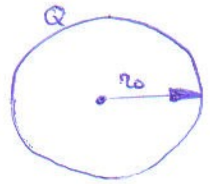
BOLETÍN 3

[CAMPO ELÉCTRICO: Ley de Gauss]

① Una corteza esférica delgada y uniformemente cargada tiene una carga total $Q = -87\,nC$ y un radio $r_0 = 55$ mm.

a) ¿Cuánto vale su densidad superficial de carga σ?



$$Q = \int_{DIST} dq = \int_{DIST} \sigma \cdot ds \underset{\sigma = CTE}{=} \sigma \cdot \int_{DIST} ds = \sigma \cdot S = \sigma \cdot 4\pi \cdot r_0^2$$

$$-87 \cdot 10^{-9} = \sigma \cdot 4 \cdot \pi \cdot (55 \cdot 10^{-3})^2$$

$$\sigma = \frac{-87 \cdot 10^{-9}}{4\pi\,(55 \cdot 10^{-3})^2} = -2{,}29 \cdot 10^{-6}\ C/m^2$$

b) Encontrar el valor del campo eléctrico a $r = 25, 50, 75$ y 100 mm:

Elegimos una sup. de Gauss para poder calcular $\oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds}$ tal que:

- $\vec{E} \parallel \vec{ds}$
- $\vec{E}$ CTE

Escogemos una esfera de radio r concéntrica a la anterior:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} \underset{\substack{\vec{E} \parallel \vec{ds} \\ \vec{E}\ CTE}}{=} E \cdot \int ds = E \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 := \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sum q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}$$

$$\begin{cases} \bullet \text{ Si } r < r_0 : \sum q = 0 \Rightarrow E = 0 \text{ (Sólo hay carga en la corteza)} \\ \bullet \text{ Si } r > R_0 : \sum q = Q = \sigma \cdot 4\pi r_0^2 \Rightarrow E = \dfrac{\sigma \cdot \cancel{4\pi} \cdot r_0^2}{\cancel{4\pi} \cdot r^2 \cdot \varepsilon_0} = \\ = \dfrac{r_0^2}{r^2} \cdot \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

Vemos que el campo eléctrico en la superficie de un conductor es:

$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, puesto que si $r = r_0 \Rightarrow \frac{r_0^2}{r^2} = 1$

Calculamos los casos propuestos:

$$\left.\begin{array}{ll} r = 25 & (r < r_0) \\ r = 50 & (r < r_0) \end{array}\right\} \sum q = 0 \Rightarrow E = 0$$

$r = 75$

$$E = \frac{55^2 \cdot \cancel{(10^{-3})^2}}{75^2 \cdot \cancel{(10^{-3})^2}} \cdot \frac{2{,}29 \cdot 10^{-6}}{\frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}} = 139\,200 = 1{,}392 \cdot 10^5 =$$

$$= 139{,}2 \text{ KN/C}$$

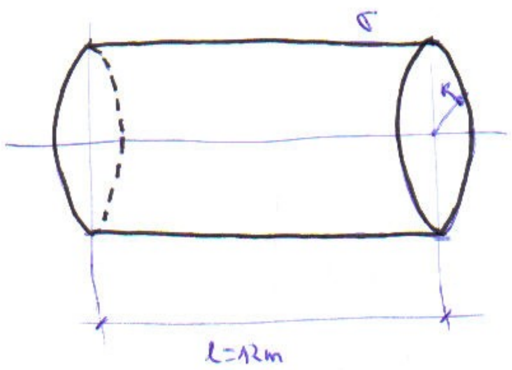
$r = 100$

$$E = \frac{55^2 \cdot \cancel{(10^{-3})^2}}{100^2 \cdot \cancel{(10^{-3})^2}} \cdot \frac{2{,}29 \cdot 10^{-6}}{\frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}} = 78\,300 = 7{,}83 \cdot 10^5 =$$

$$= 78{,}3 \text{ KN/C}$$

② Una capa cilíndrica de 12 m. de longitud y 6 cm. de radio posee una densidad de carga superficial uniforme $\sigma = 9\, nC/m^2$.

