

---

# Resolución de problemas de búsqueda

Memoria de Prácticas de Inteligencia Artificial

Primera Entrega

---

26 de noviembre de 2007

## **Autores:**

Mariano Cabrero Canosa *cicanosa@udc.es*

Elena Hernández Pereira *elena@udc.es*

**Directorio de entrega:** XXXXX

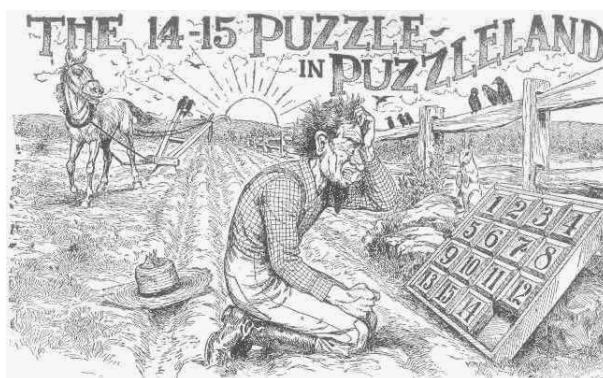
**Resumen.** El 8-puzzle es un pequeño juego de mesa para un único jugador que consiste en 8 piezas cuadradas numeradas del 1 al 8 y un espacio vacío en un tablero de 3 x 3. El objetivo del juego es alcanzar una disposición determinada de las piezas realizando sólo movimientos permitidos. Esta práctica trata de dar solución al juego formulándolo como un problema de búsqueda. Se implementan distintos algoritmos de búsqueda, ciega e informada, se evalúan y se extraen las conclusiones pertinentes.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
<b>2. Definición formal</b>	<b>4</b>
<b>3. Análisis comparativo de métodos de búsqueda ciega</b>	<b>5</b>
3.1. Tamaño del espacio de estados . . . . .	5
3.2. Factor de ramificación . . . . .	6
3.3. Completitud . . . . .	6
3.4. “Optimalidad” . . . . .	7
3.5. Conclusiones . . . . .	7
<b>4. Heurísticas</b>	<b>8</b>
4.1. Heurística Fichas mal colocadas. . . . .	8
4.2. Heurística Manhattan. . . . .	9

## 1. Introducción

El 15-puzzle es un juego inventado por Sam Loyd, uno de los más grandes creadores de acertijos que han existido. En 1870 propuso un rompecabezas que causó verdadero furor en su época y ha mantenido su popularidad hasta nuestros días. La versión original consistía en una caja cuadrada que contenía quince piezas cuadradas, numeradas del 1 al 15, dispuestas como se ve en la figura 1. La casilla inferior derecha está vacía, y si los números se leen de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo entonces están ordenados en forma creciente, excepto por el 15 y el 14 que aparecen transpuestos.



**Figura 1:** Publicado en *Sam Loyd's Cyclopedia of 5000 Puzzles, Tricks and Conundrums with Answers*

Un movimiento válido consiste en deslizar uno de los números horizontal o verticalmente adyacentes a la casilla vacía hasta ocuparla, dejando vacante la casilla ocupada originalmente por la pieza movida. En la posición inicial hay sólo dos movimientos válidos, que consisten en mover el 12 o el 14 hasta ocupar la casilla inferior derecha.

Sam Loyd ofreció pagar mil dólares a quien lograra, mediante alguna secuencia de movimientos válidos, intercambiar el 14 y el 15 dejando a los demás números en su posición inicial. En otras palabras, si llamamos posición normal a la que tiene los quince números ordenados en forma creciente y con la casilla inferior derecha vacía, la propuesta de Sam Loyd fue hallar una secuencia de movimientos válidos que transformara la posición de la Figura 1 en la posición normal. En realidad, no existe solución al problema así planteado y nadie pudo cobrar el premio ofrecido por Sam Loyd.

