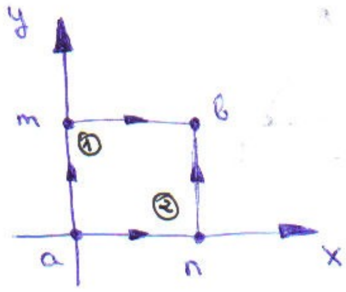
BOLETIN 4

(1) Demostrar que el campo $\vec{E} = A\cdot y\cdot\hat{i} + B\cdot x\cdot\hat{j}$ no es conservativo si $A \neq B$:

Para que sea conservativo, el $\underset{①}{W_{a\to b}} = \underset{②}{W_{a\to b}}$, equivalente a $\oint_c \vec{E}\cdot\vec{dl} = 0$.



• $\underset{①}{W_{a\to b}} = -q\int_a^b \vec{E}\cdot\vec{dl} = -q\int_{(0,0)}^{(0,d)} \underbrace{(A\cdot y\cdot\hat{i} + \overbrace{B\cdot x\cdot\hat{j}}^{0,\ x=0})}_{\vec{E}}\underbrace{(dy\cdot\hat{j})}_{\vec{dl}_1} -$

$\hat{i}\cdot\hat{j} = 0$

$-q\int_{(0,d)}^{(d,d)} \underbrace{(Ay\cdot\hat{i} + B\cdot x\cdot\hat{j})}_{\vec{E}}\underbrace{(dx\cdot\hat{i})}_{\vec{dl}_2} =$

$$= -q\int_0^d 0 - q\int_0^d A\cdot d\cdot dx = -q\cdot A\cdot d\cdot x\Big]_0^d = -q\cdot A\cdot d^2$$

• $\underset{②}{W_{a\to b}} = -q\int_a^b \vec{E}\cdot\vec{dl} = -q\int_{(0,0)}^{(d,0)} (A\cdot \underset{y=0}{y}\,\hat{i} + B\cdot x\cdot\hat{j})\underbrace{(dx\cdot\hat{i})}_{\hat{i}\cdot\hat{j}=0} - q\int_{(d,0)}^{(d,d)} (A\cdot y\,\hat{i} + B\cdot x\cdot\hat{j})(dy\cdot\hat{j}) =$

$$= -q\int_{(d,0)}^{(d,d)} B\cdot d\cdot dy = -q\cdot B\cdot d^2$$

El campo es conservativo si:

$$\underset{①}{W_{a\to b}} = \underset{②}{W_{a\to b}}$$

$$-\cancel{q}\cdot A\cdot \cancel{d^2} = -\cancel{q}\cdot B\cdot \cancel{d^2}$$

$$A = B$$

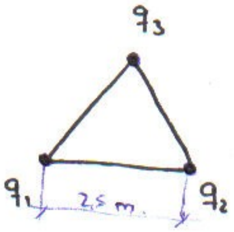
c.q.d.

② Tres cargas puntuales q_1, q_2 y q_3 están en los vértices de un triángulo equilátero de lado 2,5 m. Determinar la energía potencial electrostática de esta distribución de carga si:

a) $q_1 = q_2 = q_3 = 4{,}2\,\mu C$

b) $q_1 = q_2 = 4{,}2\,\mu C = -q_3$

c) $q_1 = q_2 = -4{,}2\,\mu C = -q_3$



$$\left[U = \sum_{i=1}^{n} U_i = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{r_i} \right]$$

a) $U_1 = K \cdot q_1 \cdot \frac{q_2}{d}$ $\qquad U_2 = K \cdot q_2 \cdot \frac{q_3}{d}$ $\qquad U_3 = K \cdot q_3 \cdot \frac{q_1}{d}$

$U_i = K \cdot \frac{q^2}{d}$ $\qquad U = \sum_{i=1}^{3} U_i = 3 \cdot K \cdot \frac{q^2}{d} = 3 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(4{,}2 \cdot 10^{-6})^2}{2{,}5} = 0{,}190\ J$

b) $U_1 = K \cdot q_1 \cdot \frac{q_2}{d}$ $\qquad U_2 = -K \cdot q_2 \cdot \frac{q_3}{d}$ $\qquad U_3 = -K \cdot q_3 \frac{q_1}{d}$

$U = \sum_{i=1}^{3} U_i = U_1 + U_2 + U_3 = -K \cdot \frac{q^2}{d} = -0{,}0635\ J$

c) $U_1 = +K \cdot q_1 \cdot \frac{q_2}{d}$ $\qquad U_2 = -K \cdot q_2 \cdot \frac{q_3}{d}$ $\qquad U_3 = -K \cdot q_3 \cdot \frac{q_1}{d}$

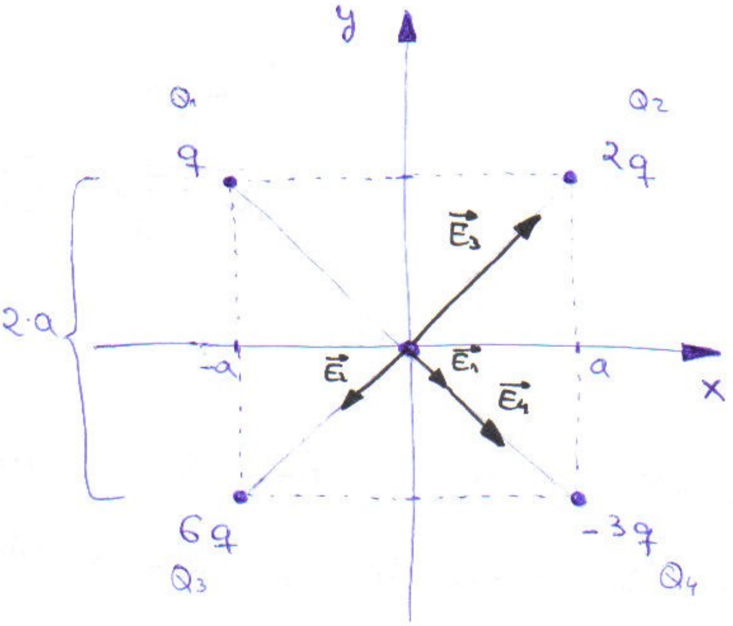
$U = -K \cdot \frac{q^2}{d} = -0{,}0635\ J$