a) ¿Cuál es la carga sobre la corteza?



$$Q = \int_{DIST} dq = \int_{DIST} \sigma \cdot ds = \sigma \cdot \int ds = \sigma \cdot S \Big|_{\sigma = CTE}$$

$$Q = \sigma \cdot S = \sigma \cdot 2\pi \cdot R \cdot L =$$

$$= 9 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 10^{-2} \cdot 12 = 40{,}7 \cdot 10^{-9}\, C =$$

$$= 40{,}7\, nC$$

b) Determinar el campo eléctrico en $r = 2, 5{,}9, 6{,}1$ y 10 cm:

Escogemos como superf. de Gauss un cilindro concéntrico.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} := \frac{\sum q}{\varepsilon_0} \qquad E \cdot \cancel{2\pi} \cdot r \cdot \cancel{l} = \frac{\sigma \cdot \cancel{2\pi} \cdot R \cdot \cancel{l}}{\varepsilon_0}$$

Para $r < R$, $\sum q = 0$, y entonces $E = 0$.

Para $r > R$:

$$E = \frac{\sigma \cdot R}{\varepsilon_0 \cdot r}$$

$$\left.\begin{array}{ll} r = 2 & (r < R) \\ r = 5{,}9 & (r < R) \end{array}\right\} \sum q = 0 \implies E = 0$$

QueGrande.org

2

$r = 6{,}1$ cm.

$$E = \frac{\sigma \cdot R}{\varepsilon_0 \cdot r} = \frac{9\cdot 10^{-9}\cdot 6\cdot \cancel{10^{-2}}}{6{,}1\cdot \cancel{10^{-2}}\cdot \varepsilon_0} = 1001{,}2 \ \text{N/C}$$

$r = 10$ cm

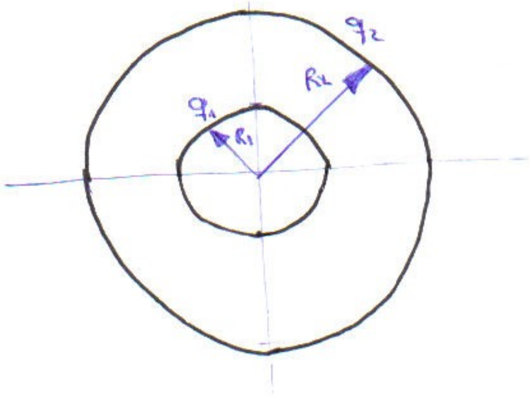
$$E = \frac{9\cdot 10^{-9}\cdot 6\cdot \cancel{10^{-2}}}{10\cdot \cancel{10^{-2}}\cdot \varepsilon_0} = 610{,}7 \ \text{N/C}$$

NOTA:

$$\oint_{\text{CILINDRO}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \underbrace{\int_{\text{TAPA 1}} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{\text{TAPA 2}} \vec{E}\cdot d\vec{S}}_{\substack{0 \\ \vec{E}\perp d\vec{S}}} + \int_{\text{SUPERF LAT}} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

(3) Una corteza esférica de radio R_1 posee una carga total q_1 uniformemente distribuida en su superficie. Una segunda corteza esférica mayor de radio R_2 concéntrica con la anterior posee una carga q_2 uniformemente distribuida en su superficie.

a) Usar la ley de Gauss para hallar el campo eléctrico en $r<R_1$, $R_1<r<R_2$, $r>R_2$:



$$E = \frac{\sum_i q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$ (Calculado por Gauss)

$r < R_1$:

$$\sum q = 0 \qquad E = 0$$

$R_1 < r < R_2$:

$$\sum q = q_1 \quad \text{(aún no actúa } q_2\text{)} \quad E = \frac{q_1}{4\pi \cdot \varepsilon_0 r^2}$$

