

UNE INVOLUTION SUR LES CHEMINS DE DYCK

J.C.Lalanne

Université de Bordeaux I, U.F.R. de Mathématiques et Informatique

LaBRI, Unité de recherche associée au Centre National de la Recherche Scientifique n° 726

351, Cours de la Libération

33405 TALENCE CEDEX

FRANCE

1. INTRODUCTION.

Les *chemins de Dyck* sont des objets classiques de la Combinatoire ([10], [6]). Le nombre d'éléments de l'ensemble \mathcal{D}_p des chemins de Dyck de longueur $2p$ n'est autre que le fameux nombre de Catalan $C_p = \frac{1}{p+1} \binom{2p}{p}$. Les *formes diagonales gauches* ou *polyominos parallélogramme* sont

également bien connus en Combinatoire et le nombre de polyominos parallélogramme de périmètre $2p+2$ est aussi C_p ([9], [14]). Les derniers résultats ([4], [5], [8], [11]) concernant l'énumération des polyominos parallélogrammes (plus généralement des polyominos parallélogramme à franges) selon l'aire et le nombre de colonnes ont fait apparaître des fonctions génératrices s'exprimant comme rapport de q-analogues de fonctions de Bessel. Diverses interprétations combinatoires des fonctions obtenues ont été données, en particulier, à l'aide d'arbres valués et de multichaines d'un ensemble partiellement ordonné. Les deux fonctions génératrices obtenues conduisent à des expressions des coefficients de formes différentes. A l'aide d'une involution sur l'ensemble \mathcal{D} des chemins de Dyck nous donnons dans ce papier une preuve bijective de l'équivalence des deux interprétations précédentes.

Dans la partie 2, nous introduisons un nouveau paramètre HP_v sur l'ensemble \mathcal{D} . Nous construisons, dans la partie 3, une transformation involutive sur \mathcal{D} qui conserve la longueur et le paramètre HP_v et nous donnons en particulier une explication directe et géométrique de cette bijection.

Pour v réel, $v > -1$, on pose $\mathbb{J}_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{v+n}}{n! \Gamma(v+n+1)}$. Cette fonction \mathbb{J}_v est liée à la fonction

de Bessel classique de l'Analyse J_v par la relation $x^v J_v(x) = 2^v \mathbb{J}_v\left(\frac{x^2}{4}\right)$.

Pour tout réel α , on note $[\alpha] = \frac{1-q^\alpha}{1-q}$ le *q-analogue* de α et, si $\alpha > -1$, on définit le *q-analogue* de $\Gamma(\alpha)$ par $[\Gamma(\alpha)] = (1-q)^{1-\alpha} \prod_{n \geq 0} \frac{1-q^{n+1}}{1-q^{n+\alpha}}$, en notant Γ la fonction Gamma classique.

En particulier, lorsque n est un entier naturel, $[n] = 1+q+q^2+\dots+q^{n-1}$ est le q -analogue de n et $[\Gamma(n+1)] = [1].[2]\dots[n]$ est le q -anologue classique de $n!$, que l'on notera alors $[n!]$. On trouvera quelques propriétés des q -analogues des fonctions classiques dans ([1], [2], [7]).

On définit alors les fonctions suivantes, où I_v désigne un q -anologue de la fonction \mathcal{I}_v .

$$I_v(x,q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\binom{v+n}{2}}}{[n!] [\Gamma(v+n+1)]} x^{v+n} \quad \Phi_v(x,q) = \frac{I_{v+1}(x,q)}{I_v(x,q)}$$

$$\text{Les résultats obtenus dans [13] montrent que } \Phi_v \text{ satisfait à } \Phi_v(x,q) = \sum_{n=1}^{\infty} q^{nv} \frac{\alpha_n(q)}{\beta_n(q)} x^n \text{ où}$$

$\alpha_n(q)$ et $\beta_n(q)$ sont des fonctions q -analogues des polynômes intervenant dans le résultat de Carlitz, sur le quotient des fonctions de Bessel $\frac{J_{v+1}}{J_v}$ ([3]).

Les premières valeurs des fonctions α_n sont:

$$\alpha_1(q) = 1, \quad \alpha_2(q) = 1, \quad \alpha_3(q) = 1+q^{v+2},$$

$$\alpha_4(q) = (1+q+2q^{v+2}+3q^{v+3}+2q^{2v+4}+q^{2v+5}+q^{2v+6}) + q^2(1+3q^{v+2}+q^{2v+5}) [v]$$

et les fonctions β_n satisfont à $\beta_n(q) = \prod_{k=1}^n [v+k]^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x .

Les résultats de [8] montrent que les chemins de Dyck peuvent être mis en bijection avec certaines multichaines d'un ensemble partiellement ordonné. Nous définissons, dans la partie 4, une nouvelle valuation, le v -poids p_v , sur ces multichaines et montrons que la bijection précédente transforme HP_v en p_v . La somme $p_v(\mathcal{C}_n)$ des poids des multichaines à support de longueur $2n$ s'écrit:

$$p_v(\mathcal{C}_n) = q^{nv} \sum_{w \in \mathcal{D}_n} \frac{\prod_{s \text{ pic de } w} q^{v+h(s)+1}}{\prod_{s \text{ sommet de } w} (1-q^{v+h(s)+1})}$$

où $h(s)$ est la hauteur du sommet s du chemin de Dyck w . Les coefficients $p_v(\mathcal{C}_n)$ sont des fractions

$$\text{de la forme } p_v(\mathcal{C}_n) = \frac{q^{(n+1)(v+1)}}{(1-q)^{2n-1}} \frac{\alpha'_{n+1}(q)}{\beta'_{n+1}(q)} \text{ où les fonctions } \beta'_n \text{ satisfont à } \beta'_n(q) = \prod_{k=1}^n [v+k]^{n-k+1}.$$

Les résultats obtenus dans [13] prouvent, dans le cas où v est entier naturel, que la fonction génératrice C_v de ces multichaines satisfait à la relation $C_v(t,q) = (1-q) \Phi_v\left(\frac{qt}{(1-q)^2}, q\right)$.

