INTERPOLACIÓN POLINÓMICA

María González Taboada

Abril, 2007

Esquema:

Motivación

- En la práctica, muchas veces es necesario evaluar una función en uno o más puntos.
- Esto puede ser complicado si:
  - la función es excesivamente costosa de evaluar
  - no se dispone de una expresión explícita de la función (solo se conocen sus valores en ciertos puntos).
- En estas situaciones, conviene aproximar la función por otra más fácil de evaluar. Como funciones de aproximación, suelen usarse polinomios, funciones trigonométricas, etc.

El problema general de interpolación

- Dados $n+1$ puntos distintos, $x_0,\ x_1,\ \ldots, x_n$, y $n+1$ valores, $\omega_0,\ \omega_1,\ \ldots, \omega_n$, encontrar una función de aproximación p tal que

$$p(x_i) = \omega_i \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

- Los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ se llaman nodos de interpolación.
- Los valores $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n$ pueden ser los valores de cierta función en los nodos.
- Solo consideraremos el caso en que p es un polinomio o una función polinómica a trozos (interpolación polinómica o polinomial).

Diferentes problemas de interpolación polinómica

1. Interpolación de Taylor.
2. Interpolación de Lagrange.
3. Interpolación de Hermite.
4. Interpolación por *splines*.

Interpolación de Taylor

- **Problema**: Dados un punto x_0 y $n+1$ valores, $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n$, hallar un polinomio $p_n \in \mathcal{P}_n$ tal que

$$p_n(x_0) = \omega_0 \qquad p_n^{(i)}(x_0) = \omega_i \quad i = 1, \ldots, n$$

- Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es n veces derivable en $[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$, $\omega_0 = f(x_0)$ y $\omega_i = f^{(i)}(x_0)$, $i = 1, \ldots, n$, entonces

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

- p_n: polinomio de Taylor de grado $\leq n$ relativo a f en x_0

Acotación del error en la interpolación de Taylor

- Sea $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a, b]$:
  - El error cometido al aproximar f por p_n en las proximidades del punto x_0 es

$$f(x) - p_n(x) = f^{(n+1)}(\xi_x) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

    donde ξ_x es un punto comprendido entre x y x_0.

  - Por tanto,

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \sup_{y \in [a,b]} |f^{(n+1)}(y)| \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Interpolación de Lagrange

- En lo que sigue:
  - $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son $n+1$ puntos distintos,
  - $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n$ son $n+1$ valores cualesquiera.
- **Problema**: Encontrar un polinomio $p_n \in \mathcal{P}_n$ tal que

$$p_n(x_i) = \omega_i \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Interpolación de Lagrange

- **Un ejemplo: caso $n = 1$**

  Dados 2 puntos distintos, x_0 y x_1, y los valores ω_0 y ω_1, se trata de encontrar un polinomio $p_1 \in \mathcal{P}_1$ tal que

  $$p_1(x_0) = \omega_0 \qquad p_1(x_1) = \omega_1$$

  Gráficamente, $y = p_1(x)$ es la recta que pasa por los puntos (x_0, ω_0) y (x_1, ω_1).

  Por tanto, el polinomio buscado es

  $$p_1(x) = \omega_0 + \frac{\omega_1 - \omega_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Existencia y unicidad del polinomio de interpolación de Lagrange (I)

- Buscamos un polinomio

$$p_n(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots + a_n\, x^n$$

que verifique las condiciones

$$p_n(x_i) = \omega_i \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

- Los coeficientes del polinomio, $a_0, a_1, \ldots, a_n$, son solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$$

Existencia y unicidad del polinomio de interpolación de Lagrange (II)

- Puede probarse que el determinante de la matriz de coeficientes, A, es

$$\det(A) = \prod_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{n} (x_k - x_l) \neq 0$$

- Por tanto, el sistema tiene una única solución, es decir, existe un único polinomio p_n verificando las condiciones (1).
- p_n: polinomio de interpolación de Lagrange en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ relativo a los valores $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n$.

Cálculo del polinomio de interpolación de Lagrange

- Según lo que acabamos de ver, para calcular el polinomio de interpolación de Lagrange, basta resolver el sistema de ecuaciones lineales anterior.
- Sin embargo, la matriz del sistema es mal condicionada. Por esta razón, para determinar el polinomio p_n en la práctica, no se resuelve el sistema de ecuaciones lineales, sino que se usan otros métodos.
- Veremos cómo calcular el polinomio de interpolación de Lagrange:
  - usando las funciones de base.
  - usando diferencias divididas.