③ Se disponen cuatro cargas en los vértices de un cuadrado centrado en el origen como se indica a continuación: q en $(-a,+a)$, $2q$ en (a,a), $-3q$ en $(a,-a)$ y $6q$ en $(-a,-a)$. Calcular:

a) El campo eléctrico en el origen

b) El potencial en el origen

c) Se sitúa una quinta carga $+q$ en el origen y se libera desde el reposo. Calcular su velocidad cuando se encuentra a una gran distancia del origen:



a)

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

$$\vec{E}_1 = K \cdot \frac{q}{(\sqrt{2} \cdot a)^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\vec{E}_2 = K \cdot \frac{2q}{(\sqrt{2} \cdot a)^2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\vec{E}_3 = K \cdot \frac{6q}{(\sqrt{2} \cdot a)^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\vec{E}_4 = K \frac{|-3q|}{(\sqrt{2} \cdot a)^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\vec{E} = \frac{K \cdot q}{2a^2}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{K \cdot q}{2 \cdot a^2}\left[4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = K \cdot \frac{2q}{a^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= K \frac{2q}{a^2}\left(\sqrt{2}, 0\right) = K \cdot \frac{2\sqrt{2}q}{a^2}\,\hat{\imath}$$

b) $V = \sum_i K \cdot \frac{q_i}{r_i} = K \cdot \frac{q}{\sqrt{2} \cdot a} + K \frac{2q}{\sqrt{2} \cdot a} + K \cdot \frac{6q}{\sqrt{2} \cdot a} - K \frac{3q}{\sqrt{2} \cdot a} =$

$= K \cdot \frac{q}{\sqrt{2} \cdot a}(1+2+6-3) = K \cdot \frac{6q}{\sqrt{2} \cdot a} = K \cdot \frac{3\sqrt{2} \cdot q}{a}$ V

c) $U = U_{POT} + U_{CINET}$

$U_{CINET,REPOSO} = U_{CINET,T(0)} = 0 \Rightarrow U_{INIC} = U_{POT,INIC} = q \cdot V = q \cdot K \cdot \frac{6q}{\sqrt{2} \cdot a}$

$U_{POT,FINAL} = U_{POT,T(\infty)} = 0 \Rightarrow U_{FINAL} = U_{CINET,FIN} = \frac{1}{2} m v^2$ velocidad

$$K \frac{3\sqrt{2} \cdot q^2}{a} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} K \cdot \frac{3\sqrt{2} q^2}{a}} = \sqrt{\frac{12 K \cdot q^2}{\sqrt{2} \cdot m \cdot a}} = \sqrt{\frac{6\sqrt{2} K \cdot q^2}{m \cdot a}} = q \left(\frac{6\sqrt{2} \cdot K}{m \cdot a}\right)^{1/2}$$

aceleración (≠ distancia)

(4) Una esfera de radio 60 cm. tiene su centro en el origen. A lo largo del ecuador de esta esfera se sitúan cargas iguales de 3μC a intervalos de 60°.

a) ¿Cuál es el potencial eléctrico en el origen?

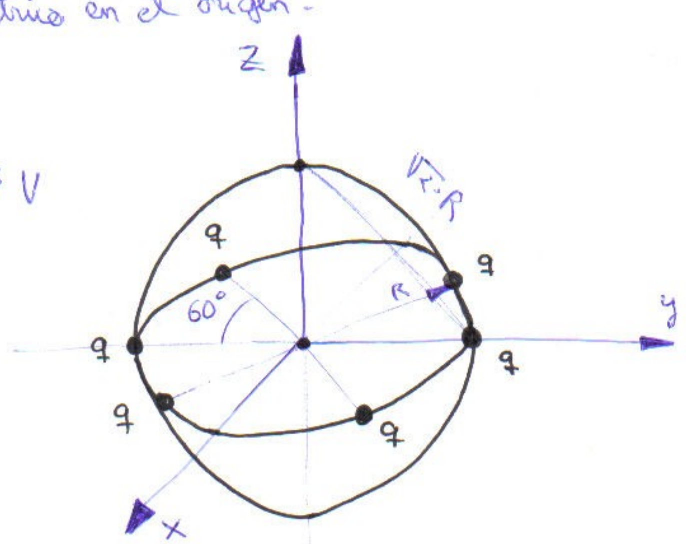
b) ¿En el polo norte?

(0,0,0)

$V = \sum_i K \cdot \frac{q_i}{r_i} = K \frac{6 \cdot q}{r} = 2{,}7 \cdot 10^5$ V

(0,0,$\sqrt{2} \cdot R$)

$V = K \cdot \frac{6q}{\sqrt{2} \cdot r} = 1{,}91 \cdot 10^5$ V



QuéGrande.org

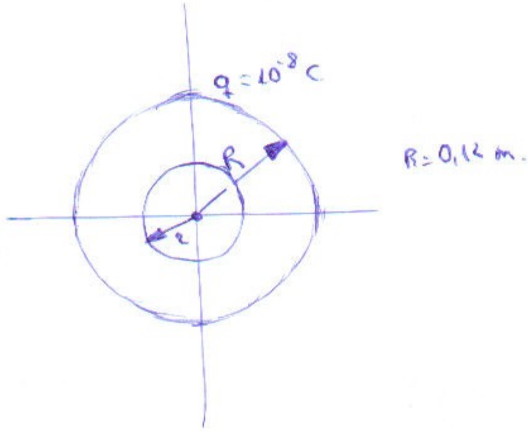
⑤ Una carga de $q = 10^{-8}$ C está distribuida sobre una corteza esférica de 12 cm. de radio.

a) ¿Cuál es el valor del campo eléctrico justo en el exterior de la corteza y justo en el interior de la misma?

b) ¿Cuál es el valor del potencial eléctrico en esos puntos?

c) ¿Cuál es el potencial en el centro de la corteza?

d) ¿Campo eléctrico en ese punto?



a) $$\oint \vec{E} \cdot \vec{dS} = E \cdot S = \frac{\sum_i q}{\varepsilon_0}$$

$$E = K \cdot \frac{q}{r^2}$$

• Justo en el exterior: $r = R = 12$ cm.

