

# Calculs d'intégrales

Fiche d'Arnaud Bodin, soigneusement relue par Chafiq Benhida

## 1 Utilisation de la définition

### Exercice 1

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, 4]$  par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

1. Calculer  $\int_0^4 f(t) dt$ .
2. Soit  $x \in [0, 4]$ , calculer  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .
3. Montrer que  $F$  est une fonction continue sur  $[0, 4]$ . La fonction  $F$  est-elle dérivable sur  $[0, 4]$  ?

[Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[002081]

### Exercice 2

Soient les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$ ,

$$f(x) = x, g(x) = x^2 \text{ et } h(x) = e^x,$$

Justifier qu'elles sont intégrables sur tout intervalle fermé borné de  $\mathbb{R}$ . En utilisant les sommes de Riemann, calculer les intégrales  $\int_0^1 f(x) dx$ ,  $\int_1^2 g(x) dx$  et  $\int_0^x h(t) dt$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[002082]

### Exercice 3

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[a, b]$  ( $a < b$ ).

1. On suppose que  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x \in [a, b]$ , et que  $f(x_0) > 0$  en un point  $x_0 \in [a, b]$ . Montrer que  $\int_a^b f(x) dx > 0$ . En déduire que : «si  $f$  est une fonction continue positive sur  $[a, b]$  telle que  $\int_a^b f(x) dx = 0$  alors  $f$  est identiquement nulle».
2. On suppose que  $\int_a^b f(x) dx = 0$ . Montrer qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = 0$ .
3. Application : on suppose que  $f$  est une fonction continue sur  $[0, 1]$  telle que  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$ . Montrer qu'il existe  $d \in [0, 1]$  tel que  $f(d) = d$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[002085]

### Exercice 4

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  et  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ . Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1.  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
2.  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  de dérivée  $f$ .

3. Si  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  alors  $F$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .
4. Si  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$  alors  $F$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .
5. Si  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$  alors  $F$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .
6. Si  $f$  est  $T$ -périodique sur  $\mathbb{R}$  alors  $F$  est  $T$ -périodique sur  $\mathbb{R}$ .
7. Si  $f$  est paire alors  $F$  est impaire.

[Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[002091]

## 2 Calculs de primitives

### Exercice 5

Calculer les primitives suivantes par intégration par parties.

1.  $\int x^2 \ln x dx$
2.  $\int x \arctan x dx$
3.  $\int \ln x dx$  puis  $\int (\ln x)^2 dx$
4.  $\int \cos x \exp x dx$

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[006864]

### Exercice 6

Calculer les primitives suivantes par changement de variable.

1.  $\int (\cos x)^{1234} \sin x dx$
2.  $\int \frac{1}{x \ln x} dx$
3.  $\int \frac{1}{3 + \exp(-x)} dx$
4.  $\int \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} dx$

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[006865]

### Exercice 7

Calculer les primitives suivantes, en précisant si nécessaire les intervalles de validité des calculs :

1.  $\int \frac{x+2}{x^2-3x-4} dx$
2.  $\int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx$
3.  $\int \sin^8 x \cos^3 x dx$
4.  $\int \frac{1}{\sin x} dx$
5.  $\int \frac{3 - \sin x}{2 \cos x + 3 \tan x} dx$

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[006866]

## 3 Calculs d'intégrales

### Exercice 8

Calculer les intégrales suivantes :

1.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$  (intégration par parties)
2.  $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx$  (à l'aide d'un changement de variable simple)
3.  $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$  (changement de variable  $x = \tan t$ )

4.  $\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2} dx$  (décomposition en éléments simples)
5.  $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan x dx$  (changement de variable  $u = \frac{1}{x}$ )

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[006867]

### Exercice 9

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x} dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[002095]

### Exercice 10 Intégrales de Wallis

Soit  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que  $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ . Expliciter  $I_n$ . En déduire  $\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx$ .
2. Montrer que  $(I_n)_n$  est positive décroissante. Montrer que  $I_n \sim I_{n+1}$ .
3. Simplifier  $I_n \cdot I_{n+1}$ . Montrer que  $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ . En déduire  $\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[002096]

### Exercice 11

Soit  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ .

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .
2. Calculer  $I_n + I_{n+1}$ .
3. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right)$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[002097]

## 4 Applications : calculs d'aires, calculs de limites

### Exercice 12

Calculer l'aire de la région délimitée par les courbes d'équation  $y = \frac{x^2}{2}$  et  $y = \frac{1}{1+x^2}$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[002099]

### Exercice 13

Calculer l'aire intérieure d'une ellipse d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

*Indications.* On pourra calculer seulement la partie de l'ellipse correspondant à  $x \geq 0, y \geq 0$ . Puis exprimer  $y$  en fonction de  $x$ . Enfin calculer une intégrale.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[006863]

### Exercice 14

Calculer la limite des suites suivantes :

1.  $u_n = n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2 + n^2}$

2.  $v_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

---

[002100]

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

Les fonctions continues ne seraient-elles pas intégrables ?

