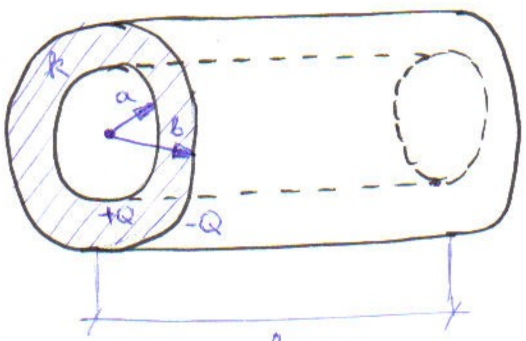
BOLETÍN 5

(1) Un alambre recto de 1,6 m. de longitud y radio desconocido está aislado con neopreno ($k = 6,8$) hasta un radio de 6 mm. Se forma un condensador cilíndrico pintando la superficie del neopreno con una capa conductora de pintura de plata, resultando una capacidad de 0,6 nF. ¿Qué radio tiene el alambre? Despreciar los efectos de los extremos.



$$E \cdot S = \frac{\sum q}{\varepsilon}$$

$$E = \frac{\sum q}{S \cdot \varepsilon} = \frac{\sum q}{2\pi \cdot r \cdot l \cdot \varepsilon_0 \cdot k} =$$

$$= K \cdot \frac{2 \sum q}{r \cdot L \cdot k}$$

$$V = V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E} \cdot \vec{dl} \underset{E \text{ radial}}{=} -\int_b^a E \cdot dr = -\int_b^a K \frac{2\sum q}{r \cdot L \cdot k} dr =$$

$$= -\frac{2KQ}{L \cdot k} \int_b^a \frac{dr}{r} = \frac{2KQ}{L \cdot k} \left[\ln r\right]_a^b = \frac{2KQ}{L \cdot k} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{2KQ}{L \cdot k} \ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{L \cdot k}{2K \cdot \ln(b/a)}$$

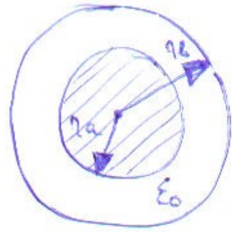
$$k \cdot l = 2K \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot C$$

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{k \cdot l}{2K \cdot C} \Longrightarrow \frac{b}{a} = e^{\frac{k \cdot l}{2KC}} \Longrightarrow a = \frac{b}{e^{\frac{k \cdot l}{2KC}}} = b \cdot e^{-\frac{k \cdot l}{2KC}} =$$

$$= 6 \cdot 10^{-3} \cdot e^{\frac{-1,6 \cdot 6,8}{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 0,6 \cdot 10^{-9}}} = 2,19 \cdot 10^{-3}\ m = 2,19\ mm.$$

② Un condensador esférico está formado por una esfera conductora de radio r_a rodeada por una corteza esférica conductora concéntrica de radio interior r_B. Demostrar que la capacidad de este condensador con vacío entre las placas es:

$$C = 4\pi \cdot \varepsilon_0 \frac{r_B \cdot r_a}{r_B - r_a}$$



$$E = K \cdot \frac{\sum q}{r^2}$$

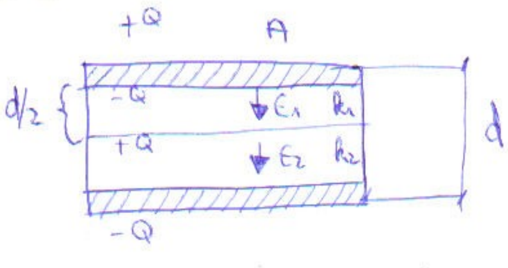
$$V = V_a - V_B = -\int_B^a \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\int_B^a E \cdot dr = -\int_B^a K \cdot \frac{Q}{r^2}\, dr = -KQ \int_B^a \frac{dr}{r^2} =$$

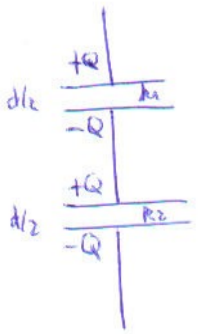
$$= -K \cdot Q \cdot \left[-\frac{1}{r}\right]_B^a = K \cdot Q \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\cancel{Q}}{K \cdot \cancel{Q}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} = \frac{1}{K\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} = \frac{\frac{b \cdot a}{b - a}}{K} = 4\pi \cdot \varepsilon_0 \frac{r_B \cdot r_a}{r_B - r_a}$$

c.q.d.