El problema que nos ocupa, el 8-puzzle, es la versión simplificada del juego de Loyd para esta práctica. El objetivo del juego, formulado como un problema de búsqueda, es obtener la secuencia de movimientos que se debe realizar para, partiendo de un estado inicial dado, llegar hasta el estado solución.

## 2. Definición formal

La descripción de un estado especifica la localización de cada una de las 8 fichas y el espacio en blanco, en cada uno de los nueve cuadrados.

- Estado inicial: cualquier estado puede ser un estado inicial. En nuestro problema la colocación de partida de las distintas fichas.
- Estado meta: estado o estados que especifican una configuración determinada que hay que alcanzar. En la figura 2 se muestra un ejemplo de ambas.

7	2	4
5		6
8	3	1

1	2	3
4	5	6
7	8	

**Figura 2:** Ejemplo de estados inicial y final para el problema del 8 puzzle

- Representación de estados: Representaremos cada configuración del tablero por una matriz cuadrada 3x3 de números enteros entre 0 (casilla vacía) y 8. Para el ejemplo de estado inicial de la figura 2, la matriz sería la siguiente:

$$\begin{aligned}
 A(1,1) &= 7 & A(1,2) &= 2 & A(1,3) &= 4 \\
 A(2,1) &= 5 & A(2,2) &= 0 & A(2,3) &= 6 \\
 A(3,1) &= 8 & A(3,2) &= 3 & A(3,3) &= 1
 \end{aligned}$$

Así pues, una pieza  $x$  se localiza por su posición  $(i,j)$ , es decir,  $i$ -ésima fila y  $j$ -ésima columna en la cuadrícula, con  $i, j \in 1, 2, 3$ .

- Conjunto de operadores y restricciones: Una forma de representar movimientos legales en este problema es definiendo reglas que transformen la matriz 3x3 que representa un estado en otra matriz de 3x3. De esta forma, los operadores permitidos que generan transiciones en el espacio de estados aparecen en la tabla 1:

**Tabla 1:** Operadores permitidos y restricciones

Operador	Precondición	Resultado	Comentario
R1	$A(i,j) = 0, i > 1$	$A'(i-1,j) = 0; A'(i,j) = A(i-1,j)$	Mover hueco hacia arriba
R2	$A(i,j) = 0, j < 3$	$A'(i,j+1) = 0; A'(i,j) = A(i,j+1)$	Mover hueco a la derecha
R3	$A(i,j) = 0, j > 1$	$A'(i,j-1) = 0; A'(i,j) = A(i,j-1)$	Mover hueco a la izquierda
R4	$A(i,j) = 0, i < 3$	$A'(i+1,j) = 0; A'(i,j) = A(i+1,j)$	Mover hueco hacia abajo

En la tabla la matriz  $A$  representa el estado previo y  $A'$  el estado sucesor.

- Prueba de meta: comprueba si el estado coincide con la configuración objetivo.
- Función de coste: el coste de cada una de las operaciones es uniforme e igual a uno. El coste del camino será la suma de los costes de las operaciones aplicadas hasta alcanzar la solución.

### 3. Análisis comparativo de métodos de búsqueda ciega

En este apartado se analizará el espacio de estados del problema con el fin de decidir el tipo de búsqueda ciega más conveniente: preferente en anchura o preferente en profundidad.

#### 3.1. Tamaño del espacio de estados

Un estado o configuración del 8-puzzle se puede caracterizar como una permutación del conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \square\}$ . Por lo tanto, el número de diferentes ordenaciones de 9 elementos

sin repetición son, precisamente, todas sus permutaciones:  $9! = 362,880$ , es decir, el número de estados posibles.

