Puissances

Définition 1. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. La puissance n-ième de a est notée a^n et est définie par :

$$a^0 = 1 \qquad a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

E1
a. Donnez l'écriture en puissance de 10 : un millier , une dizaine de millions , une centaine de milliards, le dixième du centième, le millième du millième, le centième du centième, le micro, le nano, le mega, le giga, le tera.
b. Donnez l'écriture décimale des puissances de 2 de 1 à 2^{10}.

E2 Calculez.

a. 2^5 **b.** 3^4 **c.** 5^0 **d.** 5^1
e. $(-2)^5$ **f.** $(-3)^4$ **g.** $(-3)^3$ **h.** $(-2)^4$
i. -5^2 **j.** -5^3 **k.** $\frac{1}{2^3}$ **l.** $\frac{1}{(-3)^2}$

Définition 2. Un carré parfait est un nombre qui peut s'écrire sous la forme a^2 avec $a \in \mathbb{N}$.

E3 Donnez les carrés parfaits de 0 à 15^2.

Nombres décimaux

Définition 3. Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

E4 Démontrez par l'absurde que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal en utilisant la définition et le critère de divisibilité par 3.

Méthode 1. Pour déterminer si un nombre est décimal, il suffit :
- de vérifier qu'on peut l'écrire sous forme d'une fraction dont le dénominateur est un puissance de 10
- ou de l'écrire sous forme irréductible et de vérifier si le dénominateur ne comporte que des 2 et des 5.

Dans le cas contraire le nombre est non décimal.

E5 Écrivez les nombres suivants sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$:

a. $\frac{2}{5}$ **b.** $\frac{3}{2}$ **c.** $\frac{3}{4}$
d. $\frac{1}{8}$ **e.** $\frac{16}{50}$ **f.** $\frac{9}{25}$
g. $3{,}2$ **h.** $0{,}032$ **i.** 32×10^{-3}

E6 Montrez la nature des nombres suivants (décimal ou non décimal) :

a. $\frac{3}{15}$ **b.** $\frac{2}{12}$ **c.** $\frac{5}{15}$ **d.** $\frac{3}{12}$ **e.** $\frac{9}{12}$
f. $\frac{12}{9}$ **g.** $\frac{21}{14}$ **h.** $\frac{49}{14}$ **i.** $\frac{27}{54}$ **j.** $\frac{14}{49}$

Définition 4. L'écriture d'un nombre décimal en notation scientifique est la forme

$$a \times 10^n$$

avec $a \in \mathbb{D}$, $n \in \mathbb{Z}$ et tel que $1 \leqslant a < 10$.

E7 Écrivez les nombres suivants en notation scientifique :

a. $0{,}000\,7$ **b.** $700\,000$ **c.** $0{,}07$ **d.** $7\,000$
e. $0{,}032$ **f.** $32\,000$ **g.** 320 **h.** $0{,}003\,2$
i. $0{,}234\,5$ **j.** $2\,345$ **k.** $234{,}5$ **l.** $23{,}45$

Racine carrée

Propriété 1. Soit a un réel positif. Alors $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a$.

E8 Calculez.

a. $\sqrt{98^2}$ **b.** $(\sqrt{98})^2$ **c.** $\sqrt{2 \times 98}$ **d.** $\sqrt{\frac{98}{2}}$
e. $\sqrt{50^2}$ **f.** $(\sqrt{50})^2$ **g.** $\sqrt{2 \times 50}$ **h.** $\sqrt{\frac{50}{2}}$
i. $\sqrt{27^2}$ **j.** $(\sqrt{27})^2$ **k.** $\sqrt{3 \times 27}$ **l.** $\sqrt{\frac{27}{3}}$

E9 Calculez.

a. $\sqrt{0{,}64}$ **b.** $\sqrt{1\,600}$ **c.** $\sqrt{0{,}36}$ **d.** $\sqrt{0{,}04}$
e. $\sqrt{1{,}69}$ **f.** $\sqrt{0{,}09}$ **g.** $\sqrt{1{,}21}$ **h.** $\sqrt{14\,400}$

Nombres rationnels

Définition 5. Un nombre *rationnel* est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ et b non nul. L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

E10 Démontrez par l'absurde que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel autrement dit qu'il ne peut pas s'écrire sous forme d'une fraction irréductible. Utilisez pour cela deux fois la propriété suivante : « Si a^2 est pair alors a est pair ».

Définition 6. Un nombre est dit *irrationnel* s'il n'est pas rationnel. $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ et $\pi \approx 3{,}14$ sont deux exemples de nombres irrationnels.

E11 Soient x un nombre irrationnel et $\frac{a}{b}$ un nombre où a et b sont des entiers. Démontrez par l'absurde qu'il n'existe pas de nombre $\frac{c}{d}$ où c et d sont des entiers tels que $x \times \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.