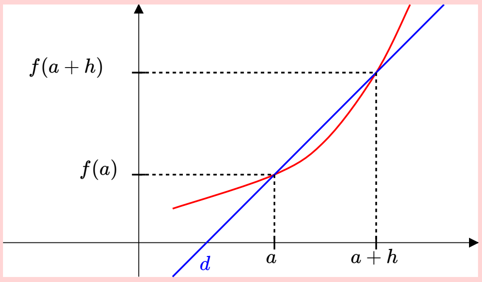
Dans cette leçon f est une fonction définie sur un intervalle I ; a est un réel de I et h est un réel non nul tel que $a+h$ soit dans I.

Taux de variation

Définition 1. Le taux de variation de la fonction f entre a et $a+h$ est le nombre :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

C'est aussi la pente de la sécante à la courbe représentative de f passant par les points d'abscisses a et $a+h$.



E1

a. En utilisant la définition du taux de variation, montrez que le taux de variation de la fonction carré $f : x \longmapsto x^2$ entre a et $a+h$ est $2a+h$.

b. Calculez la pente de la sécante à la courbe représentative de f passant par les points d'abscisses 2 et $2{,}1$.

E2 En utilisant la définition du taux de variation, montrez que le taux de variation d'une fonction affine entre deux réels a et $a+h$ est la pente de la droite représentative de cette fonction.

E3

a. En utilisant la définition du taux de variation, montrez que le taux de variation de la fonction inverse $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ entre a et $a+h$ est $-\frac{1}{a(a+h)}$.

b. Montrez que la pente de la sécante à la courbe représentative de f passant par les points d'abscisses 2 et $2{,}1$ est $-\frac{5}{21}$.

E4

a. En utilisant la définition du taux de variation, montrez que le taux de variation de la fonction racine carrée $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ entre a et $a+h$ est $\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$.

b. Montrez que la pente de la sécante à la courbe représentative de f passant par les points d'abscisses 4 et 9 est $0{,}2$.

E5

a. En utilisant la définition du taux de variation, montrez que le taux de variation de la fonction cube $f : x \longmapsto x^3$ entre a et $a+h$ est $3a^2+3ah+h^2$.

Indication : $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$.

b. Montrez que la pente de la sécante à la courbe représentative de f passant par les points d'abscisses 2 et 2.1 est $12{,}61$.

Nombre dérivé

Définition 2. On appelle nombre dérivé de f en a et on note $f'(a)$ le nombre :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$\lim_{h\to 0}$ signifie que l'on regarde ce que vaut le taux de variation de f entre a et $a+h$ lorsque h tend vers 0.

E6

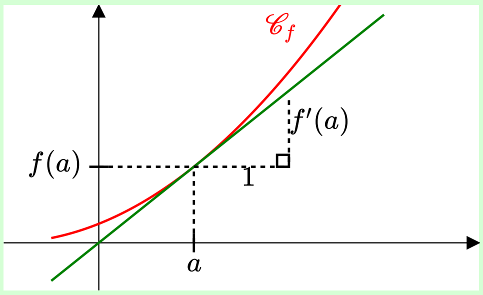
a. f est la fonction carré qui à x associe x^2. Vérifiez que $f'(3) = \lim_{h\to 0} 6+h$. En déduire $f'(3)$.

b. f est la fonction cube qui à x associe x^3. Vérifiez que $f'(2) = \lim_{h\to 0} 12+6h+h^2$. En déduire $f'(2)$.

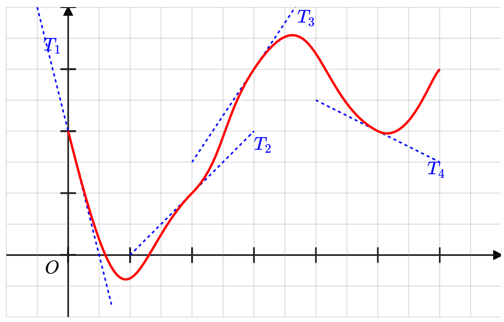
c. f est la fonction racine carrée qui à x associe $\sqrt{x}$. Vérifiez que $f'(5) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{5+h}+\sqrt{5}}$. En déduire $f'(5)$.

d. f est la fonction inverse qui à x associe $\frac{1}{x}$. Vérifiez que $f'(6) = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{6(6+h)}$. En déduire $f'(6)$.

Propriété 1. $f'(a)$ est aussi la pente de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.



E7 On a tracé la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0;6]$ et ses tangentes T_1, T_2, T_3 et T_4 aux points d'abscisses 0, 2, 3 et 5.



Déterminez graphiquement $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(5)$, $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(3)$ et $f'(5)$.

E8 f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=1$, $f(2)=-2$, $f(4)=-3$, $f(6)=-2$, $f'(0)=-2$, $f'(2)=-1$, $f'(4)=0$ et $f'(6)=1$. Placez les points d'abscisses 0, 2, 4 et 6 de la courbe représentative de f et ses tangentes aux mêmes points. Tracez une allure possible de la courbe représentative de f.