Autores como Storey[1] y Johnson[2] con sendos artículos aparecidos en 1879 en el *American Journal of Mathematics*, han corregido esta cifra a la mitad, es decir, el tamaño del espacio de estados sería de  $9!/2 = 181,440$ . Por debajo subyace una teoría matemática respecto al concepto de “paridad” de las permutaciones, que escapa las pretensiones de este texto. La idea básica es que el espacio de estados se dividiría en dos clases de equivalencia: si el estado de partida y el estado destino se encuentran en la misma clase el problema tiene solución; sin embargo no es posible “saltar” de un estado a otro si se encuentran en clases distintas. Entonces el grafo de búsqueda está compuesto en realidad por dos subgrafos no conexos entre sí<sup>1</sup>.

Este hecho se ha demostrado también empíricamente en un artículo de Alexander Reinefeld[3]. A partir de una meta única (la representada en la Figura 2), se generaron todas las combinaciones posibles de las fichas utilizando movimientos válidos. Cada una de ellas constituía un estado inicial de un nuevo problema<sup>2</sup>. Se resolvieron el conjunto de problemas (todos con la misma meta) en el menor número de movimientos posible (solución óptima). Así, el experimento demostró que el número de configuraciones posibles o estados distintos logrados era ciertamente de  $9!/2$  y no  $9!$  como pudiera parecer en un principio. Además, se constató que la longitud del camino solución más largo era de 31 movimientos (21,97 de media). La Figura 3 muestra la distribución de longitudes de caminos de las soluciones óptimas para todas las configuraciones de fichas.

### 3.2. Factor de ramificación

Otro aspecto que influye en la selección de un algoritmo de búsqueda es el factor de ramificación medio. En cada configuración existirán dos, tres o cuatro posibilidades de movimiento dependiendo del lugar en el cual esté situada la pieza blanca (figuras 4a, 4b y 4c). Si suponemos que las posibles posiciones de esta pieza son equiprobables el factor de ramificación en el grafo del espacio de estados es:

$$b = \frac{\overbrace{4 \times 2}^{\text{esquina}} + \overbrace{4 \times 3}^{\text{lado}} + \overbrace{1 \times 4}^{\text{centro}}}{9} = 2,66 \quad (1)$$

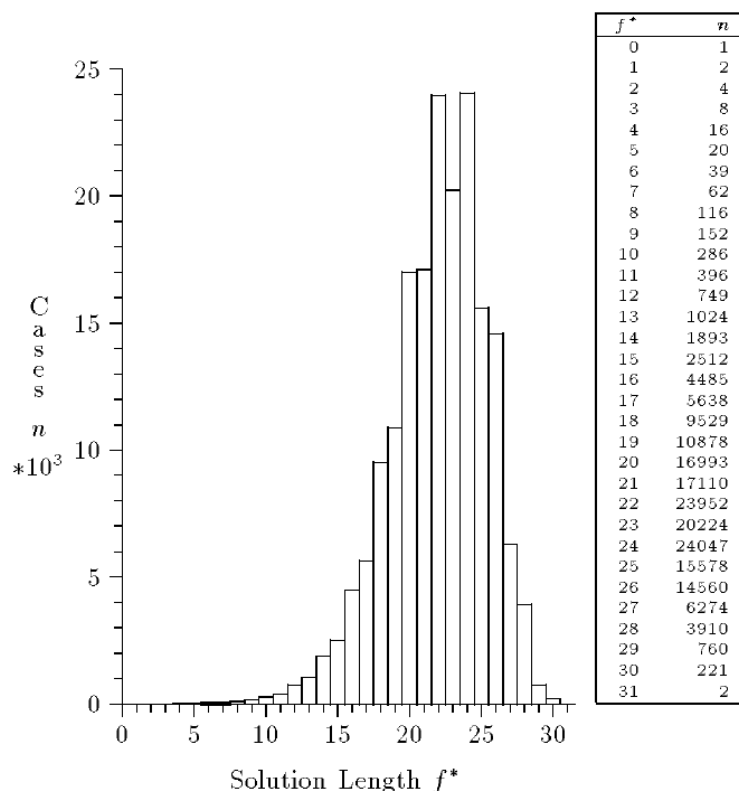
que resulta, simplemente, de calcular el número medio de descendientes desde cada una de las posibles localizaciones del blanco. Esto significa que una búsqueda exhaustiva a profundidad 22 (la media de pasos utilizando los datos de la tabla de la figura 3) generaría/almacenaría alrededor de  $3^{22} \approx 3,1 \times 10^{10}$  estados. Un algoritmo de búsqueda preferente en profundidad requeriría muchos menos espacio, en concreto  $3 \times 31$ , aunque más tiempo  $3^{31}$ .