Il faut se souvenir de ce que vaut la somme des  $n$  premiers entiers, la somme des carrés des  $n$  premiers entiers et la somme d'une suite géométrique. La formule générale pour les sommes de Riemann est que  $\int_a^b f(x)dx$  est la limite (quand  $n \rightarrow +\infty$ ) de

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

1. Revenir à la définition de la continuité en  $x_0$  en prenant  $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$  par exemple.
2. Soit  $f$  est tout le temps de même signe (et alors utiliser la première question), soit ce n'est pas le cas (et alors utiliser un théorème classique...).
3. On remarquera que  $\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{2} = \int_0^1 (f(x) - x)dx$ .

**Indication pour l'exercice 5 ▲**

1. Pour  $\int x^2 \ln x dx$  poser  $v' = x^2$ ,  $u = \ln x$ .
2. Pour  $\int x \arctan x dx$  poser  $v' = x$  et  $u = \arctan x$ .
3. Pour les deux il faut faire une intégration par parties avec  $v' = 1$ .
4. Pour  $\int \cos x \exp x dx$  il faut faire deux intégrations par parties.

**Indication pour l'exercice 6 ▲**

1.  $\int \cos^{1234} x \sin x dx = -\frac{1}{1235} \cos^{1235} x + c$  (changement de variable  $u = \cos x$ )
2.  $\int \frac{1}{x \ln x} dx = \ln |\ln x| + c$  (changement de variable  $u = \ln x$ )
3.  $\int \frac{1}{3 + \exp(-x)} dx = \frac{1}{3} \ln(3 \exp x + 1) + c$  (changement de variable  $u = \exp x$ )
4.  $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{1}{2}x - 1\right) + c$  (changement de variable  $u = \frac{1}{2}x - 1$ )

**Indication pour l'exercice 7 ▲**

1.  $\int \frac{x+2}{x^2-3x-4} dx = -\frac{1}{5} \ln|x+1| + \frac{6}{5} \ln|x-4| + c$  (décomposition en éléments simples)
2.  $\int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+x+1| - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) + c$
3.  $\int \sin^8 x \cos^3 x dx = \frac{1}{9} \sin^9 x - \frac{1}{11} \sin^{11} x + c$
4.  $\int \frac{1}{\sin x} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right| + c = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c$  (changement de variable  $u = \cos x$  ou  $u = \tan \frac{x}{2}$ )
5.  $\int \frac{3-\sin x}{2\cos x+3\tan x} dx = -\frac{1}{5} \ln|2-\sin x| + \frac{7}{5} \ln|1+2\sin x| + c$  (changement de variable  $u = \sin x$ )

**Indication pour l'exercice 8 ▲**

1.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = 1$  (intégration par parties  $v' = \sin x$ ,  $u = x$ )
2.  $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx = 2\sqrt{e+1} - 2\sqrt{2}$  (à l'aide du changement de variable  $u = e^x$ )
3.  $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$  (changement de variable  $x = \tan t$ ,  $dx = (1 + \tan^2 t)dt$  et  $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$ )
4.  $\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2} dx = 3 \ln 2 - 1$  (décomposition en éléments simples de la forme  $\frac{3x+1}{(x+1)^2} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{(x+1)^2}$ )

5.  $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan x dx = \frac{3\pi}{4}$  (changement de variables  $u = \frac{1}{x}$  et  $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \pm \frac{\pi}{2}$ )

---

**Indication pour l'exercice 9 ▲**

---

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} dx = 1$  (changement de variables  $t = \tan \frac{x}{2}$ ).

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x} dx = \frac{\pi}{2} - 1$  (utiliser la précédente).

---

**Indication pour l'exercice 10 ▲**

---

1. Faire une intégration par parties afin d'exprimer  $I_{n+2}$  en fonction de  $I_n$ . Pour le calcul explicite on distinguera le cas des  $n$  pairs et impairs.
  2. Rappel :  $u_n \sim v_n$  est équivalent à  $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$ . Utiliser la décroissance de  $I_n$  pour encadrer  $\frac{I_{n+1}}{I_n}$ .
- 

**Indication pour l'exercice 11 ▲**

---

1. Majorer par  $x^n$ .
  - 2.
  3. On pourra calculer  $(I_0 + I_1) - (I_1 + I_2) + (I_2 + I_3) - \dots$
- 

**Indication pour l'exercice 12 ▲**

---

Un dessin ne fait pas de mal ! Il faut ensuite résoudre l'équation  $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{x^2+1}$  puis calculer deux intégrales.

---

**Indication pour l'exercice 13 ▲**

---

Il faut se ramener au calcul de  $\int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$ .

---

**Indication pour l'exercice 14 ▲**

---

On pourra essayer de reconnaître des sommes de Riemann, puis calculer des intégrales. Pour le produit composer par la fonction  $\ln$ , afin de transformer le produit en une somme.

