Définition Deux évènements sont dits indépendants si la probabilité de l'un ne dépend pas de la réalisation de l'autre. Autrement dit si la probabilité de l'un ne change pas si l'autre est réalisé.

E1 Dans chacune des situations suivantes, dire si les évènements A et B sont indépendants. Justifiez.

a. On tire une carte d'un jeu de 52 cartes. A est l'évènement "tirer un roi" et B est l'évènement "tirer un coeur".

b. On lance un dé équilibré à six faces et on regarde la face obtenue. A est l'évènement "obtenir un 6" et B est l'évènement "obtenir un nombre pair".

Soient A et B deux évènements d'un espace probabilisé (Ω, P).

Propriété On a les équivalences suivantes :

i. A et B sont indépendants

ii. $P_A(B) = P(B)$

iii. $P_B(A) = P(A)$

iv. $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

E2

a. Démontrez que si $P_A(B) = P(B)$ alors $P_B(A) = P(A)$.

b. Démontrez que si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ alors A et B sont indépendants.

Propriété Soient A et B deux évènements d'un espace probabilisé (Ω, P).
Pour déterminez si A et B sont indépendants, il suffit :

1. de déterminez $P(A)$ et $P(B)$;

2. de déterminez $P(A \cap B)$;

3. de vérifiez si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Si cette égalité est vérifiée, alors A et B sont indépendants.

E3 On lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On considère les évènements suivants :

A : "obtenir un nombre pair"

B : "obtenir un multiple de trois"

C : "obtenir un nombre supérieur ou égal à 4"

Déterminez si les couples d'évènements suivants sont indépendants :

a. A et B **b.** A et C **c.** B et C

E4 Un hopital est divisé en trois services. Le premier service accueille 450 patients dont 180 femmes, le deuxième service accueille 250 patients dont 102 femmes et le troisième service accueille 300 patients dont 118 femmes. On choisit un patient au hasard. On note les évènements suivants :

F : "le patient est une femme"

A : "le patient est dans le premier service"

B : "le patient est dans le deuxième service"

C : "le patient est dans le troisième service"

a. Les évènements F et A sont-ils indépendants ?

b. Les évènements F et B sont-ils indépendants ?

c. Les évènements F et C sont-ils indépendants ?

E5 Un système de sécurité pour une installation industrielle comprend deux alarmes incendie identiques, numérotées 1 et 2.
On note :

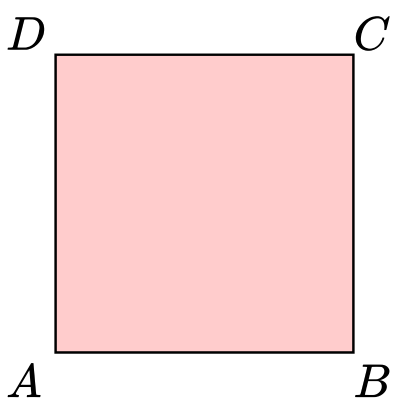
- A_1 l'évènement "l'alarme 1 se déclenche incorrectement avant la fin de l'année"
- A_2 l'évènement "l'alarme 2 se déclenche incorrectement avant la fin de l'année".

On suppose que les deux évènements A_1 et A_2 sont indépendants et que $P(A_1) = P(A_2) = 0{,}1$.

- Lorsque les deux alarmes sont configurées en mode redondant, le système de sécurité émet une fausse alerte uniquement si les deux alarmes se déclenchent incorrectement en même temps.
- Lorsque les deux alarmes sont utilisées de manière indépendante, une fausse alerte est émise si au moins l'une des deux alarmes se déclenche incorrectement.

Calculez la probabilité d'une fausse alerte dans chacun des deux cas.

E6 Un robot est programmé pour se déplacer sur le carré $ABCD$ suivant.



Le robot se déplace de manière aléatoire en suivant les règles suivantes :

- Le robot part de A.
- À chaque étape, le robot se déplace d'un sommet à un autre sommet adjacent.
- La probabilité qu'il fasse un déplacement horizontal est toujours $\frac{2}{3}$.
- Les mouvements successifs du robot sont indépendants.

Quelle est la probabilité la plus grande entre arriver en C en deux ou en quatre mouvements ? Justifiez par le calcul de probabilités.