③ Calcular la expresión de la capacidad del condensador de placas planas y paralelas de la figura, siendo A el área de las mismas:





Están en serie

$$C = \frac{A \cdot \varepsilon}{d}$$

$$C_1 = \frac{A \cdot \varepsilon_1}{d/2} = \frac{2 \cdot A \cdot \varepsilon_0 \cdot k_1}{d}$$

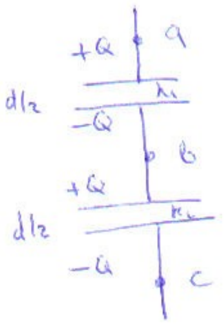
$$C_2 = \frac{A \cdot \varepsilon_2}{d/2} = \frac{2 \cdot A \cdot \varepsilon_0 \cdot k_2}{d}$$

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} =$$

$$= \frac{d}{2 \cdot A \cdot \varepsilon_0 \cdot k_1} + \frac{d}{2 \cdot A \cdot \varepsilon_0 \cdot k_2}$$

(otra forma)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$ (Placas conductoras en la superficie de un conductor)



$$V = V_a - V_c = V_a - V_b + V_b - V_c$$

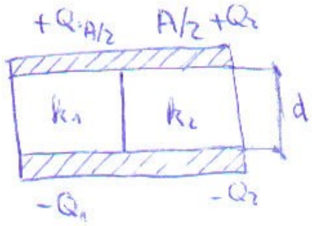
$$V = E \cdot r$$

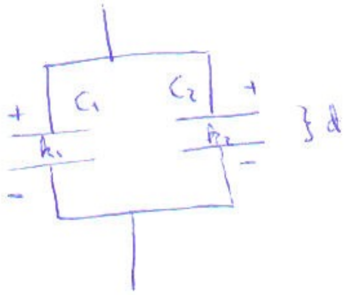
$$V_a - V_b = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \cdot k_1} \cdot \frac{d}{2} \qquad V_b - V_c = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \cdot k_2} \cdot \frac{d}{2}$$

$$V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot \frac{d}{2} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{d}{2} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)} \Bigg|_{\sigma = \frac{Q}{A}} = \frac{\cancel{Q}}{\frac{\cancel{Q}}{\varepsilon_0 A} \cdot \frac{d}{2} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)} = \frac{\varepsilon_0 \cdot 2 \cdot A}{d \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)}$$

④ Calcular la expresión de la capacidad del condensador de placas planas y paralelas de la figura, siendo A el área total de cada placa, y ocupando A/2 cada dieléctrico:





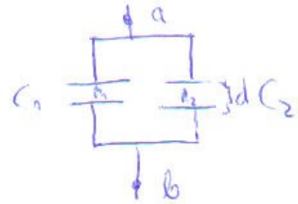
Están en paralelo

$$C_1 = \frac{A/2 \cdot \varepsilon_0 \cdot k_1}{d} = \frac{A \cdot k_1 \cdot \varepsilon_0}{2d} \qquad C_2 = \frac{A/2 \cdot \varepsilon_0 \cdot k_2}{d} = \frac{A \cdot k_2 \cdot \varepsilon_0}{2 \cdot d}$$

$$C_1 + C_2 = \frac{A \cdot \varepsilon_0}{d \cdot 2} (k_1 + k_2)$$

(Otra forma)

$$C = \frac{Q}{V}$$



$$V_a - V_b = E_1 \cdot d = E_2 \cdot d \qquad \begin{cases} E_1 = E_2 \\ \dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \dfrac{\sigma_2}{\varepsilon_2} \Longrightarrow \dfrac{Q_1}{\cancel{A/2} \cdot k_1 \cancel{\varepsilon_0}} = \dfrac{Q_2}{\cancel{A/2} \cdot k_2 \cancel{\varepsilon_0}} \end{cases}$$

