Introducción al Análisis Numérico. Errores

María González Taboada

Departamento de Matemáticas

21 de febrero de 2007

Esquema:

1. Estudio matemático de un problema real
2. Análisis numérico y métodos constructivos
3. Tipos de problemas en análisis numérico y errores

Estudio matemático de un problema real

- **Modelado matemático**:

$$\text{Problema real} \quad \Longrightarrow \quad \text{Ecuaciones}$$

Ejemplo: (Movimiento de una partícula)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'' & = & f(t, x, x') \\ x(0) & = & x_0 \\ x'(0) & = & v_0 \end{array} \right.$$

Etapas para resolver un problema real

1. Establecer un modelo matemático.
2. Estudio teórico del modelo:
   existencia, unicidad, propiedades de la solución.
3. Cálculo de la solución:
   - En algunos casos sencillos, es posible obtener la solución exacta o *analítica*.
   - En la mayoría de los casos, solo es posible obtener una aproximación de la solución.
4. Interpretación o visualización de la solución.

Cálculo de las aproximaciones

Para calcular las aproximaciones se usan métodos numéricos o constructivos.

- Estudio del error.
- Implementación de los métodos en el ordenador:
  - Lenguajes de programación (Fortran, C++).
  - Sistemas multifuncionales (Matlab, Maple).

Se obtiene un conjunto de números, denominado *solución numérica*, que hay que interpretar.

Ejemplo (circuito eléctrico)

- Intensidad eléctrica:

$$i(t) = 2{,}55 e^{-0{,}25t} \sin(2\pi t)\,.$$

- Problema: calcular t tal que $i(t) = 2$, equiv.,

$$f(t) = i(t) - 2 = 2{,}55 e^{-0{,}25t} \sin(2\pi t) - 2 = 0\,.$$

- Método de Newton–Raphson:

$$\begin{cases} t_0 = 0{,}5 \\ t_{k+1} = t_k - \dfrac{f(t_k)}{f'(t_k)}\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Ejemplo (circuito eléctrico)

- El límite de esta sucesión es el valor t^* tal que $f(t^*) = 0$.
- El método de Newton-Raphson construye la sucesión de números reales:

$$
\begin{aligned}
t_1 &= 0{,}358552018 \\
t_2 &= 0{,}338916275 \\
t_3 &= 0{,}337305112 \\
t_4 &= 0{,}337293740 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

- Como $f(t_4) = -3{,}8145 \times 10^{-6}$, tomamos el valor t_4 como aproximación de una de las soluciones del problema.

Análisis numérico y métodos constructivos

- **Análisis numérico**:
  Teoría de los métodos constructivos en el análisis matemático.

- **Método constructivo**:
  Procedimiento que permite obtener la solución de un problema con una precisión determinada en un número finitos de pasos.

Ejemplo (método de Newton–Raphson)

- Para obtener α tal que $f(\alpha) = 0$, se hace lo siguiente:
  1. Se toma una aproximación inicial, x_0.
  2. Para $k = 0, 1, 2, \ldots$,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

  si $f'(x_k) \neq 0$.

Ejemplo (método de Newton–Raphson)

- Para obtener α tal que $f(\alpha) = 0$, se hace lo siguiente:
  1. Se toma una aproximación inicial, x_0.
  2. Para $k = 0, 1, 2, \ldots$,

     $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

     si $f'(x_k) \neq 0$.

- Cuestiones de las que se ocupa el análisis numérico:
  - ¿Bajo qué condiciones $(x_k)_k \to \alpha$?
  - ¿En qué paso tendremos una aproximación razonable?
  - Si nos detenemos en el paso k, ¿cuál es el error cometido?

Tipos de problemas en análisis numérico

- **Problemas de dimensión finita**:

  En el planteamiento del problema interviene un conjunto finito de números.

- **Problemas de dimensión infinita:**

  En el planteamiento del problema interviene un conjunto infinito de números.

Ejemplos de problemas de dimensión finita

1. Resolución de un sistema de n ecuaciones lineales y n incógnitas.
   - Datos: matriz de coeficientes y vector del segundo miembro; en total, $n^2 + n$ números.
   - Solución: vector de n componentes, es decir, n números.
2. Cálculo de las raíces de un polinomio de grado n.
   - Datos: coeficientes del polinomio, $n + 1$ números.
   - Solución: las n raíces del polinomio, es decir, n números.

Ejemplos de problemas de dimensión infinita

1. Los problemas en los que intervienen funciones definidas en conjuntos infinitos de números.
2. Resolución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

   - Datos: los números x_0 e y_0, y la función f.
   - Solución: la función y.

Resolución de un problema de dimensión infinita

- Para resolver numéricamente un problema de dimensión infinita, el problema se aproxima por uno de dimensión finita. Este proceso se llama discretización y lleva asociado un error.

- El error de discretización mide la diferencia entre la solución del problema original y la solución del problema de dimensión finita que lo aproxima.

Resolución de un problema de dimensión finita

- **Métodos directos**:
  - Permiten calcular la solución del problema en un número finito de pasos, conocido *a priori*.
  - En la práctica, se cometen errores de redondeo, debido al empleo de sistemas de cálculo que usan aritmética finita.

- **Métodos iterativos:**
  - Construyen una sucesión diseñada para converger a la solución exacta del problema.
  - En la práctica, además de los errores de redondeo, se produce un error de truncamiento, al tomar un término de la sucesión como aproximación de la solución.

Ejemplo (error de truncamiento)

- En el algoritmo de Newton-Raphson construido para resolver la ecuación

$$f(t) = 2{,}55e^{-0{,}25t}\sin(2\pi t) - 2 = 0$$

el error de truncamiento en el paso 4 es

$$|t_4 - t^*|$$

siendo t^* una solución exacta (y desconocida) de la ecuación.