$r > R_2$:

$$\sum q = q_1 + q_2 \qquad E = \frac{q_1 + q_2}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}$$

b) ¿Cuál deberá ser el cociente de las cargas q_1/q_2 para que el campo eléctrico sea 0 para $r > R_2$?

$$\underbrace{K}_{>0} \cdot \frac{(q_1 + q_2)}{\underbrace{R^2}_{>0}} = 0 \qquad q_1 + q_2 = 0$$

$$q_1 = -q_2$$

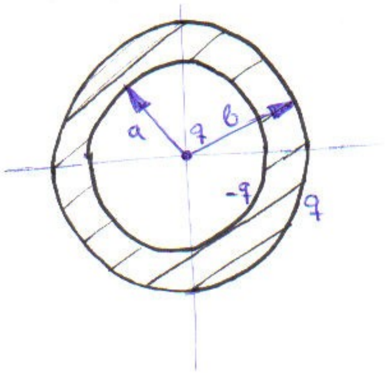
$$\frac{q_1}{q_2} = -1$$

(Deben ser cargas de signo contrario)

4) Una corteza conductora esférica con una carga neta cero tiene un radio interior a y un radio exterior b. Se coloca una carga puntual q en el centro de la cavidad.

a) Utilizar la ley de Gauss y las propiedades de los conductores en equilibrio para hallar el campo eléctrico en cada una de las regiones $r<a$, $a<r<b$ y $r>b$:

(Carga neta cero: q en el int. y $-q$ en el ext.)



$$E = \frac{\sum q}{4\pi \cdot r^2 \cdot \varepsilon_0} \quad \text{(Por Gauss)}$$

$r<a$: $\sum q = q \Rightarrow E = \dfrac{q}{4\pi \cdot r^2 \cdot \varepsilon_0}$

$a<r<b$: $\sum q = q + (-q) = 0 \Rightarrow E = 0$ (interior de un conductor)

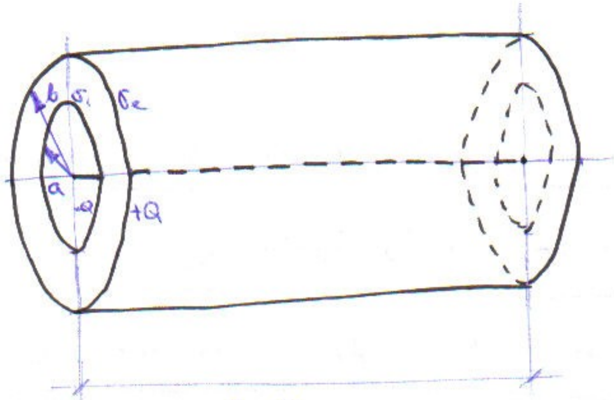
$r>b$: $\sum q = q + (-q) + q = q \Rightarrow E = \dfrac{q}{4\pi \cdot r^2 \cdot \varepsilon_0}$

b) Densidad de carga en la superf. int. y en la ext:

$$\sigma = \frac{Q}{S} \qquad \sigma_{int} = \frac{-q}{4\pi \cdot a^2} \qquad \sigma_{ext} = \frac{q}{4\pi \cdot b^2}$$

(5) Un alambre fino y recto de 12m de largo, posee una carga Q=-74nC distribuida uniformemente en su longitud y está rodeado coaxialmente por un tubo conductor neutro de la misma longitud y radio int. 6 mm y ext. de 9 mm.

a) Estimar las densidades superficiales de carga inducidas en las paredes interna y externa del tubo:



$l = 12m$

$$E = \frac{\sum_1 q}{2\pi r l \varepsilon_0} \quad \text{(Por Gauss)}$$

$r<a$:

$$E = \frac{Q}{2\pi r l \varepsilon_0}$$

$a<r<b$:

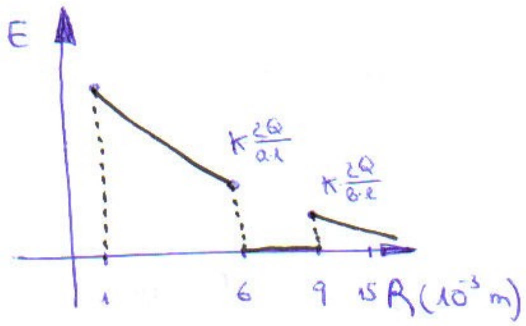
$\sum_1 q = 0$ (interior de un conductor)

$$\sigma_i = \frac{q_i}{S_i} = \frac{-Q}{2\pi a l} = \frac{74 \cdot 10^{-9}}{2\pi \cdot 6 \cdot 10^{-3} \cdot 12} = 163{,}58 \ nC/m^2$$

$$\sigma_e = \frac{q_e}{S_e} = \frac{Q}{2\pi b l} = \frac{-74 \cdot 10^{-9}}{2\pi \cdot 9 \cdot 10^{-3} \cdot 12} = -109{,}05 \ nC/m^2$$

b) Hacer una gráfica del campo E en puntos del plano bisector perpendicular frente a la distancia R al centro, desde R=1 mm hasta 15 mm:

$$E = \frac{Q}{2\pi r \cdot L \varepsilon_0} = K \cdot \frac{2Q}{R \cdot L}$$



⑥ Una esfera sólida no conductora de radio R posee una densidad volumétrica de carga inversamente proporcional a la distancia desde el centro: $\rho = \frac{B}{r}$ para $r \leq R$ y $\rho = 0$ para $r > R$, siendo B una constante.

a) Hallar la carga total sumando las cargas en cortezas de espesor dr y volumen $4\pi \cdot r^2 \cdot dr$:

$$Q = \int_{VOL} dq = \int_{DIST} \rho \cdot dv = \int_{r=0}^{R} \frac{B}{\cancel{r}} 4\pi \cdot r^{\cancel{2}} \cdot dr = 4\pi \cdot B \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = 2\pi \cdot B \cdot R^2$$

$dv = 4\pi r^2 \cdot dr$

$\rho = B/r$

b) Hallar el campo eléctrico E, tanto en el interior como en el exterior de la distribución de carga y representarlo en función r:

$$E=\frac{\sum q}{4\pi\cdot r^2} \quad \text{(Por Gauss)}$$

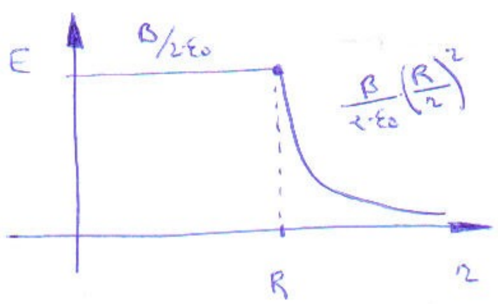
• $r<R$:

$$\sum q=\int_{m=0}^{r}\rho\cdot dv=\int_{m=0}^{r}\frac{B}{m}\,4\pi\cdot m^2\cdot dm=2\pi\cdot B\cdot r^2$$

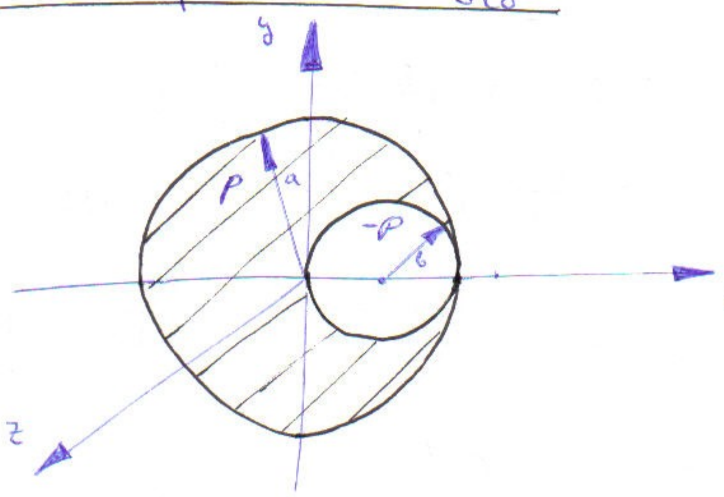
$$E=K\cdot\frac{2\pi\cdot B\cdot \cancel{r^2}}{\cancel{r^2}}=K\cdot 2\pi\cdot B$$

