E1 Pour chacune des suites (u_n) suivantes, calculez les quatre premiers termes puis conjecturez sur la nature de la suite (arithmétique ou non). Dans le cas d'une suite artithmétique, indiquez le premier terme et la raison.

a. $u_0 = 13$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 6$.

b. $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + n$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -3n + 8$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 - 2n + 1$.

e. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n-2)^2 - (n+1)^2$.

f. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{9n^2 + 6n + 1}$.

g. $u_0 = -15$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + u_n = 6$.

h. $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2$.

i. $u_1 = \sqrt{3}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1} - u_n}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$.

E2 Dans chaque cas la suite (u_n) est arithmétique. Indiquez le premier terme u_0 et la raison de la suite.

a. $u_5 = 3$ et $u_6 = -6$. **b.** $u_3 = 5$ et $u_7 = 17$.

c. $u_6 = 0$ et $u_{42} = 18$. **d.** $u_{14} = \dfrac{5}{6}$ et $u_{20} = \dfrac{4}{3}$.

E3 Chaque suite u_n est arithmétique de raison r. Calculez les quatre premiers termes, puis déterminez le terme demandé et enfin pour quels entiers n l'inégalité est vérifiée.

a. $u_0 = -15$ et $r = 2$; u_{100} ; $u_n \geqslant 1000$.

b. $u_0 = 3$ et $r = -5$; u_{100} ; $u_n < -997$.

c. $u_1 = 6$ et $r = 0{,}15$; u_{100} ; $u_n \geqslant 51$.

d. $u_0 = 0$ et $r = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$; u_{100} ; $u_n \geqslant 1000\sqrt{3}$.

E4

a. Recopiez et complétez l'addition suivante :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\
+ & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
 & ? & + & ? & + & ? & + & \dots & + & ? & + & ? & + & ?
\end{array}$$

b. Retrouvez la formule du calcul de la somme S des n premiers entiers naturels non nuls.

E5 Pour chacune des questions on utilisera la formule du calcul de la somme des n premiers entiers naturels non nuls.

a. Calculez $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2\,000\,000$.

b. Calculez $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 15$ puis en déduire $3 + 6 + 9 + 12 + \dots + 45$.

c. Calculez $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 200$ puis en déduire $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 201$.

d. Calculez $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 40$ puis en déduire $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 81$.

Indice :
$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots \\ + 1 + 2 + 3 + \dots \end{aligned}$$

E6

a. Calculez $1 + 2 + \dots + 50$ puis $1 + 2 + \dots + 100$ en utilisant la formule du calcul de la somme des n premiers entiers naturels non nuls.

b. En déduire un calcul de $51 + 52 + \dots + 100$ de deux manières.

c. Soit u_n une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $u_0 = 51$. Déterminez le 50ème terme de cette suite. Retrouvez le résultat de la question précédente en utilisant la formule du calcul de la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique.

E7 On considère la suite arithmétique u_n de raison 3 et de premier terme $u_0 = 4$ et la suite v_n définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{3}$.

a. Calculez les quatre premiers termes de la suite (u_n).

b. Déterminez le terme général de la suite (u_n).

c. Calculez la somme S des 20 premiers termes de la suite (u_n).

d. Calculez les quatre premiers termes de la suite (v_n).

e. Montrez que la suite (v_n) est la suite des entiers naturels non nuls.

f. Calculez la somme des 20 premiers termes de la suite (v_n).

g. Reprendre les questions à partir de la question c. mais en considérant la somme S' des 50 premiers termes.

h. Calculez de deux manières $u_{20} + u_{21} + \dots + u_{49}$.

E8 Les suites ci-dessous sont arithmétiques et définies sur $\mathbb{N}$.

Décrire la suite puis indiquez pour chacune d'elles si elle est croissante, décroissante, constante ou si on ne peut rien dire.

a. $u_n = 3n - 6$ **b.** $u_n = 5 - 2n$ **c.** $u_n = -3n + 8$

E9 Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{N}$:

$3 + 6 + 9 + \dots + 3(n-1) + 3n = 2583$.

Indice : $\sqrt{6889} = 83$.

E10 On considère la suite u_n définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3u_n + 1}$. On admettra que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

Considérons la suite v_n définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

a. Calculez les quatre premiers termes de la suite (u_n).

b. Calculez les quatre premiers termes de la suite (v_n).

c. Montrez que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{u_{n+1}} = 3 + \dfrac{1}{u_n}$.

d. En déduire que la suite (v_n) est arithmétique.

e. Déterminez le terme général de la suite (v_n).

f. En déduire le terme général de la suite (u_n).