

Intégration

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile

I : Incontournable

Exercice 1

Etudier l'existence des intégrales suivantes

- | | | |
|--|---|---|
| 1) (**) $\int_0^{+\infty} \left(x + 2 - \sqrt{x^2 + 4x + 1}\right) dx$ | 2) (**) $\int_1^{+\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right) dx$ | 3) (**) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x+e^x} dx$ |
| 4) (***) $\int_0^{+\infty} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\right)^{\sqrt{x}} dx$ | 5) (**) $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x^2-x}} dx$ | 6) (**) $\int_0^{+\infty} x^{-\ln x} dx$ |
| 7) (**) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{x^{5/3}} dx$ | 8) (**) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1} dx$ | 9) (**) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{ x }} dx$ |
| 10) (**) $\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} dx$ | 11) (**) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x^3}} dx$ | 12) (***) $\int_0^1 \frac{1}{\arccos(1-x)} dx.$ |

[Correction ▼](#)

[005713]

Exercice 2

Etudier l'existence des intégrales suivantes.

- | | |
|---|---|
| 1) (***) I $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^a \ln^b x} dx$ (Intégrales de BERTRAND) | 2) (**) $\int_0^{\pi/2} (\tan x)^a dx$ |
| 3) (**) $\int_1^{+\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} - a - \frac{b}{x}\right) dx$ | 4) (***) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x^b)} dx$ |

[Correction ▼](#)

[005714]

Exercice 3

(Hors programme) Etudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

- (**) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$
- (**) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a} dx$
- (**) $\int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx$
- (**) $\int_0^{+\infty} x^3 \sin(x^8) dx$
- (**) $\int_0^{+\infty} \cos(e^x) dx$
- (***) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3 \sin^2 x} dx$

[Correction ▼](#)

[005715]

Exercice 4

Existence et calcul de :

- 1) (** I) $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$ 2) (très long) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^3(x^4+1)} dx$
 3) (** I) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1} dx$ 4) (***) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} dx$
 5) (***) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}} dx$ 6) (**) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)} dx$
 7) (**) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{5\operatorname{ch}x+3\operatorname{sh}x+4} dx$ 8) (***) $\int_0^{+\infty} \left(2 + (t+3)\ln\left(\frac{t+2}{t+4}\right)\right) dt$
 9) (** I) $\int_0^{+\infty} \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2} dx$ 10) (I très long) $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2+1)^a} dx$ (calcul pour $a \in \{\frac{3}{2}, 2, 3\}$)
 11) (***) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x} dx$ 12) (***) I $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t} dt$ ($0 < a < b$)

[Correction ▼](#)

[005716]

Exercice 5

Deux calculs de $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$.

- 1) (** I) En utilisant $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx$, calculer I (et J).
 2) (***) I Calculer $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$ (commencer par P_n^2) et en déduire I .

[Correction ▼](#)

[005717]

Exercice 6 ** I

En utilisant un développement de $\frac{1}{1-t}$, calculer $\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt$.

[Correction ▼](#)

[005718]

Exercice 7 *** I

Calculer $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$ (en écrivant $\int_0^x \frac{t-1}{\ln t} dt = \int_0^x \frac{t}{\ln t} dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t} dt$).

[Correction ▼](#)

[005719]

Exercice 8

- 1) (** I) Trouver un équivalent simple quand x tend vers $+\infty$ de $e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$.
 2) (***) Montrer que $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx \underset{a \rightarrow 0}{\sim} -\ln a$.
 3) (*) Montrer que $\int_0^1 \frac{1}{x^3+a^2} dx \underset{a \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a^2}$.

[Correction ▼](#)

[005720]

Exercice 9 ***

Etude complète de $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$.

[Correction ▼](#)

[005721]

Exercice 10 ***

(Hors programme) Convergence et calcul de $\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{E(x)}}{x} dx$.

[Correction ▼](#)

[005722]

Exercice 11 ***

Soit f définie, continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$, intégrable sur $[1, +\infty[$.

1. Montrer que $xf(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
2. Existence et calcul de $\int_1^{+\infty} x(f(x+1) - f(x))dx$.

[Correction ▼](#)

[005723]

Exercice 12 ***

1. Soit f de classe C^1 sur \mathbb{R}^+ à valeurs dans \mathbb{R} telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge en $+\infty$. Montrer que $\int_0^{+\infty} f'(x) dx$ converge en $+\infty$ si et seulement si $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
2. (a) On suppose que f est une fonction de classe C^2 sur \mathbb{R}^+ à valeurs dans \mathbb{R} telle que f et f'' admettent des limites réelles quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f' tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
(b) En déduire que si les intégrales $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ et $\int_0^{+\infty} f''(x) dx$ convergent alors f tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

[Correction ▼](#)

[005724]

Exercice 13 ***

Soit f de classe C^2 sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} telle que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables sur \mathbb{R} . Montrer que f'^2 est intégrable sur \mathbb{R} et que $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x) dx\right)^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx\right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f''^2(x) dx\right)$. Cas d'égalité ?

[Correction ▼](#)

