Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ingeniería
Año 2019 - 2^{do} Cuatrimestre

71.14 MODELOS Y OPTIMIZACIÓN - CURSO 4

TRABAJO PRÁCTICO: Entrega Final
FECHA DE ENTREGA: 23 de Noviembre de 2019

INTEGRANTES:
PEREZ ONDARTS, Flavio - 96786
<perezflavio94@gmail.com>
FLOREZ DEL CARPIO, Christian - 91011
<chris.florez.d.c@gmail.com>

Índice

1. Análisis de sensibilidad

1.1. Enunciado del problema

Enunciado

Una empresa fabrica y vende tres productos (1, 2 y 3). Se dispone de 10 kg. diarios de materia prima y de 20 hs. de máquina diaria. Cada producto requiere 1, 2 y 1 kg. de materia prima, respectivamente, y de 4, 2 y 2 hs. de máquina por unidad. Los beneficios unitarios son de 4, 3 y 2 $/unidad

Debido a un contrato firmado con un cliente se deben producir, como mínimo, 2 unidades diarias de producto 2.

Tabla Inicial

			4	3	2				-M
C_K	X_K	B_K	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	μ
	X_4	10	1	2	1	1	0	0	0
-M	μ	2	0	1	0	0	-1	0	1
	X_6	20	4	2	2	0	0	1	0
Z = -2M			-4	-M-3	-2	0	M	0	0

Tabla Óptima

			4	3	2			
C_K	X_K	B_K	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
4	X_1	10/3	1	0	1/3	-1/3	0	1/3
3	X_2	10/3	0	1	1/3	2/3	0	-1/6
	X_5	4/3	0	0	1/3	2/3	1	-1/6
Z = 70/3			0	0	1/3	2/3	0	5/6

a- ¿Qué utilidad unitaria mínima deberá tener un producto P_7 para que sea conveniente producirlo, sabiendo que por unidad requiere 2 kg. de materia prima y 3 horas de máquina? Detallar los cálculos.

b- Graficar la variación de la cantidad de producto 1, del valor marginal del recurso hs. de máquina y del funcional, al variar la disponibilidad de materia prima entre 8 y 30 kg. por día. Indicar el valor de las pendientes señalando en qué parte de la tabla se encuentran.

c- ¿A qué valor total resulta conveniente vender a una empresa interesada, disponibilidad del recurso hs. de máquina en una magnitud de 12 horas? Detallar claramente y justificar los cálculos realizados.

d- Determinar si altera o no la estructura de la solución óptima el hecho de incorporar una nueva restricción, sobre mano de obra, cuya disponibilidad diaria es de 40 hs. hombre, sabiendo que cada producto utiliza 5, 6 y 1 hs. hombre respectivamente por cada unidad. Justificar la respuesta detallando todos los cálculos.

1.2. Análisis general

En primer lugar planteamos el significado de cada variable que aparece en las tablas del método simplex dentro del marco del problema descrito en el enunciado.
X_1: Cantidad de P1 a fabricar.
X_2: Cantidad de P2 a fabricar.
X_3: Cantidad de P3 a fabricar.
X_4: Sobrante de materia prima.
X_5: Costo de oportunidad encubierto de la demanda mínimia de P2.
X_6: Sobrante de horas máquina.
μ: Variable artificial

Además, las restricciones (normalizadas) que resultan en la tabla inicial son:

$$X_1 + 2 \times X_2 + X_3 + X_4 = 10 \qquad \text{Materia prima}$$

$$X_2 - X_5 \ + \mu = 2 \qquad \text{Demanda mīnima de P2}$$

$$4 \times X_1 + 2 \times X_2 + 2 \times X_2 + X_6 = 20 \qquad \text{Horas máquina}$$

