Rappresentazione informazione
Elementi di aritmetica dei computer
Organizzazione della memoria e codici correttori

Salvatore Orlando

Rappresentazione dell'informazione

- **Differenza tra *simbolo* e *significato***
  - **la cifra (lettera) usata per scrivere è un simbolo che *rappresenta* l'informazione**
  - **il concetto di numero (suono) corrisponde al significato dell'informazione**
- **Per comunicare/rappresentare informazioni è quindi necessario usare dei *simboli***
  - **necessaria una convenzione (*rappresentazione*, *codifica* o *codice*) per associare i simboli con il loro significato**

- **Per *codificare* l'informazione solitamente si usa un a*lfabeto di simboli***
  - **Alfabeto = insieme finito di *simboli* adottati per rappresentare informazione**
  - **Es: per rappresentare numeri nei calcolatori elettronici**
    - **Alfabeto binario: {0, 1}**
    - **Simboli associati con stati elettrici facilmente distinguibili**
      - **es.: conducibilità o meno di un transistor**

Codifica o codice

- **Dati:**
  - **un *Alfabeto* A (ad esempio, alfabeto binario: A={0,1})**
  - ***s* dati distinti $D=\{d_0, d_1, \ldots, d_{s-1}\}$**

  una *codifica* (o *codice)* fornisce una corrispondenza tra
  - ***sequenze* (*stringhe, configurazioni*) di simboli in *A*, ed**
  - **i vari dati $d_i \in D$**

- **Solitamente, i *codici* fanno riferimento a *sequenze di simboli* di lunghezza finita**
  - **Alfabeto di *N simboli* e Sequenze di *lunghezza K***
    - **N^K *configurazioni* possibili**
  - **Rispetto ad un *alfabeto binario***
    - **numero totale di configurazioni: 2^K**
    - **$2^k >= s$ (dove *s* è la cardinalità dell'insieme D)**
    - **Es.: se *D* comprende le 26 lettere dell'alfabeto inglese *(s*=26*)***
      - **sono necessari almeno sequenze di K simboli binari, con K >= 5, poiché $2^4 = 16 < 26 < 32 = 2^5$**

Codifica dei numeri

- **Codifica informazioni *non numeriche* può essere effettuata in maniera *semi* arbitraria.**
  - **Basta fissare una convenzione per permettere di *riconoscere* i dati**
  - **Es. Codice ASCII - American Standard Code for Information Exchange - è una codifica di *caratteri alfanumerici* su *sequenze di simboli binari* di lunghezza k=8**
- **Codifica dei *numeri***
  - **accurata, perché è necessario effettuare operazioni (*sommare*, *moltiplicare* ecc.) usando le rappresentazioni dei numeri**
  - **di solito si adotta il sistema di numerazione *arabica*, o *posizionale***

Sistema di codifica posizionale

- Sistema di numerazione arabica in *base 10* (B=10)
  - cifre (simboli) appartenenti all'alfabeto di 10 simboli A={0,1,…,9}
  - simboli con valore diverso in base alla posizione nella stringa di simboli in A (unità, decine, centinaia, migliaia, ecc.)
- Per *codificare* i numeri naturali *in una generica base* B
  - fissare un alfabeto A di B simboli
  - fissare una corrispondenza tra
    - i B *simboli* di A $\Leftrightarrow$ i *primi B numeri* naturali {0,1,2,…,B-1}
  - numeri maggiori di B rappresentabili come stringhe di *simboli* $d_i \in A$:
    - $d_{n-1} \dots d_1 \, d_0$
  - valore numerico della stringa, dove la *significatività* delle cifre è espressa in base alle varie potenze di B:
    - $B^{n-1} * d_{n-1} + \dots + B^1 * d_1 + B^0 * d_0$

Numeri naturali in base 2

- Alfabeto binario A={0,1}, dove i simboli sono detti *bit, con 0 corrispondente al numero zero* ed 1 al numero *uno*
- Nei calcolatori i numeri sono rappresentati come sequenze di bit di lunghezza finita
  - numeri rappresentati in notazione arabica, con base B=2 (numeri binari)
  - $d_{n-1} \dots d_1 \, d_0$ dove $d_i \in \{0,1\}$
- Con stringhe di n bit, sono rappresentabili 2^n dati (numeri diversi)
  - dal numero 0 al numero 2^n-1
- Valore numerico corrispondente, dove la significatività delle cifre è espressa sulla base di una potenza di B=2:
  - $2^{n-1} * d_{n-1} + \dots + 2^1 * d_1 + 2^0 * d_0$
- Es: per trovare il valore della stringa di simboli 1010 in base 2
  - $1010_2 = 1*8 + 0*4 + 1*2 + 0*1 = 10_{10}$

