

RÉSOLUTION COMBINATOIRE DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

B. Randrianirina*, G. Labelle, P. Leroux

March 25, 1999

Laboratoire de Combinatoire et d'Informatique Mathématique
Université du Québec à Montréal

Abstract

The main goal of this work is to extend the combinatorial theory of differential equations of Leroux-Viennot ([7],[8],[9]) to the case of partial differential equations of the form $\{\partial_j Y = F_j(Y); \quad j = 1, \dots, n; \quad Y(0, 0, \dots, 0) = Z\}$ where $\partial_j = \frac{\partial}{\partial T_j}$. It is also motivated by works of G. Labelle ([6]) and of F. Bergeron and U. Sattler ([3],[12]), where this question is mentioned. In addition to the necessary existence of isomorphisms $\theta_{ij} : F'_i F_j \tilde{\rightarrow} F'_j F_i$, some coherence conditions appear, which can be expressed in terms of commutative hexagons of isomorphisms, to ensure existence and unicity of the combinatorial solution. This solution is expressed in terms of increasing enriched rooted trees on n sorts of points. The case of non autonomous partial differential equations is also covered.

Résumé

Le but principal de ce travail est d'étendre la théorie combinatoire des équations différentielles de Leroux-Viennot ([7],[8],[9]) au cas des équations aux dérivées partielles de la forme $\{\partial_j Y = F_j(Y); \quad j = 1, \dots, n; \quad Y(0, 0, \dots, 0) = Z\}$ où $\partial_j = \frac{\partial}{\partial T_j}$. Il fait également suite aux travaux de G. Labelle ([6]) et de F. Bergeron et U. Sattler ([3],[12]) où cette question est évoquée. En plus de la condition nécessaire d'existence d'isomorphisme $\theta_{ij} : F'_i F_j \tilde{\rightarrow} F'_j F_i$, des conditions supplémentaires de cohérence apparaissent, sous forme d'hexagones commutatifs d'isomorphismes, pour assurer l'existence et l'unicité de la solution combinatoire, qui s'exprime en termes d'arborescences enrichies croissantes à plusieurs sortes de points. Le cas des équations aux dérivées partielles non autonomes est également traité.

1 Introduction

Soit \mathbb{L} la catégorie des ensembles totalement ordonnés finis et bijections croissantes. Dans ce travail, nous considérons les \mathbb{L} -espèces multisortes pondérées $F = F(T_1, T_2, \dots, T_n)$; ce sont des foncteurs de la catégorie produit \mathbb{L}^n vers la catégorie \mathcal{E}_A des ensembles pondérés A -sommables, A

étant un anneau pondérateur (cf J. B. Lévesque [10]); la plupart du temps, \mathbb{A} est un anneau de séries formelles. Un *morphisme* de \mathbb{L} -espèces est alors une transformation naturelle de foncteurs; un *isomorphisme* est un morphisme inversible. Nous dénotons les isomorphismes de \mathbb{L} -espèces par $\varphi : F \tilde{\rightarrow} G$. La classe des \mathbb{L} -espèces est munie des opérations usuelles: l'addition, la multiplication, la composition partitionnelle, la dérivation, et l'intégration (Voir F. Bergeron, G. Labelle et P. Leroux [1] ou [2], Chap. 5).

Rappelons que l'opérateur de dérivation par rapport à la sorte T_i , $\partial_i = \frac{\partial}{\partial T_i}$, induit des isomorphismes $\sigma_i : \partial_i(F + G) \tilde{\rightarrow} (\partial_i F) + (\partial_i G)$, $\lambda_i : \partial_i(F \cdot G) \tilde{\rightarrow} \partial_i F \cdot G + F \cdot \partial_i G$ (Formule de Leibniz), et $\delta_i : \partial_i F(G_1, \dots, G_r) \tilde{\rightarrow} \sum_{j=1}^r (\partial_j F)(G_1, \dots, G_r) \cdot \partial_i G_j$ (Règle de dérivation en chaîne).