• $r<R$:

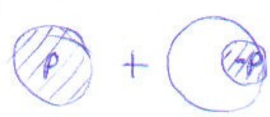
$$\sum q=Q \qquad E=K\cdot\frac{Q}{r^2}=K\cdot\frac{2\pi\cdot B\cdot R^2}{r^2}$$



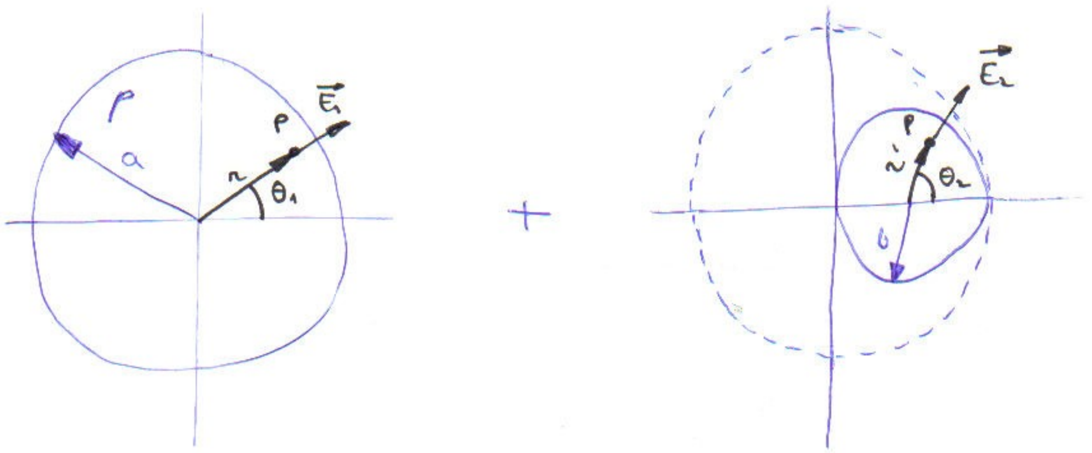
(7) Una esfera sólida no conductora de radio a con su centro en el origen tiene una cavidad esférica en el punto $x=b$, $y=0$, $z=0$, como se muestra en la figura. La esfera contiene una densidad de carga volumétrica uniforme ρ. Demostrar que el campo eléctrico en la cavidad es uniforme y viene dado por $E_x=\rho\frac{b}{3\cdot\varepsilon_0}$

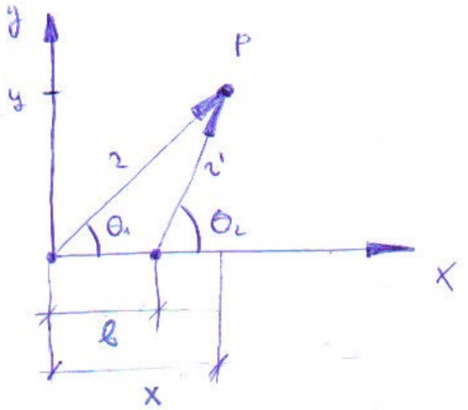


(Se debe hacer por superposición:



$$\vec{E}=\vec{E_1}+\vec{E_2}$$





$\vec{E_1}$ (radial por simetría):

$$E_1 = \frac{\sum_i q}{S \cdot \varepsilon_0} \Bigg|_{\rho = CTE} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot a^3}{4\pi \cdot a^2 \cdot \varepsilon_0} = \frac{\rho \cdot a}{3 \cdot \varepsilon_0}$$