---

### Correction de l'exercice 1 ▲

1. On trouve  $\int_0^4 f(t) dt = +7$ . Il faut tout d'abord tracer le graphe de cette fonction. Ensuite la valeur d'une intégrale ne dépend pas de la valeur de la fonction en un point, c'est-à-dire ici les valeurs en  $x = 0, x = 1, x = 2$  n'ont aucune influence sur l'intégrale. Ensuite on revient à la définition de  $\int_0^4 f(t) dt$  : pour la subdivision de  $[0, 4]$  définie par  $\{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4\}$ , on trouve la valeur de l'intégrale (ici le sup et l'inf sont atteints et égaux pour cette subdivision et toute subdivision plus fine). Une autre façon de faire est considérer que  $f$  est une fonction en escalier (en «oubliant» les accidents en  $x = 0, x = 1, x = 2$ ) dont on sait calculer l'intégrale.
2. C'est la même chose pour  $\int_0^x f(t) dt$ , mais au lieu d'aller jusqu'à 4 on s'arrête à  $x$ , on trouve

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 3 - 2x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4x - 9 & \text{si } 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

3. Les seuls points à discuter pour la continuité sont les points  $x = 1$  et  $x = 2$ , mais les limites à droite et à gauche de  $F$  sont égales en ces points donc  $F$  est continue. Par contre  $F$  n'est pas dérivable en  $x = 1$  (les dérivées à droite et à gauche sont distinctes),  $F$  n'est pas non plus dérivable en  $x = 2$ .

### Correction de l'exercice 2 ▲

Les fonctions sont continues donc intégrables !

1. En utilisant les sommes de Riemann, on sait que  $\int_0^1 f(x) dx$  est la limite (quand  $n \rightarrow +\infty$ ) de  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$ . Notons  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$ . Alors  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{n^2} \frac{n(n-1)}{2}$ . On a utilisé que la somme des entiers de 0 à  $n-1$  vaut  $\frac{n(n-1)}{2}$ . Donc  $S_n$  tend vers  $\frac{1}{2}$ . Donc  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$ .
2. Même travail :  $\int_1^2 g(x) dx$  est la limite de  $S'_n = \frac{2-1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(1 + k \frac{2-1}{n}) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (1 + \frac{k}{n})^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (1 + 2\frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2})$ . En séparant la somme en trois nous obtenons :  $S'_n = \frac{1}{n} (n + 2 \sum_{k=0}^{n-1} k + \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k^2) = 1 + \frac{2}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} + \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$ . Donc à la limite on trouve  $S'_n \rightarrow 1 + 1 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ . Donc  $\int_1^2 g(x) dx = 7/3$ . Remarque : on a utilisé que la somme des carrés des entiers de 0 à  $n-1$  est  $\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$ .
3. Même chose pour  $\int_0^x h(t) dt$  qui est la limite de  $S''_n = \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{kx}{n}) = \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{kx}{n}} = \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{\frac{x}{n}})^k$ . Cette dernière somme est la somme d'une suite géométrique (si  $x \neq 0$ ), donc  $S''_n = \frac{x}{n} \frac{1 - (e^{\frac{x}{n}})^n}{1 - e^{\frac{x}{n}}} = \frac{x}{n} \frac{1 - e^x}{1 - e^{\frac{x}{n}}} = (1 - e^x) \frac{\frac{x}{n}}{1 - e^{\frac{x}{n}}}$  qui tend vers  $e^x - 1$ . Pour obtenir cette dernière limite on remarque qu'en posant  $u = \frac{x}{n}$  on a  $\frac{\frac{x}{n}}{1 - e^{\frac{x}{n}}} = -1 / \frac{e^u - 1}{u}$  qui tend vers  $-1$  lorsque  $u \rightarrow 0$  (ce qui est équivalent à  $n \rightarrow +\infty$ ).

### Correction de l'exercice 3 ▲

1. Écrivons la continuité de  $f$  en  $x_0$  avec  $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$  : il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  on ait  $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ . Avec notre choix de  $\varepsilon$  cela donne pour  $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  que  $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$ . Pour évaluer  $\int_a^b f(x) dx$  nous la coupons en trois morceaux par linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x) dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x) dx.$$

Comme  $f$  est positive alors par positivité de l'intégrale  $\int_a^{x_0-\delta} f(x) dx \geq 0$  et  $\int_{x_0+\delta}^b f(x) dx \geq 0$ . Pour le terme du milieu on a  $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$  donc  $\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f(x_0)}{2} dx = 2\delta \frac{f(x_0)}{2}$  (pour la dernière équation on calcule juste l'intégrale d'une fonction constante !). Le bilan de tout cela est que  $\int_a^b f(x) dx \geq 2\delta \frac{f(x_0)}{2} > 0$ .

Donc pour une fonction continue et positive  $f$ , si elle est strictement positive en un point alors  $\int_a^b f(x) dx > 0$ . Par contraposition pour une fonction continue et positive si  $\int_a^b f(x) dx = 0$  alors  $f$  est identiquement nulle.

2. Soit  $f$  est tout le temps positive, soit elle tout le temps négative, soit elle change (au moins un fois) de signe. Dans le premier cas  $f$  est identiquement nulle par la première question, dans le second cas c'est pareil (en appliquant la première question à  $-f$ ). Pour le troisième cas le théorème des valeurs intermédiaires affirme qu'il existe  $c$  tel que  $f(c) = 0$ .
3. Posons  $g(x) = f(x) - x$ . Alors  $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 (f(x) - x)dx = \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{2} = 0$ . Donc par la question précédente,  $g$  étant continue, il existe  $d \in [0, 1]$  tel que  $g(d) = 0$ , ce qui est équivalent à  $f(d) = d$ .

