Para ello, consideramos el espacio de parámetros  $\xi_h = 0.1$ ,  $\lambda = 10^{-10}$  y  $\xi_s = 4 \times 10^8$  y las condiciones iniciales  $\phi_0 = 5.7M_p$ ,  $h_0(\phi_0) = 0.096M_p$ . Se observa que el bending es del orden de  $\mathcal{O}(0.1)$  y casi constante durante la inflación, lo que lo hace relevante para el análisis posterior de los modos  $Q_s$ .

donde  $' = \partial_{N_e}$ , mientras que el parámetro slow-roll  $\epsilon$  en términos del número de e-folds se escribe como

$$\epsilon = -\frac{H'}{H} = \frac{1}{2}(\phi'^2 + e^{-\alpha\phi}h'^2), \quad (\text{II.20})$$

y el bending (II.18) en función de  $N$  está dado por

$$\eta_\perp = \frac{e^{\alpha\phi/2}}{\sigma_N^2} \left( V_h \phi' - e^{-\alpha\phi} V_\phi h' \right), \quad (\text{II.21})$$

donde  $\sigma_N^2 = H^2(\phi'^2 + e^{-\alpha\phi}h'^2)$ . Una vez que hayamos especificado los parámetros del modelo y las condiciones iniciales adecuadas, podemos proceder a integrar numéricamente el sistema de ecuaciones (II.19) para llegar a las cantidades de fondo relevantes. Con dichas cantidades, podemos proceder a analizar las perturbaciones primordiales del modelo. Siguiendo a [15], el análisis y evolución de las perturbaciones primordiales a orden lineal queda determinada por tres funciones: el parámetro de Hubble  $H(N)$ , el bending  $\eta_\perp(N)$  y la masa del modo de isocurvarura  $m_{\text{iso}}^2(N)$ . En la Fig. 2 mostramos la evolución del parámetro de Hubble  $H(N)$  y del bending  $\eta_\perp$  para el espacio de parámetros que cumple  $\xi_h \sim \lambda\xi_s$ .

### III. PRIMORDIAL PERTURBATIONS

Cuando se estudia las perturbaciones primordiales a orden lineal o cuadrático en modelos multi-campo de inflación, es recomendable adoptar un enfoque covariante respecto a transformaciones de norma en el espacio de campos. Este formalismo fue desarrollado en detalle en [18] para un espacio de campos arbitrario.

En este artículo despreciamos las perturbaciones vectoriales y tensoriales, y nos enfocamos principalmente en las perturbaciones primordiales escalares. Desde un punto de vista covariante, la idea es utilizar la perturbación covariante  $Q^I$  en lugar de  $\delta\phi^I(t, \mathbf{r}) = \phi^I(t, \mathbf{r}) - \bar{\phi}^I(t)$ , donde  $\bar{\phi}^I(t)$  es la trayectoria clásica del background que satisface (II.10). El valor de  $\bar{\phi}^I$  y  $\phi^I$  en algún punto fijo  $P$  del espacio de campos puede conectarse mediante una única geodésica parametrizada por un parámetro  $\varepsilon$  que relaciona el valor inicial de  $\phi^I$  y el vector tangente en  $P$ . Las condiciones iniciales se fijan en  $\varepsilon = 0$ , tal que

$$\phi^I(\varepsilon = 0) = \bar{\phi}^I, \quad Q^I = \left. \frac{d\phi^I}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}. \quad (\text{III.22})$$

A segundo orden en las perturbaciones, uno encuentra el desarrollo que relaciona  $Q^I$  con la perturbación  $\delta\phi^I$

$$\delta\phi^I = \phi^I - \bar{\phi}^I = Q^I - \frac{1}{2}\Gamma^I_{JK} Q^J Q^K + \dots. \quad (\text{III.23})$$