$\vec{E_2}$ (Idem)

$$E_2 = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot b^3}{4\pi \cdot b^2 \cdot \varepsilon_0} = \frac{-\rho \cdot b}{3 \cdot \varepsilon_0}$$

$$\vec{E_1} = E_1 \cdot (\cos\theta_1 \hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta_1 \hat{\jmath}) = E_1 \cdot \left(\frac{x}{r}\hat{\imath} + \frac{y}{r}\hat{\jmath}\right)$$

$$\vec{E_2} = E_2 \cdot (\cos\theta_2 \hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta_2 \cdot \hat{\jmath}) = E_2 \left(\frac{x-b}{r'}\hat{\imath} + \frac{y}{r'}\hat{\jmath}\right)$$

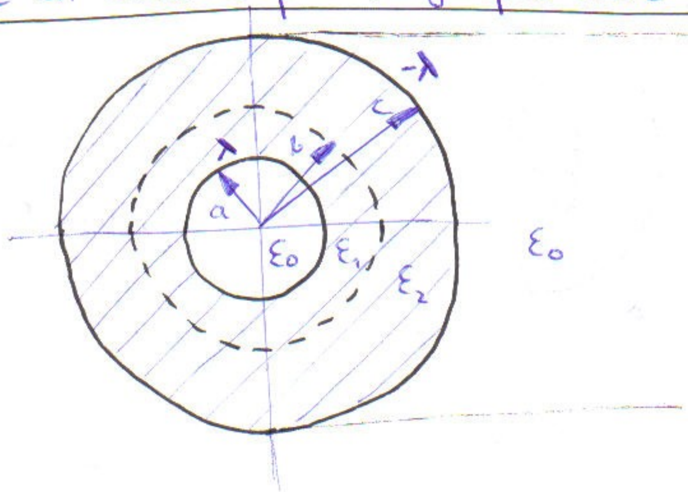
$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} = \left(E_1 \cdot \frac{x}{r} + E_2 \cdot \frac{x-b}{r'}\right)\hat{\imath} + \left(E_1 \cdot \frac{y}{r} - E_2 \cdot \frac{y}{r'}\right)\hat{\jmath} =$$

$$= \left(\frac{\rho \cdot \cancel{r}}{3 \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{x}{\cancel{r}} + \frac{-\rho \cdot \cancel{r'}}{3 \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{x-b}{\cancel{r'}}\right)\hat{\imath} + \underbrace{\left(\frac{\rho \cdot r}{3 \cdot \varepsilon_0} \frac{y}{r} - \frac{\rho \cdot r'}{3 \cdot \varepsilon_0} \frac{y}{r'}\right)}_{0} \cdot \hat{\jmath} =$$

$$= \frac{\rho}{3 \cdot \varepsilon_0} (x + b - x)\hat{\imath} = \frac{\rho \cdot b}{3 \cdot \varepsilon_0}$$

c.q.d.

(8) Un cable coaxial está formado por un conductor interior cilíndrico hueco de radio a y otro exterior de radio c ($c>a$). Sobre el cilindro interior existe una carga de λ C/m. y en el exterior de $-\lambda$ C/m. El espacio entre conductores está relleno de dieléctrico ε_1 hasta $r=b$ y de ε_2 hasta $r=c$. Calcular el campo E en todos los puntos y representarlo gráficamente:



$$E=\frac{\sum q}{2\pi\cdot r\cdot L} \quad \text{(Por Gauss)}$$

• $r<a$: ε_0

$$\sum q=0 \implies E=0$$

• $a<r<b$: ε_1

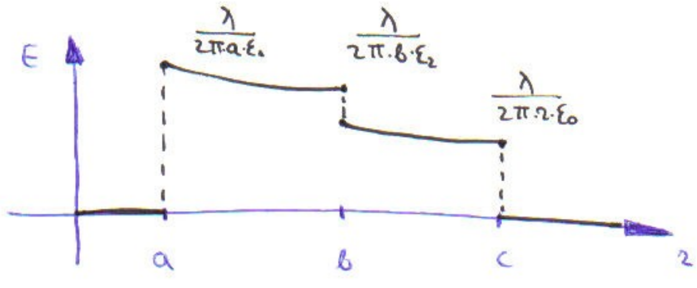
$$\sum q=\lambda\cdot L \qquad E=\frac{\lambda\cdot \cancel{L}}{2\pi\cdot r\cdot \cancel{L}\cdot\varepsilon_1}=\frac{\lambda}{2\pi\cdot r\cdot\varepsilon_1}$$

• $b<r<c$: ε_2

$$\sum q=\lambda\cdot L \qquad E=\frac{\lambda\cdot \cancel{L}}{2\pi\cdot r\cdot \cancel{L}\cdot\varepsilon_2}=\frac{\lambda}{2\pi\cdot r\cdot\varepsilon_2}$$

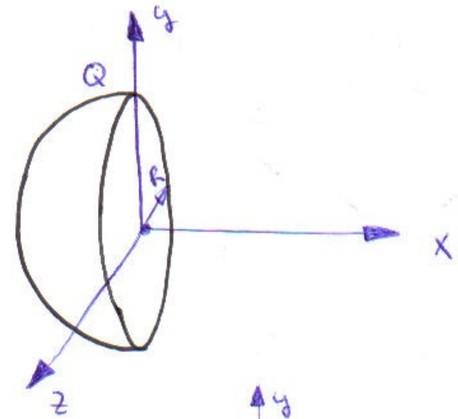
• $r>c$: ε_0

$$\sum q=\lambda\cdot L+(-\lambda)\cdot L=0 \implies E=0$$



EJERCICIO DE EXAMEN:

Calcular el campo eléctrico producido por un casquete semiesférico de radio R en su centro, si posee una carga eléctrica Q uniformemente distribuida en su superficie:

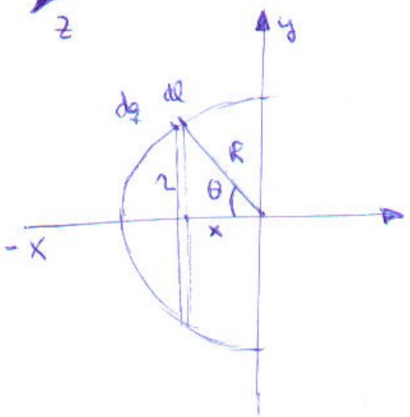


Usaremos tiras de anillos con radio variable

$$0 \leq r \leq R$$

Sabiendo que el $\vec{E}$ de un anillo sobre un punto P del eje x es:

$$\vec{E} = \frac{K \cdot Q \cdot x}{(x^2+r^2)^{3/2}} \cdot \hat{i}$$



$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{x}{R} \\ x = R\cdot\cos\theta \\ R = (x^2+r^2)^{1/2} \end{array}\right\} \quad d\vec{E} = \frac{K \cdot dq\, R \cdot \cos\theta}{R^3}\,\hat{i} = $$

$$= K \cdot \frac{dq \cdot \cos\theta}{R^2}\,\hat{i}$$

$$dq = \sigma \cdot dS = \sigma \cdot 2\pi \cdot r \cdot dl = \sigma \cdot 2\pi \cdot r \cdot R \cdot d\theta = \sigma \cdot 2\pi \cdot R^2 \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot d\theta$$

$$\left| \begin{array}{l} l = R\cdot\theta \\ dl = d\theta \cdot R \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} \operatorname{sen}\theta = \dfrac{r}{R} \\ r = R\cdot\operatorname{sen}\theta \end{array} \right.$$