Conversione inversa

- Da base 10 a base B
- Procedimento per *divisione*
- Sia dato un certo numero N *rappresentabile* in base B come stringa di n simboli $d_{n-1} \ldots d_1\ d_0$ il cui valore è:

  $$N = B^{n-1} * d_{n-1} + \ldots + B^1 * d_1 + B^0 * d_0$$
- Se dividiamo per B
  - otteniamo d_0 come resto
    - *Quoziente*: $B^{n-2} * d_{n-1} + \ldots + B^0 * d_1$
    - *Resto*: d_0, $0 <= d_0 < B$
  - possiamo iterare il procedimento, ottenendo d_1, d_2, d_3 ecc. fino ad ottenere un Quoziente = 0

```
Q=N; i=0;
fintantoché è vero che (Q>0), ripeti:
{
 d_i = Q % B;         // Q mod B
 Q = Q / B;     // Q div B
 i = i+1:
}
```

Q	R
4	0
2	0
1	1
0	

$$4_{10} = 100_2$$

Rappresentazioni *ottale* ed *esadecimale*

- Ottale: B = 8
- Esadecimale: B = 16
- Usate per facilitare la comunicazione di numeri binari tra umani, o tra il computer e il programmatore
- Esiste infatti un metodo veloce per convertire tra base 8 (o base 16) e base 2, e viceversa

Rappresentazione *ottale*

- B = 8, A = {0,1,2,3,4,5,6,7}
- Come convertire:
  - Sia dato un numero binario di 10 cifre: $d_9 \ldots d_1\ d_0$, il cui valore è:

$$\sum_{i=0}^{9} 2^i \cdot d_i$$

  - *Raggruppiamo* le cifre: da destra, a 3 a 3
  - Poniamo in evidenza la più grande potenza di 2 possibile:

$$(2^0\ d_9)\ 2^9 + (2^3\ d_8+2^1\ d_7+2^0\ d_6)\ 2^6 + (2^2\ d_5+2^1\ d_4+2^0\ d_3)\ 2^3 + (2^2\ d_2+2^1\ d_1+2^0\ d_0)\ 2^0$$

  - I termini tra parentesi sono numeri compresi tra 0 e 7
    - si possono far corrispondere ai simboli dell'alfabeto ottale
  - I fattori messi in evidenza corrispondono alle potenze di B=8:

$2^0=8^0 \quad 2^3=8^1 \quad 2^6=8^2 \quad 2^9=8^3$

  - Da binario ad ottale: 1001010111_2 = 1 001 010 111 = 1127_8
  - Da ottale a binario: 267_8 = 010 110 111 = 10110111_2

Rappresentazione *esadecimale*

- B = 16, A = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,a,b,c,d,e,f}
- Come convertire:
  - Si dato un numero binario di 10 cifre: $d_9 \ldots d_1\ d_0$, il cui valore è:

$$\sum_{i=0}^{9} 2^i \cdot d_i$$

  - *Raggruppiamo* le cifre: da destra, e a 4 a 4
  - Poniamo in evidenza la più grande potenza di 2 possibile:

$$(2^1\ d_9+2^0\ d_8)\ 2^8 + (2^3\ d_7+2^2\ d_6+2^1\ d_5+2^0\ d_4)\ 2^4 + (2^3\ d_3+2^2\ d_2+2^1\ d_1+2^0\ d_0)\ 2^0$$

  - I termini tra parentesi sono numeri compresi tra 0 e 15
    - si possono far corrispondere ai simboli dell'alfabeto esadecimale
  - I fattori messi in evidenza corrispondono alle potenze di B=16:

$2^0=16^0 \quad 2^4=16^1 \quad 2^8=16^2$

  - Da binario ad esadecimale: 1001011111_2 = 10 0101 1111 = $25f_{16}$
  - Da esadecimale a binario: $a67_{16}$ = 1010 0110 0111 = 101001100111_2

Numeri naturali (interi) binari

- **Il processore che studieremo (MIPS) rappresenta i numeri interi su 32 bit (32 bit = 1 word)**

- **I numeri interi (unsigned) rappresentabili su 32 bit sono allora:**

$0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000_{two} = 0_{ten}$
$0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0001_{two} = 1_{ten}$
$0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0010_{two} = 2_{ten}$
...
$1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1101_{two} = 4{,}294{,}967{,}293_{ten}$
$1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1110_{two} = 4{,}294{,}967{,}294_{ten}$
$1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111_{two} = 4{,}294{,}967{,}295_{ten}$

Algoritmo di somma di numeri binari

- **Per la somma di numeri rappresentati in binario possiamo adottare la stessa procedura usata per sommare numeri decimali**
  - **sommare via via i numeri dello stesso peso, più l'eventuale riporto:**
- **La tabella per sommare 3 cifre binarie è la seguente:**

d0	d1	rip	RIS	RIP
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Esempio di somma

