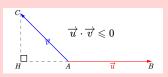
Produit scalaire

Définition 1. Soient \overrightarrow{u} et \overrightarrow{v} deux vecteurs du plan. Soient A, B et C trois points du plan tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$. Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB). On appelle produit scalaire de \overrightarrow{u} par \overrightarrow{v} et on note $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ le nombre réel défini par :

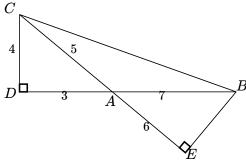
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = AB \times AH$$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = AB \times AH$$
 $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -AB \times AH$





0n considère la figure ci-dessous qui n'est pas à l'échelle mais où les points qui semblent alignés le sont vraiment.



Calculez les produits scalaires suivants :

- a. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}$
- b. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- c. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$

- d. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$
- e. $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EC}$
- f. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$

- $\mathbf{g} \cdot \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BA}$
- h. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$
- i. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA}$

Propriété 1. Soient \overrightarrow{u} , \overrightarrow{v} et \overrightarrow{w} trois vecteurs du plan et λ un nombre réel.

• Symétrie :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$$

• Linéarité :

$$(\lambda \overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \lambda (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot (\lambda \overrightarrow{v})$$

$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$$

Soit ABC un triangle tels que AB=2, BC=4 et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=10$. Calculez en utilisant les propriétés du produit scalaire :

- a. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$
- b. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}$
- c. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$
- d. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$

Soit ABC un triangle tels que AB=2,

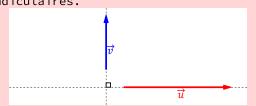
BC=4 et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=10$. Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC). Calculez les produits suivants en justifiant à l'aide des propriétés du produit scalaire:

- a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$
- b. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}$
 - c. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BA}$

- d. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$
- e. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ f. $(\overrightarrow{AC})^2$

Orthogonalité

Définition 2. Deux vecteurs non nuls sont dits orthogonaux si leurs directions sont perpendiculaires.



Propriété 2. Deux vecteurs non nuls \overrightarrow{u} et \overrightarrow{v} sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

lacktriangle On considère un carré ABCD de centre O. Parmi les produits scalaires suivants, lesquels sont nuls ? Justifiez.

- a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$
- b. $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB}$
- c. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$
- d. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OB}$

 $oxed{E5}$ ABCD est un parallélogramme. Dans chaque cas, précisez la nature de ABCD.

a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ b. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ c. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

Norme et produit scalaire

Propriété 3. On note \overrightarrow{u}^2 et on appelle carré $\overrightarrow{scalaire}$ de \overrightarrow{u} le nombre réel $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}$. On a :

$$\overrightarrow{u}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2$$

Propriété 4. Soient \overrightarrow{u} et \overrightarrow{v} deux vecteurs du plan. Alors :

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$$

$$\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2-2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2$$

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2$$

lacksquare Soit ABCD un parallélogramme tel que AB=6 , AD=3 et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-10$. Calculez .

- a. $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2$
- **b.** $\|\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AD}\|^2$
- c. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AD})$

ullet Soit ABC un triangle. En utilisant le produit scalaire, démontrez que ABC est rectangle en A si et seulement si $BC^2 = AB^2 + AC^2.$

Soient A, B et C trois points du plan. Démontrez les formules suivantes :

- $BC^2 = AB^2 + AC^2 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- $AC^2 = BA^2 + BC^2 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$
- $AB^2 = AC^2 + BC^2 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$