1.3. Resolución

1.3.1. Item a

Este es un ejercicio de agregado de un nuevo producto. Tomaremos la hipótesis de que el nuevo producto no tiene demanda mínima. El nuevo producto tendrá asociada la variable X7 con beneficio $\boldsymbol{c}$.
Al introducir este nuevo producto, su columna correspondiente en la tabla inicial sería:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

dado que requiere 2 kg de materia prima por unidad y 3 horas máquina por unidad, además de que obviamente no tiene participación en la restricción de demandad mínima. Para este punto no nos sirve el método del lucro cesante, no nos queda otra que calcular la matriz de cambio de base e introducir la nueva columna en la tabla óptima e iterar para ver el rango de variación del coeficiente que debe tener en el funcional para ser fabricado

La matriz de cambio de base (M_{CB}) la obtenemos de la expresión en la tabla óptima de las columnas que eran canónicas en la tabla inicial (cambiada de signo en el caso de A_5).

Para obtener el valor de la columna correspondiente a P7 en la tabla óptima, multiplicamos la matriz de cambio de base por el vector:

$$\begin{bmatrix} -1/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & -1/6 \\ 2/3 & -1 & -1/6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 5/6 \\ 5/6 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la tabla óptima con la columna agregada sería

			4	3	2				c
C	X	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
4	X_1	10/3	1	0	1/3	−1/3	0	1/3	1/3
3	X_2	10/3	0	1	1/3	2/3	0	−1/6	5/6
	X_5	4/3	0	0	1/3	2/3	1	−1/6	5/6
$Z = 70/3$			0	0	1/3	2/3	0	5/6	$\frac{23}{6} - c$

Para tener una solución óptima que incluya a P_7 necesitamos que su $z_j - c_j$ sea menor o igual a 0, dado que estamos en un problema de maximización. Entonces, necesitamos:

$$\frac{23}{6} - c \leq 0 \longleftrightarrow c \geq \frac{23}{6}$$

En conclusión, para que sea conveniente producir un producto P_7, con las características enunciadas, deberá tener una utilidad unitaria mínima de $\frac{23}{6}$.

1.3.2. Item b

Dado que vamos a variar la disponibilidad de un recurso, debemos primero obtener la tabla óptima del problema dual.

En primer lugar, debemos definir la relación o correspondencia entre las variables X_i del problema directo y las Y_i del problema dual:

$$X_1 \Longleftrightarrow Y_4$$
$$X_2 \Longleftrightarrow Y_5$$
$$X_3 \Longleftrightarrow Y_6$$
$$X_4 \Longleftrightarrow Y_1$$
$$X_5 \Longleftrightarrow Y_2$$
$$X_6 \Longleftrightarrow Y_3$$

Teniendo esto, podemos llegar a la tabla óptima del dual utilizando la tabla óptima del primal.

Las variables 'duales' de las variables que se encuentra fuera de la base del óptimo en el directo, estarán en la base del óptimo en el dual, tomando los valores de sus $z_j - c_j$ en la tabla del directo. Los valores de los $z_j - c_j$ de las variables del dual que queden fuera de la base serán los valores que toman sus variables asociadadas en el óptimo del directo, con signo invertido.

Tabla óptima dual

			10	-2	20			
C	Y	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
10	Y_1	$2/3$	1	$-2/3$	0	$1/3$	$-2/3$	0
20	Y_3	$5/6$	0	$1/6$	1	$-1/3$	$1/6$	0
	Y_6	$1/3$	0	$-1/3$	0	$-1/3$	$-1/3$	1
$Z = 70/3$			0	$-4/3$	0	$-10/3$	$-10/3$	0

Tenemos que variar la cantidad de materia prima entre 8kg y 30kg. Reemplazamos su valor actual (10) en la tabla óptima del dual por C_{MP} y vemos cual es su rango de variación en el que la solución sigue siendo óptima.