#### Correction de l'exercice 4 ▲

1. Vrai.
2. Vrai.
3. Faux ! Attention aux valeurs négatives par exemple pour  $f(x) = x$  alors  $F$  est décroissante sur  $] -\infty, 0]$  et croissante sur  $[0, +\infty[$ .
4. Faux. Attention aux valeurs négatives par exemple pour  $f(x) = x^2$  alors  $F$  est négative sur  $] -\infty, 0]$  et positive sur  $[0, +\infty[$ .
5. Vrai.
6. Faux. Faire le calcul avec la fonction  $f(x) = 1 + \sin(x)$  par exemple.
7. Vrai.

#### Correction de l'exercice 5 ▲

1.  $\int x^2 \ln x dx$

Considérons l'intégration par parties avec  $u = \ln x$  et  $v' = x^2$ . On a donc  $u' = \frac{1}{x}$  et  $v = \frac{x^3}{3}$ . Donc

$$\begin{aligned} \int \ln x \times x^2 dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v \\ &= \left[ \ln x \times \frac{x^3}{3} \right] - \int \frac{1}{x} \times \frac{x^3}{3} dx \\ &= \left[ \ln x \times \frac{x^3}{3} \right] - \int \frac{x^2}{3} dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c \end{aligned}$$

2.  $\int x \arctan x dx$

Considérons l'intégration par parties avec  $u = \arctan x$  et  $v' = x$ . On a donc  $u' = \frac{1}{1+x^2}$  et  $v = \frac{x^2}{2}$ . Donc

$$\begin{aligned} \int \arctan x \times x dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v \\ &= \left[ \arctan x \times \frac{x^2}{2} \right] - \int \frac{1}{1+x^2} \times \frac{x^2}{2} dx \\ &= \left[ \arctan x \times \frac{x^2}{2} \right] - \frac{1}{2} \int \left( 1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \arctan x + c \\ &= \frac{1}{2}(1+x^2) \arctan x - \frac{1}{2}x + c \end{aligned}$$



3.  $\int \ln x dx$  puis  $\int (\ln x)^2 dx$

Pour la primitive  $\int \ln x dx$ , regardons l'intégration par parties avec  $u = \ln x$  et  $v' = 1$ . Donc  $u' = \frac{1}{x}$  et  $v = x$ .

$$\begin{aligned}\int \ln x dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v \\ &= [\ln x \times x] - \int \frac{1}{x} \times x dx \\ &= [\ln x \times x] - \int 1 dx \\ &= x \ln x - x + c\end{aligned}$$

Par la primitive  $\int (\ln x)^2 dx$  soit l'intégration par parties définie par  $u = (\ln x)^2$  et  $v' = 1$ . Donc  $u' = 2\frac{1}{x} \ln x$  et  $v = x$ .

$$\begin{aligned}\int (\ln x)^2 dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v \\ &= [x(\ln x)^2] - 2 \int \ln x dx \\ &= x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c\end{aligned}$$

Pour obtenir la dernière ligne on a utilisé la primitive calculée précédemment.

4. Notons  $I = \int \cos x \exp x dx$ .

Regardons l'intégration par parties avec  $u = \exp x$  et  $v' = \cos x$ . Alors  $u' = \exp x$  et  $v = \sin x$ .

Donc

$$I = \int \cos x \exp x dx = [\sin x \exp x] - \int \sin x \exp x dx$$

Si l'on note  $J = \int \sin x \exp x dx$ , alors on a obtenu

$$I = [\sin x \exp x] - J \quad (1)$$

Pour calculer  $J$  on refait une deuxième intégration par parties avec  $u = \exp x$  et  $v' = \sin x$ . Ce qui donne

$$J = \int \sin x \exp x dx = [-\cos x \exp x] - \int -\cos x \exp x dx = [-\cos x \exp x] + I$$

Nous avons ainsi une deuxième équation :

$$J = [-\cos x \exp x] + I \quad (2)$$

Repartons de l'équation (1) dans laquelle on remplace  $J$  par la formule obtenue dans l'équation (2).

$$I = [\sin x \exp x] - J = [\sin x \exp x] - [-\cos x \exp x] - I$$

D'où

$$2I = [\sin x \exp x] + [\cos x \exp x]$$

Ce qui nous permet de calculer notre intégrale :

$$I = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) \exp x + c.$$

1.  $\int (\cos x)^{1234} \sin x dx$

En posant le changement de variable  $u = \cos x$  on a  $x = \arccos u$  et  $du = -\sin x dx$  et on obtient

$$\int (\cos x)^{1234} \sin x dx = \int u^{1234} (-du) = -\frac{1}{1235} u^{1235} + c = -\frac{1}{1235} (\cos x)^{1235} + c$$

Cette primitive est définie sur  $\mathbb{R}$ .

2.  $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

En posant le changement de variable  $u = \ln x$  on a  $x = \exp u$  et  $du = \frac{dx}{x}$  on écrit :

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{\ln x} \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + c = \ln |\ln x| + c$$

Cette primitive est définie sur  $]0, 1[$  ou sur  $]1, +\infty[$  (la constante peut être différente pour chacun des intervalles).