[005725]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Pour $x \geq 0$, $x^2 + 4x + 1 \geq 0$ et donc la fonction $f : x \mapsto x + 2 - \sqrt{x^2 + 4x + 1}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
Quand x tend vers $+\infty$, $x + 2 - \sqrt{x^2 + 4x + 1} = \frac{3}{x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 1}} \sim 32x$. Comme la fonction $x \mapsto \frac{3}{2x}$ est positive et non intégrable au voisinage de $+\infty$, f n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$.
2. Pour $x \geq 1$, $1 + \frac{1}{x}$ est défini et strictement positif. Donc la fonction $f : x \mapsto e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ est définie et continue sur $[1, +\infty[$.
Quand x tend vers $+\infty$, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})} = e^{1 - \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})} = e - \frac{e}{2x} + o(\frac{1}{x})$ puis $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{2x}$. Puisque la fonction $x \mapsto \frac{e}{2x}$ est positive et non intégrable au voisinage de $+\infty$, f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.
3. La fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x + e^x}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.
 - En 0, $\frac{\ln x}{x + e^x} \sim \ln x$ et donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Comme $\frac{1}{2} < 1$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur un voisinage de 0 et il en est de même de la fonction f .
 - En $+\infty$, $f(x) \sim \frac{\ln x}{e^x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Comme $2 > 1$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et il en est de même de la fonction f .
 Finalement, f est intégrable sur $]0, +\infty[$.
4. La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$ est continue et strictement positive sur $[0, +\infty[$. Donc la fonction $f : x \mapsto (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})$ est continue sur $[0, +\infty[$.
En $+\infty$, $\ln(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) = \frac{1}{3} \ln x + \ln\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1/3} - 1\right) = \frac{1}{3} \ln x + \ln\left(\frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = -\frac{2}{3} \ln x - \ln 3 + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Par suite, $\sqrt{x} \ln(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) = -\frac{2}{3} \sqrt{x} \ln x - \ln 3 \sqrt{x} + o(1)$.
Mais alors $x^2 f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(-\frac{2}{3} \sqrt{x} \ln x - \ln 3 \sqrt{x} + 2 \ln x + o(1)\right)$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f(x) = 0$. Finalement $f(x)$ est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$ et f est intégrable sur $[0, +\infty[$.
5. La fonction $f : x \mapsto e^{-\sqrt{x^2 - x}}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
Quand x tend vers $+\infty$, $x^2 f(x) = \exp\left(-\sqrt{x^2 - x} + 2 \ln x\right) = \exp(-x + o(x))$ et donc $x^2 f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$.
 $f(x)$ est ainsi négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ et donc f est intégrable sur $[1, +\infty[$.
6. La fonction $f : x \mapsto x^{-\ln x}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
 - Quand x tend vers 0, $x^{-\ln x} = e^{-\ln^2 x} \rightarrow 0$. La fonction f se prolonge par continuité en 0 et est en particulier intégrable sur un voisinage de 0.
 - Quand x tend vers $+\infty$, $x^2 f(x) = \exp(-\ln^2 x + 2 \ln x) \rightarrow 0$. Donc f est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$ et f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.
 Finalement, f est intégrable sur $]0, +\infty[$.
7. La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{x^{5/3}}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
 - Quand x tend vers 0, $f(x) \sim \frac{5x - 3x}{x^{5/3}} = \frac{2}{x^{2/3}} > 0$. Puisque $\frac{2}{3} < 1$, la fonction $x \mapsto \frac{2}{x^{2/3}}$ est positive et intégrable sur un voisinage de 0 et il en est de même de la fonction f .
 - En $+\infty$, $|f(x)| \leq \frac{2}{x^{5/3}}$ et puisque $\frac{5}{3} > 1$, la fonction f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.
 Finalement, f est intégrable sur $]0, +\infty[$.
8. La fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x^2 - 1}$ est continue sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
 - En 0, $f(x) \sim -\ln x = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Donc f est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.
 - En 1, $f(x) \sim \frac{\ln x}{2(x-1)} \sim \frac{1}{2}$. La fonction f se prolonge par continuité en 1 et est en particulier intégrable sur un voisinage de 1 à gauche ou à droite.
 - En $+\infty$, $x^{3/2} f(x) \sim \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = o(1)$. Donc $f(x)$ est négligeable devant $\frac{1}{x^{3/2}}$ quand x tend vers $+\infty$ et donc intégrable sur un voisinage de $+\infty$.
 Finalement, f est intégrable sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
9. La fonction $f : x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{|x|}}$ est continue sur $] -\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ et paire. Il suffit donc d'étudier l'intégrabilité de f sur $]0, +\infty[$.

f est positive et équivalente en 0 à droite à $\frac{1}{\sqrt{x}}$ et négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées.

f est donc intégrable sur $]0, +\infty[$ puis par parité sur $] -\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. On en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{|x|}} dx$ existe dans \mathbb{R} et vaut par parité $2 \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx$.

10. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ est continue et positive sur $] -1, 1[$, paire et équivalente au voisinage de 1 à droite à $\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1-x}}$. f est donc intégrable sur $] -1, 1[$.

11. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x^3}}$ est continue et positive sur $]0, 1[$, équivalente au voisinage de 0 à droite à $\frac{1}{x^{2/3}}$ et au voisinage de 1 à gauche à $\frac{1}{(1-x)^{1/3}}$. f est donc intégrable sur $]0, 1[$.

12. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\arccos(1-x)}$ est continue et positive sur $]0, 1[$.

En 0, $\arccos(1-x) = o(1)$. Donc $\arccos(1-x) \sim \sin(\arccos(1-x)) = \sqrt{1-(1-x)^2} = \sqrt{2x-x^2} \sim \sqrt{2}\sqrt{x}$.

Donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x}}$ et f est intégrable sur $]0, 1[$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Pour tout couple de réels (a, b) , la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^a \ln^b x}$ est continue et positive sur $[2, +\infty[$. Etudions l'intégrabilité de f au voisinage de $+\infty$.

1er cas. Si $a > 1$, $x^{(a+1)/2} f(x) = \frac{1}{x^{(a-1)/2} \ln^b x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ car $\frac{a-1}{2} > 0$ et d'après un théorème de croissances comparées. Donc $f(x) = o\left(\frac{1}{x^{(a+1)/2}}\right)$. Comme $\frac{a+1}{2} > 1$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^{(a+1)/2}}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et il en est de même de f . Dans ce cas, f est intégrable sur $[2, +\infty[$.

2ème cas. Si $a < 1$, $x^{(a+1)/2} f(x) = \frac{1}{\ln^b x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ car $\frac{1-a}{2} > 0$ et d'après un théorème de croissances comparées. Donc $f(x)$ est prépondérant devant $\frac{1}{x^{(a+1)/2}}$ en $+\infty$. Comme $\frac{a+1}{2} < 1$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^{(a+1)/2}}$ n'est pas intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et il en est de même de f . Dans ce cas, f n'est pas intégrable sur $[2, +\infty[$.

