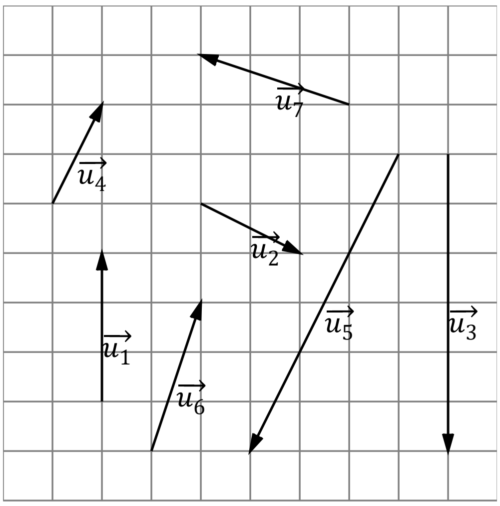
Comprendre la notion coordonnées de vecteur dans une base

Rappel : Une base $\mathscr{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est un couple de vecteurs non nuls n'ayant pas la même direction.
Propriété : Deux vecteurs forment une base si et seulement s'ils ne sont pas colinéaires.
Définition :
- Une base est orthogonale si les vecteurs qui la composent sont orthogonaux.
- Une base est orthonormale si de plus ils ont la même norme.

E1 Parmi les vecteurs suivants, quels couples forment une base ?



a. Citez deux bases orthonormales.
b. Citez l'unique base orthogonale mais non orthonormale.
c. Quels sont les vecteurs qui forment avec le vecteur $\overrightarrow{u}_1$ une base non orthogonale ?
d. Tracez le vecteur $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ dans la base $(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_5)$.
e. Dans quelle base orthonormale (question a.) les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ sont $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$?
f. Quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ dans l'autre base orthonormale (toujours question a.) ?

Notion de déterminant de deux vecteurs dans une base

Définition : Considérons une base $\mathscr{B}$ et deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans cette base.
Le déterminant de ces deux vecteurs est le nombre réel $xy' - x'y$ noté $det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ ou encore $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

E2 Calculez les déterminants suivants.
a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ **b.** $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ **c.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$ **d.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$ **e.** $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$
Ajoutez des signes — à certains nombres du déterminant du a. pour obtenir un déterminant égal à 2.

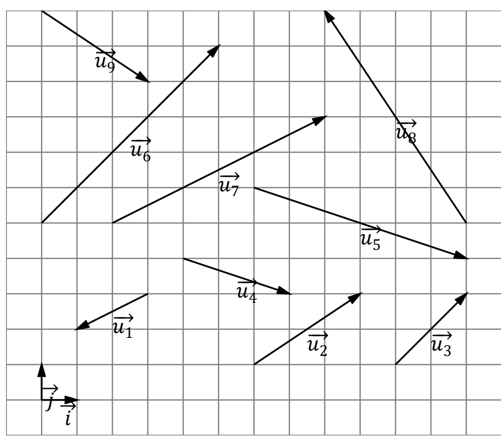
E3 Calculez les déterminants suivants.
a. $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$ **b.** $\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -9 \end{vmatrix}$ **c.** $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -3 & -9 \end{vmatrix}$ **d.** $\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}$
Propose d'autres déterminants égaux à 0 avec les nombres positifs du a. mais dans un autre ordre.

E4 Calculez les déterminants suivants.
a. $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ **b.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ **c.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ **d.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

E5 Calculez les déterminants suivants.
a. $\begin{vmatrix} 0{,}04 & 0{,}1 \\ 0{,}28 & 7 \end{vmatrix}$ **b.** $\begin{vmatrix} 0{,}9 & -0{,}3 \\ 15 & -5 \end{vmatrix}$ **c.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{10} \end{vmatrix}$
d. $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{10} \\ 3 & \sqrt{5} \end{vmatrix}$ **e.** $\begin{vmatrix} 10^2 & 10^{-4} \\ 10^{-1} & 10^{-7} \end{vmatrix}$ **f.** $\begin{vmatrix} \frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{2}} & \frac{\frac{3}{7}}{\frac{3}{10}} \end{vmatrix}$

Propriété : Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

E6



a. Indiquez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}_1$ à $\overrightarrow{u}_9$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
b. Calculez les déterminants suivants :
$\det(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_8)$ $\det(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_7)$ $\det(\overrightarrow{u}_9, \overrightarrow{u}_4)$
$\det(\overrightarrow{u}_4, \overrightarrow{u}_5)$ $\det(\overrightarrow{u}_6, \overrightarrow{u}_3)$ $\det(\overrightarrow{u}_7, \overrightarrow{u}_2)$
c. En déduire des vecteurs colinéaires.
d. À quel vecteur le vecteur $\overrightarrow{u}_9\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est-il colinéaire ? Justifiez.
e. À quels vecteurs le vecteur $\overrightarrow{u}_{10}\begin{pmatrix} 7 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$ est-il colinéaire ? Justifiez.

E7
a. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs tels que $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{u}$.
Quelle est la valeur de $det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$?
b. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs colinéaires de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 12 \\ -20 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ y \end{pmatrix}$.
Quelle est la valeur de y ?