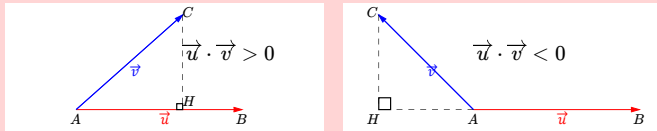


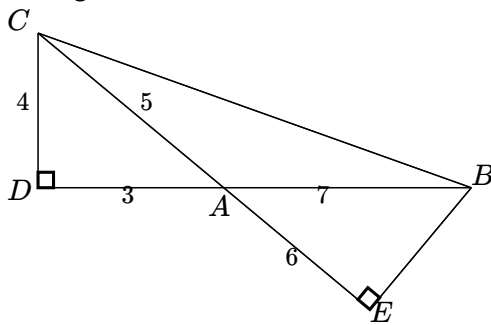
Produit scalaire

Définition 1. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan. Soient A, B et C trois points du plan tels que $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{AC} = \vec{v}$. Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) . On appelle *produit scalaire* de \vec{u} par \vec{v} et on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le nombre réel défini par :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{u} = \vec{0}$;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et de même sens ;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et de sens contraires ;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$ dans les autres cas.



E1 On considère la figure ci-dessous qui n'est pas à l'échelle mais où les points qui semblent alignés le sont vraiment.



Calculez les produits scalaires suivants :

- | | | |
|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| a. $\vec{AC} \cdot \vec{AE}$ | b. $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ | c. $\vec{AB} \cdot \vec{DB}$ |
| d. $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$ | e. $\vec{EA} \cdot \vec{AC}$ | f. $\vec{AD} \cdot \vec{AC}$ |
| g. $\vec{DA} \cdot \vec{BA}$ | h. $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ | i. $\vec{AC} \cdot \vec{AB}$ |

Propriété 1. Soient \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs du plan et λ un nombre réel.

- Le produit scalaire est symétrique :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

- Le produit scalaire est bilinéaire :

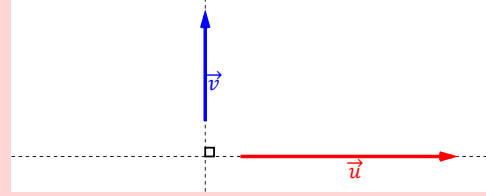
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
- $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v})$

E2 Soit ABC un triangle tels que $AB = 2$, $BC = 4$ et $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 10$. Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC) . Calculez les produits suivants en justifiant à l'aide des propriétés du produit scalaire :

- | | | |
|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| a. $\vec{AB} \cdot \vec{CA}$ | b. $\vec{BA} \cdot \vec{AC}$ | c. $\vec{CA} \cdot \vec{BA}$ |
| d. $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ | e. $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$ | f. $(\vec{AC})^2$ |

Orthogonalité

Définition 2. Deux vecteurs non nuls sont dits *orthogonaux* si leurs directions sont perpendiculaires.



Propriété 2. Deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

E3 On considère un carré $ABCD$ de centre O . Parmi les produits scalaires suivants, lesquels sont nuls ? Justifiez.

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| a. $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ | b. $\vec{DC} \cdot \vec{DB}$ |
| c. $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ | d. $\vec{AC} \cdot \vec{OB}$ |

E4 $ABCD$ est un parallélogramme. Dans chaque cas, précisez la nature de $ABCD$.

- | | | |
|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| a. $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$ | b. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$ | c. $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$ |
|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|

Norme et produit scalaire

Propriété 3. On note \vec{u}^2 et on appelle *carré scalaire* de \vec{u} le nombre réel $\vec{u} \cdot \vec{u}$. On a :

$$\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$$

Propriété 4. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan. Alors :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

E5 Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB = 6$, $AD = 3$ et $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = -10$. Calculez.

- | | |
|--|--------------------------------|
| a. $\ \vec{AB} + \vec{AD}\ ^2$ | b. $\ \vec{AB} - \vec{AD}\ ^2$ |
| c. $(\vec{AB} + \vec{AD}) \cdot (\vec{AB} - \vec{AD})$ | |

E6 Soit ABC un triangle. En utilisant le produit scalaire, démontrez que ABC est rectangle en A si et seulement si $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

E7 Soient A, B et C trois points du plan. Démontrez les formules suivantes :

- $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC}$
- $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2\vec{BA} \cdot \vec{BC}$
- $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\vec{CA} \cdot \vec{CB}$