3ème cas. Si $a = 1$. Pour $X > 2$ fixé, en posant $t = \ln x$ et donc $dt = \frac{dx}{x}$ on obtient

$$\int_2^X \frac{1}{x \ln^b x} dx = \int_{\ln 2}^{\ln X} \frac{dt}{t^b}.$$

Puisque $\ln X$ tend vers $+\infty$ quand X tend vers $+\infty$ et que les fonctions considérées sont positives, f est intégrable sur $[2, +\infty[$ si et seulement si $b > 1$.

En résumé,

la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^a \ln^b x}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ si et seulement si $a > 1$ ou $(a = 1 \text{ et } b > 1)$.

(En particulier, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ n'est pas intégrable sur voisinage de $+\infty$ bien que négligeable devant $\frac{1}{x}$ en $+\infty$).

2. Pour tout réel a , la fonction $f : x \mapsto (\tan x)^a$ est continue et strictement positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. De plus, pour tout réel x de $]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{f(x)}$.

• **Etude en 0 à droite.** $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^a$. Donc f est intégrable sur un voisinage de 0 à droite si et seulement si $a > -1$.

• **Etude en $\frac{\pi}{2}$ à gauche.** $f(x) = \frac{1}{f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{2}}{\sim} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{-a}$. Donc f est intégrable sur un voisinage de $\frac{\pi}{2}$ à gauche si et seulement si $a < 1$.

En résumé, f est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ si et seulement si $-1 < a < 1$.

3. Pour $x \geq 1$, $1 + \frac{1}{x}$ est défini et strictement positif. Donc pour tout couple (a, b) de réels, la fonction $f : x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} - a - \frac{b}{x}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

En $+\infty$, $\left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(\frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} (1-a) + \frac{1-b}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

- Si $a \neq 1$, f a une limite réelle non nulle en $+\infty$ et n'est donc pas intégrable sur $[1, +\infty[$.
- Si $a = 1$ et $b \neq 1$, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1-b}{x}$. En particulier, f est de signe constant sur un voisinage de $+\infty$ et n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.
- Si $a = b = 1$, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et dans ce cas, f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

En résumé, f est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $a = b = 1$.

4. Pour tout couple (a, b) de réels, la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^a(1+x^b)}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

• **Etude en 0.**

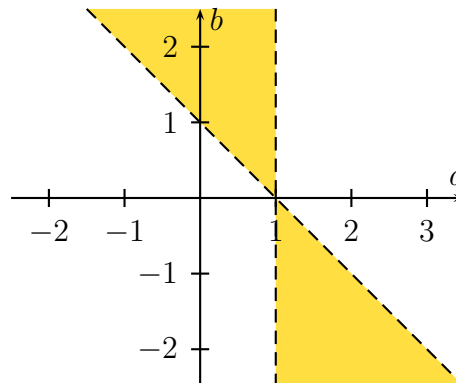
- Si $b > 0$, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^a}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de 0 si et seulement si $a < 1$,
- si $b = 0$, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2x^a}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de 0 si et seulement si $a < 1$,
- si $b < 0$, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^{a+b}}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de 0 si et seulement si $a + b < 1$.

• **Etude en $+\infty$.**

- Si $b > 0$, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^{a+b}}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ si et seulement si $a + b > 1$,
- si $b = 0$, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2x^a}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ si et seulement si $a > 1$,
- si $b < 0$, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^a}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ si et seulement si $a > 1$.

En résumé, f est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $((b \geq 0$ et $a < 1)$ ou $(b < 0$ et $a + b < 1))$ et $((b > 0$ et $a + b > 1)$ ou $(b \leq 0$ et $a > 1))$ ce qui équivaut à $(b > 0$ et $a + b > 1$ et $a < 1)$ ou $(b < 0$ et $a > 1$ et $a + b < 1)$.

Représentons graphiquement l'ensemble des solutions. La zone solution est la zone colorée.



Correction de l'exercice 3 ▲

1. Soient ε et X deux réels tels que $0 < \varepsilon < X$. Les deux fonction $x \mapsto 1 - \cos x$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon, X]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_{\varepsilon}^X \frac{\sin x}{x} dx = \left[\frac{1-\cos x}{x} \right]_{\varepsilon}^X + \int_{\varepsilon}^X \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \frac{1-\cos X}{X} - \frac{1-\cos \varepsilon}{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^X \frac{1-\cos x}{x^2} dx.$$

- La fonction $x \mapsto \frac{1-\cos x}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$, est prolongeable par continuité en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ et donc intégrable sur un voisinage de 0, est dominée par $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$ et donc intégrable sur un voisinage de $+\infty$. La fonction $x \mapsto \frac{1-\cos x}{x^2}$ est donc intégrable sur $]0, +\infty[$ et $\int_{\varepsilon}^X \frac{1-\cos x}{x^2} dx$ a une limite réelle quand ε tend vers 0 et X tend vers $+\infty$.
- $\left| \frac{1-\cos X}{X} \right| \leq \frac{1}{X}$ et donc $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1-\cos X}{X} = 0$.
- $\frac{1-\cos \varepsilon}{\varepsilon} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{\varepsilon}{2}$ et donc $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1-\cos \varepsilon}{\varepsilon} = 0$.

On en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est une intégrale convergente et de plus

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2(u)}{4u^2} 2du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2} du.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge et de plus $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$.

2. La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x^a}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

• Sur $]0, 1[$, la fonction f est de signe constant et l'existence de $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 f(x) dx$ équivaut à l'intégrabilité de la fonction f sur $]0, 1[$. Puisque f est équivalente en 0 à $\frac{1}{x^{a-1}}$, l'intégrale impropre $\int_0^1 f(x) dx$ converge en 0 si et seulement si $a > 0$. On suppose dorénavant $a > 0$.

