



Rotaciones - Visión robótica

En búsqueda de la mejora de procesamiento

TITULAR: JOSÉ FRANCISCO ZELASCO
jfzelasco@gmail.com

Lucía Reffle - Francisco I. Pirra - Jonathan Leonel Pepe
luciareffle@gmail.com - fpirra@lsia.fi.uba.ar - jonathan.leonel.pepe@gmail.com
Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ingeniería

June 22, 2017

Resumen

Como trabajo final para la materia "Fundamentos matemática para la visión robótica,"^{en} conjunto con "Seminario de ingeniería informática", se propuso realizar un desarrollo matemático y en base a esto, implementar un sistema informático, que permita comparar los resultados obtenidos mediante dicho desarrollo.

En este trabajo se buscará $\varphi_{p'}$ y $\lambda_{p'}$ de una rotación de dos formas distintas y estableceremos cuál es la más rápida. Esto lo haremos tanto para rotaciones esféricas y en cuaterniones, a partir de datos aleatorios.

Por ultimo, con estos valores obtenidos, se ingresaran en el sistema desarrollado, para poder evaluar las velocidades y comparar la veracidad de los resultados obtenidos

Índice

1. Introducción	3
2. Desarrollo matemático para encontrar $\varphi_{p'}$ y $\lambda_{p'}$	5
2.1. En esféricas:	5
2.2. En Cuaterniones:	6
3. Conclusiones	7
4. Bibliografía	9

1. Introducción

En matemáticas, el teorema de rotación de Euler dice que cualquier rotación o conjunto de rotaciones sucesivas puede expresarse siempre como una rotación alrededor de una única dirección o eje de rotación principal. De este modo, toda rotación en el espacio tridimensional puede ser especificada a través del eje de rotación equivalente y del ángulo rotado.

En este trabajo se buscará $\varphi_{p'}$ y $\lambda_{p'}$ de una rotación de dos formas distintas y estableceremos cuál es la más rápida. Esto lo haremos tanto para rotaciones esféricas y en cuaterniones, a partir de datos aleatorios.

En rotaciones esféricas el eje de rotación lo resolvemos viendo el problema en el espacio.

$$\widehat{ABE'} \approx \widehat{ABE}$$

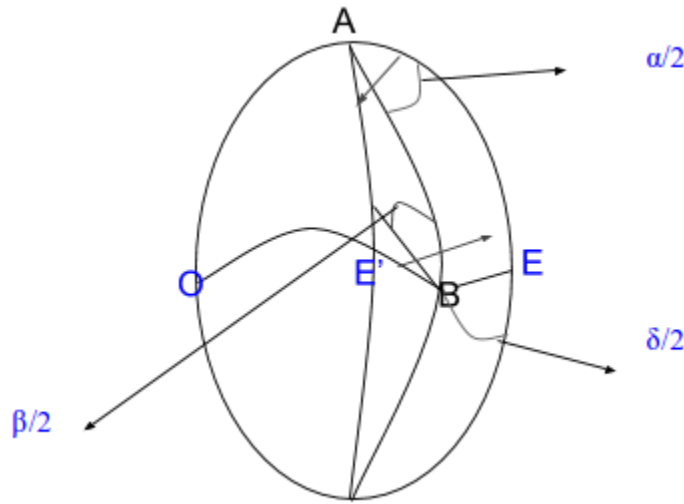


Figura 1: Ilustración del problema en el espacio

y para conseguir las fórmulas que vinculan los triángulos esféricos utilizamos fórmulas que vinculan a un triángulo plano.