Cálculo del polinomio de interpolación de Lagrange

- **Mediante las funciones de base:**
  - Para cada $i = 0, 1, \ldots, n$, existe un único polinomio $l_i \in \mathcal{P}_n$ tal que $l_i(x_k) = \delta_{ik}$, para $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Polinomios fundamentales de Lagrange de grado n

  - **Fórmula de Lagrange:**

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \omega_i l_i(x) = \omega_0 l_0(x) + \omega_1 l_1(x) + \ldots + \omega_n l_n(x)$$

Cálculo del polinomio de interpolación de Lagrange

- **Mediante diferencias divididas:**
  - Se llaman diferencias divididas de orden cero:

$$[\omega_i] = \omega_i \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

  - Para $k \geq 1$, se llaman diferencias divididas de orden k:

$$[\omega_i, \omega_{i+1}, \ldots, \omega_{i+k}] = \frac{[\omega_i, \omega_{i+1}, \ldots, \omega_{i+k-1}] - [\omega_{i+1}, \ldots, \omega_{i+k}]}{x_i - x_{i+k}}$$

    donde $i = 0, 1, \ldots, n-k$ y $k = 1, \ldots, n$.
  - Si $\omega_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, se denota

$$f[x_i, \ldots, x_{i+k}] = [f(x_i), \ldots, f(x_{i+k})]$$

Cálculo del polinomio de interpolación de Lagrange

- **Fórmula de Newton:**

$$p_n(x) = [\omega_0] + [\omega_0, \omega_1](x - x_0) + [\omega_0, \omega_1, \omega_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$+ \ldots + [\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$$

Acotación del error en la interpolación de Lagrange

- Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a,b]$, con $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$, entonces

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \sup_{y \in [a,b]} |f^{(n+1)}(y)| \frac{|(x-x_0)\dots(x-x_n)|}{(n+1)!}$$

Interpolación de Hermite (simple)

- Datos:
  - $n+1$ puntos distintos: $x_0, x_1, \dots, x_n$
  - $2n+2$ valores cualesquiera: $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n,\ \omega'_0, \omega'_1, \dots, \omega'_n$
- **Problema**:

  Encontrar un polinomio $p_{2n+1} \in \mathcal{P}_{2n+1}$ tal que

  $$p_{2n+1}(x_i) = \omega_i \quad \text{y} \quad p'_{2n+1}(x_i) = \omega'_i \qquad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

- Puede probarse que este problema tiene una única solución, p_{2n+1}.
- p_{2n+1}: polinomio de interpolación de Hermite en los puntos $x_0, x_1, \dots, x_n$ relativo a los valores $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n, \omega'_0, \omega'_1, \dots, \omega'_n$.

Cálculo del polinomio de interpolación de Hermite

- El cálculo del polinomio de interpolación de Hermite puede realizarse de varias maneras. Veremos cómo calcularlo usando diferencias divididas.

Acotación del error en la interpolación de Hermite

- Si $f \in \mathcal{C}^{2n+2}[a, b]$, con $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$, entonces

$$|f(x) - p_{2n+1}(x)| \leq \sup_{y \in [a,b]} |f^{(2n+2)}(y)| \frac{(x - x_0)^2 \ldots (x - x_n)^2}{(2n+2)!}$$

Interpolación por splines

- Al aumentar el número de nodos, aumenta el grado del polinomio de interpolación, y debería mejorar la aproximación.
- Sin embargo, como los polinomios de grado alto presentan muchas oscilaciones, a veces el error de interpolación puede aumentar al aumentar el número de nodos.
- Para solventar este problema, suelen considerarse como funciones de aproximación funciones polinómicas a trozos, como los *splines*.

Concepto de spline

- Datos:
  - $n+1$ puntos distintos: $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$
  - $n+1$ valores: $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n$
- Se llama spline interpolador de orden p o p-spline a una función s tal que
  1. $s \in \mathcal{C}^{p-1}[x_0, x_n]$
  2. Para $i = 0, \ldots, n-1, \quad s_i := s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_p$.
  3. Para $i = 0, \ldots, n, \quad s(x_i) = \omega_i$.
- El *spline* más utilizado es el de orden 3, conocido como *spline* cúbico.

Cálculo del spline cúbico

- Un spline cúbico es una función s tal que
  1. $s \in \mathcal{C}^2[x_0, x_n]$
  2. Para $i = 0, \ldots, n-1$, $\quad s_i := s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_3$.
  3. Para $i = 0, \ldots, n$, $\quad s(x_i) = \omega_i$.
- La expresión del *spline* cúbico s en cada subintervalo, $[x_i, x_{i+1}]$, se determina a partir de los valores de s'' en los extremos del intervalo, $x_i,\ x_{i+1}$.
- Los valores $s''(x_i)$ se obtienen resolviendo un sistema de ecuaciones lineales de matriz tridiagonal.