Dans la partie 5, nous définissons sur l'ensemble \mathfrak{B} des arbres binaires complets une nouvelle valuation, le v -poids π_v , et nous montrons que la bijection entre chemins de Dyck et arbres binaires complets, établie dans [8] transforme le paramètre HP_v en π_v . La somme des poids des éléments de l'ensemble \mathfrak{B}_n des arbres binaires complets de taille $2n-1$ s'écrit:

$$\pi_v(\mathfrak{B}_n) = \sum_{A \in \mathfrak{B}_n} \frac{\prod_{s \text{ feuille ou fils gauche de } A} q^{v+\mathfrak{F}(s)}}{\prod_{s \text{ sommet de } A} (1-q^{v+\mathfrak{F}(s)})}$$

où $\mathfrak{F}(s)$ est le nombre de feuilles du sous-arbre de A de racine le sommet s .

Les résultats obtenus dans [13] montrent que les coefficients $\pi_v(\delta_n)$ sont des fractions qui se présentent sous la forme $\pi_v(\delta_n) = \frac{q^{n(v+1)}}{(1-q)^{2n-1}} \frac{\alpha_n(q)}{\beta_n(q)}$ et que la fonction génératrice S_v de ces arbres binaires valués satisfait à $S_v(t,q) = (1-q) \Phi_v\left(\frac{qt}{(1-q)^2}, q\right)$.

A l'aide de l'involution sur les chemins de Dyck, nous obtenons alors dans la dernière partie une preuve bijective de l'égalité des fonctions génératrices des arbres valués et des multichaines.

2. DEFINITIONS ET NOTATIONS.

Notation. Soit A un *alphabet*, on note A^* le *monoïde libre engendré* par A . Si a est une *lettre* de A et u un *mot* de A^* , on note $|u|_a$ le nombre d'occurrences de a dans u .

Définition 2.1. Un *mot de Dyck* est un mot $w \in \{x, \bar{x}\}^*$ vérifiant les deux conditions:

- (i) $|w|_x = |w|_{\bar{x}}$
- (ii) pour toute factorisation $w = uv$, alors $|u|_x \geq |u|_{\bar{x}}$.

Définition 2.2. Un *chemin de Dyck* est un chemin $w = (s_0, s_1, \dots, s_{2p})$ de $\mathbb{P} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $s_0 = (0,0)$, $s_{2p} = (2p,0)$ et pour tout i , $0 \leq i \leq 2p-1$, le pas (s_i, s_{i+1}) est un pas élémentaire Nord-Est ($s_i = (x, y), s_{i+1} = (x+1, y+1)$) ou Sud-Est ($s_i = (x, y), s_{i+1} = (x+1, y-1)$).

Un *pic* (resp. *creux*) est un point s_i tel que le pas (s_{i-1}, s_i) est un pas Nord-Est (resp. Sud-Est) et le pas (s_i, s_{i+1}) un pas Sud-Est (resp. Nord-Est).

La *hauteur* $h(s_i)$ du sommet $s_i = (x_i, y_i)$ est son ordonnée y_i .

On identifiera les chemins de Dyck de longueur $2p$ et les mots de Dyck $w = x_1 \dots x_{2p}$ de longueur $2p$ en associant à tout pas (s_{i-1}, s_i) Nord-Est (resp. Sud-Est) la lettre $x_i = x$ (resp. $x_i = \bar{x}$). Les *pics* (resp. *creux*) d'un chemin de Dyck correspondent alors avec les facteurs $x \bar{x}$ (resp. $\bar{x} x$) du mot de Dyck correspondant. Les *double-montées* (resp. *double-descentes*) correspondent avec les facteurs xx (resp. $\bar{x} \bar{x}$).

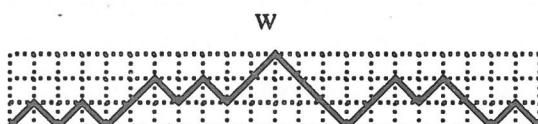


Figure 1. Un chemin de Dyck w .

Notation. On désigne par DL (resp. DM, DD, NP, HP) les fonctions demi-longueur (resp. nombre de double montées, nombre de double descentes, nombre de pics, somme des hauteurs des pics) définies sur l'ensemble \mathcal{D} des chemins (ou mots) de Dyck.

Pour tout réel $v > -1$, on note HP_v la fonction définie sur \mathcal{D} par $HP_v(w) = HP(w) + v DL(w)$.

Exemple. Le chemins de Dyck w de la figure 1 est tel que $DL(w)=11$, $DM(w)=3$, $DD(w)=3$, $NP(w)=8$, $HP(w)=14$ et $HP_v(w)=14 + 11v$.

Définition 2.3. Un mot w de $\{x, \bar{x}, a\}^*$ est un *mot de Motzkin* lorsque son image, par le morphisme "effaçant" les lettres a , est un mot de Dyck.

Définition 2.4. Un *chemin* de Motzkin est un chemin $w = (s_0, s_1, \dots, s_n)$ de \mathbb{P} tel que $s_0 = (0, 0)$, $s_n = (n, 0)$ et pour tout i , $0 \leq i \leq n$, le pas (s_i, s_{i+1}) est un pas élémentaire Nord-Est, Sud-Est ou Est ($s_i = (x, y), s_{i+1} = (x+1, y)$).

Notation. On note \mathcal{M} l'ensemble des mots de Motzkin.

Définition 2.5. De manière récursive, un *arbre binaire* A sur un ensemble de *sommets* S est soit vide, soit un triplet $(r(A), g(A), d(A))$ où $r(A)$ est un sommet appelé *racine* de A et $g(A)$ et $d(A)$ deux arbres binaires, respectivement *sous-arbre gauche* et *sous-arbre droit* de A . Lorsqu'elle existe, la racine de $g(A)$ (resp. $d(A)$) est appelée *fils gauche* (resp. *fils droit*) du sommet $r(A)$. On dit que $r(A)$ est *père* de $r(g(A))$ (resp. $r(d(A))$). Un sommet est appelé *feuille* s'il n'a pas de fils, *sommet interne* sinon. Un arbre binaire est dit *complet* si chaque sommet interne a deux fils.

