COMPUTACIÓN NUMÉRICA

Boletín II. **Resolución numérica de sistemas de ecuaciones lineales**

1. Sea la matriz cuadrada A de orden n definida por:

$$a_{ij} = \min(i, j), \qquad 1 \leq i, j \leq n\,.$$

En el caso $n = 4$, obtén la factorización de Cholesky y resuelve el sistema. ¿Cómo calcularías mediante el método de Cholesky, resolviendo cuatro sistemas, la inversa de A en el caso $n = 4$?

2. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 20 & 18 & 16 \\ 3 & 18 & 19 & 21 \\ 4 & 16 & 21 & 33 \end{pmatrix}$$

   (a) Obtén la factorización de Cholesky.

   (b) Resuelve, utilizando la factorización anterior, el sistema $Ax = b$, con $b = (1, 6, 7, 7)^T$.

3. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula su condicionamiento en norma *infinito*.

4. Dada la matriz y el vector siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

obtén la solución del sistema $Ax = b$ mediante el método QR.

5. Sea el método iterativo lineal:

$$\begin{cases} x^0 \in I\!R^2 \\ x^{k+1} = Bx^k + c \end{cases} \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha & 4 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \qquad c \in I\!R^2\,.$$

   (a) Determina una condición, en función de α, equivalente a la convergencia.

   (b) Calcula $\|B\|_1$ y $\|B\|_\infty$. ¿Contradicen los resultados obtenidos la condición equivalente a la convergencia?

6. Sea el sistema $Ax = b$, con:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -5/6 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcula el determinante de A mediante el método de Cholesky.

   (b) Determina si los métodos de Jacobi, Gauss–Seidel y relajación con $\omega = 1/3$ son convergentes. Para los casos afirmativos, calcula x^2 a partir de $x^0 = (1, 1, 0)^T$.

7. Sean la matriz y el vector siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix},$$

   (a) Determina si A admite factorización de Cholesky.

   (b) Determina si el método de Gauss–Seidel es convergente.

   (c) Calcula $X^1 = (x^1, y^1, z^1)$ a partir de $X^0 = (1, 1, 1)^T$ mediante el método de Gauss–Seidel. Indica cuál es el sistema que se ha de resolver para obtener X^{k+1} a partir de X^k en cada etapa del método.

   (d) Repite los apartados b) y c) para el método de relajación con $\omega = 1.5$.

8. En las pruebas de selección de personal para contratar un informático especialista en computación numérica, la empresa SIMULIN S.A. plantea el siguiente problema: Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x + y & = 4 \\ x + 4y + z & = 0 \\ y + 4z + t & = -4 \\ z + 4t & = -1 \end{cases}$$

   (a) ¿Es convergente el método de Jacobi? Obtén $X^2 = (x^2, y^2, z^2, t^2)^T$ para $X^0 = (1, 1, 1, 1)^T$.

   (b) ¿Es convergente el método de relajación con $\omega = 1$? ¿Y con $\omega = 3.5$? Obtén con el método de relajación y $\omega = 1$ la iteración X^2 para $X^0 = (1, 1, 1, 1)^T$, sin calcular inversas de matrices.

9. Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 6x + y & = -6 \\ x + 5y - 3z & = 0 \\ -3y + 4z & = 0 \end{cases}$$

   (a) Obtén, si es posible, la factorización de Cholesky de la matriz y resuelve el sistema mediante dicha factorización.

   (b) Obtén el vector $v \in \mathbb{R}^3$ y la matriz de Householder $H(v)$ necesarios para realizar el primer paso de la factorización QR.

   (c) ¿Es convergente el método de Jacobi? Obtén $X^2 = (x^2, y^2, z^2)^T$ para $X^0 = (1, 1, 1)^T$.

   (d) ¿Es convergente el método de Gauss–Seidel? Obtén X^1 para $X^0 = (1, 1, 1)^T$ sin calcular inversas de matrices.

10. Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + 4z & = 1 \\ (a+3)y + 4z & = 0 \\ (a+3)x + 4y + (b+4)z & = 0 \end{cases}$$

(a) Indica para qué valores de a y b la matriz del sistema admite factorización de Cholesky, sin calcularla.

(b) De entre los posibles valores del apartado anterior, determina aquéllos para los que los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel son convergentes.

