E1 On se propose de démontrer que dans un triangle rectangle, la médiane isse de l'angle droit est de longueur égale à la moitié de l'hypoténuse. Considérons un triangle ABC rectangle en C et soit O le milieu de $[AB]$.

a. Montrez que $\overrightarrow{CO} = \dfrac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2}$.

b. En déduire que $CO = \dfrac{AB}{2}$.

E2 Soit ABC un triangle tel que $AB = 5$, $AC = 8$ et $BC = 6$.

a. Calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

b. Soit I le milieu de $[BC]$. Montrez que $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

c. En déduire AI.

d. Soit J le milieu de $[AC]$. Calculez de même BJ.

e. Soit K le milieu de $[AB]$. Calculez de même CK.

E3 Dans chacun des cas suivants, calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

a. $AB = 4,\ AC = 5,\ \widehat{BAC} = 30^\circ$

b. $AB = 4,\ AC = 6,\ \widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$

c. $AB = 6,\ AC = 7,\ \widehat{BAC} = \dfrac{3\pi}{4}$

d. $AB = 9,\ AC = 12,\ \widehat{BAC} = \dfrac{143\pi}{3}$

E4 Dans chacun des cas suivants, déterminez une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ comprise entre 0 et π.

a. $AB = 3,\ AC = 2,\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3\sqrt{2}$

b. $AB = 3,\ AC = 5,\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -7{,}5$

c. $AB = 3,\ AC = 9,\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\dfrac{27\sqrt{3}}{2}$

E5 Soit ABC un trangle équilatéral tel que $AB = 5$. Calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

E6 Soit ABC un trangle isocèle en A tel que $AB = 5$ et $\widehat{BAC} = 120^\circ$.

a. Calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

b. Calculez $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ en utilisant $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.

c. Montrez que $BC = 5\sqrt{3}$.

E7 Soit $ABCD$ un carré de côté $4\,\text{cm}$ et de centre O. Soit I le milieu de $[AB]$.

a. Calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ de deux façons.

b. Calculez $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OC}$.

E8 Soit $ABCD$ un losange de côté $6\,\text{cm}$ et de centre O tel que $\widehat{ABC} = 30^\circ$.

a. Calculez $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

b. Calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

c. Montrez que $AC = 6\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

d. En déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 18(2-\sqrt{3})$.

e. Déterminez une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ en degrés.

f. Montrez que $cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

E9 Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $BC = 8$ et $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Démontrez que ABC est un triangle rectangle.

E10 Soit ABC un triangle tel que $AB = 7$, $AC = 7\sqrt{3}$ et $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Démontrez que ABC est un triangle isocèle.

E11 Soit ABC un triangle tel que $AB = \sqrt{2}$, $AC = \sqrt{10}$ et $BC = 2$. Déterminez une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

E12 Soit ABC un triangle tel que $a = BC = \sqrt{(3)}$, $\widehat{ABC} = \dfrac{\pi}{6}$ et $\widehat{ACB} = \dfrac{\pi}{4}$.

a. Montrez que $b^2 - c^2 = 3 - 3c$.

b. Montrez que $b^2 - c^2 = \sqrt{6}b - 3$.

c. En déduire $b = \dfrac{6-3c}{\sqrt{6}}$.

d. Remplacez b dans l'équation $b^2 - c^2 = 3 - 3c$ et résoudre l'équation obtenue en c.

e. Montrez que $b = \dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

f. En déduire $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.