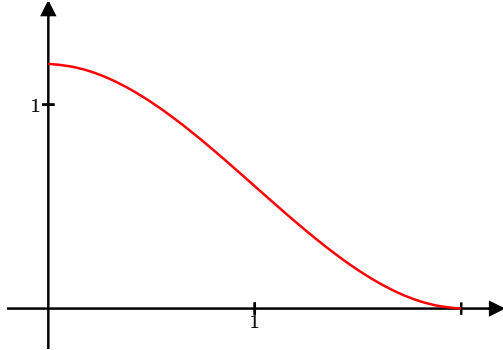


**E1** On souhaite modéliser le profil d'un toboggan, de hauteur 1,2m et de longueur 2m, par la courbe  $\mathcal{C}$  d'une fonction  $f$  dont l'expression est de la forme  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  où  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  sont des réels.



On se propose de déterminer les valeurs des coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  tels que : la courbe  $\mathcal{C}$  passe par les points  $A(0; 1,2)$ ,  $B(2; 0)$  ; en ces deux points  $A$  et  $B$ , la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  soit horizontale.

- Exprimez  $f'(x)$  en fonction de  $x$  et de paramètres.
- Déterminez  $f(0)$  et  $f'(0)$ .
- En déduire  $c$  et  $d$ .
- Que vaut  $f(2)$  et  $f'(2)$  ?
- Montrez que les réels  $a$  et  $b$  sont les solutions du système d'équations suivant : 
$$\begin{cases} 12a + 4b = 1,2 \\ 8a + 4b + 1,2 = 0 \end{cases}$$
- Résoudre le système d'équations précédent.
- En déduire l'expression de  $f(x)$ .

**E2** La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = ax^2 + bx + c$  et admet pour représentation graphique la courbe  $\mathcal{P}$ . tels que : elle coupe l'axe des abscisses au point  $A$  d'abscisse 3 ; elle coupe l'axe des ordonnées au point  $B$  d'ordonnée 2 ; elle admet pour tangente en  $B$  la droite d'équation  $y = 2x + 2$ .

- Déterminez  $a$ ,  $b$  et  $c$ .
- Indiquez l'abscisse du second point d'intersection de la courbe  $\mathcal{P}$  avec l'axe des abscisses.

**E3** On considère la suite de listes  $(E_n)$  définie par  $E_1 = [1, 1]$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $E_{n+1}$  est obtenu à partir de  $E_n$  en insérant entre chaque terme  $E_n(i)$  et  $E_n(i+1)$  la somme  $E_n(i) + E_n(i+1)$ . Voici les premiers termes de la suite  $(E_n)$  :

```
E_1=[1, 1]
E_2=[1, 2, 1]
E_3=[1, 3, 2, 3, 1]
E_4=[1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1]
E_5=[1, 5, 4, 7, 3, 8, 5, 7, 2, 7, 5, 8, 3, 7, 4, 1]
```

Notons  $a_n$  le nombre de termes de la liste  $E_n$ ,  $S_n$  la somme des termes de la liste  $E_n$ .

On a donc  $a_1 = 2$ ,  $S_1 = 2$ ,  $a_2 = 3$ ,  $S_2 = 4$ ,  $a_3 = 5$ ,  $S_3 = 10$ ,  $a_4 = 9$ ,  $S_4 = 28$ ,  $a_5 = 17$ ,  $S_5 = 82$ .

- Déterminez  $E_6$ ,  $a_6$  et  $S_6$ .
- Expliquez pourquoi que la suite  $(b_n)$  définie par  $b_n = a_n - 1$  est une suite géométrique de raison 2.
- En déduire l'expression de  $a_n$  en fonction de  $n$ .
- On admet que pour tout  $n$ ,  $S_{n+1} = 3S_n - 2$ . Quelle est la nature de la suite  $(T_n)$  définie pour tout entier naturel non nul par  $T_n = S_n - 1$  ?
- Exprimez  $T_n$  en fonction de  $n$ .
- En déduire l'expression de  $S_n$  en fonction de  $n$ .
- Calculez la somme des 10 premiers termes de la suite  $(b_n)$ .
- En déduire la somme des 10 premiers termes de la suite  $(a_n)$ .
- Calculez la somme des 10 premiers termes de la suite  $(T_n)$ .
- En déduire la somme des 10 premiers termes de la suite  $(S_n)$ .