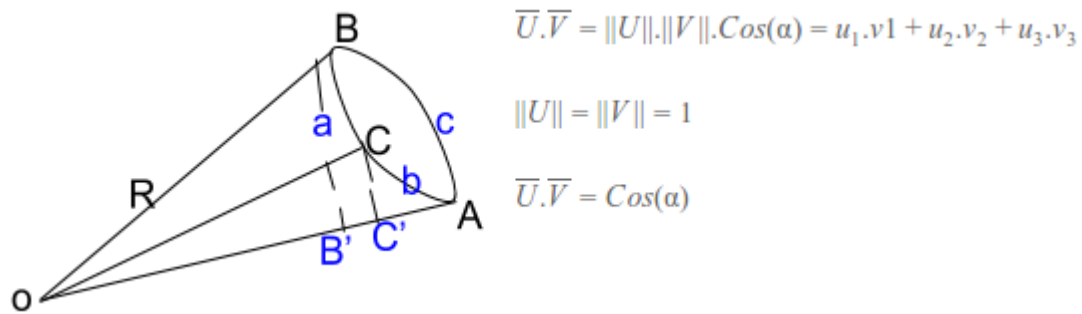


Figura 2: Vinculación del triángulo al plano

$$\begin{aligned}\overline{OB} \cdot \overline{OC} &= \cos(a) = (\overline{OB'} + \overline{B'B}) + (\overline{OC'} + \overline{C'C}) = \overline{OB'} \cdot \overline{OC'} + \overline{OB'} \cdot \overline{C'C} + \overline{B'B} \cdot \overline{OC'} + \overline{B'B} \cdot \overline{C'C} = \\ &= \cos(c) \cdot \cos(b) \cdot \cos(0) + \cos(c) \cdot \sin(b) \cdot \cos(90) + \sin(c) \cdot \cos(b) \cdot \cos(90) + \sin(c) \cdot \sin(b) \cdot \cos(A) \\ \cos(a) &= \cos(c) \cos(b) + \cos(c) \cdot \sin(b) \cdot \cos(A)\end{aligned}$$

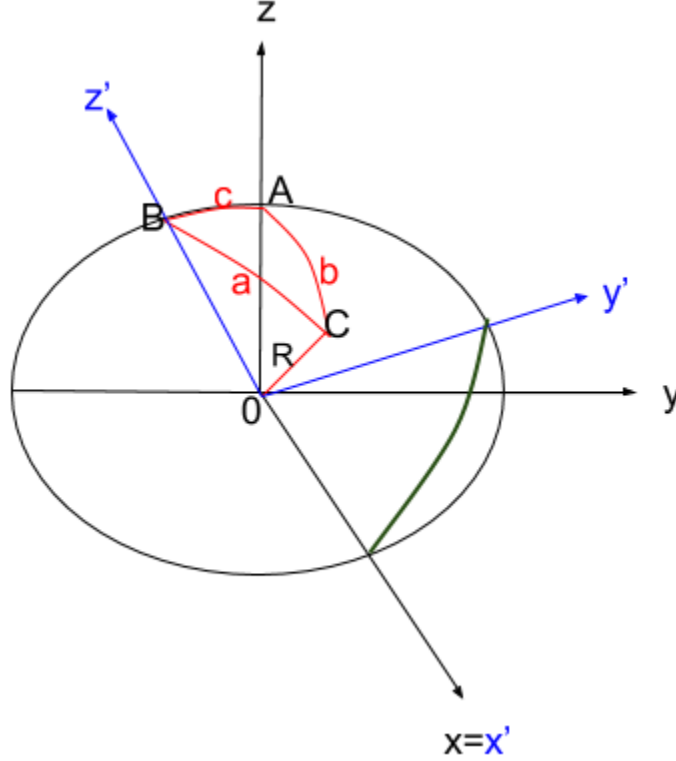


Figura 3: Vinculación del triángulo al plano

$$\begin{aligned}R &= 1 \\ x' &= x \\ y' &= y \cdot \cos(c) + z \cdot \sin(c) \\ z' &= z \cdot \cos(c) - y \cdot \sin(c) \\ x &= \sin(b) \cdot \sin(A) \\ x' &= \sin(a) \cdot \sin(B) \\ y &= \sin(b) \cdot \cos(A) \\ y' &= \sin(a) \cos(B) \\ z &= \cos(b) \\ z' &= \cos(a) \\ \frac{\sin(A)}{\sin(a)} &= \frac{\sin(B)}{\sin(b)} = \frac{\sin(C)}{\sin(c)}\end{aligned}$$

Los cuaterniones unitarios proporcionan una notación matemática para representar las orientaciones y las rotaciones de objetos en tres dimensiones. Comparados con los ángulos de Euler, son más simples de componer y comparados con las matrices de rotación, son más eficientes y más estables numéricamente.

$$\begin{aligned}
 q &= (q_0, q_1, q_2, q_3), q_0 = S \text{ es un valor y } (q_1, q_2, q_3) = \bar{v} \\
 q &= (S, \bar{v}), \bar{q} = (S, -\bar{v}) \\
 q_0 \cdot q_1 &= (q_{00}, q_{01}, q_{02}, q_{03}) \cdot (q_{10}, q_{11}, q_{12}, q_{13}) = (S_0 \cdot S_1, -\bar{v}_0 \cdot \bar{v}_1, S_0 \cdot \bar{v}_1 + S_1 \cdot \bar{v}_0 + \bar{v}_0 \wedge \bar{v}_1) \\
 q \cdot \bar{q} &= q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \\
 q \cdot q^{-1} &= \frac{\bar{q}}{q} \Rightarrow q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} \text{ y cuando } q = 1 \Rightarrow q^{-1} = \bar{q} \\
 P_{ROT} &= (0, \overline{V_{rot}}) = q \cdot p \cdot \bar{q}, \text{ con } p = (0, \bar{v} \text{ y } \|q\| = 1
 \end{aligned}$$

