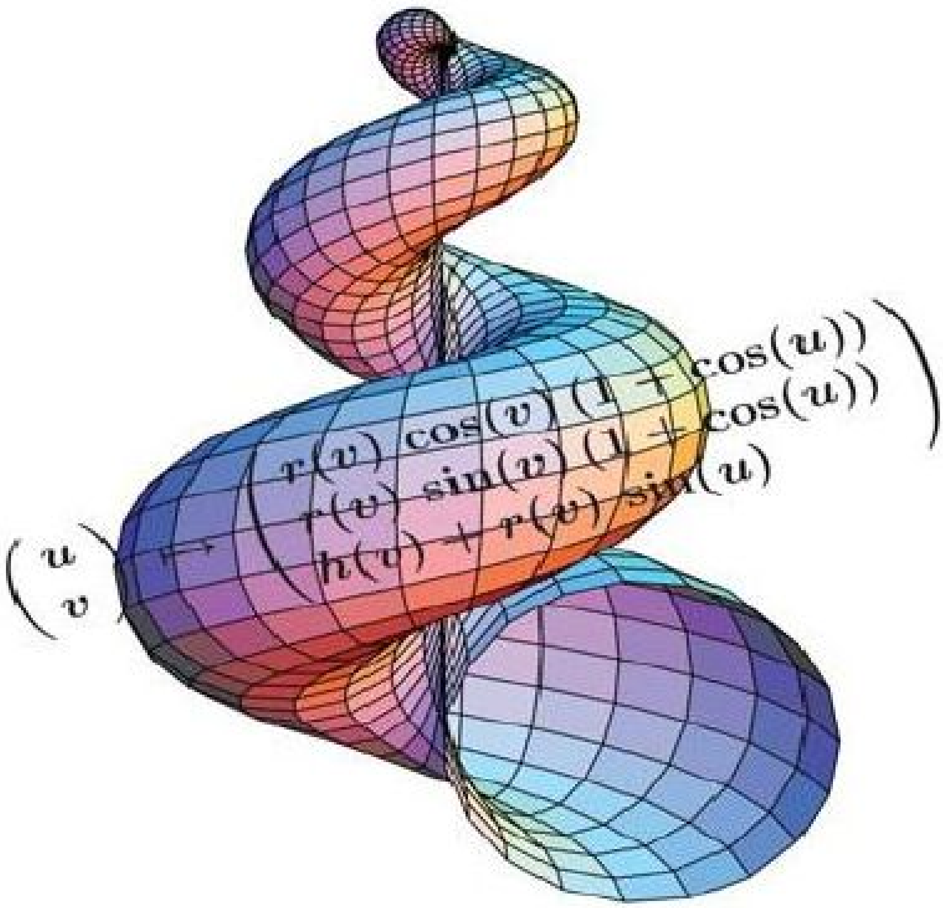
Leistungskurs Mathematik NRW

26. April 2011

von: Fabian Nick



Über dieses Dokument:
Dieses Dokument beruht auf den Mitschriften aus dem Mathematikunterricht von Frau M. Peters im Leistungskurs des Abiturjahrgangs 2008 am Nicolaus Cusanus Gymnasium Bergisch Gladbach (NRW). Seit dem Abitur im April 2008 wird dieses Dokument ständig Verbesserungen und Erweiterungen unterzogen.
Dies Aufzeichnungen sind weder vollständig, noch vollständig korrigiert. Es könnten also sowohl Rechtschreibfehler als auch **inhaltliche Fehler** vorhanden sein. Verbesserungsvorschläge, Korrekturen etc sind gerne willkommen unter fp.nick@gmail.com

Das Themengebiet *Stochastik* fehlt in diesem Skript (noch), da es auch im Unterricht nur angerissen wurde und die Informationen somit recht beschränkt sind. Wer Interesse daran hat, zur Vervollständigung dieses Skripts beizutragen, kann sich gerne über die unten angegebenen Kontaktdaten bei mir melden. LaTeX Kenntnisse sind dabei in jedem Fall hilfreich!
Weiterhin ist auch ein Teil mit Übungsaufgaben zu den einzelnen Kapiteln geplant. Wer hier mitwirken will ist ebenfalls herzlich willkommen!

Diskutiert werden kann unter
http://www.matheboard.de/thread.php?threadid=366144

Kontaktaufnahme zum Autor bitte unter fp.nick@gmail.com

Fabian Nick im Februar 2009

Symbole

Symbol	**sprachliche Fassung**	**Beispiel**
$\wedge$	und	
$\vee$	oder	
$\in$	ist Element in / liegt in	$P \in g$ kann z.B. bedeuten, dass der Punkt P auf der Geraden g liegt.
$\cap$	geschnitten mit	$E \cap g$ ist zum Beispiel der Schnitt einer Ebene E mit der Geraden g, also in der Regel ein Punkt, oder aber auch die Gerade g selbst.
$\parallel$	parallel	
$\equiv$	identisch	
$\perp$	senkrecht (orthogonal)	

Inhaltsverzeichnis

Teil 1

Analysis

KAPITEL 1

Differentialrechnung mit rationalen Funktionen

1. Motivation der Differentialrechnung

Ziel der Differentialrechnung ist, möglichst viele Aussagen über das Verhalten einer Funktion zu machen. Dazu gehört zum Beispiel das Bestimmen von Extremstellen der Funktion.
Die Differentialrechnung bedient sich dazu dem Mittel der *Ableitung*, die das Steigungsverhalten der Funktion beschreibt. Die Ableitung $f'(x_0)$ der Funktion f an der Stelle x_0 ist genau gleich der Steigung der Tangenten am Graphen der Funktion f am Punkt x_0. Wie wir diese Steigung ermitteln haben wir in Jahrgangsstufe 11 gelernt (vgl. *Differenzenquotienten*)
Als Begründer der Differentialrechnung gelten im Übrigen sowohl Isaac Newton (1642-1727) als auch Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Die heutige Definition der Ableitung als Grenzwert von Sekantensteigungen geht jedoch auf Augustin Louis Cauchy (1789-1857) zurück.

2. Differenzierbarkeit von Funktionen

Jeder Punkt auf dem Graphen von f muss eine *eindeutige* Tangente haben.
Mathematisch bedeutet dies, dass

$$\lim_{x \nearrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = \lim_{x \searrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

gelten muss, wobei darauf zu achten ist, dass die beiden Grenzwerte auch existieren.

Beispiel 2.1. *Polynome sind differenzierbare Funktionen. Ein Beispiel für eine nicht differenzierbare Funktion liefert $f(x) = |x|$, denn diese Funktion hat in 0 keine eindeutige Tangente.*

Erste Regel für die Ableitungsfunktion:

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Mit dieser Regel kann man Polynomfunktionen ableiten, denn es gilt zusätzlich:

$$(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$$

Beispiel 2.2. *Die Ableitung der Funktion $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x - 1$ lautet $f'(x) = 3x^2 + 4x + 4$.*

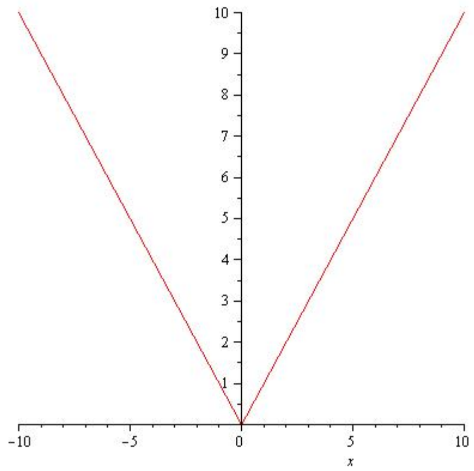


ABBILDUNG 1. $f(x) = |x|$

3. Eigenschaften einer Funktion

- Verhalten von f für $x \to \pm\infty$
- Nullstellen
- Monotonieverhalten
- Extrema
- Wendepunkte
- Symmetrieverhalten
  - Nullpunktsymmetrie
  - y-Achsensymmetrie

4. Vollständige Kurvendiskussion einer Ganz-Rationalen Funktion

(1) Definitionsmenge, Differenzierbarkeit
(2) Ableitungen bilden
(3) Symmetrieverhalten
Nullpunktsymmetrie: $f(-x) = -f(x)$
y-Achsensymmetrie: $f(-x) = f(x)$
(4) Verhalten für $x \to \pm\infty$
(5) Nullstellen ($f(x) = 0$)
(6) Extrema (lokale)
notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$
hinreichende Bedingug: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$
a) $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) < 0 \to$ in x_E liegt ein HOP
b) $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) > 0 \to$ in x_E liegt ein TIP
(7) Wendepunkte notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$
hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$
a) $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) < 0 \to$ in x_W liegt ein L-R Wendepunkt vor.

b) $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) > 0 \rightarrow$ in x_W liegt ein R-L Wendepunkt vor.

(8) Wertetabelle

(9) Graph

Beispiel 4.1 (Diskussion der Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$). *Wir diskutieren hier als Beispiel die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$ nach obigen Schema.*

(1) ***Definitionsmenge*** *und* ***Diffbarkeit****: $D = \mathbb{R}$, da f ein ganzrationales Polynom, daher ist f auch auf dem gesamten Definitionsbereich differenzierbar.*

(2) ***Ableitungen*** *bilden:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 + x \\ f''(x) &= 2x + 1 \\ f'''(x) &= 2 \end{aligned}$$

(3) ***Symmetrie:*** *Das Polynom enthält sowohl gerade als auch ungerade Potenzen von $x \Rightarrow$ keine Aussagen über Symmetrie möglich.*

(4) ***Nullstellen:***

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 = x^2\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}\right) \\ \Rightarrow & f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & x = 0 \vee \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} = 0 \\ \Leftrightarrow & x = 0 \vee x = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind also $x_{N_1} = 0$ und $x_{N_2} = -\frac{3}{2}$.

(5) ***Verhalten gegen $\pm\infty$:***

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) &= -\infty \end{aligned}$$

(6) ***Extremstellen:***
(1) notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$
(2) hinreichende Bedingung: $f''(x) \neq 0$
zu (1):

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2 + x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \end{aligned}$$

zu (2):

$$f''(0) = 1 > 0 \Rightarrow \textit{in } x = 0 \textit{ liegt ein lokales Minimum}$$
$$f''(-1) = -1 < 0 \Rightarrow \textit{in } x = -1 \textit{ liegt ein lokales Maximum}$$

(7) ***Wendestellen:***
(1) notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$
(2) hinreichende Bedingung: $f'''(x) \neq 0$
zu (1):

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

zu (2):

$$f'''\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 > 0 \Rightarrow \textit{in } x = -\frac{1}{2} \textit{ liegt ein Rechts-Links-Wendepunkt.}$$

(8) ***Wertetabelle:***

x	$-\frac{3}{2}$	0	-1	$-\frac{1}{2}$	1
$f(x)$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{6}$
	Nst	*Nst, Min*	*Max*	*WEP*	

(9) ***Graph:***

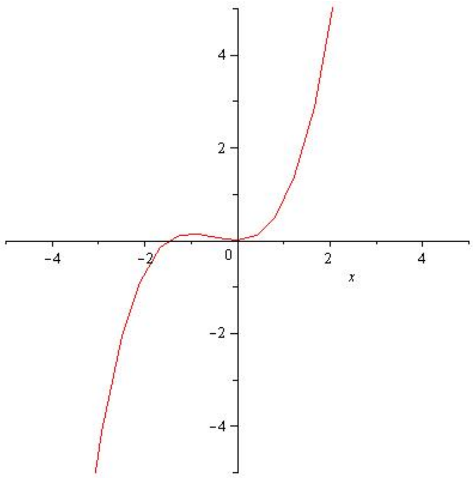


Abbildung 2. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$

5. Funktionenscharen

$f_a(x) = x^4 - ax^2$ — $a \in \mathbb{R} \wedge \mathbb{D} \in \mathbb{R}$
a ist der Scharenparameter. Alle markanten Stellen (Extrema, Wendepunkte, ...) werden in Abhängigkeit von a berechnet. *Wichtig*: Gegebenenfalls sind Fallunterscheidungen notwendig!

