

E1 On se propose de démontrer que dans un triangle rectangle, la médiane issue de l'angle droit est de longueur égale à la moitié de l'hypoténuse. Considérons un triangle ABC rectangle en C et soit O le milieu de $[AB]$.

- a. Montrez que $\overrightarrow{CO} = \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2}$.
 b. En déduire que $CO = \frac{AB}{2}$.

E2 Soit ABC un triangle tel que $AB = 5$, $AC = 8$ et $BC = 6$.

- a. Calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
 b. Soit I le milieu de $[BC]$. Montrez que $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
 c. En déduire AI .
 d. Soit J le milieu de $[AC]$. Calculez de même BJ .
 e. Soit K le milieu de $[AB]$. Calculez de même CK .

E3 Dans chacun des cas suivants, calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- a. $AB = 4$, $AC = 5$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$
 b. $AB = 4$, $AC = 6$, $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$
 c. $AB = 6$, $AC = 7$, $\widehat{BAC} = \frac{3\pi}{4}$
 d. $AB = 9$, $AC = 12$, $\widehat{BAC} = \frac{143\pi}{3}$

E4 Dans chacun des cas suivants, déterminez une mesure de l'angle \widehat{BAC} comprise entre 0 et π .

- a. $AB = 3$, $AC = 2$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3\sqrt{2}$
 b. $AB = 3$, $AC = 5$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -7,5$
 c. $AB = 3$, $AC = 9$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{27\sqrt{3}}{2}$

E5 Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB = 5$. Calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

E6 Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $AB = 5$ et $\widehat{BAC} = 120^\circ$.

- a. Calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
 b. Calculez $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ en utilisant $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.
 c. Montrez que $BC = 5\sqrt{3}$.

E7 Soit $ABCD$ un carré de côté 4 cm et de centre O . Soit I le milieu de $[AB]$.

- a. Calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ de deux façons.
 b. Calculez $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OC}$.

E8 Soit $ABCD$ un losange de côté 6 cm et de centre O tel que $\widehat{ABC} = 30^\circ$.

- a. Calculez $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
 b. Calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
 c. Montrez que $AC = 6\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.
 d. En déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 18(2 - \sqrt{3})$.
 e. Déterminez une mesure de l'angle \widehat{BAC} en degrés.
 f. Montrez que $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$.

E9 Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $BC = 8$ et $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Démontrez que ABC est un triangle rectangle.

E10 Soit ABC un triangle tel que $AB = 7$, $AC = 7\sqrt{3}$ et $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Démontrez que ABC est un triangle isocèle.

E11 Soit ABC un triangle tel que $AB = \sqrt{2}$, $AC = \sqrt{10}$ et $BC = 2$. Déterminez une mesure de l'angle \widehat{ABC} .

E12 Soit ABC un triangle tel que $a = BC = \sqrt{3}$, $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{6}$ et $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{4}$.

- a. Montrez que $b^2 - c^2 = 3 - 3c$.
 b. Montrez que $b^2 - c^2 = \sqrt{6}b - 3$.
 c. En déduire $b = \frac{6 - 3c}{\sqrt{6}}$.
 d. Remplacez b dans l'équation $b^2 - c^2 = 3 - 3c$ et résolvez l'équation obtenue en c .
 e. Montrez que $b = \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.
 f. En déduire $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.