- Sia A = 13_{dieci} = 01101_{due} e B = 11_{dieci} = 01011_{due}

```
riporti:    1111
A:          01101  +
B:          01011  =
         ----------
            11000  ≡ 24dieci
```

- L'algoritmo impiegato dal calcolatore per effettuare la somma è simile a quella carta e penna
  - le cifre sono prodotte una dopo l'altra, da quelle meno significative a quelle più significative

Overflow

- L'overflow si verifica quando il risultato è troppo *grande* per essere rappresentato nel *numero finito di bit* messo a disposizione dalle rappresentazioni dei numeri

  ⇒ il riporto fluisce fuori

- Es.: la somma di due numeri di n-bit produce un numero non rappresentabile su n bit

```
 1111
  1111
+ 1001
 11000
```

Sottrazione e numeri relativi

- L'algoritmo impiegato nei calcolatori per sottrarre numeri binari
  - è diverso da quello carta e penna, che usa la ben nota nozione di "prestito" delle cifre
- *Non* viene impiegata l'ovvia rappresentazione in *modulo* e *segno* per rappresentare i *numeri relativi*
  - si usa *invece* una particolare rappresentazione dei numeri *negativi*
- Questa particolare rappresentazione permette di usare lo *stesso algoritmo efficiente* già impiegato per la somma
- In pratica, nel calcolatore si usa lo *stesso circuito*
  - sia per la *somma di numeri naturali (unsigned)*
  - sia per la *somma di numeri relativi (signed)*

Possibili rappresentazioni

Modulo e Segno	One's Complement	Two's Complement
000 = + 0	000 = + 0	000 = + 0
001 = + 1	001 = + 1	001 = + 1
010 = + 2	010 = + 2	010 = + 2
011 = + 3	011 = + 3	011 = + 3
100 = - 0	100 = - 3	100 = - 4
101 = - 1	101 = - 2	101 = - 3
110 = - 2	110 = - 1	110 = - 2
111 = - 3	111 = - 0	111 = - 1

- Problemi:
  - *bilanciamento*: nel Complemento a Due, nessun numero positivo corrisponde al più piccolo valore negativo
  - *numero di zeri*: le rappresentazioni in Modulo e Segno, e quella in Complemento a Uno, hanno 2 rappresentazioni per lo zero
  - *semplicità delle operazioni*: per il Modulo e Segno bisogna prima guardare i segni e confrontare i moduli, per decidere sia il segno del risultato, e sia per decidere se bisogna sommare o sottrarre.
    Il Complemento a uno non permette di sommare numeri negativi.
- Qual è quindi la migliore rappresentazione e perché?

Complemento a 2

- La rappresentazione in *complemento a 2* è quella adottata dai calcolatori per i numeri con segno (signed)
- Il bit più significativo corrisponde al segno (0 *positivo*, 1 *negativo*)
- MIPS: Numeri relativi (signed) su 32 bit:

```
0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000two = 0ten
0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0001two = + 1ten
0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0010two = + 2ten
...
0111 1111 1111 1111 1111 1111 1111 1110two = + 2,147,483,646ten
0111 1111 1111 1111 1111 1111 1111 1111two = + 2,147,483,647ten   maxint
1000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000two = – 2,147,483,648ten   minint
1000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0001two = – 2,147,483,647ten
1000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0010two = – 2,147,483,646ten
...
1111 1111 1111 1111 1111 1111 1111 1101two = – 3ten
1111 1111 1111 1111 1111 1111 1111 1110two = – 2ten
1111 1111 1111 1111 1111 1111 1111 1111two = – 1ten
```

Bit di segno

Complemento a 2

- Rappresentazione di numeri in complemento a 2 su *n* bit dei numeri *signed*:

  – 0: 0……….0

  – $2^{n-1}-1$ numeri positivi:
  - 1 (0 ………01)
  - $2^{n-1}-1$ *(massimo)* (01……..11)

  – 2^{n-1} numeri negativi
  - -|N| rappresentato dal numero *unsigned* ottenuto tramite la seguente operazione:

    $$2^n-|N|$$

  - -1: 2^n-1 (1……….1)
  - -2^{n-1} *(minimo):* $2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$ (10……0)