Nous utilisons aussi des \mathbb{B} -espèces, c'est-à-dire des foncteurs de la catégorie \mathbb{B} des ensembles finis et bijections vers la catégorie $\mathcal{E}_{\mathbb{A}}$, ainsi que des espèces mixtes $A = A(T_1, T_2, \dots, T_n, Z)$, du type $\mathbb{L}^n \times \mathbb{B} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{A}}$. Pour plus de détails sur les espèces de structures, nous référons le lecteur à ([1]) ou ([2]).

Considérons l'équation différentielle

$$Y' = F(Y), \quad Y(0) = Z, \quad (1)$$

où F est une \mathbb{B} -espèce. La méthode de Leroux-Viennot (cf. [8]) montre que la solution combinatoire de cette équation est l'espèce mixte $Y = A_F(T, Z)$ des arborescences croissantes F -enrichies. La figure 1 représente une arborescence croissante F -enrichie sur (l, U) avec $l = \{1 < 2 < \dots < 12\}$ et $U = \{a, b, \dots, m\}$. Remarquons que les éléments de U (de sorte Z) se retrouvent aux feuilles de l'arborescence, et que la fibre de tout élément de l est munie d'une F -structure. La série génératrice (exponentielle) $y = A_F(t, z)$ de cette espèce est la solution de l'équation différentielle $y' = F(y)$, $y(0) = z$, $F(t)$ étant la série génératrice de F .

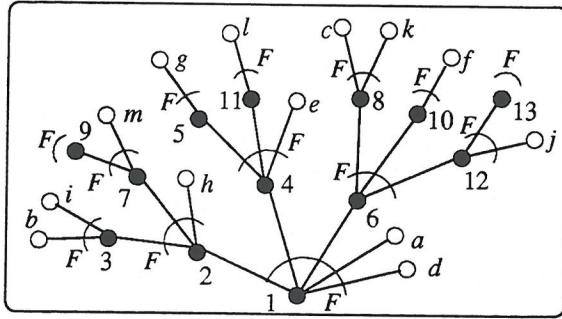


Figure 1: Un exemple d'arborescence croissante F -enrichie

Dans le cas où la condition initiale est $Y(0) = \alpha \in \mathbb{A}$, la solution combinatoire est la \mathbb{L} -espèce pondérée $(T_{Z:\alpha} A_F)(T)$, obtenue en prenant les types d'isomorphie par rapport à la variable Z de l'espèce $A_F(T, Z)$, où la constante α joue un rôle de compteur de points de sorte Z . Toutefois, la série génératrice $y = (T_{Z:\alpha} A_F)(t)$ est solution de l'équation différentielle modifiée $y' = Z_F(y, \alpha^2, \alpha^3, \dots)$, $y(0) = \alpha$, $Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots)$ étant la série indicatrice des cycles de F (cf

B. Randrianirina [11]). Dans le cas où la \mathbb{B} -espèce F est asymétrique, cette équation se ramène à $y' = F(y)$, $y(0) = \alpha$. ■

Exemple 1.1 L'équation $Y' = Y^2$, $Y(0) = 1$, admet comme solution l'espèce $Y = B^\uparrow$ des arborescences binaires (planes) croissantes (voir la figure 2). L'espèce B^\uparrow est isomorphe à l'espèce L des listes ou encore à l'espèce S des permutations, dont la série génératrice est $y(t) = \frac{1}{1-t}$.

Ainsi, la structure b de la figure 2 s'identifie à la liste 12 10 4 8 6 1 11 3 7 2 5 9 ou à la permutation $(12)(10)(4, 8, 6)(1, 11, 3, 7, 2, 5, 9)$.

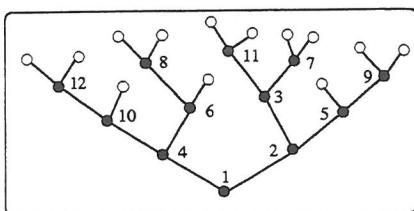


Figure 2: Une arborescence binaire croissante b sur $l_1 = \{1 < 2 < \dots < 12\}$.