(c) Para $a = 1$ y $b = 20$, plantea el cálculo de las iteraciones de Jacobi y obtén X^1 para $X^0 = (1, 1, 1)^T$. ¿Es convergente $\{X^k\}$?

(d) ¿Es convergente el método de Gauss–Seidel para $a = 5$ y $b = 10$?

11. Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_3 & = 5 \\ 6x_1 + x_2 + 5x_3 & = 11 \\ -3x_1 - x_3 & = -4\,. \end{cases}$$

(a) Estudia la existencia de las factorizaciones de Cholesky y LU de la matriz de coeficientes, sin calcularlas.

(b) Resuelve el sistema mediante uno de los métodos del apartado (a).

12. Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 4x + 3y & = 9 \\ 3x + 4y - z & = 3 \\ -y + 4z & = 9 \end{cases}$$

(a) Escribe razonadamente las matrices de los métodos de Jacobi y de Gauss–Seidel.

(b) Estudia la convergencia de los métodos anteriores. Calcula $X^2 = (x^2, y^2, z^2)^T$ mediante el método de Jacobi partiendo de $X^0 = (1, 0, 0)^T$.

(c) Resuelve el sistema por el método de Cholesky, justificando su empleo.

(d) Razona si es convergente el siguiente método de relajación:

$$\begin{cases} X^{k+1} = \left(\frac{1}{3}D - E\right)^{-1}\left(-\frac{2}{3}D + F\right)X^k + \left(\frac{1}{3}D - E\right)^{-1} b \\ X^0 \in I\!R^3 \quad \text{arbitrario.} \end{cases}$$

13. Para resolver el sistema de ecuaciones lineales $AX = b$ se construye el siguiente método iterativo:

$$\begin{cases} X^{k+1} = BX^k + c \\ X^0 \in I\!R^3 \quad \text{arbitrario} \end{cases} \qquad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

(a) Razona si converge el método iterativo para cualquier $c \in I\!R^3$. En caso afirmativo, demuestra que, si llamamos X al vector $\lim_{k\to\infty} X^k$, entonces se verifica: $(I - B)X = c$.

(b) Estudia la convergencia del método de Jacobi para resolver el sistema de ecuaciones lineales $(I - B)X = c$. Calcula X^1, tomando $X^0 = (1, 1, 1)^T$ y $c = (1, 0, 0)^T$.

14. (**DIC99**) Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & -1 \\ m & 2m+3 & 0 \\ -1 & 0 & m+1 \end{pmatrix}.$$

(a) Para $m = 2$, justifica, sin calcularla, la existencia de la factorización de Cholesky de A.

(b) Para $m = 2$, resuelve mediante Cholesky el sistema $AX = b$, donde $b = (2 \quad 16 \quad 8)^T$.

(c) Para $m = 1$, plantea la resolución de $AX = b$, donde $b = (2 \quad 16 \quad 8)^T$ mediante el método de Gauss–Seidel, estudiando previamente la convergencia. Calcula X^2 partiendo de $X^0 = (0 \quad 0 \quad 0)^T$.

15. (**SEP00**) Se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

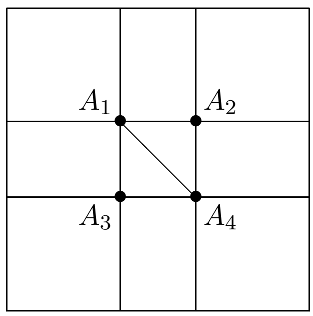
que verifica: $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$.

(a) Comprueba que $\rho(\mathcal{L}_1) = (\rho(J))^2$.

(b) Razona que los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel convergen o divergen simultáneamente.

16. (**DIC00**) Un robot se sitúa en el laberinto de la figura; está programado de forma que, cuando encuentre una encrucijada A_i, escoge aleatoriamente cualquiera de los caminos que parten de ella. La probabilidad x_i de que salga por el lado Sur del laberinto partiendo del punto A_i es la componente i-ésima del vector solución del sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 - x_4 = 0 \\ -x_1 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$$



(a) Razona si puede aplicarse el método de Cholesky al sistema anterior. En caso afirmativo, resuélvelo.

(b) Estudia la convergencia de los métodos de Jacobi y de Gauss–Seidel.

(c) Partiendo de $X^0 = (0, 0, 0, 0)^T$, realiza dos iteraciones de cada uno de los métodos anteriores para aproximar la probabilidad de que, partiendo de A_1 ó A_3, salga por el lado Sur.