Definition 5.1 (Ortskurven). ***Ortskurven*** *sind Graphen, die durch jeweils alle markanten Punkte eines Typs verlaufen. (Also zum Beispiel ein Graph durch alle WEP oder durch alle HOP usw.)*

Beispiel 5.1 (Diskussion einer Funktionenschar). *Gegeben ist die Funktionenschar*

$$f_a(x) = \frac{1}{4}x^4 - ax^2 \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(1) *Wir bilden zunächst die ersten drei* ***Ableitungen****:*

$$\begin{aligned} f_a'(x) &= x^3 - 2ax \\ f_a''(x) &= 3x^2 - 2a \\ f_a'''(x) &= 6x \end{aligned}$$

(2) ***Symmetrie:*** *$f_a(x)$ ist achsensymmetrisch für alle a, denn es kommen nur gerade Potenzen von x in der Funktionsgleichung vor.*

(3) ***Verhalten im Unendlichen:*** *Es ist*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f_a(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{4}x^4 = \infty \\ \lim_{x\to-\infty} f_a(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{4}x^4 = \infty \end{aligned}$$

(4) ***Nullstellen:***

$$\begin{aligned} f_a(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - ax^2 \\ &\Leftrightarrow x^2(\frac{1}{4}x^2 - a) \\ &\Leftrightarrow x^2 = 0 \vee \frac{1}{4}x^2 - a = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm 2\sqrt{a} \end{aligned}$$

Hier sehen wir nun, dass die Nullstellen abhängig von der Wahl des Parameters a sind. Es ergibt sich:

- *für $a < 0$: $x = 0$ ist die einzige Nullstelle, denn $2\sqrt{a}$ ist für $a < 0$ nicht definiert.*
- *für $a > 0$: Die Nullstellen sind $x = 0$, $x = 2\sqrt{a}$, $x = -2\sqrt{a}$*

(5) ***Extrema:***

$$\begin{aligned} f_a'(x) = 0 &\Leftrightarrow x^3 - 2ax = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x^2 - 2a) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 2a = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 2a \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{2a} \end{aligned}$$

Wieder müssen wir die Extrema in Abhängigkeit von a angeben:

- $a < 0$: *$x = 0$ ist das einzige potentielle Extremum. Setze $x = 0$ in $f_a''(x)$ ein und erhalte $f_a''(0) = -2a > 0$ also ist $x = 0$ in diesem Fall ein Tiefpunkt.*
- $a > 0$: *Die Extrema sind $x = 0$, $x = \sqrt{2a}$ und $x = -\sqrt{2a}$. Einsetzen in $f_a''(x)$ liefert, dass $x = \pm\sqrt{2a}$ Tiefpunkte sind und $x = 0$ ein Hochpunkt.*

(6) ***Wendestellen:***

$$\begin{aligned} f_a''(x) = 0 &\Leftrightarrow 3x^2 - 2a = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3}a \\ &\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}a} \end{aligned}$$

- $a < 0$: *Es gibt keine Wendepunkte.*
- $a > 0$: *Die potentiellen Wendestellen sind $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}a}$. Durch Einsetzen in $f_a'''(x)$ erhält man, dass $\sqrt{\frac{2}{3}a}$ ein rechts-links Wendepunkt und $-\sqrt{-\frac{2}{3}a}$ ein links-rechts Wendepunkt ist.*

(7) ***Ortskurve durch die Wendepunkte mit $x = \sqrt{\frac{2}{3}a}$ für $a > 0$:***

Die Wendepunkte haben die Koordinaten $W\left(\sqrt{\frac{2}{3}a}, -\frac{5}{9}a^2\right)$. Bringen wir nun x und y in funktionale Abhängigkeit:

$$\begin{aligned} x = \sqrt{\frac{2}{3}a} &\wedge y = -\frac{5}{9}a^2 \\ a == \frac{3}{2}x^2 &\wedge y = -\frac{5}{9}a^2 \\ \Rightarrow y = -\frac{5}{4}x^4 \end{aligned}$$

Die Ortskurve durch alle Wendepunkte mit $x = \sqrt{\frac{2}{3}a}$ lautet also $y = -\frac{5}{4}x^4$. Die Ortskurve durch die anderen Wendepunkte berechnet man analog.

(8) ***Graph:***

6. Bisher bekannte Ableitungsregeln

(1) Konstantenregel
$f(x) = c \cdot u(x)$, $u(x)$ differenzierbar und $c \in \mathbb{R}$
$\rightarrow$ f ist differenzierbar und

$$f'(x) = c \cdot u'(x) \tag{1}$$

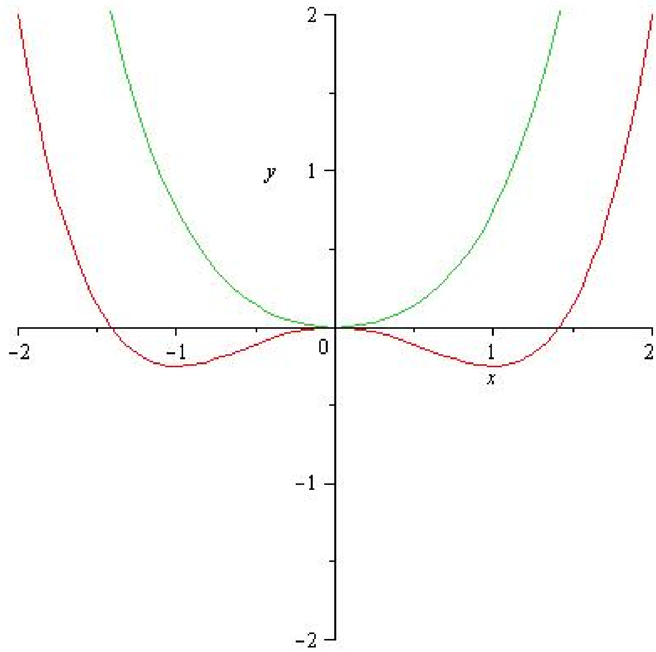


Abbildung 3. Die Graphen der Funktionenschar für $a = 0.5$ (rot) und $a = -0.5$ (grün)

(2) Summenregel
u, v differenzierbar
$f(x) = u(x) + v(x)$ differenzierbar und

$$f'(x) = u'(x) + v'(x) \tag{2}$$

7. Weitere Ableitungsregeln

Satz 7.1 (Kettenregel). *Sei $f(x) = u(v(x))$ und u, v differenzierbar, dann ist auch f differenzierbar und*

$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) \tag{3}$$

Beispiel 7.1. $f(x) = (x^2 + 3)^2$ *also* $u(x) = z^2$ *und* $v(x) = x^2 + 3$

$$f(x) = x^4 + 6x^2 + 9$$
$$f'(x) = 4x^3 + 12x = 2(x^2 + 3)$$

Beweis 7.1 (Kettenregel). *$x_0 \in \mathbb{D}_f$ beliebig, $z = v(x)$ und $z_0 = v(x_0)$ ($z \neq z_0$ „nahe“ x_0)*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right] &= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{u(v(x))-u(v(x_0))}{x-x_0}\cdot\frac{z-z_0}{z-z_0}\right]\\
&= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{u(z)-u(v(z_0))}{z-z_0}\right]\cdot\lim_{x\to x_0}\left[\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}\right]\\
&= \lim_{v(x)\to v(x_0)}\left[\frac{u(z)-u(v(z_0))}{z-z_0}\right]\cdot v'(x_0)\\
&= u'(v(x_0))\cdot v'(x_0)
\end{aligned}$$

Satz 7.2 (Produktregel). *Sei $f(x) = u(x)\cdot v(x)$ und u, v sind differenzierbar. Dann gilt: f ist auch differenzierbar und*

$$f'(x) = v(x)\cdot u'(x) + u(x)\cdot v'(x) \tag{4}$$

Beispiel 7.2. *$f(x) = 2x^3\cdot 4x$ also $u(x) = 2x^3 \Rightarrow u'(x) = 6x^2$ und $v(x) = 4x \Rightarrow v'(x) = 4$*

$$\begin{aligned}
f(x) &= 8x^4\\
f'(x) &= 32x^3\\
&= 24x^3 + 8x^3\\
&= 6x^2\cdot 4x + 4\cdot 2x^3
\end{aligned}$$

Beweis 7.2 (Produktregel). *$x_0 \in \mathbb{D}_f$ beliebig*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right] &= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{u(x)v(x)-u(x_0)v(x_0)}{x-x_0}\right]\\
&= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{u(x)v(x)-u(x_0)v(x)+u(x_0)v(x)-u(x_0)v(x_0)}{x-x_0}\right]\\
&= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{u(x)v(x)-u(x_0)v(x)}{x-x_0}\right]\\
&\quad+\lim_{x\to x_0}\left[\frac{u(x_0)v(x)-u(x_0)v(x_0)}{x-x_0}\right]\\
&= v(x_0)u'(x_0) + u(x_0)v'(x_o)
\end{aligned}$$

Satz 7.3 (Quotientenregel). *Sei $f(x) = u(x)\cdot\frac{1}{v(x)}$ und u, v seien differenzierbar und $v(x) \neq 0$. Dann gilt: f ist auch differenzierbar und*

$$f'(x) = \frac{v(x)\cdot u'(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)} \tag{5}$$

BEWEIS 7.3 (Quotientenregel).

$$f(x) = u(x) \cdot \frac{1}{v(x)}$$

$$sei \quad \frac{1}{v(x)} = w(x) \rightarrow w'(x) = -\frac{1}{v^2(x)} \cdot v'(x)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot w'(x) \\ &= \frac{u'(x)}{v(x)} + u(x) \cdot \frac{-v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \end{aligned}$$

8. Extremalwertaufgaben mit Nebenbedingung

(1) Skizze
(2) Extremale Größe als Formel erfassen (*Extremalbedingung*)
(3) Aufstellen einer *Nebenbedingung*
(4) Reduktion der beiden Gleichungen auf eine Variable (*Zielfunkrion*)
(5) Berechnung des Extremums
(6) Hinreichende Bedingung prüfen und / oder Randwerte betrachten
(7) Rückbezug zum Sachproblem

9. Gebrochen rationale Funktionen

DEFINITION 9.1 (Gebrochen-rationale Funktionen). *Gebrochen-rationale Funktionen sind Quotienten aus zwei ganz-rationalen Funktionen.*
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, *wobei u, v differenzierbar und n Grad von u, m Grad von v.*

$n = m$: *unecht gebrochen*	$n < m$: *echt gebrochen*	$n > m$: *unecht gebrochen*
$f(x) = \frac{2x^2+1}{3x^2-1}$	$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$	$f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$

Für gebrochen-rationale Funktionen gilt:
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \mathbf{N_v}$ ($\mathbf{N_v}$: Nullstellenmenge von v)
$\mathbf{N_f} = \mathbf{N_u}$ (ein Bruch ist genau dann 0, wenn der Zähler 0 ist.)

9.1. Untersuchung einer Funktion in der Nähe der Definitionslücken. Dieser Punkt ist bei der Diskussion einer gebrochen-rationalen Funktion gesondert zu betrachten.

DEFINITION 9.2 (Polstelle). *Ist x_0 eine Nullstelle der Nennerfunktion und nach Kürzen **nicht** Nullstelle der Zählerfunktion, so heißt x_0 **Polstelle** von f*

In der Nähe von x_0 gilt dann: $f(x) \rightarrow \pm\infty$
Wir unterscheiden:

(1) falls $x \to x_0 \land x < x_0 \quad f(x) \to +\infty$
und $x \to x_0 \land x > x_0 \quad f(x) \to +\infty$
dann heißt x_0 *Pol ohne Vorzeichenwechsel.*
(2) falls $x \to x_0 \land x < x_0 \quad f(x) \to +\infty$
aber $x \to x_0 \land x > x_0 \quad f(x) \to -\infty$
dann heißt x_0 *Pol mit Vorzeichenwechsel.*

9.2. Asymptotisches Verhalten. Wichtig: Bei unecht gebrochen-rationalen Funktionen, deren Zählergrad höher ist als der Nennergrad, ist zunächst eine Polynomdivision durchzuführen, um ein ganz-rationales und ein echt gebrochen-rationales Polynom zu erhalten.

