

Polyominos convexes définis par un couple de vecteurs

Alberto Del Lungo*, Maurice Nivat†, Renzo Pinzani*

Résumé. Le problème des polyominos définis par deux vecteurs consiste dans la détermination de l'existence de polyominos ayant un nombre donné de cellules en chaque ligne et en chaque colonne. Dans ce papier nous déterminons le nombre maximum de polyominos convexes qui satisfont les couples (V, H) de vecteurs, avec $V \in \mathbb{N}^n$ et $H \in \mathbb{N}^m$. Nous donnons aussi une construction qui permet d'obtenir des polyominos convexes ayant le même nombre de cellules en chaque ligne et en chaque colonne.

Abstract. The problem of polyominoes defined by two vectors, includes the existence of a polyomino having a given number of cells in every column and every row. In this work, we give the maximum number of convex polyominoes satisfying the pairs (V, H) of vectors, where $V \in \mathbb{N}^n$ and $H \in \mathbb{N}^m$. Moreover, we show how to obtain some convex polyominoes satisfying a given pair of vectors.

1 Introduction

Considérons le plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Une *cellule* est un carré unitaire $[i, i+1] \times [j, j+1]$, où i et j sont des entiers. Un *polyomino* est un ensemble fini connexe de cellules deux à deux adjacentes par un côté, et défini à une translation près. L'*aire* d'un polyomino est le nombre de cellules qui le composent, et le *périmètre* est le nombre de côtés du pourtour. Ces objets combinatoires intéressent les mathématiciens depuis longtemps (voir par exemple [8, 10, 12]). Ils existent plusieurs problèmes relatifs aux polyominos. Les problèmes de pavage où on considère le pavage de figures finies de $\Pi = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (ensembles de cellules) [2, 4, 11], et du plan entier [1, 3] par un ensemble fini de polyominos fixés; les problèmes d'énumération des polyominos selon certains paramètres, qui sont étudiés aussi par les physiciens car ils représentent des modèles pour plusieurs phénomènes physique [16]. Les formules énumératives sont connues pour plusieurs sous-classes de polyominos et pour une vue d'ensemble sur les résultats et sur les techniques utilisées voir [5, 17]. Un autre problème lié aux polyominos est celui des *polyominos définis par deux vecteurs* et il consiste dans la détermination de l'existence de polyominos ayant un nombre donné de cellules en chaque ligne et en chaque colonne. Donc donnés deux vecteurs $V = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{N}^n$ et $H = (h_1, h_2, \dots, h_m) \in \mathbb{N}^m$, il s'agit d'établir l'existence des polyominos ayant dans la colonne $i^{\text{ème}}$ et dans la ligne $j^{\text{ème}}$ un nombre de cellules respectivement égal à v_i et h_j , pour $i = 1, 2, \dots, n$ et $j = 1, 2, \dots, m$. Si un tel polyomino existe et s'il appartient à une classe \mathcal{P} de polyominos, on dit que le couple (V, H) est satisfaisable en \mathcal{P} . Ce problème, qui a été résolu pour quelques classes de polyominos dans [7], appartient à la classe des problèmes où on reconstruit un ensemble par ses projections; c'est-à-dire donnés $V \in \mathbb{N}^n$ et $H \in \mathbb{N}^m$, il faut déterminer l'existence d'un ensemble $S \subset \mathbb{N}^2$ dont les projections $P_1(i) = |\{(x_1, x_2) \in S : x_1 = i\}|$ et $P_2(j) = |\{(x_1, x_2) \in S : x_2 = j\}|$ sont respectivement égales aux éléments v_i et h_j . Ryser [15] a montré que le problème sur la classe des ensembles $S \subset \mathbb{N}^2$ définis à une translation près, est résoluble en temps polynomial. En plus dans [9] ont donné des conditions pour établir si un ensemble $S \subset \mathbb{N}^2$ est déterminé d'une manière univoque par ses

*Dipartimento di Sistemi e Informatica, Via Lombroso 6/17, Firenze, Italy, e-mail: est@ifiidg.bitnet

†LITP Institut Blaise Pascal, Université Paris 7, 2 Place Jussieu, Paris Cedex 05, France

projections. Ces problèmes de reconstruction d'un ensemble par ses projections, sont liés à des questions concernant la théorie des fonctions de Booléennes, la théorie des circuits et la théorie des jeux [6, 13, 14, 18]. Dans ce papier nous déterminons une limitation supérieure et une limitation inférieure du nombre maximum de polyominos convexes qui satisfont les couples de vecteurs (V, H) , avec $V \in \mathbb{N}^n$, $H \in \mathbb{N}^m$. En plus, nous donnons une construction pour obtenir des polyominos convexes qui satisfont un même couple de vecteurs.

2 Préliminaires

Définissons comme *colonne* (*ligne*) d'un polyomino l'intersection de ce dernier avec une bande infinie verticale $[i, i + 1] \times \mathbb{R}$ (horizontale $\mathbb{R} \times [i, i + 1]$) où $i \in \mathbb{Z}$. Un polyomino est *convexe* si toutes ses lignes et colonnes sont connexes. Soit P un polyomino convexe, et R le plus petit rectangle le contenant. Soit $[N, N'] ([W, W'], [S, S'], [E, E'])$ l'intersection de la frontière de P avec le bord supérieur (gauche, inférieur, droit) de R (voir fig. 1). Un polyomino *tas* est un polyomino convexe

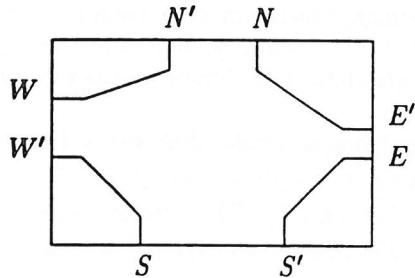


Figure 1: Polyomino convexe

tel que $S \equiv W'$ et $S' \equiv E$. Un polyomino *dirigé convexe* est un polyomino convexe tel que $S \equiv W'$.

Notations. On notera \mathcal{C} ($\mathcal{DC}, \mathcal{T}$) la classe des polyominos convexes (dirigés convexes, tas).

Introduisons la notion de satisfaisabilité qui permet de formuler le problème des polyominos définis par deux vecteurs.

Définition 2.1 Soient $V = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{N}^n$ et $H = (h_1, h_2, \dots, h_m) \in \mathbb{N}^m$. Le couple (V, H) est satisfaisable dans la classe de polyominos \mathcal{P} , s'il existe au moins un polyomino $\Lambda \in \mathcal{P}$ ayant dans la colonne $i^{\text{ème}}$ et dans la ligne $j^{\text{ème}}$ un nombre de cellules respectivement égal à v_i et h_j , pour $i = 1, 2, \dots, n$ et $j = 1, 2, \dots, m$. On dit que Λ satisfait (V, H) en \mathcal{P} .

Problème 2.2 Etant donnés deux vecteurs $V \in \mathbb{N}^n$ et $H \in \mathbb{N}^m$, établir si (V, H) est satisfaisable dans une classe de polyominos \mathcal{P} , et déterminer le nombre de polyominos de \mathcal{P} qui le satisfont.

Exemple 1. $V = (4, 3, 4, 3, 2)$, $H = (1, 4, 5, 5, 1)$. Les polyominos de la fig. 2 satisfont (V, H) en \mathcal{C} .

Définition 2.3 Soient $V \in \mathbb{N}^n$ et $H \in \mathbb{N}^m$. On notera $\delta_p(V, H)$ le nombre de polyominos de la classe \mathcal{P} qui satisfont (V, H) . On notera:

$$\Delta_p(n, m) = \max \{ \delta_p(V, H) : V \in \mathbb{N}^n \text{ et } H \in \mathbb{N}^m \}.$$

3 Nombre maximum de polyominos qui satisfont un couple de vecteurs

On montre dans [7] que:

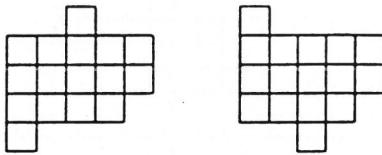


Figure 2: Polyominos Convexes

Proposition 3.1 Soient $V \in \mathbb{N}^n$ et $H \in \mathbb{N}^m$. Il existe au plus un polyomino qui satisfait (V, H) en \mathcal{DC} .

Donc on a $\Delta_{dc}(n, m) = 1$. En plus, puisque les polyominos tas sont des polyominos dirigés convexes particuliers, on obtient $\Delta_t(n, m) = 1$. L'exemple 1 montre que le nombre de polyominos convexes qui satisfont un couple de vecteurs (V, H) peut être plus grand que un et donc en général $\Delta_c(n, m) \neq 1$. Maintenant nous déterminons une limitation inférieure de $\Delta_c(n, m)$.

Proposition 3.2 Soient $n, m \in \mathbb{N}$. $\Delta_c(n, m) \geq 2^k$, où $k = \left\lfloor \frac{\min\{n, m\}}{2} \right\rfloor$.

Preuve. Soit $m = n = 2k$. On considère le couple (V_1, H_1) tel que $V_1 = H_1$ et :

$$\begin{cases} v_i = 2i - 1, & 1 \leq i \leq k, \\ v_i = 4k - 2i + 1, & k + 1 \leq i \leq 2k \end{cases}$$

Soit P_k le polyomino tas de la figure 3, où k est le nombre de lignes de P_k . Si $1 \leq j \leq k$ on a $P_j \subseteq P_k$. Soit P le polyomino convexe obtenu en unissant les polyominos P_k et P'_k , (où P'_k est obtenu renversant P_k autour de l'axe x) dans la façon indiquée dans figure 3. Le polyomino P

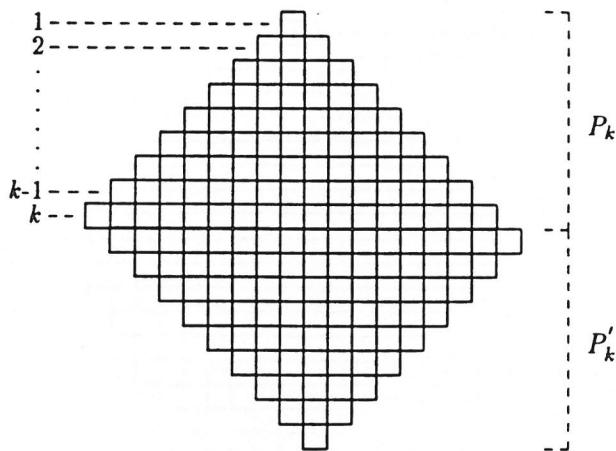


Figure 3: Polyomino convexe $P = P_k \cup P'_k$

satisfait (V_1, H_1) . On considère les polyominos P_i, P'_i tels que $P_i \subseteq P_k$ et $P'_i \subseteq P'_k$, c'est-à-dire avec $i \leq k$. Si on déplace P_i, P'_i respectivement à droite et à gauche d'un pas, on obtient encore un polyomino convexe \bar{P} qui satisfait (V_1, H_1) . Maintenant on considère les polyominos P_j, P'_j tels que: $P_j \subseteq P_i$ et $P'_j \subseteq P'_i$ ($j < i$), relativement au polyomino \bar{P} . Si on déplace P_j et P'_j respectivement à gauche et à droite d'un pas, on obtient un polyomino convexe \tilde{P} qui satisfait (V_1, H_1) (voir figure 4).

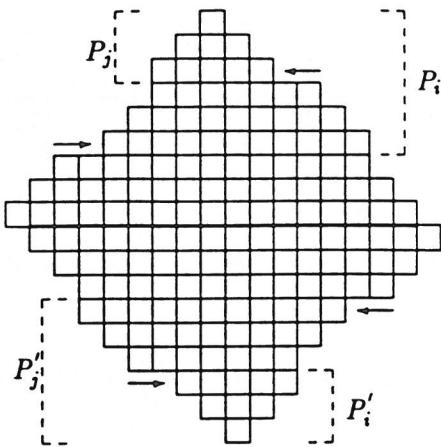


Figure 4: Polyomino convexe \tilde{P}

Donc on déduit que $\delta_c(V_1, H_1) \geq 2^k$.

Soit $m = n = 2k + 1$. Soit (V_2, H_2) un couple de vecteurs tel que $V_2 = H_2$ et :

$$\begin{cases} v_i = 2i, & 1 \leq i \leq k, \\ v_{k+1} = 2k + 1, \\ v_i = 4k - 2i + 4, & k + 2 \leq i \leq 2k + 1 \end{cases}$$

Soit Q_k le polyomino tas de la figure 5, où k est le nombre de lignes de Q_k . Si $1 \leq j \leq k$ on a $Q_j \subseteq Q_k$. Soit Q le polyomino convexe obtenu en unissant les polyominos Q_k et Q'_k , (où Q'_k est obtenu renversant Q_k autour de l'axe x) à une ligne de longueur $2k + 1$ dans la façon montrée dans la figure 5. Le polyomino Q satisfait (V_2, H_2) . Si on déplace Q_i, Q'_i ($i \leq k$) respectivement à droite

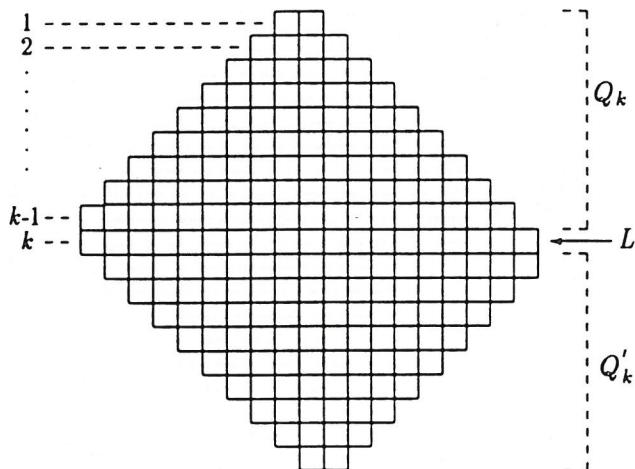


Figure 5: Polyomino convexe $Q = Q_k \cup Q'_k$

et à gauche d'un pas, on obtient encore un polyomino convexe \bar{Q} qui satisfait (V_2, H_2) . Donc on déduit que $\delta_c(V_2, H_2) \geq 2^k$.

Soit $n < m$ et $n = 2k$. Soit (V_3, H_3) un couple de vecteurs tel que:

$$\begin{cases} v_i = 2i - 1 + m - n, & 1 \leq i \leq k, \\ v_i = 4k - 2i + 1 + m - n, & k + 1 \leq i \leq 2k. \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_j = 2j - 1, & 1 \leq j \leq k, \\ h_j = 2k, & k + 1 \leq j \leq k + m - n, \\ h_j = 4k - 2j + 1, & k + m - n + 1 \leq j \leq m. \end{cases}$$

Soit P le polyomino convexe obtenu en unissant le polyomino P_k , $m - n$ lignes de longueur $2k$ et le polyomino P'_k . Le polyomino P satisfait (V_3, H_3) . Si on déplace les polyominos P_i et P'_i avec $i < j$, comme dans les cas précédents, on obtient des polyominos qui satisfont (V_3, H_3) . Ainsi on a $\delta_c(V_3, H_3) \geq 2^k$. Le cas $n > m$ et $m = 2k$ est analogue au précédent par symétrie. Procédant d'une manière analogue on montre que si $n < m$ et $n = 2k + 1$ (ou $n > m$ et $m = 2k + 1$), il existe un couple (V_4, H_4) tel que $\delta_c(V_4, H_4) \geq 2^k$. Ainsi on déduit que : $\Delta_c(n, m) \geq 2^k$, où $k = \left\lfloor \frac{\min\{n, m\}}{2} \right\rfloor$. \square

Remarque 1. Si on considère un algorithme qui construit tous les polyominos convexes qui satisfont un couple (V, H) , avec $V \in \mathbb{N}^n, H \in \mathbb{N}^m$, puisque $\Delta_c(n, m) \geq 2^k$, où $k = \left\lfloor \frac{\min\{n, m\}}{2} \right\rfloor$, on a qu'il existe des couples (V, H) pour lesquelles la complexité de l'algorithme n'est pas polynomiale.

Remarque 2. Il y a des couples (V, H) , avec $V \in \mathbb{N}^n, H \in \mathbb{N}^m$, tels que $\delta_c(V, H) > 2^k$. Par exemple si $V = (1, 2, 3, 3, 2, 1)$ et $H = (2, 4, 4, 2)$ les polyominos de la figure 6 satisfont (V, H) et donc $\delta_c(V, H) = 6 > 4$. Maintenant nous déterminons une limitation supérieure de $\Delta_c(n, m)$.

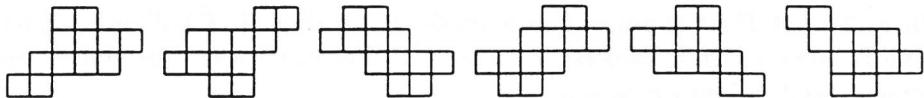


Figure 6: Polyominos convexes qui satisfont (V, H)

Introduisons la définition suivante:

Définition 3.3 Soient $V = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{N}^n$, $H = (h_1, h_2, \dots, h_m) \in \mathbb{N}^m$ et $v_1 = m - k$ avec $0 \leq k \leq m - 1$. On notera $\Omega_i(V, H)$ l'ensemble des polyominos convexes qui satisfont (V, H) et ayant ordonnée minimum de la première colonne égal à i ($0 \leq i \leq k$) (voir figure 7). On notera:

$$\alpha_{k,i}^{(n)} = \max \{ |\Omega_i(V, H)| : V \in \mathbb{N}^n, m \in \mathbb{N}, H \in \mathbb{N}^m \text{ et } v_1 = m - k \}.$$

Lemme 3.4 Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Si $0 \leq k \leq m - 1$ et $0 \leq i \leq k$ alors $\alpha_{k,i}^{(n)} \geq \alpha_{k,i}^{(n-1)}$.

Preuve. Il y a $V \in \mathbb{N}^{n-1}$, $H \in \mathbb{N}^m$ tels que $v_1 = m - k$ et $\alpha_{k,i}^{(n-1)} = |\Omega_i(V, H)|$. Soit $P \in \Omega_i(V, H)$. On considère le polyomino P' obtenu en ajoutant à P une colonne de longueur $m - k$ et ordonnée minimum i , à gauche de la première colonne de P (voir figure 8). Le polyomino P' est convexe et satisfait (V', H') , où $V' \in \mathbb{N}^n$, $H' \in \mathbb{N}^m$. Donc on obtient:

$$\alpha_{k,i}^{(n)} \geq |\Omega_i(V', H')| \geq |\Omega_i(V, H)| = \alpha_{k,i}^{(n-1)}.$$

\square

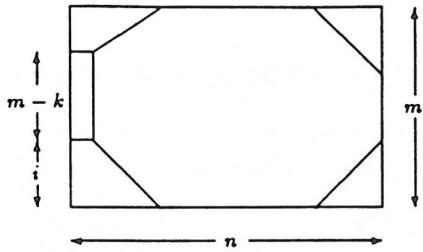


Figure 7: Polyomino avec la première colonne de longueur $m - k$ et d'ordonnée minimum i

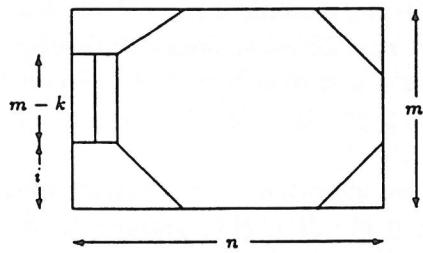


Figure 8: Polyomino avec les deux premières colonnes de longueur $m - k$ et d'ordonnée minimum i

Lemme 3.5 Soient $V \in \mathbb{N}^n$, $H \in \mathbb{N}^m$. Si $v_1 > v_2$ et P est un polyomino convexe qui satisfait (V, H) alors l'ordonnée minimum i de la première colonne est telle que $i = 0$ ou $i = m - v_1$.

Preuve. Si $v_1 > v_2$ et P est le polyomino convexe qui satisfait (V, H) , d'après [7] on a que P est un polyomino convexe dirigé à nord-est ou à sud-est. Par conséquent l'ordonnée minimum de la première colonne est $i = 0$ ou $i = m - v_1$. \square

Les lemmes 3.4, 3.5 sont utilisés pour démontrer le théorème suivant:

Théorème 3.6 Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Si $0 \leq k \leq m - 1$ et $0 \leq i \leq k - 1$ alors $\alpha_{k,i}^{(n)} \leq \binom{k}{i}$.

Preuve. D'après la symétrie des polyominos convexes on a :

$$\alpha_{k,i}^{(n)} = \alpha_{k,k-i}^{(n)}, \quad 0 \leq i \leq \left\lceil \frac{k-1}{2} \right\rceil,$$

donc on considère seulement les $\alpha_{k,i}^{(n)}$, avec $0 \leq i \leq \left\lceil \frac{k-1}{2} \right\rceil$.

Si $i = 0$ (l'ordonnée minimum de la première colonne des polyominos convexes est égale à 0), les polyominos sont dirigés et d'après la proposition 3.1 il existe au plus un polyomino qui satisfait un couple (V, H) , avec $V \in \mathbb{N}^n$, $H \in \mathbb{N}^m$ et $v_1 = m - k$. Par conséquent on a $\alpha_{k,0}^{(n)} = 1$, pour $0 \leq k \leq m - 1$, et ainsi pour $i = 0$ le théorème est vérifié.

En supposant $1 \leq i \leq \left\lceil \frac{k-1}{2} \right\rceil$ on considère la deuxième colonne des polyominos ayant longueur $v_2 = m - j$. Du lemme 3.5 on déduit que $v_1 \leq v_2$, c'est-à-dire $0 \leq j \leq k$. Soit h l'ordonnée minimum de la deuxième colonne. On distingue trois cas:

- (i) si $0 \leq j \leq i - 1$ alors $0 \leq h \leq j$ et donc la deuxième colonne peut assumer $j + 1$ positions (voir figure 9),

(ii) si $i \leq j \leq k - i$ alors $0 \leq h \leq i$ et ainsi la deuxième colonne peut assumer $i + 1$ positions (voir figure 10),

(iii) si $k - i + 1 \leq j \leq k$ alors $j - k + i \leq h \leq i$ et donc la deuxième colonne peut assumer $k - j + 1$ positions (voir figure 11).

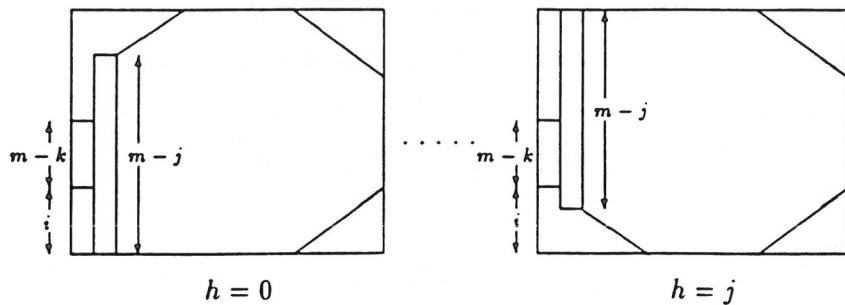


Figure 9: Polyominos convexes ayant la deuxième colonne de longueur $m - j$, où $0 \leq j \leq i - 1$

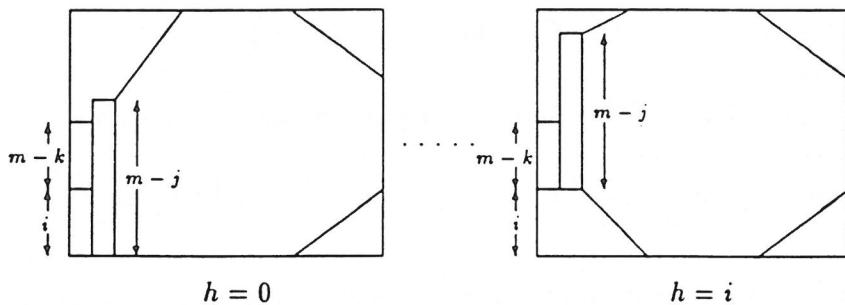


Figure 10: Polyominos convexes ayant la deuxième colonne de longueur $m - j$, où $i \leq j \leq k - i$

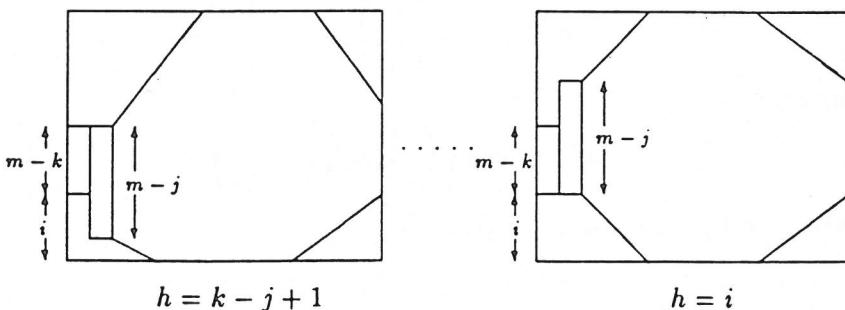


Figure 11: Polyominos convexes ayant la deuxième colonne de longueur $m - j$, où $k - i + 1 \leq j \leq k$

D'après ce qui précède on obtient que si l'ordonnée minimum i de la première colonne est telle que $1 \leq i \leq \left\lceil \frac{k-1}{2} \right\rceil$, et la deuxième colonne a longueur $m - j$ avec $0 \leq j \leq k$, alors la deuxième colonne peut assumer un certain nombre de positions lié à j . Pour chacune de ces positions on a

qu'il existe $\alpha_{j,h}^{(n-1)}$ polyominos convexes qui satisfont un couple (V', H') avec $V' \in N^{n-1}, H' \in N^m$ et $v'_1 = m - j$. Par conséquent on déduit que :

$$\alpha_{k,i}^{(n)} \leq \max_{0 \leq j \leq k} \left\{ \sum_{h=a}^b \alpha_{j,h}^{(n-1)} \right\},$$

où:

$$\begin{aligned} a &= 0, b = j, \text{ pour } 0 \leq j \leq i-1, \\ a &= 0, b = i, \text{ pour } i \leq j \leq k-i, \\ a &= j-k+i, b = i, \text{ pour } k-i+1 \leq j \leq k. \end{aligned}$$

Du lemme 3.4 on obtient:

$$\alpha_{k,i}^{(n)} \leq \max_{0 \leq j \leq k-1} \left\{ \sum_{h=a}^b \alpha_{j,h}^{(n)}, \alpha_{k,i}^{(n-1)} \right\}. \quad (1)$$

Rappelons que:

$$\alpha_{k,0}^{(n)} = 1, \quad (2)$$

et en plus on a:

$$\alpha_{j,j}^{(n)} = 1. \quad (3)$$

Maintenant on montre que $\alpha_{k,1}^{(n)} \leq \binom{k}{1}$. En utilisant les équations (1), (2) on a :

$$\alpha_{k,1}^{(n)} \leq \max_{1 \leq j \leq k-1} \left\{ 1, 1 + \alpha_{j,1}^{(n)}, \alpha_{k,1}^{(n-1)} \right\}.$$

Mais d'après (3) on obtient $\alpha_{1,1}^{(n)} = 1$ et si $k > 1$ par récurrence sur k on a :

$$\alpha_{k,1}^{(n)} \leq \max_{1 \leq j \leq k-1} \left\{ 1, 1 + \binom{j}{1}, \alpha_{k,1}^{(n-1)} \right\} = \max \left\{ \binom{k}{1}, \alpha_{k,1}^{(n-1)} \right\}.$$

En procédant de la même façon, et en utilisant le lemme 3.4 et l'hypothèse de récurrence $\alpha_{j,1}^{(n)} \leq \binom{j}{1}$ avec $j < k$ on obtient :

$$\alpha_{k,1}^{(n-1)} \leq \max \left\{ \binom{k}{1}, \alpha_{k,1}^{(n-2)} \right\},$$

et par conséquent :

$$\alpha_{k,1}^{(n)} \leq \max \left\{ \binom{k}{1}, \alpha_{k,1}^{(n-2)} \right\}.$$

Donc par récurrence on a :

$$\alpha_{k,1}^{(n)} \leq \max \left\{ \binom{k}{1}, \alpha_{k,1}^{(1)} \right\} = \binom{k}{1}.$$

Procédant d'une manière analogue on obtient :

$$\alpha_{j,h}^{(n)} \leq \binom{j}{h}, \quad (4)$$

pour $0 \leq j \leq k-1$ et $0 \leq h \leq i-1$. Maintenant on montre : $\alpha_{k,i}^{(n)} \leq \binom{k}{i}$.
On déduit d'après (1) et (4) :

$$\alpha_{k,i}^{(n)} \leq \max \left\{ \sum_{\substack{h=0 \\ 0 \leq j \leq i-1}}^j \binom{j}{h}, \sum_{\substack{h=0 \\ i \leq j \leq k-i}}^{i-1} \binom{j}{h} + \alpha_{j,i}^{(n)}, \sum_{\substack{h=j-k+i \\ k-i+1 \leq j \leq k}}^{i-1} \binom{j}{h} + \alpha_{j,i}^{(n)}, \alpha_{k,i}^{(n-1)} \right\},$$

D'après (3) on a $\alpha_{i,i}^{(n)} = 1$. Donc on suppose $\alpha_{j,i}^{(n)} \leq \binom{j}{i}$ pour $i \leq j \leq k-1$. Par conséquent :

$$\alpha_{k,i}^{(n)} \leq \max \left\{ \sum_{\substack{h=0 \\ 0 \leq j \leq i-1}}^j \binom{j}{h}, \sum_{\substack{h=0 \\ i \leq j \leq k-i}}^i \binom{j}{h}, \sum_{\substack{h=j-k+i \\ k-i+1 \leq j \leq k}}^i \binom{j}{h}, \alpha_{k,i}^{(n-1)} \right\},$$

d'où:

$$\alpha_{k,i}^{(n)} \leq \max \left\{ \binom{k}{i}, \alpha_{k,i}^{(n-1)} \right\}.$$

En procédant de la même façon, et en utilisant le lemme 3.4 et l'hypothèse de récurrence $\alpha_{j,i}^{(n)} \leq \binom{j}{i}$ avec $j < k$ on obtient:

$$\alpha_{k,i}^{(n-1)} \leq \max \left\{ \binom{k}{i}, \alpha_{k,i}^{(n-2)} \right\},$$

et finalement par récurrence on a:

$$\alpha_{k,i}^{(n)} \leq \max \left\{ \binom{k}{i}, \alpha_{k,i}^{(1)} \right\} = \binom{k}{i}.$$

□

D'après le théorème 3.6 on obtient le résultat suivant:

Corollaire 3.7 Soient $n, m \in \mathbb{N}$. $\Delta_c(n, m) \leq 2^{h-1}$, où $h = \min\{n, m\}$.

Preuve. Le nombre de polyominos qui satisfont un couple (V, H) avec $V \in \mathbb{N}^n, H \in \mathbb{N}^m$ et $v_1 = m - k$ avec $0 \leq k \leq m-1$ est $\sum_{i=0}^k \alpha_{k,i}^{(n)}$, donc d'après le théorème 3.6 on obtient:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_{k,i}^{(n)} \leq \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} = 2^k.$$

Mais $0 \leq k \leq m-1$ et ainsi : $\Delta_c(n, m) \leq 2^{m-1}$. Procédant d'une manière analogue on obtient: $\Delta_c(n, m) \leq 2^{n-1}$, et par conséquent le corollaire. □

Nous considérons un exemple où $\Delta_c(n, m) = 2^{h-1}$.

Exemple 2.

Soient $V = (1, 2, 2, 2, 2, 1)$, $H = (3, 5, 2)$. Les polyominos de la fig. 12 satisfont (V, H) en \mathcal{C} . Du corollaire 3.7 on a $\Delta_c(3, 6) \leq 4$, donc $\Delta_c(3, 6) = 4$.

En utilisant la proposition 3.1 et le corollaire 3.7 on déduit:

Théorème 3.8 Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Le nombre $\Delta_c(n, m)$, c'est-à-dire le nombre le plus grand de polyominos convexes qui satisfont un couple (V, H) , avec $V \in \mathbb{N}^n$ et $H \in \mathbb{N}^m$, est tel que:

$$2^{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor} \leq \Delta_c(n, m) \leq 2^{h-1},$$

où $h = \min\{n, m\}$.

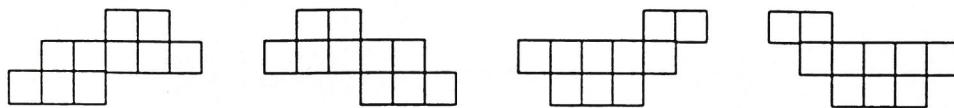


Figure 12: Polyominos convexes qui satisfont (V, H) .

Remarque 3. Nous avons fait des essais avec l'ordinateur (pour petites valeurs de n et m) et en considérant les résultats nous avons déduit que le nombre $\Delta_c(n, m)$ est tel que:

- (i) si $n = m$ (c'est-à-dire si le rectangle R qui contient les polyominos est un carré) alors $\Delta_c(n, m) = 2^{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor}$
- (ii) si $n \gg m$ ou $n \ll m$ (c'est-à-dire si une dimension de R est beaucoup plus grande que l'autre) alors $\Delta_c(n, m) = 2^{h-1}$.

4 Une construction pour obtenir des polyominos convexes qui satisfont un même couple de vecteurs

On considère le polyomino convexe P_1 de la figure 13, où la région A appartient à P_1 et la région B n'appartient pas à P_1 . Soit P'_1 le polyomino obtenu en éliminant de P_1 la région A et en remplissant avec des cellules les cases marquées B . Les polyominos convexes P_1 et P'_1 satisfont la même couple (V_1, H_1) . Soit P_2 un autre polyomino ayant la même structure de P_1 et soit Q le polyomino convexe

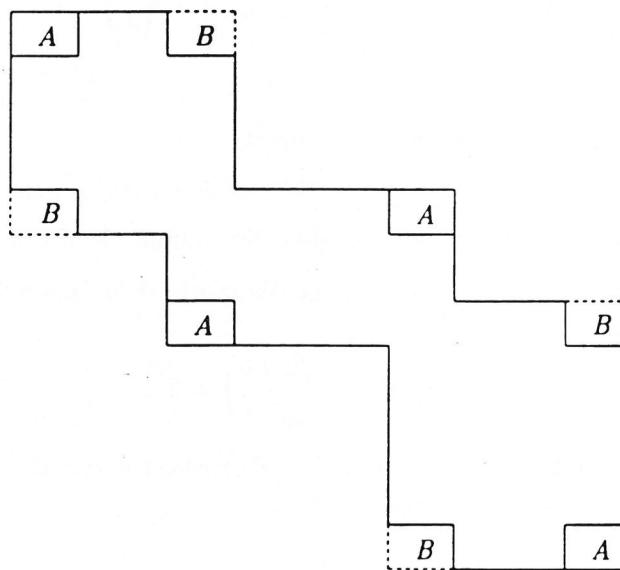


Figure 13: Polyomino P_1

obtenu en unissant les polyominos P_1 et P_2 de la façon illustrée par la figure 14. Les cellules marquées " + " sont ajoutées pour conserver la convexité de Q . Si on déforme P_2 dans la même façon que P_1 (c'est-à-dire en éliminant la région C et en remplissant avec des cellules la région D), on obtient un polyomino P'_2 qui satisfait le même couple de vecteurs de P_2 . Dans le polyomino Q on peut déformer

