



Rotaciones - Visión robótica

En búsqueda de la mejora de procesamiento

TITULAR: JOSÉ FRANCISCO ZELASCO
jfzelasco@gmail.com

Lucía Reffle - Francisco I. Pirra - Jonathan Leonel Pepe
luciareffle@gmail.com - fpirra@lsia.fi.uba.ar - jonathan.leonel.pepe@gmail.com
Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ingeniería

June 27, 2017

Resumen

Como trabajo final para la materia "Fundamentos matemática para la visión robótica,"^{en} conjunto con "Seminario de ingeniería informática", se propuso realizar un desarrollo matemático y en base a esto, implementar un sistema informático, que permita comparar los resultados obtenidos mediante dicho desarrollo.

En este trabajo se buscará $\varphi_{p'}$ y $\lambda_{p'}$ de una rotación de dos formas distintas y estableceremos cuál es la más rápida. Esto lo haremos tanto para rotaciones esféricas y en cuaterniones, a partir de datos aleatorios.

Por ultimo, con estos valores obtenidos, se ingresaran en el sistema desarrollado, para poder evaluar las velocidades y comparar la veracidad de los resultados obtenidos

Índice

1. Introducción	3
2. Desarrollo matemático para encontrar $\varphi_{p'}$ y $\lambda_{p'}$	5
2.1. En esféricas:	5
2.2. En Cuaterniones:	6
3. Conclusiones	7
4. Bibliografía	9

1. Introducción

En matemáticas, el teorema de rotación de Euler dice que cualquier rotación o conjunto de rotaciones sucesivas puede expresarse siempre como una rotación alrededor de una única dirección o eje de rotación principal. De este modo, toda rotación en el espacio tridimensional puede ser especificada a través del eje de rotación equivalente y del ángulo rotado.

En este trabajo se buscará $\varphi_{p'}$ y $\lambda_{p'}$ de una rotación de dos formas distintas y estableceremos cuál es la más rápida. Esto lo haremos tanto para rotaciones esféricas y en cuaterniones, a partir de datos aleatorios.

En rotaciones esféricas el eje de rotación lo resolvemos viendo el problema en el espacio.

$$\widehat{ABE'} \approx \widehat{ABE}$$

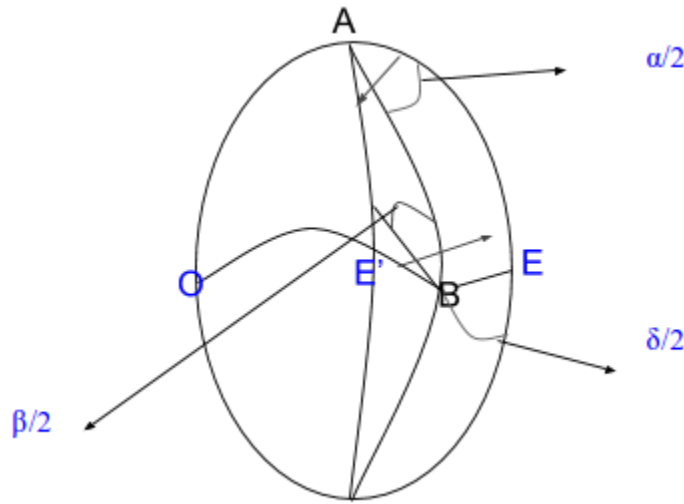


Figura 1: Ilustración del problema en el espacio

y para conseguir las fórmulas que vinculan los triángulos esféricos utilizamos fórmulas que vinculan a un triángulo plano.