Dado que tanto  $\delta\phi^I$  como  $Q^I$  son vectores del espacio de campos, podemos descomponerlos en sus componentes adiabática  $Q_\sigma$  y de isocurvatura  $Q_s$  como  $Q^I = Q_\sigma T^I + Q_s N^I$ , donde a priori ambas componentes son dinámicas. Por otro lado, el estudio de las perturbaciones del espacio-tiempo y la mezcla con  $Q^I$  es más sencillo si se usa la forma ADM [2, 30] de la métrica (I.1)

$$ds^2 = -N^2 d\phi^2 + \gamma_{ij} (N^i d\phi + dx^i)(N^j d\phi + dx^j), \quad (\text{III.24})$$

donde  $d\phi$  es una parametrización temporal,  $N$  es la función lapso,  $N^i$  es el vector desplazamiento y  $\gamma_{ij}$  es la 3-métrica inducida sobre la hipersuperficie  $\Sigma_t$ . La idea detrás del formalismo ADM en el estudio de las perturbaciones cosmológicas es desarrollar a segundo orden la acción (II.6) en serie de potencias de las perturbaciones. Este enfoque fue introducido por Maldacena [30] para modelos de inflación de un solo campo. Como  $N$  y  $N^i$  no son variables dinámicas, la 3-métrica  $\gamma_{ij}$  contiene toda la información física del sistema. Al fijar una parametrización temporal y elegir el vector desplazamiento, estamos fijando  $N$  y  $N^i$ , y eso se logra al escoger una norma. En inflación y teoría de perturbaciones, es muy común utilizar la norma espacialmente plana tal que  $\gamma_{ij}^{\text{flat}} = a^2(t)\delta_{ij}$  donde toda la dinámica está contenida en la perturbación  $\delta\phi^I$ . Esta norma ha sido ampliamente usada en la literatura [4, 10, 26, 27, 37], y tiene la ventaja de que las componentes de la perturbación  $\delta\phi^I$  son variables de Mukhanov-Sasaki (MS), por lo que cumplen una ecuación tipo MS [20, 32, 33, 37]. Sin embargo, en este trabajo decidimos trabajar con la norma comóvil, la cual se define como [16, 28, 29, 34]

$$\gamma_{ij}^{\text{com}} = a^2(t)e^{2\mathcal{R}}\delta_{ij}, \quad T_I Q^I = 0. \quad (\text{III.25})$$

donde  $\mathcal{R}$  es la perturbación de curvatura comóvil invariante de norma [31]. La característica principal de esta norma es que la componente adiabática de  $Q^I$  es cero, pero la parte de isocurvatura es  $Q_s = N_I Q^I$ . Por consiguiente, en la norma comóvil las perturbaciones son  $\mathcal{R}$  y  $Q_s$ . La acción a segundo orden en estas variables se escribe como



$$S^{(2)} = \int d^4x a^3 \left[ \epsilon \left( \dot{\mathcal{R}}^2 - a^{-2} \delta^{ij} \partial_i \mathcal{R} \partial_j \mathcal{R} \right) + \frac{1}{2} \left( \dot{Q}_s^2 - a^{-2} \delta^{ij} \partial_i Q_s \partial_j Q_s - m_{\text{iso}}^2 Q_s^2 \right) + 2H\eta_{\perp} \sqrt{2\epsilon} Q_s \dot{\mathcal{R}} \right], \quad (\text{III.26})$$

donde  $\epsilon$  es el parámetro slow-roll dado en (II.15), mientras que  $m_{\text{iso}}^2$  es la masa efectiva del modo de isocurvarura  $Q_s$ , la cual está dada por

$$m_{\text{iso}}^2 = N^I N^J \nabla_I V_J + H^2 \epsilon R_{\text{fs}} - (H\eta_{\perp})^2, \quad (\text{III.27})$$

donde  $R_{\text{fs}} = -1/3$  es el escalar de curvatura del espacio de campos del modelo en unidades de  $M_p$ , definido a través de  $G_{IJ}$  (II.8). El primer término  $V_{NN} = N^I N^J \nabla_I V_J$  representa la contribución usual de masa dado el potencial (II.7), mientras que el segundo término representa una contribución de la geometría curva del espacio de campos. El tercer término contribuye de manera negativa a la masa, y es una corrección del giro de la trayectoria clásica inducida por (II.18). Vemos que incluso si el bendig es cero, los efectos multi-campo no desaparecen, pues el segundo término de (III.27) proveniente de la geometría del espacio de campos es no nulo y tiene efectos relevantes en la producción de los modos  $Q_s$ . Las ecuaciones de movimiento de las perturbaciones  $\mathcal{R}$  y  $Q_s$  se obtienen variando la acción (III.26), las cuales están dadas en términos del tiempo cósmico  $t$  y en el espacio de Fourier por las expresiones

