Ingeniería Informática

Medios de Transmisión (MT)

Problemas del tema 5

Representación digital de señales analógicas

Curso 2007-08

27/11/2007

Enunciados

1. Una señal de banda limitada $x(t)$ se multiplica por un tren de deltas $p(t)$ en el que se va alternando el signo, tal y como se muestra en la figura 1

   a) Para $\Delta < \pi/2\omega_M$, dibuje la transformada de Fourier de $x_p(t)$ e $y(t)$.

   b) Para $\Delta < \pi/2\omega_M$, determine un sistema para recuperar $x(t)$ a partir de $x_p(t)$

   c) Para $\Delta < \pi/2\omega_M$, determine un sistema para recuperar $x(t)$ a partir de $y(t)$.

   d) Determine el valor máximo de Δ en términos de ω_M para el cual $x(t)$ puede recuperarse a partir de $x_p(t)$ o de $y(t)$.

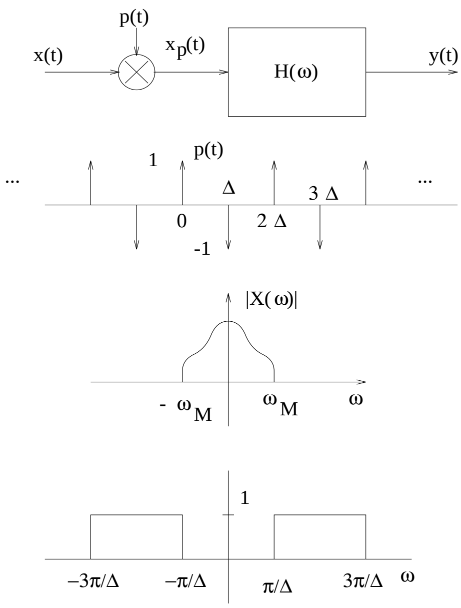

Figura 1:

2. La señal $x(t) = 10\ cos(2\pi 1000t + \pi/3) + 20cos(2\pi 2000t + \pi/6)$ se muestrea para su posterior transmisión en forma digital.

   a) ¿Cual es el periodo de muestreo máximo que asegura la posterior reconstrucción de la señal a partir de sus muestras?

   b) Si se quiere reproducir 1 hora de esta señal, ¿cuantas muestras necesitan ser almacenadas?

3. En el sistema mostrado en la figura 2 se multiplican dos señales contínuas $x_1(t)$ y $x_2(t)$ y el producto resultante, $z(t)$, se muestrea con un tren de deltas

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (1)$$

   $x_1(t)$ está limitado en banda a ω_1 y $x_2(t)$ está limitado en banda a ω_2. Determine el periodo de muestreo máximo para que $z(t)$ pueda recuperarse a partir de $z_p(t)$ utilizando un filtro paso bajo ideal.

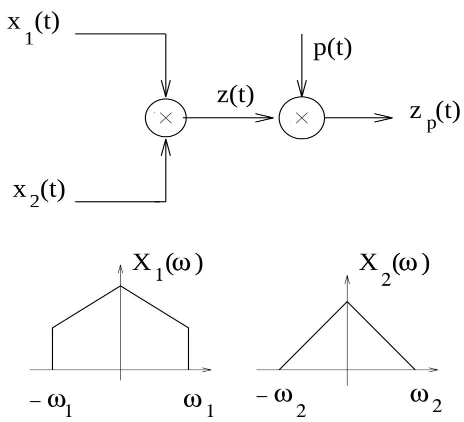

Figura 2:

4. Considere el sistema de muestreo de la figura 3. La señal $x(t)$ es real y paso banda comprendida entre ω_1 y ω_2. La señal $m(t) = e^{j\omega_0 t}$ es una exponencial compleja de frecuencia $\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$. El filtro $H_1(\omega)$ es paso bajo con frecuencia de corte $\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$. La señal $p(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ es un tren de deltas.

   a) Para la $X(\omega)$ dibujada en la figura 3 dibuje $X_p(\omega)$.
   b) Determine el periodo de muestreo máximo para poder recuperar $x(t)$ a partir de $x_p(t)$.
   c) Determine un sistema para recuperar $x(t)$ a partir de $x_p(t)$.