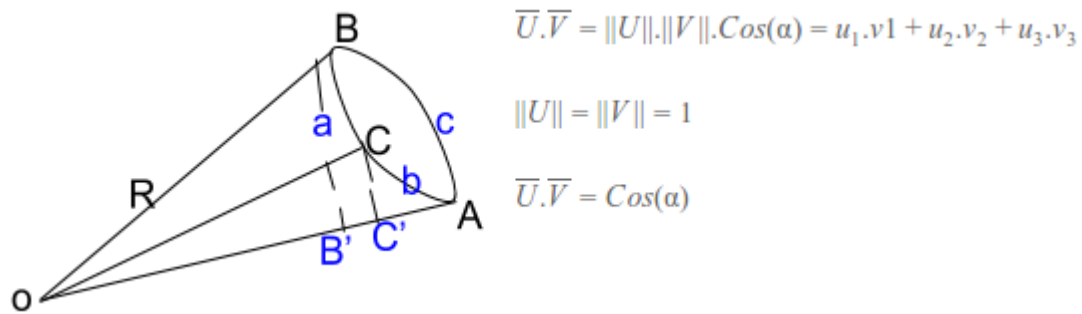


Figura 2: Vinculación del triángulo al plano

$$\begin{aligned}\overline{OB} \cdot \overline{OC} &= \cos(a) = (\overline{OB'} + \overline{B'B}) + (\overline{OC'} + \overline{C'C}) = \overline{OB'} \cdot \overline{OC'} + \overline{OB'} \cdot \overline{C'C} + \overline{B'B} \cdot \overline{OC'} + \overline{B'B} \cdot \overline{C'C} = \\ &= \cos(c) \cdot \cos(b) \cdot \cos(0) + \cos(c) \cdot \sin(b) \cdot \cos(90) + \sin(c) \cdot \cos(b) \cdot \cos(90) + \sin(c) \cdot \sin(b) \cdot \cos(A) \\ \cos(a) &= \cos(c) \cos(b) + \cos(c) \cdot \sin(b) \cdot \cos(A)\end{aligned}$$

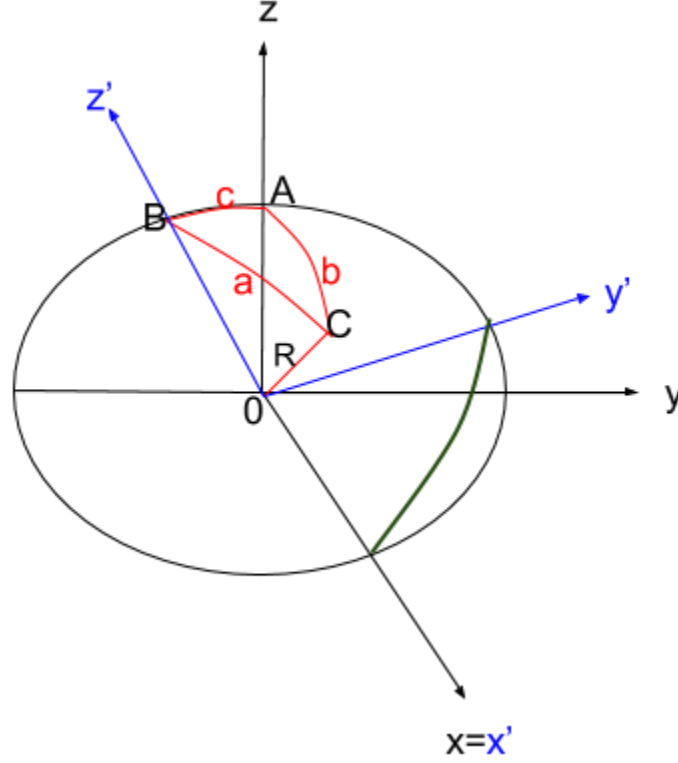


Figura 3: Vinculación del triángulo al plano

$$\begin{aligned}R &= 1 \\ x' &= x \\ y' &= y \cdot \cos(c) + z \cdot \sin(c) \\ z' &= z \cdot \cos(c) - y \cdot \sin(c) \\ x &= \sin(b) \cdot \sin(A) \\ x' &= \sin(a) \cdot \sin(B) \\ y &= \sin(b) \cdot \cos(A) \\ y' &= \sin(a) \cos(B) \\ z &= \cos(b) \\ z' &= \cos(a) \\ \frac{\sin(A)}{\sin(a)} &= \frac{\sin(B)}{\sin(b)} = \frac{\sin(C)}{\sin(c)}\end{aligned}$$

Los cuaterniones unitarios proporcionan una notación matemática para representar las orientaciones y las rotaciones de objetos en tres dimensiones. Comparados con los ángulos de Euler, son más simples de componer y comparados con las matrices de rotación, son más eficientes y más estables numéricamente.

$$\begin{aligned}
 q &= (q_0, q_1, q_2, q_3), q_0 = S \text{ es un valor y } (q_1, q_2, q_3) = \bar{v} \\
 q &= (S, \bar{v}), \bar{q} = (S, -\bar{v}) \\
 q_0 \cdot q_1 &= (q_{00}, q_{01}, q_{02}, q_{03}) \cdot (q_{10}, q_{11}, q_{12}, q_{13}) = (S_0 \cdot S_1, -\bar{v}_0 \cdot \bar{v}_1, S_0 \cdot \bar{v}_1 + S_1 \cdot \bar{v}_0 + \bar{v}_0 \wedge \bar{v}_1) \\
 q \cdot \bar{q} &= q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \\
 q \cdot q^{-1} &= \frac{\bar{q}}{q} \Rightarrow q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} \text{ y cuando } q = 1 \Rightarrow q^{-1} = \bar{q} \\
 P_{ROT} &= (0, \overline{V_{rot}}) = q \cdot p \cdot \bar{q}, \text{ con } p = (0, \bar{v} \text{ y } \|q\| = 1
 \end{aligned}$$