$$\ddot{\mathcal{R}}_k + (3 + \delta)H\dot{\mathcal{R}}_k + \frac{k^2}{a^2} \mathcal{R}_k = -\frac{2H\eta_{\perp}}{\sqrt{2\epsilon}} [\dot{Q}_s + (3 - \xi_{\perp} - \eta_{\parallel})H Q_s] \quad (\text{III.28})$$

$$\ddot{Q}_s + 3H\dot{Q}_s + \left( \frac{k^2}{a^2} + m_{\text{iso}}^2 \right) Q_s = 2H\eta_{\perp} \sqrt{2\epsilon} \dot{\mathcal{R}}_k, \quad (\text{III.29})$$

donde  $\delta = 2(\epsilon - \eta_{\parallel})$  y  $\xi_{\perp} = -\dot{\eta}_{\perp}/H\eta_{\perp}$ . La acción (III.26) y las ecuaciones (III.28), (III.29) son exactas, es decir, no hay ningún tipo de aproximación de por medio para su deducción.

Los modos  $\mathcal{R}_k$ ,  $Q_s$  se acoplan a través del bending  $\eta_{\perp}$ . En términos generales, podemos integrar los modos  $\mathcal{R}_k$  y  $Q_s$  a escalas super-Hubble ( $k \ll aH$ ) para  $\eta_{\perp} \neq 0$ . La ecuación para el modo de isocurvarura  $Q_s$  resulta

$$\ddot{Q}_s + 3H\dot{Q}_s + m_{\text{eff}}^2 Q_s \simeq 0, \quad (\text{III.30})$$

donde la masa efectiva está dada por  $m_{\text{eff}}^2 = m_{\text{iso}}^2 + 4(H\eta_{\perp})^2$ , con  $m_{\text{iso}}^2$  dado por (III.27). En este caso el bendig contribuye siempre de manera positiva a la masa del modo  $Q_s$ , contribuyendo como fuente del modo adiabático tal que  $\dot{\mathcal{R}}_k \simeq -\sqrt{2}H\eta_{\perp}Q_s/\sqrt{\epsilon}$ . Para  $\eta_{\perp} = 0$ , es claro que el modo  $\dot{\mathcal{R}}_k$  decae exponencialmente y por tanto  $\mathcal{R}_k$  converge a un valor constante, que es el resultado obtenido en los modelos de inflación de un solo campo. Vale la pena mencionar que la masa del modo  $Q_s$  no depende de la evolución super-Hubble del modo adiabático, por lo que se puede calcular de manera independiente. Entoces la masa  $m_{\text{iso}}^2$  es una función de las variables del background, y contiene toda la información física relevante para  $Q_s$ .