			C_{MP}	-2	20			
C	Y	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
C_{MP}	Y_1	$2/3$	1	$-2/3$	0	$1/3$	$-2/3$	0
20	Y_3	$5/6$	0	$1/6$	1	$-1/3$	$1/6$	0
	Y_6	$1/3$	0	$-1/3$	0	$-1/3$	$-1/3$	1
$Z = (2C_{MP} + 50)/3$			0	$\frac{-2\times C_{MP}}{3} + \frac{20}{6} + 2$	0	$\frac{C_{MP}}{3} + \frac{-20}{3}$	$\frac{-2\times C_{MP}}{3} + \frac{20}{6}$	0

Dado que se trata de un problema de minimización, su rango de variación estará dado por

$$\frac{-2\times C_{MP}}{3} + \frac{20}{6} + 2 \leq 0 \qquad (A_2)$$
$$\frac{C_{MP}}{3} + \frac{-20}{3} \leq 0 \qquad (A_4)$$
$$\frac{-2\times C_{MP}}{3} + \frac{20}{6} \leq 0 \qquad (A_5)$$

Despejamos para C_{MP} y nos queda el rango:

$$8 \leq C_{MP} \leq 20$$

Necesitamos ver que sucede cuando C_{MP} es igual a 20. Lo reemplazamos por ese valor en la tabla y nos queda:

			20	-2	20				
C	Y	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	θ
20	Y_1	$2/3$	1	$-2/3$	0	$1/3$	$-2/3$	0	2
20	Y_3	$5/6$	0	$1/6$	1	$-1/3$	$1/6$	0	–
	Y_6	$1/3$	0	$-1/3$	0	$-1/3$	$-1/3$	1	–
$Z = 30$			0	-8	0	$\mathbf{0}^*$	-10	0	

Hacemos entrar a Y_4 en la base en lugar de Y_1. Aplicamos la regla del pivot utilizando a (Y_1, A_4) como pivot. La solución alternativa es entonces (reemplazando el coeficiente de Y_1 que valía 20 por C_{MP}):

			C_{MP}	-2	20			
C	Y	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
0	Y_4	2	3	-2	0	1	-2	0
20	Y_3	$3/2$	1	$-1/2$	1	0	$-1/2$	0
	Y_6	$1/3$	0	$-1/3$	0	$-1/3$	$-1/3$	1
$Z = 30$			0	-8	0	$\mathbf{0}^*$	-10	0

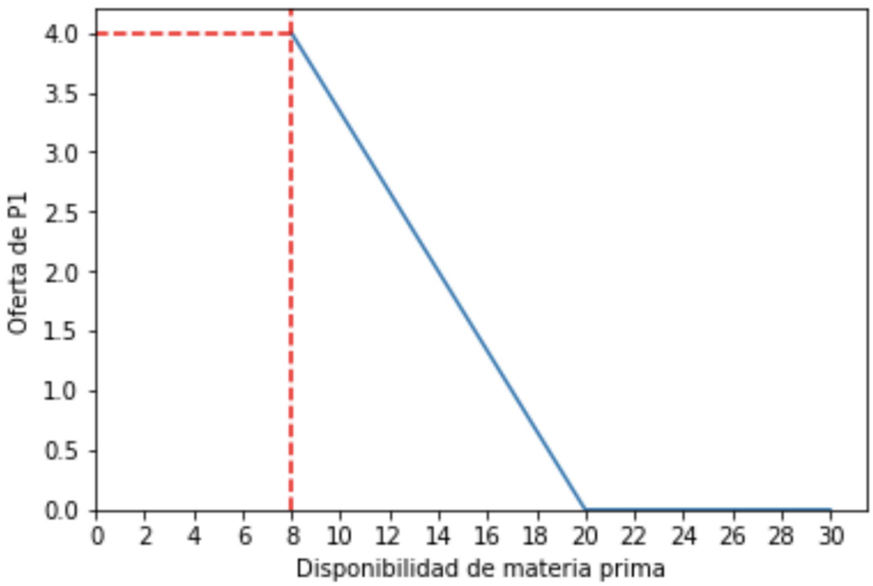
Para que esta solución siga siendo óptima necesitamos

$$\begin{aligned} &20 - C_{MP} \leq 0 && (A_1) \\ &\longrightarrow C_{MP} \geq 20 \end{aligned}$$

Por lo tanto, con las dos estructuras de solución óptima que vimos ya tenemos cubierto todo el intervalo $[8, 30]$.