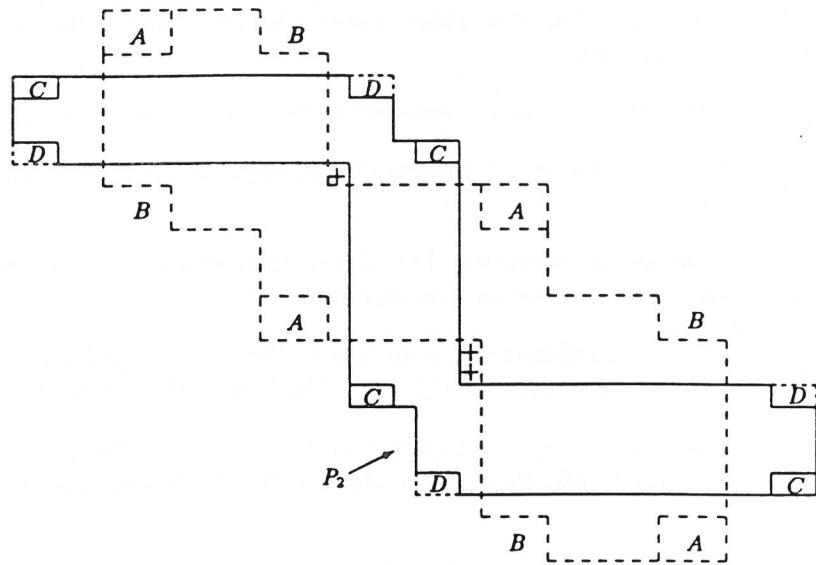


Figure 14: Polyomino convexe Q

P_1 et P_2 indépendamment l'un de l'autre et par conséquent on obtient 4 polyominos convexes ayant le même couple (V_2, H_2) . Plus en général si l'on utilise i polyominos convexes P_1, P_2, \dots, P_i ayant la même structure on peut construire 2^i polyominos convexes qui satisfont le même couple (V_i, H_i) . Remarque 4. En utilisant cette construction on peut obtenir les polyominos nécessaires pour démontrer la proposition 3.2. Par exemple le polyomino P de la figure 3 est obtenu en unissant k polyominos convexes et donc on a 2^k polyominos convexes qui satisfont (V_k, H_k) .

Bibliographie

- [1] D. Beauquier et M. Nivat, Tiling the plane with one tile, *Topology and Category Theory in Computer Science*, Oxford Univ. Press(1991) 291-334.
- [2] D. Beauquier, M. Nivat, E. Remila et M. Robson, Tiling Figures of the Plane with two Bars, a Horizontal and a Vertical one, *Rapport LITP 92*, Université de Paris VII, (1992).
- [3] R. Berger, The undecidability of the domino problem, *Mem. Amer. Soc.* 66 (1966).
- [4] J. H. Conway, J. C. Lagarias, Tiling with polyominoes and Combinatorial group theory, *J. Comb. Theor. A*, 53 (1990) 183-208.
- [5] M. Delest, Polyominoes and animals: Some recent results, *J. of Computer and Chemistry*, 8 (1991) 3-18.
- [6] C. K. Chow, On the characterization of threshold functions, *Ledley*, 41 (1961) 34-38.
- [7] A. Del Lungo, Polyominoes defined by two vectors, à paraître dans *Theor. Comp. Sci.*
- [8] M. Gardner, Mathematical games, *Scientific American*, (1958) Sept. 182-192, Nov. 136-142.
- [9] P. C. Fishburn, J. C. Lagarias, J. A. Reeds et L. A. Shepp, Sets uniquely determined by projections axes II Discrete case, *Discrete Mathematics* 91 (1991) 149-159.

- [10] S. W. Golomb, *Polyominoes*, Scribner, New York, 1965.
- [11] S. W. Golomb, Tilings with sets of polyominoes, *J. Combinatorial Theory*, 9 (1970) 60-71.
- [12] D. A. Klarner, My life among the polyominoes, in *The Mathematical Gardner*, 243-262, Wadsworth, Belmont CA, 1981.
- [13] E. Lapidot, The counting vectors of a simple game, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 31 (1972) 417-426.
- [14] A. Ostmann, Decisions by players of comparable strength, *Zeit. Nationalökonom.*, 45 (1985) 267-284.
- [15] H. Ryser, *Combinatorial Mathematics*, The Carus Mathematical Monographs No. 14, The Mathematical Association of America, Rahway 1963.
- [16] X. G. Viennot, Problèmes combinatoires posés par la physique statistique, *Séminaire Bourbaki* n° 626, 36ème année, in *Astérisque* n° 121-122, (1985) 225-246, Soc. Math. France.
- [17] X. G. Viennot, A Survey of Polyomino enumeration, Proc. Séries formelles et combinatoires algébrique, Montréal, Juin 1992, *Publications du LACIM* 11, Université du Québec à Montréal (1992).
- [18] R. O. Winder, Chow parameters in threshold logic, *J. Assoc. Comput. Mach.*, 18 (1971) 265-289.