

Caractériser alignement et parallélisme

Propriété : Trois points A , B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires.

E1 Pour chaque égalité, justifiez que les points sont alignés en transformant l'égalité sous la forme $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ (indiquez la valeur de k).

- | | |
|---|--|
| a. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. | b. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC}$. |
| c. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CA}$. | d. $2\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$. |
| e. $-3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CA}$. | f. $\frac{2}{7}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. |

Méthode : Pour déterminer si trois points A , B , C sont alignés, il suffit :

1. de calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$;

2. de calculer le déterminant suivant :

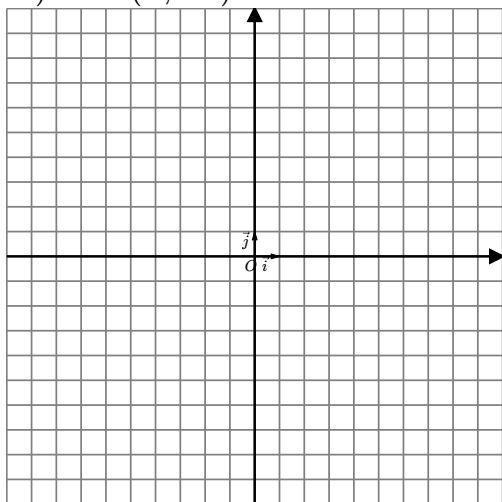
$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} x_{\overrightarrow{AB}} & x_{\overrightarrow{AC}} \\ y_{\overrightarrow{AB}} & y_{\overrightarrow{AC}} \end{vmatrix} = x_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{AC}} - y_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{AC}} ;$$

3. les points A , B et C sont alors alignés si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$.

E2 Pour chaque cas, déterminez si les points A , B et C sont alignés.

- | |
|--|
| a. $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 3,5 \end{vmatrix}$. |
| b. $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 18 & 22 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$. |
| c. $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} \sqrt{15} & 10 \\ \sqrt{3} & 2\sqrt{5} \end{vmatrix}$. |

E3 On considère les points suivants dans un repère orthonormé : $A(-9; -1)$, $B(-3; 1)$, $C(6; 4)$, $D(-2; 5)$, $E(7; -1)$, $F(10; -3)$, $G(-6; -7)$ et $H(2; -1)$.



Pour chaque cas déterminez si les points sont alignés ou non en calculant le déterminant.

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| a. A , B et C . | b. G , B et D . |
| c. D , E et F . | d. C , H et G . |

Méthode : Pour déterminer si deux droites (AB) et (CD) sont parallèles, il suffit :

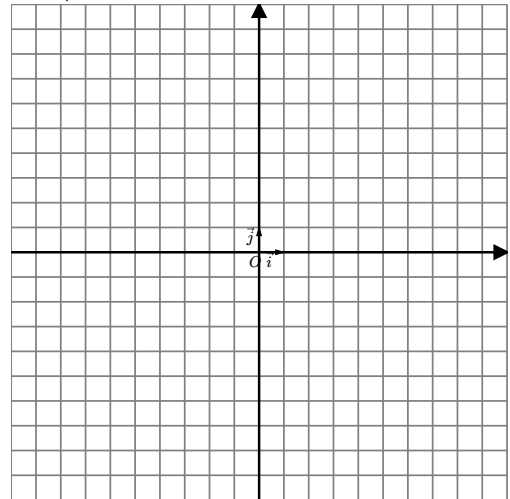
1. de calculer les coordonnées des vecteurs directeurs

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} ;$$

2. les droites (AB) et (CD) sont alors parallèles si et seulement si

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0.$$

E4 On considère les points suivants dans un repère orthonormé : $A(-6; -2)$, $B(-2; 2)$, $C(2; -4)$, $D(8; 2)$, $E(4; 1)$, $F(6; -2)$, $G(1; -1)$ et $H(2; 1,5)$.



Pour chaque cas dire si les droites sont parallèles ou non en calculant le déterminant.

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| a. (AB) et (CD) . | b. (BC) et (EF) . |
| c. (BG) et (EF) . | d. (GH) et (CE) . |

E5 On considère deux points $A(-3; 1)$ et $B(2; 4)$ dans un repère orthonormé. Dans chaque cas, déterminez si le point D_i appartient à la droite (AB) .

- | |
|---|
| a. $D_1(9; 8,2)$. |
| b. $D_2(\frac{5\sqrt{3}}{3} - 3; 1 + \sqrt{3})$. |
| c. $D_3(1; 5)$. |

E6 On considère les points $A(-4; 2)$, $B(3; 2)$ et $C(5; -4)$.

a. M est le point tel que $AM = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$. Calculez ses coordonnées.

b. N est le point tel que $CN = \frac{1}{5}\overrightarrow{CA}$. Calculez ses coordonnées.

c. Démontrez que les droites (MN) et (BC) sont parallèles en calculant le déterminant de deux vecteurs.

d. Calculez $\frac{MN}{BC}$ en calculant les distances MN et BC .

e. Quelles remarques peut-on faire sur ces résultats ?