Propriétés : Soit a, b des nombres réels et n un entier. On a :

$\mathrm{e}^0 = 1$ $\quad \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$ $\quad \mathrm{e}^{-a} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^a}$

$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$ $\quad \mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$ $\quad \mathrm{e}^{an} = (\mathrm{e}^a)^n$

E1 Écrire les nombres suivants sous forme d'une puissance de e :

$\mathrm{e} \times \mathrm{e}^2$ $\quad \mathrm{e}^{-1} \times \mathrm{e}$ $\quad \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ $\quad \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-1}}$

$\mathrm{e}^4 \times \mathrm{e}$ $\quad \mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^{-1}$ $\quad \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)^3$ $\quad \left(\mathrm{e}^{-3}\right)^2$

$\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^{-1}}$ $\quad \dfrac{\mathrm{e}^{-2}}{\mathrm{e}}$ $\quad \dfrac{\mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^{-2}}{\mathrm{e}^{-1} \times \mathrm{e}}$ $\quad \left(\mathrm{e}^{-5}\right)^{-1}$

E2 Simplifiez les expressions suivantes :

$\dfrac{\mathrm{e}^{-1} \times \left(\mathrm{e}^{0,2}\right)^{-2}}{\mathrm{e} \times \mathrm{e}^{-1,4}}$ $\quad \left(\dfrac{\left(\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}\right)^3 \times \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}}}{\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}}\right)^2$

E3 Simplifiez les expressions suivantes sous la forme e^A :

$(\mathrm{e}^x)^2$ $\quad \mathrm{e}^{4x} \times \mathrm{e}^{-7}$ $\quad \dfrac{\mathrm{e}^{12x}}{\mathrm{e}^{6x}}$

$\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{-3x}}$ $\quad \mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^{2x} \times \mathrm{e}^x$ $\quad \left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{-2x}}\right)^3$

$\left(\dfrac{\mathrm{e}^{4x}}{\mathrm{e}^x}\right)^{-1}$ $\quad \mathrm{e}^{3x+3} \times \mathrm{e}^{2x-1}$ $\quad \dfrac{\mathrm{e}^{2x} \times \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x+1}}$

$\dfrac{\mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^{-(x+3)}}{\mathrm{e}^{-2x-1}}$ $\quad \left(\dfrac{\mathrm{e}^{2x-3}}{\mathrm{e}^{7x+5}}\right)^{-2}$ $\quad \dfrac{\mathrm{e}^{(x-3)^2}}{\left(\mathrm{e}^{x+2}\right)^2}$

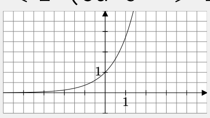
E4 Développez puis simplifiez les expressions suivantes :

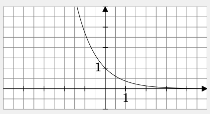
$\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$ $\quad \left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)^2$

$\left(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{3x}\right)^2$ $\quad \left(\mathrm{e}^{-5x} + \mathrm{e}^{2x}\right)\left(\mathrm{e}^{-5x} - \mathrm{e}^{2x}\right)$

Propriétés : Soit x un nombre réel. On a :

- Pour tout x, $\mathrm{e}^x > 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$;
- $\mathrm{e}^x > 1$ (ou $\mathrm{e}^{-x} < 1$) si et seulement si $x > 0$;
- $\mathrm{e}^x < 1$ (ou $\mathrm{e}^{-x} > 1$) si et seulement si $x < 0$.





E5 Déterminez le signe des expressions suivantes :

$f_1(x) = 4\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x$ $\quad f_2(x) = x^2\mathrm{e}^{-x} + 5x\mathrm{e}^{-x}$

$f_3(x) = x^2\mathrm{e}^x - 9\mathrm{e}^x$ $\quad f_4(x) = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{x+1}$

E6 Déterminez le signe des expressions suivantes à l'aide d'une factorisation :

$f_1(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}$ $\quad f_2(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}$ $\quad f_3(x) = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x$

E7 On se propose de déterminer le signe de l'expression $\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^x - 4$.

a. Résoudre l'équation $X^2 + 3X - 4 = 0$.

b. En déduire une factorisation de l'expression $\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^x - 4$.

c. Conclure.

Propriété : Pour tous réels a et b,
$\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$ si et seulement si $a = b$.

E8 Résolvez les équations suivantes :

$\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x+1}$ $\quad \mathrm{e}^x\mathrm{e} = \mathrm{e}^{3x+2}$ $\quad \mathrm{e}^{x^2-2x} = \frac{1}{\mathrm{e}}$ $\quad 5\mathrm{e}^{7x+21} - 1 = 4$

Propriété : Pour tous réels a et b,
$\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$ si et seulement si $a < b$.

E9 Résolvez les inéquations suivantes :

$\mathrm{e}^{2x+1} < \mathrm{e}^{8x-1}$ $\quad \mathrm{e}^{7x-3} < \mathrm{e}^{4x^2}$ $\quad 2\mathrm{e}^{12x-36} + 3 \leqslant 5$

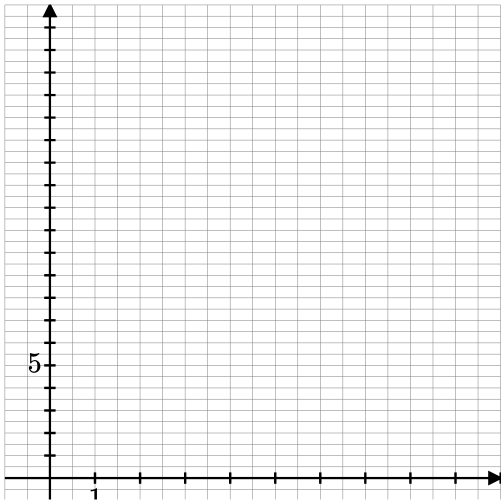
E10 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 20\mathrm{e}^{-0{,}346\,5}$.

a. Montrez que pour tous réels x, $f(x+2) = e^{-0{,}693x}f(x)$.

b. Sachant que $e^{-0{,}693} \approx 0{,}5$, complétez le tableau de valeurs suivant :

x	0	2	4	6
$f(x)$				

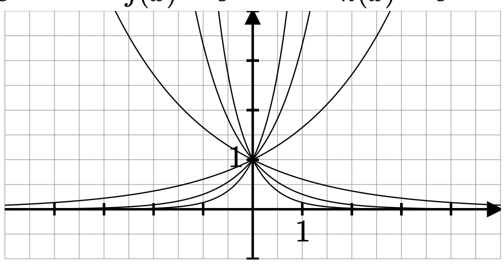
c. Tracez la fonction f dans le repère suivant.



E11 On considère les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

$f(x) = e^{0{,}5x}$ $\quad g(x) = e^{1{,}2x}$ $\quad h(x) = e^{2x}$

$i(x) = e^{-0{,}5x}$ $\quad j(x) = e^{-1{,}2x}$ $\quad k(x) = e^{-2x}$



a. Comparer les fonctions f, g et h.

b. Comparer les fonctions i, j et k.

c. En déduire à quelles fonctions correspondent les courbes en les repassant d'une couleur différente.