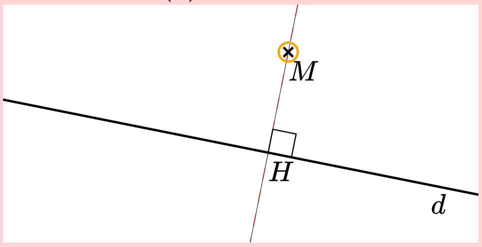
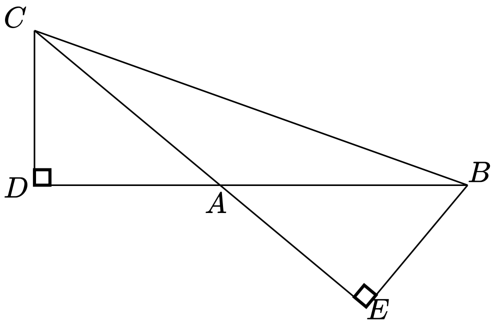
Projeté orthogonal

Définition 1. Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite (d) est le point d'intersection H de la droite (d) et de la perpendiculaire à (d) passant par M.



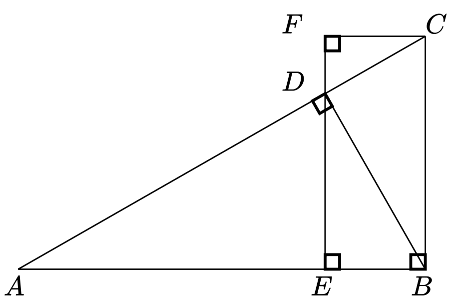
E1



Reproduisez la figure à main levée, puis indiquez les projetés orthogonaux si ce sont des points nommés. Dans le cas contraire, tracez à main levée le projeté orthogonal et lui donner un nom.

a. B sur (CD) **b.** A sur (BC)
c. C sur (AB) **d.** B sur (AC)
e. A sur (BE) **f.** B sur (CE)
g. E sur (CA) **h.** D sur (BC)
i. D sur (EB) **j.** E sur (CD)
k. E sur (BC)

E2



Les points qui semblent alignés le sont. Mêmes consignes que dans l'exercice précédent.

a. C sur (BD) **b.** B sur (AC)
c. B sur (DF) **d.** E sur (DC)
e. D sur (BC) **f.** D sur (AB)
g. A sur (EB) **h.** F sur (AB)

Propriété 1. Dans un triangle, le projeté orthogonal d'un sommet sur le côté opposé est le pied de la hauteur issue de ce sommet.

E3

a. Placez dans un repère orthonormé les points $A(-3\,;\,2)$, $B(6\,;\,-1)$ et $C(-1\,;\,-2)$.

b. Déterminez par lecture graphique les coordonnées du point D pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

c. Déterminez par lecture graphique les coordonnées du point E pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABC.

d. Déterminez par lecture graphique le point de concours des trois hauteurs du triangle ABC.

e. Notons F le point d'intersection de (AH) et (BC). Montrez que le projeté orthogonal de A sur (BC) est F.

E4 Tracer un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 3\,\text{cm}$ et $AC = 4\,\text{cm}$. Notons H le projeté orthogonal de A sur (BC).

a. Calculez l'aire du triangle ABC.

b. Calculez BC.

c. Déterminez une autre manière de calculer l'aire du triangle ABC pour en déduire la longueur de AH.

d. Calculez BH.

e. Calculez l'aire du triangle AHC.

Indications : $2{,}4 \times 1{,}8 = 4.32$ $2{,}4^2 = 5{,}76$ $7{,}68 \div 2 = 3{,}84$ $\sqrt{3{,}24} = 1{,}8$ $\sqrt{10{,}24} = 3{,}2$ $12 \div 5 = 2{,}4$ $4{,}32 \div 2 = 2{,}16$ $3{,}2 \times 2{,}4 = 7{,}68$

Définition 2. La distance entre un point et une droite est la longueur du segment joignant le point à son projeté orthogonal sur la droite.

E5 Soient $[Ox)$ et $[Oy)$ deux demi-droites d'origine un point O du plan et soit A un point distinct de O et équidistant de ces deux demi-droites. Soient M et N les projetés orthogonaux de A sur $[Ox)$ et $[Oy)$ respectivement.

a. Démontrez que $OM^2 = ON^2$.

b. Démontrez que (OA) est la bissectrice de l'angle $\widehat{MON}$.

E6 ABC est un triangle tel que $AB = 8\,\text{cm}$, $AC = 11\,\text{cm}$ et $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Le point H est le projeté orthogonal de B sur (AC).

a. Calculer BH.

b. Calculer l'aire du triangle ABC.

c. Calculer la distance du point C à (AB).

d. Calculer la distance du point C à (BH).

Indications : $sin(30^\circ) = cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$ et $sin(60^\circ) = cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

E7 ABC est un triangle tel que $AB = 8$, $BC = 4$ et $AC = 4\sqrt{3}$. Soit D le point de $[AC)$ tel que $AD = 12$. Soit E le point de $[AB)$ tel que $\widehat{AED} = 60^\circ$.

a. Démontrez que C est le projeté orthogonal de B sur (AD).

b. Sachant que $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$, démontrez que les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

c. Montrez que $DE = 4\sqrt{3}$.