2. Desarrollo matemático para encontrar $\varphi_{p'}$ y $\lambda_{p'}$

Datos:

$$\varphi_A \in [35, 55], \lambda_A \in [35, 55], \varphi_P \in [55, 65], \lambda_P \in [55, 65], \theta$$

2.1. En esféricas:

Calculo \widehat{AP} como:

$$\begin{aligned}
 \cos(\widehat{AP}) &= \cos(\varphi_A) \cdot \cos(\varphi_P) + \sin(\varphi_A) \sin(\varphi_P) \cos(\widehat{AZP}) \\
 \text{Como } \widehat{AZP} &= \lambda_p - \lambda_A \Rightarrow \cos(\widehat{AZP}) = \cos(\lambda_p - \lambda_A) \Rightarrow \\
 \Rightarrow \widehat{AP} &= \text{ARC Cos}[\cos(\varphi_A) \cdot \cos(\varphi_P) + \sin(\varphi_A) \sin(\varphi_P) \cos((\lambda_p - \lambda_A))]
 \end{aligned}$$

Calculo \widehat{ZAP} como:

$$\frac{\sin(\widehat{ZAP})}{\sin(\varphi_P)} = \frac{\sin(\widehat{AZP})}{\sin(\widehat{AP})}, \text{ con } \sin(\widehat{AZP}) = \sin(\lambda_p - \lambda_A) \text{ y con dos formas de calcular } \sin(\widehat{AP}):$$

$$\blacksquare \quad \sin(\widehat{AP}) = \text{ARC Cos}(\widehat{AP})$$

$$\blacksquare \quad \sin(\widehat{AP}) = \sqrt{1 - \cos^2(\widehat{AP})}$$

$$\Rightarrow \widehat{ZAP} = \text{ARC Sen} \left[\frac{\sin \widehat{AZP} \cdot \sin(\varphi_P)}{\sin(\widehat{AP})} \right]$$

Opción 1:

$$\text{ARC Sen}(\widehat{ZAP}) + \theta = \widehat{ZAP'}$$

Opción 2:

$$\begin{aligned}
 \cos(\widehat{ZAP'}) &= \cos(\widehat{ZAP}) \cdot \cos(\theta) - \sin(\widehat{ZAP}) \cdot \sin(\theta) \\
 \sin(\widehat{ZAP'}) &= \sin(\widehat{ZAP}) \cdot \cos(\theta) + \cos(\widehat{ZAP}) \cdot \sin(\theta)
 \end{aligned}$$

Calculo $\varphi_{p'}$ como:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{p'} = \widehat{ZAP'} &= \cos(\widehat{ZA}) \cdot \cos(\widehat{AP'}) + \sin(\widehat{ZA}) \cdot \sin(\widehat{AP'}) \cdot \cos(\widehat{ZAP'}) \\
 \text{Como } \widehat{AP'} &= \widehat{AP} \Rightarrow \sin(\widehat{AP'}) = \sin(\widehat{AP}) \text{ y } \cos(\widehat{AP'}) = \cos(\widehat{AP}) \\
 \text{Como } \widehat{ZA} &= \varphi_A \Rightarrow \cos(\widehat{ZA}) = \cos(\varphi_A) \text{ y } \sin(\widehat{ZA}) = \sin(\varphi_A) \\
 \Rightarrow \varphi_{p'} &= \cos(\varphi_A) \cdot \cos(\widehat{AP}) + \sin(\varphi_A) \cdot \sin(\widehat{AP}) \cdot \cos(\widehat{ZAP'})
 \end{aligned}$$