$(r > R)$ $$E = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-8}}{(0{,}12)^2} = 6{,}25 \cdot 10^3 \text{ V/m}$$

• Justo en el interior:

$(r < R)$ $$E \cdot S = 0 \Rightarrow E = 0$$

b) • Justo en el exterior: $r = R = 12$ cm. $$V_\infty - V_r = -\int_r^\infty \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

$(r > R)$

$$V_\infty - V_r = -\int_r^\infty \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\int_r^\infty K \cdot \frac{q}{r^2} \cdot dr = -K \cdot q \left(-\frac{1}{r}\right)\Big]_r^\infty =$$

$$= -K \cdot q \cdot \frac{1}{r}\Big]_\infty^r = -K \cdot \frac{q}{r}$$

$$V_\infty = 0 \Rightarrow -V_r = -K \cdot \frac{q}{r} \Rightarrow V_r = K \cdot \frac{q}{r} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^8}{0{,}12} = 750 \text{ V}$$

• Justo el interior:

($r<R$) Aunque $\vec{E}=0$, el V es constante

$$E = -\nabla \cdot V$$

$$V = -\int \cancel{E\, dl} + K$$

En el interior y justo en el exterior también es 750 V

c) El centro está en el interior, así que:

$$V = 750\ V$$

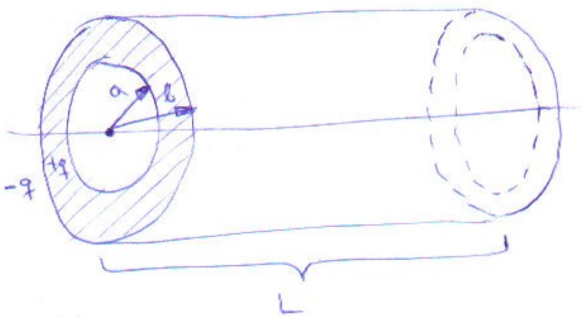
d) El centro está en el interior, así que:

$$\vec{E}=0$$

6) Dos conductores muy largos formando una corteza cilíndrica coaxial poseen cargas iguales y opuestas. La corteza interior tiene un radio a y una carga $+q$; la exterior tiene radio b y carga $-q$. La longitud de cada corteza cilíndrica es L. Hallar la diferencia de potencial entre las dos capas de la corteza:

(Por Gauss:)

$$E = \frac{\sum q}{S \cdot \varepsilon_0} = \frac{\sum q}{2\pi \cdot r \cdot L \cdot \varepsilon_0}$$



- $r < a$: $\sum q = 0 \Longrightarrow E = 0$
- $a < r < b$: $\sum q = q \Longrightarrow E = K \cdot \frac{2q}{r \cdot L}$
- $r > b$: $\sum q = q + (-q) = 0 \Longrightarrow E = 0$

$$V_{b,a} = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_a^b \frac{q}{\varepsilon_0 \cdot 2\pi r \cdot L} \, dr = -\frac{q}{\varepsilon_0 \cdot 2\pi \cdot L} \int_a^b \frac{dr}{r} =$$

$\vec{E}$ radial

$dl = dr$

$$= -\frac{q}{\varepsilon_0 \cdot 2\pi \cdot L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$V_{a,b} = -V_{b,a} = \frac{q}{\varepsilon_0 \cdot 2\pi \cdot L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

7. Una carga q está en $x = 0$ y otra $-3q$ está en $x = 1\,m$.

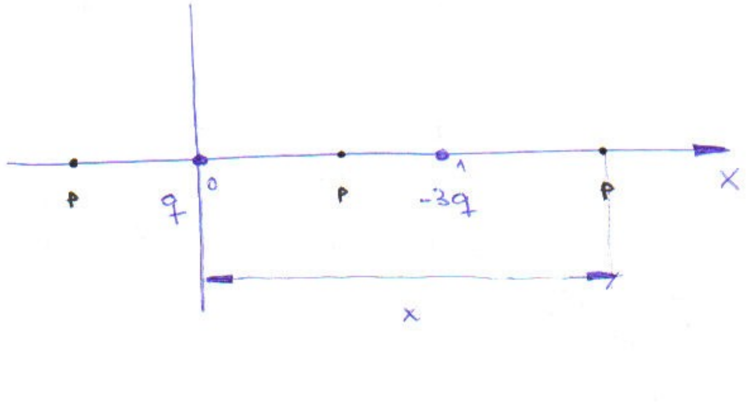
a) Determinar $V(x)$ para un punto cualquiera del eje x.

b) Determinar los puntos sobre el eje x en los cuales el potencial es nulo.

c) ¿Cuál es el campo eléctrico en estos puntos?

d) Dibujar $V(x)$ en función de x.

a)



Tres regiones:

$$\begin{cases} x \geq 1\,m \\ 0 < x < 1\,m \\ x < 0\,m \end{cases}$$

x = distancia a P desde q_i

$$V_p = K \cdot \sum_1 \frac{q_i}{r_i}$$

- $x > 1m$:

$$V_p = K \cdot \frac{q}{x} + K \cdot \frac{-3q}{x-1}$$

- $0 < x < 1m$:

$$V_p = K \cdot \frac{q}{x} + K \cdot \frac{-3q}{1-x}$$

- $x < 0\ m$:

$$V_p = K \cdot \frac{q}{-x} + K \cdot \frac{-3q}{1-x}$$

b) $V(x) = 0$

- $x < 0$, $V(x) = 0$

$$\underbrace{K \cdot q}_{>0} \left(-\frac{1}{x} - \frac{3}{1-x} \right) = 0$$

$$-\frac{1}{x} - \frac{3}{1-x} = 0$$

$$-x = \frac{3}{1-x}$$

$$-(1-x) = 3x \implies x = -\frac{1}{2} = -0{,}5\ m.$$

- $0 < x < 1$, $V(x) = 0$

$$\underbrace{K \cdot q}_{>0} \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{1-x} \right) = 0$$

$$\frac{1}{x} = \frac{3}{1-x}$$

$$1 - x = 3x \implies x = \frac{1}{4} = 0{,}25\ m.$$

- $x > 1$, $V(x) = 0$

$$\underbrace{K \cdot q}_{>0} \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x-1} \right) = 0$$

$$\frac{1}{x} = \frac{3}{x-1}$$

$$x - 1 = 3x \implies x = -\frac{1}{2} \text{ (No vale)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} V(x) = \lim_{x \to \infty} \left(K \cdot q \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x-1} \right) \right) = 0$$