DEFINITION 9.3 (Asymptote). *Eine Funktion $a(x)$ heißt* Asymptote *des Graphen f, genau dann wenn* $\lim_{x\to x_0}(f(x) - a(x)) = 0$

9.2.1. *Ergänzung: Regel von l'Hospital.*

SATZ 9.1 (Regel von l'Hospital). *Sei $f(x) = u(x)/v(x)$ eine gebrochen rationale Funktion mit $v(x_0) = 0$. Sind (u, v) differenzierbar in x_0, $u(x_0) = v(x_0) = 0$ und $v'(x_0) \neq 0$ dann ist*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{u'(x)}{v'(x)} \tag{6}$$

9.3. Hebbare Definitionslücken.

DEFINITION 9.4 (Hebbare Definitionslücke). *Ist x_0 eine Nullstelle des Nenners und auch Nullstelle des Zählers und lässt sich der Linearfaktor $(x - x_0)$ vollständig kürzen, so heißt x_0* ***hebbare Definitionslücke****.*

10. Ableitungen wichtiger Funktionen

Zeit	Wissende Personen	Wissende Personen
$t = 0$	1	3
$t = 1$	2	6
$t = 2$	4	12
$t = 3$	8	24
Funktion:	$f(t) = 2^t$	$f(t) = 2^t \cdot 3$

Allgemein: $f(x) = c \cdot a^x$ dabei ist c der Startwert, a der Wachstumsfaktor, $a1$, $a \in \mathbb{R}^{+\neq 1}$ ($0 < a < 1 \to$ Zerfall, $a > 1 \to$ Wachstum)

SATZ 10.1. $f(x + 1) = c \cdot a^{x+1} = c \cdot a \cdot a^x = a \cdot f(x)$

10.1. Ableitung von Exponentialfunktionen. $f(x) = a^x$
$a = e \to$ Eulerzahl
$f(x) = e^x \to$ Exponentialfunktion

wobei:
$e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ mit $n \in \mathbb{N}$

für sehr große n: $e \approx (1 + \frac{1}{n})^n$
$e \approx 2.718$
Ziel: Ableitung für $f(x) = a^x$
$x_0 \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \to 0} \left[\frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} \right] \\ &= \lim_{h \to 0} \left[\frac{a^{h+x_0} - a^{x_0}}{h} \right] \\ &= \lim_{h \to 0} \left[\frac{a^h \cdot a^{x_0} - a^{x_0}}{h} \right] \\ &= \lim_{h \to 0} \left[\frac{a^h - 1}{h} \right] \cdot a^{x_0} \end{aligned}$$

muss noch berechnet werden.

Spezialfall: $f(x) = e^x$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= e^{x_0} \cdot \lim_{h \to 0} \left[\frac{e^h - 1}{h} \right] \\ &= 1 \\ &= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \right] \end{aligned}$$

also bleibt zu zeigen, dass $\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = 1$ für sehr hohe n:

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow e^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{1}{n} \\ &\Leftrightarrow e^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} + 1 \\ &\Rightarrow e = (\frac{1}{n} + 1)^n \\ &\Rightarrow f'(x) = f(x) \end{aligned}$$

10.2. Natürliche Logarithmusfunktion. $e^x \to \overline{f}(x) = \ln(x)$: Natürliche Logarithmusfunktion.
$y = e^x \to x = \ln(y)$
$a = e^{\ln(a)}$ allgemeingültig

Daraus lässt sich eine allgemeingültige Ableitung von Exponentialfunktionen entwickeln:

$$\begin{aligned} f(x) &= a^x \\ &= (e^{(\ln(a))^x} \\ &= e^{\ln(a)x} \\ \Rightarrow f'(x) &= e^{\ln(a)x} \cdot \ln(a) \\ &= \ln(a) \cdot a^x \end{aligned}$$

Zusammenfassend:
$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$
$(e^x)' = e^x$
$f(x) = a^x \Leftrightarrow f(x) = e^{\ln(a)x}$
Es genügt also, die e-Funktion genau zu kennen, und zu diskutieren.

10.2.1. *Ableitung der Logarithmusfunktion.* $f(x) = \ln(x)$

$$\begin{aligned} x &= e^{\ln(x)} \\ 1 &= e^{\ln(x)} \cdot \ln'(x) \\ ln'(x) &= \frac{1}{e^{\ln(x)}} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

10.3. Trigonometrische Funktionen. *Additionstheoreme:*
1. $\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot \sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$
2. $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

Vermutung: $sin'(x) = cos(x)$

Beweis 10.1. $x_0 \in \mathbb{D}_{sin} = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right] = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{\sin(x)-\sin(x_0)}{x-x_0}\right]$$

Sei $x := x_0 + h \Rightarrow x - x_0 = h$, *statt* $x \to x_0$ *nun* $h \to 0$.

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} \right] \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{2\cos(\frac{x_0+h+x_0}{2}) \cdot \sin(\frac{x_0+h+x_0}{2})}{h} \right] \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\cos(x_0 + \frac{h}{2}) \cdot \sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \right] = \cos(x_0)
\end{aligned}
$$

Es folgen analog:
$\cos'(x) = -\sin(x)$
$\tan'(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$

KAPITEL 2

Integralrechnung

1. Die Streifenmethode

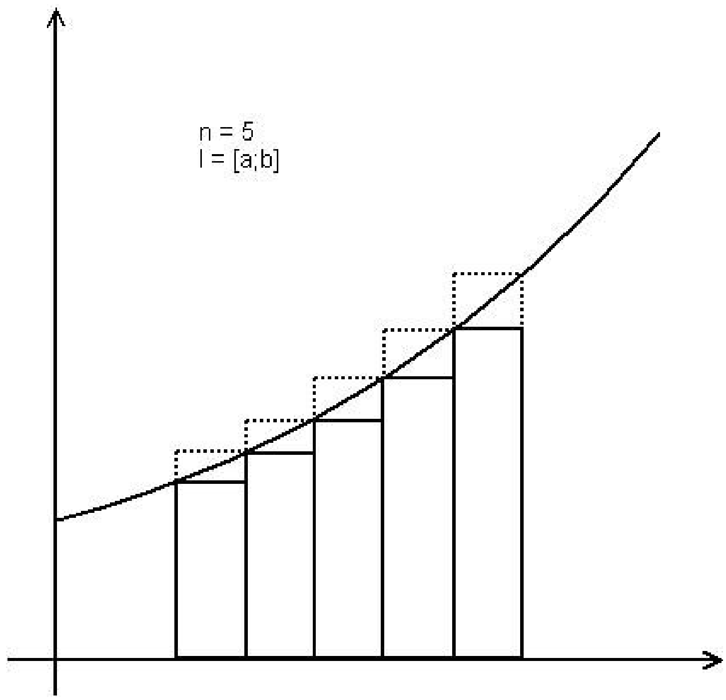


Abbildung 1. Streifenmethode

- Einbeschriebene Rechteckflächen $\rightarrow$ Untersumme U_5
- Umbeschriebene Rechteckflächen $\rightarrow$ Obersumme O_5
- Verfeinerung der Intervalleinteilung auf n gleiche Intervallabschnitte U_n, O_n
- $n \rightarrow \infty$
- $\lim_{n\rightarrow\infty}[U_n] = \lim_{n\rightarrow\infty}[O_n] = A_a^b$

Beispiel 1.1. $f(x) = x$

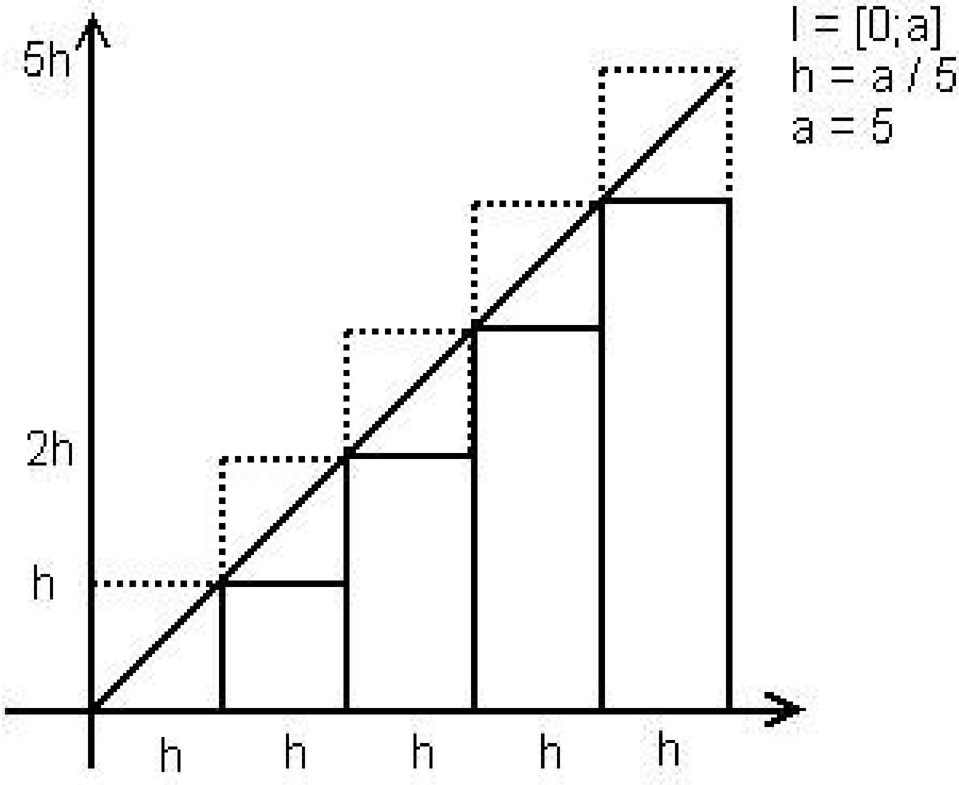


Abbildung 2. $f(x) = x$

Einschub 1.1: Das Summenzeichen

$$1 + 2 + 3 + 4 = \sum_{\nu=1}^{4} \nu = 10$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \sum_{\nu=1}^{n} \nu$$

$U_5 = 1hh + 2hh + 3hh + 4hh = h^2 \cdot (1+2+3+4) = \frac{a^2}{5^2} \cdot \sum_{\nu=1}^{4} \nu$

$O_5 = 1hh + 2hh + 3hh + 4hh + 5hh = h^2 \cdot (1+2+3+4+5) = \frac{a^2}{5^2} \cdot \sum_{\nu=1}^{5} \nu$

$U_n = \frac{a^2}{n^2} \cdot \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu$

$O_n = \frac{a^2}{n^2} \cdot \sum_{\nu=1}^{n} \nu$

Einschub 1.2:
$\sum_{\nu=1}^{n} \nu = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\begin{aligned}
U_n &= \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} \\
&= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{n^2-n}{n^2} \\
O_n &= \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{n^2+n}{n^2} \\
\lim_{n\to\infty} U_n &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{a^2}{2} \cdot \frac{n^2-n}{n^2}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{a^2}{2} \cdot (1-\frac{1}{n})\right] = \frac{a^2}{2} \\
\lim_{n\to\infty} O_n &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{a^2}{2} \cdot \frac{n^2+n}{n^2}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{a^2}{2} \cdot (1+\frac{1}{n})\right] = \frac{a^2}{2}
\end{aligned}$$

Für $f(x) = x$ gilt also $A_0^a = \frac{a^2}{2}$ also $A_a^b = A_0^b - A_0^a = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$
entsprechend gilt für $f(x) = x^2$: $A_0^a = \frac{a^3}{3}$ und so weiter...