Calculo $\lambda_{p'}$ como:

$$\frac{\widehat{Sen(P'ZA)}}{\widehat{Sen(P'A)}} = \frac{\widehat{Sen(ZAP')}}{\widehat{Sen(ZP')}} \\ \text{Como } \widehat{ZP'} = \varphi_{p'} \Rightarrow \widehat{Sen(ZP')} = \widehat{Sen(\varphi_{p'})} \\ \text{Como } \widehat{P'A} = \widehat{PA} \Rightarrow \widehat{Sen(P'A)} = \widehat{Sen(PA)} \\ \widehat{P'ZA} = \text{ARC Sen} \left[\frac{\widehat{Sen(ZAP')} \cdot \widehat{Sen(PA)}}{\widehat{Sen(\varphi_{p'})}} \right]$$

$$\text{Finalmente } \lambda_{p'} = \lambda_A - \widehat{P'ZA}$$

2.2. En Cuaterniones:

$$P_{ROT} = q.p.\bar{q}$$

Donde:

$$q = (Cos(\frac{\theta}{2}), (Sen(\varphi_A).Cos(\lambda_A), Sen(\varphi_A).Sen(\lambda_A), Cos(\varphi_A)).Sen(\frac{\theta}{2})) \\ = (Cos(\frac{\theta}{2}), -(Sen(\varphi_A).Cos(\lambda_A), Sen(\varphi_A).Sen(\lambda_A), Cos(\varphi_A)).Sen(\frac{\theta}{2})) \\ p = (0, (Sen(\varphi_p).Cos(\lambda_p), Sen(\varphi_p).Sen(\lambda_p), Cos(\varphi_p)) \\ P_{ROT} \text{es de la forma } P_{ROT} = (0, \bar{Vrot}) \text{ con } \bar{Vrot} = (X_R, Y_R, Z_R)$$

$$\text{Sea } P_{ROT} = q.p.\bar{q} = (Cos(\frac{\theta}{2}), \bar{u}.Sen(\frac{\theta}{2})).(0, \bar{p}).(Cos(\frac{\theta}{2}), -\bar{u}.Sen(\frac{\theta}{2}))$$

$$\text{Con: } \bar{u} = (Sen(\varphi_a).Cos(\lambda_a), Sen(\varphi_a).Sen(\lambda_a), Cos(\varphi_a)) \\ \bar{p} = (Sen(\varphi_p).Cos(\lambda_p), Sen(\varphi_p).Sen(\lambda_p), Cos(\varphi_p))$$

$$\Rightarrow P_{ROT} = q.p.\bar{q} \\ q.p.\bar{q} = (0, Sen^2(\frac{\theta}{2}).(\bar{u}.\bar{p}.\bar{u}) + Cos^2(\frac{\theta}{2}).\bar{p} - 2.Cos(\frac{\theta}{2}).Sen(\frac{\theta}{2}).(\bar{p} \wedge \bar{u}) - Sen^2(\frac{\theta}{2}).((\bar{u} \wedge \bar{p}) \wedge \bar{u}))$$

$$\text{Finalmente: } \varphi_{p'} = \text{ARC Tan} \left[\frac{\sqrt{(X_R)^2 + (Y_R)^2}}{Z_R} \right]$$

$$\lambda_{p'} = \text{ARC Tan} \left[\frac{Y_R}{X_R} \right]$$

3. Conclusiones

A continuación podremos ver reflejado en una tabla y un grafico, los resultados obtenidos mediante la experimentación realizada con el software creado para las mediciones:

Cantidad de rotaciones	Rotaciones con cuaterniones		Rotaciones con esféricas	
	datos cuaterniones	datos esféricas	datos cuaterniones	datos esféricas
10	0	1	0	0
100	0	2	2	1
1000	7	11	12	6
10000	25	66	81	39
100000	88	197	413	266
200000	140	421	889	531
500000	328	983	2215	1295
700000	1107	2262	4119	1809
900000	1560	3385	5086	2324
1000000	2091	5678	6256	3525