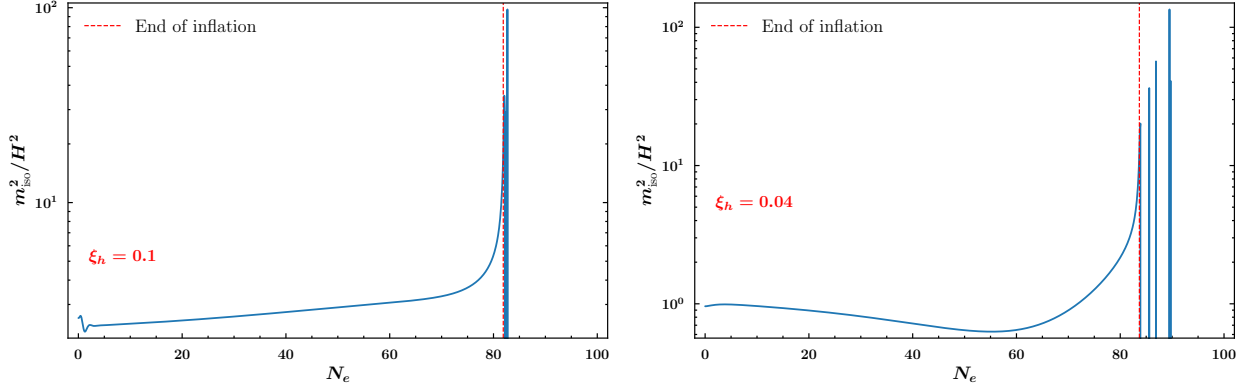


Figure 3: We show the isocurvature mass (III.27) for a space of parameters that fulfill  $\xi_h \sim \lambda \xi_s$  in function of number of e-folds  $N_e$ . In both panels we set  $\lambda = 10^{-10}$  and  $\xi_s = 4 \times 10^8$

Sin embargo, para un tratamiento completo que permita seguir la evolución completa de los modos  $Q_s$  y  $\mathcal{R}_k$ , conviene adoptar un análisis numérico de las perturbaciones. Como en el caso del background, es más eficiente integrar numéricamente las ecuaciones (III.28) y (III.29) en términos de  $N_e$ :

$$\mathcal{R}_k'' + (3 + \epsilon - 2\eta_{||})\mathcal{R}_k' + \left(\frac{k}{aH}\right)^2 \mathcal{R}_k = -\frac{2\eta_{\perp}}{\sqrt{2\epsilon}}[Q_s' + (3 - \xi_{\perp} - \eta_{||})Q_s], \quad (\text{III.31})$$

$$Q_s'' + (3 - \epsilon)Q_s' + \left[\left(\frac{k}{aH}\right)^2 + \frac{m_{\text{iso}}^2}{H^2}\right] Q_s = 2\sqrt{2\epsilon}\eta_{\perp}\mathcal{R}_k', \quad (\text{III.32})$$

donde  $m_{\text{iso}}^2 = m_{\text{iso}}^2(N_e)$ ,  $H = H(N_e)$  y  $\eta_{\perp} = \eta_{\perp}(N_e)$ . En la próxima sección procedemos a resolver estas ecuaciones con condiciones iniciales tipo Bunch-Davies.

### A. Isocurvature mass

La masa del modo de isocurvarura  $Q_s$  juega un papel fundamental en el análisis y evolución de la perturbaciones, pues como hemos visto, los efectos multi-campo están presentes incluso si el bending es cero. Analicemos detenidamente la expresión (III.27). Como hemos mencionado, tenemos 3 términos que contribuyen a la masa  $m_{\text{iso}}^2$ : el término usual del potencial  $V_{NN}$ , una contribución geométrica intrínseca del espacio de campos dado por  $R_{\text{fs}}$  y una contribución del bending. El término  $V_{NN}$  está dado explícitamente por [22]

$$\begin{aligned} V_{NN} &= N^I N^J \nabla_I V_J = N^I N^J (\partial_I \partial_J V - \Gamma^K_{IJ} \partial_K V) \\ &= \frac{1}{\dot{\sigma}^2} \left( e^{\alpha\phi} \dot{\phi}^2 V_{hh} + e^{-\alpha\phi} \dot{h}^2 V_{\phi\phi} - 2\dot{\phi} \dot{h} V_{h\phi} - \frac{\alpha}{2} (\dot{\phi}^2 V_{\phi} + 2\dot{\phi} \dot{h} V_h) \right), \end{aligned} \quad (\text{III.33})$$

el cual depende de las derivadas del potencial (II.7) y de la dinámica de fondo. Sin embargo, se puede simplificar considerablemente si tomamos en cuenta el valley-approach (A.1) y los

resultados (A.4). Sustituyendo explícitamente la forma de  $N^I$ , el potencial y tomando en cuenta (A.1), obtenemos

$$V_{NN} \simeq \frac{\xi_h(24\lambda\xi_s + \xi_h(1 + 6\xi_h))}{\lambda\xi_s} H^2. \quad (\text{III.34})$$

