E1 On considère la fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-10		-5		-4		-1		7
Variations de f	4	↗	5	↘	0	↘	-2	↗	-1

a. Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.
b. Déterminez les extremums de f sur $[-10\,;\,7]$.

E2

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a et b deux réels de cet intervalle.
f conserve l'ordre des nombres a et b signifie que :
- si $a \leqslant b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$;
- si $a \geqslant b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$.

On dit aussi que f conserve l'ordre des nombres a et b si $f(a)$ et $f(b)$ sont dans le même ordre que a et b.

Exemple 1 :
Considérons une fonction f telle que l'image de 3 est 2 et l'image de 6 est 4.

Recopiez et complétez les phrases suivantes :

On a $f(\_\_\_) = \_\_\_$ et $f(\_\_\_) = \_\_\_$
De plus $3 < 6$ et $2\_\_\_4$.
D'où $3 < 6$ et $f(3)\_\_\_f(6)$.
Donc f ____________ l'ordre des nombres 3 et 6.

Exemple 2 :
Considérons maintenant une fonction g telle que l'image de 7 est 12 et l'image de 4 est 15.

Recopiez et complétez les phrases suivantes :

On a $g(\_\_\_) = \_\_\_$ et $g(\_\_\_) = \_\_\_$
De plus $7\_\_\_4$ et ___ ___ ___.
D'où $7\_\_\_4$ et ___ ___ ___.
Donc g __________________ l'ordre des nombres 7 et 4.

E3 Dans chacun des cas suivants, déterminez si la fonction f conserve l'ordre des nombres de départ.
a. $f(-5) = 3$ et $f(-7) = 0$.
b. $f(2{,}15) = 5{,}236$ et $f(2{,}1) = 5{,}3$.
c. $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{4}{7}$ et $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2{,}5}{3{,}5}$.
d. $f(10^{-4}) = 6 \times 10^{-5}$ et $f\left(10^{-3}\right) = 0{,}000\,51$.

E4 La courbe d'une fonction f passe par les points de coordonnées $(3\,;\,6{,}2)$ et $(-4\,;\,6{,}018)$.
La fonction f conserve-t-elle l'ordre des nombres de départ entre ces deux points ?

E5

Propriété : Considérons une fonction f de la forme $f(x) = ax + b$, où a et b sont des réels.
- Si $a > 0$, alors f est strictement croissante.

x	$-\infty$		$+\infty$
Variations de $x \mapsto ax+b$ pour $a>0$	$-\infty$	↗	$+\infty$

- Si $a < 0$, alors f est strictement décroissante.

x	$-\infty$		$+\infty$
Variations de $x \mapsto ax+b$ pour $a<0$	$+\infty$	↘	$-\infty$

- Si $a = 0$, alors f est constante.

Dans chaque cas, déterminez si la fonction f est croissante, décroissante ou constante.

$f_1(x) = 3x + 2$ $\qquad f_2(x) = -2x + 5$
$f_3(x) = \dfrac{x}{2}$ $\qquad f_4(x) = -0{,}5$
$f_5(x) = 6 - 4x$ $\qquad f_6(x) = -2 + x$
$f_7(x) = 6x + 3 - 8x$ $\qquad f_8(x) = \dfrac{4x-3}{2}$
$f_9(x) = -2(3 - 4x)$ $\qquad f_{10}(x) = 6x^2 - 3(2x-4)^2$

E6

Définition : Une fonction est dite croissante sur un intervalle I si elle conserve l'ordre des nombres sur cet intervalle.

On se propose de démontrer la propriété précédente en utilisant cette définition.
a. Soit $f(x) = ax + b$ avec $a > 0$.
Montrer que si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$.
b. Soit $f(x) = ax + b$ avec $a < 0$.
Montrer que si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$.

E7

Propriété : La fonction carrée $x \longmapsto x^2$ est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

a. Comparez les nombres $(-2{,}01)^2$ et $(-2{,}1)^2$ en utilisant les variations de la fonction carrée.
b. Comparez les nombres $\left(\frac{4}{83}\right)^2$ et $\left(\frac{4}{85}\right)^2$ en utilisant les variations de la fonction carrée.
c. Donnez deux nombres a et b de signes contraires tels que la fonction carrée conserve l'ordre des nombres a et b.
d. Donnez deux nombres a et b de signes contraires tels que la fonction carrée change l'ordre des nombres a et b.