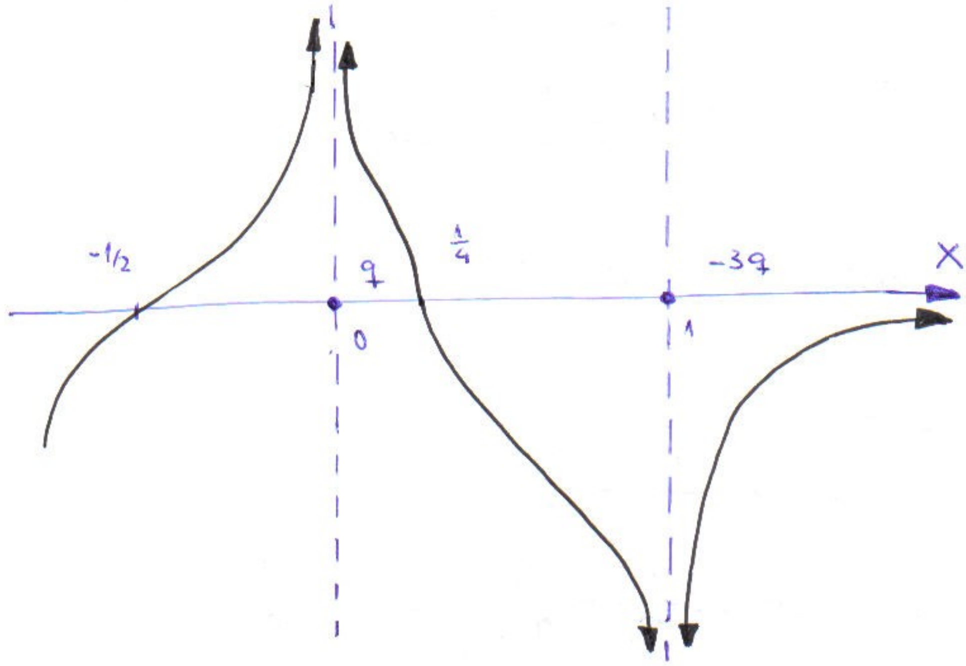
$$\lim_{x \to -\infty} V(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(K \cdot q \left(-\frac{1}{x} - \frac{3}{1-x} \right) \right) = 0$$

d) $\lim\limits_{x \to 0^-} V(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(K\cdot q\left(-\frac{1}{x} - \frac{3}{1-x}\right)\right) = K\cdot q\left(-\frac{1}{0^-} - \frac{3}{1-0^-}\right) = K\cdot q\cdot\infty = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} V(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(K\cdot q\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{1-x}\right)\right) = K\cdot q\left(\frac{1}{0^+} - \frac{3}{1-0^+}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} V(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(K\cdot q\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{1-x}\right)\right) = K\cdot q\left(\frac{1}{1^-} - \frac{3}{1-1^-}\right) = K\cdot q(-\infty) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} V(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(K\cdot q\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x-1}\right)\right) = K\cdot q\left(\frac{1}{1^+} - \frac{3}{1^+-1}\right) = K\cdot q(-\infty) = -\infty$



c) Campo:

$\vec{E} = -\nabla\cdot V = -\frac{\partial V(x)}{\partial(x)}$ $\left[\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}\right]$

• $x < 0$:

$E_x = -\frac{\partial V(x)}{\partial(x)} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(K q\left(-\frac{1}{x} - \frac{3}{1-x}\right)\right) = -K\cdot q\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{x}\right) + \right.$

$\left. + \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{3}{1-x}\right)\right] = -K\cdot q\left[\frac{1}{x^2} - \frac{3}{(1-x)^2}\right]$

• $0 < x < 1$:

$$E_x = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[K\cdot q\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{1-x}\right)\right] = -K\cdot q\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-3}{1-x}\right)\right] =$$

$$= -K\cdot q\left[-\frac{1}{x^2} - \frac{3}{(1-x)^2}\right] = K\cdot q\left[\frac{1}{x^2} + \frac{3}{(1-x)^2}\right]$$

• $x > 1$:

$$E_x = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[K\cdot q\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x-1}\right)\right] = -K\cdot q\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-3}{x-1}\right)\right] = -K\cdot q\left[-\frac{1}{x^2} + \frac{3}{(x-1)^2}\right]$$

Para los puntos donde $V(x)=0$:

• $x = -\frac{1}{2}$:

$$E(x) = -K\cdot q\left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{(1-x)^2}\right)$$

$$E(-1/2) = -K\cdot q\left(\frac{1}{1/4} - \frac{3}{9/4}\right) = -K\cdot\frac{8q}{3}$$

• $x = \frac{1}{4}$:

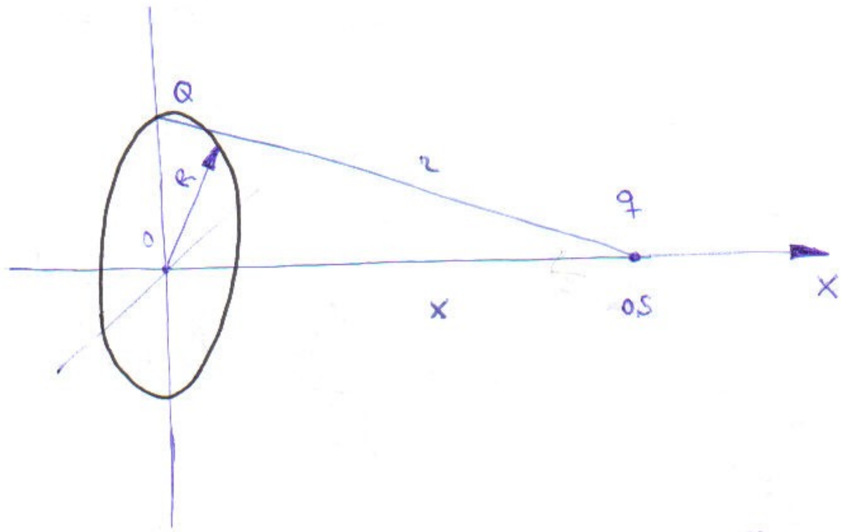
$$E(x) = K\cdot q\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{(1-x)^2}\right)$$

$$E(1/4) = K\cdot q\left(\frac{1}{1/16} + \frac{3}{9/16}\right) = K\cdot\frac{64\cdot q}{3}$$

• $x \longrightarrow \pm\infty$:

$$E(x) = 0$$

(8) Una carga de 2nC está uniformemente distribuida alrededor de un anillo de radio 10 cm que tiene su centro en el origen y su eje a lo largo del eje x. Una carga puntual de 1nC está localizada en x = 50 cm. Determinar el trabajo necesario para desplazar la carga puntual al origen en julios (J) y en electrón-voltios (eV):



$$E_x = \frac{Q \cdot x}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot (x^2+R^2)^{3/2}}$$

A = 0,5 m.

