

# Une approche combinatoire des polynômes de Schubert

Nantel Bergeron

Princeton University, Department of Mathematics  
Fine Hall - Washington Road  
Princeton, New Jersey 08544-1000

## Résumé

Dans un article récent [1], nous avons développé une construction combinatoire des polynômes de Schubert. Plus exactement, pour une permutation  $w$  donnée, nous avons construit un ensemble  $\Omega(w)$  tel que le polynôme de Schubert  $S_w$  s'obtient par la formule

$$S_w = \sum_{D \in \Omega(w)} x^D. \quad (*)$$

Ici,  $x^D = x^{d_1}x^{d_2}x^{d_3} \dots$  où  $d_i = \text{Card}\{j \in \mathbb{N} | (i, j) \in D\}$ .

Dans cet article, nous proposons de prendre la formulation (\*) comme définition combinatoire des polynômes de Schubert et de redériver une partie des propriétés connues de ces polynômes, ceci dans le but de développer une théorie de Schubert entièrement combinatoire. En particulier, nous dérivons les formulations pour les cas où la permutation  $w$  est dominante, Grassmannienne, de la forme  $u \times v$  et quelques autres. Pour le cas Grassmannien, nous montrerons l'équivalence entre les fonctions de Schur et les polynômes de Schubert par une bijection simple entre  $\Omega(w)$  et l'ensemble des tableaux de Young de forme  $\lambda$ .

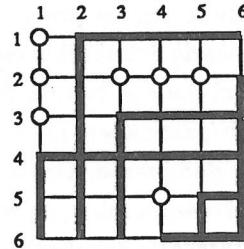
Nous conclurons notre travail par une discussion sur le cas des permutations vexillaires, la formule de Monk et les transitions maximales.

## I. INTRODUCTION.

Les polynômes de Schubert ont d'abord été introduits par les géomètres dans leurs études des variétés de drapeaux et des cellules de Schubert [3][4]. Par la suite A. Lascoux et M.-P. Schützenberger ont développé au cours des ans [6-15] une théorie très élégante de la combinatoire de ces polynômes. Quoique très élémentaires, les définitions de base dans ces travaux sont plus algébriques que combinatoires.

Notre première contribution à cette théorie a été de démontrer une règle de construction combinatoire des dits polynômes [1]. Prise comme point de départ, cette règle peut être utilisée pour redériver la théorie de Lascoux et Schützenberger avec une base plus combinatoire. C'est ce que nous nous proposons de débuter dans cet article tout en reprenant certains résultats de [1]. Notre but, ici, est de montrer l'élégance d'une telle approche et d'initier la découverte de nouvelles relations par l'étude combinatoire de la règle de construction. Le lecteur intéressé retrouvera dans [17] un traité complet de la théorie des polynômes de Schubert en variables commutatives.

Soit  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  une permutation du groupe symétrique sur  $n$  éléments. Nous dénotons par  $\ell(w)$  la longueur (nombre d'inversions) de  $w$ . Le diagramme  $D(w)$  d'une permutation est l'ensemble des points  $(i, j) \in [1..n]^2$  qui satisfont les inéquations  $i < w_j^{-1}$  et  $j < w_i$ . Ici  $[1..n]$  signifie l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Une présentation graphique du diagramme  $D(w)$  est obtenue en effaçant du treillis  $[1..n]^2$  les points au sud et à l'est des points  $(i, w_i)$ . Par exemple, le diagramme  $D(w)$  de la permutation  $w = (2, 6, 3, 1, 5, 4)$  est donné ci-dessous.



Le lecteur constatera, par récurrence sur  $\ell(w)$ , que

$$\text{Card}(D(w)) = \ell(w). \quad (I.1)$$

Notons aussi que le plongement  $i : S_n \rightarrow S_{n+1}$  défini par  $i(w_1, w_2, \dots, w_n) = (w_1, w_2, \dots, w_n, n+1)$  est tel que  $D(i(w)) = D(w)$ . Ceci nous permet de définir  $D(w) \subset \mathbb{N}^2$  pour une permutation  $w \in S_\infty = \bigcup_{n \geq 1} S_n$ . Le code  $c(w) = (c_1, c_2, c_3, \dots)$  d'une permutation  $w$  est la suite des  $c_i = \text{Card}\{(j, i) \in D(w)\}$ . La forme  $\lambda(w)$  de  $w$  est la suite  $c(w)$  ordonnée en ordre décroissant. Une permutation  $w$  est dite dominante si  $\lambda(w) = c(w)$ . Elle est dite grassmannienne si pour un certain indice  $r$ , nous avons  $w_1 < w_2 < \dots < w_r$  et  $w_{r+1} < w_{r+2} < \dots$ . Finalement, une permutation  $w$  est dite vexillaire si pour tous indices  $1 \leq a < b < c < d$  nous n'avons pas  $w_b < w_a < w_d < w_c$ .

Pour décrire notre construction des polynômes de Schubert, nous devons introduire la notion de *mouvement légal* dans un sous-ensemble fini non vide de  $\mathbb{N}^2$ . Pour simplifier la notation, nous appellerons *diagramme* un tel sous-ensemble. Soit  $D$  un diagramme et  $w$  une permutation fixée. Dénotons par  $D_{(r,r+1)}$  le diagramme  $D$  restreint aux lignes  $r$  et  $r+1$ . Soit  $j(r,D) = (j_1, j_2, \dots, j_k)$  les indices de colonnes pour lesquelles il y a exactement un élément de  $D_{(r,r+1)}$ . Choisissons  $j_i \in j(r,D)$  et assumons d'abord que  $(r+1, j_i) \in D_{(r,r+1)}$ . Si  $i = k$  ou si  $(r, j_{i+1}) \in D_{(r,r+1)}$  alors nous dénotons par  $D_1$  le diagramme obtenu de  $D$  en remplaçant l'élément  $(r+1, j_i)$  par  $(r, j_i)$ . Supposons maintenant que  $(r, j_i) \in D_{(r,r+1)}$  et que le nombre d'éléments de  $D$  dans la colonne  $j_i$  et dans les lignes  $r' > r$  soit strictement inférieur au nombre d'éléments de  $D(w)$  dans la même région. Si  $i = 1$  ou si  $(r+1, j_{i-1}) \in D_{(r,r+1)}$  alors nous dénotons par  $D_1$  le diagramme obtenu de  $D$  en remplaçant l'élément  $(r, j_i)$  par  $(r+1, j_i)$ . Dans les deux cas ci-haut, nous disons que  $D_1$  est obtenu de  $D$  par un mouvement légal (par rapport à  $D(w)$ ) et nous dénotons cette opération  $D_1 = m(r,j)D$  où  $j$  et  $r, r+1$  sont respectivement la colonne et les lignes où est effectué le mouvement légal. Dénotons par  $\Omega(w)$  l'ensemble de tous les diagrammes, incluant  $D(w)$ , qui sont obtenus de  $D(w)$  par une suite quelconque de mouvements légaux. Pour une permutation  $w$ , le polynôme de Schubert  $S_w$  est défini par

$$S_w = \sum_{D \in \Omega(w)} x^D \quad (I.2)$$

où  $x^D = x_1^{d_1} x_2^{d_2} \cdots$  avec  $d_i = \text{Card}\{j : (i, j) \in D\}$ .

Par exemple,

$$S_{(1,4,3,2)} = x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_1^2 x_3 + x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$$

car

$$\Omega(1,4,3,2) = \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagramme 1} \\ \text{Diagramme 2} \\ \text{Diagramme 3} \\ \text{Diagramme 4} \\ \text{Diagramme 5} \end{array} \right\}.$$

Dans ce qui suit, nous montrerons les propriétés suivantes.

P1. Soit  $r_0$  le plus petit indice pour lequel  $w_{r_0+1} < w_{r_0+2} < w_{r_0+3} < \dots$ , alors

$$S_w \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_{r_0}] \quad \text{et} \quad S_w \notin \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_{r_0-1}].$$

P2.  $S_w$  est un polynôme homogène de degré  $\ell(w)$  de la forme

$$S_w = x^{c(w)} + \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha}$$

où les  $\alpha$  sont des suites plus petites que  $c(w)$  pour un certain ordre et  $c_{\alpha} \in \mathbb{N}$ . Ceci nous permettra de conclure que les polynômes  $\{S_w\}_{w \in S_n}$  forment une base de l'anneau quotient d'Artin.

P3. Si  $w$  est une permutation dominante, alors

$$S_w = x^{\lambda(w)}.$$

P4. Pour l'injection  $i$  décrite ci-haut, nous avons

$$S_{i(w)} = S_w.$$

P5. Si  $w_i < w_{i+1}$  alors  $S_w$  est symétrique en  $x_i$  et  $x_{i+1}$ .

P6. Soient deux permutations  $u \in S_n$  et  $v \in S_m$ . On définit la permutation  $u \times v \in S_{n+m}$ , comme étant  $(u_1, u_2, \dots, u_n, v_1 + n, v_2 + n, \dots, v_m + n)$ . Pour cette opération nous avons

$$S_{u \times v} = S_u S_{1 \times v}.$$

P7. Si  $w$  est une permutation grassmannienne de forme  $\lambda$  alors

$$S_w = S_{\lambda}(x_1, x_2, \dots, x_r)$$

où  $S_{\lambda}$  est la fonction de Schur indiquée par la partition  $\lambda$ .

Nous conclurons notre travail par une discussion sur le cas des permutations vexillaires, la formule de Monk et les transitions maximales. Plus précisément, si  $w$  est une permutation vexillaire de forme  $\lambda$  alors

$$S_w = S_{\lambda}(X_{\phi_1}, X_{\phi_2}, \dots, X_{\phi_m})$$

où le membre de droite est une fonction de Schur évaluée à un certain drapeau d'alphabet

La formule de Monk dit que pour une transposition simple  $s_r = (r, r + 1)$ ,

$$S_{s_r} S_w = \sum_t S_{wt}$$

où la somme est prise sur toutes les transpositions  $t = (i, j)$  telles que  $i \leq r < j$  et que  $\ell(wt) = \ell(w) + 1$ . Nous élaborerons sur les transitions maximales à la section 3.

### 1. LES PROPRIÉTÉS SIMPLES.

Dans cette section nous discutons les propriétés P1 à P6. D'abord remarquons que le monôme  $x^{c(w)} = x^{D(w)}$  apparaît dans le polynôme  $S_w$  puisque  $D(w) \in \Omega(w)$ . Ici nous utilisons la convention  $x^\alpha = x^{\alpha_1}x^{\alpha_2}x^{\alpha_3}\dots$  pour une suite  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$ . De plus, lorsque  $D' \in \Omega(w)$  et  $D = m(r, j)D'$ , les monômes  $x^D$  et  $x^{D'}$  ne diffèrent que pour les variables  $x_r$  et  $x_{r+1}$ . Plus précisément, si  $x^{D'} = \dots x_r^a x_{r+1}^b \dots$  alors ou bien  $x^D = \dots x_r^{a+1} x_{r+1}^{b-1} \dots$ , ou bien  $x^D = \dots x_r^{a-1} x_{r+1}^{b+1} \dots$ . Dans le second cas, le nombre d'éléments de  $D$  dans la colonne  $j$  et dans les lignes  $r' > r$  ne peut être supérieur au nombre d'éléments de  $D(w)$  dans la même région. Par un argument récursif, nous pouvons conclure que pour tout  $r$ , le nombre d'éléments de  $D$  dans les lignes  $r' > r$  est inférieur ou égal au nombre d'éléments de  $D(w)$  dans la même région. En particulier si l'on choisit  $r_0$  le plus petit indice tel que  $w_{r_0+1} < w_{r_0+2} < w_{r_0+3} < \dots$  alors l'exposant de la variable  $x_r$  dans  $x^D$ , pour  $D \in \Omega(w)$ , peut être non nul, puisque c'est le cas pour  $D(w)$ , et les exposants des variables  $x_{r'}$  sont nuls pour tout  $r' > r_0$ , puisqu'il n'y a pas d'éléments de  $D(w)$  dans les lignes  $r' > r_0$ . Ceci complète la démonstration de P1.

Le lecteur remarquera que dans l'argument ci-haut, nous avons égalité pour tout  $r$  si et seulement si  $D = D(w)$ . Ceci montre que le coefficient de  $x^{D(w)}$  dans  $S_w$  est 1 et que pour tout autre diagramme  $D \neq D(w)$  dans  $\Omega(w)$ , la suite des exposants  $(d_{r_0}, d_{r_0-1}, \dots, d_1)$  dans le monôme  $x^D = x^{d_1}x^{d_2}\dots x^{d_{r_0}}$  est lexicographiquement plus petite que la suite  $(c_{r_0}, c_{r_0-1}, \dots, c_1)$  où  $c(w) = (c_1, c_2, c_3, \dots)$ . Nous avons aussi que la cardinalité de chacun des diagrammes de  $\Omega(w)$  est égale à  $\ell(w)$ . Ceci confirme que  $S_w$  a bien la forme décrite en P2 pour cet ordre lexicographique sur les exposants. Les polynômes  $\{S_w\}_{w \in S_n}$  sont donc linéairement indépendants. D'autre part il est bien connu que le quotient de l'anneau des polynômes  $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  par l'idéal engendré par les polynômes totalement symétriques

a pour base  $B = \{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} : \alpha_i < i\}$ . Ce quotient est connu sous le nom d'anneau d'Artin. Puisque pour chacun des monôme  $x^\alpha$  dans  $B$  il existe une et une seule permutation  $w$  telle que  $x^\alpha = x^{c(w)}$ , nous avons, par triangularité, que  $\{S_w\}_{w \in S_n}$  forme une base intégrale de l'anneau d'Artin.

Pour vérifier P3, il faut d'abord remarquer que  $w$  est une permutation dominante si et seulement si nous avons  $w_1 > w_2 > \cdots > w_r < w_{r+1} < w_{r+2} < \cdots$  pour un certain indice  $r$ . De ceci nous concluons qu'aucun mouvement légal ne peut être effectué sur  $D(w)$ . Donc  $\Omega(w) = \{D(w)\}$ . D'où  $S_w = x^{c(w)} = x^{\lambda(w)}$ .

P4 est immédiat puisque  $D(i(w)) = D(w)$ . Ici, remarquons que ceci nous permet de définir  $S_w$  pour  $w \in S_\infty$ .

La propriété P5 nous demandera un petit effort. En effet nous devons construire une bijection  $D \leftrightarrow D'$  entre les diagrammes de  $\Omega(w)$  telle que  $x^D = \cdots x_i^a x_{i+1}^b \cdots$  et  $x^{D'} = \cdots x_i^b x_{i+1}^a \cdots$ . Soit  $D \in \Omega(w)$  et soit  $J_{(0)} = j(i, D) = (j_1, j_2, \dots, j_p)$  les indices des colonnes de  $D_{(i, i+1)}$  pour lesquelles il y a exactement un élément. Nous enlevons de la suite  $J_{(0)}$  toutes paires d'indices  $j_k, j_{k+1}$  pour lesquelles  $(i, j_k) \in D$  et  $(i+1, j_{k+1}) \in D$ . Dénotons la suite résultante par  $J_{(1)}$ . Nous répétons ensuite ce procédé récursivement sur la suite  $J_{(1)}$  jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de telle paire. Dénotons le résultat final par  $f(i, D) = (f_1, f_2, \dots, f_q)$ . Par construction, la suite  $f(i, D)$  est telle que

$$(i, f_k) \in D \implies (i, f_k + 1) \in D. \quad (1.1)$$

Le principe derrière cette construction est que s'il nous est permis de modifier les éléments du diagramme  $D$  dans les colonnes données par  $f(i, D)$  et les lignes  $i, i+1$  de telle sorte que le résultat  $D'$  satisfasse (1.1), alors  $f(i, D) = f(i, D')$ . Dénotons par  $up(i, D)$  le plus petit indice  $k$  pour lequel  $(i, f_k) \in D$ . Si  $(i+1, f_q) \in D$  nous posons  $up(i, D) = q+1$ . Nous avons maintenant tous les ingrédients nécessaires pour définir la bijection voulue. Si  $a = b$ , il n'y a rien à faire et nous posons  $D' = D$ ; c'est un point fixe. Si  $a < b$  alors  $up(i, D) > b-a$  et nous posons  $D'$  le diagramme obtenu de  $D$  en remplaçant les éléments  $(i+1, f_{up(i, D)-1}), (i+1, f_{up(i, D)-2}), \dots, (i+1, f_{up(i, D)-b+a})$  par  $(i, f_{up(i, D)-1}), (i, f_{up(i, D)-2}), \dots, (i, f_{up(i, D)-b+a})$ . Le diagramme  $D' = m(i, f_{up(i, D)-b+a}) \cdots m(i, f_{up(i, D)-2})m(i, f_{up(i, D)-1})D$  est donc élément de  $\Omega(w)$ . Nous avons aussi que  $x^{D'} = \cdots x_i^{a+b-a} x_{i+1}^{b-b+a} \cdots = \cdots x_i^b x_{i+1}^a \cdots$ . De plus  $D'$  satisfait (1.1) donc  $f(i, D') = f(i, D)$ . Maintenant, si  $a > b$  alors  $q - up(i, D) \geq a - b$  et nous posons  $D'$  le diagramme obtenu de  $D$  en remplaçant les éléments  $(i, f_{up(i, D)})$ ,

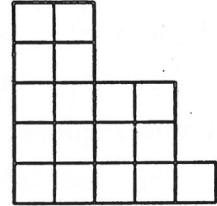
$(i, f_{up(i,D)+1}), \dots, (i, f_{up(i,D)+a-b-1})$  par  $(i+1, f_{up(i,D)}), (i+1, f_{up(i,D)+1}), \dots, (i+1, f_{up(i,D)+a-b-1})$ . Ici nous devons utiliser l'hypothèse  $w_i < w_{i+1}$  pour conclure que le diagramme  $D'$  est obtenu de  $D$  par une séquence de mouvements légaux. En effet les mouvements de la sorte utilisés dans ce cas sont légaux seulement si les éléments déplacés apparaissent plus haut dans  $D(w)$ , ce qui est nécessairement le cas si  $w_i < w_{i+1}$ . Donc  $D' \in \Omega(w)$ ,  $x^{D'} = \dots x_i^{a-a+b} x_{i+1}^{b+a-b} \dots = \dots x_i^b x_{i+1}^a \dots$  et  $f(i, D') = f(i, D)$ . Nous avons donc la bijection désirée.

Pour conclure cette section, il nous reste à montrer P6. Pour ceci il suffit d'exhiber une bijection  $D \leftrightarrow (D_1, D_2)$  entre  $\Omega(u \times v)$  et  $\Omega(u) \times \Omega(1 \times v)$  telle que  $x^D = x^{D_1} x^{D_2}$ . Celle-ci est obtenue en posant, pour  $D \in \Omega(u \times v)$ ,  $D_1$  égal au diagramme  $D$  restreint aux colonnes  $1, 2, \dots, n$  et  $D_2$  égal au diagramme  $D$  restreint aux colonnes  $n+1, n+2, \dots, n+m$ . Cette opération est bien bijective et satisfait  $x^D = x^{D_1} x^{D_2}$ . Il nous suffit donc de vérifier que  $D_1 \in \Omega(u)$ , que  $D_2 \in \Omega(1 \times v)$  et que toute paire  $(D_1, D_2)$  est obtenue. Notons d'abord que nous avons  $D(u \times v) \leftrightarrow (D(u), D(1 \times v))$ . Puisque  $D = m_1 m_2 \dots m_k D(u \times v)$  avec les  $m_i$  des mouvements légaux, nous pouvons obtenir  $D_1$  en effectuant sur  $D(u)$  les mouvements  $m_i$  qui ne concernent que les colonnes  $1, 2, \dots, n$ , donc  $D_1 \in \Omega(u)$ . Similairement, nous pouvons obtenir  $D_2$  en effectuant sur  $D(1 \times v)$  les mouvements  $m_i$  qui ne concernent que les colonnes  $n+1, n+2, \dots, n+m$ , donc  $D_2 \in \Omega(1 \times v)$ . Par un argument similaire on montre que si  $(D_1, D_2) \in \Omega(u) \times \Omega(1 \times v)$  alors  $D \in \Omega(u \times v)$ .

## 2. LES PERMUTATIONS GRASSMANNIENNES.

Avant d'aborder le cas des permutations grassmanniennes, nous allons rappeler brièvement quelques concepts se rattachant aux fonctions de Schur. Un *partage*  $\lambda$  d'un entier  $n$  est une suite d'entiers  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0$  tels que  $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$ . Un *diagramme de Ferrer* de forme  $\lambda$  est l'ensemble des points  $(i, j)$  tels que  $1 \leq i \leq k$  et  $1 \leq j \leq \lambda_i$ . Nous visualisons un tel diagramme en plaçant une case vide en position  $(i, j)$  et en plaçant les lignes de bas en haut. Par exemple si  $\lambda = (5, 4, 4, 2, 2)$  alors le diagramme

de Ferrer correspondant est



Un tableau de Young de forme  $\lambda$  est un diagramme de Ferrer de forme  $\lambda$  dans lequel on place des entiers positifs dans les cases de telle sorte qu'ils soient croissants dans les lignes de gauche à droite et strictement croissants dans les colonnes de bas en haut. Un exemple de tableau de Young de forme  $(5, 4, 4, 2, 2)$  est donné ci-bas.

	7	7
	6	6
$t =$	4	5
	6	6
	2	3
	3	5
	1	1
	2	4

Pour un tableau de Young  $t$  nous dénotons par  $x^t$  le monôme  $x^{\mu_1}x^{\mu_2}x^{\mu_3}\dots$  où  $\mu_i$  est le nombre d'apparitions du nombre  $i$  dans  $t$ . Par exemple, pour le tableau de Young de l'exemple précédent, nous avons

$$x^t = x_1^3 x_2^2 x_3^2 x_4^2 x_5^2 x_6^4 x_7^2.$$

Nous pouvons maintenant définir la fonction de Schur indiquée par le partage  $\lambda$  comme suit [16]:

$$S_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_r) = \sum_t x^t \quad (2.1)$$

où la somme est prise sur tous les tableaux de Young remplis par des entiers entre 1 et  $r$ . Il est bien connu que les fonctions de Schur sont totalement symétriques. En particulier,

$$S_\lambda(x_r, \dots, x_2, x_1) = S_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_r). \quad (2.2)$$

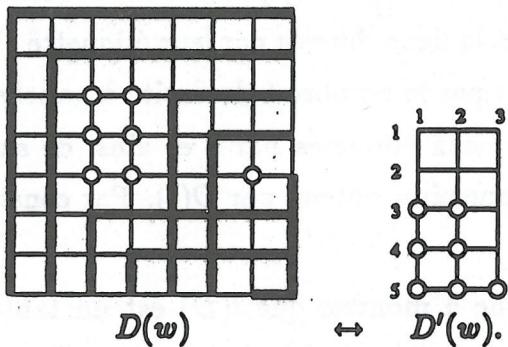
Donc nous pouvons remplacer les tableaux de Young dans (2.1) par des tableaux qui sont décroissants dans les lignes et colonnes, tout en conservant l'égalité. Nous dénommons ces derniers *tableaux de Young décroissants*.

Le but de cette section est de montrer que pour une permutation grassmannienne

$w = w_1 < \dots < w_r > w_{r+1} < \dots$  de forme  $\lambda = \lambda(w)$  nous avons

$$S_w = S_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_r). \quad (2.3)$$

Pour cela, fixons  $w$  grassmannienne de forme  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ . Notons que  $D(w)$  a  $\lambda_i$  éléments dans la ligne  $r - i + 1$ . De plus, si  $(j_1, j_2, \dots, j_{\lambda_1})$  sont les colonnes où les éléments de la ligne  $r$  apparaissent alors les éléments de la ligne  $r - i + 1$  sont dans les colonnes  $(j_1, j_2, \dots, j_{\lambda_i})$ . Pour simplifier les preuves, nous pouvons donc remplacer le diagramme  $D(w)$  par  $D'(w) \subset [1..r] \times [1..\lambda_1]$ . Par exemple si  $w = (1, 2, 5, 6, 8, 3, 4, 7)$  alors  $D(w)$  et  $D'(w)$  sont donnés ci-dessous.



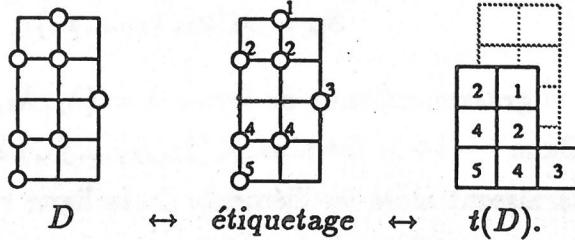
Dans la même veine, nous dénotons par  $\Omega'(w)$  les diagrammes obtenus de  $D'(w)$  par une séquence quelconque de mouvements légaux. Il est clair que dans ce cas

$$S_w = \sum_{D \in \Omega'(w)} x^D. \quad (2.4)$$

L'égalité (2.3) découlera de (2.1), (2.2) et (2.4) si l'on a une bijection  $t \leftrightarrow D$  entre l'ensemble des tableaux de Young décroissants de forme  $\lambda$  remplis avec les nombres  $1, 2, \dots, r$  et les diagrammes de  $\Omega'(w)$  tels que  $x^t = x^D$ . C'est à cette tâche que nous dévouons le reste de cette section.

La description de la bijection est relativement simple. Partons avec un diagramme  $D \in \Omega'(w)$ . Nous étiquetons chacun des éléments  $(i, j) \in D$  avec le nombre ' $i$ ' puis nous replaçons ces éléments à leur position initiale dans  $D'(w)$ . Ceci nous donne un tableau  $t(D)$  de forme  $\lambda$ . Il est clair que la correspondance  $D \leftrightarrow t(D)$  est bijective et que  $x^{t(D)} = x^D$ . La question est de montrer que  $t(D)$  est un tableau de Young décroissant et que tout tableau

de Young décroissant est obtenu de cette façon. Avant tout, voici un exemple.



Montrons d'abord que la correspondance  $t(D)$  est surjective. Pour cela prenons  $t$  un tableau de Young décroissant de forme  $\lambda$ . En utilisant  $t$  nous étiquetons le diagramme  $D'(w)$ . Il suffit ensuite de déplacer, par des mouvements légaux, les éléments de  $D'(w)$  afin de les placer dans la ligne donnée par leur étiquette. Pour ceci nous déplaçons d'abord les éléments étiquetés par le nombre 1 de droite à gauche. Puis les éléments étiquetés par le nombre 2, ensuite ceux étiquetés par 3 et ainsi de suite jusqu'à ceux étiquetés par  $r$ . Dénotons le diagramme ainsi obtenu par  $D(t)$ . Par construction nous avons  $D(t) \in \Omega'(w)$  et  $t(D(t)) = t$ .

Il nous reste donc à montrer que  $t(D)$  est un tableau de Young décroissant. Pour ceci nous utiliserons un lemme de [2]. Avant, nous devons définir la notion de diagramme  $\alpha$ -décroissant. Soit  $D$  un diagramme et posons  $\alpha_{i,j}(D)$  le nombre d'éléments de  $D$  dans la colonne  $j$  et dans les lignes  $i' \geq i$ . Clairement nous avons  $\alpha_{i,j}(D) \geq \alpha_{i+1,j}(D)$ . Si de plus nous avons  $\alpha_{i,j}(D) \geq \alpha_{i,j+1}(D)$  alors  $D$  est dit  $\alpha$ -décroissant. Nous énonçons sans preuve le lemme suivant.

### Lemme 2.1 [2].

$t(D)$  est un tableau de Young si et seulement si  $D$  est  $\alpha$ -décroissant.

Nous en sommes donc à montrer que tout diagramme  $D \in \Omega'(w)$  est  $\alpha$ -décroissant. Nous procérons par induction sur le nombre de mouvements légaux. Bien sûr  $D'(w)$  est  $\alpha$ -décroissant. Supposons que  $D \in \Omega'(w)$  soit  $\alpha$ -décroissant et que  $D' = m(r,c)D$ . Deux cas peuvent se produire. Ou bien  $(r,c) \in D$ , alors  $\alpha_{i,j}(D') = \alpha_{i,j}(D)$  pour tout  $(i,j) \neq (r+1,c)$  et  $\alpha_{r+1,c}(D') = \alpha_{r+1,c}(D) + 1 = \alpha_{r,c}(D)$ , ou bien  $(r+1,c) \in D$ , alors  $\alpha_{i,j}(D') = \alpha_{i,j}(D)$  pour tout  $(i,j) \neq (r+1,c)$  et  $\alpha_{r+1,c}(D') = \alpha_{r+1,c}(D) - 1 = \alpha_{r+2,c}(D)$ . Dans le premier cas la seule inégalité que nous devons vérifier est " $\alpha_{r+1,c-1}(D') \geq \alpha_{r+1,c}(D')$ ". Mais

$$\alpha_{r+1,c-1}(D') = \alpha_{r+1,c-1}(D) \geq \alpha_{r,c-1}(D) \geq \alpha_{r,c}(D) = \alpha_{r+1,c}(D').$$

Dans le second cas, nous avons

$$\alpha_{r+1,c}(D') = \alpha_{r+2,c}(D) \geq \alpha_{r+2,c+1}(D) = \alpha_{r+1,c+1}(D) = \alpha_{r+1,c+1}(D')$$

et ceci complète la preuve de (2.3).

### 3. QUELQUES DISCUSSIONS SUR DES PROBLÈMES OUVERTS.

Discutons d'abord le cas où  $w$  est une permutation vexillaire. Soit  $q_i = \min\{j - 1 : j > i \text{ and } w_j < w_i\}$ . Posons  $\phi(w) = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$  la suite  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$  réarrangée en ordre croissant. La suite  $\phi(w)$  est appelée le drapeau de  $w$  [17][18]. M. Wachs a montré dans [18] que la fonction de Schur  $S_\lambda$  évaluée au drapeau d'alphabet  $X_{\phi_1}, X_{\phi_2}, \dots, X_{\phi_n}$  est donnée par la formule suivante:

$$S_\lambda(X_{\phi_1}, X_{\phi_2}, \dots, X_{\phi_n}) = \sum_t x^t \quad (3.1)$$

où la somme est sur tout tableau de Young de forme  $\lambda$  rempli avec les nombres  $1, 2, \dots, r$  de telle sorte que le nombre  $i$  n'apparaît jamais dans une ligne  $l > \phi_i$ . En fait M. Wachs a montré bien plus. Elle a aussi montré l'égalité

$$S_\lambda(X_{\phi_1}, X_{\phi_2}, \dots, X_{\phi_n}) = S_w \quad (3.2)$$

pour  $\lambda = \lambda(w)$  et  $\phi = \phi(w)$ . Ici nous voudrions avoir une preuve bijective de (3.2) qui utilise l'égalité (3.1). Plus précisément, l'on remarque que pour une permutation vexillaire  $w$  les lignes de  $D(w)$  peuvent toujours être réordonnées de façon telle que si  $(j_1, j_2, \dots, j_k)$  sont les colonnes où se situent les éléments d'une ligne alors les éléments de la ligne suivante de cet ordre sont dans un sous-ensemble de ces colonnes. Ceci caractérise complètement les permutations vexillaires. Pour construire une preuve dans le même esprit que la section 2, nous devrions étiqueter chaque élément  $(i, j)$  de  $D \in \Omega(w)$  par ' $i$ ' puis les replacer à leur position initiale dans  $D(w)$ . La difficulté ici est de trouver une façon de placer les éléments de  $D(w)$  de telle sorte que le résultat soit un tableau de Young. Remarquons en passant que l'étiquette  $i$  ne peut jamais être dans la  $r^{\text{ième}}$  ligne pour l'ordre des lignes comme ci-haut et  $r > \phi_i(w)$ . Ceci laisse présager que cette approche est bonne mais quelques technicalités restent encore à être montrées.

