16/09 Sujet C

E1 Questions de cours

a. Définition d'une fonction périodique

b. Définition d'une fonction admettant un minimum

E2 Négation de propositions

Sur chacun des exemples suivants, écrire $\neg P$.

En justifiant, déterminer si P est vraie ou fausse.

a. $P : \forall n \in \mathbb{N}, n^2 \leq 4$

b. $P : \exists n \in \mathbb{N}, 3n = 7$

c. $P : \forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 4 \implies x = 2$

a. $\neg P : \exists n \in \mathbb{N}, n^2 > 4$ – P est fausse car $n = 3$ vérifie $n^2 > 4$.

b. $\neg P : \forall n \in \mathbb{N}, 3n \neq 7$ – P est fausse car aucun $n \in \mathbb{N}$ ne vérifie $3n = 7$.

c. $\neg P : \exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 4 \wedge x \neq 2$ – P est fausse car $x = -2$ vérifie $x^2 = 4$, mais $x \neq 2$.

E3 Produit des n premiers entiers

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n = 2^n \times n!.$$

Initialisation : Pour $n = 1$, on a :

$$2 = 2^1 \times 1! = 2,$$

donc la propriété est vraie pour \(n = 1).

Hérédité : Supposons que la propriété est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :

$$2 \times 4 \times \cdots \times 2n = 2^n \times n!.$$

Montrons qu'elle est vraie pour \(n+1). On a : $$ 2 \times 4 \times \dots \times 2n \times 2(n+1) = (2^n \times n!) \times 2(n+1). $$ Simplifions : $$ = 2^n \times n! \times 2(n+1) = 2^{n+1} \times (n+1)!. $$ Donc, la propriété est vraie pour \(n+1).

Conclusion : Par récurrence, la formule est vraie pour tout \(n \in \mathbb{N}).

E4 Détermination du domaine, des limites et de la dérivée

Soit \(f(x) = \ln(1 + e^{-x}) \ ).

a. Déterminer l'ensemble de définition de \(f \ ).

b. Calculer les limites de \(f \ ) en \(+\infty \ ) et en \(-\infty \ ).

c. Calculer la dérivée de \(f \ ).