Complemento a 2

- Il valore corrispondente alla rappresentazione dei numeri *positivi* è quella solita
- Per quanto riguarda i numeri negativi, per ottenere direttamente il valore di un numero negativo su n posizioni, basta considerare
  - il bit di segno (=1) in posizione *n-1* con *peso:* -2^{n-1}
  - tutti gli altri bit in posizione *i* con peso 2^i
- Dimostrazione:
  - $-|N|$ viene rappresentato in complemento a 2 dal numero unsigned $2^n-|N|$
  - supponiamo che $2^n-|N|$ corrisponda alla n-upla

$$1\ d_{n-2} \ldots d_1\ d_0 \Rightarrow$$

$$2^n-|N| = 2^{n-1} + 2^{n-2} * d_{n-2} + \ldots + 2^1 * d_1 + 2^0 * d_0$$
$$-|N| = -2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} * d_{n-2} + \ldots + 2^1 * d_1 + 2^0 * d_0$$
$$-|N| = -2^{n-1} + 2^{n-2} * d_{n-2} + \ldots + 2^1 * d_1 + 2^0 * d_0$$

Complemento a 2

- Dato un numero positivo N, con bit di segno uguale a 0
- Per ottenere la rappresentazione in complemento a 2 di -N è possibile impiegare equivalentemente
  - Alg. 1: inverti tutti i bit (ovvero Complementa a uno) e somma 1
  - Alg. 2: inverti tutti i bit a sinistra della cifra “1” meno significativa

Regole per complementare a 2

- Esempio **Alg. 1**

```
00010101000
```
⬇ Complementa a uno
```
11101010111 +
          1 =
11101011000
```

- Esempio **Alg. 2**

```
00010101000
```
⬇ Complementa a uno fino alla cifra 1 meno significativa
```
11101011000
```


Regole per complementare a 2

Alg. 1: inverti tutti i bit e somma 1 (dimostrazione)

- La rappresentazione in complemento a 2 del numero negativo -|N| è:
  $1\ d_{n-2} \ldots d_1\ d_0$,
- Il valore è:
  $-|N| = -2^{n-1} + 2^{n-2} * d_{n-2} + \ldots + 2^1 * d_1 + 2^0 * d_0$
- Allora:

$$
\begin{aligned}
|N| &= 2^{n-1} - 2^{n-2} * d_{n-2} - \ldots - 2^1 * d_1 - 2^0 * d_0 = \\
&= (2^{n-1}-1)+1 - (2^{n-2} * d_{n-2} + \ldots + 2^1 * d_1 + 2^0 * d_0) = \\
&= (2^{n-2} * 1 + \ldots + 2^1 * 1 + 2^0 * 1) - \\
&\quad (2^{n-2} * d_{n-2} + \ldots + 2^1 * d_1 + 2^0 * d_0) + 1 = \\
&= (2^{n-2} * (1- d_{n-2}) + \ldots + 2^0 * (1 - d_0)) + 1
\end{aligned}
$$

Sommando e sottraendo 1

$$2^{n-1} - 1 = \sum_{i=0}^{n-2} 2^i$$

poiché (serie geometrica):

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$\Rightarrow$ Invertendo tutti i bit della rappresentazione di -|N| otteniamo

$0(1- d_{n-2})\ldots(1 - d_0)$

dove $0=1-d_{n-1}$

Il valore del numero *complementato* (positivo) è:

$2^{n-2} * (1- d_{n-2}) + \ldots + 2^0 * (1 - d_0)$

Sommando 1, otteniamo proprio il valore di |N| sopra derivato

Regole per complementare a 2

Alg. 1: inverti tutti i bit e somma 1 (dimostrazione - continuazione)

- Se N è un numero positivo, la rappresentazione di N sarà

  $0\ d_{n-2} \ldots d_1\ d_0$

  il cui valore è:

  $$2^{n-2} * d_{n-2} + \ldots + 2^1 * d_1 + 2^0 * d_0$$

- Quindi il valore del numero negativo -N sarà uguale a

$$- N = - 2^{n-2} * d_{n-2} - \ldots - 2^0 * d_0 =$$
$$= (2^{n-1}-1) - (2^{n-1}-1) \quad - 2^{n-2} * d_{n-2} - \ldots - 2^0 * d_0 =$$
$$= (2^{n-2} * 1 + \ldots + 2^0 * 1) - (2^{n-1}-1) -$$
$$(2^{n-2} * d_{n-2} + \ldots + 2^0 * d_0) =$$
$$= - 2^{n-1} + (2^{n-2} *(1- d_{n-2}) + \ldots + 2^0 *(1 - d_0)) + 1$$

Sommando e sottraendo $(2^{n-2}-1)$

$\Rightarrow$ Invertendo tutti i bit della rappresentazione di N otteniamo

$1(1- d_{n-2})\ldots(1 - d_0)$

dove $1=1-d_{n-1}$

Il valore del numero *complementato* (negativo) è:

$$- 2^{n-2} + 2^{n-2} * (1- d_{n-2}) + \ldots + 2^0 * (1 - d_0)$$

Sommando 1, otteniamo proprio il valore di -N sopra derivato

Estensione del numero bit della rappresentazione

- Regola: copiare il bit più significativo (bit di segno) negli altri bit

```
0010   -> 0000 0010
1010   -> 1111 1010
```

