Caractériser alignement et parallélisme

Propriété : Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

E1 Pour chaque égalité, justifiez que les points sont alignés en transformant l'égalité sous la forme $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ (indiquez la valeur de k).

a. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.
b. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC}$.
c. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CA}$.
d. $2\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$.
e. $-3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CA}$.
f. $\frac{2}{7}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Méthode : Pour déterminer si trois points A, B, C sont alignés, il suffit :

1. de calculer les coordonnées des vecteurs

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$;

2. de calculer le déterminant suivant :

$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} x_{\overrightarrow{AB}} & x_{\overrightarrow{AC}} \\ y_{\overrightarrow{AB}} & y_{\overrightarrow{AC}} \end{vmatrix} = x_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{AC}} - y_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{AC}}$;

3. les points A, B et C sont alors alignés si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$.

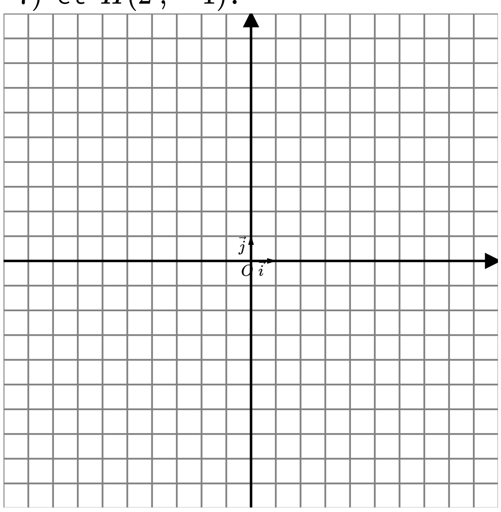
E2 Pour chaque cas, déterminez si les points A, B et C sont alignés.

a. $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 3{,}5 \end{vmatrix}$.

b. $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 18 & 22 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$.

c. $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} \sqrt{15} & 10 \\ \sqrt{3} & 2\sqrt{5} \end{vmatrix}$.

E3 On considère les points suivants dans un repère orthonormé : $A(-9\,;\,-1)$, $B(-3\,;\,1)$, $C(6\,;\,4)$, $D(-2\,;\,5)$, $E(7\,;\,-1)$, $F(10\,;\,-3)$, $G(-6\,;\,-7)$ et $H(2\,;\,-1)$.



Pour chaque cas déterminez si les points sont alignés ou non en calculant le déterminant.

a. A, B et C.
b. G, B et D.
c. D, E et F.
d. C, H et G.

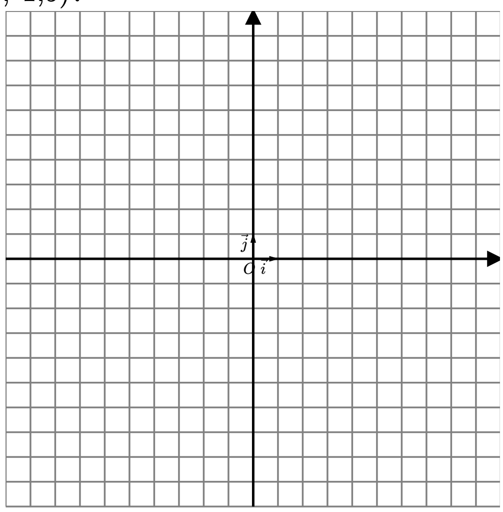
Méthode : Pour déterminer si deux droites (AB) et (CD) sont parallèles, il suffit :

1. de calculer les coordonnées des vecteurs directeurs

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix}$;

2. les droites (AB) et (CD) sont alors parallèles si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$.

E4 On considère les points suivants dans un repère orthonormé : $A(-6\,;\,-2)$, $B(-2\,;\,2)$, $C(2\,;\,-4)$, $D(8\,;\,2)$, $E(4\,;\,1)$, $F(6\,;\,-2)$, $G(1\,;\,-1)$ et $H(2\,;\,1{,}5)$.



Pour chaque cas dire si les droites sont parallèles ou non en calculant le déterminant.

a. (AB) et (CD).
b. (BC) et (EF).
c. (BG) et (EF).
d. (GH) et (CE).

E5 On considère deux points $A(-3\,;\,1)$ et $B(2\,;\,4)$ dans un repère orthonormé. Dans chaque cas, déterminez si le point D_i appartient à la droite (AB).

a. $D_1(9\,;\,8{,}2)$.
b. $D_2(\frac{5\sqrt{3}}{3} - 3\,;\,1 + \sqrt{3})$.
c. $D_3(1\,;\,5)$.

E6 On considère les points $A(-4\,;\,2)$, $B(3\,;\,2)$ et $C(5\,;\,-4)$.

a. M est le point tel que $AM = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$. Calculez ses coordonnées.

b. N est le point tel que $CN = \frac{1}{5}\overrightarrow{CA}$. Calculez ses coordonnées.

c. Démontrez que les droites (MN) et (BC) sont parallèles en calculant le déterminant de deux vecteurs.

d. Calculez $\frac{MN}{BC}$ en calculant les distances MN et BC.

e. Quelles remarques peut-on faire sur ces résultats ?