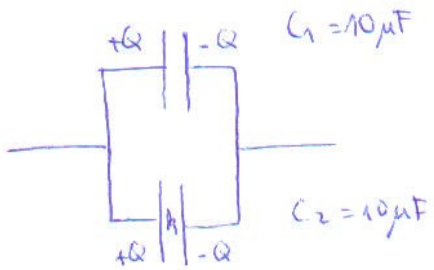
$$Q_1 + Q_2 = Q$$

$$Q_1 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} Q \qquad Q_2 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} Q$$

$$V = V_a - V_b = E_1 \cdot d = \frac{Q_1}{A/2 \cdot \varepsilon_0 k_1} \cdot d = \frac{2 d Q}{A (k_1 + k_2) \cdot \varepsilon_0}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\cancel{Q}}{\dfrac{2d\cancel{Q}}{A(k_1+k_2)\cdot\varepsilon_0}} = \frac{A \cdot \varepsilon_0}{2d} (k_1 + k_2)$$

(5) Dos condensadores idénticos de placas paralelas de 10 µF reciben cargas iguales de 100 µC cada uno y luego se separan de la fuente de carga. Mediante un cable se conectan sus placas positivas y mediante otro sus negativas. a) ¿Cuál es la energía almacenada por el sistema? Un dieléctrico de constante 3,2 se inserta entre las placas de uno de los condensadores de tal modo que llena por completo la región entre las placas. b) ¿Cuál es la carga final sobre cada condensador? c) ¿Cuál es la energía final almacenada del sistema?



$Q_i = 100\mu C = Q_1 = Q_2$

a) $U = \frac{1}{2} C \cdot V^2$ (Condens. en paralelo)

$C = C_1 + C_2 = 20\mu F$

$Q = Q_1 + Q_2 = 200\mu C$

$\Rightarrow V = \frac{Q}{C} = \frac{200\mu}{20\mu} = 10 \text{ V}$

$U = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} = 10^{3} \text{ J}$

b) $k=3,2$

$$C_2' = C_2$$

$$Q_1' + Q_2' = Q_1 + Q_2 \quad (\sum q = cte)$$

$$C_1' = k \cdot C_1 = 3,2 \cdot 10\,\mu F$$

$$Q' = Q$$

$$V = \frac{Q'}{C'} = \frac{200\,\mu C}{C_1' + C_2'} =$$

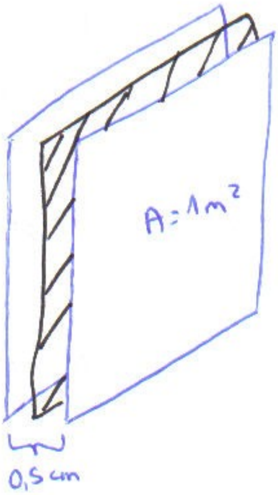
$$= \frac{200\,\mu C}{3,2 \cdot 10\,\mu F + 10\,\mu F} = 4,76\,V$$

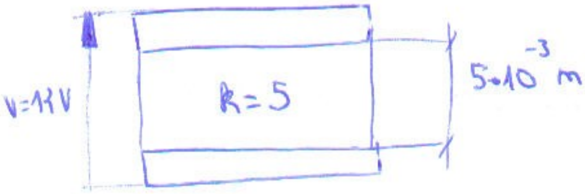
V mismo en ||

$$\left.\begin{array}{l} Q_1' = C_1' \cdot V' = 32\,\mu F \cdot 4,76\,V = 152,38\,\mu C \\ Q_2' = C_2 \cdot V' = 10\,\mu F \cdot 4,76\,V = 47,62\,\mu C \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \text{Con } k \\ 200\,\mu C \\ \Rightarrow \text{Sin } k \end{array}$$

c) $$U' = \frac{1}{2} \cdot C' \cdot (V')^2 = \frac{1}{2}\,(3,2 \cdot 10\,\mu F + 10\,\mu F) \cdot 4,76^2 = 4,76 \cdot 10^{-4}\,J$$

6) Un condensador de placas paralelas cuyas placas tienen un área de $1\,m^2$ y la separación es de 0,5 cm. tiene una lámina de vidrio de igual área y espesor situada entre las placas. El vidrio tiene una constante dieléctrica de 5. El condensador se carga hasta una diferencia de potencial de 12V y luego se separa de su fuente de carga. ¿Cuánto trabajo se necesita para retirar la lámina de vidrio del interior del condensador?