- L'estensione del bit di segno funziona anche per i numeri negativi
  - il complemento a 2 del numero negativo 1010 è 110, indipendentemente dal numero di 1 iniziali (es. 1…1010)

- Esempio di applicabilità dell'estensione del segno:
  - un operando di una istruzione macchina può essere più corto di una *word (32 bit)*
  - l'operando deve essere esteso nella corrispondente rappresentazione a 32 bit prima che i circuiti della CPU possano effettuare l'operazione aritmetica richiesta dall'istruzione

Addizioni & Sottrazioni

- Operazioni di numeri binari in complemento a 2 sono *facili*
  - sottraiamo usando semplicemente l'algoritmo dell'addizione
  - il sottraendo (negativo) deve essere espresso in complemento a 2

  - Esempio:

Sottrazione dei valori assoluti vs Somma dei numeri relativi in compl. 2

7-	0111-	7 +	0111+
6=	0110=	(-6)=	1010=
1	0001	1	0001

Addizioni & Sottrazioni

- Per sottrarre N1 - N2 (numeri di n-bit), N1>0 e N2>0
  - sommiamo $(N1 + (2^n - N2)) \bmod 2^n$
- Perché questo tipo di *somma algebrica* funziona ?
  Perché in questo caso non possiamo avere un overflow ?

- se N1 > N2, il risultato dovrà essere positivo. Otterremo un bit di peso *n* che non verrà considerato (a causa del modulo 2^n)
  $\Rightarrow (N1 + 2^n - N2) \bmod 2^n = N1 - N2$ poiché $(N1 + 2^n - N2) > 2^n$

7-	0111+
6=	1010=
1	10001

- se N1 < N2, il risultato dovrà essere negativo. Il modulo non avrà effetto, poiché $(N1 + 2^n - N2) < 2^n$
  $\Rightarrow (N1 + 2^n - N2) \bmod 2^n = 2^n - (N2 - N1)$, che corrisponde proprio alla rappresentazione in complemento a 2 di (N2 - N1)>0

5-	0101+
6=	1010=
-1	1111

Scoprire gli Overflow

- No overflow se somma di numeri con segno discorde
- No overflow se sottrazione di numeri con segno concorde

- Overflow se si ottiene un numero con segno diverso da quello aspettato, ovvero se si sommano algebricamente due numeri con segno concorde, e il segno del risultato è diverso. Quindi otteniamo overflow
  - se sommando due positivi si ottiene un negativo
  - se sommando due negativi si ottiene un positivo
  - se sottraendo un negativo da un positivo si ottiene un negativo
  - se sottraendo un positivo da un negativo si ottiene un positivo

- Considera le operazioni A + B, e A – B
  - Può verificarsi overflow se B è 0 ?
  - Può verificarsi overflow se A è 0 ?

Scoprire gli Overflow

- Somma algebrica di due numeri positivi A e B la cui somma non può essere rappresentata su n-bit in complemento a 2
  - Overflow se $A+B>=2^{n-1}$

    A=01111 B=00001 (*OVERFLOW* ⇒ due ultimi riporti *discordi*)

    A=01100 B=00001 (*NON OVERFLOW* ⇒ due ultimi riporti *concordi*)

```
01              00
 01111+          01100+
 00001=          00001=
 10000           01101
```

- Somma algebrica di due numeri negativi A e B la cui somma non può essere rappresentata su n-bit in complemento a 2
  - Overflow se $|A|+|B|>2^{n-1}$

    A=10100 B=10101 (*OVERFLOW* ⇒ due ultimi riporti *discordi*)

    A=10111 B=11101 (*NON OVERFLOW* ⇒ due ultimi riporti *concordi*)

```
10              11
 10100+          10111+
 10101=          11101=
 01001           10100
```

Numeri razionali (a virgola fissa)

- Numeri con la virgola (o con il punto, secondo la convenzione anglosassone)
- Nel sistema di numerazione posizionale in base B, con *n cifre intere* e *m cifre frazionarie:*

  $d_{n-1} \dots d_1\ d_0\ ,\ d_{-1}\ d_{-2} \dots d_{-m}$

  Significatività:

  $B^{n-1} * d_{n-1} + \dots + B^1 * d_1 + B^0 * d_0 +$
  $B^{-1} * d_{-1} + B^{-2} * d_{-2} + \dots + B^{-m} * d_{-m}$

- La notazione con *n+m* cifre è detta a virgola fissa (fixed point)
- Conversione da base 10 a base 2
  - $10{,}5_{dieci}$ $\quad$ $1010{,}1_{due}$

