COMPUTACIÓN NUMÉRICA

Boletín III. **Resolución numérica de ecuaciones no lineales**

1. Sea la ecuación $2^x = 3$.
   (a) Comprueba que tiene una única raíz real.
   (b) Aproxima la raíz de la ecuación utilizando el valor de x_5 obtenido mediante el método de *regula falsi* a partir del intervalo $[1, 2]$.

2. Justifica la existencia de una solución en $[1, 2]$ de la ecuación:
$$e^x + 2^{-x} + 2\cos x = 6.$$
   Calcula mediante dicotomía una aproximación con un error inferior a 10^{-5}.

3. Dos partículas α_1 y α_2 se mueven en el plano XY con trayectorias respectivas definidas por los valores positivos de x de la siguiente forma:
$$y_1(x) = x^2 - 1 \qquad\qquad y_2(x) = \sin x \quad .$$
   Se pretende aproximar el punto de corte $(c, y_1(c)) = (c, y_2(c))$ de las trayectorias.
   (a) Encuentra un intervalo de longitud unidad que contenga a c.
   (b) Estudia la convergencia del método de iteración funcional en dicho intervalo.
   (c) Acota el error cometido al aproximar c mediante x_4 en el apartado anterior partiendo de $x_0 = 1.5$.
   (d) Calcula el número de iteraciones necesario para aproximar c con un error inferior a 10^{-4}.

4. Se considera la ecuación: $\ln(1 + x)^x = 1 - 2x$.
   (a) Mediante el algoritmo de iteración funcional, construye una sucesión que partiendo de $x_0 \in [0, 1]$ converja a la raíz de la ecuación.
   (b) Partiendo de $x_0 = 0$, aproxima la raíz con un error inferior a 10^{-4}.

5. Sea $g : (0, +\infty) \longrightarrow I\!R$ la función definida por $g(x) = 4 - x + \ln x$.
   (a) Indica una función f cuyos ceros sean puntos fijos de g.
   (b) Garantiza la existencia de un único punto fijo de g en $I = [2, 3]$, y la convergencia del método de iteración funcional simple.
   (c) Dado $x_0 = e$, acota el error cometido al aproximar el punto fijo de g mediante x_n.

6. (a) Dado $c > 0$, aproxima $\sqrt{c}$ mediante el método de Newton–Raphson. Obtén condiciones sobre a y b para la convergencia global del método en $[a, b]$. Calcula tres iteraciones para aproximar $\sqrt{2}$ tomando $x_0 = 1$.
   (b) Realiza tres iteraciones para aproximar $3^{\frac{1}{3}}$ partiendo de $x_0 = 1$.

7. Aproxima la solución de $x^3 - x - 1 = 0$ en $[1.3, 1.4]$ mediante los métodos de:
   (a) dicotomía, con un error menor que 10^{-5}
   (b) *regula falsi*, con un test de error relativo menor que 0.001
   (c) iteración funcional, con un error inferior a 10^{-5} y $x_0 = 1.3$
   (d) Newton–Raphson, partiendo de $x_0 = 1$ y realizando tres iteraciones. ¿Converge el algoritmo en $[1, 2]$?

8. Aproximamos, mediante el método de iteración funcional, el punto fijo de $g(x) = \sqrt{3 + x}$.
   (a) Verifica las condiciones de convergencia global en $[0, \infty)$. Acota el error y aproxima el punto fijo con un error inferior a 10^{-4}, partiendo de $x_0 = 20$.
   (b) Halla x_2 y x_4, partiendo de $x_0 = 0$. Acota el error en cada caso.
   (c) Indica cómo se utiliza el método para aproximar el número:
   $$\beta = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \ldots}}}$$
   Halla el valor de β y verifica que se cumplen las estimaciones de error obtenidas para x_2 y x_4.

9. (**SEP01**) Sean las funciones f y g dadas por $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ y $g(x) = 2x^3 + x - 2$.
   (a) Estudia, para la ecuación $f(x) = 0$, la convergencia del método de Newton–Raphson en $[0, 3]$. Realiza dos iteraciones a partir de $x_0 = 1$.
   (b) Para la ecuación $g(x) = 0$, realiza dos iteraciones del algoritmo de *regula falsi* a partir de $\{a_0 = 0, b_0 = 1\}$. ¿Converge la sucesión constuida?