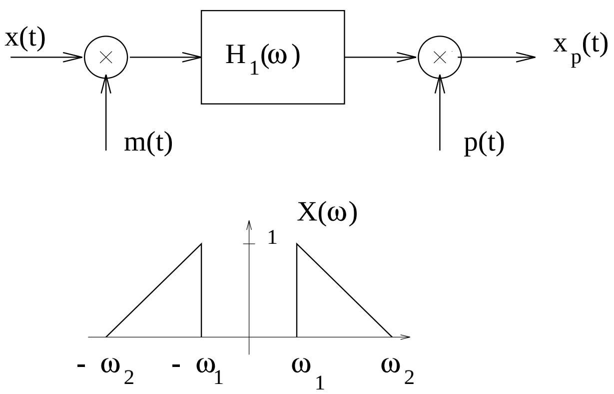

Figura 3:

5. Una señal paso bajo $x(t)$ con un ancho de banda W se muestrea a la frecuencia de Nyquist multiplicándola por la señal

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta(t - nT_s)$$

   siendo T_s el periodo de muestreo.

   a) Encuentre la TF de $x_p(t) = x(t)p(t)$
   b) ¿Puede reconstruirse $x(t)$ a partir de $x_p(t)$ con un sistema LTI? ¿Por qué?

c) Proponga un sistema para reconstruir $x(t)$ a partir de $x_p(t)$.

6. (Marzo 95) Considere la siguiente señal contínua

$$x(t) = cos\ 3\pi t\ +\ 2\ sen\ 6\pi t\ +\ 3\ cos\ 12\pi t$$

Esta señal se muestrea multiplicándola por $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ donde T es el periodo de muestreo. Posteriormente, la señal muestreada $x_p(t)$ se hace pasar por un filtro paso bajo ideal, cuya respuesta en frecuencia se puede ver en la figura, para obtener la señal reconstruida $x_r(t)$.

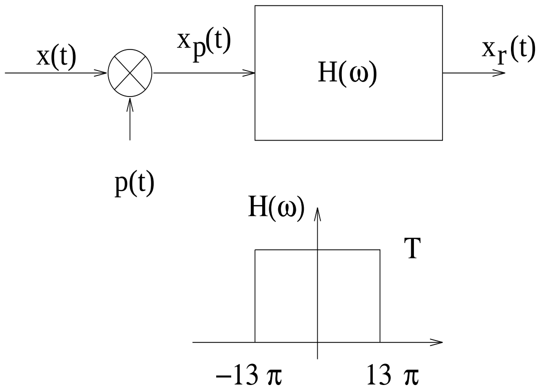

Figura 4:

a) Calcule la Transformada de Fourier de $x(t)$.

b) Calcule el periodo de muestreo máximo para que la señal reconstruida sea igual a la señal original.

c) Considere que el periodo de muestreo es $T = 0{,}1$ sg. Determine la señal reconstruida.

7. (Diciembre 95) Considere la señal paso banda $x(t)$ cuyo espectro $X(\omega)$ se muestra en la figura

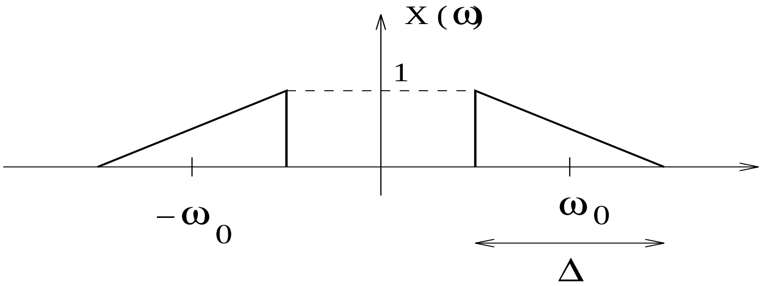

Figura 5:

A partir de $x(t)$ se genera la señal

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) \qquad (2)$$

a) Calcule $Y(\omega)$ en función de $X(\omega)$.

b) Dibuje $Y(\omega)$ para el caso en que $2\pi/T = \omega_s = 2\Delta$ y $\omega_0 = 7\Delta/2$ y discuta la posible recuperación de $x(t)$ a partir de $y(t)$.

c) Igual que el apartado anterior para el caso en que $2\pi/T = \omega_s = 2\Delta$ y $\omega_0 = 10\Delta/3$.