Conversione della parte frazionaria

- Vogliamo convertire in base 2 a partire da una base B
- La parte frazionaria in base 2 che vorremmo ottenere sarà:
  - $0{,}d_{-1}\ d_{-2} \dots d_{-m}$ dove $d_{-i} \in \{0,1\}$
    con significatività
    $2^{-1} * d_{-1} + 2^{-2} * d_{-2} + \dots + 2^{-m} * d_{-m}$
  - se moltiplichiamo per 2, la virgola si sposta a destra
    $2^{0} * d_{-1} + 2^{-1} * d_{-2} + \dots + 2^{-m+1} * d_{-m}$
  - dopo aver moltiplicato per 2, la parte intera diventa del numero diventa d_{-1}
    $d_{-1}\ ,\ d_{-2} \dots d_{-m}$
  - il processo di moltiplicazione deve essere iterato con la nuova parte frazionaria (fino a quando la parte frazionaria diventa nulla)

Processo di conversione di $0{,}43_{dieci}$

	*2	Cifre frazionarie	
0,43	0,86	0	d_{-1}
0, 86	1,72	1	d_{-2}
0, 72	1,44	1	d_{-3}
0, 44	0,88	0	d_{-4}
0, 88	1,76	1	d_{-5}
0, 76	1,52	1	d_{-6}
0, 52	1,04	1	d_{-7}
0, 04	0,08	0	d_{-8}
0, 08	0,16	0	d_{-9}
0, 16	...	...	...

$0{,}011011100\dots_{due}$

Numeri razionali (a virgola mobile)

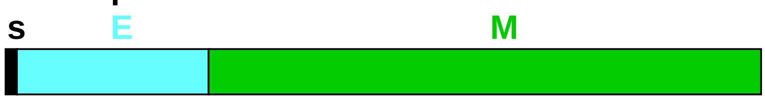
- **La notazione a virgola fissa (es.: n=8 e m=8) non permette di rappresentare numeri molto grandi o molto piccoli**
- **per numeri grandi**
  - **utile spostare la virgola a destra e usare la maggior parte dei bit della rappresentazione per la parte intera**
    - `100000000000,0100` ⟵ **parte intera non rappresentabile su n=8 bit**
- **per numeri piccoli**
  - **utile spostare la virgola a sinistra e usare la maggior parte dei bit della rappresentazione per la parte frazionaria**
    - `0,000000000000001` ⟵ **parte frazionaria non rappresentabile su m=8 bit**
- **Notazione in virgola mobile, o FP (Floating Point)**
  - **si usa la notazione scientifica, con l'esponente per far fluttuare la virgola**
    - **Segno, Esponente, Mantissa** $\Rightarrow$ $(-1)^S * 10^E * M$

0,121	$+10^0 * 0,121$
14,1	$+10^2 * 0,141$
-911	$-10^3 * 0,911$

- **Standard** $\Rightarrow$ **Mantissa rappresentata come numero frazionario, con parte intera uguale a 0**

Numeri razionali (a virgola mobile)

- **In base 2, l'esponente E si riferisce ad una potenza di 2**
  - **Segno, Esponente, Mantissa** $\Rightarrow$ $(-1)^S * 2^E * M$
- **Dati i bit disponibili per la rappresentazione FP, si suddividono in**
  - **1 bit per il segno**
  - **gruppo di bit per E**
  - **gruppo di bit per M**



- **Torneremo alla rappresentazione FP, e allo standard IEEE 754 di rappresentazione, quando parleremo delle operazioni FP e dei circuiti corrispondenti**

Rappresentazione informazione alfanumerica

- Per rappresentare le lettere (maiuscole, minuscole, punteggiature, ecc.) è necessario fissare uno standard
- L'esistenza di uno standard permette la comunicazione di documenti elettronici (testi, programmi, ecc.), anche tra tra computer differenti
- ASCII (American Standard Code for Information)
  - in origine ogni carattere una stringhe 7 bit
  - 128 caratteri, da 0 a 7F
  - codici da 0 a 1F usati per *caratteri non stampabili (caratteri di controllo)*

41	A
...	.....
5A	Z

61	a
...	.....
7A	z

0A	(Line Feed)
0D	(Carriage Return)
1B	(Escape)

20	(Space)
2C	,
2E	.

30	0
...	.....
39	9

ASCII e evoluzioni

- Codici ASCII esteso a 8 bit
- 256 codici diversi non bastano a coprire i set di caratteri usati, ad esempio, nelle lingue latine, slave, turche, ecc.

- IS (International Standard) con concetto di *code page*
  - *IS 8859-1* è il codice ASCII a 8 bit per Latin-1 (esempio l'inglese o l'italiano con le lettere accentate ecc.)
  - *IS 8859-2* è il codice ASCII a 8 bit per Latin-2 (lingue latine slave cocoslovacco, polacco, e ungherese)
  - ecc.