### 3.3. Completitud

Como hemos mencionado antes, el espacio de estados del problema 8 puzzle posee una característica especial: tanto el estado inicial como el estado meta tienen que pertenecer al mismo subgrafo para poder encontrar una solución. Suponiendo que dicha restricción ya se cumple, y por tanto, existe una o varias soluciones en el espacio de estados, es necesario un algoritmo capaz

<sup>1</sup>Para experimentar con esta teoría jugando al 8 puzzle en <http://www.brian-borowski.com/Puzzle/> definir como estado de partida 123456870 y estado meta 123456780.

<sup>2</sup>Obsérvese que así, estado inicial y estado meta pertenecerían a la misma clase de equivalencia, y por tanto, al mismo subgrafo y de esta forma existiría un camino en el espacio de estados que los une.



**Figura 3:** Distribución de longitudes de camino óptimas  $f^*$

de encontrarla, es decir, una estrategia de búsqueda completa. Sólo la búsqueda preferente por anchura es, por sí misma, completa. La búsqueda preferente por profundidad encontraría la solución considerando un espacio de estados finito, o lo que es lo mismo, eliminando durante el proceso de búsqueda la posibilidad de realizar bucles o visitar estados repetidos.

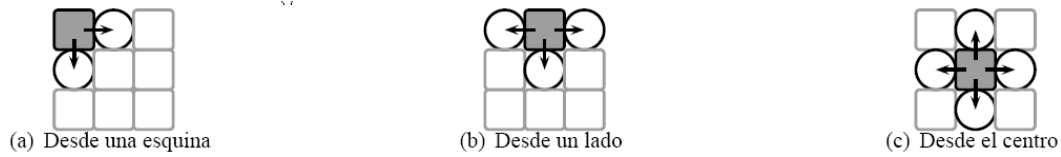
### 3.4. “Optimalidad”

<sup>3</sup> Otro aspecto que debemos entrar a juzgar a la hora de seleccionar un algoritmo de búsqueda ciega es determinar la necesidad de encontrar o no soluciones óptimas al problema. En lo que respecta al 8 puzzle, el objetivo sí es encontrar una secuencia mínima de movimientos. Además, sabemos que el coste de aplicar un operador—o efectuar una transición válida en el espacio de estados del problema—es siempre constante e igual a 1. Por tanto, la estrategia que nos garantiza encontrar la solución óptima será el algoritmo en anchura.

### 3.5. Conclusiones

A la vista del análisis previo sólo el algoritmo en anchura, con un consumo de recursos ajustado, garantiza encontrar soluciones en el menor número de movimientos.

<sup>3</sup>No existe una traducción directa del término inglés *optimality*.



**Figura 4:** Posibles desplazamientos del espacio en el 8-puzzle

## 4. Heurísticas

### 4.1. Heurística Fichas mal colocadas.

Número de casillas mal colocadas. Esta función puede considerarse un límite inferior del coste óptimo ya que como mínimo tendremos que desplazar las fichas mal colocadas hasta su posición original, y en el mejor caso estarán desplazadas una posición de la meta.