Soluciones

1. a) $\Delta < \dfrac{\pi}{2\omega_m}$ Dibujar: $Xp(\omega), Y(\omega)$
   $p(t) = p_1(t) - p_1(t-\Delta)$ donde $p_1(t) = \sum_k \delta(t - k2\Delta)$
   $P(\omega) = P_1(\omega) - e^{-j\omega\Delta}P_1(\omega) = P_1(\omega)[1 - e^{-j\omega\Delta}]$
   $X_p(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}[P(\omega) * X(\omega)]$ y su dibujo para $\omega_M < \frac{\pi}{2\Delta}$ es:

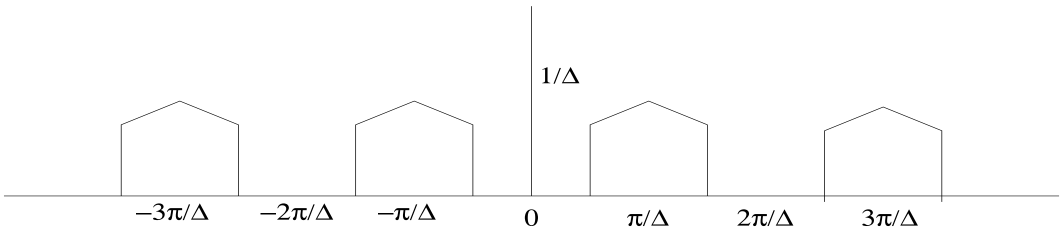

Figura 6:

   $Y(\omega)$ y su dibujo es

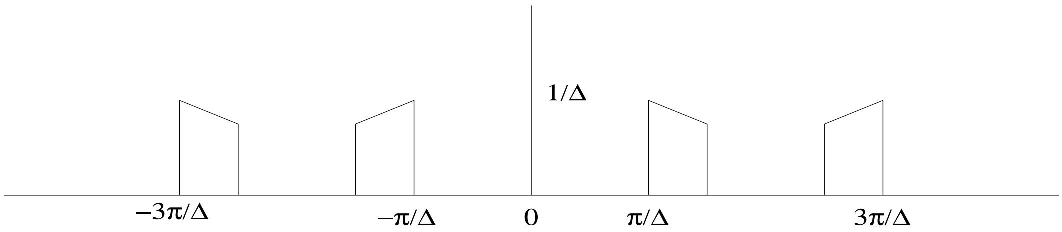

Figura 7:

   b) Ver figura 8

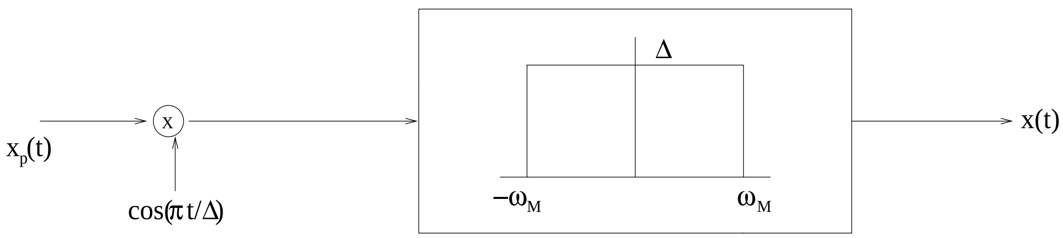

Figura 8:

   c) Ver figura 9

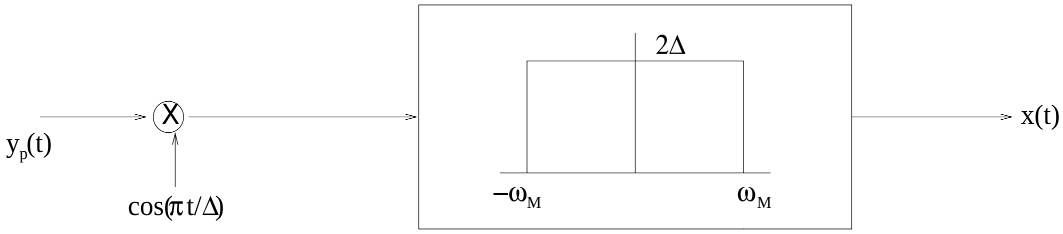

Figura 9:

d) Δ es maximo cuando $\dfrac{\pi}{\Delta}$ es minimo.
En el apartado a) podemos ver que el "aliasing" en $X_p(\omega)$ se evita si $\omega_M \leq \dfrac{\pi}{\Delta}$. Por tanto $\Delta_{min} = \dfrac{\pi}{\omega_M}$

2. *a*) $T_s = \dfrac{1}{4000}$ seg
   b) n muestras = 14400000 muestras

3. $Z(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}[X_1(\omega) * X_2(\omega)]$
   Para evitar el aliasing hay que muestrear a la frecuencia de Nyquist $\Rightarrow \dfrac{2\pi}{T} \geq 2(\omega_1 + \omega_2)$
   $T_{max} = \dfrac{\pi}{(\omega_1 + \omega_2)}$

4. *a*) Ver figura 10

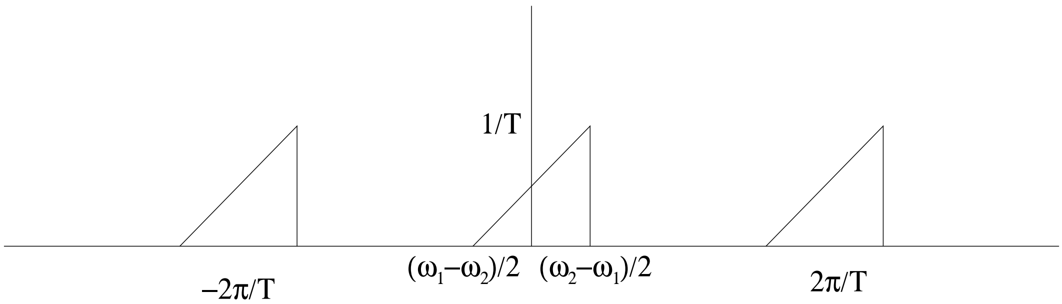

Figura 10:

b) Frecuencia Nyquist= $\dfrac{2\pi}{Tmax}$,para $X_2(\omega) = 2\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \omega_2 - \omega_1$
Tmax=$\dfrac{2\pi}{(\omega_2 - \omega_1)}$

c) Ver figura 11

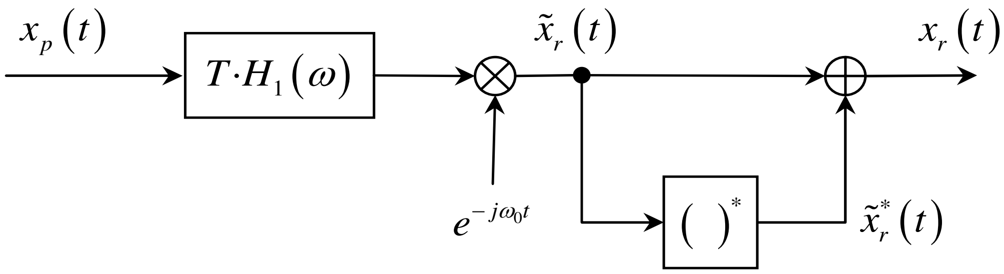

Figura 11:

5. *a*) $x(t)p(t) = x_p(t) \Rightarrow X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi}[X(\omega) * P(\omega)]$
   Ver figura 12

