

Définition : Une variable aléatoire réelle généralement notée X est une fonction qui associe à chaque élément d'un univers Ω un nombre réel.

- $\{X = 1\}$ est l'événement "la variable aléatoire X prend la valeur 1".
- On note $P(X = 1)$ la probabilité de l'événement $\{X = 1\}$.
- $\{X \leq 1\}$ est l'événement "la variable aléatoire X prend une valeur inférieure ou égale à 1".
- On note $P(X \leq 1)$ la probabilité de l'événement $\{X \leq 1\}$.

E1 Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules vertes. On tire deux boules simultanément. On note X la variable aléatoire qui associe le nombre de boules rouges tirées.

a. Résumez l'univers Ω de l'expérience aléatoire dans un tableau à double entrée.

On pourra noter R_1 la boule rouge n°1, R_2 la boule rouge n°2, R_3 la boule rouge n°3, V_1 la boule verte n°1 et V_2 la boule verte n°2.

b. Calculez $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.

E2 On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. On note X la variable aléatoire qui associe le nombre de rois tirés.

a. Décrire les événements suivants :

$$\{X = 1\} \quad \{X < 2\}$$

b. Déterminez $P(X = 5)$.

Définition : On appelle loi de probabilité d'une variable aléatoire X la donnée de l'ensemble des valeurs possibles de X et des probabilités associées.

E3 Lors d'un jeu, il est possible de perdre 1€ avec une probabilité de 0,3, de ne rien gagner ni perdre avec une probabilité de 0,4 et de gagner 2€ avec une probabilité de 0,3.

Considérons une variable aléatoire X . Complétez le tableau suivant de sa loi de probabilité :

x_i			
$P(X = x_i)$			

Déterminez les probabilités suivantes :

a. $P(X < 0)$. b. $P(X \geq 0)$.

E4 On considère la loi de probabilité résumée dans le tableau suivant :

a	0	1	2	3	4
$P(X = a)$	0,2	0,3	0,1	0,2	p

a. Calculez p . b. Calculez $P(X = 5)$. c. Calculez $P(X \geq 2)$.

E5 On considère une variable aléatoire X prenant les valeurs 0 à 10 et telle que pour n de 0 à 9, $P(X = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}$. Montrez que $u_n = P(X = n)$ est une suite géométrique. En déduire $P(X = 10)$.

E6 Un jeu d'argent consiste à miser 2€ puis à tirer une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes :

- si la carte est un As, on récupère 5€ ;
- si la carte est une figure, on récupère 3€ ;
- dans les autres cas, on perd sa mise.

On note X la variable aléatoire qui associe le gain en euros.

Dressez le tableau de la loi de probabilité de X .

E7 Le temps d'écoute d'un morceau enregistré dans un smartphone est résumé ci-dessous.

Morceau	A	B	C	D	E
Temps (min)	2'30	3'	2'30	4'45	3'

On note X la variable aléatoire qui associe le temps d'écoute en minutes d'un morceau choisi au hasard.

Dresser le tableau de la loi de probabilité de X .

E8 Un sac contient les 26 lettres de l'alphabet. On tire deux lettres au hasard. On gagne 5€ par voyelle tirée et on perd 1€ par consonne tirée. On note X la variable aléatoire qui associe le gain obtenu.

a. Construire un arbre pondéré décrivant l'expérience aléatoire.

b. Déterminez la loi de probabilité de X .

Définition : On appelle espérance mathématique de la variable aléatoire X le nombre réel $E(X)$ défini par

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \dots + x_n \times P(X = x_n) \text{ où les } x_i \text{ sont les valeurs possibles de } X.$$

E9 On considère une variable aléatoire X prenant les valeurs 1, 2, et 3 et telle que $P(X = 1) = 0,2$, $P(X = 2) = 0,3$, $P(X = 3) = 0,5$.

a. Calculez $P(X \geq 2)$. b. Calculez $E(X)$.

E10 Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules vertes. On tire une boule au hasard. On note X la variable aléatoire qui associe le gain obtenu : si on tire une boule rouge, on perd 10€, sinon on gagne a €. Le jeu est dit équitable si l'espérance mathématique de X est nulle.

Combien doit valoir a pour que le jeu soit équitable ?

E11 Dans un jeu de loterie, une roue est divisée en quatre secteurs de même angle. Un secteur rapporte 60€, un autre 10€, et les deux autres rapportent 5€. La mise est de 20€. On note X la variable aléatoire qui associe le gain obtenu. Le jeu est-il équitable ?