Probabilités conditionnelles

E1 Dans une grande compétition internationale de sports électroniques, deux jeux dominent la scène : "Legends of Battle" (LoB) et "Strategic Conquest" (SC). Les participants sont soit spécialisés dans LoB, soit dans SC, et chaque joueur a un statut qui peut être soit "amateur", soit "professionnel". On choisit au hasard un joueur parmi les participants à la compétition. Nous définissons A comme l'événement "le joueur est spécialiste de LoB" et B comme l'événement "le joueur est professionnel".

a. Traduisez les informations suivantes en probabilités

- Les spécialistes de "Legends of Battle" (LoB) constituent $55\,\%$ des joueurs ;
- $36\,\%$ des joueurs sont des spécialistes de LoB avec le statut professionnel ;
- $64\,\%$ des spécialistes de SC ont le statut professionnel.

b. À l'aide de pourcentages, traduire par une phrase les probabilités suivantes : $P(B) = 0{,}648$, $P(B \cap \overline{A}) = 0{,}288$ et $P_B(A) = \frac{5}{9}$.

c. Dressez un tableau croisé des probabilités entre A et B.

E2 *Un placebo est une substance inactive qui ressemble à un médicament mais qui ne contient pas de principe actif.*

Des personnes atteintes d'une maladie ont accepté de participer à un essai clinique pour tester l'efficacité de certains traitements. Deux médicaments et un placebo sont testés. Les participants sont répartis en trois groupes : un groupe de contrôle qui reçoit le placebo, et deux groupes expérimentaux qui reçoivent l'un des deux médicaments. Notons M_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$ l'événement "le participant a reçu le médicament i" sachant que nous ne connaissons pas à l'avance lequel est le placebo. Notons A l'événement "le participant a vu son état s'améliorer". Voici les informations dont on dispose :

- Le quart des participants a été traité avec le médicament 1 ;
- $5\,\%$ des participants ont reçu le médicament 1 sans voir leur état s'améliorer ;
- $60\,\%$ des participants ont vu leur état s'améliorer ;
- La moitié des participants ayant vu leur état s'améliorer ont pris le médicament 2 ;
- Les deux tiers des participants ayant pris le médicament 3 n'ont pas vu leur état s'améliorer.
- La moitié des patients n'ayant pas vu leur état s'améliorer ont pris le placebo.

a. Traduisez les informations précédentes en probabilités

b. Calculez $P(\overline{A})$, $P(A \cap M_1)$.

c. Calculez la probabilité qu'un participant ait pris le médicament 2 et que son état se soit amélioré.

d. Calculez la probabilité qu'un participant ait pris le médicament 3.

e. Un participant a vu son état s'améliorer. Calculez la probabilité qu'il ait pris le médicament 3.

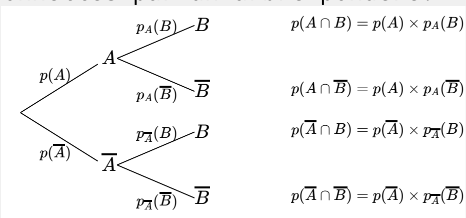
f. Dressez un tableau croisé des probabilités entre l'événement A et les événements M_i.

g. En déduire le numréo du placebo.

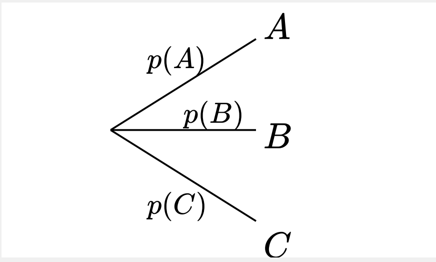
h. Pour déterminer l'efficacité d'un médicament par rapport au placebo, on compare les probabilités conditionnelles que son état s'est amélioré sachant qu'il a pris un médicament. Quel médicament semble le plus efficace ?

Probabilités conditionnelles

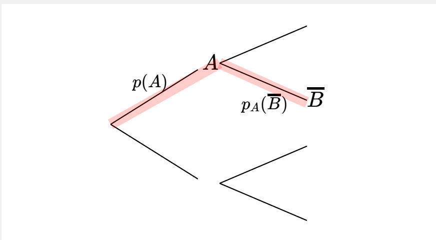
A et B désignent deux événements d'un univers Ω. On peut modéliser les probabilités conditionnelles par un arbre pondéré.



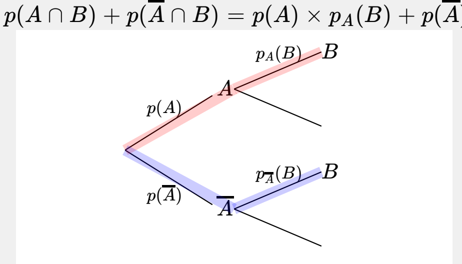
- La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.
  Par exemple, $p(A) + p(B) + p(C) = 1$.



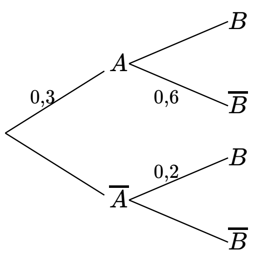
- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches qui le composent.
  Par exemple, $p(A \cap \overline{B}) = p(A) \times p_A(\overline{B})$.



- La somme des probabilités des chemins qui mènent à un même événement est égale à la probabilité de cet événement.
  Par exemple,
  $p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = p(A) \times p_A(B) + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B)$.



a. Recopiez et complétez l'arbre pondéré ci-dessous.



b. En déduire un tableau croisé des probabilités de A et B.

c. Recopiez et complétez l'arbre pondéré ci-dessous.