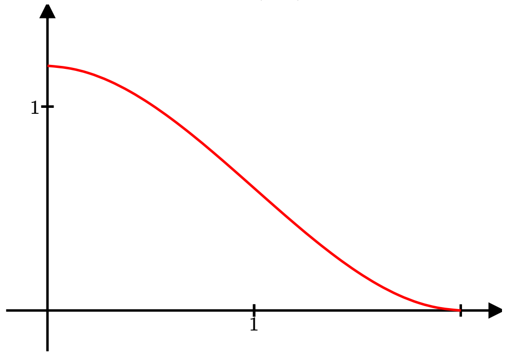
E1 On souhaite modéliser le profil d'un toboggan, de hauteur $1{,}2\,\mathrm{m}$ et de longueur $2\,\mathrm{m}$, par la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f dont l'expression est de de la forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c et d sont des réels.



On se propose de déterminer les valeurs des coefficients a, b, c et d tels que : la courbe $\mathscr{C}$ passe par les points $A(0\,;\,1{,}2)$, $B(2\,;\,0)$; en ces deux points A et B, la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ soit horizontale.

a. Exprimez $f'(x)$ en fonction de x et de paramètres.
b. Déterminez $f(0)$ et $f'(0)$.
c. En déduire c et d.
d. Que vaut $f(2)$ et $f'(2)$?
e. Montrez que les réels a et b sont les solutions du système d'équations suivant : $\begin{cases} 12a + 4b = 1{,}2 \\ 8a + 4b + 1{,}2 = 0 \end{cases}$
f. Résoudre le système d'équations précédent.
g. En déduire l'expression de $f(x)$.

E2 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ et admet pour représentation graphique la courbe $\mathscr{P}$. tels que : elle coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse 3 ; elle coupe l'axe des ordonnées au point B d'ordonnée 2 ; elle admet pour tangente en B la droite d'équation $y = 2x + 2$.

a. Déterminez a, b et c.
b. Indiquez l'abscisse du second point d'intersection de la courbe $\mathscr{P}$ avec l'axe des abscisses.

E3 On considère la suite de listes (E_n) définie par $E_1 = [1, 1]$ et pour tout entier naturel n, E_{n+1} est obtenu à partir de E_n en insérant entre chaque terme $E_n(i)$ et $E_n(i+1)$ la somme $E_n(i) + E_n(i+1)$. Voici les premiers termes de la suite (E_n) :

```
E_1=[1, 1]
E_2=[1, 2, 1]
E_3=[1, 3, 2, 3, 1]
E_4=[1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1]
E_5=[1, 5, 4, 7, 3, 8, 5, 7, 2, 7, 5, 8, 3, 7, 4,
```

Notons a_n le nombre de termes de la liste E_n, S_n la somme des termes de la liste E_n.
On a donc $a_1 = 2$, $S_1 = 2$, $a_2 = 3$, $S_2 = 4$, $a_3 = 5$, $S_3 = 10$, $a_4 = 9$, $S_4 = 28$, $a_5 = 17$, $S_5 = 82$.

a. Déterminez E_6, a_6 et S_6.
b. Expliquez pourquoi que la suite (b_n) définie par $b_n = a_n - 1$ est une suite géométrique de raison 2.
c. En déduire l'expression de a_n en fonction de n.
d. On admet que pour tout n, $S_{n+1} = 3S_n - 2$. Quelle est la nature de la suite (T_n) définie pour tout entier naturel non nul par $T_n = S_n - 1$?
e. Exprimez T_n en fonction de n.
f. En déduire l'expression de S_n en fonction de n.
g. Calculez la somme des 10 premiers termes de la suite (b_n).
h. En déduire la somme des 10 premiers termes de la suite (a_n).
i. Calculez la somme des 10 premiers termes de la suite (T_n).
j. En déduire la somme des 10 premiers termes de la suite (S_n).