10. Sea $h(x) = \dfrac{1}{2} - \sqrt{1 - x}, \quad x \in I = [0, 15/16]$.
   (a) Demuestra que $h(x) = 0$ tiene una raíz separada en I.
   (b) Dada $\ell(x) = x - \dfrac{h(x)}{h'(15/16)}$, y utilizando $h'(0) \leq h'(x) \leq h'(15/16)$, comprueba que existe $k \in (0, 1)$ tal que $0 \leq \ell'(x) \leq k$.
   (c) Sabiendo que $\ell(I) \subset I$, estudia la convergencia global del método iterativo:
   $$x^{i+1} = x^i - \frac{h(x^i)}{h'(15/16)}\,.$$

11. Sea $f : (0, \infty) \longrightarrow I\!R$ definida por $f(x) = x^2 + 2x - 5 + \ln x$.
   (a) Demuestra que existe, a lo sumo, un valor $\alpha \in I\!R$ tal que $f(\alpha) = 0$.
   (b) Localiza un intervalo de la forma $[n, n+1]$, con n natural, que contenga a α.
   (c) Para aproximar α se plantea el algoritmo:
   $$\begin{cases} x_0 \in [n, n+1] \\ x_{k+1} = x_k - \beta f(x_k)\,, \quad k = 0, 1, \ldots \end{cases}$$
   Estudia la convergencia del algoritmo en dicho intervalo para $\beta = 1$ y $\beta = 0.2$. Para $\beta = 0.2$, ¿es convergente la sucesión generada a partir de $x_0 = 1.5$? Calcula x_1 y estima el error que se comete al aproximar α mediante x_2.

12. (**DIC99**) Observamos que más de la mitad de una esfera de pino de radio 10 cm se sumerge en el agua debido a su peso. La distancia $d > 0$ entre el polo sur de la esfera y la línea de flotación verifica la ecuación: $d^3 - 30d^2 + 2552 = 0$.

    (a) Separa en un intervalo de la forma $[a, a+1]$, $a \in Z$, la única raíz d de la ecuación que es solución del problema planteado.

    (b) Para aproximar d se utiliza el método del punto fijo o iteración funcional simple, iterando mediante:

    $$g(x) = \sqrt{\frac{x^3 + 2552}{30}}$$

    Razona si el punto fijo de g en $[a, a+1]$ verifica o no la ecuación. Justifica la convergencia del método hacia d en $[a, a+1]$. Calcula x_3 y estima el error que se comete al aproximar d por el valor de x_3, partiendo de $x_0 = a$.

13. (**SEP00**) Se desea aproximar el punto de abscisa $\alpha \in [-1, 0]$ en el que $f(x) = e^x$ y $g(x) = \lambda - x^2$ $(\lambda \in I\!R)$ tienen la misma pendiente.

    (a) Prueba que $e^x = -2x$ tiene una única raíz $\alpha \in [-1, 0]$.

    (b) A partir de $x_0 = 0$, aproxima α con un error inferior a 10^{-3} mediante el método de punto fijo (o iteración funcional simple), garantizando previamente la convergencia del método en $[-1, 0]$.

14. (**JUN01**) En 1225, Leonardo de Pisa estudió la siguiente ecuación:

    $$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0.$$

    Para aproximar su raíz α en $[0, 2]$, planteamos el siguiente método iterativo:

    $$\begin{cases} x_0 \in [0, 2] \\ x_{k+1} = g(x_k) \end{cases} \qquad \text{con} \qquad g(x) = \frac{20 + 10x - 2x^2 - x^3}{20}$$

    (a) Estudia la convergencia del algoritmo en $[0, 2]$.

    (b) A partir de $x_0 = 1$, calcula el número de iteraciones necesarias para aproximar la solución con un error absoluto inferior a 10^{-3}. Calcula las dos primeras iteraciones, y acota el error cometido. Justifica si la sucesión $\{x_k\}$ converge a alguna de las raíces de la ecuación.

