COMPUTACIÓN NUMÉRICA

Boletín IV. **Interpolación, derivación e integración numéricas**

1. (a) Calcula, mediante diferencias divididas, el polinomio de interpolación de Lagrange de grado cuatro relativo a la función $f(x) = 2^{x+1} - 5$ en los puntos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ y $x_4 = 5$. Obtén, cuando sea posible, las estimaciones del error cometido.

   (b) Calcula, utilizando el apartado anterior, una aproximación del número $r = 4\sqrt{2} - 5$, y una aproximación de la raíz de la ecuación $\log_2(y + 5) = 3.5$, estimando en ambos casos el error cometido.

2. Dado el conjunto de polinomios $V = \{p/\, p(x) = \alpha + \beta x^2,\ \ \alpha, \beta \in I\!R\}$, se plantea el problema siguiente:

   Dada una función $f \in \mathcal{C}[a, b]$ y dos puntos $x_0, x_1 \in [a, b]$,

   ¿existe $p \in V$ tal que $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1$? ¿Es único?

   Resuelve el problema en los casos $[a, b] = [0, 1]$ y $[a, b] = [-1, 1]$.

3. Sea $f : [a, b] \to I\!R$, y sean $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ puntos distintos en el intervalo $[a, b]$. Sea g una función que interpola a f en $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$, y sea h una función que interpola a f en $\{x_1, x_1, \ldots, x_n\}$.

   (a) Prueba que la función y dada por:

   $$y(x) = g(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0}\,[g(x) - h(x)]$$

   interpola a f en $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

   (b) ¿Qué es y, si g y h son polinomios de grado inferior o igual a $n - 1$?

   (c) Sea f una función que verifica la siguiente tabla:

x_i	1	2	0	3
$f(x_i)$	3	2	4	5

   Suponiendo que g y h son polinomios de grado inferior o igual a $n - 1$, calcula g, h e y con las indicaciones de los apartados anteriores.

4. Sean la función $f(x) = \sin x \cos x$ y los nodos $\{x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{2}\}$.

   (a) Aproxima $f'(0)$, $f'(\frac{\pi}{6})$ y $f'(\frac{\pi}{2})$ mediante una fórmula t.i.p.

   (b) Con los nodos $\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\}$, calcula el polinomio de Hermite que aproxima a f en $[0, \frac{\pi}{2}]$. Determina una cota superior del error de aproximación en $\frac{\pi}{3}$ y verifica que la aproximación dista del valor exacto una cantidad inferior a la cota.

   (c) Aproxima $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$ mediante la fórmula compuesta del trapecio con $h = \pi/6$.

5. El valor de la aceleración de la gravedad en un punto de la superficie terrestre al nivel del mar depende de la latitud. Mediante resultados experimentales se ha obtenido la siguiente tabla de dicha dependencia:

latitud (^{o})	0	30	45	60	90
gravedad (m/s^2)	9.780	9.793	9.806	9.819	9.832

Aproxima con interpolación de Lagrange el valor de la gravedad en una playa de Barcelona situada a $45^o25'$ de latitud.

6. (**JUN01**) En una laboratorio de Química se han medido las densidades del sodio a 94, 205 y 371°C, y se han obtenido los valores de 929, 902 y 860 kg/m^3, respectivamente.

   (a) A partir de las mediciones, obtén mediante interpolación de Lagrange una aproximación de la densidad a 251°C. Aproximar la variación instantánea (derivada) de la densidad con respecto a la temperatura a 94°C. Suponiendo que la función $d(T)$, que relaciona densidad y temperatura, verifica:

   $$\left|d''(T)\right| < 10^{-5}, \quad \left|d'''(T)\right| < 10^{-6}, \quad \left|d^{iv}(T)\right| < 10^{-7}, \qquad \forall T \in [50, 400],$$

   acotar el error cometido en las aproximaciones anteriores.