En esta aproximación, la masa (III.27) resulta

$$\frac{m_{\text{iso}}^2}{H^2} \simeq \frac{\xi_h(24\lambda\xi_s + \xi_h(1 + 6\xi_h))}{\lambda\xi_s} - \frac{\epsilon}{3} - \frac{\tilde{\xi}^2}{1 + \tilde{\xi}^2}, \quad (\text{III.35})$$

donde  $\tilde{\xi}^2 = \xi_h/6(\xi_h^2 + 4\lambda\xi_s)$ . Podemos observar que en valley- approach, la masa del modo  $Q_s$  toma una forma simplificada, y la razón  $m_{\text{iso}}^2/H^2$  es constante. Esto puede ayudar a la búsqueda de soluciones analíticas de la ecuación para  $Q_s$ . Por otro lado, si  $\xi_h \gg 1$ , el modo de isocurvatura es pesado y el bending es despreciable, por lo que se puede ignorar la evolución de  $Q_s$ . Si tomamos  $\xi_h \sim \lambda\xi_s$ , el valor de  $m_{\text{iso}}^2$  es cercano a  $H^2$ , consecuentemente el modo  $Q_s$  se vuelve ligero y el bending se vuelve significativo. En este escenario, la aproximación single-field falla y se debe adoptar un escenario quasi-single field inflation [7, 8], o resolver numéricamente las ecuaciones de los modos  $\mathcal{R}_k$ ,  $Q_s$ , yendo más allá de la aproximación single-field slow roll [38].

#### IV. ISOCURVATURE PERTURBATIONS

En esta sección mostramos los resultados analíticos y numéricos de la evolución del modo  $Q_s$  y  $\mathcal{R}_k$ , tomando en cuenta los efectos multi-campo a través de la masa  $m_{\text{iso}}^2$  y del bending  $\eta_\perp$ . Procedemos a resolver las ecuaciones (III.28) ,(III.29) en dos escenarios: para geodesic motion  $\eta_\perp = 0$  y para el caso donde el bending es del orden de  $\eta_\perp \sim \mathcal{O}(10^{-1})$ . El primer caso se puede resolver analíticamente, pues las perturbaciones evolucionan de manera independiente a orden lineal.

##### A. Geodesic motion

For geodesic motions  $\eta_\perp = 0$ , both modes decouple, so the  $Q_s$  modes cannot transfer power to the  $\mathcal{R}_k$  adiabatic modes, making it easier to find analytical solutions. Bajo la aproximación slow-roll y tomando

## B. Numerical results

## V. CMB OBSERVABLES

## VI. DISCUSSION AND CONCLUSIONS

## VII. ACKNOWLEDGMENTS

### Appendix A: Single-field inflation along the valleys

La aproximación de los valles del potencial (II.7) en el marco de Einstein es relevante para el análisis de la evolución de los campos  $(\phi, h)$ . En los trabajos previos sobre este modelo se discute este análisis con más detalle [21, 22, 38], por lo que aquí nos limitaremos a presentar las ideas principales. En el límite  $h \gg v_{\text{ew}}$ , los valles del potencial (II.7) están dados por la condición

$$\frac{\partial V}{\partial h} = 0, \quad h_0^2(\phi) = \frac{\xi_h}{\xi_h^2 + 4\lambda\xi_s}(e^{\alpha\phi} - 1) \quad (\text{A.1})$$

Esta condición sirve como un punto estacionario en el plano  $(h, \dot{h})$ ; el escalarón  $\phi$  rueda al mínimo del potencial (II.7), y por tanto los valles sirven como un atractor universal. Como el potencial es simétrico respecto a  $h \rightarrow -h$ , (A.1) localiza los dos valles de  $V(\phi, h)$ . A lo largo de uno de los valles, el potencial está dado por el siguiente potencial efectivo en función de  $\phi$

$$V_{\text{eff}}(\phi, h_0(\phi)) = \frac{\lambda}{4(\xi_h^2 + 4\lambda\xi_s)}(1 - e^{-\alpha\phi})^2. \quad (\text{A.2})$$

