Propriété 1. Si ax^2+bx+c est un polynôme du second degré et Δ son discriminant, alors :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{\Delta}{4a}$$

E1 Déterminez α et β pour les polynômes du second degré suivants. En déduire la forme canonique.

a. $2x^2+3x-5$ **b.** $3x^2+5x+10$
c. $5x^2-x+6$ **d.** $2x^2-12x+18$
e. $3x^2-x-4$ **f.** x^2+2x+5
g. $7x^2-14x+7$ **h.** x^2-2x-3

Propriété 2. Considérons un polynôme du second degré et Δ son discriminant :

- Si $\Delta > 0$, alors le polynôme admet deux racines réelles distinctes.
- Si $\Delta = 0$, alors le polynôme admet une seule racine réelle.
- Si $\Delta < 0$, alors le polynôme n'admet pas de racine réelle.

E2 Déterminez le nombre de racines réelles des polynômes du second degré suivants en calculant leur discriminant.

a. $2x^2+3x-5$ **b.** $3x^2+5x+10$
c. $5x^2-x+6$ **d.** $2x^2-12x+18$
e. $3x^2-x-4$ **f.** x^2+2x+5
g. $7x^2-14x+7$ **h.** x^2-2x-3

Propriété 3. Considérons un polynôme du second degré de discriminant $\Delta > 0$. Les racines de ce polynôme sont données par :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

E3 Calculez les racines des polynômes du second degré suivants.

a. $27x^2+27x-12$ avec $\Delta = 45^2$
b. $64x^2+32x-5$ avec $\Delta = 48^2$

E4 Déterminez les racines des polynômes du second degré suivants.

a. $5x^2+3x-6$ avec $\Delta = 129$
b. $-3x^2+7x+2$ avec $\Delta = 73$

E5 Calculez les racines des polynômes du second degré suivants.

a. $3x^2+2x-\frac{15}{4}$ avec $\Delta = 49$
b. $5x^2-2x-\frac{8}{5}$ avec $\Delta = 36$

Fonction polynôme du second degré

Définition 1. Une *parabole* est une courbe plane symétrique par rapport à un axe et d'équation de la forme $y = ax^2+bx+c$ où a, b et c sont des constantes avec $a \neq 0$.

Définition 2. Le sommet d'une parabole est le point situé à l'intersection de l'axe de symétrie et de la parabole.

Propriété 4. Si f est une *fonction polynôme du second degré* de la forme $f(x) = ax^2+bx+c$, alors f change de variation en $\alpha = -\frac{b}{2a}$.

- Si $a > 0$, alors f est décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ et croissante sur $[\alpha;+\infty[$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$

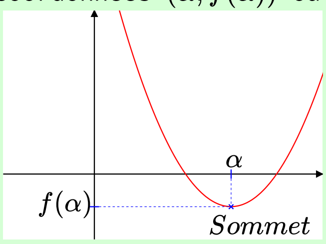
- Si $a < 0$, alors f est croissante sur $]-\infty;\alpha]$ et décroissante sur $[\alpha;+\infty[$.

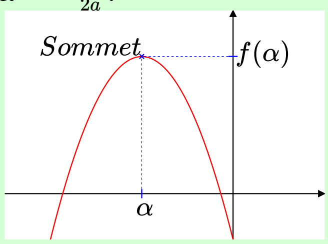
x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$

E6 Dressez le tableau de variations.

a. $f(x) = 3x^2-12x+19$ **b.** $f(x) = -5x^2+10x-1$
c. $f(x) = 6x^2+36x+46$ **d.** $f(x) = -x^2-18x-82$

Propriété 5. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré est une *parabole* dont le *sommet* a pour coordonnées $(\alpha; f(\alpha))$ où $\alpha = -\frac{b}{2a}$.





E7 Calculez les coordonnées du sommet de la parabole puis donner une représentation de la parabole dans un repère orthonormé.

a. $f(x) = 2x^2-4x+4$
b. $f(x) = -3x^2-12x-13$
c. $f(x) = -4x^2+24x-33$
d. $f(x) = 5x^2+40x+78$

Propriété 6. Si f est une fonction polynôme du second degré de la forme $f(x) = ax^2+bx+c$, alors le $f(\alpha) = \beta$ est le *maximum* de f si $a < 0$ et le *minimum* de f si $a > 0$.

E8 Déterminez les coordonnées du sommet de la parabole et l'extremum.

a. $f(x) = 2(x-1)^2+2$
b. $f(x) = -3(x+2)^2-1$
c. $f(x) = -4(x-3)^2+3$
d. $f(x) = 5(x+4)^2-2$