   (b) Considerando la integral de la función $f(x) = x^{-1}$ en el intervalo $[1, 2]$, obtén las aproximaciones dadas por la fórmula de Newton–Cotes abierta de dos nodos y la de tipo interpolatorio polinómico que se obtiene con los nodos 1, 4/3 y 2. Calcula el valor exacto de la integral e indica qué fórmula lo aproxima mejor.

7. Sea la tabla de valores de una función $f \in \mathcal{C}^5(I)$:

x_i	-1	0	1	3	4
$f(x_i)$	6	3	6	38	77

Si denotamos por S una función *spline* cúbico relativa a la tabla y denotamos por $f_i'' = S''(x_i)$, $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$, entonces se verifica:

$$h_{i-1} f_{i-1}'' + 2(h_{i-1} + h_i) f_i'' + h_i f_{i+1}'' = 6\left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_{i-1}}\right); \qquad i = 1, 2, 3.$$

   (a) Si se imponen las condiciones $f_0'' = 2f_2'' - f_1''$ y $f_4'' = f_3''$, plantea el sistema de ecuaciones necesario para obtener f_i''.

   (b) Calcula los valores de f_i'' $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$.

   (c) Razona si:

   $$S(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3, & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 3x^2 + 3, & \text{si } x \in [0, 1] \\ x^3 + 3x + 2, & \text{si } x \in [1, 3] \\ 9x^2 - 24x + 29, & \text{si } x \in [3, 4] \end{cases}$$

   es el *spline* cúbico determinado en 7a).

   (d) Aproxima la integral de f en $[-1, 4]$ mediante:

   $$\int_{-1}^{4} f(x)\, dx \approx \int_{-1}^{4} S(x)\, dx.$$

   Razona si la aproximación es una fórmula cerrada de Newton–Cotes.

8. (a) Al girar la curva $y(x) = x^2$ alrededor del eje OX, se genera una superficie de revolución. Sabiendo que el área lateral de esa superficie limitada por los planos $x = 0$ y $x = a$ viene dada por la expresión:

$$S(a) = 2\pi \int_0^a x^2 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx\,,$$

obtén mediante el método de Simpson una aproximación del área para $a = \sqrt{2}$. Obtén otra aproximación mediante el método de trapecio compuesto, dividiendo el intervalo en dos subintervalos de igual longitud.

(b) Mediante integración numérica se aproxima el valor del área que queda por debajo de la gráfica de una función positiva entre los extremos del intervalo $[0, i]$ y se obtiene la tabla:

$[0, i]$	$[0, 1]$	$[0, 2]$	$[0, 3]$	$[0, 5]$
Area	3	19	85	631

Utiliza el polinomio de interpolación de Lagrange para aproximar el área para el intervalo $[0, 2.5]$. Indica, sin calcular, posibles técnicas para aproximar el valor de b, de forma que el área correspondiente al intervalo $[0, b]$ sea 100.

9. (**DIC2000**) En una pista de pruebas, un automóvil de 2000 kg de masa viaja a una velocidad de 30 m/s. En ese instante, se desactiva la transmisión y, posteriormente, la desaceleración verifica la ecuación diferencial:

$$2000\, u\, \frac{du}{dx} = -10u^2 - 1200$$

donde u es la velocidad (en m/s) y x es la distancia (en metros) recorrida desde la desactivación. Resolviendo la ecuación diferencial en variables separadas, la distancia recorrida hasta alcanzar la velocidad a está dada por la integral:

$$x(a) = \int_a^{30} \frac{2000u}{10u^2 + 1200} du$$

(a) Aproxima mediante las fórmulas de trapecio compuesto y Simpson compuesto la distancia recorrida hasta que el coche se detiene (utilizar $h = 5$ m/s como paso de integración). ¿Cuál de las dos fórmulas aproxima mejor el valor exacto?