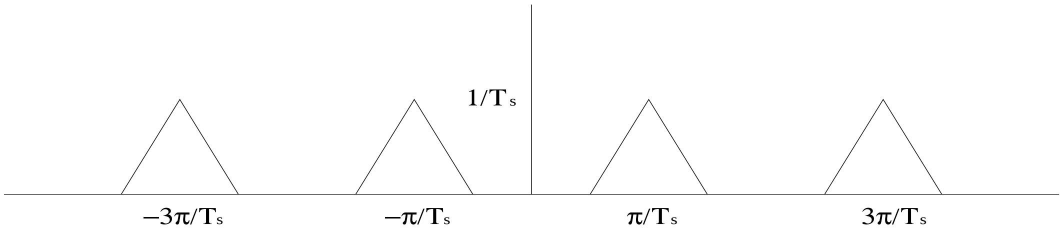

Figura 12:

   donde $\frac{\pi}{T_s} \geq W$

   b) No.

   c) Ver figura 13

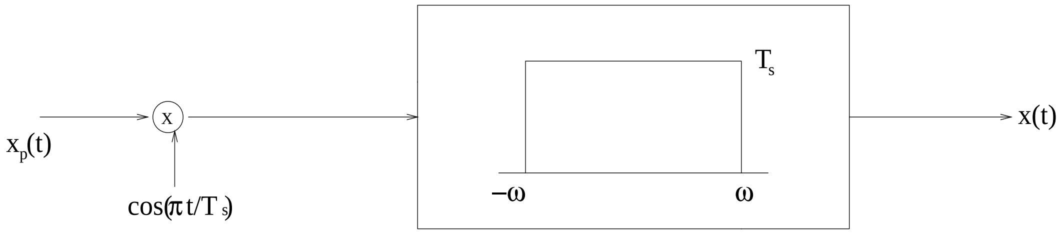

Figura 13:

6. $x(t) = \cos 3\pi t + 2\sin 6\pi t + 3\cos 12\pi t$

   a) $X(\omega) = \pi[\delta(\omega - 3\pi) + \delta(\omega + 3\pi)] + 2\frac{\pi}{j}[\delta(\omega - 6\pi) - \delta(\omega + 6\pi)] + 3\pi[\delta(\omega - 12\pi) + \delta(\omega + 12\pi)]$

   b) $T_{s_{max}} = \frac{1}{12,5}$ seg

   c) $T = \frac{1}{10} \Rightarrow \omega_s = 20\pi$

   $X_p(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{K=-\infty}^{\infty} X(\omega - K\omega_s)$

   $x_6(t) = x(t) + 3\cos 8\pi t = \cos 3\pi t + 2\sin 6\pi t + 3\cos 8\pi t + 3\sin 12\pi t$

7. a) $y(t) = x(t)p(t)$,donde $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$

$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi}[X(\omega) * P(\omega)] = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{K=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - K\omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{K=-\infty}^{\infty} X(\omega - K\omega_s)$

b) $\omega_0 = \frac{7}{2}\Delta \Rightarrow$
$\omega_0 - \frac{\Delta}{2} = 3\Delta$
$\omega_0 + \frac{\Delta}{2} = 4\Delta$

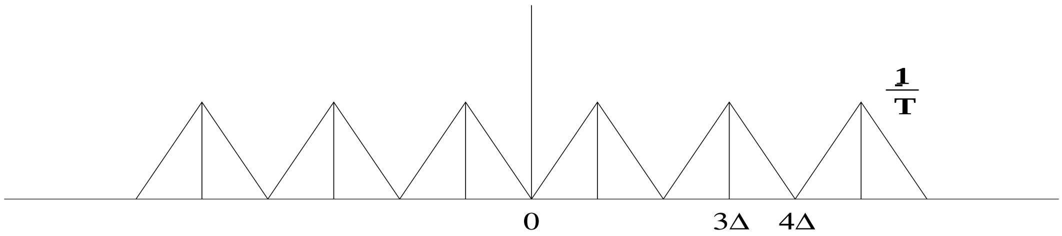

Figura 14:

No hay aliasing.