2 Les systèmes aux dérivées partielles à $n \geq 2$ variables

2.1 Généralités

Pour $n > 2$, considérons le système aux dérivées partielles

$$\partial_i Y \equiv F_i(Y), \quad i = 1, \dots, n, \quad Y(0, \dots, 0, Z) = Z \quad (2)$$

où les F_i sont des \mathbb{B} -espèces et $\partial_i Y := \frac{\partial Y}{\partial T_i}$. L'espèce inconnue $Y = Y(T_1, \dots, T_n, Z)$ est une espèce mixte à $n + 1$ sortes du type $\mathbb{L}^n \times \mathbb{B} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{A}}$.

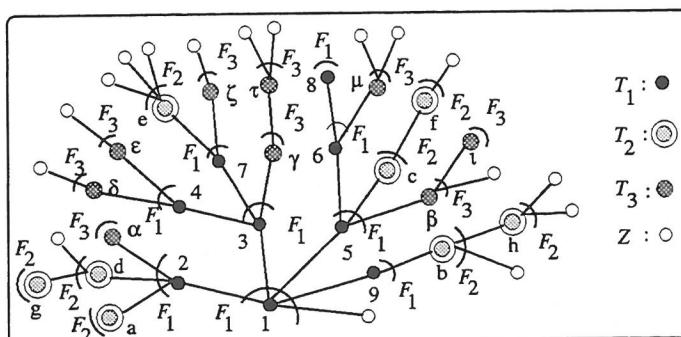


Figure 3: Une arborescence croissante \vec{F} -enrichie, où $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

Tout n -uplet d'ensembles totalement ordonnés (l_1, l_2, \dots, l_n) sera identifié à la somme ordinaire $l_1 +_o l_2 +_o \dots +_o l_n$. En d'autres termes, on convient que les éléments de sorte T_i sont

inférieurs aux éléments de sorte T_j , si $i < j$. Posons $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ et considérons l'espèce $A_{\vec{F}}(T_1, T_2, \dots, T_n, Z)$ des arborescences croissantes \vec{F} -enrichies, c'est-à-dire des arborescences croissantes dont la fibre de chaque point de sorte T_i est munie d'une F_i -structure et dont les points de sorte Z se retrouvent aux feuilles. La figure 3 représente une arborescence croissante \vec{F} -enrichie sur (l_1, l_2, l_3, U) où $l_1 = \{1 < 2 < \dots < 9\}$, $l_2 = \{a < b < \dots < h\}$, $l_3 = \{\alpha < \beta < \gamma < \delta < \epsilon < \zeta < \iota < \tau < \mu\}$, les éléments de U étant représentés par des cercles blancs.

On se propose de montrer que l'espèce $Y = A = A_{\vec{F}}(T_1, \dots, T_n, Z)$ des arborescences croissantes \vec{F} -enrichies est une solution du système (2). Remarquons d'abord que l'existence d'une famille $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'isomorphismes, $\varphi_i : \partial_i A \xrightarrow{\sim} F_i(A)$, induit une famille d'isomorphismes $\zeta_{ij} = \zeta_{ij}(\varphi) : F'_i(A)F_j(A) \rightarrow F'_j(A)F_i(A)$, telle que pour tout $i < j$, le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \boxed{\partial_i \partial_j A} & \xrightarrow{\partial_i \varphi_j} & \boxed{\partial_i F_j(A)} & \xrightarrow{\delta_i} & \boxed{F'_j(A) \partial_i A} & \xrightarrow{F'_j(A) \varphi_i} & \boxed{F'_j(A) F_i(A)} \\
 \parallel & & & & & & \zeta_{ij}(\varphi) \uparrow \\
 \boxed{\partial_j \partial_i A} & \xrightarrow{\partial_j \varphi_i} & \boxed{\partial_j F_i(A)} & \xrightarrow{\delta_j} & \boxed{F'_i(A) \partial_j A} & \xrightarrow{F'_i(A) \varphi_j} & \boxed{F'_i(A) F_j(A)}
 \end{array}$$