2. Stammfunktionen

$F(x) = \frac{x^2}{2} \to F'(x) = f(x)$
$F(x)$ ist die Stammfunktion von $f(x)$

Definition 2.1 (Stammfunktion). *Eine differenzierbare Funktion F heißt* ***Stammfunktion*** *zu einer Funktion f, genau dann wenn gilt: $F'(x) = f(x)$*

Funktion	**Stammfunktion**
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3$ oder $G_{17}(x) = \frac{1}{3}x^3 + 17$ oder $G_c(x) = F(x) + c$

$A_a^b = \frac{1}{3}x^3 + 5]_a^b = \frac{1}{3}b^3 + 5 - (\frac{1}{3}a^3 + 5)$

Stammfunktion $F \rightarrow$ unendliche viele
Grundfunktion f
Ableitungsfunktion $f' \rightarrow$ eindeutig

2.1. Eigenschaften von Stammfunktionen. (Ziel: Bildung von Stammfunktionen folgender Funktionen)
(Voraussetzung: U Stammfunktion von u, V Stammfunktion von v)

Funktion	**Stammfunktion**
$f(x) = x^n \wedge n \in \mathbb{R}^{\neq -1}$	$F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$
$f(x) = c \cdot u(x)$	$F(x) = c \cdot U(x)$
$f(x) = u(x) + v(x)$	$F(x) = U(x) + V(x)$
$f(x) = x^{-1}$	noch nicht mglich
$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	noch nicht möglich
$f(x) = u(rx + b)$ (lineare Verkettung)	$F(x) = \frac{1}{r}U(rx + b)$

3. Bestimmte Integrale

Beliebige Funktion f (stetig, d.h. „ohne Lücke und Sprung“)
Unterteilt in n gleiche Teilintervalle $[a, b]$ der Breite Δx

$$U_n = \sum_{\nu=0}^{n-a} f(a + \nu\Delta x)\Delta x$$

$$O_n = \sum_{\nu=1}^{n} f(a + \nu\Delta x)\Delta x$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \int_a^b f(x)dx$$

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \int_a^b f(x)dx$$

3.1. Eigenschaften des bestimmten Integrals.

(1) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$

(2) Faktorregel: $k \cdot \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b k \cdot f(x)dx$

(3) Summenregel: $\int\limits_a^b f(x) + g(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$

(4) Grenzen vertauschen: $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$

(5) Intervalladditivität: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$ wenn $a < c < b$

(6) Monotonie des Integrals:

$f(x) \leq g(x)$ auf $I = [a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$

(7) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt$

(8) falls $f(-x) = -f(x) \wedge x \in I = [a,b]$ dann $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 0$

4. Fläche zwischen Graph und x-Achse

Wenn der Graph auf $I = [a,b]$ *keine* Nullstelle besitzt, dann errechnet man die Fläche wie folgt:

$A = \left| \int\limits_a^b f(x)dx \right|$

Besitzt der Graph auf $I = [a,b]$ Nullstellen, so muss der Intervall in Teilintervalle unterteilt werden. Sei zum Beispiel c die (einzige) Nullstelle von $f(x)$. Dann ist die Fläche $A = \left| \int\limits_a^c f(x)dx \right| + \left| \int\limits_c^b f(x)dx \right|$

5. Fläche zwischen zwei Graphen

5.1. ... die sich auf [a,b] nicht schneiden. $A = \left| \int\limits_a^b f(x) - g(x)dx \right|$

5.2. ... die sich auf [a,b] schneiden.

(1) Schnittpunkte berechnen
(2) Teilflächen berechnen
(3) Teilflächen aufaddieren

6. Menge aller Integralfunktionen

$I_a(x) = \int\limits_a^x f(x)dx = F(x)]_a^x = F(x) - F(a)$

7. Hauptsatz der Integral und Differentialrechnung

SATZ 7.1 (Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung). *Sei f eine auf $I = [a, b]$ stetige Funktion. Dann gilt für die Funktion I_a mit $I_a = \int_a^x f(t)dt$:*

$$I_a'(x) = f(x)$$
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \in \mathbb{R}$$

8. Einschub: Vollständige Induktion (LK)

Axiom von Peano:
M Menge.

$$1 \in M \wedge (n \in M \Rightarrow n + 1 \in M) \Rightarrow M = \mathbb{N}$$

BEISPIEL 8.1. *Summe aller ungeraden Zahlen:* $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$

BEWEIS 8.1.
(1) *Verankerung:*
$A_{(1)}$ ist wahr, denn $1 = 1^2$
(2) *Schluss von n auf $n + 1$:*
$A_{(n+1)}$ ist wahr unter Verwendung der Wahrheit von $A_(n)$
$A_{(n+1)}$:
$1 + 3 + 5 + ... + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2$
$\Leftrightarrow 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2$
$\Leftrightarrow n^2 + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2$
$\Leftrightarrow n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$
$\Leftrightarrow (n + 1)^2 = (n + 1)^2$
(3) *Nach Peano Axiom gilt damit: $A_{(n)} \forall n \in \mathbb{N}$*

9. Rotationskörper (LK)

... sind Körper, die durch die Rotation einer Fläche um eine Achse entstehen.
Ziel: Berechnung des Volumens mit Hilfe der Integralrechnung.

Sei f auf $I = [a, b]$ stetig.

Gesamtvolumen $\rightarrow$ unendlich viele Zylinder.

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum^{n-1} \pi f^2(x)dx$$
$$= \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

= Volumen eines Rotationskörper, der durch f erzeugt wird.
Wird z.B. benutzt, um das Volumen einer Kugel herzuleiten!
Für einen Rotationskörper, der von zwei Funktionen vorgegeben wird, gilt:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx - \pi \int_a^b g^2(x)dx$$
$$= \pi \int_a^b f^2(x) - g^2(x)dx$$

10. Weitere Integrationsregeln (LK)

10.1. Partielle Integration. Dient zum Integrieren von Produkten von Funktionen.
Produktregel: $(u(x) \cdot v(x))' = v'(x)u(x) + u'(x)v(x)$ u, v differenzierbar und stetig; u', v' stetig

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x)$$
$$\Leftrightarrow \int_a^b u(x)v'(x)dx = \int_a^b (u(x)v(x))'dx - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Dies führt zu folgender Regel zum Integrieren von Produkten von Funktionen:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx \tag{7}$$

10.2. Integration durch Substitution. (Basiert auf der Kettenregel der Differentialrechnung)
Kettenregel:
$u \circ v(x) = u(v(x))$; u, v diffbar
$(u \circ v(x)') = (u(v(x)))' = u'(v(x) \cdot v'(x))$

Sei U Stammfunktion von u: $U'(x) = u(x)$

$$(U(x))' = U'(v(x)) \cdot v'(x) = u(v(x) \cdot v'(x)$$

$$\Rightarrow \int\limits_a^b u(v(x)) \cdot v'(x)dx = \int\limits_a^b U'(v(x))dx = U(v(x))]_a^b = U(v(b) - U(v(a))$$

Substitution: $= U(z)]_{v(a)}^{v(b)}$
Daraus ergibt sich folgende Regel:

(8) $$\int\limits_a^b u(v(x)) \cdot v'(x)dx = U(z)]_{v(a)}^{v(b)}$$

Teil 2

Lineare Algebra

KAPITEL 3

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$$

heißt *lineare Gleichung*
x_i Variablen
a_i Koeffizienten
b absolut gleich
x_i sind stets linear (1. Potenz)

1. Allgemeines Gleichungssystem

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n$$

n Unbekannte
m Gleichungen
a_{ij} heißen *Koeffizienten*

2. Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{22} & a_{33} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$$

wobei a_{1j} die Koeffizienten der Unbekannten in der ersten Gleichung sind, a_{2j} die Koeffizienten in der zweiten Gleichung usw.

3. Gauß-Verfahren

Das Gauß-Verfahren dient zur Überführung einer Matrix in Zeilenstufenform, sodass das zugehörige LGS einfach zu lösen

Beispiel 3.1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & -4 & -3 & -7 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

Diese Matrix ist in Zeilenstufenform, da sich unterhalb der Hauptdiagonalen (1, 4, -3) nur Einträge = 0 befinden. Das Gleichungssystem ist nun einfach zu lösen.

Erlaubte Umformungen im Gauß-Verfahren:

- Zeilen komplett vertauschen. ($\xrightarrow{I \leftrightarrow III}$)
- Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl verschieden von Null. ($\xrightarrow{I \cdot \lambda}$)
- Addition von zwei Gleichungen. ($\xrightarrow{I+III}$)

3.1. Verschiedene Fälle. An drei Beispielen:

Beispiel 3.2. $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$ *eindeutig lösbar*

Beispiel 3.3. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$ *nicht lösbar* $(-1 \neq 0)$

Beispiel 3.4. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

unendlich viele Lösungen (zwei linear abhängige Zeilen)

$$\mathbb{L} = \{(1-r|3r|r)|r \in \mathbb{R}\}$$

wobei r Lösungsparameter *genannt wird.*

4. LGS mit Parameter (Schar von LGS)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 + 2t \\ x_1 - x_2 - x_3 &= t \end{aligned}$$

t heißt *Scharparameter* $\rightarrow$ unendlich viele lineare Gleichungssysteme
Wichtig: Beim Lösen eines solchen Systems müssen unter Umständen Fallunterscheidungen gemacht werden! (Nicht durch Null teilen!)

5. Erweitertes Gauß-Verfahren

Beim erweiterten Gauß-Verfahren versuchen wir, die Matrix nicht nur in Zeilenstufenform zu bringen, sondern sie zur *Einheitsmatrix* umzuformen.
Wir müssen die Matrix also so umformen, dass alle Einträge Null sind, außer diejenigen auf der Diagonalen und diese sind gleich 1.

Beispiel für ein 3x3 System nach dem erweiterten Gauß-Verfahren:

Beispiel 5.1. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{array}\right)$

Die Lösungen lassen sich nun ganz einfach ablesen:
$x_1 = b_1$
$x_2 = b_2$
$x_3 = b_3$

KAPITEL 4

Vektoriell-analytische-Geometrie

$\rightarrow$ geometrische Beziehungen und Sachverhalte arithmetisch erfasst und untersucht.

1. Einführung des Vektorbegriffs

Ein Vektor im geometrischen Sinne ist eine Art „Abbildung“ von einem Punkt zum andern.
Name eines Vektors (Pfeils):

$$\vec{PP'} = \vec{a}$$

Pfeil $\Rightarrow$ Pfeilklasse = Vektor

Vektoren unterscheiden sich durch:

- unterschiedliche Richtung
- unterschiedliche Orientierung
- unterschiedliche Länge

Weitere Definitionen:

- Länge eines Vektors $|\vec{a}| = |-\vec{a}|$
- $\vec{PP} = \vec{0}$ Nullvektor mit $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ haben dieselbe Länge, dieselbe Orientierung und dieselbe Richtung.

2. Vektoraddition

Vektoren werden addiert, indem man den Schaft des zweiten Vektors an die Spitze des ersten Vektors legt. Der *resultierende* Vektor hat dann den Schaft des ersten Vektors und die Spitze in der Spitze des zweiten Vektors.

