Les entiers

Définition 1. Les *entiers naturels* sont les nombres entiers positifs ou nuls. L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots\}$$

Les *entiers relatifs* sont les nombres entiers positifs, négatifs ou nuls. L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

En l'absence de précision un entier est un entier relatif.

E1 Montrez la nature de chaque nombre (entier positif, négatif ou non entier) :

a. l'opposé de -7 **b.** l'inverse de 4
c. l'inverse de $\frac{2}{3}$ **d.** l'inverse de $-\frac{1}{5}$
e. $(-6) \times (-2)$ **f.** $7 - 8$ **g.** $\dfrac{6}{2}$ **h.** $\dfrac{-12}{3}$
i. $7 \times \dfrac{1}{7}$ **j.** $\dfrac{-100}{-10}$ **k.** 10^6 **l.** 10^{-1}
m. $\sqrt{25}$ **n.** $\sqrt{50}$ **o.** $(-3)^2$ **p.** $(-2)^3$

Multiples, diviseurs

Définition 2. Soit a et b deux entiers. On dit que a est un *multiple* de b ou que a est *divisible* par b s'il existe un entier k tel que $a = b \times k$. On dit alors que b est un *diviseur* de a ou que b *divise* a.

E2 Construisez quatre phrases équivalentes utilisant le vocabulaire (multiple, diviseur, divisible, divise) :

a. -21 et 7. **b.** 8 et 72. **c.** -3 et -9.
d. 350 et -5. **e.** -6 et 18. **f.** 24 et 12.

E3 Traduisez la phrase sous la forme d'une égalité en utilisant l'existence d'un entier k :

a. 420 est un multiple de 12.
b. -15 divise -240.
c. 7 est un diviseur de 931.
d. 204 est divisible par 11.

E4 Traduisez quatre fois par une phrase utilisant le vocabulaire (multiple, diviseur, divisible, divise) :

a. $37 \times 12 = 444$ **b.** $-272 = -17 \times 16$
c. $\frac{2944}{32} = 92$ **d.** $-24 = \frac{432}{-18}$

E5 a est un entier. Démontrez que la somme de deux multiples de a est un multiple de a.

E6 Démontrez que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.

Propriété 1. Un nombre est divisible par 3 (respectivement par 9) si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 3 (respectivement de 9).

E7 Déterminez si les nombres suivants sont des multiples de 2, de 3, de 5, de 9 :

a. 123 **b.** 456 **c.** $2\,895$
d. $101\,112$ **e.** $131\,418$ **f.** $161\,718$

Propriété 2. Un nombre est pair si et seulement s'il existe un entier k tel que $n = 2k$. Un nombre est impair si et seulement s'il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$.

E8 Montrez la parité des nombres suivants sachant que n est un entier :

a. $2n + 6$ **b.** $2n + 9$
c. $-12n$ **d.** $4n^2 + 2n + 1$
e. $6n^2 - 8$ **f.** $2n - 5$

E9 Démontrez les propriétés suivantes :

a. Le carré de tout entier impair est impair.
b. La somme de deux entiers impairs est paire.
c. Le produit de deux entiers impairs est impair.

Raisonnements

Définition 3. Le *raisonnement par disjonction des cas* consiste à envisager toutes les possibilités pour un problème donné.

E10 Démontrez que $n(n + 1)$ est pair pour tout entier n en utilisant un raisonnement par disjonction des cas.

Définition 4. On appelle *contre-exemple* d'une proposition un exemple qui montre que la proposition est fausse.

E11 Donnez trois contre-exemples pour chaque proposition fausse suivante :

a. Si n est un multiple de 3, alors n est un multiple de 9.
b. Si k est un entier, alors $3k + 1$ est impair.
c. Si un nombre est divisible par 2 et par 4, alors il est divisible par 8.

Définition 5. La *proposition réciproque* d'une proposition donnée est la proposition obtenue en échangeant l'hypothèse avec la conclusion.

E12 Indiquez si les propositions sont vraies ou fausses et si les propositions réciproques sont vraies ou fausses :

a. Si un nombre est divisible par 5, alors il est divisible par 10.
b. Si un nombre est divisible par 6, alors il est divisible par 3 et par 2.
c. Si un nombre est divisible par 12, alors il est divisible par 6 et par 2.

Définition 6. Le *raisonnement par l'absurde* consiste à supposer fausse une proposition et à en déduire une contradiction.

E13 Soit n est un entier tel que n^2 est pair. Démontrez par l'absurde que n est pair.