Propriété 1. Si f est une fonction polynôme du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, alors $f(\alpha) = \beta$ est le *maximum* de f si $a < 0$ et le *minimum* de f si $a > 0$.

E1 Déterminez les coordonnées du sommet de la parabole et l'extremum.

a. $f(x) = 2(x-1)^2 + 2$ **b.** $f(x) = -3(x+2)^2 - 1$
c. $f(x) = -4(x-3)^2 + 3$ **d.** $f(x) = 5(x+4)^2 - 2$

Propriété 2. Si f est une fonction polynôme du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, alors sa parabole admet un axe de symétrie d'équation $x = \alpha$ où $\alpha = -\frac{b}{2a}$.

E2 A est un point de la parabole et S son sommet. Tracez la parabole de A à son symétrique par rapport à l'axe de symétrie de la parabole.

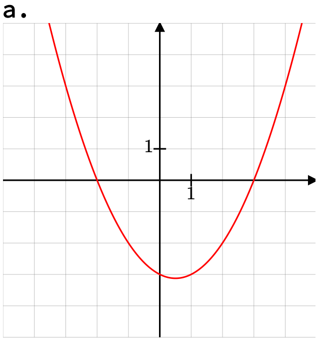
a. $S(1;2)$ et $A(2;3)$ **b.** $S(-2;-1)$ et $A(1;0)$
c. $S(3;3)$ et $A(5;2)$ **d.** $S(-4;-2)$ et $A(0;-1)$

Parabole et racine

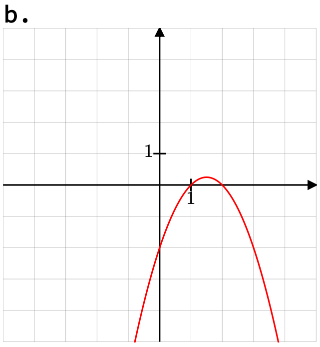
Propriété 3. Soit f une fonction polynôme du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$. Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les racines du polynôme $ax^2 + bx + c$ et sont les abscisses des points d'intersection de la parabole représentative de f avec l'axe des abscisses.

E3 Pour chacune des paraboles et par lecture graphique, déterminez combien de racines possède le polynôme du second degré et en donner les valeurs.

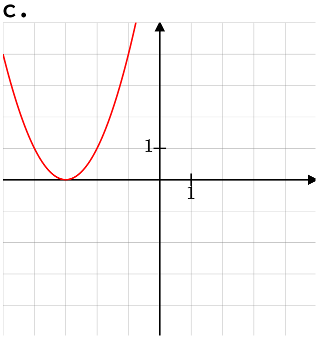
a.



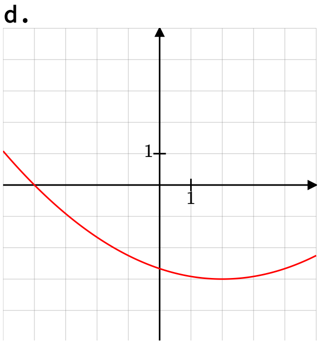
b.



c.



d.



Signe

Propriété 4. Le signe d'une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ dépend du signe de a et du signe du discriminant Δ du polynôme $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta > 0$, alors f est d'abord du signe de a sur $]-\infty; x_1]$ puis change de signe sur $[x_1; x_2]$ et redevient du signe de a sur $[x_2; +\infty[$ où x_1 et x_2 sont les racines du polynôme telles que $x_1 < x_2$.
- Si $\Delta \leqslant 0$, alors f est du signe de a.

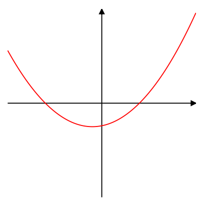
E4

a. $f(x) = 5(x+4)(x-6)$ **b.** $f(x) = 3(x+3)(x+5)$
c. $f(x) = -2(x-1)(x-2)$ **d.** $f(x) = -4(x-5)(x+2)$

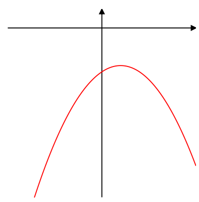
Déterminez le signe de f en fonction de x, vérifiez à l'aide d'un tableau de signe du produit.

E5 Analysez la parabole représentant une fonction polynôme du second degré pour déterminer le signe du discriminant Δ et du coefficient a.

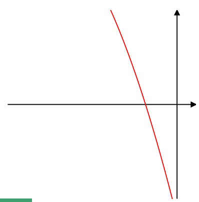
a.



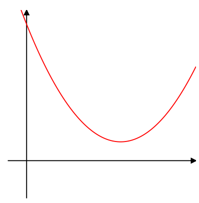
b.



c.



d.



E6 Résoudre les inéquations suivantes.

a. $-2(x-1)(x-2) \geqslant 0$ **b.** $-5(x-6)(x+3) < 0$
c. $3(x+3)(x+5) \leqslant 0$ **d.** $4(x+7)(x-9) > 0$

Équation du second degré

Méthode 1. Résoudre une *équation du second degré* de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0$$

avec $a \neq 0$:

1. Factorisation immédiate ou identité remarquable.
2. Racine évidente, produit et somme des racines.
3. Sinon, calcul du discriminant.

E7 Ramener les équations suivantes sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ puis résoudre l'équation.

a. $x^2 - 4x + 4 = 12$ **b.** $2x^2 - 3x = 5x$
c. $x^2 + 2x + 1 = 3x^2 - 5x + 2$ **d.** $3x^2 - 2x = x + 9$