• Soit $X > 1$. Les deux fonction $x \mapsto -\cos x$ et $x \mapsto \frac{1}{x^a}$ sont de classe C^1 sur le segment $[1, X]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_1^X \frac{\sin x}{x^a} dx = \left[\frac{-\cos x}{x^a} \right]_1^X - a \int_1^X \frac{\cos x}{x^{a+1}} dx = -\frac{\cos X}{X^a} + \cos 1 - a \int_1^X \frac{\cos x}{x^{a+1}} dx.$$

Maintenant, $\left| \frac{\cos x}{x^{a+1}} \right| \leq \frac{1}{x^{a+1}}$ et puisque $a+1 > 1$, la fonction $x \mapsto \frac{\cos x}{x^{a+1}}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$. On en déduit que la fonction $X \mapsto \int_1^X \frac{\cos x}{x^{a+1}} dx$ a une limite réelle quand X tend vers $+\infty$. Comme d'autre part, la fonction $X \mapsto -\frac{\cos X}{X^a} + \cos 1$ a une limite réelle quand X tend vers $+\infty$, on a montré que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge en $+\infty$.

Finalement

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a} dx$ converge si et seulement si $a > 0$.

3. Soit X un réel strictement positif. Le changement de variables $t = x^2$ suivi d'une intégration par parties fournit :

$$\int_1^X e^{ix^2} dx = \int_1^{X^2} \frac{e^{it}}{2\sqrt{t}} dt = \frac{i}{2} \left(-\frac{e^{iX}}{\sqrt{X}} + e^i - \frac{1}{2} \int_1^X \frac{e^{it}}{t^{3/2}} dt \right)$$

Maintenant, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^{iX}}{\sqrt{X}} = 0$ car $\left| \frac{e^{iX}}{\sqrt{X}} \right| = \frac{1}{\sqrt{X}}$. D'autre part, la fonction $t \mapsto \frac{e^{it}}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $\left| \frac{e^{it}}{t^{3/2}} \right| = \frac{1}{t^{3/2}}$. Ainsi, $\int_1^{+\infty} e^{ix^2} dx$ est une intégrale convergente et puisque d'autre part la fonction $x \mapsto e^{ix^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, on a montré que

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx$ converge.

On en déduit encore que les intégrales $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$ et $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$ sont des intégrales convergentes (intégrales de FRESNEL).

4. La fonction $f : x \mapsto x^3 \sin(x^8)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Soit $X > 0$. Le changement de variables $t = x^4$ fournit

$$\int_0^X x^3 \sin(x^8) dx = \frac{1}{4} \int_0^{X^4} \sin(t^2) dt = \frac{1}{4} \operatorname{Im} \left(\int_0^{X^4} e^{it^2} dt \right).$$

D'après 3), $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$ est une intégrale convergente et donc $\int_0^{+\infty} x^3 \sin(x^8) dx$ converge.

5. La fonction $f : x \mapsto \cos(e^x)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Soit $X > 0$. Le changement de variables $t = e^x$ fournit

$$\int_0^X \cos(e^x) dx = \int_1^{e^X} \frac{\cos t}{t} dt.$$

On montre la convergence en $+\infty$ de cette intégrale par une intégration par parties analogue à celle de la question 1). L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \cos(e^x) dx$ converge.

6. Pour tout réel $x \geq 0$, $1 + x^3 \sin^2 x \geq 1 > 0$ et donc la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^3 \sin^2 x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

La fonction f étant positive, la convergence de l'intégrale proposée équivaut à l'intégrabilité de la fonction f sur $[0, +\infty[$, intégrabilité elle-même équivalente à la convergence de la série numérique de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1+x^3 \sin^2 x} dx$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $u_n \geq 0$ et d'autre part

$$\begin{aligned}
u_n &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1+x^3 \sin^2 x} dx = \int_0^\pi \frac{1}{1+(u+n\pi)^3 \sin^2 u} du \\
&\leq \int_0^\pi \frac{1}{1+n^3 \pi^3 \sin^2 u} du = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+n^3 \pi^3 \sin^2 u} du \\
&\leq 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+n^3 \pi^3 \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2} du \quad (\text{par concavité de la fonction sinus sur } [0, \pi]) \\
&= 2 \times \frac{1}{2\sqrt{\pi n^3/2}} \int_0^{(n\pi)^{3/2}} \frac{1}{1+v^2} dv \leq \frac{1}{\sqrt{\pi n^3/2}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+v^2} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2n^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2n^{3/2}}$ et la série de terme général u_n converge. On en déduit que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^3 \sin^2 x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Correction de l'exercice 4 ▲

Existence et calcul de :

- 1) (** I) $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$
- 2) (très long) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^3(x^4+1)} dx$
- 3) (** I) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1} dx$
- 4) (***) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} dx$
- 5) (***) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}} dx$
- 6) (**) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)} dx$
- 7) (**) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{5 \operatorname{ch} x + 3 \operatorname{sh} x + 4} dx$
- 8) (***) $\int_0^{+\infty} \left(2 + (t+3) \ln\left(\frac{t+2}{t+4}\right)\right) dt$
- 9) (** I) $\int_0^{+\infty} \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2} dx$
- 10) (I très long) $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2+1)^a} dx$ (calcul pour $a \in \{\frac{3}{2}, 2, 3\}$)
- 11) (***) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x} dx$
- 12) (***) I $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$ ($0 < a < b$)

Correction de l'exercice 5 ▲

La fonction $f : x \mapsto \ln(\sin x)$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. De plus, quand x tend vers 0, $\ln(\sin x) \sim \ln x = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Par suite, f est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

1. Soient $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$ et $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx$. Le changement de variables $x = \frac{\pi}{2} - t$ fournit J existe et $J = I$. Par suite,

$$\begin{aligned}
2I &= I + J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x \cos x) dx = -\frac{\pi \ln 2}{2} + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x)) dx = -\frac{\pi \ln 2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \ln(\sin u) du \\
&= -\frac{\pi \ln 2}{2} + \frac{1}{2} \left(I + \int_{\pi/2}^\pi \ln(\sin u) du \right) = -\frac{\pi \ln 2}{2} + \frac{1}{2} \left(I + \int_{\pi/2}^0 \ln(\sin(\pi-t)) (-dt) \right) = -\frac{\pi \ln 2}{2} + I.
\end{aligned}$$

Par suite, $I = -\frac{\pi \ln 2}{2}$.