El ángulo θ es entre 0 y π/2 (si no, se repetiría).

$$\vec{E} = \int_{DIST} d\vec{E} = \int_0^{\pi/2} \frac{K \cdot \sigma \cdot 2\pi \cancel{R^2} \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta}{\cancel{R^2}}\,\hat{i} = K \cdot \sigma \cdot 2\pi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta\,\hat{i} =$$

$$= K\cdot\sigma\cdot \cancel{2}\pi\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}2\theta\cdot d\theta\cdot\hat{i} = K\cdot\sigma\cdot\pi\cdot\left.\frac{-\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}\hat{i} = K\cdot\sigma\cdot\pi\left(\frac{-\cos\pi}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{-\cos 0}{2}\right)\hat{i} = K\cdot\sigma\cdot\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\hat{i} = K\cdot\sigma\cdot\pi\cdot\hat{i}$$

Debemos dejarlo en función de Q:

$$Q = \int_0^{\pi/2} dq = \int_0^{\pi/2}\sigma\cdot 2\pi\cdot R^2\cdot \operatorname{sen}\theta\cdot d\theta = \sigma\cdot 2\pi\cdot R^2(-\cos\theta)\Big]_0^{\pi/2} = \sigma\cdot 2\pi\cdot R^2$$

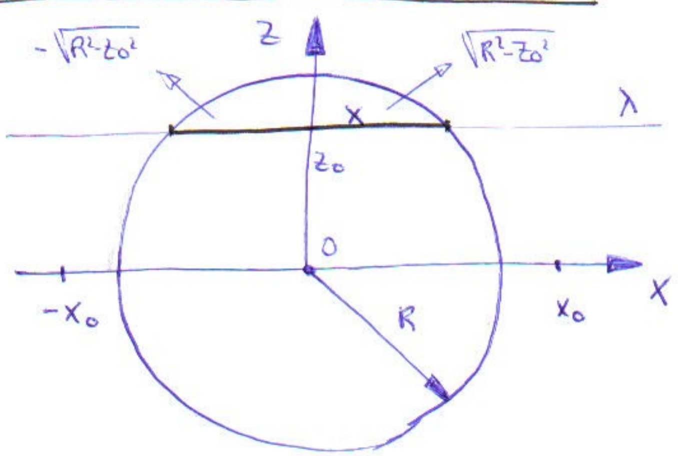
$$\sigma = \frac{Q}{2\pi\cdot R^2}$$

$$\vec{E} = K\cdot\sigma\cdot\pi\cdot\hat{i} = K\cdot\frac{Q\cdot\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}\cdot R^2}\hat{i} = \frac{Q}{8\pi\cdot\varepsilon_0\cdot R^2}\hat{i}$$

EJERCICIO DE EXAMEN:

Tenemos una distribución lineal de carga $\lambda = \lambda_0\cdot x^2$ C/m situada en una recta paralela por el eje x que pasa por $z = z_0$, comprendida entre $-x_0$ y x_0. Determina la expresión del flujo del campo eléctrico debido a λ que atraviesa una superficie esférica con centro en el origen y radio R, siendo $x_0 > R > z_0$:

(El eje z sería el eje Y)



$$\phi = \oint\vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Límites: $\begin{cases} x^2+z_0^2 = R^2 \\ x = \sqrt{R^2-z_0^2}\end{cases}$

$$Q_{int} = \int_{-\sqrt{R^2-z_0^2}}^{\sqrt{R^2-z_0^2}} \lambda_0 \cdot x^2 \cdot dx = \lambda_0 \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg]_{-\sqrt{R^2-z_0^2}}^{\sqrt{R^2-z_0^2}} = \frac{\lambda_0}{3} 2\sqrt{R^2-z_0^2}$$

$$\phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{2\lambda_0\sqrt{R^2-z_0^2}}{3 \cdot \varepsilon_0}$$