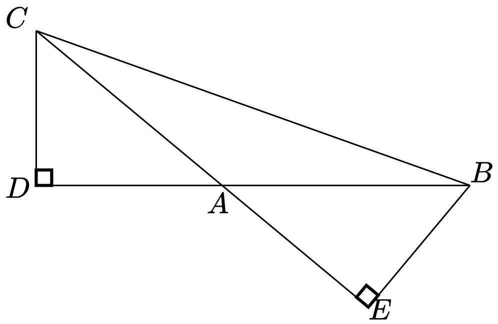
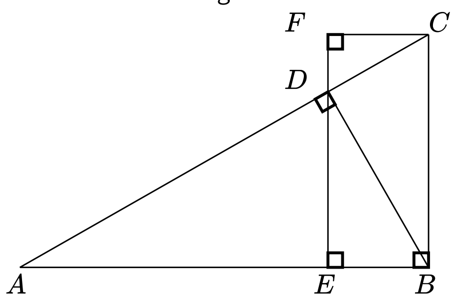
E1 On considère la figure suivante où les points qui semblent alignés le sont vraiment.



Dans chaque cas, donner un produit scalaire de deux vecteurs colinéaires puis en déduire le signe. Plusieurs solutions sont parfois possibles, les donner toutes.

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$	$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}$	$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{EB}$	$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$

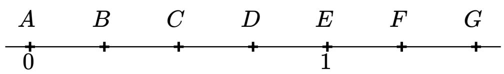
E2 On considère la figure suivante où les points qui semblent alignés le sont vraiment.



Dans chaque cas, donner un produit scalaire de deux vecteurs colinéaires puis en déduire le signe. Plusieurs solutions sont parfois possibles, les donner toutes.

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$
$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DE}$	$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DA}$	$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DB}$

E3



a. Déterminez les produits scalaires suivants :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ $\quad$ $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AF}$ $\quad$ $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{DA}$ $\quad$ $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{FA}$

$(-\overrightarrow{DB})\cdot(-\overrightarrow{FC})$ $\quad$ $(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BA})$

$(\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{GC})\cdot(\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{GA})$ $\quad$ $\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{DA}$

$(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{BF})\cdot(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{FC})$

b. Trouvez deux vecteurs dont le produit scalaire est -1.

c. Trouvez deux vecteurs dont le produit scalaire est $-\dfrac{9}{8}$.

E4 Soit ABC un triangle rectangle en C et H le projeté orthogonal de C sur (AB) tel que $AH=3$ et $HB=9$. Calculez $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$ de deux façons différentes et en déduire AC.

E5 Soit ABC un triangle tel que $AB=2$, $BC=4$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=10$.

a. Déterminez $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA}$.

b. Calculez $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ en développant $\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})$.

c. En utilisant une astuce semblable à celle de la question précédente, calculez $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.

d. Notons H le projeté orthogonal de B sur (AC). Déterminez AC en remarquant que $\overrightarrow{AC}^2=(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})\cdot\overrightarrow{AC}$.

e. Utilisez $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ pour déterminer AH.

E6 Soit $ABCD$ un parallélogramme. Montrez que $AC^2+BD^2=2(AB^2+BC^2)$.

E7 Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB=4$ et $AD=5$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=11{,}5$. Calculez AC puis BD.

E8 Soit ABC un triangle isocèle en A.

a. Montrez que $\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=0$ en utilisant que $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$.

b. En déduire que $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$.

c. Notons H le projeté orthogonal de A sur (BC). Montrez que H est le milieu de $[BC]$.

d. Considérons le point D tel que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Que vient-on de montrer pour le quadrilatère $ABDC$?

E9 On se propose de démontrer le théorème de Pythagore. Soit ABC un triangle rectangle en A. Elevez au carré l'égalité vectorielle $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$ pour obtenir l'égalité de Pythagore en développant.

E10 $ABCD$ est un rectangle tel que $AB=8$ et $AD=6$. Notons A' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A et C sur (BD).

a. Montrez que $BD=10$ en utilisant le théorème de Pythagore.

b. Montrez que $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{A'C'}\cdot\overrightarrow{BD}$.

c. En utilisant une identité remarquable, montrez que $AD^2-AB^2=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$.

d. En déduire $A'C'$.

E11 Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB=4$, $AD=5$ et $AC=8$.

a. Déterminez $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ en utilisant $AC^2=\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\|^2$.

b. Déterminez BD en exprimant BD^2 à l'aide d'une astuce semblable à celle de la question précédente.

E12 $ABCD$ est un rectangle tel que $AB=8$ et $AD=2$. O est le milieu de $[DC]$.

a. Calculez $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ en remarquant que $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB})$.

b. Montrez à l'aide du théorème de Pythagore que $AO^2=20$, en déduire OB^2.

c. En développant $AB^2=\|\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\|^2$ retrouvez $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$.

E13 ABC est un triangle isocèle en B et D est le symétrique de C par rapport à B.

Démontrez que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Que peut-on en déduire ?