3.  $\int \frac{1}{3 + \exp(-x)} dx$

Soit le changement de variable  $u = \exp x$ . Alors  $x = \ln u$  et  $du = \exp x dx$  ce qui s'écrit aussi  $dx = \frac{du}{u}$ .

$$\int \frac{1}{3 + \exp(-x)} dx = \int \frac{1}{3 + \frac{1}{u}} \frac{du}{u} = \int \frac{1}{3u + 1} du = \frac{1}{3} \ln |3u + 1| + c = \frac{1}{3} \ln (3 \exp x + 1) + c$$

Cette primitive est définie sur  $\mathbb{R}$ .

4.  $\int \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} dx$

Le changement de variable a pour but de se ramener à quelque chose de connu. Ici nous avons une fraction avec une racine carrée au dénominateur et sous la racine un polynôme de degré 2. Ce que l'on sait intégrer c'est

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du = \arcsin u + c,$$

car on connaît la dérivée de la fonction  $\arcsin(t)$  c'est  $\arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ . On va donc essayer de s'y ramener. Essayons d'écrire ce qu'il y a sous la racine,  $4x - x^2$  sous la forme  $1 - t^2$  :  $4x - x^2 = 4 - (x - 2)^2 = 4 \left( 1 - \left( \frac{1}{2}x - 1 \right)^2 \right)$ . Donc il est naturel d'essayer le changement de variable  $u = \frac{1}{2}x - 1$  pour lequel  $4x - x^2 = 4(1 - u^2)$  et  $dx = 2du$ .

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{4(1 - u^2)}} 2du = \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \arcsin u + c = \arcsin \left( \frac{1}{2}x - 1 \right) + c$$

La fonction  $\arcsin u$  est définie et dérivable pour  $u \in ]-1, 1[$  alors cette primitive est définie sur  $x \in ]0, 4[$ .

## Correction de l'exercice 7 ▲

1.  $\int \frac{x+2}{x^2-3x-4} dx$

Pour calculer cette intégrale on décompose la fraction  $\frac{x+2}{x^2-3x-4}$  en éléments simples, le dénominateur n'étant pas irréductible. On sait que cette fraction rationnelle se décompose avec des dénominateurs de degré 1 et des constantes aux numérateurs :

$$\frac{x+2}{x^2-3x-4} = \frac{x+2}{(x+1)(x-4)} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-4}$$

Il ne reste plus qu'à calculer  $\alpha$  et  $\beta$  à l'aide de votre méthode favorite :

$$\frac{x+2}{x^2-3x-4} = \frac{-\frac{1}{5}}{x+1} + \frac{\frac{6}{5}}{x-4}$$

Chacune de ces fractions est du type  $\frac{1}{u}$  qui s'intègre en  $\ln |u|$ , d'où :

$$\int \frac{x+2}{x^2-3x-4} dx = -\frac{1}{5} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{6}{5} \int \frac{1}{x-4} dx = -\frac{1}{5} \ln |x+1| + \frac{6}{5} \ln |x-4| + c$$

Cette primitive est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 4\}$

2.  $\int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx$

Le dénominateur  $u = x^2 + x + 1$  est irréductible, la fraction est donc déjà décomposée en éléments simples. On fait apparaître artificiellement une fraction du type  $\frac{u'}{u}$  qui s'intégrera à l'aide du logarithme :

$$\frac{x-1}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{3}{2} \frac{1}{x^2+x+1}$$

Chacune de ces fractions s'intègre, la première est du type  $\frac{u'}{u}$  dont une primitive sera  $\ln|u|$ , la deuxième sera du type  $\frac{1}{1+v^2}$  dont une primitive est  $\arctan v$ .

En détails cela donne :

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx &= \int \frac{1}{2} \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx \\ &= \frac{1}{2} [\ln|x^2+x+1|] - \frac{3}{2} \int \frac{1}{\frac{3}{4} + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} [\ln|x^2+x+1|] - 2 \int \frac{1}{1+v^2} \frac{\sqrt{3}}{2} dv \quad \text{en posant } v = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} [\ln|x^2+x+1|] - \sqrt{3} [\arctan v] \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2+x+1| - \sqrt{3} \arctan \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2}\right) \right) + c \end{aligned}$$

Cette primitive est définie sur  $\mathbb{R}$ .

3.  $\int \sin^8 x \cos^3 x dx$

Lorsque l'on a une fonction qui s'exprime comme un polynôme (ou une fraction rationnelle), on peut tester un des changements de variable  $u = \cos x$ ,  $u = \sin x$  ou  $u = \tan x$ . Soit vous essayez les trois, soit vous appliquez les règles de Bioche. Ici, si l'on change  $x$  en  $\pi - x$  alors  $\sin^8 x \cos^3 x dx$  devient  $\sin^8(\pi - x) \cos^3(\pi - x) d(\pi - x) = \sin^8 x (-\cos^3 x)(-dx) = \sin^8 x \cos^3 x dx$ . Donc le changement de variable adéquat est  $u = \sin x$ .

Posons  $u = \sin x$ ,  $du = \cos x dx$ .

$$\begin{aligned} \int \sin^8 x \cos^3 x dx &= \int \sin^8 x \cos^2 x (\cos x dx) = \int \sin^8 x (1 - \sin^2 x) (\cos x dx) \\ &= \int u^8 (1 - u^2) du = \int u^8 du - \int u^{10} du \\ &= \left[ \frac{1}{9} u^9 \right] - \left[ \frac{1}{11} u^{11} \right] = \frac{1}{9} \sin^9 x - \frac{1}{11} \sin^{11} x + c \end{aligned}$$

Cette primitive est définie sur  $\mathbb{R}$ .