$$\left.\begin{array}{l} C_0 = \dfrac{\varepsilon_0 \cdot A}{d} \\[2ex] C_v = \dfrac{\varepsilon_0 \cdot k \cdot A}{d} \end{array}\right\} C_0 = C_v / k$$

$C_0 \Rightarrow$ Condensador al quitar el vidrio

$C_v \Rightarrow$ Condensador con el vidrio

$$U_0 = \frac{1}{2} C_0 \cdot V_0^2$$

$$U_v = \frac{1}{2} C_v \cdot V_v^2$$

$$\Delta W = -\Delta U = -(U_0 - U_v)$$

$$U_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{C_v}{k} \cdot \underbrace{\frac{Q_0^2}{C_0^2}}_{V_0^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{C_v}{k} \cdot \frac{Q_v^2}{\frac{C_v^2}{k^2}} =$$

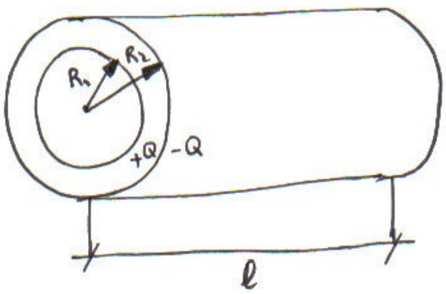
$$= \frac{1}{2} \frac{Q_v^2 \cdot k}{C_v} = \frac{1}{2} k \cdot C_v \cdot V_v^2 = k \cdot U_v$$

$$\Delta W = -(k \cdot U_v - U_v) = U_v (1-k) = (1-k) \frac{1}{2} k \cdot \varepsilon_0 \frac{A}{d} V^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 5 \cdot \varepsilon_0}{5 \cdot 10^{-3}} \cdot 12^2 \cdot 4 = 20 \cdot 144 \cdot 10^2 \cdot \varepsilon_0 = 2{,}55 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

$$\left[\Delta W = -(U_{INIC} - U_{FIN}) = U_{FIN} - U_{INIC}\right]$$

(7) Un condensador cilíndrico se compone de un hilo largo de Radio R1 y longitud L con una carga +Q y una corteza cilíndrica exterior de radio R2, longitud L y carga -Q. a) Hallar el campo eléctrico y la densidad de energía en un punto cualquiera del espacio. b) ¿Cuánta energía existe en la corteza cilíndrica de radio r, espesor dr y volumen $2\pi \cdot r \cdot L \cdot dr$ existente entre los conductores? c) Integrar la expresión obtenida en (b) para hallar la energía total almacenada en el condensador y comparar el resultado con la obtenida a partir de $W = \frac{1}{2} C \cdot V^2$:



$\vec{E}$ radial

$$E \cdot S = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$

- Si $r < R_1$: $\sum q = 0 \Rightarrow E = 0$
- Si $R_1 < r < R_2$: $\sum q = +Q \Rightarrow E = \frac{+Q}{2\pi \cdot r \cdot L} = 2\frac{KQ}{r \cdot L}$
- Si $r > R_2$: $\sum q = +Q + (-Q) = 0 \Rightarrow E = 0$

Densidad de energía:

$$u = W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \quad J/m^3 \quad \text{(Válido en general)}$$

$\cdot R_1 < r < R_2$: $$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} K \cdot \frac{Q^2}{\pi \cdot (r \cdot L)^2}$$

b)

$$dVol = 2\pi \cdot r \cdot L \cdot dr$$

$$W = \frac{dU}{dVol}$$

$$dU = W \cdot dVol = \frac{1}{2} K \frac{Q^2}{\pi \cdot (r \cdot L)^2} \cdot 2\pi \cdot r \cdot L \cdot dr = K \frac{Q^2}{r \cdot L} dr$$