B = 0 m (origen)

$$W_{A\to B} = -q \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} = -q \int_{0,5}^{0} E_x \cdot dx =$$

$$= -q \cdot \left.\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2+R^2}}\right]_{x=0}^{x=0,5} = q \cdot \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2+0,5^2}}\right]$$

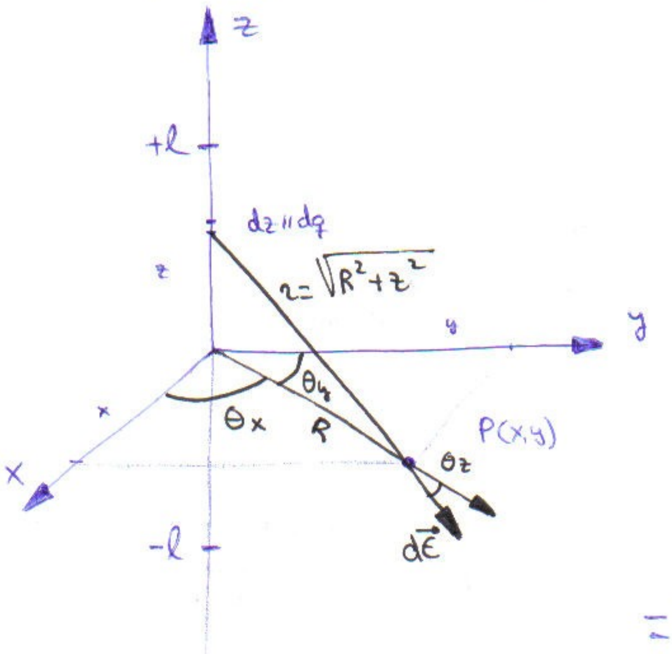
$$= -1,447 \cdot 10^{-7} \text{ J}$$

QuéGrande.org

9) Una varilla uniformemente cargada de longitud $2l$ y densidad lineal de carga $\lambda = \frac{Q}{2l}$, se encuentra centrada en el origen y orientada según el eje z. Determinar:

a) El potencial en puntos del plano bisector perpendicular a la misma.

b) El potencial en puntos del eje z con $|z| > l$



$$dV = K \cdot \frac{dq}{r} = K \cdot \frac{dq}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$V = \int_{DIST} dV = \int_{DIST} K \cdot \frac{dq}{\sqrt{R^2+z^2}} = K \cdot \lambda \int_{DIST} \frac{dz}{\sqrt{R^2+z^2}} =$$

$dq = \lambda \cdot dl = \lambda \, dz$

$$= K \cdot \lambda \int_{-l}^{+l} \frac{dz}{\sqrt{R^2+z^2}} \overset{*}{=} K \cdot \lambda \left[\ln\left(z + \sqrt{R^2+z^2}\right) \right]_{-l}^{l} =$$

$$= K \cdot \lambda \cdot \ln\left(\frac{l + \sqrt{R^2+l^2}}{-l + \sqrt{R^2+l^2}} \right) \quad , R = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\left[* \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C \ , \ a > 0 \right]$$

Calculamos el campo eléctrico:

$$d\vec{E} = K \cdot \frac{dq}{R^2+z^2} \cdot \hat{r} \quad , \quad \hat{r} = (\cos\theta_x, \cos\theta_y, \cos\theta_z) = \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \underbrace{-\frac{R}{r}}_{} \right)$$

Vemos que por simetría las componentes en z se anulan

$$\vec{E} = \int_{DIST} d\vec{E} = \int_{DIST} K \cdot \frac{dq}{r^2} \cdot \hat{r} = \int_{DIST} K \cdot \frac{\lambda \cdot dz}{R^2+z^2}\left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, -\frac{R}{r}\right) =$$

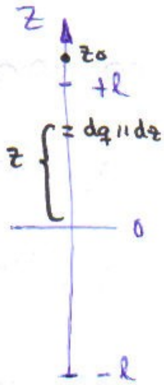
$$= \left(K\cdot\lambda \int_{-\ell}^{+\ell} \frac{dz}{R^2+z^2}\cdot\frac{x}{R},\ K\cdot\lambda\int_{-\ell}^{+\ell}\frac{dz}{R^2+z^2}\cdot\frac{y}{R},\ \underbrace{K\cdot\lambda\int_{-\ell}^{+\ell}\frac{dz}{R^2+z^2}\left(-\frac{R}{r}\right)}_{\text{Se anulan}}\right) =$$

$$= K\cdot\lambda\int_{-\ell}^{+\ell}\frac{dz}{R^2+z^2}\left(\frac{x}{R},\frac{y}{R},0\right)$$

b) V en OX, $|z|>\ell$:

$$dV = K\cdot\frac{dq}{z_0-z} \quad , z_0>\ell$$

$$dV = K\cdot\frac{dq}{z-z_0} \quad , z_0<-\ell$$



• $z_0>\ell$:

$$V = \int_{DIST} dV = \int_{DIST} K\cdot\frac{dq}{z_0-z} = \int_{DIST} K\cdot\frac{\lambda\cdot dz}{z_0-z} = K\cdot\lambda\int_{DIST}\frac{dz}{z_0-z} =$$

$$= -K\cdot\lambda\int_{-\ell}^{+\ell}\frac{(-1)\,dz}{z_0-z} = K\cdot\lambda\left[\ln(z_0-z)\right]_{+\ell}^{-\ell} = K\cdot\lambda\ln\left(\frac{z_0+\ell}{z_0-\ell}\right)$$