Notation. On note $\mathcal{Q}(s)$ le sous-arbre de racine s et $\mathcal{F}(s)$ le nombre de feuilles de $\mathcal{Q}(s)$. On note $\mathcal{F}(A)$ le nombre de feuilles de l'arbre A . La *taille* de A est le nombre de sommets de A , soit $2\mathcal{F}(A)-1$ si A est complet. On notera \mathcal{B} l'ensemble des arbres binaires complets et $\mathcal{B}_n = \{A \in \mathcal{B}; \mathcal{F}(A) = n\}$.

Définition 2.6. Le *parcours en ordre préfixe* d'un arbre binaire est le parcours de l'ensemble de ses sommets en "visitant" d'abord la racine de l'arbre, puis le sous-arbre gauche en ordre préfixe, puis le sous-arbre droit en ordre préfixe.

3. L'INVOLUTION σ SUR LES CHEMINS DE DYCK.

Soit w un chemin de Dyck. Une rotation de 45° transforme w en un chemin w' de \mathbb{P} constitué de segments horizontaux et verticaux. Ce chemin w' forme un "escalier". Chaque segment horizontal (resp. vertical) étant une "*marche*" (resp. "*contremarche*"). La longueur de chacun des segments correspond à la *largeur* d'une contremarche ou à la *hauteur* d'une marche. L'ordonnée (resp. l'abscisse) de chaque segment horizontal (resp. vertical) correspond au *niveau* (resp. *éloignement*) de la marche (resp. contremarche). Toute marche (resp. contremarche) de hauteur $m \geq 2$ (resp. largeur $c \geq 2$) est associée à $m-1$ double-montées (resp. $c-1$ double-descentes) successives du chemin de Dyck w . Traçons alors, "sous" le chemin w' , les demi-droites horizontales dans la direction Est, issues des sommets extrémité initiale et double-montées de w , ainsi que les demi-droites verticales dans la direction Sud issues des sommets extrémité finale et double-descentes de w . Considérons le chemin w'' de \mathbb{P} , tracé sur ces demi-droites suivant les directions Est et Nord, en partant de l'extrémité initiale de w' dans la direction Est et en changeant de direction chaque fois que l'on rencontre un point d'intersection entre deux demi-droites horizontale et verticale. Ce chemin w'' , par symétrie par rapport à la première bissectrice, puis rotation de 45° dans le sens inverse détermine un chemin de Dyck $\sigma(w)$.

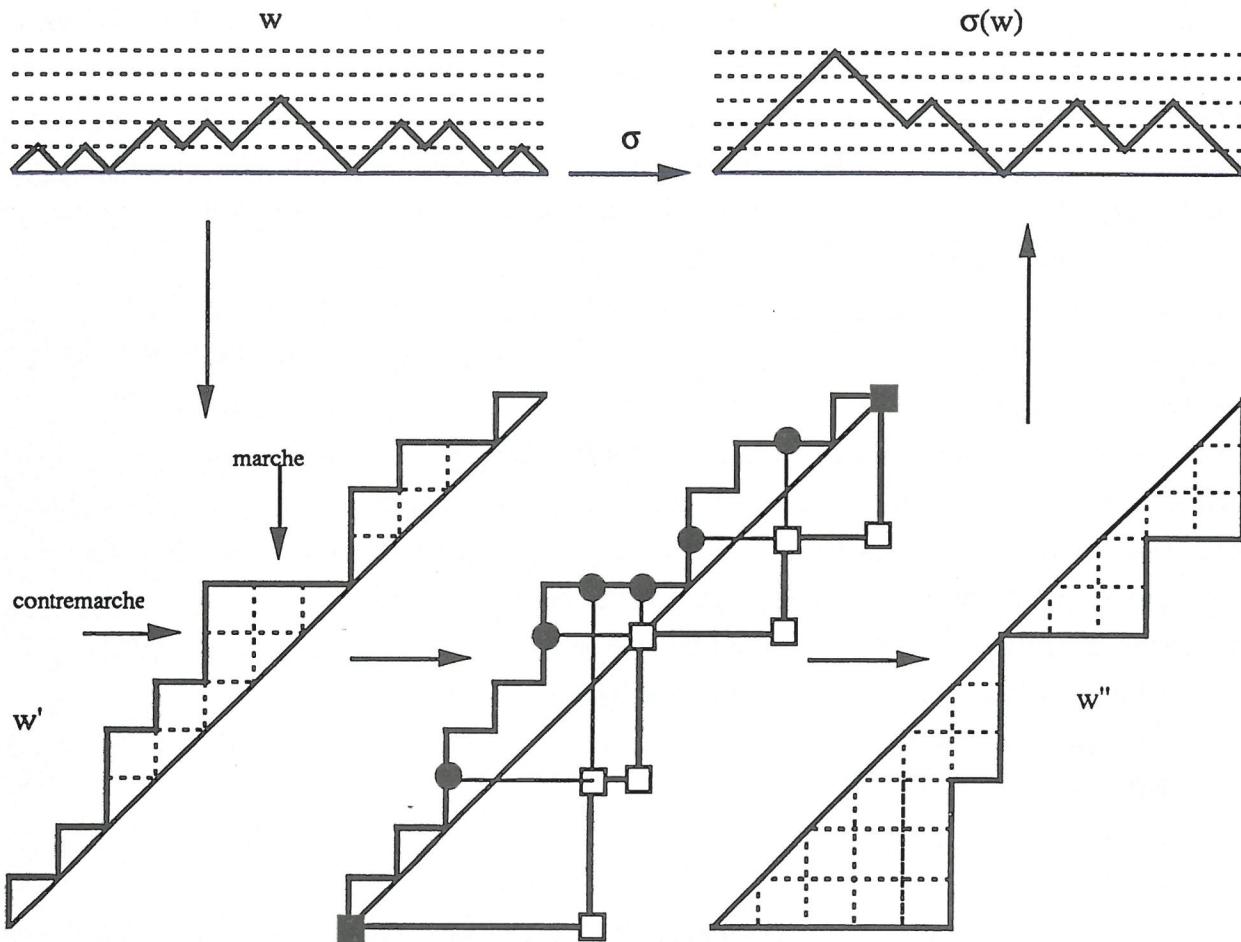


Figure 2. L'involution σ .