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx = -\frac{\pi \ln 2}{2}.$$

2. Pour $n \geq 2$, posons $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$. Pour $1 \leq k \leq n-1$, on a $0 < \frac{k\pi}{2n} < \frac{\pi}{2}$ et donc $P_n > 0$. D'autre part, $\sin\left(\frac{(2n-k)\pi}{2n}\right) = \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ et $\sin\frac{n\pi}{2n} = 1$. On en déduit que

$$P_n^2 = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right),$$

puis

$$\begin{aligned} P_n^2 &= \prod_{k=1}^{2n-1} \frac{e^{ik\pi/(2n)} - e^{-ik\pi/(2n)}}{2i} = \frac{1}{(2i)^{2n-1}} \prod_{k=1}^{2n-1} \left(-e^{-ik\pi/(2n)}\right) \prod_{k=1}^{2n-1} \left(1 - e^{2ik\pi/(2n)}\right) \\ &= \frac{1}{(2i)^{2n-1}} (-1)^{2n-1} (e^{-i\pi/2})^{2n-1} \prod_{k=1}^{2n-1} \left(1 - e^{2ik\pi/(2n)}\right) = \frac{1}{2^{2n-1}} \prod_{k=1}^{2n-1} \left(1 - e^{2ik\pi/(2n)}\right) \end{aligned}$$

Maintenant, le polynôme Q unitaire de degré $2n - 1$ dont les racines sont les $2n - 1$ racines $2n$ -èmes de l'unité distinctes de 1 est

$$\frac{X^{2n}-1}{X-1} = 1 + X + X^2 + \dots + X^{2n-1}$$

et donc $\prod_{k=1}^{2n-1} (1 - e^{2ik\pi/(2n)}) = Q(1) = 2n$. Finalement,

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = P_n = \sqrt{\frac{2n}{2^{2n-1}}} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Pour $0 \leq k \leq n$, posons alors $x_k = \frac{k\pi}{2n}$ de sorte que $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \frac{\pi}{2}$ est une subdivision de $[0, \frac{\pi}{2}]$ à pas constant égal à $\frac{\pi}{2n}$.

Puisque la fonction $x \mapsto \ln(\sin x)$ est continue et croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, pour $1 \leq k \leq n-1$, on a $\frac{\pi}{2n} \ln(\sin(x_k)) \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} \ln(\sin x) dx$ puis en sommant ces inégalités, on obtient

$$\frac{\pi}{2n} \ln(P_n) \leq \int_{\pi/(2n)}^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$$

De même, pour $0 \leq k \leq n-1$, $\int_{x_k}^{x_{k+1}} \ln(\sin x) dx \leq \frac{\pi}{2n} \ln(\sin(x_{k+1}))$ et en sommant

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx \leq \frac{\pi}{2n} \ln(P_n).$$

Finalement, $\forall n \geq 2$, $\frac{\pi}{2n} \ln(P_n) + \int_0^{\pi/(2n)} \ln(\sin x) dx \leq I \leq \frac{\pi}{2n} \ln(P_n)$. Mais $\ln(P_n) = \ln n - (n-1) \ln 2$ et donc $\frac{\pi}{2n} \ln(P_n)$ tend vers $-\frac{\pi \ln 2}{2}$ quand n tend vers $+\infty$ et comme d'autre part, $\int_0^{\pi/(2n)} \ln(\sin x) dx$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (puisque la fonction $x : \mapsto \ln(\sin x)$ est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$), on a redémontré que $I = -\frac{\pi \ln 2}{2}$.

Correction de l'exercice 6 ▲

La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln t}{t-1}$ est continue et positive sur $]0, 1[$, négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{t}}$ quand t tend vers 0 et prolongeable par continuité en 1. La fonction f est donc intégrable sur $]0, 1[$.

1ère solution. (à la main, sans utilisation d'un théorème d'intégration terme à terme) Pour $t \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\ln t}{t-1} = \frac{-\ln t}{1-t} = -\sum_{k=0}^n t^k \ln t + \frac{t^{n+1} \ln t}{t-1}$$

Pour $t \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(t) = -t^n \ln t$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Chaque fonction f_k , $0 \leq k \leq n$, est continue sur $]0, 1[$ et négligeable en 0 devant $\frac{1}{\sqrt{t}}$. Donc chaque fonction f_k est intégrable sur $]0, 1[$ et donc sur $]0, 1[$. Mais alors, il en est de même de la fonction $t \mapsto \frac{t^{n+1} \ln t}{1-t} = \frac{\ln t}{t-1} + \sum_{k=0}^n t^k \ln t$ et

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt = -\sum_{k=0}^n \int_0^1 t^k \ln t dt + \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{t-1} dt$$

• La fonction $g : t \mapsto \frac{t \ln t}{t-1}$ est continue sur $]0, 1[$ et prolongeable par continuité en 0 et en 1. Cette fonction est en particulier bornée sur $]0, 1[$. Soit M un majorant de la fonction $|g|$ sur $]0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{t-1} dt \right| \leq \int_0^1 t^n |g(t)| dt \leq M \int_0^1 t^n dt = \frac{M}{n+1}.$$

Par suite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{t-1} dt = 0$. On en déduit que la série de terme général $-\int_0^1 t^k \ln t dt$ converge et que

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 (-t^k \ln t) dt.$$

• Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Pour $k \in \mathbb{N}$, une intégration par parties fournit

$$\int_{\varepsilon}^1 (-t^k \ln t) dt = \left[-\frac{t^{k+1} \ln t}{k+1} \right]_{\varepsilon}^1 + \frac{1}{k+1} \int_{\varepsilon}^1 t^k dt = \frac{\varepsilon^{k+1} \ln \varepsilon}{k+1} + \frac{1-\varepsilon^{k+1}}{(k+1)^2}.$$

Quand ε tend vers 0, on obtient $\int_{\varepsilon}^1 (-t^k \ln t) dt = \frac{1}{(k+1)^2}$. Finalement,

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

2ème solution. (utilisation d'un théorème d'intégration terme à terme) Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $]0, 1[$ et la série de fonctions de terme général f_n converge simplement vers la fonction f sur $]0, 1[$ et de plus, la fonction f est continue sur $]0, 1[$. Enfin

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 |f_n(t)| dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < +\infty.$$

D'après un théorème d'intégration terme à terme, $\int_0^1 f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \frac{\pi^2}{6}$.