Este potencial tiene exactamente la misma forma que el potencial del modelo de inflación  $R^2$  o del modelo de Higgs [5]. Para el espacio estándar de parámetros discutido anteriormente, el modelo se reduce efectivamente a un modelo de un solo campo escalar. Dado que el campo de Higgs a lo largo de los valles está dado por (A.1), la acción (II.5) a lo largo de los valles toma la forma

$$S_E[g_\mu, \phi, h] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \left(1 + \gamma^2(1 - e^{-\alpha\phi})^{-1}\right) - V_{\text{eff}}(\phi) \right], \quad (\text{A.3})$$

donde  $\tilde{\xi}^2 = \frac{\xi_h}{6(\xi_h^2 + 4\lambda\xi_s)}$ . Vemos que si  $\lambda = 0.13$ ,  $\xi_h \sim 10^4$  la constante es del orden de  $\tilde{\xi} \sim 10^{-5}$ , por lo que el segundo factor del término cinético es subdominante. En la escala de inflación  $\phi \gg 1$ , el modelo se reduce efectivamente a la inflación canónica de un campo escalar con potencial efectivo dado por (A.2). Sin embargo, para un espacio de parámetros tal que  $\xi_h \sim \lambda\xi_s$  con la normalización (II.9) fija, la constante resulta  $\tilde{\xi} \sim \mathcal{O}(1)$ . Este caso corresponde a lo que se conoce como quasi-single field inflation regimen [7, 8].

A lo largo de los valles, tanto los vectores unitarios como el bending adoptan una forma simplificada

$$T^I = \frac{(1, \tilde{\xi} e^{\alpha\phi/2})}{\sqrt{1 + \tilde{\xi}^2}}, \quad N^I = \frac{(-\tilde{\xi}, e^{\alpha\phi/2})}{\sqrt{1 + \tilde{\xi}^2}}, \quad \eta_{\perp} = \frac{\tilde{\xi}}{\sqrt{1 + \tilde{\xi}^2}} \quad (\text{A.4})$$

Si  $\tilde{\xi} \ll 1$ , el vector  $T^I$  apunta a la direcci3n de  $\phi$ , mientras que  $N^I$  apunta en la direcci3n de  $h$ . El bending  $\eta_{\perp}$  es despreciable dentro de los valles.

- 
- [1] A. Achúcarro, J.-O. Gong, S. Hardeman, G. A. Palma, and S. P. Patil. Features of heavy physics in the cmb power spectrum. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2011(01):030, jan 2011.
  - [2] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner. Republication of: The dynamics of general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 40(9):1997–2027, Aug. 2008.
  - [3] J. L. F. Barb3n and J. R. Espinosa. On the naturalness of higgs inflation. *Physical Review D*, 79(8), Apr. 2009.
  - [4] N. Bartolo, S. Matarrese, and A. Riotto. Adiabatic and isocurvature perturbations from inflation: Power spectra and consistency relations. *Phys. Rev. D*, 64:123504, Nov 2001.
  - [5] F. Bezrukov and M. Shaposhnikov. The standard model higgs boson as the inflaton. *Physics Letters B*, 659(3):703–706, 2008.
  - [6] C. Burgess, H. M. Lee, and M. Trott. Power-counting and the validity of the classical approximation during inflation. *Journal of High Energy Physics*, 2009(09):103–103, Sept. 2009.
  - [7] X. Chen and Y. Wang. Large non-gaussianities with intermediate shapes from quasi-single-field inflation. *Phys. Rev. D*, 81:063511, Mar 2010.
  - [8] X. Chen and Y. Wang. Quasi-single field inflation and non-gaussianities. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2010(04):027–027, Apr. 2010.
  - [9] S. Cremonini, Z. Lalak, and K. Turzyński. Strongly coupled perturbations in two-field inflationary models. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2011(03):016–016, Mar. 2011.
  - [10] S. C3spedes, V. Atal, and G. A. Palma. On the importance of heavy fields during inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2012(05):008, may 2012.
  - [11] F. Di Marco and F. Finelli. Slow-roll inflation for generalized two-field lagrangians. *Physical Review D*, 71(12), June 2005.
  - [12] F. Di Marco, F. Finelli, and R. Brandenberger. Adiabatic and isocurvature perturbations for multifield generalized einstein models. *Phys. Rev. D*, 67:063512, Mar 2003.
  - [13] Y. Ema. Higgs scalaron mixed inflation. *Physics Letters B*, 770:403–411, 2017.
  - [14] Y. Ema and S. Verner. Cosmological collider signatures of higgs-r2 inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2024(04):039, apr 2024.
  - [15] J. Fumagalli, S. Renaux-Petel, and L. T. Witkowski. Oscillations in the stochastic gravitational wave background from sharp features and particle production during inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2021(08):030, Aug. 2021.
  - [16] S. Garcia-Saenz, L. Pinol, and S. Renaux-Petel. Revisiting non-gaussianity in multifield inflation with curved field space. *Journal of High Energy Physics*, 2020(1), Jan. 2020.
  - [17] J.-O. Gong. Multi-field inflation and cosmological perturbations. *International Journal of Modern Physics D*, 26(01):1740003, 2017.