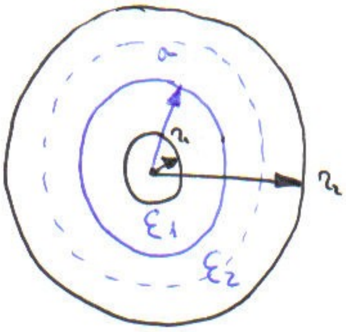
c)

$$U = \int_{DIST} dU = \int_{R_1}^{R_2} K \cdot \frac{Q^2}{r \cdot L} dr = \frac{K \cdot Q^2}{L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{K \cdot Q^2}{L} \ln(R_2/R_1)$$

$$U = \frac{1}{2} C V^2 \underset{V = Q/C}{=} \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\underbrace{\frac{2\pi \varepsilon_0 \cdot L}{\ln(R_2/R_1)}}_{\text{Capacidad del condensador}}} = \dots = \frac{K \cdot Q^2}{L} \ln(R_2/R_1)$$

Son iguales, como cabría de esperar.

(8) Se tiene un condensador cilíndrico de longitud l que contiene dos dieléctricos de valores ε_1 y ε_2. Calcular la capacidad:



$$C = \frac{Q}{V} \qquad E = \frac{Q}{2\pi \cdot r \cdot L \cdot \varepsilon} \quad , r_1 < r < r_2$$

$$V = V_{R_2} - V_{R_1} = V_{R_2} - V_a + V_a - V_{R_1} =$$

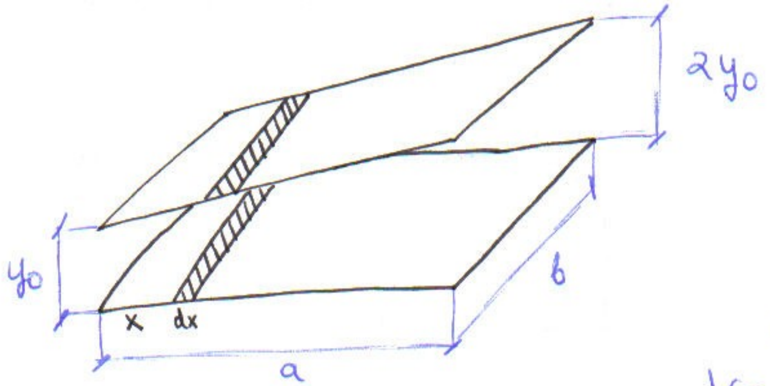
$$= -\int_a^{R_2} \vec{E} \cdot \vec{dl} + \left(-\int_{R_1}^{a} \vec{E} \cdot \vec{dl} \right) \underset{\vec{E}\text{ radial}}{=} -\int_a^{R_2} E \cdot dr - \int_{R_1}^{a} E \cdot dr =$$

$$= -\int_a^{R_2} \frac{Q}{2\pi \cdot r \cdot L \cdot \varepsilon_2} dr - \int_{R_1}^{a} \frac{Q}{2\pi r \cdot L \cdot \varepsilon_1} = -\frac{Q}{2\pi \cdot L} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} \int_a^{R_2} \frac{dr}{r} + \frac{1}{\varepsilon_1} \int_{R_1}^{a} \frac{dr}{r} \right) =$$

$$= -\frac{Q}{2\pi \cdot L} \left[\frac{\ln(R_2/a)}{\varepsilon_2} + \frac{\ln(a/R_1)}{\varepsilon_1} \right] = \frac{Q}{2\pi \cdot L} \left[\frac{\ln(a/R_2)}{\varepsilon_2} + \frac{\ln(R_1/a)}{\varepsilon_1} \right]$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi \cdot L}{\frac{1}{\varepsilon_2} \ln(a/R_2) + \frac{1}{\varepsilon_1} \ln(R_1/a)}$$

⑨ Un condensador posee placas rectangulares de longitud a y anchura b. La placa superior está inclinada un pequeño ángulo como indica la figura. La separación entre las placas varía de $s = y_0$ a la izquierda a $s = 2y_0$ a la derecha, siendo y_0 mucho menor que a o b. Calcular la capacidad utilizando bandas de anchura dx y de longitud b que actúan como condensadores diferenciales aproximados de área $b \cdot dx$ y separación $s = y_0 + \frac{y_0}{a} \cdot x$ conectados en paralelo.