Cálculo del spline cúbico

- Para $i = 0, \ldots, n-1$, $s_i'' \in \mathcal{P}_1[x_i, x_{i+1}]$.
- Además, $s'' \in \mathcal{C}[x_0, x_n]$.
- Por tanto, para $i = 1, \ldots, n-1$, $s_i''(x_i) = s_{i-1}''(x_i)$.
- En lo que sigue, denotamos

$$\omega_i'' = s_i''(x_i) \qquad i = 0, \ldots, n-1$$

  y $\omega_n'' = s_{n-1}''(x_n)$.
- Entonces, s_i'' es el polinomio de interpolación de Lagrange en x_i, x_{i+1} relativo a $\omega_i'', \omega_{i+1}''$:

$$s_i''(x) = \omega_i'' \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + \omega_{i+1}'' \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

Cálculo del spline cúbico

- Para $i = 0, \ldots, n-1$, denotamos por $h_i = x_{i+1} - x_i$.
- Entonces,

$$s_i''(x) = \omega_i'' \, \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + \omega_{i+1}'' \, \frac{x - x_i}{h_i}$$

- Integrando respecto a x, tenemos que

$$s_i'(x) = -\omega_i'' \, \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2\, h_i} + \omega_{i+1}'' \, \frac{(x - x_i)^2}{2\, h_i} + C_i$$

donde C_i es la constante de integración.

Cálculo del spline cúbico

- Integrando de nuevo respecto a x:

$$s_i(x) = \omega_i'' \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6\,h_i} + \omega_{i+1}'' \frac{(x - x_i)^3}{6\,h_i} + a_i\,(x_{i+1} - x) + b_i\,(x - x_i)$$

  donde a_i y b_i son constantes de integración.

- Imponiendo las condiciones de interpolación:

$$s_i(x_i) = \omega_i \qquad s_i(x_{i+1}) = \omega_{i+1}$$

  se tiene que

$$a_i = \frac{\omega_i}{h_i} - \omega_i'' \frac{h_i}{6} \qquad b_i = \frac{\omega_{i+1}}{h_i} - \omega_{i+1}'' \frac{h_i}{6}$$

- Por tanto, si determinamos los valores ω_i'', tendremos determinado el *spline* cúbico.

Cálculo del spline cúbico

- Para determinar los valores ω_i'', $i = 0, \ldots, n$, se usa la continuidad de la derivada s' en los nodos:

$$s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

- Imponiendo estas condiciones, llegamos a que

$$h_{i-1}\,\omega''_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)\,\omega''_i + h_i\omega''_{i+1} = b_i \qquad i = 1, \ldots, n-1$$

  donde $b_i := 6(c_i - c_{i-1})$, con $c_i := \frac{\omega_{i+1} - \omega_i}{h_i}$.

- Las ecuaciones anteriores forman un sistema de $n-1$ ecuaciones lineales con $n+1$ incógnitas.

Cálculo del spline cúbico

- Para que el *spline* cúbico quede unívocamente determinado:
  - Pueden imponerse los valores de dos incógnitas (habitualmente, los valores de ω_0'' y ω_n'').
  - Se pueden añadir dos ecuaciones de forma que el sistema tenga una única solución.

Cálculo del spline cúbico natural

- Si se imponen los valores ω_0'' y ω_n'', se obtiene el llamado spline natural.
- En este caso, los valores $\omega_1'', \ldots, \omega_{n-1}''$ son solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1'' \\ \omega_2'' \\ \vdots \\ \omega_{n-2}'' \\ \omega_{n-1}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - h_0\omega_0'' \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} - h_{n-1}\omega_n'' \end{pmatrix}$$

Referencias

- A. Aubanell, A. Benseny y A. Delshams, *Útiles básicos de cálculo numérico*, Labor, 1993.
- R.L. Burden y J.D. Faires, *Análisis numérico*, Thomson, 2002.
- A. Quarteroni y F. Saleri, *Cálculo científico con* MATLAB *y Octave*, Springer, 2006.
- G.W. Stewart, *Afternotes on Numerical Analysis*, SIAM, 1996.
- J.M. Viaño y M. Burguera, *Lecciones de Métodos Numéricos. Vol. 3: Interpolación*, Tórculo Edicións, 2000