Correction de l'exercice 7 ▲

La fonction $f : t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$ est continue sur $]0, 1[$, prolongeable par continuité en 0 et 1 et donc est intégrable sur $]0, 1[$.

Soit $x \in]0, 1[$. Chacune des deux fonctions $t \mapsto \frac{t}{\ln t}$ et $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ se prolonge par continuité en 0 et est ainsi intégrable sur $]0, x]$. On peut donc écrire

$$\int_0^x \frac{t-1}{\ln t} dt = \int_0^x \frac{t}{\ln t} dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t} dt.$$

Dans la première intégrale, on pose $u = t^2$ et on obtient $\int_0^x \frac{t}{\ln t} dt = \int_0^x \frac{2t}{\ln(t^2)} dt = \int_0^{x^2} \frac{1}{\ln u} du$ et donc

$$\int_0^x \frac{t-1}{\ln t} dt = \int_0^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t} dt = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt.$$

On note alors que, puisque $x \in]0, 1[$, $x^2 < x$. Pour $t \in [x^2, x]$, on a $t \ln t < 0$ et donc $\frac{x}{t \ln t} \leq \frac{t}{t \ln t} = \frac{1}{\ln t} \leq \frac{x^2}{\ln t} t$ puis par croissance de l'intégrale, $\int_{x^2}^x \frac{x}{t \ln t} dt \leq \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t} dt \leq \int_{x^2}^x \frac{x^2}{t \ln t} dt$ et donc

$$x^2 \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt \leq x \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt$$

Maintenant, $\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \ln |\ln(x^2)| - \ln |\ln x| = \ln 2$ et on a montré que, pour tout réel x de $]0, 1[$,

$$x^2 \ln 2 \leq \int_0^x \frac{t-1}{\ln t} dt \leq x \ln 2$$

Quand x tend vers 1, on obtient

$$\boxed{\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt = \ln 2.}$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue, positive et intégrable sur $[0, +\infty[$. De plus, quand t tend $+\infty$,

$$e^{-t^2} \sim \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) = \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2t} e^{-t^2}\right).$$

D'après un théorème de sommation des relations de comparaison, quand x tend vers $+\infty$,

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \sim \int_x^{+\infty} \left(-\frac{1}{2t} e^{-t^2}\right)' dt = \frac{1}{2x} e^{-x^2},$$

et donc

$$e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

2. Pour $a > 0$ fixé, $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ converge (se montre en intégrant par parties (voir exercice 3)) puis

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx &= -\int_1^a \frac{\cos x}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx \underset{a \rightarrow 0}{=} -\int_1^a \frac{\cos x}{x} dx + O(1) \\ &\underset{a \rightarrow 0}{=} -\int_1^a \frac{1}{x} dx + \int_1^a \frac{1 - \cos x}{x} dx + O(1) \underset{a \rightarrow 0}{=} -\ln a + \int_1^a \frac{1 - \cos x}{x} dx + O(1). \end{aligned}$$

Maintenant, $\frac{1 - \cos x}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$ et en particulier, $\frac{1 - \cos x}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Par suite, la fonction $x \mapsto \frac{1 - \cos x}{x}$ est continue sur $]0, 1]$ et se prolonge par continuité en 0. Cette fonction est donc intégrable sur $]0, 1]$ et en particulier, $\int_1^a \frac{1 - \cos x}{x} dx$ a une limite réelle quand a tend vers 0. On en déduit que $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx \underset{a \rightarrow 0}{=} -\ln a + O(1)$ et finalement

$$\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx \underset{a \rightarrow 0}{\sim} -\ln a.$$

3. Soit $a > 0$.

$$\left| \int_0^1 \frac{1}{x^3 + a^2} dx - \frac{1}{a^2} \right| = \left| \int_0^1 \left(\frac{1}{x^3 + a^2} - \frac{1}{a^2} \right) dx \right| = \int_0^1 \frac{x^3}{(x^3 + a^2)a^2} dx \leq \frac{1}{a^4}$$

Donc, $\int_0^1 \frac{1}{x^3 + a^2} dx \underset{a \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{a^2} + o\left(\frac{1}{a^2}\right)$ ou encore

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3 + a^2} dx \underset{a \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a^2}.$$

Correction de l'exercice 9 ▲

• **Domaine de définition.** Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x < 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ n'est pas définie sur $[x, 0[\subset [x, x^2]$ et $f(x)$ n'est pas défini.

Si $0 < x < 1$, $[x^2, x] \subset]0, 1[$. Donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $[x^2, x]$. Dans ce cas, $f(x)$ existe et est de plus strictement positif car $\ln t < 0$ pour tout t de $]0, 1[$.

Si $x > 1$, $[x, x^2] \subset]1, +\infty[$. Donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $[x, x^2]$. Dans ce cas aussi, $f(x)$ existe et est strictement positif.

Enfin, $f(0)$ et $f(1)$ n'ont pas de sens.

f est définie sur $D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et strictement positive sur D .

• **Dérivabilité.** Soit I l'un des deux intervalles $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur I . Soit F une primitive de cette fonction sur I .

Si $x \in]0, 1[$, on a $[x^2, x] \subset]0, 1[$ et donc $f(x) = F(x^2) - F(x)$. De même, si $x \in]1, +\infty[$.

