

Propriétés : Soit a, b, n, m des entiers relatifs tels que $a \neq 0$ et $b \neq 0$. On a :

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 & a^1 &= a & a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\ a^n \times a^m &= a^{n+m} & \frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m} & (a^n)^m &= a^{n \times m} \\ a^n \times b^n &= (a \times b)^n & \frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n \end{aligned}$$

E1 Calculez les valeurs des expressions suivantes :

$$\begin{aligned} 2^3 & \quad 3^{-2} & \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} & \quad 2^3 \times 2^4 \\ 2^3 \div 2^4 & \quad 2^3 \times 3^3 & 2^4 \div 3^4 & \quad \left(\frac{2}{5}\right)^3 \end{aligned}$$

E2 Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{12}x^2 + x + 1$$

Montrez que $f'(x) = f(x)$ pour $x = -1, 0, 1$ et 2 .

A-t-on $f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?

Propriété et définition : Il existe une unique fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que $f(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$. Cette fonction est appelée la fonction exponentielle et est notée \exp :

$$\begin{aligned} \exp: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \exp(x) \\ \exp(0) &= 1 & (\exp)' &= \exp \end{aligned}$$

E3 On se propose de démontrer que la fonction exponentielle est strictement positive sur \mathbb{R} . Pour cela considérons la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \exp(x) \times \exp(-x)$$

- Montrez que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- En déduire que $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Concluez que $\exp(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Que peut-on en déduire sur les variations de la fonction exponentielle sur \mathbb{R} ?

Propriété : La fonction exponentielle est strictement positive et strictement croissante sur \mathbb{R} .

E4 On se propose de démontrer que pour tous réels a et b , on a $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$. Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R} par

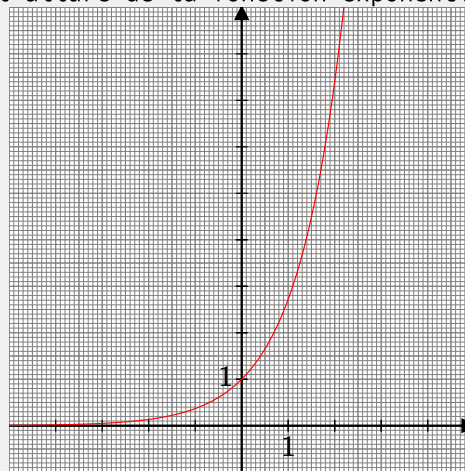
$$f(x) = \exp(a+x) \times \exp(b-x)$$

- Montrez que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Calculez $f(0)$, $f(b)$ puis concluez.

Propriétés : Pour tous a et b dans \mathbb{R} , on a :

$$\begin{aligned} \exp(a+b) &= \exp(a) \times \exp(b) \\ \exp(a-b) &= \frac{\exp(a)}{\exp(b)} & \exp(-a) &= \frac{1}{\exp(a)} \end{aligned}$$

Voici l'allure de la fonction exponentielle :



E5 On admet que $\exp(-3) \approx 0,05$ et $\exp(-2,5) \approx 0,08$.

Complétez le tableau de valeurs suivant avec des valeurs approchées par lecture graphique jusqu'à $x = 2$. Pour les deux dernières valeurs, utilisez la propriété $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

| x | -3 | -2,5 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
|-----------|------|------|----|------|----|------|---|-----|---|-----|---|-----|---|
| $\exp(x)$ | 0,05 | 0,08 | | | | | | | | | | | |

Définition : On note e le nombre $\exp(1)$. On a :

$$e = 2,718\,2\dots$$

e est un nombre irrationnel.

E6

- Montrez que $\exp(2) = e^2$.
- Montrez que $\exp(-1) = \frac{1}{e}$.
- Exprimez $\exp(3)$ en fonction de e . Justifiez.

Propriété : Pour tout entier relatif n , on a :

$$\exp(n) = e^n$$

Par prolongement on écrit pour tout réel x :

$$\exp(x) = e^x$$

E7

Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = \exp(1,2n)$. Montrez que c'est une suite géométrique et donnez son premier terme et sa raison.

Propriété : Pour tout réel a et tout entier naturel n , on a :

$$\exp(an) = (\exp(a))^n$$

Par prolongement on écrit :

$$e^{an} = (e^a)^n$$