E1 On se propose de démontrer que dans un triangle rectangle, la médiane isse de l'angle droit est de longueur égale à la moitié de l'hypoténuse. Considérons un triangle ABC rectangle en C et soit O le milieu de $[AB]$.

a. Montrez que $\overrightarrow{CO}=\dfrac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2}$.

b. En déduire que $CO=\dfrac{AB}{2}$.

E2 Soit ABC un triangle tel que $AB=5$, $AC=8$ et $BC=6$.

a. Calculez $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

b. Soit I le milieu de $[BC]$. Montrez que $2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

c. En déduire AI.

d. Soit J le milieu de $[AC]$. Calculez de même BJ.

e. Soit K le milieu de $[AB]$. Calculez de même CK.

E3 Dans chacun des cas suivants, calculez $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

a. $AB=4$, $AC=5$, $\widehat{BAC}=30^\circ$

b. $AB=4$, $AC=6$, $\widehat{BAC}=\dfrac{\pi}{3}$

c. $AB=6$, $AC=7$, $\widehat{BAC}=\dfrac{3\pi}{4}$

d. $AB=9$, $AC=12$, $\widehat{BAC}=\dfrac{143\pi}{3}$

E4 Dans chacun des cas suivants, déterminez une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ comprise entre 0 et π.

a. $AB=3$, $AC=2$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\sqrt{2}$

b. $AB=3$, $AC=5$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-7{,}5$

c. $AB=3$, $AC=9$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\dfrac{27\sqrt{3}}{2}$

E5 Soit ABC un trangle équilatéral tel que $AB=5$. Calculez $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

E6 Soit ABC un trangle isocèle en A tel que $AB=5$ et $\widehat{BAC}=120^\circ$.

a. Calculez $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

b. Calculez $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ en utilisant $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$.

c. Montrez que $BC=5\sqrt{3}$.

E7 Soit $ABCD$ un carré de côté $4\,\text{cm}$ et de centre O. Soit I le milieu de $[AB]$.

a. Calculez $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ de deux façons.

b. Calculez $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OC}$.

E8 Soit $ABCD$ un losange de côté $6\,\text{cm}$ et de centre O tel que $\widehat{ABC}=30^\circ$.

a. Calculez $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

b. Calculez $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.

c. Montrez que $AC=6\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

d. En déduire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=18(2-\sqrt{3})$.

e. Déterminez une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ en degrés.

f. Montrez que $cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

E9 Soit ABC un triangle tel que $AB=4$, $BC=8$ et $\widehat{ABC}=60^\circ$. Démontrez que ABC est un triangle rectangle.

E10 Soit ABC un triangle tel que $AB=7$, $AC=7\sqrt{3}$ et $\widehat{BAC}=30^\circ$. Démontrez que ABC est un triangle isocèle.

E11 Soit ABC un triangle tel que $AB=\sqrt{2}$, $AC=\sqrt{10}$ et $BC=2$. Déterminez une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

E12 Soit ABC un triangle tel que $a=BC=\sqrt{(3)}$, $\widehat{ABC}=\dfrac{\pi}{6}$ et $\widehat{ACB}=\dfrac{\pi}{4}$.

a. Montrez que $b^2-c^2=3-3c$.

b. Montrez que $b^2-c^2=\sqrt{6}b-3$.

c. En déduire $b=\dfrac{6-3c}{\sqrt{6}}$.

d. Remplacez b dans l'équation $b^2-c^2=3-3c$ et résoudre l'équation obtenue en c.

e. Montrez que $b=\dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

f. En déduire $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.