2. Desarrollo matemático para encontrar $\varphi_{p'}$ y $\lambda_{p'}$

Datos:

$$\varphi_A [35, 40], \varphi_P [60, 65], \lambda_A [35, 55], \lambda_P [55, 65], \theta [80, 85]$$

2.1. En esféricas:

Calculo \widehat{AP} como:

$$\begin{aligned}
 \cos(\widehat{AP}) &= \cos(\varphi_A) \cdot \cos(\varphi_P) + \sin(\varphi_A) \sin(\varphi_P) \cos(\widehat{AZP}) \\
 \text{Como } \widehat{AZP} &= \lambda_P - \lambda_A \Rightarrow \cos(\widehat{AZP}) = \cos(\lambda_P - \lambda_A) \Rightarrow \\
 \Rightarrow \widehat{AP} &= \text{ARC Cos}[\cos(\varphi_A) \cdot \cos(\varphi_P) + \sin(\varphi_A) \sin(\varphi_P) \cos((\lambda_P - \lambda_A))]
 \end{aligned}$$

Calculo \widehat{ZAP} como:

$$\frac{\sin(\widehat{ZAP})}{\sin(\varphi_P)} = \frac{\sin(\widehat{AZP})}{\sin(\widehat{AP})}, \text{ con } \sin(\widehat{AZP}) = \sin(\lambda_P - \lambda_A) \text{ y con dos formas de calcular } \sin(\widehat{AP}):$$

$$\blacksquare \quad \sin(\widehat{AP}) = \text{ARC Cos}(\widehat{AP})$$

$$\blacksquare \quad \sin(\widehat{AP}) = \sqrt{1 - \cos^2(\widehat{AP})}$$

$$\Rightarrow \widehat{ZAP} = \text{ARC Sen} \left[\frac{\sin \widehat{AZP} \cdot \sin(\varphi_P)}{\sin(\widehat{AP})} \right]$$

Opción 1:

$$\text{ARC Sen}(\widehat{ZAP}) + \theta = \widehat{ZAP'}$$

Opción 2:

$$\begin{aligned}
 \cos(\widehat{ZAP'}) &= \cos(\widehat{ZAP}) \cdot \cos(\theta) - \sin(\widehat{ZAP}) \cdot \sin(\theta) \\
 \sin(\widehat{ZAP'}) &= \sin(\widehat{ZAP}) \cdot \cos(\theta) + \cos(\widehat{ZAP}) \cdot \sin(\theta)
 \end{aligned}$$

Calculo $\varphi_{p'}$ como:

$$\begin{aligned}
 \cos(\varphi_{p'}) &= \widehat{ZP'} = \cos(\widehat{ZA}) \cdot \cos(\widehat{AP'}) + \sin(\widehat{ZA}) \cdot \sin(\widehat{AP'}) \cdot \cos(\widehat{ZAP'}) \\
 \text{Como } \widehat{AP'} &= \widehat{AP} \Rightarrow \sin(\widehat{AP'}) = \sin(\widehat{AP}) \text{ y } \cos(\widehat{AP'}) = \cos(\widehat{AP}) \\
 \text{Como } \widehat{ZA} &= \varphi_A \Rightarrow \cos(\widehat{ZA}) = \cos(\varphi_A) \text{ y } \sin(\widehat{ZA}) = \sin(\varphi_A) \\
 \Rightarrow \varphi_{p'} &= \text{ArcCos}[\cos(\varphi_A) \cdot \cos(\widehat{AP}) + \sin(\varphi_A) \cdot \sin(\widehat{AP}) \cdot \cos(\widehat{ZAP'})]
 \end{aligned}$$