15. (**DIC01**) Se sabe que la función $F(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - \ln x$ tiene un mínimo relativo, $x_{\min}$, en $(1, 3)$.

    (a) ¿Es posible aproximarlo utilizando un algoritmo de iteración funcional para $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$, $x \in [1, 3]$? Justifica tu respuesta. Si la respuesta anterior es afirmativa, aplica el método para aproximar $x_{\min}$ con un error menor que $\frac{1}{7}$ partiendo de $x_0 = 2$.

    (b) Utiliza el algoritmo de dicotomía, partiendo de $x_0 = 1$ y $x_1 = 3$, para aproximar $x_{\min}$ con un error menor que $\frac{1}{7}$.

16. (**SEP02**)

    (a) Demuestra que la ecuación $f(x) = x^4 - 4\,x^3 - 1 = 0$ tiene una única raíz, α, en el intervalo $[4, 5]$.

    (b) Plantea el método de Newton–Raphson y estudiar su convergencia en $[4, 5]$. Para $x_0 = 4$, obtén la aproximación x_1. ¿Es convergente el método para $x_0 = 6$? En caso afirmativo, indica el orden de convergencia.

(c) Determina si el algoritmo:

$$x_0 \in [4,5], \qquad x_{k+1} = 4 + \frac{1}{x_k^3}$$

es convergente a la raíz α. Calcula x_2 a partir de $x_0 = 4$ y acota $|x_2 - \alpha|$.

17. (**DIC02**) Para determinar las horas de tiempo de cálculo que invierte un ordenador en realizar cierta simulación numérica es preciso resolver la ecuación: $t\,(e^t + 1) = 1$. Para aproximar la solución,

    (a) Plantea el método de iteración funcional aplicado a la función $g(t) = (e^t + 1)^{-1}$. Estudia su convergencia en el intervalo $[0, 1]$. Con $t_0 = 0$, obtén el valor de t_2 y estima el error cometido al aproximar la solución con t_2. ¿Cuál es el orden de convergencia de la sucesión obtenida?

    (b) Plantea el método de Newton–Raphson para la ecuación $f(t) = t\,(e^t + 1) - 1$. Estudia su convergencia en el intervalo $[0, 1/2]$. Para $t_0 = 0$, obtén el valor de t_2. ¿Cuál es el orden del método?

18. (**JUN03**) Queremos aproximar las soluciones de la ecuación: $(5 - x)e^x = 5$.

    (a) Prueba que existe una única solución, α, en el intervalo $[1, 5]$. Aproxímala calculando x_3 mediante el método de *regula falsi*, partiendo de $x_0 = 1$ y $x_1 = 5$. Deja indicado, si fuera necesario, el último cálculo.

    (b) ¿Es posible aproximar α aplicando un método de iteración funcional simple sobre la función $g_1(x) = \ln\left(\dfrac{5 + xe^x}{5}\right)$ en $I = [1, 5]$? Justifica tu respuesta.

    (c) ¿Es posible aproximar α aplicando un método de iteración funcional simple sobre la función $g_2(x) = 5 - 5e^{-x}$ en $I = [1, 5]$? Justifica tu respuesta.

    (d) Sabiendo que $g_2(2) > 2$, ¿podemos aproximar α con el método de iteración funcional simple sobre g_2 en $I = [2, 5]$? Justifica tu respuesta.

19. (**DIC03**) Consideramos la ecuación: $xe^{-x} = e^{-3}$.

    (a) Comprueba que tiene exactamente dos soluciones en $\mathbb{R}$.

    (b) Describe un método de iteración funcional simple para aproximar la raíz en el intervalo $[0, 1]$. Tomando $x_0 = 0$, calcula x_2 con ese método y estima el error cometido.

    (c) Estudia la convergencia del método de Newton–Raphson en el intervalo $[0, 1]$.

    (d) Estudia la convergencia del método de Newton–Raphson en el intervalo $[2, 5]$. Calcula x_2 a partir de $x_0 = 2$.