Notation. Soit w un mot de Dyck de longueur $2p$ ($p \geq 1$) ayant n pics ($1 \leq n \leq p$). Ce mot w s'écrit de manière unique $w = x^{i_1} \bar{x}^{j_1} x^{i_2} \bar{x}^{j_2} \dots x^{i_n} \bar{x}^{j_n}$, où pour tout $k \in [1..n]$ on a $1 \leq i_k \leq n$, $1 \leq j_k \leq n$. Pour tout k , $0 \leq k \leq n$, on pose $m_k = \sum_{r=1}^k i_r$ et $c_k = \sum_{r=1}^k j_r$.

Définition 3.1. Un chemin de Dyck w de longueur $2p$, ayant n pics est entièrement déterminé par la donnée des deux suites $M(w) = (m_0, m_1, \dots, m_n)$ et $C(w) = (c_0, c_1, \dots, c_n)$. Les suites $M(w)$ et $C(w)$ correspondent respectivement aux niveaux des "marches" et aux éloignements des "contremarches" de "l'escalier" w' obtenu par rotation de 45° du chemin de Dyck associé à w .

Ces suites (m_0, m_1, \dots, m_n) et (c_0, c_1, \dots, c_n) satisfont aux conditions:

- (D₁) $m_i \leq m_{i+1}$ pour tout entier i tel que $0 \leq i \leq n-1$
- (D₂) $c_i \leq c_{i+1}$ pour tout entier i tel que $0 \leq i \leq n-1$
- (D₃) $c_k \leq m_k$ pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n-1$
- (D₄) $m_0 = c_0 = 0$
- (D₅) $m_n = c_n = p$

et réciproquement, tout couple de suites satisfaisant aux conditions (D₁), (D₂), (D₃), (D₄) et (D₅), détermine un chemin de Dyck w unique de longueur $2p$ ayant n pics. On obtient w à partir des suites (m_0, m_1, \dots, m_n) et (c_0, c_1, \dots, c_n) en posant $i_k = m_k - m_{k-1}$ et $j_k = c_k - c_{k-1}$ pour k , $1 \leq k \leq n$.

Exemple. Le couple de suites $(M(w), C(w))$ associé au chemin de Dyck w de la figure 1, est défini par $M(w)=(0,1,2,4,5,7,9,10,11)$, $C(w)=(0,1,2,3,4,7,8,10,11)$.

Notation. Soit w un chemin de Dyck de longueur $2p$ ayant n pics, et $M(w)=(m_0, m_1, \dots, m_n)$, $C(w)=(c_0, c_1, \dots, c_n)$ les suites associées à w . On note $M'(w)=(m'_0=0, m'_1, \dots, m'_{p-n+1}=p)$ et $C'(w)=(c'_0=0, c'_1, \dots, c'_{p-n+1}=p)$ les suites croissantes définies à partir de $M(w)$ et $C(w)$ telles que:

$$\{m_1, \dots, m_{n-1}\} \cup \{m'_1, \dots, m'_{p-n}\} = \{c_1, \dots, c_{n-1}\} \cup \{c'_1, \dots, c'_{p-n}\} = \{1, \dots, p-1\}$$

Exemple. Pour le chemin w de la figure 1, on a $M'(w)=(0,3,6,8,11)$, $C'(w)=(0,5,6,9,11)$.

Proposition 3.2. Pour tout chemin de Dyck w , le couple de suites $(C'(w), M'(w))$ satisfait aux conditions $(D_1), (D_2), (D_3), (D_4), (D_5)$ et définit donc un chemin de Dyck noté $\sigma(w)$.

Le chemin de Dyck $\sigma(w)$ est déterminé par $M(\sigma(w)) = C'(w)$ et $C(\sigma(w)) = M'(w)$.

Preuve. Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq p-n$, posons $m'_k=i$. Par définition de $M'(w)$, les supports des suites croissantes (m_1, \dots, m_{i-k}) et (m'_1, \dots, m'_k) forment une partition de $\{1, \dots, i\}$. On a donc $m_{i-k} < i$. Mais $c_{i-k} \leq m_{i-k} < i$, ce qui implique $\{c_1, \dots, c_{i-k}\} \subset \{1, \dots, i-1\}$ et par suite $c'_k \geq i$.

Remarque. L'application σ est l'involution définie de façon géométrique précédemment.

Proposition 3.3. Pour tout v et tout chemin de Dyck w , on a:

$$DL(\sigma(w)) = DL(w) \tag{1}$$

$$NP(\sigma(w)) = DM(w)+1 \tag{2}$$

$$DM(\sigma(w)) = NP(w)-1 \tag{3}$$

$$HP_v(\sigma(w)) = HP_v(w) \tag{4}$$

Preuve. Soit w un chemin de Dyck de longueur $2p$ ayant n pics. Soient $M(w) = (m_0, m_1, \dots, m_n)$, $C(w) = (c_0, c_1, \dots, c_n)$, $M'(w) = (m'_0, m'_1, \dots, m'_{p-n+1})$ et $C'(w) = (c'_0, c'_1, \dots, c'_{p-n+1})$ les suites définies à partir de w . On a $DL(\sigma(w))=p$ et $NP(\sigma(w))=p-n+1$ d'où les relations 1), 2) et 3).

D'autre part, la hauteur du $k^{\text{ème}}$ pic de w est $(m_k - c_{k-1})$. Donc $HP(w) = \sum_{k=1}^n (m_k - c_{k-1})$. On a alors:

$$HP(\sigma(w)) = \sum_{k=1}^{p-n+1} (c'_k - m'_k) = \left(\frac{p(p+1)}{2} - \sum_{k=1}^n c_k\right) - \left(\frac{p(p-1)}{2} - \sum_{k=1}^n m_k\right) = HP(w)$$

On en déduit que $HP_v(\sigma(w)) = HP_v(w)$.

On obtient alors le résultat suivant:

Théorème 3.4. L'application σ définit pour tout entier naturel p une involution sur l'ensemble des chemins de Dyck de longueur $2p$ qui conserve le paramètre HP_v .

Notation. Soit $\text{Inv}_\sigma(\mathcal{D}_p)$ l'ensemble des chemins de Dyck de longueur $2p$ invariants par σ . Un chemin de Dyck w associé au couple $(M(w), C(w))$ est élément de $\text{Inv}_\sigma(\mathcal{D}_p)$ si et seulement si l'on a $C(w) = M'(w)$. On en déduit aisément que $\text{Inv}_\sigma(\mathcal{D}_p)$ est vide lorsque p est pair.