$y_0 << a$

$$C = \frac{A \cdot \varepsilon_0}{d}$$

$$dC = \frac{\overbrace{b \cdot dx}^{A} \cdot \varepsilon_0}{\underset{\text{Separación}}{S}} = \frac{b \cdot \varepsilon_0 \cdot dx}{y_0 + \frac{y_0}{a} x}$$

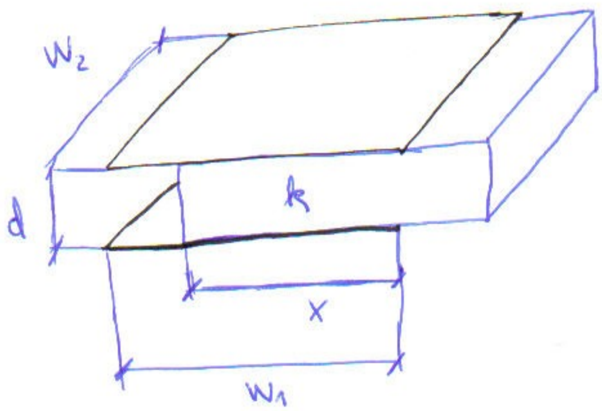
En paralelo: $C = \sum_i C_i$

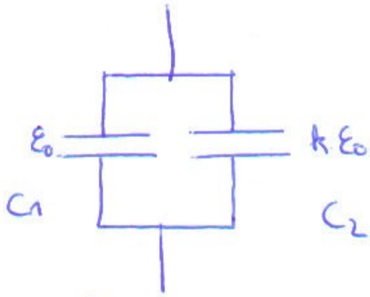
$$C = \int_{DIST} dC = \int_0^a \frac{b \cdot \varepsilon_0}{y_0 + \frac{y_0}{a} x} dx = b \cdot \varepsilon_0 \cdot \int_0^a \frac{1}{y_0 + \frac{y_0}{a} x} dx = b \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{a}{y_0} \int_0^a \frac{y_0/a}{y_0 + y_0/a \cdot x} dx =$$

$$= a \cdot b \cdot \frac{\varepsilon_0}{y_0} \left[\ln \left(y_0 + \frac{y_0}{a} x \right) \right]_0^a = a \cdot b \cdot \frac{\varepsilon_0}{y_0} \ln \left(\frac{y_0 + \frac{y_0}{\cancel{a}} \cdot \cancel{a}}{y_0 + \cancel{\frac{y_0}{a} \cdot 0}} \right) =$$

$$= a \cdot b \cdot \frac{\varepsilon_0}{y_0} \ln \left(\frac{2y_0}{y_0} \right) = a \cdot b \cdot \frac{\varepsilon_0}{y_0} \ln 2$$

(10) Se introduce una lámina dieléctrica una distancia x entre las placas de un condensador plano-paralelo de separación entre placas d y dimensiones laterales W_1 y W_2. a) Demostrar que la capacidad es $C = \varepsilon_0 \cdot W_2 \, (k \cdot x + W_1 - x)/d$, donde k es la constante del dieléctrico. b) Suponiendo que se carga el condensador y se desconecta de la batería antes de introducir el dieléctrico, obtener una expresión para la fuerza sobre la plancha dieléctrica. ¿Cuál es la dirección de la fuerza? Despreciar los efectos de borde:





$$C = \frac{A \cdot \varepsilon}{d}$$

$$C_1 = \frac{\overbrace{(W_1 - x) \cdot W_2}^{A_1} \cdot \varepsilon_0}{d}$$

$$C_2 = \frac{\overbrace{x \cdot W_2}^{A_2} \cdot \varepsilon_0 \cdot k}{d}$$

(Condensadores en paralelo)

$$C_T = C_1 + C_2 = \frac{W_2 \cdot \varepsilon_0}{d} \, (W_1 - x + k \cdot x)$$

c.q.d.

b) $U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$, $F = -\nabla \cdot U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\right) = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\frac{\partial C}{\partial x} =$$

$$= -\frac{1}{2} Q^2 \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{C} = -\frac{Q^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{d}{\varepsilon_0 W_2 (k \cdot x + W_1 - x)} = \frac{-1}{2}\frac{Q^2 \cdot d}{\varepsilon_0 \cdot W_2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{x(k-1)+W_1} =$$

