

Nombres premiers

Définition 1. On dit qu'un nombre entier naturel est un *nombre premier* (ou est *premier*) s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Liste des nombres premiers inférieurs à 30 :
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

- E1** Justifiez chacune des propositions.
- 0 n'est pas un nombre premier.
 - 1 n'est pas un nombre premier.
 - 77 n'est pas un nombre premier.
 - 111 n'est pas un nombre premier.
 - 2 est le seul nombre premier pair.
 - Le produit de deux nombres premiers n'est pas un nombre premier.

E2 Montrez que la proposition suivante est fausse : « Si n est un entier naturel non nul, alors $6n + 1$ est un nombre premier. »

Propriété 1. Tout entier naturel n plus grand ou égal à 2 est soit premier, soit le produit de nombres premiers. Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Méthode 1. Pour décomposer un nombre en produit de facteurs premiers, on peut procéder de plusieurs manières :

- On peut diviser successivement par les nombres premiers dans l'ordre croissant en s'arrêtant lorsque le quotient est égal à 1.
- On décompose en deux facteurs si c'est possible, puis on recommence avec chacun des facteurs jusqu'à obtenir des nombres premiers.
- On peut aussi chercher des diviseurs en utilisant les critères de divisibilité.

E3 Décomposez les nombres suivants en produit de facteurs premiers.

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 51 | 58 | 65 | 87 | 95 |
| 18 | 28 | 45 | 75 | 98 |
| 165 | 231 | 275 | 154 | |
| 40 | 60 | 100 | 140 | 580 |
| 24 | 36 | 54 | 56 | 81 |
| 32 | 48 | 72 | 108 | 162 |

Méthode 2. Pour dresser la liste des diviseurs d'un nombre, on peut procéder de la manière suivante :

- On décompose le nombre en produit de facteurs premiers.
- On écrit tous les diviseurs possibles en combinant les facteurs premiers.

E4 Donnez la liste des diviseurs de chacun des nombres suivants.

6 8 10 15 4 9 25 49 12 18 20 45

Méthode 3. Pour déterminer le plus grand diviseur commun de deux nombres, on peut procéder de deux manières :

- On dresse la liste des diviseurs de chaque nombre pour déterminer les diviseurs communs.
- On décompose les nombres en produit de facteurs premiers pour déterminer le plus grand diviseur commun.

E5 Quel est le plus grand diviseur commun des nombres suivants ?

12 et 18 20 et 30 24 et 36 45 et 75

E6 Quel est le plus grand diviseur commun des nombres suivants ?

- $2^3 \times 3^2 \times 5$ et $2^2 \times 3^3 \times 7$
- $3^4 \times 5^2 \times 7$ et $2^3 \times 3^3 \times 5$

Méthode 4. Pour déterminer le plus petit multiple commun de deux nombres, on peut procéder de la manière suivante : on regarde un par un les multiples de l'un des deux nombres (de préférence le plus grand) jusqu'à trouver un multiple commun à l'autre nombre.

E7 Quel est le plus petit multiple commun non nul des nombres suivants ?

- 12 et 18
- 20 et 30
- 24 et 36
- 45 et 75
- 8 et 10
- 12 et 15
- 18 et 20
- 24 et 30

Fractions irréductibles

Définition 2. Une fraction est dite irréductible si le plus grand diviseur commun de son numérateur et de son dénominateur est 1.

Méthode 5. Pour démontrer qu'une fraction est irréductible, il suffit de montrer que le numérateur et le dénominateur n'ont pas de diviseur premier commun dans leurs décompositions en produits de facteurs premiers.

E8 Montrez que les fractions suivantes sont irréductibles.

- $\frac{45}{154}$
- $\frac{75}{98}$
- $\frac{40}{81}$
- $\frac{87}{140}$

Méthode 6.

- Pour additionner ou soustraire deux fractions, il suffit de les réduire au même dénominateur.
- Pour multiplier deux fractions, il suffit de multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.
- Pour diviser une fraction par une autre, il suffit de multiplier la première fraction par l'inverse de la seconde.

E9 Écrire les résultats des calculs suivants sous forme de fractions irréductibles.

$$A = \frac{49}{51} \times \frac{45}{14}$$

$$B = \frac{57}{125} \div \frac{27}{50}$$

$$C = \frac{51}{49} + \frac{9}{14}$$

$$D = \frac{23}{25} - \frac{11}{15}$$