Figura 4: Gráfico de barras con resultados

Tiempo en milisegundos

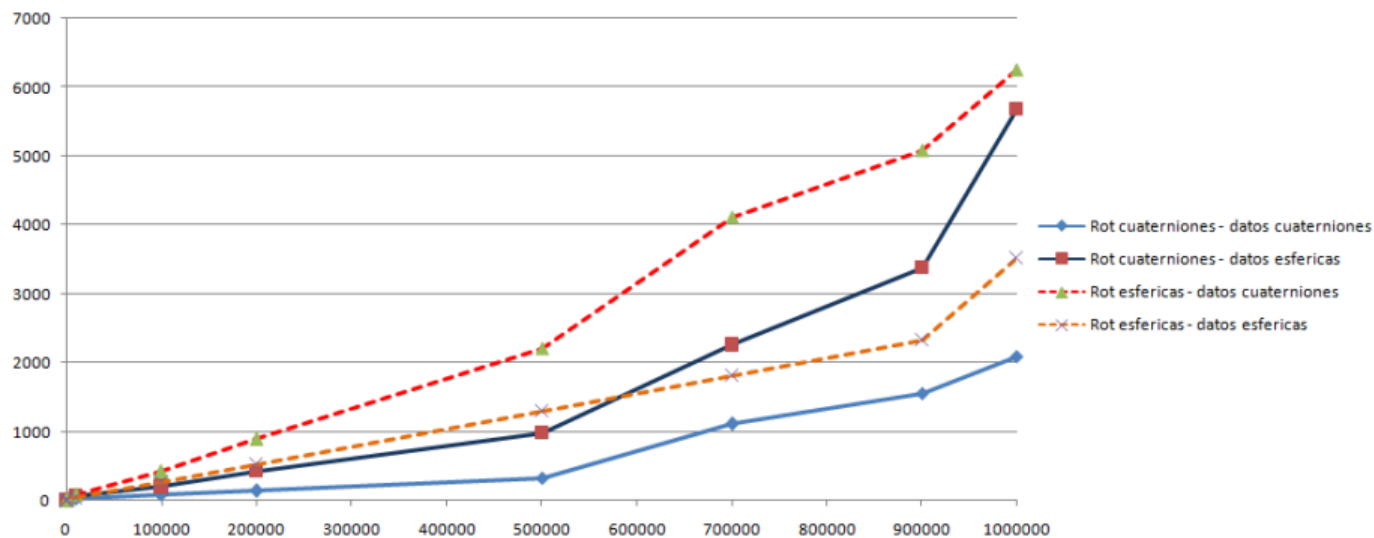


Figura 5: Gráfico extendido

Con la cantidad de datos empleados para medir la eficiencia de las rotaciones mediante cuaterniones y coordenadas esféricas se puede ver que existe una preeminencia de los mejores tiempos logrados por el método de rotaciones mediante cuaterniones.

En el mejor de los casos los tiempos logrados con la mayor cantidad de datos de entrada (un millón) indican que es un 57 por ciento menor que con el método de coordenadas esféricas. También se puede ver que, dependiendo del formato de datos de entrada, los valores mejoran considerablemente.

Esto indica que los procesos empleados para la conversión de los datos a coordenadas cartesianas juegan un papel muy importante en todo el procedimiento usado para las mediciones de tiempos. Esto se puede ver claramente cuando la cantidad de datos es un millón: los tiempos de procesamiento aumentan un 280 por ciento si los datos de origen están en coordenadas esféricas. Por otro lado si analizamos los resultados obtenidos con coordenadas esféricas podemos ver que la incidencia de la conversión de datos a coordenadas esféricas no es tan grande como con las rotaciones con cuaterniones.

Para un millón de datos de entrada los tiempos aumentan solo un 75 por ciento. Si bien la conversión de los datos de entrada no está relacionada directamente con los métodos de rotación analizados esto puede jugar un rol clave dependiendo de las aplicaciones. Es decir, existen áreas donde el formato del origen de los datos condiciona los métodos a elegir. Por cuestiones de capacidad de los sistemas empleados sólo se pudo llegar a una cantidad de un millón de datos de entrada.

En principio esto indicaría que el número de datos de entrada puede llegar a jugar un papel destacado en la elección de un método u otro. Pero por otro lado los gráficos sugieren que a la larga, y con mayor cantidad de datos, el método mediante cuaterniones prevalece. Mas a un si consideramos los enormes volúmenes de información empleados hoy en día.

4. Bibliografía

Referencias

- [1] José Francisco Zelasco , Judith Donayo, Teresa Arcomano: Visión Estereoscópica Búsqueda del Conjunto Mínimo de Puntos Homólogos Para Rotorectificar.
- [2] Escalera, A., Visión por Computador: Fundamentos y Métodos, Pearson Educación 2001.
- [3] Del Castillo, G. T. (1999). La representación de rotaciones mediante cuaterniones. Miscelanea Matematica, 43-50.
- [4] Guerrero, E., Pacheco, R., Pérez, E. (2009). El teorema fundamental del álgebra sobre los cuaterniones. Miscelánea Matemática, 50, 77-88.
- [5] Serrano, E., Sirne, R. O., La Mura, G. (2014). Rotaciones, secuencia aeroespacial y cuaterniones. Una revisión de las relaciones fundamentales.