2.1. Länge von Summenvektoren.

$$\begin{array}{lcl} \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} & : & |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \\ \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b} & : & |\vec{a} + \vec{b}| = ||\vec{a}| - |\vec{b}|| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| \\ \vec{a} // \vec{b} & : & |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| \ (\textit{Dreiecksungleichung}) \end{array}$$

3. Skalarmultiplikation

Definition 3.1 (Skalar). *Unter einem **Skalar** versteht man i.d.R. eine reelle Zahl.*

3.1. Gesetze zur Skalarmultiplikation. Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und alle $\vec{a}, \vec{b} \in V$ (V = Vektorraum. siehe unten.) gilt:

- $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{a}$
- $(\mu + \lambda) \cdot \vec{a} = \mu\vec{a} + \lambda\vec{a}$
- $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \vec{b}$
- $\lambda\vec{0} = \vec{0}$
- $\lambda\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \vec{a} = 0$

4. Vekorräume (LK)

Definition 4.1 (Vektorraum). *Eine nicht leere Menge V nennt man einen **Vektorraum** und ihre Elemente **Vektoren**, wenn*

(1) *es eine „Addition“ gibt, die Elementen $\vec{a}, \vec{b} \in V$ jeweils genau ein Element $\vec{a} + \vec{b} \in V$ zuordnet, und hierbei gilt:*
  (a) *Es gibt ein „Nullelement“ $\vec{0} \in V$ mit $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ für alle $\vec{a} \in V$*
  (b) *Zu jedem $\vec{a} \in V$ gibt es ein „Gegenelement“ $-\vec{a} \in V$ mit $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$*
  (c) *Für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ gilt $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (Assoziativgesetz)*
  (d) *Für alle $\vec{a}, \vec{b} \in V$ gilt: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (Kommutativgesetz)*

(2) *es eine „Multiplikation“ gibt, die jeweils einer reellen Zahl λ und einem Element $\vec{a} \in V$ genau ein Element $\lambda \cdot \vec{a} \in V$ zuordnet und hierbei gilt:*
  (a) *Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{a}, \vec{b} \in V$ gilt: $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ und für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\vec{a} \in V$ gilt: $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$. (Distributivgesetze)*
  (b) *Für alle $\lambda, \mu \in (R)$, $\vec{a} \in V$ gilt: $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$. (Assoziativgesetz)*
  (c) *Für alle $\vec{a} \in V$ gilt: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.*

5. Vektorketten

Definition 5.1 (Vektorkette). *Die Summe aus endlich vielen Vektoren heißt **Vektorkette**.*

Offene Vektorkette: $\vec{a} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{x}$
Geschlossene Vektorkette: $\vec{a} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$
Jede offene Vektorkette lässt sich schließen, indem man den Gegenvektor des resultierenden Vektors addiert: $\vec{a} + \vec{c} + \vec{d} + (-\vec{x}) = \vec{0}$

6. Linearkombinationen

Definition 6.1 (Linearkombination).

$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda_n\vec{a_n} = \vec{x}$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *und* $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n} \in \mathbb{R}$ *heißt Linearkombination aus den Vektoren* $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}$
Oder anders:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$$

7. Vektorräume (Beispiele) (LK)

Ebene $\mathbb{R}^2$
Raum $\mathbb{R}^3$

Ebene:
$P(P_1|P_2)$
Ortsvektor zu P: $\vec{0p} = \vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$

$$\mathbb{R}^2 = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

ist ein Vektorraum.

Raum:
$P(P_1|P_2|P_3)$
x_1-x_2 - Ebene
x_2-x_3-Ebene
x_1-x_3-Ebene
Ortsvektor zu P: $\vec{0p} = \vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$

$$\mathbb{R}^3 = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} | x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

ist ein Vektorraum.

Allgemein (**n-Tupel**):

$$\mathbb{R}^n = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} | x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

ist ein Vektorraum. (wobei $n \in \mathbb{N}$)

Definition 7.1 (Addition im $\mathbb{R}^n$). *Seien* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. *Dann gilt:* $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$

Definition 7.2 (Skalarmultiplikation im $\mathbb{R}^n$). *Seien* $\lambda \in \mathbb{R}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. *Dann gilt:* $\lambda\vec{v} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix}$

Beweis 7.1 ($\mathbb{R}^n$ ist ein Vektorraum.). *Zu beweisen sind die Axiome aus Definition 4.1. In diesem Fall größtenteils sehr einfach und daher hier ausgelassen.*

Länge von Elementen des $\mathbb{R}^n$.
Sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$

8. Unterverktorräume (LK)

Beispiel 8.1. *Sei* $U = \{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} | u_1, u_2 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$ *ein Vektorraum (x_1-x_2 - Ebene). Wir sagen: U ist ein Unterverktorraum des $\mathbb{R}^n$.*

9. Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren

Definition 9.1 (Lineare Unabhängigkeit). *Vektoren heißen **linear abhängig** (l.a.), wenn mindestens ein Vektor sich als Linearkombination der anderen Vektoren darstellen lässt. Sie heißen **linear unabhängig**, wenn es keine mögliche Linearkombination gibt.*
Anders: Wenn gilt

$$\lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} + \ldots + \lambda_n\vec{v_n} = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1, \ldots, \lambda_n = 0$$

*dann heißen $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$ **linear unabhängig**.*

Um dies zu überprüfen, löst man ein LGS. Ist der Lösungsvektor der Nullvektor, so sind die Vektoren **linear unabhängig**.

9.1. Folgerungen.

(1) drei oder mehr Vektoren im $\mathbb{R}^2$ sind stets l.a.
(2) vier oder mehr Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sind stets l.a.
(3) nimmt man einen von mehreren l.u. Vektoren weg, so sind die restlichen immer noch l.u.

(4) ergänzt man eine Menge l.a. Vektoren durch einen weiteren Vektor, so sind dieser immer noch l.a.

10. Erzeugendensystem (LK)

Definition 10.1 (Erzeugendensystem). *Falls eine Menge von Vektoren es ermöglicht, alle anderen Vektoren eines Vektorraums als Linearkombination darzustellen, so heißt die Menge* ***Erzeugendensystem*** *des Vektorraums. Man sagt: Diese Menge erzeugt den Vektorraum.*

10.1. Basen (LK).

Definition 10.2 (Basis). ***Basis*** *eines Vektorraums nennt man ein Erzeugendensystem mit minimal notwendigen, l.u. Vektoren.*
d.h.: $\mathbb{R}^n \to \dim \mathbb{R}^n = n$
($\dim V$ *= Dimension = Anzahl der Elemente in einer Basis des Vektorraums)*
Standardbasis des $\mathbb{R}^n$*:*

$$\mathbb{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

11. Teilungsverhältnisse

Hier behandeln wir das Berechnen von Teilungsverhältnissen in geometrischen Figuren.

(1) Geschlossene Vektorkette aufstellen, die Teilungspunkt T und gesuchte Teilstrecken enthält.
(2) Alle benötigten Vektoren als Linearkombination der Basisvektoren ausdrücken.
(3) Ordnen nach $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (ggf. $\vec{c}$ usw.).
(4) Da $\vec{a}$ und $\vec{b}$ l.u. sind, müssen die Terme der Koeffizienten von $\vec{a}$ und $\vec{b} = 0$ sein.
(5) LGS lösen.

12. Geraden in vektorieller Darstellung

Bisher im $\mathbb{R}^2$: $y = mx + n$

2-Punkte Form	Punkt-Steigungs-Form
$P(p_1, p_2)$, $Q(q_1, q_2)$	$P(p_1, p_2)$
$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$	$m \in \mathbb{R}$

In vektorieller Darstellung:
Gegeben: Punkte P und Q
Liegt $\vec{x}$ auf der Geraden, so gilt: $\vec{0x} = \vec{p} + \vec{Px} = \vec{p} + \lambda\vec{pq}; \lambda \in \mathbb{R}$, also

auch $\overrightarrow{0x} = \vec{p} + \lambda(\vec{q} - \vec{p}); \lambda \in \mathbb{R}$
Daraus folgt die „2-Punkte-Form“ einer Geradengleichung in Parameterform

$$g : \vec{x} = \vec{p} + \lambda(\vec{q} - \vec{p}); \lambda \in \mathbb{R}$$

und die „Punkt-Richtungs-Form“ einer Geradengleichung in Parameterform

$$g : \vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{u}; \lambda \in \mathbb{R}$$

Bezeichnungen:

- $\vec{p}$ nennt man **Stützvektor**
- $\vec{u}$ nennt man **Richtungsvektor**

Beachte:

- Jedes Vielfache des Richtungsvektors ist auch ein Richtungsvektor
- $\vec{u} = \vec{p} - \vec{q}$ oder $\vec{u} = \vec{q} - \vec{p}$

Was leistet die vektorielle Darstellung einer Geraden?

- Punkttest
- Lagebeziehungen und Schnittpunkte
- Überführung in $y = mx + n$

12.1. Umformen von vektorieller Darstellung in skalare Darstellung. Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x_1 = p_1 + \lambda u_1 \Rightarrow \lambda = {} & \frac{x_1 - p_1}{u_1} \forall u_1 \neq 0 \\ & \wedge x_2 = p_2 + \lambda u_2 \end{aligned}$$

einsetzen:

$$x_2 = p_2 + \frac{x_1 - p_1}{u_1} \cdot u_2 = p_2 + x_1 \cdot \frac{u_2}{u_1} - \frac{p_1 \cdot u_2}{u_1}$$

Also

$$x_2 = \frac{u_2}{u_1} x_1 + p_2 - \frac{u_2}{u_1} p_1$$

12.2. Lagebeziehungen von Geraden in der Ebene. $g : \vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{u}; \lambda \in \mathbb{R}$
$g : \vec{x} = \vec{q} + \mu\vec{v}; \mu \in \mathbb{R}$

parallel		schneiden sich	
identisch	echt parallel	$g \cap h$	$g \perp h$

(1) Untersuchung von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ auf lineare Abhängigkeit: $\vec{u} = \nu\vec{v}$
falls Gleichung wahr $\rightarrow$ parallel
sonst $\rightarrow$ schneiden sich

(2) falls parallel: Punkttest erforderlich: $\vec{p} \in h \vee \vec{q} \in g$
falls wahr $\to$ identisch
sonst $\to$ parallel

(3) *(vorgezogen)* falls Schnittpunkt: Prüfen, ob $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
falls wahr $\to$ senkrecht
sonst $\to$ schneiden sich nicht senkrecht

12.3. Lagebeziehungen von Geraden im Raum. $g : \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}; \lambda \in \mathbb{R}$
$g : \vec{x} = \vec{b} + \mu\vec{v}; \mu \in \mathbb{R}$

1. Schritt Untersuchen von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ auf lineare Abhängigkeit

$\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind l.a.	$\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind l.u.
$g \| h \wedge g \neq h \mid g \equiv h$	$g \cap h = \{S\}$ schneiden sich $\mid g \cap h = \{\}$ windschief

2. Schritt:

$\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind l.a.	$\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind l.u.
Setze $\vec{b}$ in g oder $\vec{a}$ in h	Untersuchung auf Schnittpunkte: $\vec{a} + \lambda\vec{u} = \vec{b} + \mu\vec{v}$
falls positiv: $g \equiv h$	EINE Lösung: S berechnen durch Einsetzen.
falls negativ: $g \| h \wedge g \neq h$	KEINE Lösung: g und h windschief.

13. Das Standard Skalarprodukt

Das (Standard) Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ wird definiert durch

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

woraus direkt folgt $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = |\vec{a}|^2$

13.1. Geometrische Deutung des Skalarprodukts. gegeben: $\vec{a}$, $\vec{b}$ aus $\mathbb{R}^n$
Dann gilt wegen des Kosinussatzes

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos\gamma \tag{9}$$

$$(\vec{b} - \vec{a})^2 = \vec{b}^2 + \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} \tag{10}$$

Daher folgt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle\vec{a}, \vec{b}) \tag{11}$$

13.2. Anwendungen des Skalarprodukts.

- Winkelberechnung zwischen zwei Vektoren (siehe 13.1)
- Winkel zwischen zwei Geraden in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ (siehe 13.1)
- Beweise von elementargeometrischen Sätzen
- Finden eines orthogonalen Vektors ($\vec{a}_\perp$) zu einem Vektor $\vec{a}$
- Finden des normierten Vektors ($\vec{a}_0$) zu einem Vektor $\vec{a}$

13.2.1. *Orthogonale Vektoren* $\vec{a}_\perp$. Aus 13.1 folgt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

in $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow a_\perp = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \vee a_\perp = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^3$: Eine Komponente des Vektors =0 setzen, die anderen vertauschen und einen von beiden mit (-1) multiplizieren.

13.2.2. *Normierte Vektoren* $\vec{a}^0$.