• $z_0<-\ell$:

$$V = \int_{DIST} dV = \int_{DIST} K\cdot\frac{dq}{z-z_0} = \int_{DIST} K\cdot\frac{\lambda\cdot dz}{z-z_0} = K\cdot\lambda\int_{DIST}\frac{dz}{z-z_0} = -K\cdot\lambda\left[\ln(z-z_0)\right]_{-\ell}^{+\ell} =$$

$$= K\cdot\lambda\cdot\ln\left(\frac{-z_0+\ell}{-z_0-\ell}\right)$$

$$|z_0| = \begin{cases} -z_0 & , z_0 < 0 \\ z_0 & , z_0 \geq 0 \end{cases}$$

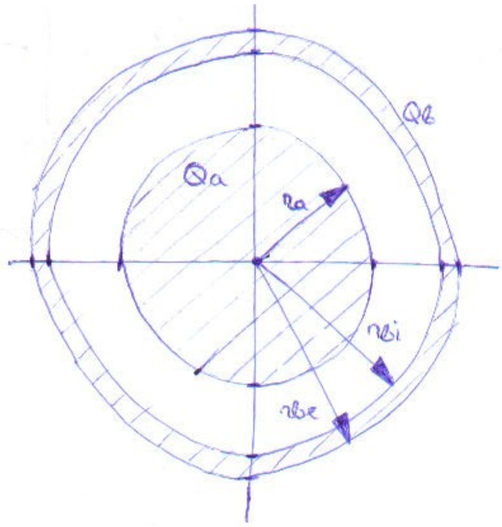
$$V = K \cdot \lambda \cdot \ln\left(\frac{|z_0| + l}{|z_0| - l}\right)$$

(10) Una corteza esférica conductora de pared delgada, de radio interno r_{bi} y radio externo r_{be}, es concéntrica con una esfera conductora de radio externo r_a como se muestra en la figura. La esfera a posee una carga Q_a y la b una carga Q_b, ambas del mismo signo.

a) ¿Cuánto vale el potencial en b?

b) ¿Cuánto vale la diferencia de potencial entre las dos esferas?

c) ¿Cuánto vale el potencial en a?



a)

$$V = K \cdot \frac{\sum_i q}{r}$$

$$V_{be} = K \cdot \frac{\sum_i q}{r_{be}} = K \cdot \frac{Q_a + Q_b}{r_{be}}$$

b) $E = K \cdot \dfrac{Q_a}{r^2}$

$$V_{a,b} = V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

$$V_{r_a, r_{bi}} = -\int_{r_{bi}}^{r_a} \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\int_{r_{bi}}^{r_a} K \cdot \frac{Q_a}{r^2} \cdot dr = K \cdot Q_a \int_{r_a}^{r_{bi}} \frac{dr}{r^2} = K \cdot Q_a \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_a}^{r_{bi}} =$$

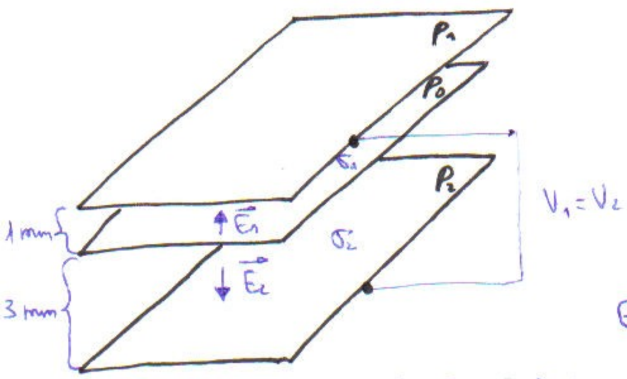
| E radial, $dl = dr$

$$= K \cdot Q_a \left[\frac{1}{r} \right]_{r_{bi}}^{r_a} = K \cdot Q_a \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_{bi}} \right)$$

c) $$V_a = V_b + V_{r_a, r_{bi}} = K \cdot \frac{Q_a + Q_b}{r_{be}} + K \cdot Q_a \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_{bi}} \right)$$

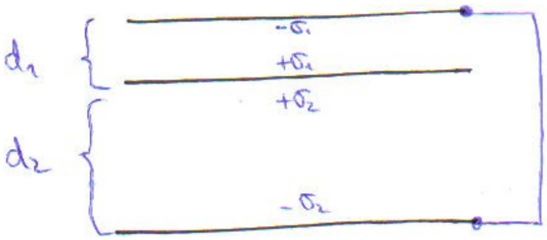
(El potencial, siempre desde fuera para adentro)

(11) Tres grandes placas conductoras paralelas entre sí tienen conectadas la cara exterior por medio de un alambre. La placa del medio está aislada y posee una densidad de carga σ_1 sobre la superf. superior y σ_2 sobre la inferior, siendo $\sigma_1 + \sigma_2 = 12 \mu C/m^2$. Esta placa dista 1 mm de la superior y 3 mm de la inferior. Determinar σ_1 y σ_2:



Como sabemos por la teoría, la fórmula del plano infinito cargado con potencial uniforme es:

$$\vec{E_1} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \cdot \hat{k} \qquad \vec{E_2} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} (-\hat{k})$$



$V_1 = V_2 \implies V_1 - V_2 = 0$

$$V_1 - V_0 = -E_1 \cdot d_1 = -\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} d_1$$

$$-\quad V_0 - V_2 = -E_2 \cdot d_2 = -\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} \cdot d_2$$

$$V_1 - V_2 = -\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} d_1 + \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} d_2 \implies 0 = -\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} d_1 + \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} d_2$$

$$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} d_1 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} d_2 \implies \sigma_1 d_1 = \sigma_2 \cdot d_2 \quad , \ \sigma_1 + \sigma_2 = 12 \implies$$

