Sujet 1 : Logique et Raisonnement

a. Montrer que pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$, si f est impaire, alors $f(0) = 0$.
b. Soit a et b deux réels. Montrer que : $a \times b = \frac{a^2+b^2}{2}$ si et seulement si $a = b$.
c. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, 3 divise $4^n - 1$.

Sujet 2 : Généralités sur les Fonctions

a. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 2x + 1$. Déterminer si f est paire, impaire, ou ni l'une ni l'autre.
b. Étudier la croissance et la décroissance de la fonction $f(x) = e^x - x^2$ sur $\mathbb{R}$.
c. Montrer que la fonction $f(x) = \sin(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et identifier ses extrémums.

Sujet 3 : Révisions d'Analyse

a. Déterminer le domaine de définition de la fonction $f(x) = \ln(\ln(x) - 1)$.
b. Calculer la limite de la fonction $f(x) = \frac{2x+1}{4x+3}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
c. Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$ et étudier ses variations sur son domaine de définition.

Solutions du Sujet 1 : Logique et Raisonnement

a.
Pour montrer que si f est impaire, alors $f(0) = 0$, rappelons la définition d'une fonction impaire :

Une fonction f est impaire si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.

En prenant $x = 0$, on obtient $f(-0) = -f(0)$, soit $f(0) = -f(0)$.

Cela implique $2f(0) = 0$, donc $f(0) = 0$.

b.
Montrons que $a \times b = \frac{a^2+b^2}{2}$ si et seulement si $a = b$.

Supposons d'abord que $a = b$. Alors $a \times b = a^2$ et $\frac{a^2+a^2}{2} = a^2$, donc l'égalité est vérifiée.

Supposons maintenant que $a \times b = \frac{a^2+b^2}{2}$. Cela revient à dire : $2ab = a^2 + b^2$. On peut réécrire cette équation comme suit : $a^2 - 2ab + b^2 = 0$, soit $(a - b)^2 = 0$. Cela implique $a = b$.

c.
Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, 3 divise $4^n - 1$.

Initialisation : Pour $n = 1$, $4^1 - 1 = 3$, qui est bien divisible par 3.

Hérédité : Supposons que la propriété est vraie pour un certain entier n, c'est-à-dire que $4^n - 1$ est divisible par 3. Montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$.

$4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = (4 \times 4^n - 4) + 3 = 4(4^n - 1) + 3$. Par hypothèse de récurrence, $4^n - 1$ est divisible par 3, donc $4(4^n - 1)$ l'est aussi, et par conséquent $4^{n+1} - 1$ est divisible par 3.

La propriété est donc vraie pour tout entier naturel n.

Solutions du Sujet 2 : Généralités sur les Fonctions

a.
Soit $f(x) = x^2 - 2x + 1$. Pour déterminer si f est paire, impaire ou ni l'une ni l'autre, calculons $f(-x)$:

$f(-x) = (-x)^2 - 2(-x) + 1 = x^2 + 2x + 1$. Or, $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$, donc f n'est ni paire ni impaire.

b.
Étudions la croissance et la décroissance de la fonction $f(x) = e^x - x^2$ sur $\mathbb{R}$.

Calculons la dérivée de $f(x)$: $f'(x) = e^x - 2x$.

La dérivée s'annule pour $e^x = 2x$. La résolution exacte de cette équation est complexe, mais on peut noter que pour x très petit $e^x > 2x$ et pour x très grand, $2x > e^x$. En utilisant cette information, on peut étudier les signes de $f'(x)$ pour déterminer les intervalles de croissance et décroissance.

c.

Montrons que la fonction $f(x) = \sin(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

La fonction sinus est bien connue pour être bornée, avec $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Les extrema de $f(x)$ sont donc $\max(f) = 1$ et $\min(f) = -1$.

Solutions du Sujet 3 : Révisions d'Analyse

a.

Déterminons le domaine de définition de la fonction $f(x) = \ln(\ln(x) - 1)$.

La fonction logarithme naturel $\ln(x)$ est définie pour $x > 0$, et pour que $\ln(x) - 1$ soit définie, il faut $\ln(x) > 1$, soit $x > e$. Ainsi, le domaine de définition de $f(x)$ est $x > e$.

b.

Calculons la limite de la fonction $f(x) = \frac{2x+1}{4x+3}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Divisons le numérateur et le dénominateur par x : $f(x) = \dfrac{2 + \frac{1}{x}}{4 + \frac{3}{x}}$. Lorsque x tend vers $+\infty$, les termes $\frac{1}{x}$ et $\frac{3}{x}$ tendent vers 0, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

c.

Calculons la dérivée de la fonction $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$.

Utilisons la formule de dérivation pour une fonction composée : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} \times (4x^3 + 2x)$.

Simplifions : $f'(x) = \dfrac{2x(2x^2 + 1)}{2\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} = \dfrac{x(2x^2 + 1)}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$. Pour l'étude des variations, on analyse le signe de cette dérivée sur le domaine de définition.