Definition 13.1 (Normierter Vektor). *Ein normierter Vektor* $\vec{a}^0$ *hat den Betrag 1.*
Also:

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

13.3. Eigenschaften des Skalarprodukts.

- Kommutativgesetz: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

  Beweis 13.1. *: Seien* $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$
  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=n}^{n} a_i b_i = \sum_{i=n}^{n} b_i a_i = \vec{b} \cdot \vec{a}$

- Distributivgesetz: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$

  Beweis 13.2. *: Seien* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$
  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \sum_{i=1}^{n} a_i(b_i + c_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + a_i c_i = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} a_i c_i = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$

- $\lambda \vec{a} \cdot \mu \vec{b} = \lambda\mu(\vec{a} \cdot \vec{b})$

14. Projektionsvektoren (LK)

Definition 14.1 (Projektionsvektoren). *Unter dem **Projektionsvektor** $\vec{b_a}$ verstehen wir den Vektor, dessen Vertreter man durch senkrechte Projektion eines Vertreters von $\vec{b}$ in Richtung eines Vertreters von $\vec{a}$ erhält.*

Es gilt: $|\vec{b_a}| = |\vec{b}| \cdot |\cos(\angle \vec{b}, \vec{a})|$

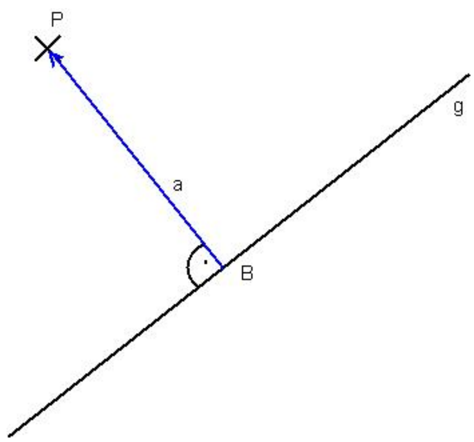
Satz 14.1 (Projektionsvektoren).

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b_a}$$

15. Abstand zwischen einem Punkt und einer Geraden

Der Abstand zwischen einem Punkt P und einer Geraden g ist die Länge des Vektors, der senkrecht auf der Geraden g steht, und durch den Punkt P verläuft. Mithilfe des Skalarprodukts können wir den Lotpunkt B berechnen (beachte: er liegt auf der Geraden g und das Skalarprodukt des Richtungsvektors der Geraden und des Vektors $\vec{BP}$ ist gleich null!) und anschließend die Länge des Vektors $\vec{BP}$ berechnen.

15.1. Lotfußpunkt-Verfahren.



Das Lotfußpunkt-Verfahren wird verwendet, um den Abstand eines Punktes von einer Geraden zu bestimmen.

Sei $g : \vec{x} = \vec{z} + \lambda\vec{u};\ \lambda \in \mathbb{R}$ eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ und P ein Punkt.

Definition: Als *Abstand* zwischen einem Punkt und einer Geraden bezeichnen wir die Länge der kürzesten Strecke zwischen den beiden.

Vektoriell gesehen bedeutet das, dass der Abstand des Punktes von der Geraden die Länge desjenigen Vektors $\vec{a}$ ist, der senkrecht auf der Geraden steht und auf den Punkt P zeigt. Der Punkt B, an dem der Vektor senkrecht auf der Geraden steht wird *Lotfußpunkt* von P auf g genannt.

Wir wissen:

$$d(g,P) = |\vec{a}| \tag{12}$$

$$= |\vec{p} - \vec{b}| \tag{13}$$

Vom Vektor $\vec{b}$, dem Ortsvektor zum Punkt B, kennen wir folgende Eigenschaften:

$$\vec{b} \in g \tag{14}$$

$$(\vec{p} - \vec{b}) \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (\vec{p} - \vec{b}) \perp \vec{u} \tag{15}$$

Da $\vec{b} \in g$ können wir die Geradengleichung in 15 einsetzen:

$$(\vec{p} - (\vec{z} + \lambda\vec{u})) \cdot \vec{u} = 0 \tag{16}$$

für ein bestimmtes $\lambda \in \mathbb{R}$
16 liefert eine Gleichung mit einer Unbekannten. Löst man diese Gleichung erhält man für λ:

$$\lambda = \frac{p_1u_1 - z_1u_1 + p_2u_2 - z_2u_2 + p_3u_3 - z_3u_3}{(u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2} \tag{17}$$

Dies nachzurechnen sei dem Leser überlassen. Im Folgenden verwenden wir der Übersichtlichkeit halber weiter λ.
Mithilfe dieses bestimmten λ lässt sich nun der Ortsvektor $\vec{b}$ und somit der Punkt B bestimmen, womit das Problem auf eine Abstandsbestimmung zwischen zwei Punkten zurückgeführt wurde. Hierzu setzen wir das gerade errechnete λ in die Geradengleichung ein.

$$\vec{b} = \vec{z} + \lambda\vec{u} \tag{18}$$

Nach 13 gilt nun:

$$\begin{aligned} d(g, P) &= |\vec{p} - \vec{z} - \lambda\vec{u}| \\ &= \sqrt{(p_1 - z_1 - \lambda u_1)^2 + (p_2 - z_2 - \lambda u_2)^2 + (p_3 - z_3 - \lambda u_3)^2} \end{aligned}$$

womit der gesuchte Abstand durch Einsetzen der gegebenen Komponenten und Berechnung des Betrages zu berechnen ist.

16. Ebenen in vektorieller Darstellung

Eine Ebene wird definiert durch einen **Stützvektor** ($\vec{a}$) und zwei linear unabhängige **Spannvektoren** ($\vec{u}$ und $\vec{v}$).

$$E : \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Was leistet die vektorielle Darstellung einer Ebene?

- Punkttest
- Parameterfreie Darstellung
- Achsenschnittpunkte einer Ebene
- Lagebeziehungen

17. Spurgeraden und Spurpunkte

Definition 17.1 (Spurgeraden und Spurpunkte). *Die drei Geraden, die durch die drei Schnittpunkte einer Ebene mit den kartesischen Achsen definiert sind, nennt man Spurgeraden.*
Die Schnittpunkte einer Geraden mit den kartesischen Ebenen nennt man Spurpunkte.

18. Lagebeziehungen Ebene - Gerade im Raum

Mögliche Lagebeziehungen zwischen einer Ebene und einer Geraden im $\mathbb{R}^3$:

(1) $E \cap g = \{\} \Leftrightarrow E||g$
(2) $E \cap g = \{S\}$
(3) $E \cap g = g \Leftrightarrow g \subset E$

Lösung: Parameterform der Geraden und Parameterform der Ebene gleichsetzen.
Mögliche Fälle:

(1) keine Lösung $\Leftrightarrow E||g$
(2) eine eindeutige Lösung $\Leftrightarrow E \cap g = \{S\}$
(3) unendlich viele Lösungen $\Leftrightarrow E \cap g = g$

19. Lagebeziehungen Ebene - Ebene im Raum (ohne NF)

Mögliche Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen im $\mathbb{R}^3$:

(1) $E_1 \cap E_2 = \{\} \Leftrightarrow E_1||E_2$
(2) $E_1 \cap E_2 = g_s$
(3) $E_1 \cap E_2 = E_1 = E_2 \Leftrightarrow E_1 \equiv E_2$

Lösung: Parameterform beider Ebenen gleichsetzen.
Mögliche Fälle:

(1) keine Lösung $\Leftrightarrow E||g$
(2) unendlich viele Lösungen mit einem Parameter $\Leftrightarrow E_1 \cap E_2 = g_s$
(3) unendlich viele Lösungen mit zwei Parametern $E_1 \equiv E_2$

20. Darstellungsmöglichkeiten von Ebenen

(1) Parameterform (PF; Vektorgleichung)
$E : \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
(2) Koordinatenform (KF; Skalargleichung)
$E : x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 = k; k \in \mathbb{R}$
$\vec{n} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor!

(3) Normalenform (NF)
$E : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{p} \cdot \vec{n}$
dabei gilt:
$\vec{p}$ Ortsvektor zu Stützpunkt $P \in E$
$\vec{x} - \vec{p} \in E$
$\vec{n} \perp E$ Normalenvektor
$\vec{n} \perp \vec{u} \wedge \vec{n} \perp \vec{v}$

20.1. Umwandlung von einer Ebenendarstellung in eine andere.

(1) $NF \rightarrow KF$
NF ausmultiplizieren und man erhält eine KF
(2) $KF \rightarrow NF$
$\vec{n} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, als Stützpunkt wähle einen beliebigen Punkt $P \in E$, zum Beispiel durch *raten* einer Lösung der Gleichung aus der Koordinatenform!
Einsetzen in $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$
(3) $PF \rightarrow NF$
$\vec{n}$ bestimmen mit $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \wedge \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$. Man erhält ein unterbestimmtes LGS, wählt eine Variable frei und erhält daraus die beiden anderen, also den Normalenvektor. Als Nächstes wählt man einen Stützvektor $\vec{p} \in E$, der Einfachheit halber denselben Stützvektor wie in der PF.
(4) $NF \rightarrow PF$
Stützvektor übernehmen. Finde dann zwei linear unabhängige Vektoren, die senkrecht auf dem Normalenvektor stehen. Dazu jeweils: Setze eine Koordinates des Normalenvektors = 0, vertausche die beiden anderen und ändere bei einer dieser beiden das Vorzeichen!

21. Lagebeziehungen zweier Ebenen im Raum (mit NF)

$$E_1 : \vec{x} \cdot \vec{n} = k_1$$
$$E_2 : \vec{x} \cdot \vec{m} = k_2$$

(1) $E_1 || E_2 \Leftrightarrow \vec{n} = \lambda \vec{m}$
(2) $E_1 \equiv E_2 \Leftrightarrow \vec{n} = \lambda \vec{m} \wedge k_1 = \lambda k_2$
(3) $E_1 \cap E_2 = g \Leftrightarrow \vec{n} \neq \lambda \vec{m}$
Spezialfall: $E_1 \perp E_2 \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{m} = 0$

22. Abstandsbestimmung (Zusammenfassung)

P, Q, R Punkte; E, F Ebenen; g, h Geraden

- $d(P, Q) = |\vec{p} - \vec{q}| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2}$

- $d(P, g)$ Lotfußpunkt-Verfahren (siehe 15) $\rightarrow$ Flächenberechnung
- $d(g, h)$ für $g \| h$:
  Wähle eine Gerade aus und berechne dann den Abstand dieser Gerade zum Stützpunkt der anderen Geraden.
- $d(E, R)$

DEFINITION 22.1. *Unter dem Abstand eines Punktes von einer Ebene versteht man die kürzeste Entfernung des Punktes zur Ebene. Diese ist die Länge des Lotes vom Punkt auf die Ebene.*

Verfahren 1:
gegeben:

$$E : x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 25$$
$$R(2/0/1)$$

(1) Bestimmung einer Lotgeraden $g_\perp$ zu E:

$$g_\perp : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

(2) Bestimmung des Lotfußpunktes F als gemeinsamer Punkt von $g_\perp$ und E.