20. (**JUN04**) Una empresa del sector informático se plantea invertir 100000 euros en un proyecto tecnológico a tres años, con la previsión de ingresar 10000 euros al final del primer año, 25000 al final del segundo y 94000 al final del tercero. La tasa interna de rendimiento de la inversión, $y \in [0, 1]$, es solución de la ecuación:

    $$\frac{10000}{(1+y)} + \frac{25000}{(1+y)^2} + \frac{94000}{(1+y)^3} = 100000\,.$$

    Para aproximar el valor de y se plantea el algoritmo de Newton:

    $$y_0 \in [0,1]\,, \quad y_{k+1} = y_k - \frac{10(1+y_k)^2 + 25(1+y_k) + 94 - 100(1+y_k)^3}{20(1+y_k) + 25 - 300(1+y_k)^2}\,.$$

    Estudia la convergencia del algoritmo a la tasa interna de rendimiento. En caso de convergencia, indica razonadamente el orden de convergencia. Deduce si existe una única tasa interna de rendimiento.

21. (**SEP04**) El tiempo de cálculo de dos algoritmos numéricos viene dado por $c_1(x) = e^x$ y $c_2(x) = 3x$, siendo $x \in [0,1]$ un parámetro común a ambos algoritmos.

   (a) Demuestra que existe un único parámetro, $x \in [0,1]$, para el cual ambos algoritmos conllevan el mismo tiempo de cálculo.

   (b) Determina cuáles de las siguientes funciones tienen un único punto fijo en $[0,1]$, que coincide con el valor del parámetro que iguala los tiempos de cálculo:

$$g_1(x) = e^{x/3}\,, \qquad g_2(x) = \frac{e^x - x}{2}\,, \qquad g_3(x) = \ln(3x)\,.$$

   (c) Estudia la convergencia global del método de iteración funcional en $[0,1]$ para las funciones anteriores. En los casos convergentes, obtén x_2 a partir de $x_0 = 0$ y estima el error de truncamiento.

   (d) Estudia la convergencia global del método de Newton–Raphson en $[0,1]$ para la función f, dada por $f(x) = c_1(x) - c_2(x)$. Calcula x_2 a partir de $x_0 = 0$.

22. (**DIC04**) Sea $A > 1$. Para aproximar $\alpha = 1/A$ se considera que α es raíz de la ecuación:

$$-A\,x^2 + (3A+1)\,x - 3 = 0\,.$$

   (a) Estudia la convergencia global del método de Newton–Raphson en $[0,1]$ y en $[-1,1]$. Para aproximar $\alpha = 1/6$, plantea la sucesión del método con $x_0 = 1/2$, obtén el valor de x_1 e indica si la sucesión (x_k) es convergente.

   (b) Estudia la convergencia a α de la sucesión:

$$x_{k+1} = \frac{3}{3A + 1 - x_k}\,, \quad x_0 \in [0,1]$$

23. (**JUN05**) Tras el análisis de inversiones de cierta operación empresarial, se deduce que el rendimiento de la inversión óptima es:

$$f(t) = \ln(1+t) - 3t + 1\,, \qquad t \geq 0$$

donde t es el tiempo en años. El banco que concede el crédito pretende estimar el instante o instantes τ en que el rendimiento de la inversión se anula.

   (a) Determina si la función anterior tiene algún cero real y, si fuera posible, cuántos ceros reales tiene.

   (b) Plantea un método de punto fijo que converja al instante τ.

   (c) Determina el número de iteraciones necesario para aproximar τ, partiendo de $t_0 = 0$, con un error inferior a $\varepsilon = 1/486$.

24. (**SEP05**) Cuando se compra un objeto que al contado vale P euros en n cuotas anuales de A euros cada una, la ecuación que debemos resolver para conocer la tasa de interés $i_* > 0$ es

$$A = P\frac{i_*(1+i_*)^n}{(1+i_*)^n - 1}\,.$$

Compramos un coche que al contado vale 20000 EUR pagando 4000 EUR al año durante 6 años.

   (a) ¿Es posible aproximar i_* aplicando el método de punto fijo a la función g, siendo

$$g(i) = \frac{(1+i)^6 - 1}{5(1+i)^6}\,,$$

   en el intervalo $[0,1]$? Justifica tu respuesta.