On en déduit que f est de classe C^1 sur D . De plus, pour $x \in D$,

$$f'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

- **Variations.** f' est strictement positive sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et donc f est strictement croissante sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ (mais pas nécessairement sur D).
- **Etude en 0.** Soit $x \in]0, 1[$. On a $0 < x^2 < x < 1$ et de plus la fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est décroissante sur $[x^2, x] \subset]0, 1[$ en tant qu'inverse d'une fonction strictement négative et strictement croissante sur $]0, 1[$. Donc, $\frac{x-x^2}{\ln x} \leq \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t} dt \leq \frac{x-x^2}{\ln(x^2)}$ puis

$$\forall x \in]0, 1[, \frac{x^2-x}{2\ln x} \leq f(x) \leq \frac{x^2-x}{\ln x}.$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ et on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ (on note encore f le prolongement).

Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $f'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$ tend vers 0. Ainsi,

- f est continue sur $[0, 1[$,
- f est de classe C^1 sur $]0, 1[$,
- f' a une limite réelle quand x tend vers 0 à savoir 0.

D'après un théorème classique d'analyse, f est de classe C^1 sur $[0, 1[$ et $f'(0) = 0$.

- **Etude en 1.** On a vu à l'exercice 7 que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \ln 2$ (la limite à droite en 1 se traite de manière analogue). On prolonge f par continuité en 1 en posant $f(1) = \ln 2$ (on note encore f le prolongement obtenu).

Ensuite quand x tend vers 1, $f'(x)$ tend vers 1. Donc f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^+ et $f'(1) = 1$.

En particulier, f est continue sur \mathbb{R}^+ et d'après plus haut f est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ .

- **Etude en $+\infty$.** Pour $x > 1$, $f(x) \geq x^2 - x \ln x$. Donc $f(x)$ et $\frac{f(x)}{x}$ tendent vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. La courbe représentative de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy) .

- **Convexité.** Pour $x \in D$, $f''(x) = \frac{\ln x - \frac{x-1}{x}}{\ln^2 x}$.

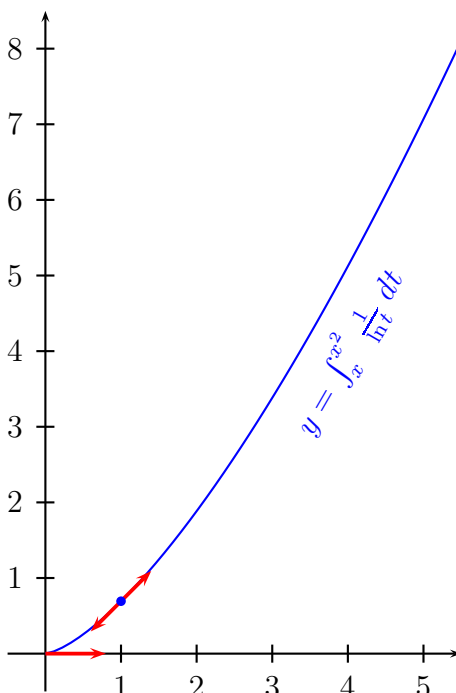
En 1, en posant $x = 1 + h$ où h tend vers 0, on obtient

$$f''(1+h) = \frac{(1+h)\ln(1+h)-h}{(1+h)\ln^2(1+h)} = \frac{(1+h)\left(h-\frac{h^2}{2}+o(h^2)\right)-h}{h^2+o(h^2)} = \frac{1}{2} + o(1).$$

f est donc de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et $f''(1) = \frac{1}{2}$.

Pour $x \neq 1$, $f''(x)$ est du signe de $g(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}$ dont la dérivée est $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$. La fonction g est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et strictement croissante sur $]1, +\infty[$. Donc pour $x \neq 1$, $g(x) > g(1) = 0$. On en déduit que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f''(x) > 0$ et donc que f est strictement convexe sur \mathbb{R}^+ .

- **Graphie.**



Correction de l'exercice 10 ▲

La fonction $f : x \mapsto \frac{(-1)^{E(x)}}{x}$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$ et donc localement intégrable sur $[1, +\infty[$. Soient X un réel élément de $[2, +\infty[$ et $n = E(X)$.

$$\int_1^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x} dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{(-1)^{E(x)}}{x} dx + \int_n^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x} dx = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) + \int_n^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x} dx.$$

Or, $\left| \int_n^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x} dx \right| \leq \frac{X-n}{n} \leq \frac{1}{E(X)}$. Cette dernière expression tend vers 0 quand le réel X tend vers $+\infty$ et donc $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_n^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x} dx = 0$.

D'autre part, la suite $\left((-1)^k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)_{k \geq 1}$ est de signe alternée et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. La série de terme général $(-1)^k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$, $k \geq 1$, converge en vertu du critère spécial aux séries alternées ou encore, quand le réel X tend vers $+\infty$, $\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ a une limite réelle.

Il en est de même de $\int_1^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x} dx$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{E(x)}}{x} dx$ converge. De plus

$$\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{E(x)}}{x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Calcul. Puisque la série converge, on a $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^n \left(-\ln\left(1 + \frac{1}{2k-1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2k}\right) \right) = \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(1 \times 3 \times \dots \times (2n-1))^2 \times (2n+1)}{(2 \times 4 \times \dots \times (2n))^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2^{4n}} \times \left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^2 \times (2n+1)\right). \end{aligned}$$

D'après la formule de STIRLING,

$$\frac{1}{2^{4n}} \times \left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^2 \times (2n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^{4n}} \times \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{4n} (\sqrt{4\pi n})^2}{\left(\frac{n}{e}\right)^{4n} (\sqrt{2\pi n})^4} \times (2n) = \frac{2}{\pi}.$$

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$ et on a montré que

$$\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{E(x)}}{x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right).$$

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Puisque f est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$, pour $x \geq 2$ on a

$$0 \leq xf(x) = 2\left(x - \frac{x}{2}\right)f(x) \leq 2 \int_{x/2}^x f(t) dt = 2 \left(\int_{x/2}^x f(t) dt - \int_x^{+\infty} f(t) dt \right)$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ car f est intégrable sur $[1, +\infty[$. Donc si f est continue, positive, décroissante et intégrable sur $[1, +\infty[$ alors $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$.