- [18] J.-O. Gong and T. Tanaka. A covariant approach to general field space metric in multi-field inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2011(03):015, mar 2011.
- [19] D. Gorbunov and A. Tokareva. Sclaron the healer: removing the strong-coupling in the higgs- and higgs-dilaton inflations. *Physics Letters B*, 788:37–41, 2019.
- [20] C. Gordon, D. Wands, B. A. Bassett, and R. Maartens. Adiabatic and entropy perturbations from inflation. *Phys. Rev. D*, 63:023506, Dec 2000.
- [21] A. Gundhi and C. F. Steinwachs. Sclaron-higgs inflation. *Nuclear Physics B*, 954:114989, 2020.
- [22] M. He, A. A. Starobinsky, and J. Yokoyama. Inflation in the mixed higgs- $r^2$  model. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018(05):064–064, May 2018.
- [23] D. I. Kaiser. Conformal transformations with multiple scalar fields. *Physical Review D*, 81(8), Apr. 2010.
- [24] S. Karamitsos and A. Pilaftsis. Frame covariant nonminimal multifield inflation. *Nuclear Physics B*, 927:219–254, 2018.
- [25] Z. Lalak, D. Langlois, S. Pokorski, and K. Turzyński. Curvature and isocurvature perturbations in two-field inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2007(07):014, jul 2007.
- [26] D. Langlois. Isocurvature cosmological perturbations and the cmb. *Comptes Rendus Physique*, 4(8):953–959, 2003. Dossier: The Cosmic Microwave Background.
- [27] D. Langlois and S. Renaux-Petel. Perturbations in generalized multi-field inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2008(04):017, apr 2008.
- [28] D. H. Lyth, K. A. Malik, and M. Sasaki. A general proof of the conservation of the curvature perturbation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2005(05):004, may 2005.
- [29] D. H. Lyth and Y. Rodríguez. Non-gaussianity from the second-order cosmological perturbation. *Physical Review D*, 71(12), June 2005.
- [30] J. Maldacena. Non-gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models. *Journal of High Energy Physics*, 2003(05):013–013, May 2003.
- [31] V. Mukhanov, H. Feldman, and R. Brandenberger. Theory of cosmological perturbations. *Physics Reports*, 215(5):203–333, 1992.
- [32] V. Mukhanov and P. J. Steinhardt. Density perturbations in multifield inflationary models. *Physics Letters B*, 422(1):52–60, 1998.
- [33] M. Sasaki and E. D. Stewart. A General Analytic Formula for the Spectral Index of the Density Perturbations Produced during Inflation. *Progress of Theoretical Physics*, 95(1):71–78, 01 1996.
- [34] D. Seery and J. E. Lidsey. Primordial non-gaussianities in single-field inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2005(06):003–003, June 2005.
- [35] A. A. Starobinsky, S. Tsujikawa, and J. Yokoyama. Cosmological perturbations from multi-field inflation in generalized einstein theories. *Nuclear Physics B*, 610(1):383–410, 2001.
- [36] A. J. Tolley and M. Wyman. Equilateral non-gaussianity from multifield dynamics. *Physical Review D*, 81(4), Feb. 2010.
- [37] D. Wands, N. Bartolo, S. Matarrese, and A. Riotto. Observational test of two-field inflation. *Phys. Rev. D*, 66:043520, Aug 2002.
- [38] Y.-C. Wang and T. Wang. Primordial perturbations generated by higgs field and  $R^2$  operator. *Phys. Rev. D*, 96:123506, Dec 2017.