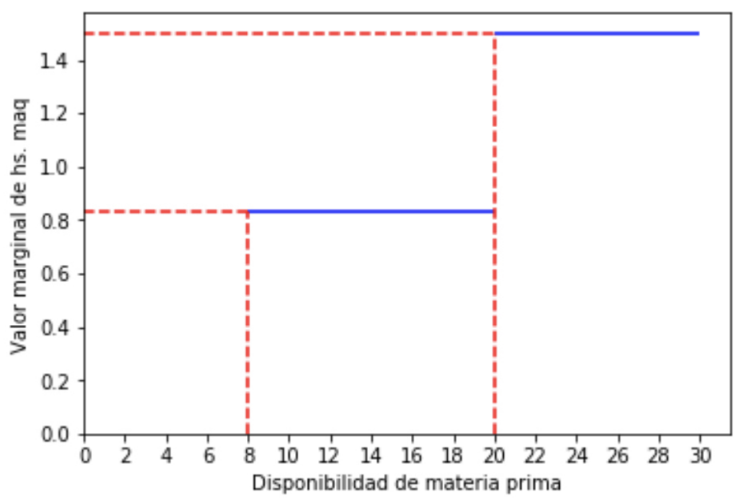
En primer lugar, veremos como varía la oferta de P_1 en función de C_{MP}. Para eso, debemos observar en la tabla dual (para cada intervalo) el valor de la matriz A en el elemento que corresponde al recurso cuya disponibilidad se esta variando con el producto cuya oferta se quiere analizar. Este valor cambiado signo representa la pendiente de la curva de oferta para ese producto en el intervalo para el que la tabla es óptima. En nuestro caso, estamos variando el coeficiente de Y_1 y queremos ver la variación de la oferta de P_1, que está representado por X_1 en el problema directo, cuya variable 'dual es Y_4. En la tabla correspondiente al intervalo [8,20] para C_{MP}, el valor de A en el que se intersectan Y_1, Y_4es 1/3. Ese valor en la tabla del directo se invierte en signo. Por lo tanto, para el intervalo [8,20], la pendiente de la curva de oferta de P_1 será -1/3. Cuando C_{MP} es igual a 20, Y_4 entra la base, y por lo tanto su variable asociada en el problema directo, que es X_1, pasa a valer 0, lo que significa que deja de producirse.

Por lo tanto, la variación está dada por el siguiente gráfico.



Notar que la pendiente es -1/3 en el intervalo [8,20]

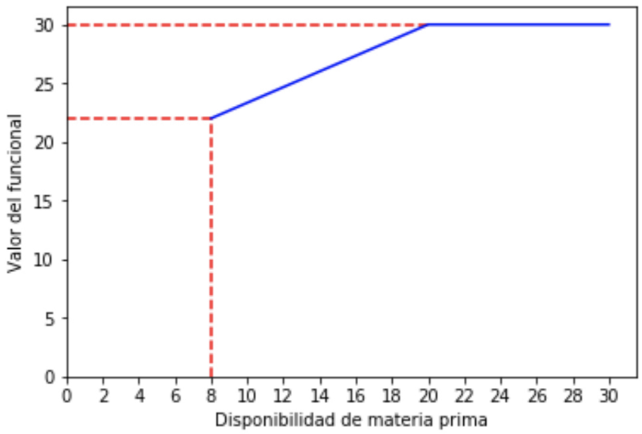
Para la variación del valor marginal del recurso hs. de máquina. En este caso, el valor que queremos analizar se encuentra en el valor de la variable Y_3 de columna B de la tabla óptima del dual. Para el intervalo [8,20], el valor de la variable es $\frac{5}{6}$ y en el intervalo [20,30] el valor es $\frac{3}{2}$. Por lo tanto, su curvá de variación es:



Para el funcional Z, podemos obtener su variación tambié utilizandod solo la tabla dual. Para el rango de C_{MP} en [8,20], la expresión del funcional (puede observarse en la tabla) está dada por:

$$Z = (2C_{MP} + 50)/3$$

y para el rango de [20,30], Z toma un valor constante de 30.