Calculo $\lambda_{p'}$ como:

$$\frac{\widehat{Sen(P'ZA)}}{\widehat{Sen(P'A)}} = \frac{\widehat{Sen(ZAP')}}{\widehat{Sen(ZP')}} \\ \text{Como } \widehat{ZP'} = \varphi_{p'} \Rightarrow \widehat{Sen(ZP')} = \widehat{Sen(\varphi_{p'})} \\ \text{Como } \widehat{P'A} = \widehat{PA} \Rightarrow \widehat{Sen(P'A)} = \widehat{Sen(PA)} \\ \widehat{P'ZA} = \text{ARC Sen} \left[\frac{\widehat{Sen(ZAP')} \cdot \widehat{Sen(PA)}}{\widehat{Sen(\varphi_{p'})}} \right]$$

$$\text{Finalmente } \lambda_{p'} = \lambda_A - \widehat{P'ZA}$$

2.2. En Cuaterniones:

$$P_{ROT} = q.p.\bar{q}$$

Donde:

$$q = (Cos(\frac{\theta}{2}), (Sen(\varphi_A).Cos(\lambda_A), Sen(\varphi_A).Sen(\lambda_A), Cos(\varphi_A)).Sen(\frac{\theta}{2})) \\ = (Cos(\frac{\theta}{2}), -(Sen(\varphi_A).Cos(\lambda_A), Sen(\varphi_A).Sen(\lambda_A), Cos(\varphi_A)).Sen(\frac{\theta}{2})) \\ p = (0, (Sen(\varphi_p).Cos(\lambda_p), Sen(\varphi_p).Sen(\lambda_p), Cos(\varphi_p)) \\ P_{ROT} \text{es de la forma } P_{ROT} = (0, \bar{Vrot}) \text{ con } \bar{Vrot} = (X_R, Y_R, Z_R)$$

$$\text{Sea } P_{ROT} = q.p.\bar{q} = (Cos(\frac{\theta}{2}), \bar{u}.Sen(\frac{\theta}{2})).(0, \bar{p}).(Cos(\frac{\theta}{2}), -\bar{u}.Sen(\frac{\theta}{2}))$$

$$\text{Con: } \bar{u} = (Sen(\varphi_a).Cos(\lambda_a), Sen(\varphi_a).Sen(\lambda_a), Cos(\varphi_a)) \\ \bar{p} = (Sen(\varphi_p).Cos(\lambda_p), Sen(\varphi_p).Sen(\lambda_p), Cos(\varphi_p))$$

$$\Rightarrow P_{ROT} = q.p.\bar{q} \\ q.p.\bar{q} = (0, Sen^2(\frac{\theta}{2}).(\bar{u}.\bar{p}.\bar{u}) + Cos^2(\frac{\theta}{2}).\bar{p} - 2.Cos(\frac{\theta}{2}).Sen(\frac{\theta}{2}).(\bar{p} \wedge \bar{u}) - Sen^2(\frac{\theta}{2}).((\bar{u} \wedge \bar{p}) \wedge \bar{u}))$$

$$\text{Finalmente: } \varphi_{p'} = \text{ARC Tan} \left[\frac{\sqrt{(X_R)^2 + (Y_R)^2}}{Z_R} \right]$$

$$\lambda_{p'} = \text{ARC Tan} \left[\frac{Y_R}{X_R} \right]$$

3. Conclusiones

A continuación podremos se expondrá en una tabla y gráfico correspondiente, los resultados obtenidos mediante la experimentación con el software desarrollado, para poder realizar las mediciones:

Cantidad	Rot. Esfericas, Arc-SenCos	Rot. Esfericas, Arc-Arc	Rot. Esfericas Raiz-SenCos	Rot. Esfericas Raiz-Arc	Rot. Cuaterniones
10	0	0	0	0	0
100	0	0	0	0	0
1000	6	6	6	5	4
10000	30	27	32	13	15
100000	297	265	297	266	125
200000	610	534	609	531	235
300000	897	797	912	828	348
500000	1459	1796	1497	1385	619
800000	2335	2148	2462	2250	937
1000000	3281	2601	3016	2750	1156