(b) Deduce la fórmula de integración de Newton–Cotes abierta de dos puntos y aproxima la distancia recorrida hasta alcanzar la velocidad de 15 m/s.

10. Sea la función real $f \in \mathcal{C}^4(I\!R)$ que verifica:

$$20 \max_{x\in[-1,4]} \left|f'''(x)\right| = 2 \max_{x\in[-1,4]} \left|f^{iv}(x)\right| = 20 \max_{x\in[-1,4]} \left|f''(x)\right| = 1$$

y define la tabla de valores:

x_i	-1	0	1	3	4
$f(x_i)$	6	3	6	38	77

(a) Calcula el polinomio p de interpolación de Lagrange de grado 2 en $\{1, 3, 4\}$ relativo a f. Aproxima $f'(3)$ por una fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio polinómico con los puntos $\{1, 3, 4\}$ y estima el error cometido.

(b) Calcula el polinomio q de interpolación de Lagrange de grado 2 en $\{-1, 0, 1\}$ relativo a f. Aproxima $f(0.25)$ y estima el error cometido.

(c) Justifica si la función:

$$S(x) = \begin{cases} q(x) & \text{si } x \in [-1,1] \\ p(x) & \text{si } x \in [1,4] \end{cases}$$

define un *spline* cúbico de f en $[-1,4]$.

11. (a) Obtén, mediante diferencias divididas, el polinomio de grado 3 cuya gráfica pasa por los puntos $(0,0)$ y $(1,0.5)$, con pendientes respectivas de -1 y 1 en dichos puntos.

    (b) Calcula la fórmula de derivación numérica que aproxima la derivada segunda de una función g, utilizando los valores en los puntos $\{-0.5, 0, 1\}$. Aplícala a la función g dada por:

$$g(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

    para aproximar $g''(1)$.

    (c) Utiliza la fórmula de Simpson para aproximar la integral:

$$\int_0^1 \frac{g(x)}{x}\, dx\,.$$

12. En un circuito eléctrico, la diferencia de potencial $V(t)$ está definida por $V(t) = Li'(t) + Ri(t)$, donde $i(t)$ es la intensidad de corriente en el instante t. Se ha medido la corriente para distintos valores de t, obteniendo la tabla:

t_k	2	4	6
$i(t_k)$	3	5	9

donde se consideran los datos $L = 1$ y $R = 2$.

    (a) Aproxima $V(2)$ y $V(3)$ con los datos de la tabla.

    (b) Aproxima, mediante el método de trapecio compuesto, la carga eléctrica, $q = \displaystyle\int_2^6 i(t)\, dt$.

13. (**SEP99**) Sea la siguiente tabla de valores:

x_i	-1.0	0.0	0.5	1.0	2.0
f_i	1.0366	1.7358	2.5576	3.0	1.7358
f'_i	0.1464	1.4716	1.5576	0.0	-1.4716

donde f_i y f'_i son los valores alcanzados en x_i por cierta función f y su derivada, respectivamente.

    (a) Calcula el polinomio de Hermite relativo a los nodos 0.5, 1 y 2 que interpola los datos de la tabla.

    (b) Deduce una fórmula t.i.p. con tres nodos para aproximar la integral $\displaystyle\int_{-1}^{0.5} f(x)\, dx$.

    (c) Utiliza las propiedades de las fórmulas t.i.p. y la fórmula deducida en 13*b*) para aproximar $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\, dx$.

14. (a) Justifica la necesidad de dos condiciones adicionales cuando se desea calcular el *spline* cúbico para interpolar los valores $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$ en los puntos equiespaciados $\{x_i = x_0 + ih\}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

(b) Plantea el sistema de ecuaciones que se ha de resolver cuando las condiciones adicionales son $S''(x_0) = S''(x_1)$ y $S''(x_{n-1}) = S''(x_n)$.