Notar que la curva del funcional en el intervalo [8,20] es 2/3

1.3.3. Item c

Como vemos en la tabla óptima del problema directo, el recurso hs. de máquina está saturado, ya que su variable slack es cero. Además, su valor marginal es 5/6. Debemos analizar como varía ese valor marginal a medida que disminuimos la disponibilidad de ese recurso. Dado que vamos a variar la disponibilidad de un recurso, debemos trabajar con la tabla óptima del problema directo.

Reemplazando el coeficiente de Y_3 en la tabla óptima del dual por C_{HM} y ver como se comporta la solución para los valores que vaya tomando C_{HM}

Tabla óptima dual

			10	-2	C_{HM}			
C	Y	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
10	Y_1	$2/3$	1	$-2/3$	0	$1/3$	$-2/3$	0
C_{HM}	Y_3	$5/6$	0	$1/6$	1	$-1/3$	$1/6$	0
	Y_6	$1/3$	0	$-1/3$	0	$-1/3$	$-1/3$	1
$Z = 20/3 + \frac{5C_{HM}}{6}$			0	$\frac{-20}{3} + \frac{C_{HM}}{6} + 2$	0	$\frac{10-C_{HM}}{3}$	$\frac{-20}{3} + \frac{C_{HM}}{6}$	0

La estructura de la solución óptima se mantiene mientras se cumpla:

$$\frac{-20}{3} + \frac{C_{HM}}{6} + 2 \leq 0 \qquad (A_2)$$
$$\frac{10 - C_{HM}}{3} \leq 0 \qquad (A_4)$$
$$\frac{-20}{3} + \frac{C_{HM}}{6} \leq 0 \qquad (A_5)$$
$$\longrightarrow 10 \leq C_{HM} \leq 20$$

Dado que el valor de Y_3 en la base es 5/6, sabemos que para C_{HM} en el intervalo [10,20] el valor marginal del recuros hs. de máquina será 5/6.
Estamos analizando vender el recurso, por lo tanto, debemos ver que sucede al reducir la disponibilidad del mismo. Reemplazamos C_{HM} por 10 en la tabla y nos queda:

			10	−2	10				
C	Y	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	θ
10	Y_1	2/3	1	−2/3	0	**1/3**	−2/3	0	2
10	Y_3	5/6	0	1/6	1	−1/3	1/6	0	–
	Y_6	1/3	0	−1/3	0	−1/3	−1/3	1	–
$Z = 15$			0	−3	0	$\mathbf{0}^*$	−5	0	

Hacemos el cambio de base, entrando Y_4 y saliendo Y_1 y la tabla es (volviendo a colocar C_{HM} como el coeficiente de Y_4):

			10	−2	C_{HM}			
C	Y	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
0	Y_4	2	3	−2	0	1	−2	0
C_{HM}	Y_3	3/2	1	−1/2	1	0	−1/2	0
	Y_6	1	1	−1	0	0	−1	1
$Z = \frac{3C_{HM}}{2}$			$C_{HM} - 10$	$\frac{-C_{HM}}{2} + 2$	0	0	$\frac{-C_{HM}}{2}$	0

Esta estructura de solución es óptima mientras se cumpla

$$
\begin{aligned}
C_{HM} - 10 &\leq 0 && (A_1)\\
\frac{-C_{HM}}{2} + 2 &\leq 0 && (A_2)\\
\frac{-C_{HM}}{2} &\leq 0 && (A_5)\\
\longrightarrow 4 \leq C_{HM} &\leq 10
\end{aligned}
$$