17. (**SEP99**) Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} y + z = 2 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ x + y + \alpha z = 3 \end{cases}$$

con $\alpha \in I\!R$.

(a) Para $\alpha = 1$, resuelve el sistema anterior mediante el método de Householder.

(b) Si $\alpha = 0$, ¿pueden aplicarse los métodos de Gauss–Seidel y de relajación para resolver el sistema? Razona la respuesta.

(c) Para $\alpha = 0$, razona si es convergente el método de Jacobi para resolver el sistema que se obtiene al intercambiar la primera y tercera ecuaciones.

18. (**DIC02**) Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Estudia la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel. En los casos afirmativos, obtén X^2 a partir de $X^0 = (0,\, 0,\, 0)^T$.

(b) ¿Es posible encontrar una factorización LU de la matriz del sistema? Si la respuesta es afirmativa, resuelve el sistema por el método LU.

(c) ¿Es posible encontrar una factorización de Cholesky para la matriz del sistema? Si la respuesta es afirmativa, resuelve el sistema por el método de Cholesky.

19. (**SEP02**) Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) Obtén, si es posible, las factorizaciones LU y de Cholesky de la matriz del sistema.

(b) Resuelve el sistema mediante el método QR.

20. (**DIC01**) La temperatura de una barra metálica verifica en 5 de sus puntos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3T_1 - T_2 = T_0 \\ -T_1 + 3T_2 - T_3 = 0 \\ -T_2 + 3T_3 = T_4 \end{cases}$$

Sabiendo que las temperaturas en los extremos de la barra son $T_0 = 100$ y $T_4 = 200$, aproxima las temperaturas en los otros puntos partiendo de $T^0 = (0,0,0)^T$ y calculando dos iteraciones mediante:

(a) el método de Gauss–Seidel, estudiando previamente la convergencia del mismo

(b) el método de relajación con $\omega = \frac{1}{3}$. Razona la convergencia a la solución del sistema.

21. (**SEP01**) Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y - 3z = -2 \\ 2x - 3y + 14z = 8\,. \end{cases}$$

(a) Resuelve el sistema mediante el método de Cholesky.

(b) Analiza la convergencia del método de Jacobi. Realiza dos iteraciones partiendo del vector $(0,0,1)^T$.

22. (**JUN03**) Para la resolución de un sistema de ecuaciones lineales construimos el siguiente algoritmo iterativo:

$$\begin{aligned} &X^0 \in I\!R^3 \qquad \text{dado} \\ &X^{k+1} = B\,X^k + c \end{aligned}$$

donde:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -0.6 & 0 \\ -0.6 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Analiza la convergencia del algoritmo construido. Calcula X^2 partiendo de $X^0 = (1,0,1)^T$.

(b) Supongamos que $B = J$, matriz de Jacobi del sistema de ecuaciones lineales $AX = b$ y que, además, $a_{ii} = 5$ $(i = 1,2,3)$.

i. Calcula los restantes coeficientes a_{ij} de la matriz A y el vector b.

ii. Calcula X^1, mediante el método de Gauss–Seidel, partiendo de $X^0 = (1,0,1)^T$, estudiando previamente su convergencia.

23. (**SEP03**)

(a) Sea el vector $a = (-3,0,0)^T$. Calcula la matriz de Householder $H(a - \|a\|_2\,(1,0,0)^T)$. Comprueba que dicha matriz es ortogonal y simétrica, y calcula su condicionamiento en norma inifinito.

(b) Resuelve mediante el método QR el sistema de ecuaciones lineales dado por:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

24. (**JUN04**) Sea el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Estudia la existencia de cada una de las factorizaciones de A siguientes, **sin calcular** aquellas que existan:

i. QR

ii. LU

iii. Cholesky

(b) Escribe razonadamente la matriz del método de relajación con $\omega = 1$, así como el vector del método.

(c) Si denotamos por B la matriz del método del apartado anterior, razona si se puede calcular su condicionamiento con alguna norma matricial. Analiza la convergencia del método.

25. (**SEP04**) Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

(a) Obtén la factorización de Cholesky de A, justificando su existencia.

(b) Consideremos ahora el sistema de ecuaciones lineales $LX = b$, donde L es la matriz triangular inferior obtenida en el apartado anterior y $b = (0, 2, 1)^T$. Analiza la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel.