4.  $\int \frac{1}{\sin x} dx$

Comme  $\frac{1}{\sin(-x)} (-dx) = \frac{1}{\sin x} dx$  la règle de Bioche nous indique le changement de variable  $u = \cos x$ . Donc  $du = -\sin x dx$ .

Donc

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{-1}{\sin^2 x} (-\sin x dx) \\ &= \int \frac{-1}{1 - \cos^2 x} (-\sin x dx) \\ &= - \int \frac{1}{1 - u^2} du \end{aligned}$$

On décompose cette fraction en éléments simples :  $\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+u} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-u}$ . Donc

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{1+u} du - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-u} du \\ &= -\frac{1}{2} [\ln|1+u|] - \frac{1}{2} [\ln|1-u|] \\ &= -\frac{1}{2} \ln|1+\cos x| - \frac{1}{2} \ln|1-\cos x| + c \end{aligned}$$

Cette primitive est définie sur tout intervalle du type  $]k\pi, (k+1)\pi[$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Elle peut se réécrire sous différentes formes :

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x} + c = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c$$

Un autre changement de variable possible aurait été  $t = \tan \frac{x}{2}$ .

5.  $\int \frac{3-\sin x}{2\cos x+3\tan x} dx$

La règle de Bioche nous indique le changement de variable  $u = \sin x$ ,  $du = \cos x dx$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{3-\sin x}{2\cos x+3\tan x} dx &= \int \frac{3-\sin x}{2\cos x+3\tan x} \frac{1}{\cos x} (\cos x dx) \\ &= \int \frac{3-\sin x}{2\cos^2 x+3\sin x} (\cos x dx) \\ &= \int \frac{3-\sin x}{2-2\sin^2 x+3\sin x} (\cos x dx) \\ &= \int \frac{3-u}{2-2u^2+3u} du \end{aligned}$$

Occupons nous de la fraction que l'on réduit en éléments simples :

$$\frac{3-u}{2-2u^2+3u} = \frac{u-3}{(u-2)(2u+1)} = \frac{\alpha}{u-2} + \frac{\beta}{2u+1}$$

On trouve  $\alpha = -\frac{1}{5}$  et  $\beta = \frac{7}{5}$ .

Ainsi

$$\begin{aligned} \int \frac{3-\sin x}{2\cos x+3\tan x} dx &= \int \frac{\alpha du}{u-2} + \int \frac{\beta du}{2u+1} \\ &= \alpha \ln|u-2| + \beta \ln|2u+1| + c \\ &= -\frac{1}{5} \ln|2-\sin x| + \frac{7}{5} \ln|1+2\sin x| + c \end{aligned}$$

Cette primitive est définie pour les  $x$  vérifiant  $1+2\sin x > 0$  donc sur tout intervalle du type  $]-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi[$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

## Correction de l'exercice 8 ▲

1.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$

Par intégration par parties avec  $u = x$ ,  $v' = \sin x$  :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx &= [uv]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'v \\ &= [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ &= [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 0 - 0 + 1 - 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

2.  $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx$

Posons le changement de variable  $u = e^x$  avec  $x = \ln u$  et  $du = e^x dx$ . La variable  $x$  varie de  $x = 0$  à  $x = 1$ , donc la variable  $u = e^x$  varie de  $u = 1$  à  $u = e$ .

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+1}} &= \int_1^e \frac{du}{\sqrt{u+1}} \\ &= [2\sqrt{u+1}]_1^e \\ &= 2\sqrt{e+1} - 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

3.  $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$

Posons le changement de variable  $x = \tan t$ , alors on a  $dx = (1 + \tan^2 t)dt$ ,  $t = \arctan x$  et on sait aussi que  $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$ . Comme  $x$  varie de  $x = 0$  à  $x = 1$  alors  $t$  doit varier de  $t = \arctan 0 = 0$  à  $t = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ .

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2 t)^2} (1+\tan^2 t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{1+\tan^2 t} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(2t) + 1) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \sin(2t) + t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

4.  $\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2} dx$

Commençons par décomposer la fraction en éléments simples :

$$\frac{3x+1}{(x+1)^2} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{(x+1)^2} = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}$$

où l'on a trouvé  $\alpha = 3$  et  $\beta = -2$ . La première est une intégrale du type  $\int \frac{1}{u} = [\ln|u|]$  et la seconde  $\int \frac{1}{u^2} = [-\frac{1}{u}]$ .

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2} dx &= 3 \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx - 2 \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} dx \\
&= 3 \left[ \ln|x+1| \right]_0^1 - 2 \left[ -\frac{1}{x+1} \right]_0^1 \\
&= 3 \ln 2 - 0 + 1 - 2 \\
&= 3 \ln 2 - 1
\end{aligned}$$

5. Notons  $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan x dx$ .

Posons le changement de variable  $u = \frac{1}{x}$  et on a  $x = \frac{1}{u}$ ,  $dx = -\frac{du}{u^2}$ . Alors  $x$  variant de  $x = \frac{1}{2}$  à  $x = 2$ ,  $u$  varie lui de  $u = 2$  à  $u = \frac{1}{2}$  (l'ordre est important!).