2. La fonction $x \mapsto x(f(x) - f(x+1))$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$.

Soit $X \geq 1$.

$$\begin{aligned} \int_1^X x(f(x) - f(x+1)) dx &= \int_1^X xf(x) dx - \int_2^{X+1} (x-1)f(x) dx = \int_1^X xf(x) dx - \int_2^{X+1} xf(x) dx + \int_2^{X+1} f(x) dx \\ &= \int_1^2 xf(x) dx - \int_X^{X+1} xf(x) dx + \int_2^{X+1} f(x) dx. \end{aligned}$$

Maintenant $0 \leq \int_X^{X+1} xf(x) dx \leq (X+1-X)(X+1)f(X) \leq 2Xf(X)$. D'après 1), cette dernière expression tend vers 0 quand X tend vers $+\infty$. Donc, quand X tend vers $+\infty$, $\int_1^X x(f(x) - f(x+1)) dx$ tend vers $\int_1^2 xf(x) dx + \int_2^{+\infty} f(x) dx$.

Puisque la fonction $x \mapsto x(f(x) - f(x+1))$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$, on sait que $x \mapsto x(f(x) - f(x+1))$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si la fonction $X \mapsto \int_1^X x(f(x) - f(x+1)) dx$ a une limite réelle quand X tend vers $+\infty$. Donc la fonction $x \mapsto x(f(x) - f(x+1))$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et

$$\int_1^{+\infty} x(f(x) - f(x+1)) dx = \int_1^2 xf(x) dx + \int_2^{+\infty} f(x) dx.$$

Correction de l'exercice 12 ▲

1. Puisque f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^+ , pour $x \geq 0$, $\int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(0)$. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f'(t) dt$ converge en $+\infty$ si et seulement si f a une limite réelle ℓ quand x tend vers $+\infty$.

Si de plus l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge, il est exclu d'avoir $\ell \neq 0$ et réciproquement si $\ell = 0$ alors $\int_0^x f'(t) dt$ tend vers $-f(0)$ quand x tend vers $+\infty$. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f'(t) dt$ converge si et seulement si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2. (a) Soit $x \geq 0$. D'après la formule de TAYLOR-LAGRANGE, il existe un réel $\theta_x \in]x, x+1[$

$$f(x+1) = f(x) + (x+1-x)f'(x) + \frac{1}{2}f''(\theta_x).$$

ce qui s'écrit encore $f'(x) = f(x+1) - f(x) - \frac{1}{2}f''(\theta_x)$. Quand x tend vers $+\infty$, $f(x+1) - f(x)$ tend vers 0 et d'autre part, θ_x tend vers $+\infty$. Ainsi, si f et f'' ont une limite réelle quand x tend vers $+\infty$, f' a également une limite réelle et de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x)$.

Ensuite, puisque pour $x \geq 0$, $\int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(0)$ et $\int_0^x f''(t) dt = f'(x) - f'(0)$, les intégrales $\int_0^{+\infty} f'(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} f''(t) dt$ convergent et d'après 1), $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ ($= \lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x)$).

- (b) Soit $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$. F est de classe C^3 sur \mathbb{R}^+ . De plus, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ tend vers $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ et $F''(x) = f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t) dt$ tend vers $f'(0) + \int_0^{+\infty} f''(t) dt$. Donc F et F'' ont des limites réelles en $+\infty$. D'après a), $f = F'$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 13 ▲

L'inégalité $|ff''| \leq \frac{1}{2}(f^2 + f'^2)$ montre que la fonction ff'' est intégrable sur \mathbb{R} puis, pour X et Y tels que $X \leq Y$, une intégration par parties fournit

$$\int_X^Y f'^2(x) dx = [f(x)f'(x)]_X^Y - \int_X^Y f(x)f''(x) dx.$$

Puisque la fonction f'^2 est positive, l'intégrabilité de f'^2 sur \mathbb{R} équivaut à l'existence d'une limite réelle quand X tend vers $+\infty$ et Y tend vers $-\infty$ de $\int_X^Y f'^2(x) dx$ et puisque la fonction ff'' est intégrable sur \mathbb{R} , l'existence de cette limite équivaut, d'après l'égalité précédente, à l'existence d'une limite réelle en $+\infty$ et $-\infty$ pour la fonction ff' .

Si f'^2 n'est pas intégrable sur \mathbb{R}^+ alors $\int_0^{+\infty} f'^2(x) dx = +\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)f'(x) = +\infty$. En particulier, pour x suffisamment grand, $f(x)f'(x) \geq 1$ puis par intégration $\frac{1}{2}(f^2(x) - f^2(0)) \geq x$ contredisant l'intégrabilité de la fonction f^2 sur \mathbb{R} . Donc la fonction f'^2 est intégrable sur \mathbb{R}^+ et la fonction ff' a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$.

De même la fonction f'^2 est intégrable sur \mathbb{R}^- et la fonction ff' a une limite réelle quand x tend vers $-\infty$.

Si cette limite est un réel non nul ℓ , supposons par exemple $\ell > 0$. Pour x suffisamment grand, on a $f(x)f'(x) \geq \ell$ puis par intégration $\frac{1}{2}(f^2(x) - f^2(0)) \geq \ell x$ contredisant de nouveau l'intégrabilité de la fonction f^2 . Donc la fonction ff' tend vers 0 en $+\infty$ et de même en $-\infty$.

Finalement, la fonction f'^2 est intégrable sur \mathbb{R} et $\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x) dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f''(x) dx$.

D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, on a

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x) dx\right)^2 = \left(-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f''(x) dx\right)^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx\right)^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f''^2(x) dx\right)^2.$$

Puisque les fonctions f et f'' sont continues sur \mathbb{R} , on a l'égalité si et seulement si la famille (f, f'') est liée.

Donc nécessairement, ou bien f est du type $x \mapsto A \operatorname{ch}(\omega x) + B \operatorname{sh}(\omega x)$, ω réel non nul, qui est intégrable sur \mathbb{R} si et seulement si $A = B = 0$, ou bien f est affine et nulle encore une fois, ou bien f est du type $x \mapsto A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$ et nulle encore une fois.

Donc, on a l'égalité si et seulement si f est nulle.
