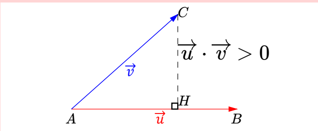
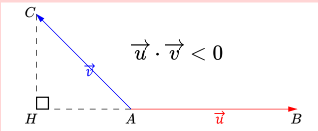
Produit scalaire

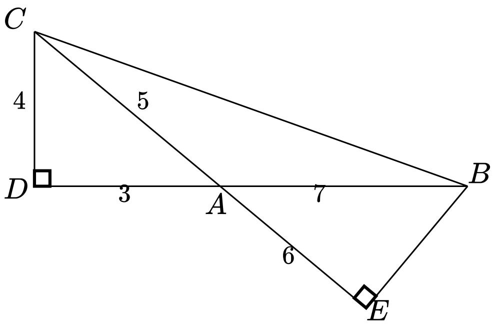
Définition 1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Soient A, B et C trois points du plan tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB). On appelle *produit scalaire* de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ et on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le nombre réel défini par :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{u} = \vec{0}$;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens ;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires ;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ dans les autres cas.





E1 On considère la figure ci-dessous qui n'est pas à l'échelle mais où les points qui semblent alignés le sont vraiment.



Calculez les produits scalaires suivants :

a. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}$ b. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ c. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB}$
d. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ e. $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AC}$ f. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$
g. $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BA}$ h. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ i. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$

Propriété 1. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et λ un nombre réel.

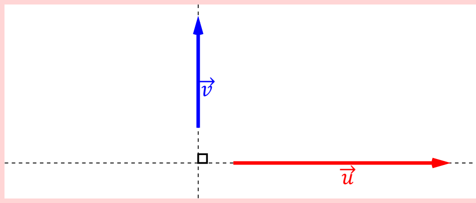
- Le produit scalaire est symétrique :
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$
- Le produit scalaire est bilinéaire :
  - $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
  - $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
  - $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v})$

E2 Soit ABC un triangle tels que $AB = 2$, $BC = 4$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10$. Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC). Calculez les produits suivants en justifiant à l'aide des propriétés du produit scalaire :

a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$ b. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$ c. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BA}$
d. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ e. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ f. $(\overrightarrow{AC})^2$

Orthogonalité

Définition 2. Deux vecteurs non nuls sont dits *orthogonaux* si leurs directions sont perpendiculaires.



Propriété 2. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

E3 On considère un carré $ABCD$ de centre O. Parmi les produits scalaires suivants, lesquels sont nuls ? Justifiez.

a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ b. $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB}$
c. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ d. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OB}$

E4 $ABCD$ est un parallélogramme. Dans chaque cas, précisez la nature de $ABCD$.

a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ b. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ c. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

Norme et produit scalaire

Propriété 3. On note $\vec{u}^2$ et on appelle *carré scalaire* de $\vec{u}$ le nombre réel $\vec{u} \cdot \vec{u}$. On a :
$$\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$$

Propriété 4. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Alors :
$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$
$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$
$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

E5 Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB = 6$, $AD = 3$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -10$. Calculez.

a. $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2$ b. $\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\|^2$
c. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})$

E6 Soit ABC un triangle. En utilisant le produit scalaire, démontrez que ABC est rectangle en A si et seulement si $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

E7 Soient A, B et C trois points du plan. Démontrez les formules suivantes :

- $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$
- $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$