Calcul de l'image

Q1

> Rappel : la notation $x \longmapsto 3x$ définie une fonction qui à tout nombre x associe le nombre $3x$.
>
> $$x \longmapsto 3x$$
> image
>
> Par exemple au nombre 2, la fonction associe le nombre $3 \times 2 = 6$. Le résultat 6 est appelé l'image de 2 par cette fonction.

Considérons une fonction f telle que l'image de 7 est 14 par cette fonction. Quelle(s) fonction(s) répond(ent) à cette condition dans la liste suivante ?

$f_1 : x \longmapsto 2x$ $\quad$ $f_2 : x \longmapsto x^2$

$f_3 : x \longmapsto x+7$ $\quad$ $f_4 : x \longmapsto x-7$

$f_5 : x \longmapsto 14-x$ $\quad$ $f_6 : x \longmapsto \dfrac{x}{2}$

$f_7 : x \longmapsto -x^2$ $\quad$ $f_8 : x \longmapsto 14$

Q2

> Rappel : on écrit $f(2) = 3$ pour signifier que l'image de 2 par f est 3.

Les fonctions citées dans cet exercice sont celles de l'exercice précédent. Quelles sont les phrases vraies parmi les suivantes ?

a. L'image de -5 par f_1 est -3.
b. Le nombre 36 a pour image 6 par la fonction f_2.
c. $f_2(-7)$ est négatif
d. $f_6(-7) < -3$.
e. Le nombre 1 est l'image de $\dfrac{1}{2}$ par f_1.
f. On a $f_4(10{,}5) = f_5(10{,}5)$ donc f_4 et f_5 sont identiques.
g. Pour chacune des fonctions f_1 à f_8, -2 est l'image d'un nombre.

Q3 Les fonctions citées dans cet exercice sont celles de l'exercice précédent. Recopier et compléter les phrases suivantes.

a. L'image de ... par la fonction f_1 est 15.
b. Le nombre -5 a pour image ... par la fonction f_2.
c. 8 est l'image de ... par la fonction f_3.
d. $f_3(10) = \ldots$; $f_3(\ldots) = 10$; $f_4(10) = \ldots$; $f_4(\ldots) = 10$
e. $f_3(-10) = \ldots$; $f_3(\ldots) = -10$; $f_4(-10) = \ldots$; $f_4(\ldots) = -10$

E1 Considérons la fonction $f : x \longmapsto (x+1)^2 - (x^2+1)$.

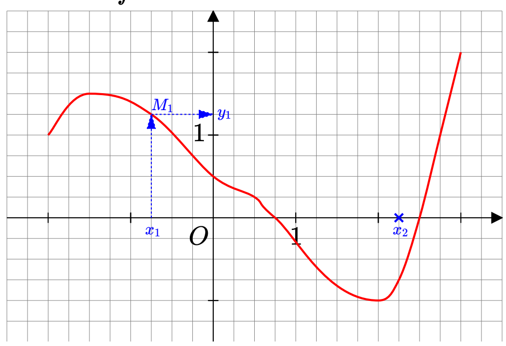
a. Calculez les images des nombres -1, 0, 1, 2 et 3 par f.
b. Quelle conjecture peut-on émettre ?
c. Développer et réduire l'expression de $f(x)$.
d. La conjecture est-elle prouvée ?
e. Calculez $f(583)$, $f\left(\dfrac{4}{5}\right)$, $f\left(\dfrac{7}{2}\right)$ et $f\left(\dfrac{3}{8}\right)$.

E2

a. Considérons la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{7x-3}{4-8x}$.
Montrez que l'image de -1 par f est $-\dfrac{5}{6}$.
b. Expliquez pourquoi $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ n'est pas définie.
Existe-t-il d'autres valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ n'est pas définie ?
c. Considérons la fonction définie par $g(x) = 6x^2 - 7x + 9$, montrez que $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = 7$.
d. Considérons la fonction définie par $h(x) = \dfrac{2^x}{\sqrt{x}}$. Montrez que 4 a pour image 8 par h.
e. Pour quels nombres la fonction h n'est-elle pas définie ?

Lecture de l'image

Q4 On considère la représentation graphique de la fonction f ci-dessous.



a. Pour lire l'image de x_1 par f, on suit le chemin suivant : $x_1 \to M_1 \to y_1$. Dessinez le chemin pour déterminer l'image de x_2 par f.
b. Vérifiez à l'aide d'un chemin que l'image par f de $0{,}5$ est $0{,}25$.

> Rappel : on a $f(0{,}5) = 0{,}25$, par conséquent le point de coordonnées $(0{,}5\ ;\ 0{,}25)$ appartient à la courbe représentative de f.

c. Traduire $f(-2) = 1$. Quels sont les coordonnées du point que l'on peut en déduire et qui appartient à la courbe représentative de f ?
d. Déterminez par lecture graphique la valeur de $f(3)$. Qu'est-ce que cela signifie pour l'image de f par ce nombre ?
e. Pourquoi $f(3{,}5)$ ou $f(-3)$ ne sont-ils pas définis ?

> Rappel : l'ensemble des nombres pour lesquels la fonction est définie s'appelle le domaine de définition de la fonction ou l'ensemble de définition. Il s'agit souvent d'un intervalle.

f. Quel est le domaine de définition de la fonction f ?