$$\implies \sigma_1 = 12 - \sigma_2$$

$$(12 - \sigma_2) d_1 = \sigma_2 \cdot d_2$$

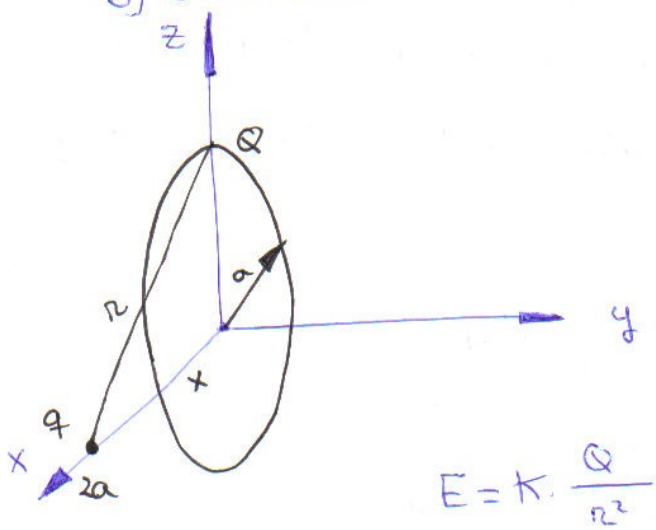
$$12 - \sigma_2 = \sigma_2 \cdot 3 \qquad 12 = 4 \cdot \sigma_2 \qquad \sigma_2 = 3 \ \mu C/m^2$$

$$\sigma_1 = 12 - \sigma_2 = 12 - 3 = 9 \ \mu C/m^2$$

(12) Un anillo cargado uniformemente, de radio a y carga Q, se encuentra sobre el plano YZ a lo largo del eje X. Una carga puntual q se sitúa sobre el eje x en $x = 2 \cdot a$.

a) Determinar el potencial en cualquier punto del eje X debido a la carga total Q+q.

b) Determinar el campo eléctrico en cualquier punto del eje X.



$$r = \sqrt{x^2+a^2}$$

$$V_T = V_1 + V_2 = K \cdot \frac{Q}{\sqrt{x^2+a^2}} + K \cdot \frac{q}{|x-2a|}$$

$$|x-2a| = \begin{cases} x-2a & , x > 2a \\ 2a-x & , x < 2a \end{cases}$$

$$E = K \cdot \frac{Q}{r^2} \cos\theta$$

$$E_1 = K \cdot \frac{Q}{x^2+a^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = K \cdot \frac{Qx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$$

$$E_2 = K \cdot \frac{q}{(x-2a)^2}$$

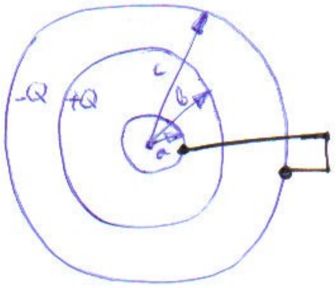
$x < 2a$: $E_1 - E_2$

$x > 2a$: $E_1 + E_2$

(13) Tres cortezas conductoras esféricas y concéntricas poseen radio a, b y c siendo $a<b<c$. Inicialmente, la corteza interna está descargada, la del medio posee una carga positiva Q, y la exterior una carga negativa $-Q$.

a) Determinar el potencial eléctrico en las tres cortezas

b) Si las cortezas interna y externa se conectan mediante un alambre que está aislado al pasar a través de la corteza media, ¿cuál es el potencial eléctrico de cada una de las tres cortezas y cuál es la carga final de cada corteza?



$Q'_a + Q'_c = Q_c = -Q$

$$E = K \cdot \frac{\sum q}{r^2}$$

- Si $r<b$ (por tanto $r<a$ también):

$$\sum q = 0 \implies E = 0$$

- Si $b<r<c$: $\sum q = +Q \implies E = K \cdot \frac{Q}{r^2}$

- Si $r>c$: $\sum q = +Q - Q = 0 \implies E = 0$

Potencial (de fuera para adentro)

- Si $r>c$:

$$V_r \equiv V_r - V_\infty = -\int_\infty^r \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \implies V_c = 0$$

- Si $b<r<c$:

$$V_r \equiv V_r - V_\infty = V_r - V_c + \underbrace{V_c - V_\infty}_{0} = V_r - V_c = -\int_c^r \vec{E} \cdot d\vec{r} =$$

$$= -\int_c^r K \cdot \frac{Q}{r^2}\, dr = K \cdot q \left[\frac{1}{r}\right]_c^r = K \cdot q \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{c}\right)$$

$$V_b = K \cdot q \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$$

• Si $r < b$:

$$V_r \equiv V_r - V_\infty = V_r - V_b + \underbrace{V_b - V_\infty}_{V_b} = V_r - V_b + K\cdot Q\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) =$$

$$= \underbrace{-\int_b^r E\cdot dr}_{E=0} + K\cdot Q\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) = V_b \implies V_a = K\cdot Q\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$$

b) $V_a = V_c = 0$

$Q_a + Q_c = -Q$

• Si $b < r < c$:

$$E = K\cdot\frac{Q_a + Q}{r^2} \qquad V_b - V_c = -\int_c^b E\cdot dr = K\cdot(Q_a + Q)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$$

• Si $a < r < b$:

$$E = K\cdot\frac{Q_a}{r^2} \qquad \underbrace{V_a}_{0} - V_b = K\cdot Q_a\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

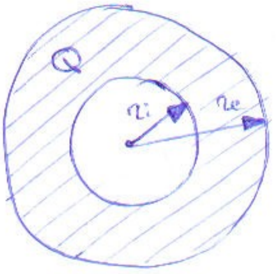
$$V_b = K\cdot Q_a\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ K\cdot(Q_a + Q)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) = K\cdot Q_a\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) \\ 2)\ Q_a + Q_c = -Q \end{array}\right\} \implies Q_c = -Q\,\frac{c(b-a)}{b(c-a)}$$

$$Q_a = -Q\,\frac{a(c-b)}{b(c-a)}$$

$$Q_b = Q$$

(14) Suponer una distribución esférica de carga que tiene una carga total Q repartida uniformemente en el volumen existente entre una esfera interior de radio r_i y otra exterior de radio r_e. Encontrar el potencial en las tres regiones del espacio ($r > r_e$, $r_e > r > r_i$, $r < r_i$)



Si $r > r_e$:

$$E = K \cdot \frac{Q}{r^2}$$

$$\underbrace{V_r - V_\infty}_{0} = -\int_\infty^r \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\int_\infty^r E \cdot dr =$$

$$= -\int_\infty^r K \frac{Q}{r^2}\, dr = K \frac{Q}{r} \qquad V_r = K \frac{Q}{r}$$