(b) Aproxima i_* realizando un paso de Newton–Raphson sobre la función f con

$$f(i) = g(i) - i\,, \qquad \forall i \in [0,1]$$

partiendo de $i_0 = 1$.

25. (**DIC05**) Para la función h dada por $h(x) = \dfrac{x-2}{e^{x-1}}$ se desea obtener la abscisa, $x = \alpha$, del punto en el que la recta tangente a la gráfica de h es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

(a) Demuestra que α es raíz de la ecuación $f(x) = e^{x-1} + x - 3 = 0$.

(b) Demuestra que α es raíz separada de la ecuación anterior en el intervalo $I = [0,2]$.

(c) Justifica la convergencia global del método de Newton–Raphson en I. Obtén una aproximación de α en I, realizando una iteración del método de Newton–Raphson para $f(x) = 0$ partiendo de $x_0 = 0$.

(d) Indica el orden de convergencia del método anterior, justificándolo.

(e) Estudia la convergencia del método de iteración funcional simple para aproximar α en el intervalo I mediante la función de iteración dada por $g(x) = 1 + \ln(3-x)$.

26. (**JUN06**) Se desea calcular el punto de corte α ($\alpha > 1$) de la bisectriz del primer cuadrante y la curva dada por $g(x) = x\ln(x^2+1)$.

(a) Demuestra que α es solución de la ecuación $f(x) = 0$, con $f(x) = \ln(x^2+1) - 1$.

(b) Para aproximar el valor de α, plantea un algoritmo de Newton–Raphson para f en el intervalo $[1,2]$, justificando previamente su convergencia, y calcula x_1 a partir de $x_0 = 1$.
Nota: Si lo necesitas, utiliza como valores de $\ln(2)$ y $\ln(5)$, respectivamente, las aproximaciones 0.7 y 1.6.

(c) Dada la función f del apartado (a), obtén la expresión del polinomio de Lagrange, mediante diferencias divididas, que interpola a f en los extremos del intervalo $[1,2]$. Utiliza la información que proporciona la tabla de diferencias divididas para hallar un valor aproximado de α.

27. (**SEP06**) Sea la ecuación $f(x) = x^3 - 6x + 1 = 0$.

(a) Comprueba que tiene una raíz separada en $[0,1/2]$ y otra raíz separada en $[2,3]$.

(b) Estudia la convergencia global del método de Newton–Raphson en $[0,1/2]$.
Calcula x_2 a partir de $x_0 = 0$. ¿Es convergente la sucesión x_k? En caso afirmativo, indica razonadamente el orden de convergencia del método.

(c) Estudia la convergencia del algoritmo de iteración funcional simple:

$$x_{k+1} = \frac{1+x_k^3}{6}, \qquad x_0 \in [0,1/2]\,.$$

Calcula x_2 a partir de $x_0 = 0$. ¿Es convergente la sucesión x_k? ¿Converge a la solución de $f(x) = 0$? En caso afirmativo, acota el error entre x_2 y la solución de $f(x) = 0$, y justifica cuál es el orden de convergencia del método.

(d) Estudia la convergencia global del algoritmo del apartado anterior en el intervalo $[2,3]$.

28. (**DIC06**) Sea $F \in \mathcal{C}^2([a,b])$ tal que $F(a) < 0$, $F(b) > 0$ y $0 < k_1 < F'(x) < k_2$, $\forall x \in [a,b]$, siendo k_1 y k_2 constantes.

(a) Prueba que F tiene una raíz separada en el intervalo $[a,b]$.

(b) Sabiendo que $F'' > 0$ en $[a,b]$, obtén una condición sobre k_1 para que el algoritmo de Newton sea convergente.

(c) Construimos la sucesión x_n dada por:

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b] \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

donde $g(x) = x + MF(x)$, con $M < 0$.

i. Prueba que los puntos fijos de la función g son raíces de la función F y recíprocamente.

ii. Demuestra que si $\frac{-1}{k_2} < M$, entonces g es creciente en $[a,b]$.

iii. Prueba que si se verifica la condición $\frac{-1}{k_2} < M$, el algoritmo es convergente.