Généralités

Définition 1. Une suite numérique u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array}$$

On note u_n la valeur de u en n. Autrement dit

$$u_n = u(n)$$

Les premiers termes de la suite u sont donc u_0, u_1, u_2, u_3, ...
La suite u se note (u_n), ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou encore $(u_n)_{n\geqslant 1}$ si elle commence à l'indice 1.

Définition 2. Une suite numérique u est définie par une formule explicite si on peut exprimer u_n en fonction de n.

E1 Chaque suite u suivante est définie pour tout entier naturel n. Calculez les 4 premiers termes.

a. $u_n = 2n + 1$ **b.** $u_n = 3n^2 - 2n + 1$
c. $u_n = 2^n$ **d.** $u_n = \frac{1}{n+1}$

Définition 3. Une suite numérique u est définie par récurrence si on peut exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. On donne le premier terme u_0 et la relation de récurrence.

E2 Chaque suite u suivante est définie par récurrence pour tout entier naturel n. Calculez les 4 premiers termes.

a.
$$\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} u_0 = 0{,}5 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 4u_n + 1 \end{cases}$$

Suites particulières

Définition 4. Une suite u est arithmétique s'il existe un réel r appelé raison tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.

Propriété 1. La formule explicite d'une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 est

$$u_n = u_0 + nr$$

Propriété 2. La formule explicite d'une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_1 est

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

Définition 5. Une suite géométrique est une suite numérique u telle qu'il existe un réel q appelé raison tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = q \times u_n$.

Propriété 3. La formule explicite d'une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 est

$$u_n = u_0 q^n$$

Propriété 4.

- Une suite est arithmétique de raison r si et seulement si pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = r$$

- Si $u_n \neq 0$, une suite est géométrique de raison q si et seulement si pour tout entier naturel n,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

E3 Déterminez si chaque suite ci-dessous est arithmétique, géométrique ou ni l'un ni l'autre. Si elle est arithmétique ou géométrique, indiquez sa raison et donnez sa formule explicite.

a. $u_n = 5n + 2$ **b.** $u_n = 3 \cdot 2^n$
c. $u_n = (-1)^n$ **d.** $u_n = n^2 + 1$

E4 Les suites suivantes sont définies par récurrence. Déterminez si elles sont arithmétiques ou géométriques, puis donnez leur formule explicite.

a.
$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 5u_n \end{cases}$$

E5 Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = 5 - n \qquad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = 5 - v_n \end{cases}$$

Déterminez si elles sont arithmétiques ou non.