Propriétés : Soit a, b, n, m des entiers relatifs tels que $a \neq 0$ et $b \neq 0$. On a :

$a^0 = 1$ $\quad a^1 = a$ $\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a^n \times a^m = a^{n+m}$ $\quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $\quad (a^n)^m = a^{n \times m}$

$a^n \times b^n = (a \times b)^n$ $\quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

E1 Calculez les valeurs des expressions suivantes :

2^3 $\quad 3^{-2}$ $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ $\quad 2^3 \times 2^4$

$2^3 \div 2^4$ $\quad 2^3 \times 3^3$ $\quad 2^4 \div 3^4$ $\quad \left(\frac{2}{5}\right)^3$

E2 Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{12}x^2 + x + 1$$

Montrez que $f'(x) = f(x)$ pour $x = -1, 0, 1$ et 2.
A-t-on $f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?

Propriété et définition : Il existe une unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$. Cette fonction est appelée la fonction exponentielle et est notée exp :

$$\begin{array}{rcl} \exp : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x) \end{array}$$

$$\exp(0) = 1 \qquad (\exp)' = \exp$$

E3 On se propose de démontrer que la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Pour cela considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \exp(x) \times \exp(-x)$$

a. Montrez que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
b. En déduire que $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
c. Concluez que $exp(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
d. Que peut-on en déduire sur les variations de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$?

Propriété : La fonction exponentielle est strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

E4 On se propose de démontrer que pour tous réels a et b, on a $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.
Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \exp(a+x) \times \exp(b-x)$$

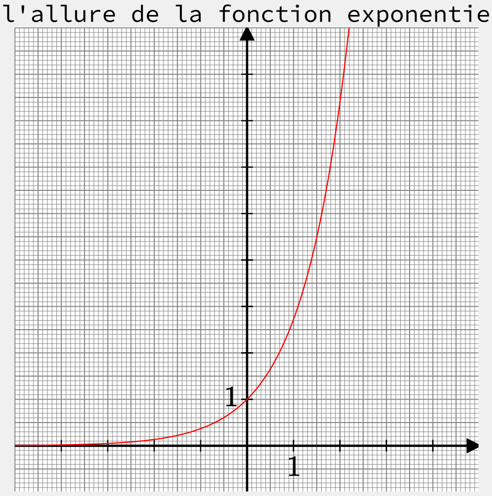
a. Montrez que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
b. Calculez $f(0)$, $f(b)$ puis concluez.

Propriétés : Pour tous a et b dans $\mathbb{R}$, on a :

$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$

$\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$ $\qquad \exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$

Voici l'allure de la fonction exponentielle :



E5 On admet que $\exp(-3) \approx 0{,}05$ et $\exp(-2.5) \approx 0{,}08$.
Complétez le tableau de valeurs suivant avec des valeurs approchées par lecture graphique jusqu'à $x = 2$. Pour les deux dernières valeurs, utilisez la propriété $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3
$\exp(x)$	$0{,}05$	$0{,}08$											

Définition : On note e le nombre $\exp(1)$.
On a :

$$\mathrm{e} = 2{,}718\,2\ldots$$

e est un nombre irrationnel.

E6
a. Montrez que $\exp(2) = \mathrm{e}^2$.
b. Montrez que $\exp(-1) = \frac{1}{\mathrm{e}}$.
c. Exprimez $\exp(3)$ en fonction de e. Justifiez.

Propriété : Pour tout entier relatif n, on a :

$$\exp(n) = \mathrm{e}^n$$

Par prolongement on écrit pour tout réel x :

$$\exp(x) = \mathrm{e}^x$$

E7 Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = \exp(1{,}2n)$.
Montrez que la suite (u_n) est une suite géométrique et donnez son premier terme et sa raison.

Propriété : Pour tout réel a et tout entier naturel n, on a :

$$\exp(an) = (\exp(a))^n$$

Par prolongement on écrit :

$$\mathrm{e}^{an} = (\mathrm{e}^a)^n$$