• Si $r_i < r < r_e$:

$$V_r - V_{r_e} = -\int_{r_e}^r \vec{E} \cdot \vec{dl} \qquad dq = \rho \cdot dv$$

$$E = K \frac{\Sigma q}{r^2} = K \frac{Q_r}{r^2} \qquad \rho = \frac{Q}{V_{ol}} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi r_e^3 - \frac{4}{3}\pi r_i^3}$$

$$Q_r = \rho \cdot V_r = \frac{Q}{\frac{4}{3}\cancel{\pi} r_e^3 - \frac{4}{3}\cancel{\pi} r_i^3} \cdot \left(\frac{4}{3}\cancel{\pi} r^3 - \frac{4}{3}\pi r_i^3\right) =$$

$$= \frac{Q\left(r^3 - r_i^3\right)}{\left(r_e^3 - r_i^3\right)}$$

$$V_r - V_{r_e} = -\int_{r_e}^r K \frac{Q(r^3 - r_i^3)}{r^2(r_e^3 - r_i^3)}\, dr = \frac{-K \cdot Q}{r_e^3 - r_i^3} \int_{r_e}^r \left(r - \frac{r_i^3}{r^2}\right) dr =$$

$$= -\frac{K \cdot Q}{r_e^3 - r_i^3} \left[\frac{r^2}{2} + r_i^3 \cdot \frac{1}{r}\right]_{r_e}^r = -K \frac{Q}{r_e^3 - r_i^3} \left[\frac{1}{2}\left(r^2 - r_e^2\right) + r_i^3\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_e}\right)\right]$$

$$V_r - V_{r_e} = \frac{KQ}{r_e^3 - r_i^3} \left[\frac{1}{2}\left(r_e^2 - r^2\right) + r_i^3\left(\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r}\right)\right]$$

$$V_r = \frac{KQ}{r_e^3 - r_i^3} \left[\frac{1}{2}\left(r_e^2 - r^2\right) + r_i^3\left(\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r}\right)\right] + \underbrace{K \frac{Q}{r_e}}_{V_{r_e}}$$

• Si $r < r_i$:

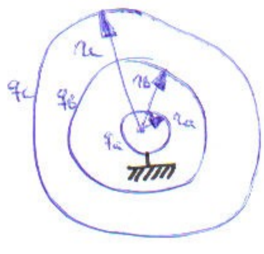
$E = 0$

$$V_r - V_{r_i} = -\int_{r_i}^{r} E \cdot dr = 0 \Rightarrow V_r = V_{r_i} =$$

$$= \underbrace{\frac{K \cdot Q}{r_e^3 - r_i^3}\left[\frac{1}{2}\left(r_e^2 - r_i^2\right) + r_i^3\left(\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_i}\right)\right] + K \cdot \frac{Q}{r_e}}_{}$$

Es V_r para $r_i < r < r_e$, pero con $r = r_i$

• EJERCICIO DE EXAMEN:



$r_a = 1$ cm

$r_b = 2$ cm

$r_c = 3$ cm

$q_a = q_b = 1$ nC

$q_c = -3$ nC

a) Cargas, si se pone a tierra la corteza más pequeña.

b) ¿Qué potencial hay que poner en r_a para que en $r_c = 0$?

a) $q_b' = q_b = 1$ nC

$q_c' = q_c = -3$ nC

$q_a' \neq q_a$

• Si $r > r_c$:

$$E = K \cdot \frac{q_a' + q_b + q_c}{r^2}$$

$$V_{r_c} - \underbrace{V_\infty}_{0} = -\int_\infty^{r_c} E \cdot dr = -\int_\infty^{r_c} K \cdot \frac{q_a' + q_b + q_c}{r^2}\, dr = K \cdot \frac{q_a' + q_b + q_c}{r_c}$$

$$V_{r_c} = K \cdot \frac{q_a' + q_b + q_c}{r_c}$$

• Si $r_b < r < r_c$:

$$E = K \cdot \frac{q_a' + q_b}{r^2}$$

$$V_{rb} - V_{rc} = -\int_{r_c}^{r_b} E \cdot dr = K \cdot (q_a' + q_b)\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_c}\right)$$

$$V_{rb} = K(q_a' + q_b)\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_c}\right) + \underbrace{K \cdot \frac{q_a' + q_b + q_c}{r_c}}_{V_{rc}}$$

• Si $r_a < r < r_b$:

$$V_{ra} - V_{rb} = K \cdot q_a'\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$

$$V_{ra} = K \cdot q_a'\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) + \underbrace{K(q_a' + q_b)\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_c}\right) + K \cdot \frac{q_a' + q_b + q_c}{r_c}}_{V_{rb}} =$$

$$= 0 \quad (\text{Va a tierra})$$

$$\cancel{K} q_a'\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) + \cancel{K}(q_a' + q_b)\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_c}\right) = -\cancel{K} \cdot \frac{q_a' + q_b + q_c}{r_c}$$

$$\frac{q_a'}{r_a} - \cancel{\frac{q_a'}{r_b}} + \cancel{\frac{q_a'}{r_b}} + \frac{q_b}{r_b} - \cancel{\frac{q_a'}{r_c}} - \cancel{\frac{q_b}{r_c}} = -\cancel{\frac{q_a'}{r_c}} - \cancel{\frac{q_b}{r_c}} - \frac{q_c}{r_c}$$

$$\frac{q_a'}{r_a} + \frac{q_b}{r_b} = -\frac{q_c}{r_c} \quad \Bigg\| \quad \frac{q_a'}{r_a} = -\frac{q_c}{r_c} - \frac{q_b}{r_b}$$

$$q_a' = -r_a\left(\frac{q_c}{r_c} + \frac{q_b}{r_b}\right) = \frac{1}{2}\, nC$$

$V_{ra} = 0$ $\qquad$ $V_{rb} = -225\ V$ $\qquad$ $V_{rc} = -450\ V$

b) V_{ra} ¿ / $V_{rc} = 0$:

$$V_{rc} = K \cdot \frac{q_a' + q_b + q_c}{r_c} \Longrightarrow q_a' + q_b + q_c = 0$$

$$q_a' = -q_b - q_c = 2nC$$

$$V_{rb} = K\,(q_a' + q_b)\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_c}\right) + \underbrace{V_{rc}}_{0}$$

$$V_{ra} = K \cdot q_a'\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) + V_{rb} = K \cdot \frac{q_a'}{r_a} - K \cdot \frac{q_a'}{r_b} + K \cdot \frac{q_a' + q_b}{r_b} -$$

$$- K \cdot \frac{q_a' + q_b}{r_c}$$