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan x dx \\
&= \int_2^{\frac{1}{2}} (1 + u^2) \arctan \frac{1}{u} \left(-\frac{du}{u^2}\right) \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{u^2} + 1\right) \arctan \frac{1}{u} du \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{u^2} + 1\right) \left(\frac{\pi}{2} - \arctan u\right) du \quad \text{car} \quad \arctan u + \arctan \frac{1}{u} = \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{u^2} + 1\right) du - \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{u^2} + 1\right) \arctan u du \\
&= \frac{\pi}{2} \left[ -\frac{1}{u} + u \right]_{\frac{1}{2}}^2 - I \\
&= \frac{3\pi}{2} - I
\end{aligned}$$

Conclusion :  $I = \frac{3\pi}{4}$ .

### Correction de l'exercice 9 ▲

1. Notons  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} dx$ . Le changement de variable  $t = \tan \frac{x}{2}$  transforme toute fraction rationnelle de sinus et cosinus en une fraction rationnelle en  $t$  (que l'on sait résoudre!).

En posant  $t = \tan \frac{x}{2}$  on a  $x = \arctan \frac{t}{2}$  ainsi que les formules suivantes :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ici, on a seulement à remplacer  $\sin x$ . Comme  $x$  varie de  $x = 0$  à  $x = \frac{\pi}{2}$  alors  $t = \tan \frac{x}{2}$  varie de  $t = 0$  à  $t = 1$ .

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} \\
&= \int_0^1 \frac{2}{1+t^2+2t} dt = \int_0^1 \frac{2}{(1+t)^2} dt \\
&= \left[ \frac{-2}{1+t} \right]_0^1 = 1
\end{aligned}$$

2. Notons  $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$ . Alors

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Donc  $J = \frac{\pi}{2} - I = \frac{\pi}{2} - 1$ .

## Correction de l'exercice 10 ▲

1. (a)

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \cdot \sin x dx.$$

En posant  $u(x) = \sin^{n+1} x$  et  $v'(x) = \sin x$  et en intégrant par parties nous obtenons

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \left[ -\cos x \sin^{n+1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^n x dx \\ &= 0 + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^n x dx \\ &= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}. \end{aligned}$$

Donc  $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ . Conclusion

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

(b) Nous avons donc une formule de récurrence pour  $I_n$  qui s'exprime en fonction de  $I_{n-2}$  qui a son tour s'exprime en fonction de  $I_{n-4}$ , etc. On se ramène ainsi à l'intégrale de  $I_0$  (si  $n$  est pair) ou bien de  $I_1$  (si  $n$  est impair). Un petit calcul donne  $I_0 = \frac{\pi}{2}$  et  $I_1 = 1$ . Par récurrence nous avons donc pour  $n$  pair :

$$I_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdots n} \frac{\pi}{2},$$

et pour  $n$  impair :

$$I_n = \frac{2 \cdot 4 \cdots (n-1)}{1 \cdot 3 \cdots n}.$$

(c) Pour calculer  $\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx$  nous allons nous ramener à une intégrale de Wallis. Avec le changement de variable  $x = \cos u$ , on montre assez facilement que :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx &= 2 \int_0^1 (1-x^2)^n dx \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1-\cos^2 u)^n (-\sin u du) \quad \text{avec } x = \cos u \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} u du \\ &= 2I_{2n+1} \end{aligned}$$

2. (a) Sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  la fonction sinus est positive donc  $I_n$  est positive. De plus, sur ce même intervalle  $\sin x \leq 1$  donc  $(\sin x)^{n+1} \leq (\sin x)^n$ . Cela implique

$$I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n+1} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx = I_n.$$

- (b) Comme  $(I_n)$  est décroissante alors  $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$ , en divisant le tout par  $I_n > 0$  nous obtenons  $\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$ . Mais nous avons déjà calculé  $\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2}$  qui tend vers 1 quand  $n$  tend vers l'infini. Donc  $\frac{I_{n+1}}{I_n}$  tend vers 1 donc  $I_n \sim I_{n+1}$ .
3. (a) Nous allons calculer  $I_n \cdot I_{n+1}$ . Supposons par exemple que  $n$  est pair, alors par les formules obtenues précédemment :

$$I_n \times I_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdots n} \frac{\pi}{2} \times \frac{2 \cdot 4 \cdots n}{1 \cdot 3 \cdots (n+1)} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{n+1}.$$

Si  $n$  est impair nous obtenons la même fraction. On en déduit que pour tout  $n$  :  $I_n \cdot I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$ .

- (b) Maintenant

$$I_n^2 = I_n \cdot I_n \sim I_n \cdot I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)} \sim \frac{\pi}{2n},$$

donc

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

- (c)

$$\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} = I_{2n} \cdot (2n+1) \cdot \frac{2}{\pi} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}} \cdot (2n+1) \cdot \frac{2}{\pi} \sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}.$$

## Correction de l'exercice 11 ▲

1. Pour  $x > 0$  on a  $\frac{x^n}{1+x} \leq x^n$ , donc

$$I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \left[ \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Donc  $I_n \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

2.  $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 x^n \frac{1+x}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ .
3. Soit  $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \pm \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ . Par la question précédente nous avons  $S_n = (I_0 + I_1) - (I_1 + I_2) + (I_2 + I_3) - \cdots \pm (I_{n-1} + I_n)$ . Mais d'autre part cette somme étant télescopique cela conduit à  $S_n = I_0 \pm I_n$ . Alors la limite de  $S_n$  et donc de  $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$  (quand  $n \rightarrow +\infty$ ) est  $I_0$  car  $I_n \rightarrow 0$ . Un petit calcul montre que  $I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$ . Donc la somme alternée des inverses des entiers converge vers  $\ln 2$ .