**Expresión matemática.** Sean  $p_{i,j}$  la ficha que ocupa la fila  $i$ , columna  $j$  de la matriz  $P$  que representa el estado actual  $n$  y  $q_{k,s}$  la misma ficha en la matriz  $Q$  que representa al estado meta. Entonces la heurística “Fichas mal colocadas” para una configuración dada del 8-puzzle se define como:

$$h_1(n) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 S_{i,j} \quad (2)$$

donde  $i, j$  no es la posición correspondiente al hueco,  $k, s$  y  $S_{i,j}$  se define como:

$$S_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } (p_{i,j} \neq q_{k,s}) \text{ y } p_{i,j} \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3)$$

Nótese que la ficha blanca no se incluye.

**Idoneidad.** Esta heurística se obtiene relajando restricciones del problema original suponiendo que se puede mover una pieza de A a su posición destino en “un solo movimiento”. Por tanto, la función de coste en este problema relajado es el número de piezas que se encuentran “descolocadas”. Dicha función de coste se utiliza como heurística admisible en el problema original.

Esta heurística tiene en cuenta, en esencia, el número mínimo de movimientos necesarios para solucionar el problema, que es igual a contar cuántas piezas están fuera de su posición habitual. Por tanto, simplifica el problema original al máximo.

**Demostración de no sobrestimación.** Dado que hemos generado la heurística relajando restricciones del problema original (en concreto la posibilidad de desplazar las fichas en un sólo movimiento a su posición destino), tenemos la seguridad de que la heurística no sobreestimaré. Parece razonable que impidiendo a una ficha desplazarse más de una posición en cada movimiento siempre y cuando exista un espacio vacío contiguo, el número de movimientos necesarios para colocarla, y por extensión la totalidad de las piezas, se incrementará notablemente respecto al problema relajado. Es decir,



<sup>1</sup> 4	<sup>1</sup> 1	<sup>1</sup> 2	
<sup>1</sup> 7		<sup>1</sup> 3	
<sup>1</sup> 8	<sup>1</sup> 5	<sup>1</sup> 6	

$$h_1(n) = 8$$

$$\text{Coste óptimo} = 8$$
**Figura 5:** Ejemplo de aplicación de heurística Mal Colocadas

$$\forall n, h_1(n) \leq h^*(n)$$

donde  $h^*(n)$  es la función que devuelve el coste óptimo a la meta.

**Aparición de mínimos locales.** Un ejemplo de aplicación aparece en la Figura 5 donde podemos ver que el número de movimientos necesarios para solucionar el problema coincide con el valor de la heurística (que aparece reflejado en la esquina superior izquierda de cada ficha). En este caso, la heurística no generará mínimos locales, por cuanto el valor calculado ya representa el mínimo número de movimientos necesarios para obtener la solución.

#### 4.2. Heurística Manhattan.

Esta heurística se define como la suma de las distancias de Manhattan de todas las fichas que forman un estado concreto del tablero. Es decir, la distancia de cada ficha a su posición original sumando filas y columnas. Esta función puede considerarse un límite inferior del coste óptimo ya que aunque tendremos que desplazar las fichas mal colocadas hasta su posición original, en realidad tendremos que realizar más movimientos.

**Expresión matemática.** Sean  $p_{i,j}$  la ficha que ocupa la fila  $i$ , columna  $j$  de la matriz  $P$  que representa el estado actual  $n$  y  $q_{k,s}$  la misma ficha en la matriz  $Q$  que representa al estado meta. Entonces la heurística “distancia Manhattan” para una configuración dada del 8-puzzle se define como:

$$h_2(n) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{s=1}^3 d(p_{i,j}, q_{k,s}) \quad (4)$$

donde  $d(p_{i,j}, q_{k,s})$  se define como:

$$d(p_{i,j}, q_{k,s}) = \begin{cases} 0 & \text{si } (p_{i,j} \neq q_{k,s}) \text{ ó } p_{i,j} = 0 \\ |(i-j)| + |(k-s)| & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5)$$

Nótese que no se computa ninguna distancia para la ficha blanca.