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + \lambda \\ x_2 &= 0 + 8\lambda \\ x_3 &= 1 - 4\lambda \end{aligned}$$

Einsetzen in die Ebenengleichung:

$$\begin{aligned} 2 + \lambda + 8 \cdot (0 + 8\lambda) - 4 \cdot (1 - 4\lambda) &= 25 \\ \Leftrightarrow \lambda &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Einsetzen in die Koordinatengleichungen:

$$F : \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{8}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{aligned} d(F, R) &= \sqrt{(2 - \frac{7}{3})^2 + (0 - \frac{8}{3})^2 + (1 + \frac{1}{3})^2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Verfahren 2 (LK):
Sei P der Stützvektor der Ebene, $\vec{n_0}$ der normierte Normalenvektor an diesem Punkt, γ der Winkel zwischen $\vec{n_0}$ und $\vec{PR}$ und d der Abstandes des Punktes R von der Ebene. $\vec{n_0}$ normierter Normalenvektor ($\vec{n_0} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$)
Sei $E : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$ eine Ebene. Dann heißt

$$E : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n_0} = 0$$

Hesse'sche Normalenform der Ebene.

$$\begin{aligned} \vec{n_0} \cdot \vec{PR} &= |\vec{n_0}| \cdot |\vec{PR}| \cdot \cos(\gamma) \\ \cos(\gamma) &= \frac{d}{|\vec{PR}|} \\ \Rightarrow \vec{n_0} \cdot \vec{PR} &= |\vec{n_0}| \cdot |\vec{PR}| \cdot \frac{d}{|\vec{PR}|} \\ &= \vec{n_0} \cdot d \\ &= d \\ \Leftrightarrow |\vec{n_0} \cdot (\vec{r} - \vec{p})| &= d \end{aligned}$$

- $d(E, g)$
  (1) $E \| g$
  (2) HNF oder NF bestimmen
  (3) Abstand berechnen.
  Merksatz: Sind eine Gerade g und eine Ebene E zueinander parallel haben alle Punkte auf g den selben Abstand zur Ebene. Wir berechnen den Abstand mithilfe von Verfahren 1 oder 2.
- $d(E, F)$
  (1) HNF oder NF aufstellen
  (2) zeige $E \| F$
  (3) Wähle einen beliebigen Punkt der Ebene E und bestimme seinen Abstand zu F (oder umgekehrt).
  Beispielaufgabe (LK): Bestimme alle Punkte, die zu

$$E : 4x_1 + 12x_2 - 3x_3 = 8$$

den Abstand 2 haben.

Lösungsstrategie:
(1) Die gesuchten Punkte liegen auf zwei Ebenen, die zu E den Abstand 2 haben.
(2) Wähle $P(p_1; p_2; p_3)$
(3) HNF von E aufstellen
(4) Löse Gleichung $d(E, P) = 2$ nach p_1, p_2, p_3 auf
(5) wegen der Betragsstriche ergeben sich zwei Fälle

(6) Stelle zwei Ebenen E_1 und E_2 auf, wobei P und P' Punkte der Ebenen sind. Den Normalenvektor übernehmen wir von E

23. Abstand zweier windschiefer Geraden (LK)

Verfahren 1:

- g_1, g_2 haben keinen Schnittpunkt und sind nicht parallel. Sie sind also windschief.
- Stelle eine Hilfsebene auf, für die gilt:

$$
\begin{aligned}
&E \| g_1 \wedge g_2 \in E \\
&g_1 : \vec{x} = \vec{u} + \lambda \vec{v} \\
&g_2 : \vec{x} = \vec{w} + \mu \vec{r} \\
&E : \vec{x} = \vec{w} + \mu \vec{r} + \lambda \vec{v}
\end{aligned}
$$

- Forme E in HNF um
- Berechne $d(E, g_1) = d(E, U)$

Verfahren 2:
Zu g_1 und g_2 gibt es zwei parallele Ebenen.

$$
\begin{aligned}
E_{g_1} &: (\vec{x} - \vec{u}) \cdot \vec{n} = 0 \\
E_{g_2} &: (\vec{x} - \vec{w}) \cdot \vec{n} = 0 \\
d &= |(\vec{u} - \vec{w}) \cdot \vec{n}_0| \\
\vec{n} &\perp \vec{v} \wedge \vec{n} \perp \vec{r}
\end{aligned}
$$

24. Schnittwinkel

Achtung: Bei Berechnung von Winkeln sollte der Taschenrechner auf das Gradmaß (D oder Deg) gestellt werden!
s **Vektor-Vektor:**

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Gerade-Gerade:

$$
\begin{aligned}
g &: \vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{u} \\
h &: \vec{x} = \vec{q} + \mu \vec{v} \\
&\lambda, \mu \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Schneiden sich zwei Geraden g und h, so entstehen vier Winkel, zwei der Größe α und zwei der Größe β. Der Schnittwinkel von g und h ist derjenige, der kleiner oder gleich 90° ist. Es gilt also wiederum:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Ebene-Ebene:

$$E_1 : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n_1} = 0$$
$$E_2 : (\vec{x} - \vec{q}) \cdot \vec{n_2} = 0$$

Dann ist der Schnittwinkel zu errechnen durch

$$\cos\alpha = \frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}$$

Merksatz: Der Winkel zwischen den Ebenen ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren!

Gerade-Ebene:

$$\begin{aligned} g : \vec{x} &= \vec{p} + \lambda\vec{u} \\ E_1 : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n_1} &= 0 \\ \lambda &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

wegen $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$ folgt

$$\sin\alpha = \frac{\vec{n_1}\cdot\vec{u}}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{u}|}$$

25. Das Vektorprodukt (LK)

Definition 25.1 (Vektorprodukt). *Für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ definieren wir das Vektorprodukt als*

$$\vec{a} \times \vec{b} := \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} a_1 & b_2 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Der Betrag des Vektorprodukts entspricht dem Flächeninhalt des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelograms.

Eigenschaften des Vektorprodukts:

(1) $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ linear unabhängig
(2) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ linear abhängig
(3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein Rechtssystem
(4) $\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$

(5) $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

(6) $\vec{a} \times \left(r\vec{b}\right) = r\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$

(7) $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$

(8) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{a} = 0$

$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{b} = 0$

(9) $\vec{d} = \vec{c} + r\vec{a} + s\vec{U}b \Rightarrow \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{d}$

Volumen eines Spats:

$$V = A \cdot h = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|$$

KAPITEL 5

Matrizen und Abbildungen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m, n \in \mathbb{N}$

Definition 0.2 (Matrix). *Eine* ***Matrix*** *ist ein Zahlenschema mit m Zeilen und n Spalten.*
a_{ij} sind die Einträge der Matrix aus $\mathbb{R}$, wobei $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$.
Ist A eine mxn-Matrix, so sagen wir $A \in \mathbb{R}^{mxn}$. mxn nennen wir auch den ***Typ*** *oder die* ***Form*** *der Matrix.*

Definition 0.3 (Quadratische Matrix). *Eine Matrix heißt* ***quadratisch****, wenn sie gleich viele Zeilen wie Spalten hat.*

1. Rechnen mit Matrizen

Wir stellen zunächst fest: Jeder Vektor (so wie wir bisher Vektoren kennen) ist auch eine Matrix.

Beispiel 1.1. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ *ist eine 3x1-Matrix.*

Andersherum besteht jede Matrix aus einem oder mehreren Spalten- bzw. Zeilenvektoren.

Beispiel 1.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ *besteht aus den* ***Zeilenvektoren*** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$*, bzw. aus den* ***Spaltenvektoren*** $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

1.1. Multiplikation von Matrizen mit einem Skalar. Regel: Eine Matrix A wird mit einem Skalar multipliziert, indem man jedes einzelne Element mit dem Skalar multipliziert.

1.2. Addition von Matrizen. Regel: Zwei Matrizen A und B vom selben Typ werden addiert, indem wir die entsprechenden Elemente addieren.

Definition 1.1 (Nullmatrix). *Die Matrix* $0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ *mit* $a_{ij} = 0$ *für alle i,j heißt* ***Nullmatrix****.*

Es gilt: $A + 0 = 0 + A = A$ wenn A und 0 vom selben Typ sind.
Achtung: Im Folgenden wird für die Zahl Null und die Nullmatrix das gleiche Symbol „0“ verwendet!

1.3. Multiplikation von Matrizen. Regel: $A \in \mathbb{R}^{lxm}, B \in \mathbb{R}^{mxn}$
Das Produkt ist $AB = C \in \mathbb{R}^{lxn}$
Die Elemente c_{ij} erhält man, indem man das Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors von A mit dem j-ten Spaltenvektor von B berechnet.

Definition 1.2 (Einheitsmatrix). *Die nxn Matrix* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *mit den Einträgen* $c_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ *heißt* ***Einheitsmatrix****.*

Achtung: Das Produkt AB ist nur definiert, wenn die Anzahl der Spalten von A gleich der Anzahl der Zeilen von B ist.

1.4. Rechengesetze der Matrizenrechnung: Gegeben seien die Matrizen A, B und C vom jeweils passenden Typ.

- Assoziativgesetz:
  $(AB) \cdot C = A \cdot (BC)$
  $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Distributivgesetze:
  $(A + B) \cdot C = AC + BC$
  $A \cdot (B + C) = AB + AC$
- $(\lambda A)(\mu B) = (\lambda\mu)(AB)$
- $A \cdot (\lambda B) = \lambda AB$
- $A \cdot E_n = E_n \cdot A = A \Rightarrow E_n$ ist das neutrale Element bzgl $(\cdot)$

- $A + 0 = 0 + A = A \Rightarrow 0$ ist das neutrale Element bzgl $(+)$
- Das Kommutativgesetz gilt bei der Multiplikation von Matrizen im Allgemeinen **nicht**!

1.5. Determinante von 2x2-Matrizen.

DEFINITION 1.3 (Determinante). *Die **Determinante** einer 2x2 Matrix* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *ist eine Zahl* $\in \mathbb{R}$ *gegeben durch* $det(A) = ad - bc$

2. Affine Abbildungen in der Ebene

DEFINITION 2.1 (Affine Abbildung). *Eine **affine Abbildung** im* $\mathbb{R}^2$ *ist gegeben durch*

$$\alpha : \vec{x'} = A \cdot \vec{x} + b$$

A ist eine 2x2-Matrix mit $det(A) \neq 0$ und $\vec{b}$ ist ein Vektor mit zwei Koordinaten. Diese Darstellung heißt **Matrizendarstellung einer affinen Abbildung**. Andere Darstellungsmöglichkeiten sind die **Vektordarstellung einer affinen Abbildung**:

$$\alpha : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \cdot y + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

oder die **Koordinatendarstellung einer affinen Abbildung**

$$\alpha : \begin{array}{l} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{array}$$

Bemerkung: Jede affine Abbildung ist durch A und $\vec{b}$ festgelegt. Sie bildet den Punkt (x, y) mit dem Ortsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ auf den Punkt (x', y') mit dem Ortsvektor $\vec{x'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ ab.

Feststellung: Jede affine Abbildung ist eindeutig festgelegt durch die Angabe von drei Urbildpunkten und drei zugehörigen Bildpunkten, solange diese nicht auf einer Geraden liegen.