(c) Aplica el apartado anterior a la función dada por la tabla:

x_i	0	2	4	6	8
$f(x_i)$	-3	-1	1	3	5

15. (**DIC99**) En una explotación petrolífera se ha medido la profundidad del yacimiento en distintos puntos de una sección recta, obteniendo la siguiente tabla:

abscisa (en m): x_i	0	100	150	200
profundidad (en m): ω_i	1900	1450	1550	1690

(a) Construye la función *spline* cúbica S que interpola los datos anteriores con condiciones en los extremos $S''(0) = 0.02$ y $S''(200) = 0$.

(b) Estima la profundidad del yacimiento en la abscisa $x = 50$ m. ¿Debe $S(50)$ estar comprendido entre ω_0 y ω_1? Razona la respuesta.

(c) Añadiendo el resultado anterior a la tabla y teniendo en cuenta que el área de la sección recta del yacimiento viene dada por:

$$A = \int_0^{200} (2200 - \omega(x))\, dx$$

estima dicha área mediante el método de Simpson compuesto.

Nota:

$$h_{i-1}f''_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)f''_i + h_i f''_{i+1} = 6\frac{\omega_{i+1} - \omega_i}{h_i} - 6\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{h_{i-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$S(x) = f''_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + f''_{i+1}\frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + \left(\frac{\omega_i}{h_i} - f''_i \frac{h_i}{6}\right)(x_{i+1} - x) + \left(\frac{\omega_{i+1}}{h_i} - f''_{i+1}\frac{h_i}{6}\right)(x - x_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

16. Dada una función f suficientemente derivable en toda la recta real, determina los valores de A_0 y A_1 para que la fórmula de derivación numérica para aproximar la derivada de f en α:

$$f'(\alpha) \approx A_0 f(a) + A_1 f(b)$$

sea de tipo interpolatorio polinómico. Aplica el resultado obtenido para aproximar la derivada de $f(x) = e^x$ en el punto $\alpha = 0.5$, con $a = 0$ y $b = 1$.

17. (**SEP00**) Sea la función f definida por:

$$f(x) = 2x - \frac{1}{81^x}\,.$$

(a) Obtén el polinomio de interpolación de Lagrange p relativo a f y a los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$ y $x_3 = 1$. Establece una cota del error cometido al aproximar el valor $f(x)$ por el valor $p(x)$ en un punto $x \in [0, 1]$. Aproxima $f(\frac{3}{4})$ y estima el error cometido.

(b) Aproxima $f'(0.5)$ mediante derivación numérica de t.i.p, utilizando como nodos los puntos del apartado (a). Estima el error cometido.

(c) Aproxima el valor de la integral de f en $[0, 1]$ mediante:

i. trapecio compuesto, con los nodos de cuadratura del apartado 17a)

ii. Simpson, con los nodos de cuadratura $\{0, 0.5, 1\}$.

iii. La fórmula de t.i.p. que utiliza los nodos del apartado 17a).

Indica en qué casos se trata de fórmulas de Newton–Cotes cerradas.

18. Determina si la función s dada por:

$$s(x) = \begin{cases} 2(x+1) + (x+1)^3\,, & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 3 + 5x + 3x^2\,, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 11 + 11(x-1) + 3(x-1)^2 - (x-1)^3\,, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

es un *spline* cúbico en los puntos $\{-1, 0, 1, 2\}$ con las condiciones $s''(-1) = s''(2) = 0$.

19. (**SEP02**)

(a) Determina los valores de α y β para que

$$s(x) = \begin{cases} \alpha x(x^2+1)\,, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -\alpha x^3 + \beta x^2 - 5\alpha x + 1\,, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

sea un *spline* cúbico de una cierta función f en los puntos 0, 1 y 2.

(b) Sea $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{17}{12}x^2 - \frac{1}{6}x$. Para los valores α y β obtenidos en el apartado anterior, ¿puede ser s un *spline* cúbico que interpola a f en los puntos $\{0, 1, 2\}$? ¿Es s el *spline* cúbico que verifica $s''(0) = s''(2) = 0$?

20. (**DIC02**)

(a) Dada una función $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$, determina las constantes A y x_0 para que la fórmula

$$\int_a^b f(x)\,dx = Af(x_0) + kf''(\theta),$$

con $k \neq 0$ y θ un punto del intervalo (a, b), sea exacta para polinomios del mayor grado posible.

(b) Aplica la fórmula a $f(x) = x^2$ para determinar el valor de k.

(c) Aproxima la integral $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,dx$ mediante la fórmula compuesta que se deduce de la fórmula anterior, dividiendo el intervalo de integración en dos subintervalos de igual longitud, y obtén una estimación del error cometido.

21. (**JUN03**) Sea la función f, definida por $f(x) = x^{-1}$ para $x \neq 0$.

(a) Obtén el polinomio de Hermite relativo a los nodos $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$. Utilízalo para aproximar el número $z = 2/3$ y acota el error cometido.

(b) Para una función g, deduce las fórmulas de derivación numérica de t.i.p. para aproximar $g'(2)$ y $g''(3)$, utilizando $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ y $x_2 = 4$. Aplícalas a la función f y acota, cuando sea posible, el error cometido.

(c) Calcula el *spline* de orden uno, S, relativo a la función f y a los puntos $x_0 = 1$, $x_1 = 3/2$ y $x_2 = 2$. Aproxima la integral:

$$\int_1^2 f(x)\,dx \approx \int_1^2 S(x)\,dx$$

Indica, justificadamente, qué conocida fórmula de integración se obtiene.

22. (**SEP03**) Sea $Q(t) = \cos(\pi t)$ la carga eléctrica de un circuito para cada instante de tiempo t.

   (a) Aproxima el valor de la carga en $t = 0.25$, utilizando el polinomio de Hermite, P_1, relativo a Q y a los instantes de tiempo $\{0, 0.5\}$. Estima el error cometido.

   (b) Calcula el polinomio de Hermite, P_2, relativo a Q y a los tiempos $\{0.5, 1\}$ y justifica si la función:
$$f(t) = \begin{cases} P_1(t)\,, & \text{si } 0 \le t \le 0.5 \\ P_2(t)\,, & \text{si } 0.5 \le t \le 1 \end{cases}$$
   es el *spline* cúbico relativo a Q y a los instantes $\{0, 0.5, 1\}$ para las condiciones $f''(0) = 8 + 4\pi$ y $f''(1) = 16 - 4\pi$.

   (c) Aproxima la integral I mediante la fórmula:
$$I = \int_0^{0.5} Q(t)\,dt \approx \int_0^{0.5} P_1(t)\,dt\,.$$
   Justifica que el grado de precisión de la fórmula es al menos tres.

23. (**DIC03**) Sea f una función que verifica:
$$f(0.1) = 2, \quad f(0.2) = 1, \quad f(0.4) = 3, \quad f'(0.2) = 0, \quad f'(0.4) = 0,$$
$$\left| f^{(i)}(x) \right| \le (5\pi)^i\,, \quad \forall x \in I\!R$$

   (a) Calcula el polinomio de Lagrange relativo a f y a los puntos $\{0.1, 0.2, 0.4\}$, aproxima con él $f(0.3)$ y acota el error cometido.

   (b) Calcula el polinomio de Hermite relativo a f y a los puntos $\{0.2, 0.4\}$, aproxima con él $f(0.3)$ y acota el error cometido.

24. (**DIC03**) Razona la existencia de las constantes a, b, c y d tales que:
$$S(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2, & \text{si } x \in [-2, 0] \\ a + bx + cx^2 + dx^3, & \text{si } x \in [0, 1] \\ 3 - 2x, & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$
es el *spline* cúbico que interpola a una función g en los puntos -2, 0, 1 y 2, con los valores $g(-2) = -7$, $g(0) = 1$, $g(1) = 1$ y $g(2) = -1$ y las condiciones $g''(-2) = -4$ y $g''(2) = 0$.

25. (**JUN04**) Supongamos que
$$S(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \le 0 \\ x^3, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
interpola una tabla de valores $\{x_i, \omega_i\}$ cuyos nodos son $x_i = -2 + 2i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$.

   (a) Construye la tabla. Prueba que S es un *spline* cúbico.

   (b) Calcula $S''(x_i)$, $\quad i = 0, 1, 2, 3$.

   (c) Obtén el *spline* cúbico asociado a la tabla del apartado 25a) y que verifica $f_0'' = 0$ y $f_3'' = 0$.

Nota:
$$h_{i-1} f_{i-1}'' + 2(h_{i-1} + h_i) f_i'' + h_i f_{i+1}'' = 6\frac{\omega_{i+1} - \omega_i}{h_i} - 6\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{h_{i-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$
$$S_i(x) = f_i'' \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + f_{i+1}'' \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + \left(\frac{\omega_i}{h_i} - f_i'' \frac{h_i}{6} \right)(x_{i+1} - x) + \left(\frac{\omega_{i+1}}{h_i} - f_{i+1}'' \frac{h_i}{6} \right)(x - x_i)$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

26. (**SEP04**) Sea $p_H(x) = x^4 + x + 1$ el polinomio de Hermite que interpola una función f en los nodos:

$$x_0 = -1 \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = 3\ .$$

(a) Calcula $f(x_i)$ y $f'(x_i)$, $\quad i = 0, 1, 2, 3$.

(b) Construye el polinomio de Lagrange p, que interpola a f en los nodos x_i $(i = 0, \ldots, 3)$.

(c) Aproxima, mediante fórmulas de tipo interpolatorio polinómico que utilicen todos los nodos:

i. $f'(x_i)$, $\quad i = 0, 1, 2, 3$

ii. $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\, dx$.

(d) Aproxima $f(2)$ mediante los polinomios anteriores. Sabiendo que:

$$\left| f^{(j}(x) \right| \leq \frac{1}{j}\,, \quad x \in [-1, 3]$$

acota el error cometido en ambos casos, ¿cuál es, en principio, la mejor aproximación de $f(2)$?

27. (**DIC01**)

(a) Sabiendo que la carga eléctrica en un circuito viene dada por $Q(t) = cos(\pi t)$ para cada tiempo t, aproxima su valor en el instante $t_0 = 0.25$ utilizando el polinomio de interpolación de Lagrange, P, relativo a los tiempos $\{0, 0.5, 1, 1.5\}$ y acota el error cometido. Razona si el polinomio anterior define un *spline* cúbico interpolador de la función Q con las condiciones $P''(0) = Q''(0)$ y $P''(1.5) = Q''(1.5)$.

(b) Determina los valores de A, x_0 y x_1, con $x_0 < x_1$, para que la fórmula:

$$\int_0^1 f(x)\, dx \approx A(f(x_0) + f(x_1))$$

integre exactamente polinomios de grado inferior o igual a dos. Aplica la fórmula a la función $f(x) = x^2 + 1$ y comenta los resultados obtenidos al compararla con el uso de la fórmula del trapecio.

28. (**SEP01**) Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

(a) Obtén la expresión del polinomio de interpolación de Lagrange relativo a f y a los puntos $\{0, 0.25, 0.5, 1\}$. Aproxima el valor de $f(0.75)$ y acota el error cometido en la aproximación.

(b) Obtén la expresión del polinomio de Hermite relativo a f y a los puntos $\{0\,,\,1\}$. Aproxima el valor de $f(0.75)$ y acota el error cometido.

(c) Indica cuáles son los nodos de cuadratura y deduce la fórmula de Newton–Cotes abierta de tres puntos para aproximar la integral de una función en $[0, 4]$. Aplícala a la función f.

