

Polynôme du second degré

Définition 1. On appelle *polynôme du second degré* toute expression pouvant s'écrire sous la forme développée réduite

$$ax^2 + bx + c$$

où a , b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

E1 Indiquez si c'est un polynôme du second degré. Le cas échéant déterminez a , b et c .

- | | |
|------------------------------|-------------------------------|
| a. $4x^2 - 5x + 2$ | b. $-3x^2 + 7x$ |
| c. $\frac{4x^2}{5} - 12$ | d. $3x^2 + 7 - 3x^2 + 4x$ |
| e. $5x(x + 2)$ | f. $(x + 3)(x - 4)$ |
| g. $(x + 2)^2$ | h. $(3x + 7)(3x - 7)$ |
| i. $2(x - 3)^2$ | j. $\frac{10x^2 + 8x - 3}{2}$ |
| k. $\frac{1}{3x^2 - 5x + 2}$ | l. $-7x + 6 - 5x^2$ |
| m. $11x \times 5x$ | n. $3(2x + 1)(8 - x)$ |

Forme canonique

Propriété 1. Tout polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme dite *canonique*

$$a(x - \alpha)^2 + \beta$$

où α et β sont des réels.

E2 Voici la forme canonique de plusieurs polynômes du second degré. Déterminez α et β .

- | | |
|----------------------|----------------------|
| a. $3(x - 2)^2 + 5$ | b. $-2(x + 3)^2 - 4$ |
| c. $4(x + 1)^2 - 3$ | d. $6x^2 - 12$ |
| e. $-5(x - 4)^2 + 7$ | f. $-(x - 5)^2$ |

E3 Voici plusieurs polynômes du second degré. Déterminez la forme canonique de chacun d'eux en utilisant une identité remarquable.

- $-2(x^2 - 4x + 4) + 9$
- $3(x^2 + 12x + 36) - 27$
- $-4(x^2 - 18x + 81) + 64$
- $5(x^2 + 10x + 25) - 100$

E4 Voici plusieurs polynômes du second degré. Déterminez la forme canonique de chacun d'eux en mettant en évidence une identité remarquable.

- | | |
|---------------------|---------------------|
| a. $x^2 - 6x + 24$ | b. $x^2 + 8x - 6$ |
| c. $x^2 + 16x + 89$ | d. $x^2 - 18x - 80$ |

Racine

Définition 2. On appelle *racine* du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ toute solution de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

E5 Déterminez les racines.

- | | |
|----------------------|-----------------------|
| a. $2(x - 3)(x + 4)$ | b. $5(2x - 8)(x - 5)$ |
| c. $(x - 2)(7 - x)$ | d. $(6x + 3)(2x - 1)$ |

E6 Déterminez une racine évidente.

- | | |
|--------------------|--------------------|
| a. $3x^2 - 6x$ | b. $5x^2 - 4x - 1$ |
| c. $5x^2 + 4x - 1$ | d. $x^2 + 3x - 10$ |

Propriété 2. Si un polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ admet deux racines alors :

- la somme des racines est $-\frac{b}{a}$
- le produit des racines est $\frac{c}{a}$

E7 Les racines des polynômes du second degré suivants sont entières. Déterminez les racines en utilisant le produit et la somme des racines.

- | | |
|----------------------|---------------------|
| a. $2x^2 - 10x + 12$ | b. $3x^2 - 3x - 60$ |
| c. $x^2 + 10x + 21$ | d. $-x^2 - 5x + 24$ |

Forme factorisée

Propriété 3. Si un polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ admet deux racines distinctes x_1 et x_2 , alors il peut s'écrire sous la *forme factorisée* suivante

$$a(x - x_1)(x - x_2)$$

E8 Ecrivez le polynôme sous forme factorisée.

- Les racines de $7x^2 + 7x - 42$ sont -3 et 2 .
- Les racines de $-3x^2 + 3x + 6$ sont -1 et 2 .
- Les racines de $x^2 - 9x + 20$ sont 4 et 5 .
- Les racines de $2x^2 - 5x - 3$ sont 3 et $-\frac{1}{2}$.

E9 Déterminez la forme $a(x - x_1)(x - x_2)$.

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| a. $(3x + 9)(x - 5)$ | b. $(x + 8)(5x - 10)$ |
| c. $(7 - x)(x - 3)$ | d. $(x + 4)(-x - 8)$ |
| e. $(2x + 4)(3x - 6)$ | f. $7(4x - 8)(x - 3)$ |

E10 Déterminez la forme $a(x - x_1)(x - x_2)$.

- | | |
|---------------------------------------|------------------|
| a. $3x^2 - 6x$ | b. $-5x^2 + 35x$ |
| c. $3x^2 - 147$ | d. $-2x^2 + 6$ |
| e. $(x - 3)(2x + 7) + (x - 3)(3 - x)$ | |
| f. $(2x - 5)(x + 6) - (x + 6)(x - 5)$ | |

Propriété 4. Si un polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ admet une seule racine appelée *racine double* x_0 , alors il peut s'écrire sous la *forme factorisée* suivante

$$a(x - x_0)^2$$

E11 Les polynômes du second degré suivants possèdent une racine double. Factorisez par a puis utilisez une identité remarquable pour les écrire sous la forme factorisée.

- | | |
|----------------------|---------------------|
| a. $7x^2 - 42x + 63$ | b. $-2x^2 + 8x - 8$ |
| c. $5x^2 + 40x + 80$ | d. $-3x^2 - 6x - 3$ |