DEFINITION 2.2. *P heißt **Urbildpunkt** und P **Bildpunkt**.*

Eigenschaften einer affinen Abbildung:

(1) geradentreu, d.h. Geraden werden auf Geraden abgebildet
(2) parallelentreu, d.h. zueinander parallele Geraden werden auf zueinander parallele Geraden abgebildet
(3) umkehrbar, d.h. zu jedem Bildpunkt gibt es genau einen Urbildpunkt
(4) teilverhältnistreu

Folgerungen:

(1) Dreiecke werden auf Dreiecke abgebildet

(2) Parallelogramme auf Parallelogramme
(3) Mittelpunkte von Strecken auf Mittelpunkte von Strecken

Eigenschaften, die affine Abbildungen haben können, aber nicht müssen:

- längentreu (zu überprüfen an einer Zeichnung)
- winkeltreu (zu überprüfen an einer Zeichnung)
- flächeninhaltstreu $\Leftrightarrow |det(A)| = 1$
- orientierungstreu $\Leftrightarrow det(A) > 0$
- orientierungsumkehrend $\Leftrightarrow det(A) < 0$
- Fixpunkte haben, d.h. $P = P'$
- Fixpunktgeraden haben (Gerade, auf der nur Fixpunkte liegen $\rightarrow$ Spiegelung an dieser Geraden)
- Fixgeraden haben (eine Fixgerade ist eine Gerade, die wieder auf sich selbst abgebildet wird. Dabei können die einzelnen Punkte der Gerade aber untereinander vertauscht werden, es ist also keine Fix**punkt**gerade

Spezielle affine Abbildungen:

- Drehung um $\vec{p}$ mit dem Winkel ϕ

  - flächeninhaltstreu
  - orientierungstreu
  - längentreu
  - winkeltreu

  Allgemeine Form:

$$\alpha : \vec{x'} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \vec{x} + 2\vec{p}$$

- zentrische Streckung von einem Streckzentrum Z mit dem Streckfaktor k
  - orientierungstreu
  - winkeltreu

  Allgemeine Form:

$$\alpha : \vec{x'} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \vec{x} + \vec{z}$$

  wobei $\vec{z}$ das Streckzentrum ist und k der Streckfaktor.
- Spiegelung an einer Achse / Gerade
  - flächeninhaltstreu
  - orientierungsumkehrend
  - längentreu
  - winkeltreu

Allgemeine Form einer Spiegelung an einer Ursprungsgeraden, die mit der x-Achse den Winkel ϕ einschließt:

$$\alpha : \vec{x'} = \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix} \vec{x}$$

- Verschiebung um einen Vektor $\vec{v}$
  - flächeninhaltstreu
  - winkeltreu
  - längentreu
  - orientierungstreu

  Allgemeine Form:

  $$\alpha : \vec{x'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \vec{v}$$

  wobei um den Vektor $\vec{v}$ verschoben wird.
- Scherung an einer Geraden g mit dem Winkel ϕ
  - flächeninhaltstreu
  - orientierungstreu

  Scherung an der x-Achse mit Winkel ϕ

  $$\alpha : \vec{x'} = \begin{pmatrix} 1 & \tan \phi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

- Punktspiegelung
  siehe Drehung um einen Punkt (mit 180°)

2.1. Affine Abbildungen rechnerisch bestimmen. Gegeben sind drei Urbildpunkte und die entsprechenden Bildpunkte.
Eine affine Abbildung ist gegeben durch

$$\alpha : \vec{x'} = A\vec{x} + \vec{c} \Rightarrow \begin{vmatrix} x' = a_{11}x + a_{12}y + c_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + c_2 \end{vmatrix}$$

Durch einsetzen der Urbild- bzw. der Bildpunkte erhält man zwei LGS mit je drei Gleichungen und drei Unbekannten, die man genau dann eindeutig lösen kann, wenn die Abbildung affin ist.

2.2. Bestimmung der Fixpunkte und Fixpunktgeraden. Gegeben sei eine affine Abbildung durch $\alpha : \vec{x'} = A\vec{x} + \vec{c}$.
Ansatz: $\vec{x'} = \vec{x}$
Zu lösen ist also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Bei einer eindeutigen Lösung gibt es einen Fixpunkt, gibt es unendlich viele Lösungen handelt es sich um eine Fixpunktgerade.

2.3. Verketten von Abbildungen. Zwei Abbildungen verketten heißt, zwei Abbildungen hintereinander ausführen. $\beta \circ \alpha$ bedeutet, dass zuerst α ausgeführt wird, und danach β. **Achtung**: In der Regel gilt $\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha$!
Die neue Abbildungsmatrix der verketteten Abbildung lautet im Fall $\beta \circ \alpha$: $B \cdot A$ und im Fall $\alpha \circ \beta$: $A \cdot B$.
Eine Verkettung von zwei Abbildungen ist genau dann eine affine Abbildung, wenn auch die beiden Ausgangsabbildungen affine Abbildungen sind. Es gilt außerdem:

Satz 2.1 (Determinantensatz).

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

2.4. Umkehrabbildungen.

Definition 2.3 (Umkehrabbildung und inverse Matrix). *Wir definieren: α^{-1}* ***Umkehrabbildung*** *von $\alpha \Leftrightarrow \alpha^{-1} \circ \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = id$. Die zugehörige Umkehrmatrix heißt* ***inverse Matrix*** *und wird mit A^{-1} bezeichnet. Es gilt $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1}$*

Satz 2.2. *Affine Abbildungen sind umkehrbar.*

Im Falle von 2x2 Matrizen kann man die inverse Matrix einer Matrix $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ mit der Formel

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

berechnen.

2.5. Affine Abbildungen und Flächenänderung.

Satz 2.3. *Sei $\det(A) = k$. Dann ist $|k|$ der Flächenänderungsfaktor jeder affinen Abbildung $\alpha : \vec{x'} = A\vec{x} + \vec{c}$*

2.6. Eigenwerte und Eigenvektoren, Fixgeraden.

Definition 2.4 (Eigenwert). *Ein Skalar λ heißt* ***Eigenwert der Matrix A*** *wenn es mindestens einen Vektor $\vec{v}$ gibt, so dass gilt*

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

Satz 2.4. *Die Eigenwerte der Matrix A sind genau die Lösungen der Gleichung*

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

Es schließt sich logischer Weise an

Definition 2.5 (Eigenvektoren). *Ein Vektor $\vec{v}$ heißt* ***Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert*** *λ, wenn gilt*

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

Satz 2.5. *Die Eigenvektoren sind genau die Lösungsvektoren von*

$$\det(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$$

Definition 2.6 (Fixgerade). *Eine Fixgerade ist eine Gerade, die durch eine Abbildung α auf sich selbst abgebildet wird. Es gilt also*

$$P \in g \Rightarrow P' \in g$$

Achtung: Dies bedeutet nicht, dass jeder Punkt der Geraden auf sich selbst abgebildet werden muss. Wird jeder Punkt einer Geraden auf sich selbst abgebildet, nennt man diese Gerade Fixpunktgerade. Fixpunktgeraden sind Fixgeraden.
Sei $\alpha : \vec{x'} = A\vec{x} + \vec{c}$ eine affine Abbildung.
Hat die Abbildung einen oder mehrere Fixpunkte, so ist es einfach, die Fixgeraden zu bestimmen. Die Fixgeraden sind in diesen Fällen nämlich genau die Geraden mit den Fixvektoren als Stützvektoren und den Eigenvektoren der Matrix A als Richtungsvektoren.
Deutlich komplizierter wird die Bestimmung der Fixgeraden, wenn die Abbildung keine Fixpunkte hat.
Ist $g : \vec{x} = \vec{p} + t\vec{u}$ eine Fixgerade, so muss gelten

$$\vec{p'} = A\vec{p} + \vec{c} \wedge \vec{p'} = \vec{p} + t\vec{u}$$

Dies wiederum führt uns zur so genannten **Stützpunktgleichung**:

$$A\vec{p} - \vec{p} = t\vec{u}$$

Alle Vektoren $\vec{p}$, die diese Gleichung erfüllen, sind Stützvektoren von Fixgeraden der Abbildung.

2.7. Affine Abbildungen mit Fixpunkt 0. $\alpha : \vec{x'} = A\vec{x}$
Wir unterscheiden drei Fälle:

(1) A besitzt zwei verschiedene Eigenwert $\lambda_1, \lambda_2 \Rightarrow \alpha$ ist i.A. eine Euleraffinität
(2) A besitzt einen Eigenwert $\lambda \Rightarrow \alpha$ ist i.A. eine Streckscherung
(3) A besitzt keinen Eigenwert $\Rightarrow \alpha$ ist i.A. eine Affindrehung

Definition 2.7 (Euler-Affinität). *Eine affine Abbildung, die zwei Eigenwerte besitzt, nennt man **Euler-Affinität**.*

Definition 2.8. *Eine affine Abbildung für die gilt*

(1) $P \in g_2 \Rightarrow P = P'$
(2) $P \in g_2 \Rightarrow \vec{PP'} \parallel g_1$
(3) $\vec{G_2P'} = \lambda_1 \vec{G_2P}$

*heißt **Parallelstreckung** an der Streckachse g_2 parallel zu g_1 mit dem Streckfaktor λ_1*

Satz 2.6. *Eine Euler-Affinität ist eine Linearkombination aus zwei Parallelstreckungen*

3. Parallelprojektion

Definition 3.1 (Projektion). *Eine **Projektion** ist eine Abbildung des Raumes in eine Ebene (Projektionsebene). Die Gerade zwischen Punkt P und dem Bildpunkt P' der Projektion heißt **Projektionsgerade**. Sind alle Projektionsgeraden parallel, so spricht man von einer **Parallelprojektion**.*

Satz 3.1. *Die Abbildungsmatrix einer Parallelprojektion hat als Spalten die Ortsvektoren der Bildpunkte der Einheitsvektoren.*

Nun, wie berechnet man eine solche Projektionsmatrix (= Abbildungsmatrix einer Projektion)?
Dies ist ganz einfach, denn nach obigem Satz muss man nur die Bildpunkte der Einheitsvektoren bestimmen. Dazu nimmt man den ersten Einheitsvektor als Stützvektor einer Geraden g und den Richtungsvektor der Projektionsgeraden als Richtungsvektor von g. Dann schneidet man die Gerade g mit der Projektionsebene und erhält den Schnittpunkt S, der gleichzeitig der Bildpunkt P' ist. Analog verfährt man mit dem zweiten und dritten Einheitsvektor, wonach man die Projektionsmatrix bestimmen kann.

4. Prozessmatrizen und Bedarfsmatrizen

Prozessmatrizen dienen dazu, den Verlauf eines Prozesses über mehrere Schritte zu bestimmen. Ein Spezialfall der Prozessmatrizen sind die Bedarfsmatrizen. Mit ihnen lässt sich z.B. die Rohstoffmenge berechnen, die zur Herstellung von Produkten benötigt wird. Wir veranschaulichen dies an einem

Beispiel 4.1. *Seien D_1, D_2 zwei verschiedene Dünger und R_1, R_2, R_3 drei verschiedene Rohstoffe, die zur Herstellung dieser Dünger verwendet werden. Den Bedarf an Rohstoffen pro Kilogramm Dünger kann man folgender Tabelle entnehmen:*

	$R_1(y_1)$	$R_2(y_2)$	$R_3(y_3)$
$D_1(x_1)$	*0.5*	*0.3*	*0.2*
$D_2(x_2)$	*0.2*	*0.2*	*0.4*

Aus dieser Tabelle lässt sich das folgende LGS erstellen:

$$y_1 = 0.5x_1 + 0.2x_2$$
$$y_2 = 0.3x_1 + 0.2x_2$$
$$y_3 = 0.2x_1 + 0.4x_2$$

Dieses LGS sieht in Matrizenschreibweise wiederum so aus:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}}_{\textit{Bedarfsmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Mithilfe dieser Matrix lässt sich nun also z.B. ausrechnen, wie viel Kilogramm von jedem Rohstoff zur Herstellung von je einer Tonne Dünger benötigt werden.

Prozessmatrizen funktionieren ähnlich wie die Bedarfsmatrizen, nur dass sie stattdessen einen Prozess beschreiben, zum Beispiel die Entwicklung einer Maikäferpopulation über mehrere Monate. Als Beispiel sei die folgende Aufgabe genannt:

BEISPIEL 4.2. *Die Entwicklung einer weiblichen Käferpopulation kann modellhaft wie folgt beschrieben werden: Ein Weibchen legt 20 Eier und stirb kurz darauf. Nach einem Monat entwickeln sich aus den Eiern Larven, von denen aber nur 30% überleben. Nach einem weiteren Monat verpuppen sich 40% der Larven und werden zu weiblichen Käfern, die wieder 20 Eier legen.*

Aus diesem Aufgabentext lässt sich folgende Tabelle entnehmen:

nach / von	*K*	*E*	*L*
K	*0*	*0*	*2/5*
E	*20*	*0*	*0*
L	*0*	*3/10*	*0*

Aus dieser Tabelle wiederum folgt sofort folgende Matrix:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 20 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{10} & 0 \end{pmatrix}}_{\textit{Prozessmatrix}}$$

Multipliziert man die Matrix mit einem Ausgangsvektor, so erhält man die Verteilung nach einer Zeiteinheit. Möchte man die Verteilung nach n Zeiteinheiten errechnen, muss man die Matrix n-mal mit dem Vektor multiplizieren, bzw. die Matrix A^n mit dem Vektor multiplizieren.