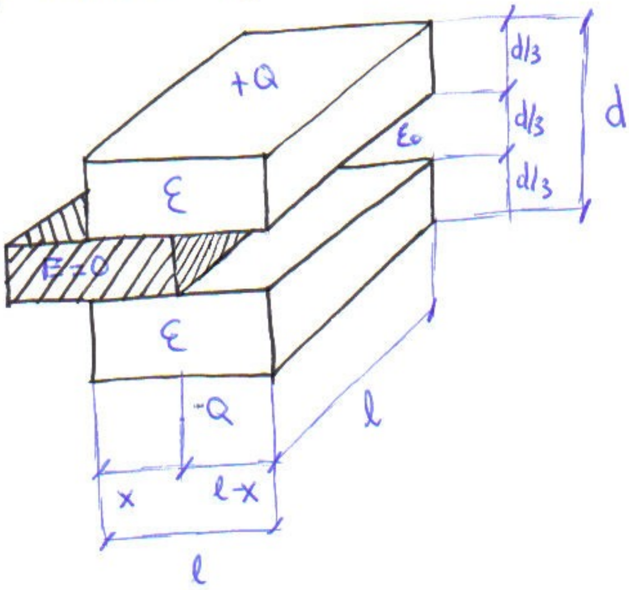
$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2 \cdot d}{\varepsilon_0 \cdot W_2}\cdot\frac{1}{(x(k-1)+W_1)^2}\cdot(k-1) = \frac{1}{2}\frac{Q^2 \cdot d \cdot (k-1)}{\varepsilon_0 \cdot W_2 \left[W_1 + x(k-1)\right]^2}$$

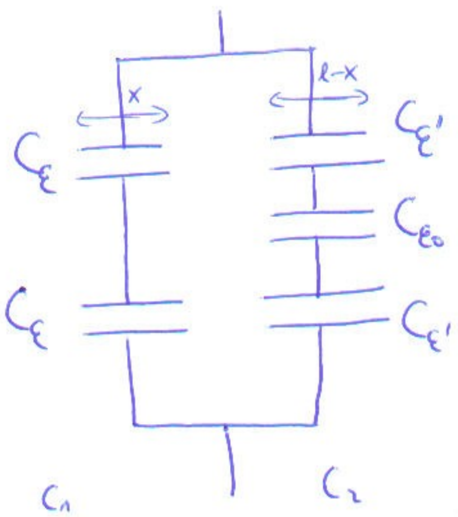
Dirección en el eje de X.

EJERCICIO DE EXAMEN:

a) Capacidad del condensador con la lámina introducida a una distancia x.

b) Fuerza que actúa sobre la lámina. $\varepsilon = 10 \cdot \varepsilon_0$





$$C = \varepsilon \cdot \frac{A}{d}$$

$$C_\varepsilon = \varepsilon \cdot \frac{l \cdot x}{d/3} = 10 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{l \cdot x \cdot 3}{d}$$

$$C_\varepsilon' = \varepsilon \cdot \frac{(l-x) \cdot l}{d/3} = 10 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{(l-x) \cdot l \cdot 3}{d}$$

$$C_{\varepsilon_0} = \varepsilon_0 \cdot \frac{(l-x) \cdot l}{d/3} = 3 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{(l-x) \cdot l}{d}$$

$$C_1 = \frac{1}{\frac{1}{C_\varepsilon} + \frac{1}{C}} = \frac{1}{\frac{2}{C}} = \frac{C_\varepsilon}{2}$$

$$C_{eq} = \dots = 12,5 \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot l \cdot x}{d} + 2,5 \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot l^2}{d}$$

$$C_2 = \frac{1}{\frac{1}{C_{\varepsilon'}} + \frac{1}{C_{\varepsilon_0}} + \frac{1}{C_{\varepsilon'}}}$$

b) $\vec{F} = -\nabla \cdot U$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{2} Q^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{C}\right)\Bigg|_{C=C_{eq}} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\frac{\partial C}{\partial x} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\left(12,5 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{l}{d}\right) = 6,25 \cdot \frac{Q^2}{C^2} \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot l}{d}$$