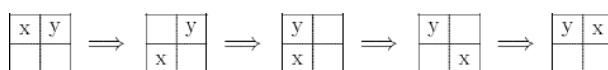
**Idoneidad.** Esta heurística se obtiene relajando restricciones del problema original suponiendo que se puede mover una pieza de A a B, si A es adyacente a B. La función de coste en este problema relajado es la suma de movimientos que restan a cada ficha de A para alcanzar la posición destino en B. Dicha función de coste se utiliza como heurística admisible en el problema original.

**Demostración de no sobreestimación.** Dado que hemos generado la heurística relajando restricciones del problema original (en concreto la posibilidad de desplazar fichas aun cuando no haya un espacio adyacente), tenemos la seguridad de que la heurística no sobreestimaré. Parece razonable que impidiendo a una ficha desplazarse si no hay un espacio vacío contiguo el número de movimientos necesarios para colocar la totalidad de las piezas se incrementará respecto al problema relajado. Es decir,

$$\forall n, h_2(n) \leq h^*(n)$$

donde  $h^*(n)$  es la función que devuelve el coste óptimo a la meta.

**Aparición de mínimos locales.** Un espacio de estados contiene un mínimo local si la heurística proporciona un valor menor (mejor) para un estado que para otro que se encuentra en realidad más cerca de la meta. Esta situación ocurre cuando existen piezas ya colocadas en su situación final y el resto están intercambiadas en su fila (o columna) destino. Supongamos que ocurre con dos piezas: claramente el intercambio no podría hacerse en sólo dos movimientos, sino que como mínimo son necesarios 4. Para ello una de las piezas tiene que dejar su posición, para que la otra se mueva a su posición destino. Pero todavía queda una distancia mínima de 2 para que la primera se coloque en su posición final. La figura 6 ilustra esta idea.

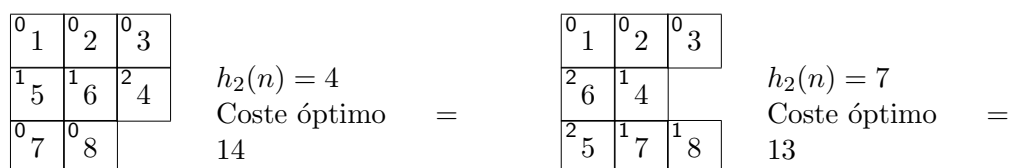


**Figura 6:** Fichas  $x$  e  $y$  e intercambio sus posiciones

Véase por ejemplo las configuraciones de la Figura 7. Los números que aparecen en la esquina superior derecha en cada pieza indican el valor de heurística Manhattan. En el primer caso se obtiene un valor de heurística de 4 siendo el coste óptimo de solución 14. En el segundo caso, se obtiene un valor de 7 en la heurística (por tanto, peor estado que el previo) pero el coste de alcanzar la solución se reduce en una unidad a 13.

## Referencias

- [1] Storey, W.E. Notes on the 15 puzzle. I. En *American Journal of Mathematics*, vol. 2 (4), pp. 399–404, 1879.
- [2] Johnson, W. W. Notes on the 15 Puzzle. I. En *American Journal of Mathematics*, vol. 2 (4), pp. 397–399, 1879.
- [3] A. Reinefeld. Complete Solution of the Eight-Puzzle and the Benefit of Node Ordering in IDA\* En *International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pp. 248–253, 1993. <http://citeseer.ist.psu.edu/article/reinefeld93complete.html>



**Figura 7:** Ejemplo de aplicación de heurística Manhattan y aparición de mínimo local

- [4] V. Moret, A. Alonso, M. Cabrero, B. Guijarro, E. Mosqueira. *Fundamentos de Inteligencia Artificial (2ª Ed)*. Servicio de Publicaciones, UDC, 2000.
- [5] N. Nillson. *Inteligencia artificial: una nueva síntesis*. McGraw-Hill, 2001.
- [6] S. Russell, P. Norvig. *Inteligencia Artificial: Un enfoque moderno*. Prentice-Hall, 2004.