E1 Expliquez la contradiction dans la démonstration suivante puis conclure :
« Supposons qu'il existe deux entiers naturels a et n tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$. En multipliant par 3×10^n on obtient $3 \times 10^n \times \frac{1}{3} = 3 \times 10^n \times \frac{a}{10^n}$ d'où $10^n = 3a$. Donc 10^n est un multiple de 3. »

E2 L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifiez votre réponse.

- « Si n est un entier non-nul, alors $6n+1$ est un nombre premier. »

E3 Expliquez la contradiction dans la démonstration suivante puis conclure :
« Supposons qu'il existe deux entiers a et b tels que $\frac{a}{b}$ est irréductible et $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. En élevant au carré on en déduit que $2 = \frac{a^2}{b^2}$ d'où $a^2 = 2b^2$. Ce qui signifie que a^2 est pair. Or si a est impair, a^2 est impair. Donc a est pair. Donc il existe un entier k tel que $a = 2k$. En remplaçant dans l'équation $a^2 = 2b^2$ on obtient $4k^2 = 2b^2$ d'où $2k^2 = b^2$. Donc b^2 est pair et donc b est pair. »

E4 Trouvez trois contre-exemples à l'affirmation suivante :
« Si n est un entier, alors $\frac{2n+1}{n+2}$ est irréductible. »

Propriété 1. Soient a et b deux entiers naturels avec $b \neq 0$.

- Il existe deux entiers naturels q et r tels que $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$. On dit que q et r sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.
- a est un multiple de b si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

E5 On se propose de démontrer que quelque soit le nombre entier naturel n, $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ est un entier.

a. Montrez que $n(n+1)$ est un multiple de 2.

b. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne d'un entier par 3 ?

c. En déduire que si n et $n+1$ ne sont pas des multiples de trois, alors $n = 3k+1$ pour un certain k entier.

d. En déduire que si n et $n+1$ ne sont pas des multiples de trois, alors $2n+1$ est un multiple de 3.

e. Conclure.