- UNICODE
  - ulteriore estensione (IS 10646) con codici a 16 bit (65536 codici diversi)
  - standard creato da un consorzio di gruppi industriali
  - i codici che vanno da 0000 a 00FF corrispondono a *IS 8859-1*
    - per rendere più facile la conversione di documenti da ASCII a UNICODE

UNICODE

- **Gruppi di codici *(code points)* consecutivi associati ai più importanti alfabeti**
  - **336 al Latino, 256 al cirillico, ecc.**
- **Molti gruppi di codici assegnati a cinese, giapponese e coreano**
  - **1024 per i simboli fonetici**
  - **20992 per gli ideogrammi (Han) usati in cinese e giapponese**
  - **11156 per le sillabe Hangul usate in coreano**
  - **cinesi e giapponesi richiedono nuovi ideogrammi per le parole nuove (modem, laser, smileys) ….. e quindi nuovi codici ….**
  - **molti problemi ancora aperti ...**

Istruzioni machina e codifica binaria

- **Le istruzioni macchina, ovvero il linguaggio che la macchina (processore) comprende, hanno bisogno anch'esse di essere codificate in binario**
  - **devono essere *rappresentate* in binario in accordo ad un formato ben definito**

- **Il linguaggio macchina è molto restrittivo**
  - **il processore che studieremo sarà il MIPS, usato da Nintendo, Silicon Graphics, Sony**
  - **l'ISA del MIPS è simile a altre architetture RISC sviluppate dal 1980**
  - **le istruzioni aritmetiche del MIPS permettono solo operazioni elementari (add, sub, mult, div) tra coppie di operandi a 32 bit**
  - **le istruzioni MIPS operano su particolari supporti di memoria denominati registri, la cui lunghezza è di 32 bit = 4 Byte**

Formato (codifica) delle istruzioni macchina

- **Esempio:**

  `add $9, $17, $18` (semantica: `$9=$17+$18`)

  dove i registri sono identificati dai numeri `9, 17, 18`

- **Formato delle istruzioni:**

000000	10001	10010	01000	00000	100000

← **Codifica**

op	rs	rt	rd	shamt	funct

Registri input

Definisce l'operazione che l'istruzione deve eseguire

Registro output

Informazione e memoria

- **L'informazione, opportunamente codificata, ha bisogno di essere memorizzata nel calcolatore per essere utilizzata.**
- **In particolare i programmi (e i dati) devono essere trasferiti nella memoria principale del computer per l'esecuzione**

- **Organizzazione della memoria**
  - **sequenza di celle (o locazioni) di lunghezza prefissata**
  - **ogni cella è associata con un numero (chiamato indirizzo)**
  - **se un indirizzo è espresso come numero binario di *m* bit**
    - **sono *indirizzabili* 2^m celle diverse (da 0 a 2^m -1)**
  - **indirizzi consecutivi ⇒ celle contigue**
  - **nelle memorie attuali, ogni cella di memoria è lunga**
    - **2^3= 8 bit = 1 Byte (memoria indirizzabile al Byte)**
- **I Byte consecutivi sono organizzate in gruppi**
  - **ogni gruppo è una Word**
  - **processori a 64 bit (Word di 8 Bytes) e a 32 bit (Word di 4 Bytes)**
  - **le istruzioni aritmetiche operano su Word**
    - **la dimensione della Word stabilisce qual è il massimo intero rappresentabile**

0	8 bits of data
1	8 bits of data
2	8 bits of data
3	8 bits of data
4	8 bits of data
5	8 bits of data
6	8 bits of data
...	

Numeri binari magici

- $2^3 = 8$ (8 bit = 1 Byte B)
- $2^5 = 32$ (32 bit = 1 Word)
  La dimensione della word dipende dal processore.
  Esistono processori dove la Word è di
  $2^6 = 64$ bit (oppure di $2^4 = 16$ bit)
- $2^{10} = 1024$ (K Kilo Migliaia - KB (kilobytes) - Kb (kilobits))
- 2^{20} (M Mega Milioni - MB)
- 2^{30} (G Giga Miliardi - GB)
- 2^{40} (T Tera Migliaia di Miliardi - TB)
- 2^{50} (P Peta Milioni di Miliardi - PB)

8 bit (1 B) è un'unità fondamentale:
- è l'unità di allocazione della memoria
- codici ASCII e UNICODE hanno dimensione, rispettivamente, 1 B e 2 B

Codici per correggere o scoprire errori

- Le memorie elettroniche (o magnetiche come i dischi) memorizzano bit usando meccanismi che possono occasionalmente generare errori
  – es.: un bit settato ad 1 viene poi letto uguale a 0, o viceversa

- Formalizziamo il concetto di errore in una codifica a *n* bit
  – C codifica corretta, C' codifica letta
  – Distanza di *Hamming* tra le codifiche
    - H(C, C') : numero di cifre binarie differenti a parità di posizione
  – Possibili situazioni
    - H(C, C')=0 : significa che C e C' sono uguali (OK)
    - H(C, C')=1 : significa che C e C' differiscono per 1 solo bit
    - H(C, C')=2 : significa che C e C' differiscono per 2 soli bit
    - ecc.