Este resultado significa que en mientras tengamos una disponibilidad de hs. máquina en el rango [4,10], el valor marginal del recurso será 3/2 (su valor en la base de la tabla).
Se nos pide determinar el valor al que resulta conveniente vender 12 horas del recurso a otra empresa. Originalmente tenemos 20 horas del recurso. Por lo tanto, las primeras 10 horas que vendamos, nos mantendrán dentro del rango de disponibilidad [10,20], en el que el valor marginal del recurso es 5/6. Luego, las otras 2 horas que nos quedan por vender “pertenecen“ al rango [4,10] en el que el valor marginal del recurso es 3/2. Entonces, para nuestra empresa, el valor de lo que estamos vendiendo es:

$$10\text{hs} \times \frac{5\$}{6\text{hs}} + 2\text{hs} \times \frac{3\$}{2\text{hs}} = \frac{34}{3}\$ = \$11,33$$

Por lo tanto, para que resulte conveniente vender 12 hs. de máquina a otra empresa, se deben vender a un valor mayor a \$11.33 en total.

1.3.4. Item d

Se nos pide analizar el efecto de introducir una nueva restricción sobre la mano de obra:

$$5 \times X_1 + 6 \times X_2 + 1 \times X_3 \leq 40$$

$$\frac{\text{hs}}{\text{unidad}} \times \text{unidad} = \text{hs}$$

En la estructura de la solución óptima, los valores para las variables involucradas en la nueva restricción son:

$$X_1 = \frac{10}{3}$$
$$X_2 = \frac{10}{3}$$
$$X_3 = 0$$

Reemplazando en la nueva restricción, queda:

$$5 \times \frac{10}{3} + 6 \times \frac{10}{3} + 1 \times 0 = \frac{110}{3} \approx 36,67 \leq 40$$

Vemos que la estructura actual de la solución óptima cumple la restricción, por lo tanto no se verá afectada por la misma.

2. Problema principal

2.1. Pre-procesamiento de los datos

El set de datos que se nos provee se compone de las coordenadas de cada votante, las coordenadas de cada centro, y la capacidad de los mismos.
Para poder llegar a una solución del problema mediante la heurística, fue necesario calcular para cada votante su distancia a cada centro, y generar con esos resultados un diccionario con toda esta información, donde cada entrada corresponde a un votante y el dato es una lista donde se almacenan el identificador de cada centro y la distancia del votante al mismo, ordenados de forma ascendente.

2.2. Descripción de la heurística

1. Se asigna a los votantes a los centros más cercanos

   1.1 Si el centro esta saturado, entonces se intenta asignar el siguiente centro más cercano y así sucesivamente

2. Se filtran los centros que no cumplan con el mínimo de votantes necesario (30)

3. Los votantes que fueron asignados a estos centros "inválidos" son fusionados en una sola lista que contiene sus id

4. Los centros que cumplen con el requisito minimo son agregados y/o actualizados a un diccionario de centros abiertos

5. Se actualiza las disponibilidad de los centros que serán abiertos

6. Se itera tantas veces como la cantidad total de centros (30)

   6.1 Se vuelve al paso 1 con esta lista fusionada, para solo tratar de asignar a los votantes que cayeron en "centros invalidos "

7. Una vez que se itera tantas veces como centros hay, los votantes que quedaron asignados a centros “inválidos“ en la ultima iteración son asignados a los “centros abiertos“ más cercanos

2.3. Resultados finales

Al finalizar la ejecución (ver archivo adjunto 'heuristica.py') de la heurística, calculamos el promedido y la distancia máxima recorrida por los votantes en función de la solución conseguida.
Los resultados fueron:

$$\text{Distancia Máxima} \approx 2{,}038Km$$
$$\text{Distancia promedio} \approx 0{,}62Km$$

En la entrega anterior habíamos propuesto 2 posibles modelos. Nos vamos a quedar con el resultado del modelo que no incorpora el concepto de las manzanas a la resolución, dado que en la heurística el concepto de manzanas tampoco existe, ya que se trata a cada votante de forma individual. El resultado para el modelo había sido:

$$\text{Distancia Máxima} \approx 2{,}030Km$$
$$\text{Distancia promedio} \approx 0{,}60Km$$

En base a los resultados obtenidos podemos decir que la heurística se adapta bastante bien al problema y al set de datos con el que se ejecutó (set de datos reducido).