

## Les entiers

**Définition 1.** Les *entiers naturels* sont les nombres entiers positifs ou nuls. L'ensemble des entiers naturels est noté  $\mathbb{N}$ .

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Les *entiers relatifs* sont les nombres entiers positifs, négatifs ou nuls. L'ensemble des entiers relatifs est noté  $\mathbb{Z}$ .

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

En l'absence de précision un entier est un entier relatif.

**E1** Montrez la nature de chaque nombre (entier positif, négatif ou non entier) :

- |                               |                                |
|-------------------------------|--------------------------------|
| a. l'opposé de $-7$           | b. l'inverse de $4$            |
| c. l'inverse de $\frac{2}{3}$ | d. l'inverse de $-\frac{1}{5}$ |
| e. $(-6) \times (-2)$         | f. $7 - 8$                     |
| g. $\frac{6}{2}$              | h. $\frac{-12}{3}$             |
| i. $7 \times \frac{1}{7}$     | j. $\frac{-100}{-10}$          |
| k. $10^6$                     | l. $10^{-1}$                   |
| m. $\sqrt{25}$                | n. $\sqrt{50}$                 |
| o. $(-3)^2$                   | p. $(-2)^3$                    |

## Multiples, diviseurs

**Définition 2.** Soit  $a$  et  $b$  deux entiers. On dit que  $a$  est un *multiple* de  $b$  ou que  $a$  est *divisible* par  $b$  s'il existe un entier  $k$  tel que  $a = b \times k$ . On dit alors que  $b$  est un *diviseur* de  $a$  ou que  $b$  *divise*  $a$ .

**E2** Construisez quatre phrases équivalentes utilisant le vocabulaire (multiple, diviseur, divisible, divise) :

- a.  $-21$  et  $7$ .    b.  $8$  et  $72$ .    c.  $-3$  et  $-9$ .  
d.  $350$  et  $-5$ .    e.  $-6$  et  $18$ .    f.  $24$  et  $12$ .

**E3** Traduisez la phrase sous la forme d'une égalité en utilisant l'existence d'un entier  $k$  :

- a.  $420$  est un multiple de  $12$ .  
b.  $-15$  divise  $-240$ .  
c.  $7$  est un diviseur de  $931$ .  
d.  $204$  est divisible par  $11$ .

**E4** Traduisez quatre fois par une phrase utilisant le vocabulaire (multiple, diviseur, divisible, divise) :

- a.  $37 \times 12 = 444$     b.  $-272 = -17 \times 16$   
c.  $\frac{2944}{32} = 92$     d.  $-24 = \frac{432}{-18}$

**E5**  $a$  est un entier. Démontrez que la somme de deux multiples de  $a$  est un multiple de  $a$ .

**E6** Démontrez que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de  $3$ .

**Propriété 1.** Un nombre est divisible par  $3$  (respectivement par  $9$ ) si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de  $3$  (respectivement de  $9$ ).

**E7** Déterminez si les nombres suivants sont des multiples de  $2$ , de  $3$ , de  $5$ , de  $9$  :

- a.  $123$     b.  $456$     c.  $2\,895$   
d.  $101\,112$     e.  $131\,418$     f.  $161\,718$

**Propriété 2.** Un nombre est pair si et seulement s'il existe un entier  $k$  tel que  $n = 2k$ . Un nombre est impair si et seulement s'il existe un entier  $k$  tel que  $n = 2k + 1$ .

**E8** Montrez la parité des nombres suivants sachant que  $n$  est un entier :

- a.  $2n + 6$     b.  $2n + 9$   
c.  $-12n$     d.  $4n^2 + 2n + 1$   
e.  $6n^2 - 8$     f.  $2n - 5$

**E9** Démontrez les propriétés suivantes :

- a. Le carré de tout entier impair est impair.  
b. La somme de deux entiers impairs est paire.  
c. Le produit de deux entiers impairs est impair.

## Raisonnements

**Définition 3.** Le *raisonnement par disjonction des cas* consiste à envisager toutes les possibilités pour un problème donné.

**E10** Démontrez que  $n(n+1)$  est pair pour tout entier  $n$  en utilisant un raisonnement par disjonction des cas.

**Définition 4.** On appelle *contre-exemple* d'une proposition un exemple qui montre que la proposition est fausse.

**E11** Donnez trois contre-exemples pour chaque proposition fausse suivante :

- a. Si  $n$  est un multiple de  $3$ , alors  $n$  est un multiple de  $9$ .  
b. Si  $k$  est un entier, alors  $3k + 1$  est impair.  
c. Si un nombre est divisible par  $2$  et par  $4$ , alors il est divisible par  $8$ .

**Définition 5.** La *proposition réciproque* d'une proposition donnée est la proposition obtenue en échangeant l'hypothèse avec la conclusion.

**E12** Indiquez si les propositions sont vraies ou fausses et si les propositions réciproques sont vraies ou fausses :

- a. Si un nombre est divisible par  $5$ , alors il est divisible par  $10$ .  
b. Si un nombre est divisible par  $6$ , alors il est divisible par  $3$  et par  $2$ .  
c. Si un nombre est divisible par  $12$ , alors il est divisible par  $6$  et par  $2$ .

**Définition 6.** Le *raisonnement par l'absurde* consiste à supposer fausse une proposition et à en déduire une contradiction.

**E13** Soit  $n$  est un entier tel que  $n^2$  est pair. Démontrez par l'absurde que  $n$  est pair.