Parità

- Per scoprire gli errori *singoli,* ovvero per accorgersi se H(C, C')=1
  - aggiungiamo bit di *parità* alla codifica
  - bit aggiuntivo posto a 1 o a 0
    - affinché il numero di bit 1 nelle varie codifiche sia pari (dispari)
  - se si verifica un errore singolo (un numero di errori dispari) in C', allora il numero di bit 1 non sarà più pari
  - purtroppo, con un singolo bit di parità, non scopriremo mai un numero di errori doppio, o in generale pari

- In verità, usare un bit di parità significa usare una *codifica non minimale* nella rappresentazione dell'informazione
  - una *codifica minimale* usa tutte stringhe possibili
  - in questo si usano solo la metà delle stringhe permesse su *n+1 bit*
  - la distanza "minima" di Hamming tra coppie di codifiche permesse è *2*
    - es.: *n=2* con *1* bit di parità (no. bit pari)
    - Stringhe (codifiche) permesse
      - 000 011 101 110
    - Stringhe (codifiche) non permesse
      - 001 010 100 111

Codici correttori

- In generale, possiamo avere più di un bit per correggere o scoprire possibili errori multipli
  - *n* sono i bit della *codifica minimale*
  - *m* sono i bit della codifica estesa, *m>n*
  - *r = m-n* sono i *bit ridondanti* che estendono la codifica minimale

  - solo 2^n delle 2^m codifiche possibili sono valide
    - per ogni codifica su *n* bit, i rimanenti *r* bit ridondanti possono essere codificati soltanto in modo fisso affinché la codifica sia valida e corretta
  - se singolo bit di parità
    - *m=n+1*
    - solo 2^n delle 2^{n+1} codifiche possibili sono valide (solo metà)

Distanza di Hamming e codici correttori

- E' possibile definire una codifica *non* minimale su *m bit* per correggere o scoprire errori
- La *distanza di Hamming della codifica* è definita come:
  - la distanza di Hamming "minima" tra *le varie coppie di codici validi*
- Nota che la distanza di Hamming in una codifiche minimale è 1

- Codifica non minimale su 6 bit con *distanza di Hamming* uguale a 3
  - solo 4 codici validi: 000000 000111 111000 111111

    H(000000,000111)=3 H(000000,111000)=3

    H(000000,111111)=6 H(000111,111000)=6

    H(000111,111111)=3 H(111000,111111)=3
  - la codifica di sopra permette di
    - *scoprire* fino a *2 errori*
      - es.: se siamo sicuri che ci possono essere al massimo 2 errori, la distanza tra una stringa corretta C e la stringa erronea C' è 2 < 3. C' non può essere scambiato per un codice corretto perché la distanza di Hamming del codice è 3.
    - *correggere* fino a *1 errore*
      - es.: 010000 è più vicino a 000000

Distanza di Hamming e codici correttori

- Per scoprire fino a *d* errori su singoli bit
  - è necessario che la distanza di Hamming della codifica sia *d+1*
  - supponiamo di avere una codifica siffatta
  - supponiamo che C' sia una codifica erronea di C tale che:

    $1 < H(C,C') \leq d$
  - C' non può essere scambiato per una codifica valida, perché in questo caso dovrebbe essere vero che: $H(C,C') \geq d+1$
- Per correggere fino a *d* errori su singoli bit
  - è necessario che la distanza di Hamming della codifica sia *2d+1*
  - supponiamo di avere una codifica siffatta
  - supponiamo che C' sia una codifica erronea di C tale che:

    $1 < H(C,C') \leq d$
  - C' non può essere scambiato per una codifica valida, perché in questo caso dovrebbe essere vero che: $H(C,C') \geq 2d+1$
  - poiché C è la codifica valida *più vicina* a C', possiamo pensare che C sia la codifica corretta e correggere l'errore

Codici correttori

- **Esiste un algoritmo dovuto a Hamming (1950) che permette di determinare una codifica con un numero minimo di *bit di ridondanza* per la correzione degli errori**
- **Esempio:**
  - **Numero minimo di check bit (bit ridondanti) per correggere *errori singoli (d=1)***
  - **I check bit devono essere configurati in modo che la distanza di Hamming tra le codifiche valide sia *2d+1= 3***

Word size	Check bits	Total size	Percent overhead
8	4	12	50
16	5	21	31
32	6	38	19
64	7	71	11
128	8	136	6
256	9	265	4
512	10	522	2