

**E1** On se propose de démontrer que dans un triangle rectangle, la médiane issue de l'angle droit est de longueur égale à la moitié de l'hypoténuse. Considérons un triangle  $ABC$  rectangle en  $C$  et soit  $O$  le milieu de  $[AB]$ .

- Montrez que  $\overrightarrow{CO} = \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2}$ .
- En déduire que  $CO = \frac{AB}{2}$ .

**E2** Soit  $ABC$  un triangle tel que  $AB = 5$ ,  $AC = 8$  et  $BC = 6$ .

- Calculez  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .
- Soit  $I$  le milieu de  $[BC]$ . Montrez que  $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ .
- En déduire  $AI$ .
- Soit  $J$  le milieu de  $[AC]$ . Calculez de même  $BJ$ .
- Soit  $K$  le milieu de  $[AB]$ . Calculez de même  $CK$ .

**E3** Dans chacun des cas suivants, calculez  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

- $AB = 4$ ,  $AC = 5$ ,  $\widehat{BAC} = 30^\circ$
- $AB = 4$ ,  $AC = 6$ ,  $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$
- $AB = 6$ ,  $AC = 7$ ,  $\widehat{BAC} = \frac{3\pi}{4}$
- $AB = 9$ ,  $AC = 12$ ,  $\widehat{BAC} = \frac{143\pi}{3}$

**E4** Dans chacun des cas suivants, déterminez une mesure de l'angle  $\widehat{BAC}$  comprise entre 0 et  $\pi$ .

- $AB = 3$ ,  $AC = 2$ ,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3\sqrt{2}$
- $AB = 3$ ,  $AC = 5$ ,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -7,5$
- $AB = 3$ ,  $AC = 9$ ,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{27\sqrt{3}}{2}$

**E5** Soit  $ABC$  un triangle équilatéral tel que  $AB = 5$ . Calculez  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

**E6** Soit  $ABC$  un triangle isocèle en  $A$  tel que  $AB = 5$  et  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ .

- Calculez  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .
- Calculez  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$  en utilisant  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ .
- Montrez que  $BC = 5\sqrt{3}$ .

**E7** Soit  $ABCD$  un carré de côté 4 cm et de centre  $O$ . Soit  $I$  le milieu de  $[AB]$ .

- Calculez  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  de deux façons.
- Calculez  $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OC}$ .

**E8** Soit  $ABCD$  un losange de côté 6 cm et de centre  $O$  tel que  $\widehat{ABC} = 30^\circ$ .

- Calculez  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ .
- Calculez  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ .
- Montrez que  $AC = 6\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ .
- En déduire  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 18(2 - \sqrt{3})$ .
- Déterminez une mesure de l'angle  $\widehat{BAC}$  en degrés.
- Montrez que  $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$ .

**E9** Soit  $ABC$  un triangle tel que  $AB = 4$ ,  $BC = 8$  et  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ . Démontrez que  $ABC$  est un triangle rectangle.

**E10** Soit  $ABC$  un triangle tel que  $AB = 7$ ,  $AC = 7\sqrt{3}$  et  $\widehat{BAC} = 30^\circ$ . Démontrez que  $ABC$  est un triangle isocèle.

**E11** Soit  $ABC$  un triangle tel que  $AB = \sqrt{2}$ ,  $AC = \sqrt{10}$  et  $BC = 2$ . Déterminez une mesure de l'angle  $\widehat{ABC}$ .

**E12** Soit  $ABC$  un triangle tel que  $a = BC = \sqrt{3}$ ,  $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{6}$  et  $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{4}$ .

- Montrez que  $b^2 - c^2 = 3 - 3c$ .
- Montrez que  $b^2 - c^2 = \sqrt{6}b - 3$ .
- En déduire  $b = \frac{6 - 3c}{\sqrt{6}}$ .
- Remplacez  $b$  dans l'équation  $b^2 - c^2 = 3 - 3c$  et résolvez l'équation obtenue en  $c$ .
- Montrez que  $b = \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ .
- En déduire  $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ .