Práctica: Compresión de imágenes utilizando DCT

El objetivo de esta práctica es familiarizarse con el uso de la transformada discreta de coseno (DCT: Discrete Cosine Transform) para compresión de imágenes.

1 Transformada Discreta de Coseno

La DCT ha servido de base para muchos estándares de compresión de imágenes (ej., JPEG) y de compresión de vídeo (ej. MPEG). El primer paso para aplicar la DCT en dos dimensiones es dividir la imagen en bloques de dimensión $n \times n$ que denotaremos por $\mathbf{X}$. Para cada bloque se calculará la matriz de coeficientes, $\mathbf{C}$, de la siguiente forma:

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^T \ \mathbf{X} \ \mathbf{U} \tag{1}$$

La matriz $\mathbf{U}$ tiene dimensión $n \times n$ y componentes:

$$u(i,j) = \sqrt{\frac{2}{n}} a(j) \cos\left(\frac{j(i+0.5)\pi}{n}\right), \quad i,j = 0,1,...,n-1 \tag{2}$$

donde $a(j) = 1,$ cuando $j \neq 0$ y $a(j) = 1/\sqrt{2},$ cuando $j = 0$.

Considerando esta definición:

- Construya la matriz $\mathbf{U}$ y verifique que es unitaria, i.e., $\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{I}$. Se recomienda no utilizar bucles para obtener $\mathbf{U}$.
- Para un bloque 8×8 uniforme (por ejemplo, con todos los pixeles iguales a 128):
  - Calcule los coeficientes $\mathbf{C}$.
  - Compruebe que la energía de $\mathbf{C}$ es igual a la de $\mathbf{X}$.
  - Cuántos coeficientes se necesitan para representar $\mathbf{X}$?.
- Para un bloque 8×8 generado aleatoriamente
  - Calcule los coeficientes $\mathbf{C}$.
  - Compruebe que la energía de $\mathbf{C}$ es igual a la de $\mathbf{X}$.
  - Cuál es el porcentaje de energía del coeficiente $c(0,0)$?
  - Cuál es el porcentaje de energía del coeficiente $c(7,7)$?

2 Selección de coeficientes

Observe que la matriz de coeficientes y la original tienen la misma dimensión y, por tanto, no se consigue compresión. La forma más sencilla de elegir los coeficientes que deben ser retenidos es utilizar *selección zonal*, i..e, se retendrán los coeficientes ubicados en ciertas posiciones fijadas *a priori*. En concreto, en la práctica se seleccionaran los coeficientes siguiendo el orden fijado por la siguiente matriz:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 6 & 7 & 15 & 16 & 28 & 29 \\ 3 & 5 & 8 & 14 & 17 & 27 & 30 & 43 \\ 4 & 9 & 13 & 18 & 26 & 31 & 42 & 44 \\ 10 & 12 & 19 & 25 & 32 & 41 & 45 & 54 \\ 11 & 20 & 24 & 33 & 40 & 46 & 53 & 55 \\ 21 & 23 & 34 & 39 & 47 & 52 & 56 & 61 \\ 22 & 35 & 38 & 48 & 51 & 57 & 60 & 62 \\ 36 & 37 & 49 & 50 & 58 & 59 & 63 & 64 \end{array} \tag{3}$$

Por ejemplo, para 7 coeficientes el patrón será:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \tag{4}$$

La recuperación de la imagen consistirá en calcular la transformada discreta de coseno inversa:

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{U}\ \hat{\mathbf{C}}\ \mathbf{U}^T \tag{5}$$

donde $\hat{\mathbf{C}}$ contiene los coeficientes que han sido retenidos.

3 Práctica:

- Para cada bloque $8x8$ de la imagen;
  1. Calcule la matriz de coeficientes $\mathbf{C} = \mathbf{U}^T\ \mathbf{X}\ \mathbf{U}$
  2. Seleccione los coeficientes aplicando la selección zonal explicada anteriormente.
  3. Invierta la transformada de coseno a partir de la matriz de coeficientes retenidos $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{U}\ \hat{\mathbf{C}}\ \mathbf{U}^T$
- Calcule el Error Cuadrático Medio entre la imagen original y la imagen recuperada $E[(\hat{I}-I)^2]$.
- Ejecute el programa para varias imágenes.
- Ejecute el programa variando el número de componentes retenidos.