Passons maintenant à la formule de Monk. Celle-ci établit que pour une transposition simple  $s_r = (r, r+1)$  nous avons

$$S_{s_r} S_w = \sum_t S_{wt} \quad (3.3)$$

où la somme est prise sur toutes les transpositions  $t = (i, j)$  telles que  $i \leq r < j$  et que  $\ell(wt) = \ell(w) + 1$ . Ici une preuve bijective serait une correspondance entre l'union disjointe des diagrammes de  $\Omega(wt)$  pour les  $t$  comme dans (3.3) et les paires de diagrammes dans  $\Omega(s_r) \times \Omega(w)$ . À ce moment, nous n'avons pas de candidat pour une telle correspondance.

Pour une permutation  $w \neq$  identité, soit  $r$  le plus petit indice tel que  $w_{r+1} < w_{r+2} < w_{r+3} < \dots$  et soit  $v = wt_{rs}$  où  $s$  est le plus grand indice tel que  $w_s < w_r$ . Nous avons

$$S_w = x_r S_v + \sum_{w'} S_{w'} \quad (3.4)$$

où  $w' = vt_{qr}$  pour  $q < r$  et  $\ell(w') = \ell(w)$ . L'équation (3.4) est appelée la *transition maximale* de  $w$ . Dans cette équation nous remarquons que les  $w'$  qui apparaissent sont lexicographiquement plus petits que  $w$ . Nous pouvons donc répéter (3.4) récursivement sur  $v$  et les  $w'$  ce qui nous donne ultimement le polynôme  $S_w$ . Nous avons un candidat pour une preuve bijective de (3.4) mais la correspondance est trop complexe pour être traitée ici en quelques lignes. De plus sa complexité ne facilite pas la tâche pour montrer qu'elle fonctionne!

## RÉFÉRENCES

- [1] N. Bergeron, "A Combinatorial Construction of the Schubert Polynomials", à paraître (1990).
- [2] N. Bergeron, A.M. Garsia "Sergeev's Formula and the Littlewood-Richardson Rule", *LAMA* 27 (1990).
- [3] I.N. Bernstein, I.M. Gelfand, S.I. Gelfand, "Schubert cells and cohomology of the spaces  $G/P$ ", *Russian Math. Surveys* 28 (1973), 1–26.
- [4] M. Demazure, "Désingularisation des variétés de Schubert généralisées", *Ann. Sc. E.N.S. (4)* 7 (1974) 53–58.
- [5] A. Kohnert, Ph. D. dissertation, Universität auf Bayreuth (1990).
- [6] A. Lascoux, "Puissances extérieures, déterminants et cycles de Schubert", *Bull. Soc. Math. France* 102 (1974) 161–179.

- [7] A. Lascoux, "Classes de Chern des variétés de drapeaux", *C.R. Acad. Sci. Paris* **295** (1982) 393–398.
- [8] A. Lascoux, "Anneau de Grothendieck de la variété des drapeaux", *preprint* (1988).
- [9] A. Lascoux and M.-P. Schützenberger, "Polynômes de Schubert", *C.R. Acad. Sci. Paris* **294** (1982) 447–450.
- [10] A. Lascoux and M.-P. Schützenberger, "Structure de Hopf de l'anneau de cohomologie et de l'anneau de Grothendieck d'une variété de drapeaux", *C.R. Acad. Sci. Paris* **295** (1982) 629–633.
- [11] A. Lascoux and M.-P. Schützenberger, "Symmetry and flag manifolds", *Springer Lecture Notes* **996** (1983) 118–144.
- [12] A. Lascoux and M.-P. Schützenberger, "Schubert polynomials and the Littlewood-Richardson rule", *Letters in Math. Physics* **10** (1985) 111–124.
- [13] A. Lascoux and M.-P. Schützenberger, "Interpolation de Newton à plusieurs variables", Sémin. d'Algèbre M.P. Malliavin 1983-84, *Springer Lecture Notes* **1146** (1985) 161–175.
- [14] A. Lascoux and M.-P. Schützenberger, "Symmetrization operators on polynomial rings", *Funkt. Anal.* **21** (1987) 77–78.
- [15] A. Lascoux and M.-P. Schützenberger, "Schubert and Grothendieck polynomials", *preprint* (1988).
- [16] I.G. Macdonald, "Symmetric functions and Hall polynomials," *Oxford University Press* (1979).
- [17] I.G. Macdonald, "Schubert polynomials," *Preprint UCSD* (1990).
- [18] M.L. Wachs, "Flagged Schur functions, Schubert polynomials and symmetrizing operators", *J. Comb. Theory (A)* **40** (1985) 276–289.