Proposition 3.5. Si $p = 2q+1$, le nombre d'éléments de $\text{Inv}_\sigma(\mathcal{D}_p)$ est le nombre de Catalan C_q .

Preuve. Soit w un élément de $\text{Inv}_\sigma(\mathcal{D}_{2q+1})$, alors w est associé à deux suites $(0, m_1, \dots, m_q, p)$ et $(0, c_1, \dots, c_q, p)$ telles que $\{m_1, \dots, m_q\}$ et $\{c_1, \dots, c_q\}$ forment une partition de $\{1, \dots, 2q\}$. D'autre part, pour tout k , $1 \leq k \leq q$, on a $c_k \leq m_k$. Le mot $v \in \{x, \bar{x}\}^*$ ayant, pour tout k , $1 \leq k \leq q$, une lettre x en position c_k et une lettre \bar{x} en position m_k est un mot de Dyck de longueur $2q$.

Réiproquement ce mot v détermine les suites $M(w)$ et $C(w)$ associées à w .

A l'aide de l'involution σ nous allons donner une preuve bijective des deux interprétations combinatoires des q -analogues des fonctions de Bessel obtenues dans [13].

4. LA BIJECTION α ENTRE LES CHEMINS DE DYCK ET LES MULTICHAINES.

Définitions 4.1. Soit (E, \leq) un ensemble partiellement ordonné. On appelle *multichaine* (resp. *chaine*) de *taille* n toute suite croissante (resp. strictement croissante) $\Gamma = (A_1, \dots, A_n)$ de points de E . Une chaîne Γ est *saturée* si pour tout $i=1, \dots, n-1$, il n'existe pas d'élément $A \in E$ tel que $A_i < A < A_{i+1}$. Elle est *maximale* si elle est maximale au sens de l'inclusion (i.e. si elle est saturée et si son plus petit (resp. grand) élément est maximal (resp. minimal) dans E).

Soit p entier, $p \geq 1$. Dans la partie $\Pi_p = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, 1 \leq x \leq y \leq p\}$ du plan \mathbb{P} , on considère la relation d'ordre définie par $(x, y) \leq (x', y')$ si et seulement si $x \leq x'$ et $y \leq y'$. Les chaînes maximales de ce poset sont les chemins de \mathbb{P} , allant de $(1, 1)$ à (p, p) , situés au dessus de la première diagonale, et n'admettant que des pas Est ou Nord. Ces chaînes peuvent être codées par des mots de Dyck de longueur $2p$. Il suffit de noter x chaque pas Nord et \bar{x} chaque pas Est. Le chemin de Dyck s'obtient en fait par une rotation de 45° de la chaîne. La figure 3 montre une multichaine et le chemin associé.

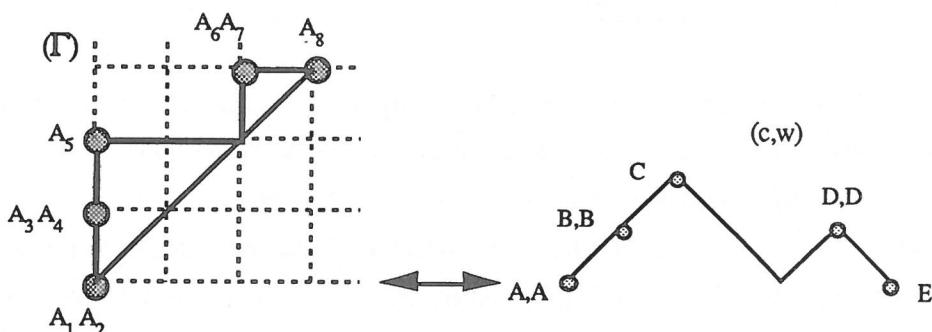


Figure 3. Une multichaine Γ de Π_4 et la multichaine de chemin de Dyck (c, w) correspondante.

Définitions 4.2. Reprenant les définitions de [8], on appelle *multichaîne* de *taille* k d'un chemin de Dyck $w = (s_0, s_1, \dots, s_{2p})$ une suite $c = (t_1, \dots, t_k)$ de k sommets de ce chemin dont les abscisses sont en ordre croissant au sens large. On dira que w est le *support* de la multichaîne (c, w) . Le nombre d'occurrence d'un sommet t de w dans c est appelé *multiplicité* de t dans la multichaîne (c, w) . On dira qu'une multichaîne (c, w) *s'arrête sur chaque pic* lorsque la multiplicité de chaque pic de w est strictement positive.

Notation. Pour tout mot de Dyck w , on note $\mathfrak{C}(w)$ l'ensemble des multichaînes (c, w) s'arrêtant sur chaque pic du support w . On note $\mathfrak{C}_p = \{(c, w) \in \mathfrak{C}(w); w \in \mathcal{D}_p\}$ et $\mathfrak{C} = \{(c, w) \in \mathfrak{C}(w); w \in \mathcal{D}\}$.

Définitions 4.3. Soit $v > -1$ et $(c, w) = ((t_1, \dots, t_k), (s_0, s_1, \dots, s_{2p}))$ une multichaine c du chemin de Dyck w . Le v -*poids* d'un sommet t_i de hauteur h de c est $p_v(t_i) = q^{v+h+1}$. On pose $p_v(c) = \prod_{i=1}^k p_v(t_i)$ et $p_v(w) = q^{pv}$. Le v -*poids* de la multichaine (c, w) est $p_v(c, w) = p_v(c) p_v(w)$.

Exemple. La multichaine $(c,w) = ((A,A,B,B,C,D,D,E), x \ x \ \bar{x} \ \bar{x} \ x \ \bar{x})$ de la figure 3 est telle que $p_v(c,w) = q^{14+11v}$

Définitions 4.4. Etant donné un chemin de Dyck w , on appelle v -valuation des multichaines de $\mathfrak{C}(w)$ la somme des v -poids des multichaines de $\mathfrak{C}(w)$. On notera $p_v(\mathfrak{C}(w))$ cette valuation. On a :

$$p_v(\mathfrak{C}(w)) = \sum_{(c,w) \in \mathfrak{C}(w)} p_v(c,w) \quad \text{et} \quad p_v(\mathfrak{C}_p) = \sum_{w \in \mathfrak{D}_p} p_v(\mathfrak{C}(w)) = \sum_{(c,w) \in \mathfrak{C}_p} p_v(c,w).$$

Proposition 4.5. La somme des v -poids des multichaines de \mathfrak{C}_n est

$$p_v(\mathfrak{C}_n) = q^{nv} \sum_{w \in \mathfrak{D}_n} \frac{\prod_{\substack{s \text{ pic de } w \\ s \text{ sommet de } w}} q^{v+h(s)+1}}{\prod_{s \text{ sommet de } w} (1-q^{v+h(s)+1})}$$

Notation. Soit $c_v(n,k)$ le nombre de multichaines (c,v) de \mathfrak{C} de v -poids q^k , dont le support v a pour longueur $2n$. On note $C_v(t,q) = \sum_{n \geq 0, k \geq 1} c_v(n,k) q^k t^n$.

On rappelle le résultat suivant obtenu dans [11]:

Proposition 4.6. La fonction génératrice des multichaines de \mathfrak{C} selon le v -poids et la longueur du support est la fonction $C_v(t,q) = (1-q) \Phi_v(\frac{qt}{(1-q)^2}, q)$ et on a :

$$p_v(\mathfrak{C}_n) = \frac{q^{n+1}}{(1-q)^{2n+1}} \frac{q^{(n+1)v} \alpha_{n+1}(q)}{\beta_{n+1}(q)}$$

Soit w un chemin de Dyck. En remplaçant dans w chaque facteur $x \ \bar{x}$ par la lettre "a" on obtient un mot de Motzkin $\tau(w)$ que l'on peut définir de manière récursive par

- $\tau(x \ \bar{x} \ u) = a \ \tau(u)$ pour u mot de Dyck quelconque ,
- $\tau(x \ u \ \bar{x} \ v) = x \ \tau(u) \ \bar{x} \ \tau(v)$ pour u mot de Dyck non vide et v mot de Dyck.

Cette application τ de \mathfrak{D} dans \mathfrak{M} consistant à marquer les pics d'un chemin de Dyck est bien connue ([10]) et définit une bijection de \mathfrak{D} dans l'ensemble des mots de Motzkin sans facteur $x \ \bar{x}$. En effaçant les lettres "a" du mot $\tau(w)$, on obtient un mot de Dyck u et une multichaine $\alpha(w) = (c,v)$ de $\mathfrak{C}(v)$ où c est associée aux lettres "a" du mot $\tau(w)$. Cette application α définie par J.M.Fédou ([8]) est une bijection de \mathfrak{D} dans \mathfrak{C} . On trouvera figure 4 un chemin w et la multichaine $\alpha(w)$ associée.

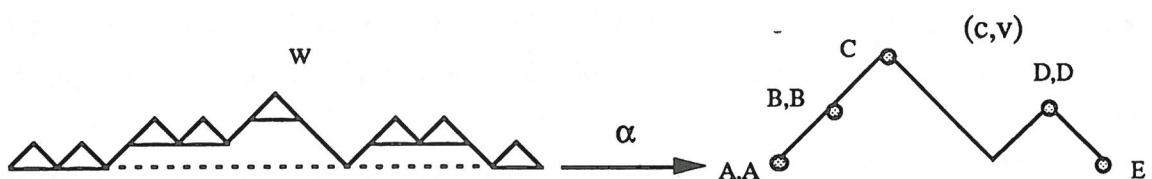


Figure 4. La bijection α

Proposition 4.7. L'application α est une bijection qui transforme un chemin de Dyck w de \mathcal{D}_p , ayant n pics, m double-montées et tel que $HP_v(w) = k$ en une multichaine (c, v) de \mathcal{C}_m de taille n et de v -poids $p_v(c, v) = q^k$.

Preuve. Soit w un chemin de Dyck ayant n pics, m double-montées et tel que $HP_v(w) = k$. Le mot $\tau(w)$ est alors un mot de Motzkin sans facteur $x\bar{x}$ ayant n lettres "a" et m lettres "x". La multichaine $\alpha(w) = (c, v)$ est donc un élément de \mathcal{C}_m de taille n . Un pic de hauteur h de w se transforme en un point de la multichaine de v -poids q^{h+v} . On a donc, en notant $H=HP(w)$, $p_v(c)=q^{H+nv}$ et $p_v(v)=q^{mv}$. Le v -poids de $\alpha(w)$ est donc $p_v(c)p_v(v)=q^k$.

Exemple. La figure 4 montre que la bijection α transforme un chemin de Dyck w satisfaisant à $DL(w) = 11$, $NP(w) = 8$, $DM(w) = 3$ et $HP_v(w) = 14 + 11v$ en une multichaine (c, v) de taille 8, de longueur de support 6 et de v -poids $p_v(c, v) = q^{14 + 11v}$.

5. LA BIJECTION β ENTRE LES CHEMINS DE DYCK ET LES MULTIPARCOURS D'ARBRES.

Définitions 5.1. Reprenant les définitions de [8], on appelle *multiparcours* (p, A) un couple constitué d'un arbre binaire complet A et d'une suite $p=(s_1, \dots, s_k)$ de sommets en ordre préfixe au sens large (cad. pour tout i de $[1, k-1]$, s_{i+1} est soit égal à s_i , soit après s_i dans l'ordre préfixe). A est appelé le *support* de (p, A) et la *multiplicité* d'un sommet s de l'arbre A dans le multiparcours (p, A) est le nombre d'occurrences de ce sommet s dans p . On dira qu'un multiparcours (p, A) *s'arrête sur un sommet* s de A lorsque la multiplicité de ce sommet est strictement positive.

Notation. On note $\mathcal{S}(A)$ l'ensemble des multiparcours (p, A) à support l'arbre A *s'arrêtant sur chaque fils gauche et sur chaque feuille*, $\mathcal{S}_n = \{(p, A) \in \mathcal{S}(A); A \in \mathcal{B}_n\}$ et $\mathcal{S} = \{(p, A) \in \mathcal{S}(A); A \in \mathcal{B}\}$.

Définitions 5.2. Soit $v > -1$ et $(p, A) = ((s_1, \dots, s_k), A)$ un multiparcours p de l'arbre A . Le v -poids d'un sommet s de p est $\pi_v(s) = q^{v+\mathcal{F}(s)}$ où $\mathcal{F}(s)$ est le nombre de feuilles de $C(s)$. En particulier, si s est une feuille, on a $\pi_v(s) = q^{v+1}$. Le v -poids du multiparcours (p, A) est $\pi_v(p, A) = \prod_{i=1}^k \pi_v(s_i)$.

Exemple. Le multiparcours (p, A) de la figure 5 est tel que $\mathcal{F}(A) = 4$ et $p = (2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 7)$. Le v -poids de ce multiparcours est $\pi_v(p, A) = q^{14 + 11v}$.

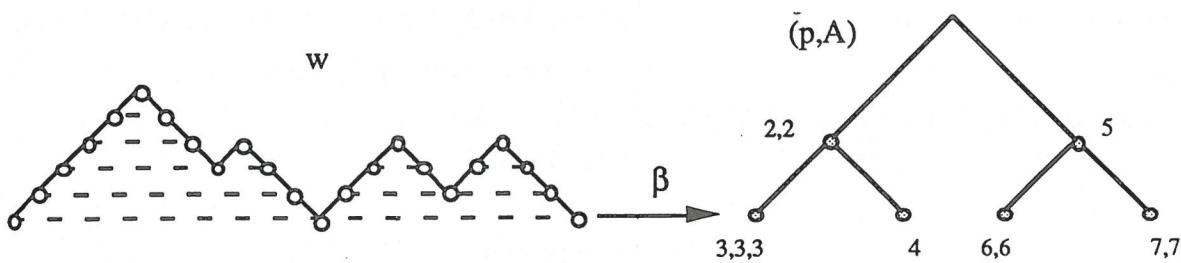


Figure 5. La bijection β .

Définitions 5.3. Etant donné un arbre binaire A, on appelle *v-valuation des multiparcours de $\mathcal{A}(A)$* la somme des v-poids des multiparcours de $\mathcal{A}(A)$. On note $\pi_v(\mathcal{A}(A))$ cette valuation. On a ainsi:

$$\pi_v(\mathcal{A}(A)) = \sum_{p \in \mathcal{A}(A)} \pi_v(p, A) \quad \text{et} \quad \pi_v(\mathcal{A}_n) = \sum_{A \in \mathcal{B}_n} \pi_v(\mathcal{A}(A)) = \sum_{(p, A) \in \mathcal{A}_n} \pi_v(p, A).$$

Proposition 5.4. La sommes des v-poids des multiparcours (p, A) de \mathcal{A}_n est

$$\pi_v(\mathcal{A}_n) = \sum_{A \in \mathcal{B}_n} \frac{\prod_{\substack{s \text{ feuille ou fils gauche de } A \\ s \text{ sommet de } A}} q^{v+\mathcal{F}(s)}}{\prod_{s \text{ sommet de } A} (1-q^{v+\mathcal{F}(s)})}$$

en notant $\mathcal{F}(s)$ le nombre de feuilles du sous-arbre de A de racine s.

Notation. Soit $s_v(n, k)$ le nombre de multiparcours (p, A) de \mathcal{A} de v-poids q^k et de support A ayant n feuilles. On note $S_v(t, q) = \sum_{n \geq 1, k \geq 1} s_v(n, k) q^k t^n$.

On rappelle le résultat suivant ([13]):

Proposition 5.5. La fonction génératrice des multiparcours de \mathcal{A} selon le v-poids et le nombre de feuilles du support est la fonction $S_v(t, q) = (1-q) \Phi_v(\frac{qt}{(1-q)^2}, q)$ et on a:

$$\pi_v(\mathcal{A}_n) = \frac{q^{n(v+1)}}{(1-q)^{2n-1}} \frac{\alpha_n(q)}{\beta_n(q)}$$

A tout mot de Dyck w, on associe un multiparcours $\beta(w) = (p(w), A(w))$, où $A(w)$ est un arbre binaire complet et $p(w)$ une liste des sommets de cet arbre, de la manière suivante:

- si $w=x \bar{x}$ alors $A(w)=r(A(w))$ est l'arbre à un sommet, et $p(w)=(r(A(w)),)$ le multiparcours de cet arbre constitué de ce sommet affecté de la multiplicité égale à 1.
- si $w=x u \bar{x}$ est un mot de Dyck primitif alors $A(w)=A(u)$ et $p(w)=(r(A(u)), p(u))$
- si $w=xu \bar{x} v$ avec u mot de Dyck et v mot de Dyck non vide, alors $A(w)=(r(A(u)), A(u), A(v))$ et $p(w)=(p(u), p(v))$.

Cette application β , définie dans [8], est une bijection de \mathcal{D} dans \mathcal{A} .

Nous montrons alors le résultat suivant:

Proposition 5.6. L'application β transforme un mot de Dyck w ayant n pics, m double-montées et tels que $HP_v(w)=k$ en un multiparcours (p, A) de \mathcal{A}_n de taille $m+n$ et tel que $\pi_v(p, A) = q^k$.

Preuve. La définition de β montre que le multiparcours (p, A) s'arrête sur chaque feuille et chaque fils gauche de A. Les feuilles de A proviennent des pics de w, donc (p, A) est un élément de \mathcal{A}_n . D'autre part, si $w=x^i u \bar{x}^i$, avec i entier, u Dyck primitif et v Dyck non vide, alors $p=(r^i, p(u), p(v))$, on en déduit que p est de taille $m+n$. On montre que $\pi_v(p(w), A(w)) = q^k$ par récurrence.

- si $w=x \bar{x}$ alors $\pi_v(p(x \bar{x}), A(x \bar{x})) = q^{v+1}$
- si $w=x u \bar{x} v$ avec u mot de Dyck et v mot de Dyck non vide, alors $HP_v(w)=HP_v(x u \bar{x}) + HP_v(v)$ donc $\pi_v(p(w), A(w)) = \pi_v(p(u), A(u)) \pi_v(p(v), A(v))$.

- si $w = x u \bar{x}$ avec u mot de Dyck, alors on a $NP(w)=NP(u)=n=\mathcal{F}(A(u))$ et $HP(w)=HP(u)+n$, d'où $HP_v(w)=HP_v(u)+n+v$, et par suite $\pi_v(p(w), A(w))=q^{v+n} \pi_v(p(u), A(u))$.

Exemple. La figure 5 montre que la bijection β transforme un chemin de Dyck w satisfaisant à $DL(w) = 11$, $NP(w) = 4$, $DM(w) = 7$ et $HP_v(w) = 14 + 11v$ en un multiparcours (p, A) de taille 11 d'un arbre A ayant 4 feuilles et dont le v -poids est $\pi_v(p, A)=q^{14+11v}$.

6. LA BIJECTION δ ENTRE LES MULTICHAINES ET LES MULTIPARCOURS D'ARBRES.

A l'aide des résultats précédents, nous donnons alors une preuve bijective des résultats obtenus dans [13] dans le cas général et [8] dans le cas particulier où $v=0$.

Théorème 6.1. *Il existe une bijection entre les multichaines de \mathfrak{C}_p et les multiparcours de \mathcal{A}_{p+1} qui conserve le v -poids.*

Preuve. On pose $\delta = \beta \circ \sigma \circ \alpha^{-1}$. Soit w un chemin de Dyck de longueur $2p$ et (c, w) une multichaine de \mathfrak{C}_p de taille n et de v -poids q^k de ce chemin w . Posons $u = \alpha^{-1}(c, w)$. Alors u est un chemin de Dyck de longueur $2(n+p)$, ayant n pics et p double-montées et tel que $HP_v(u)=k$. Posons $v=\sigma(u)$, c'est un chemin de même longueur ayant $(p+1)$ pics, $(n-1)$ double-montées et tel que $HP_v(v)=k$. Le multiparcours $\beta(v)$ est alors un multiparcours de \mathcal{A}_{p+1} de taille $(n+p)$ et de v -poids q^k . L'application δ est par conséquent une application de \mathfrak{C}_p dans \mathcal{A}_{p+1} conservant le v -poids.

On peut donc écrire

$$\pi_v(\mathcal{A}_{n+1}) = \sum_{(p,A) \in \mathcal{A}_{n+1}} \pi_v(p, A) = \sum_{(c,w) \in \mathfrak{C}_n} \pi_v(\delta(c, w)) = \sum_{(c,w) \in \mathfrak{C}_n} p_v(c, w) = p_v(\mathfrak{C}_n)$$

ce qui prouve de manière bijective l'égalité des fonctions génératrices C_v et S_v précédemment citées.

Remarque 6.2. On peut constater que la valuation associée à un mot de Dyck w est différente de celle associée à l'arbre binaire A qui lui correspond par l'application δ . Par exemple la somme des poids des multichaines du mot de Dyck représenté figure 4 est $\frac{q^{5v+5}}{(1-q)^7[v+1]^3[v+2]^3[v+3]}$ et la somme des poids des multiparcours de l'arbre représenté figure 5 est $\frac{q^{5v+6}}{(1-q)^7[v+1]^4[v+2]^2[v+4]}$.

L'application δ transforme la multichaine du mot de Dyck w de la figure 4 en le multiparcours de l'arbre A de la figure 5, mais on a $p_v(\mathfrak{C}(w)) \neq \pi_v(\mathcal{A}(A))$ car la bijection δ n'envoie pas les multichaines de même support sur des multiparcours de même support.

Remarque 6.3. Dans [8] on trouve une interprétation combinatoire d'un autre q-analogue du rapport des fonctions de Bessel I_v et I_{v+1} en termes de multichaines de chemin de Dyck s'arrêtant sur chaque montée et dans [13] on obtient une interprétation combinatoire de cette même fonction à l'aide de multiparcours d'arbres s'arrêtant sur chaque fils gauche, mais nous ne connaissons pas pour l'instant de preuve bijective de cette égalité.

Références.

- [1] G.E.ANDREWS, *q-series: their development and application in Analysis, Number Theory, Combinatorics, Physics and Computer Algebra*, AMS, (1986).
- [2] R.ASKEY, J.WILSON, Some basic hypergeometric polynomials that generalize Jacobi polynomials, *Memoirs of Am. Math. Soc.* (1985), n°318.
- [3] L. CARLITZ, Zeroes of the Bessel Function $J_v(z)$, Mathematical tables and others aids to computation, (1943-1945), 1-12.
- [4] M.P.DELEST, J.M.FEDOU, Attribute Grammars are useful for Combinatorics, Pub. LaBRI. Univ. de Bordeaux I, n° 89.122 (1989).
- [5] M.P.DELEST J.M.FEDOU, Enumeration of skew Ferrer diagrams. Pub. LaBRI. Univ. de Bordeaux I, n° 89.83 (1989).
- [6] M.P.DELEST, X.G.VIENNOT, Algebraic languages and Polyominoes Enumeration, *Theoret. Comput.Sci.* 34 (1984), n° 1-2, 169-206.
- [7] H.EXTON, q-Hypergeometric Functions and Applications, Ellis Horwood Series, Mathematics and its Applications (1983).
- [8] J.M.FEDOU, Grammaire et q-énumérations de polyominos, Thèse, Univ. de Bordeaux I, (1989).
- [9] I.GESSEL, A noncommutative generalization and q-analog of the Lagrange inversion formula, *Trans. Amer. Math. Soc.* 257 (1980), 455-482 .
- [10] G.KREWERAS, Joint distributions of three descriptive parameters of bridges, Colloque de Combinatoire Enumérative, *Lectures Notes in Mathematics*, 1234 (1987), 177-191.
- [11] J.C.LALANNE, Dentelles de polyominos et q-analogues de fonctions de Bessel . Pub. LaBRI. Univ. de Bordeaux I, (1989).
- [12] J.C.LALANNE, Polyominos parallélogrammes à franges et fonctions de Bessel. Pub.LaBRI. Univ. de Bordeaux I, n° 90.11 (1990).
- [13] J.C.LALANNE, q-Bessel, arbres et chemins valués. Pub.LaBRI. Univ. de Bordeaux I, n° 90.26 (1990).
- [14] G.POLYA, On the number of certain lattice polygons, *J. Comb. Theory*, 6 (1969), 102-105.