29. (**JUN02**) Sea $f(x) = \sin(\pi x) - x$.

(a) Calcula el polinomio de interpolación de Lagrange relativo a la función f y a los nodos $\{0, 0.5, 1\}$. Empléalo para aproximar el valor $f(0.25)$. Estima el error cometido.

(b) Deduce la fórmula abierta de Newton–Cotes de tres nodos en el intervalo $[0, 1]$, y utilízala para aproximar $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

(c) Acota el error cometido en la aproximación anterior sabiendo que para una fórmula abierta de Newton–Cotes de $n+1$ nodos, con n par, el error $R_n(f)$ está dado por

$$R_n(f) = \frac{f^{n+2}(\xi)}{(n+2)!} h^{n+3} \int_{-1}^{n+1} t\, \Pi_n(t)\, dt.$$

donde ξ es cierto punto del intervalo de integración, y $\Pi_n(t) = t(t-1)\dots(t-n)$.

30. (**DIC04**)

(a) Consideramos la fórmula de cuadratura:

$$\int_0^2 f(x)\, dx \approx c\, [f(x_1) + f(x_2)]\,, \qquad x_1, x_2 \in [0,2]\,, \quad c \in I\!R.$$

Halla c, x_1 y x_2 para que la fórmula sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Se obtiene una fórmula de Newton–Cotes? Razona la respuesta.

(b) Sea la fórmula de derivación numérica:

$$f''(x_1) \approx Af(x_1) + Bf(x_1+h) + Cf(x_1+2h).$$

Calcula los coeficientes para que la fórmula sea de tipo interpolatorio polinómico y aproxima $f''(1)$, para $f(x) = x^3$ y $h = 2$.

31. (**SEP03**)

(a) Prueba que la ecuación $f(x) = -\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{1+x^2} = 0$ tiene una raíz separada en el intervalo $[1,4]$.

(b) En dicho intervalo, ¿se puede utilizar el método de Newton para aproximar esa raíz? Justifica tu respuesta. En caso afirmativo, calcula x_1 a partir de $x_0 = 1$.

(c) Para calcular la raíz de $f(x) = 0$ se propone un método iterativo en el que, conocidos x_{k-2}, x_{k-1} y x_k, se construye el polinomo interpolatorio de Lagrange de f relativo a esos tres puntos, p, y se elige x_{k+1} como la raíz de $p(x) = 0$ más cercana a x_k. Calcula con ese método x_3, tomando $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$.

32. (**SEP05**) Sean la función f dada por $f(x) = \sin(x)$ y los nodos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$ y $x_2 = \pi$.

(a) Halla el polinomio de interpolación de Lagrange de f relativo a los nodos x_i $(i = 0,1,2)$. Aproxima $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ y acota el error cometido en dicha aproximación.

(b) Considera el siguiente problema de interpolación:

Aproxima f por una expresión de la forma

$$g(x) = A_0 + A_1 \cos(x) + A_2 \cos(2x)$$

que sea exacta en los nodos x_i $(i = 0,1,2)$.

¿Tiene solución el problema de interpolación? ¿Es única? Justifica tu respuesta.
Aproxima $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$, resolviendo mediante LU el sistema de ecuaciones lineales que aparece.

33. (**DIC05**)

(a) Sabiendo que $P(n) = \sum_{i=1}^{n} i$ es un polinomio de segundo grado en n, calcula mediante interpolación la expresión de dicho polinomio.

(b) Dado el intervalo $[1, b]$, $b > 1$, denotemos por x_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ los puntos del intervalo de la forma $x_i = 1 + ih$, donde h es la tercera parte de la longitud del intervalo. Para aproximar:

$$\int_1^b f(x)\,dx$$

se considera una fórmula de tipo interpolatorio polinómico que utiliza los nodos x_0 y x_2.

i. Obtén la fórmula de integración numérica.

ii. ¿Es la fórmula anterior una fórmula de Newton–Cotes? ¿Por qué? En caso afirmativo, ¿es abierta o cerrada?

iii. Aplica dicha fórmula a $f(x) = x^{-1}$ para obtener una aproximación de $\ln 2$.