## Correction de l'exercice 12 ▲

La courbe d'équation  $y = x^2/2$  est une parabole, la courbe d'équation  $y = \frac{1}{1+x^2}$  est une courbe en cloche. Dessinez les deux graphes. Ces deux courbes délimitent une région dont nous allons calculer l'aire. Tout d'abord ces deux courbes s'intersectent aux points d'abscisses  $x = +1$  et  $x = -1$  : cela se devine sur le graphique puis se vérifie en résolvant l'équation  $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{x^2+1}$ .

Nous allons calculer deux aires :

- L'aire  $\mathcal{A}_1$  de la région sous la parabole, au-dessus de l'axe des abscisses et entre les droites d'équation  $(x = -1)$  et  $(x = +1)$ . Alors

$$\mathcal{A}_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{x^2}{2} dx = \left[ \frac{x^3}{6} \right]_{-1}^{+1} = \frac{1}{3}.$$

- L'aire  $\mathcal{A}_2$  de la région sous la cloche, au-dessus de l'axe des abscisses et entre les droites d'équation  $(x = -1)$  et  $(x = +1)$ . Alors

$$\mathcal{A}_2 = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2+1} dx = [\arctan x]_{-1}^{+1} = \frac{\pi}{2}.$$



— L'aire  $\mathcal{A}$  sous la cloche et au-dessus de la parabole vaut maintenant

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

---

### Correction de l'exercice 13 ▲

Calculons seulement un quart de l'aire : la partie du quadrant  $x \geq 0, y \geq 0$ . Pour ce quadrant les points de l'ellipse ont une abscisse  $x$  qui vérifie  $0 \leq x \leq a$ . Et la relation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  donne  $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ .

Nous devons donc calculer l'aire sous la courbe d'équation  $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ , au-dessus de l'axe des abscisses et entre les droites d'équations  $(x=0)$  et  $(x=a)$  (faites un dessin !).

Cette aire vaut donc :  $\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$ . Nous allons calculer cette intégrale à l'aide du changement de variable  $x = a \cos u$  qui donne  $dx = -a \sin u du$ . La variable  $x$  variant de  $x=0$  à  $x=a$  alors la nouvelle variable  $u$  varie de  $u = \frac{\pi}{2}$  (pour lequel on a bien  $a \cos \frac{\pi}{2} = 0$ ) à  $u = 0$  (pour lequel on a bien  $a \cos 0 = a$ ). Autrement dit la fonction  $u \mapsto a \cos u$  est une bijection de  $[\frac{\pi}{2}, 0]$  vers  $[0, a]$ .

$$\begin{aligned} \int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sqrt{1 - \cos^2 u} (-a \sin u du) \quad \text{en posant } x = a \cos u \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \sin u (-a \sin u du) \\ &= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u du \\ &= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2u)}{2} du \\ &= ab \left[ \frac{u}{2} - \frac{\sin(2u)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi ab}{4} \end{aligned}$$

L'aire d'un quart d'ellipse est donc  $\frac{\pi ab}{4}$ .

Conclusion : l'aire d'une ellipse est  $\pi ab$ , où  $a$  et  $b$  sont les longueurs des demi-axes. Si  $a = b = r$  on retrouve que l'aire d'un disque de rayon  $r$  est  $\pi r^2$ .

---

### Correction de l'exercice 14 ▲

1. Soit

$$u_n = n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2 + n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

En posant  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  nous venons d'écrire la somme de Riemann correspondant à  $\int_0^1 f(x) dx$ . Cette intégrale se calcule facilement :

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

La somme de Riemann  $u_n$  convergeant vers  $\int_0^1 f(x) dx$  nous venons de montrer que  $(u_n)$  converge vers  $\frac{\pi}{4}$ .

2. Soit  $v_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$ , notons

$$w_n = \ln v_n = \sum_{k=1}^n \ln \left( \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right).$$

En posant  $g(x) = \ln(1+x^2)$  nous reconnaissons la somme de Riemann correspondant à  $I = \int_0^1 g(x)dx$ .  
Calculons cette intégrale :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \ln(1+x^2)dx \\ &= [x \ln(1+x^2)]_0^1 - \int_0^1 x \frac{2x}{1+x^2} dx \quad \text{par intégration par parties} \\ &= \ln 2 - 2 \int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \ln 2 - 2[x - \arctan x]_0^1 \\ &= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Nous venons de prouver que  $w_n = \ln v_n$  converge vers  $I = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$ , donc  $v_n = \exp w_n$  converge vers  $\exp(\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}) = 2e^{\frac{\pi}{2}-2}$ . Bilan  $(v_n)$  a pour limite  $2e^{\frac{\pi}{2}-2}$ .

---