Figura 4: Resultados obtenidos, en milisegundos

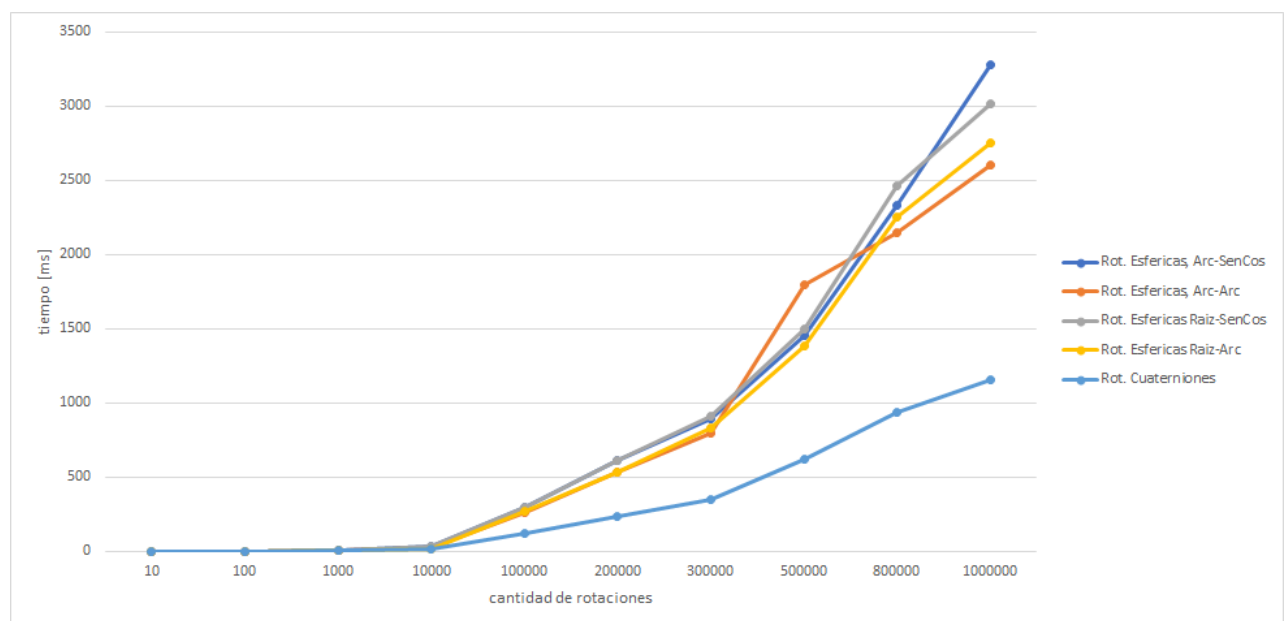


Figura 5: Gráfico extendido, comparando métodos

Como primera observación, es interesante notar que con pocos datos, prácticamente la velocidad de todos los algoritmos es la misma. A medida que se aumenta la cantidad de datos a procesar, es donde se puede comenzar a observar la diferencia entre los mismos, y podemos establecer algunas conclusiones mas concisas.

En el caso limite, los tiempos logrados con la mayor cantidad de datos de entrada (un millón) indican que el método por cuaterniones es un 138 por ciento mas veloz, que el mejor de los demás métodos por coordenadas esféricas, que resulto ser la opción ArcCos-ArcSen.

Analizando los métodos de rotaciones por coordenadas esféricas, podemos ver claramente que a medida que los datos crecen a volúmenes muy grandes (tendiendo a 1 millón de datos), se puede establecer un orden (de mejor tiempo logrado, a peor), de los algoritmos estudiados:

1. Opción ArcCos - ArcSen
2. Opción Raiz - ArcSen
3. Opción Raiz - SenCos
4. Opción ArcCos - SenCos

En conclusión esto indicaría que el número de datos de entrada puede llegar a jugar un papel destacado en la elección de un método u otro. Sin embargo, los gráficos sugieren que a la larga, y a medida que crece el cardinal de datos, el método de cuaterniones prevalece. Y por ultimo, entre los metodos de coordenadas esféricas, el mejor observado es la opcion por ArcCos - ArcSen.

Nos parece muy importante resaltar, que hoy en día, el uso de big data, data mining, requieren el procesamiento de grandes volúmenes de información conjunta, de modo que es imprescindible tener en cuenta cómo varía la eficacia de los algoritmos, al crecer la cantidad de información procesada.

4. Bibliografía

Referencias

- [1] José Francisco Zelasco , Judith Donayo, Teresa Arcomano: Visión Estereoscópica Búsqueda del Conjunto Mínimo de Puntos Homólogos Para Rotorectificar.
- [2] Escalera, A., Visión por Computador: Fundamentos y Métodos, Pearson Educación 2001.
- [3] Del Castillo, G. T. (1999). La representación de rotaciones mediante cuaterniones. Miscelanea Matematica, 43-50.
- [4] Guerrero, E., Pacheco, R., Pérez, E. (2009). El teorema fundamental del álgebra sobre los cuaterniones. Miscelánea Matemática, 50, 77-88.
- [5] Serrano, E., Sirne, R. O., La Mura, G. (2014). Rotaciones, secuencia aeroespacial y cuaterniones. Una revisión de las relaciones fundamentales.