34. (**JUN02**) Para determinar el tiempo que tardan en cruzarse las trayectorias de dos móviles es preciso resolver la ecuación:

$$f(t) = t^2 + \sin(t) - 1 = 0\,.$$

Para aproximar su solución en el intervalo $[0, 1]$ se pide:

(a) Plantear el método de Newton–Raphson, estudiar su convergencia en $[0, 1]$ y obtener la aproximación t_2 a partir de $t_0 = 0$. ¿Es convergente el método para $t_0 = 2$?

(b) Plantear el método de Newton-Raphson para la ecuación $F(t) = 0$, donde $F(t) = (f(t))^{1/3}$, y estudiar su convergencia global en $[0, 1]$ como método de iteración funcional.

(c) i. Aproximar $f'(t_k)$ utilizando la fórmula de derivación numérica de t.i.p. asociada a la tabla de dos valores:

$$\left|\begin{array}{c|c} t_{k-1} & f(t_{k-1}) \\ t_k & f(t_k) \end{array}\right|$$

ii. Plantear el método que se obtiene al sustituir, en la fórmula de Newton–Raphson del apartado $34a)$, $f'(t_k)$ por la aproximación obtenida en $34(c)i)$. Calcula, con este nuevo método, t_2 a partir de $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$.

35. (**JUN06**) Se desea calcular el punto de corte α $(\alpha > 1)$ de la bisectriz del primer cuadrante y la curva dada por $g(x) = x\ln(x^2 + 1)$.

(a) Demuestra que α es solución de la ecuación $f(x) = 0$, con $f(x) = \ln(x^2 + 1) - 1$.

(b) Para aproximar el valor de α, plantea un algoritmo de Newton–Raphson para f en el intervalo $[1, 2]$, justificando previamente su convergencia, y calcula x_1 a partir de $x_0 = 1$.
Nota: Si lo necesitas, utiliza como valores de $\ln(2)$ y $\ln(5)$, respectivamente, las aproximaciones 0.7 y 1.6.

(c) Dada la función f del apartado (a), obtén la expresión del polinomio de Lagrange, mediante diferencias divididas, que interpola a f en los extremos del intervalo $[1, 2]$. Utiliza la información que proporciona la tabla de diferencias divididas para hallar un valor aproximado de α.

36. (**DIC06**)

(a) Sea f una función que verifica:

x_i	-1	0	2	3
$f(x_i)$	-5	2	10	47
$f'(x_i)$	17	0	20	57

$$\max_{x\in[-1,3]} |f'(x)| = 57 \qquad \max_{x\in[-1,3]} |f''(x)| = 46$$

$$\max_{x\in[-1,3]} |f'''(x)| = 18 \qquad \max_{x\in[-1,3]} \left|f^{(4)}(x)\right| = 0$$

i. Calcula el polinomio de Lagrange relativo a la función f y a los nodos $\{x_0, x_1, x_3\}$. Aproxima $f(1)$ y acota el error cometido.

ii. Calcula el polinomio de Hermite relativo a f y a los nodos $\{x_0, x_3\}$. Aproxima $f(1)$ y acota el error cometido.

iii. Aproxima $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ mediante la fórmula de tipo interpolatorio polinómico con los nodos $\{x_0, x_1, x_3\}$.

(b) Razona si la función S dada por:

$$S(x) = \begin{cases} x^3 + 4x^2 - 2x - 1\,, & \text{si } x \in [-1, +1] \\ 2x^3 + 3x^2 - 3x\,, & \text{si } x \in [+1, +3] \end{cases}$$

es un *spline* cúbico sobre los nodos $\{-1, 1, 3\}$.