

**Définition :** Une variable aléatoire réelle généralement notée  $X$  est une fonction qui associe à chaque élément d'un univers  $\Omega$  un nombre réel.

- $\{X = 1\}$  est l'événement "la variable aléatoire  $X$  prend la valeur 1".
- On note  $P(X = 1)$  la probabilité de l'événement  $\{X = 1\}$ .
- $\{X \leq 1\}$  est l'événement "la variable aléatoire  $X$  prend une valeur inférieure ou égale à 1".
- On note  $P(X \leq 1)$  la probabilité de l'événement  $\{X \leq 1\}$ .

**E1** Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules vertes. On tire deux boules simultanément. On note  $X$  la variable aléatoire qui associe le nombre de boules rouges tirées.

a. Résumez l'univers  $\Omega$  de l'expérience aléatoire dans un tableau à double entrée.

On pourra noter  $R_1$  la boule rouge n°1,  $R_2$  la boule rouge n°2,  $R_3$  la boule rouge n°3,  $V_1$  la boule verte n°1 et  $V_2$  la boule verte n°2.

b. Calculez  $P(X = 0)$ ,  $P(X = 1)$  et  $P(X = 2)$ .

**E2** On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. On note  $X$  la variable aléatoire qui associe le nombre de rois tirés.

a. Décrire les événements suivants :

$$\{X = 1\} \quad \{X < 2\}$$

b. Déterminez  $P(X = 5)$ .

**Définition :** On appelle loi de probabilité d'une variable aléatoire  $X$  la donnée de l'ensemble des valeurs possibles de  $X$  et des probabilités associées.

**E3** Lors d'un jeu, il est possible de perdre 1€ avec une probabilité de 0,3, de ne rien gagner ni perdre avec une probabilité de 0,4 et de gagner 2€ avec une probabilité de 0,3. Considérons une variable aléatoire  $X$ . Complétez le tableau suivant de sa loi de probabilité :

$x_i$			
$P(X = x_i)$			

Déterminez les probabilités suivantes :

a.  $P(X < 0)$ .                      b.  $P(X \geq 0)$ .

**E4** On considère la loi de probabilité résumée dans le tableau suivant :

$a$	0	1	2	3	4
$P(X = a)$	0,2	0,3	0,1	0,2	$p$

a. Calculez  $p$ .      b. Calculez  $P(X = 5)$ .      c. Calculez  $P(X \geq 2)$ .

**E5** On considère une variable aléatoire  $X$  prenant les valeurs 0 à 10 et telle que pour  $n$  de 0 à 9,  $P(X = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}$ . Montrez que  $u_n = P(X = n)$  est une suite géométrique. En déduire  $P(X = 10)$ .

**E6** Un jeu d'argent consiste à miser 2€ puis à tirer une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes :

- si la carte est un As, on récupère 5€ ;
- si la carte est une figure, on récupère 3€ ;
- dans les autres cas, on perd sa mise.

On note  $X$  la variable aléatoire qui associe le gain en euros.

Dressez le tableau de la loi de probabilité de  $X$ .

**E7** Le temps d'écoute d'un morceau enregistré dans un smartphone est résumé ci-dessous.

Morceau	A	B	C	D	E
Temps (min)	2'30	3'	2'30	4'45	3'

On note  $X$  la variable aléatoire qui associe le temps d'écoute en minutes d'un morceau choisi au hasard.

Dresser le tableau de la loi de probabilité de  $X$ .

**E8** Un sac contient les 26 lettres de l'alphabet. On tire deux lettres au hasard. On gagne 5€ par voyelle tirée et on perd 1€ par consonne tirée. On note  $X$  la variable aléatoire qui associe le gain obtenu.

a. Construire un arbre pondéré décrivant l'expérience aléatoire.

b. Déterminez la loi de probabilité de  $X$ .

**Définition :** On appelle espérance mathématique de la variable aléatoire  $X$  le nombre réel  $E(X)$  défini par

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \dots + x_n \times P(X = x_n) \text{ où les } x_i \text{ sont les valeurs possibles de } X.$$

**E9** On considère une variable aléatoire  $X$  prenant les valeurs 1, 2, et 3 et telle que  $P(X = 1) = 0,2$ ,  $P(X = 2) = 0,3$ ,  $P(X = 3) = 0,5$ .

a. Calculez  $P(X \geq 2)$ .      b. Calculez  $E(X)$ .

**E10** Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules vertes. On tire une boule au hasard. On note  $X$  la variable aléatoire qui associe le gain obtenu : si on tire une boule rouge, on perd 10€, sinon on gagne  $a$ €. Le jeu est dit équitable si l'espérance mathématique de  $X$  est nulle. Combien doit valoir  $a$  pour que le jeu soit équitable ?

**E11** Dans un jeu de loterie, une roue est divisée en quatre secteurs de même angle. Un secteur rapporte 60€, un autre 10€, et les deux autres rapportent 5€. La mise est de 20€. On note  $X$  la variable aléatoire qui associe le gain obtenu. Le jeu est-il équitable ?