(c) Para resolver el sistema $LX = b$, consideremos el método de relajación con $\omega = 0.5$. Escribe razonadamente la matriz del método y el vector del método.

(d) Si denotamos por B a la matriz del método de relajación con $\omega = 0.5$ obtenida en el apartado anterior, calcula $\|B\|_1$ y $\|B\|_\infty$. Analiza la convergencia de ese método y, en caso afirmativo, calcula X^1 a partir de $X^0 = (0, 0, 0)^T$.

26. (**JUN05**) Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + x_2 & = 0 \\ x_1 + 3x_2 & = -1 \\ -x_3 & = -1 \end{cases}$$

(a) Razona si la matriz A del sistema admite factorizaciones LU y de Cholesky; en caso afirmativo, calcúlalas.

(b) Razona si el método de Jacobi es convergente. Calcula la aproximación X^1 obtenida a partir de $X^0 = (1 \quad 1 \quad 0)^T$.

(c) Calcula la matriz $\mathcal{L}_1$ del método de Gauss–Seidel. Razona si dicho método es convergente. Calcula la aproximación X^1 obtenida a partir de $X^0 = (1 \quad 1 \quad 0)^T$.

27. (**DIC05**) Sea el sistema de ecuaciones lineales $AX = b$ y sea $A = CC^T$ la factorización de Cholesky de la matriz A. Se define el siguiente algoritmo iterativo:

Dado $X^0 \in I\!R^n$,

$$\begin{cases} Y^k & = X^k - C^t X^k \\ CX^{k+1} & = CY^k + b \end{cases}$$

(a) Escribe el algoritmo en forma clásica: $X^{k+1} = BX^k + v$.

(b) Suponiendo que $\{X^k\}$ converge, prueba que converge a la solución del sistema de ecuaciones. ¿A dónde converge $\{Y^k\}$ en este caso?

(c) Calcula X^1 a partir de $X^0 = (1, -1, 0)^T$, aplicando el método anterior al sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 14 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

28. (**JUN06**) Considera el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ dado por:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

cuya solución exacta es $(2,\ 0,\ 1)^T$.

(a) ¿Es posible factorizar la matriz del sistema en la forma LU? Justifica tu respuesta y, en caso afirmativo, calcula las matrices L y U.

(b) Determina si los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel convergen a la solución del sistema. Estudia la convergencia del método de relajación con $\omega = 0.5$. ¿Es convergente el método de relajación con $\omega = 2$? Justifica tu respuesta.

(c) Calcula dos iteraciones del método de Jacobi, partiendo de la aproximación inicial $x^{(0)} = (0,\, 0,\, 0)^T$. Calcula el error relativo en norma infinito que se comete al tomar $x^{(2)}$ como aproximación de la solución.

(d) Analiza la convergencia del método iterativo:

$$x^{(k+1)} = -(M + M^T)x^{(k)} + b\,,$$

donde:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

29. (**SEP06**) Consideramos el sistema de ecuaciones lineales dado por $AX = b$, donde A es una matriz simétrica con determinante distinto de cero.

(a) Prueba que las soluciones del sistema $AX = b$ son también soluciones del sistema $A^2X = Ab$, y viceversa.

(b) Sea el sistema de ecuaciones lineales dado por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

i. Razona la convergencia del método de relajación con parámetro $\omega = 0.5$ en el S.E.L. equivalente $A^2X = Ab$. Aproxima la solución mediante una iteración de dicho método, partiendo del vector inicial $X^0 = (1, 1, 0)^T$.

ii. Calcula la solución aplicando el método de Cholesky al sistema $A^2X = Ab$, razonando previamente la existencia de la factorización.

30. (**DIC06**) Sean la matriz y vectores siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Estudia la existencia de la factorización LU de la matriz A y, en caso de que exista, calcúlala.

(b) Plantea el método de Jacobi para resolver el sistema $Ux = b$, donde U es la matriz resultante de la factorización del apartado (a). Estudia la convergencia del método y calcula la primera iteración a partir de $x^{(0)}$.

(c) Plantea el método de Gauss–Seidel para resolver el sistema $Lx = b$, donde L es la matriz resultante de la factorización del apartado (a). Analiza la convergencia del método y calcula la primera iteración a partir de $x^{(0)}$.