Figure 4: L'isomorphisme $\zeta_{ij}(\varphi)$

En particulier, nous avons les isomorphismes $\theta_{ij} = \zeta_{ij}(\varphi)_0 : F'_i(Z)F_j(Z) \rightarrow F'_j(Z)F_i(Z)$. Ce qui nous permet de poser la définition suivante, qui sera justifiée dans la sous-section 2.2, pour le cas où $n \geq 3$.

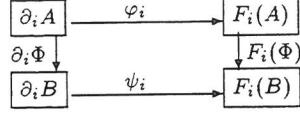
Définition 2.1 Le système (2) est dit *cohérent* s'il existe une famille $(\theta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ d'isomorphismes, $\theta_{ij} : F'_i F_j \rightarrow F'_j F_i$, telle que $\theta_{ii} = Id$, $\theta_{ji} = \theta_{ij}^{-1}$, et, si $n \geq 3$, l'hexagone d'isomorphismes suivant soit commutatif, pour tout $i < j < k$:

$$\begin{array}{ccccc}
 \boxed{F''_j F_i F_k + F'_j F'_i F_k} & \xrightarrow{Id + F'_j \theta_{ik}} & \boxed{F''_j F_k F_i + F'_j F'_k F_i} & & \\
 \swarrow F_k \frac{d}{dz} \theta_{ij} & & \searrow F_i \frac{d}{dz} \theta_{jk} & & \\
 \boxed{F''_i F_j F_k + F'_i F'_j F_k} & & & \boxed{F''_k F_j F_i + F'_k F'_j F_i} & \\
 \downarrow Id + F'_i \theta_{jk} & & & \uparrow Id + F'_k \theta_{ij} & \\
 \boxed{F''_i F_k F_j + F'_i F'_k F_j} & \xrightarrow{F_j \frac{d}{dz} \theta_{ik}} & \boxed{F''_k F_i F_j + F'_k F'_i F_j} & &
 \end{array}$$

Figure 5: Hexagone 1

Nous avons le théorème fondamental suivant:

Théorème 2.2 Si le système (2) est cohérent, alors l'espèce $Y = A = A_{\vec{F}}$ des arborescences croissantes \vec{F} -enrichies est une solution de ce système, dans le sens où l'on a des isomorphismes $\varphi_i : \partial_i A \xrightarrow{\sim} F_i(A)$, compatible avec θ_{ij} , c'est-à-dire telle que $\zeta_{ij}(\varphi) = \theta_{ij}(A)$. De plus, pour toute solution compatible (B, ψ) , il existe un unique isomorphisme d'espèces $\Phi : A_{\vec{F}} \rightarrow B$ tel que, pour tout i , le diagramme suivant soit commutatif:



2.2 Justification des conditions de cohérence.

Supposons que $n \geq 3$. Dans le diagramme de la figure 4, posons $h_{ij} = [F'_j(A)\varphi_i] \circ \delta_i \circ \partial_i \varphi_j$ et dérivons ce diagramme par rapport à T_k , avec $k \neq i$ et $k \neq j$. Posons de plus $\tau_{kij} = [F''_j(A)\varphi_k F_i(A) + F'_j(A)F'_i(A)\varphi_k] \circ [\delta_k F_i(A) + F'_j(A)\delta_k] \circ \lambda_k$ et $f_{kij} = \tau_{kij} \circ \partial_k h_{ij}$. Les règles de la dérivation du produit et de la dérivation en chaîne montrent que:

Lemme 2.3 *Les isomorphismes ζ_{ij} induisent des isomorphismes $\zeta_{kij} = \zeta_{kij}(\varphi)$ tels que pour tout i, j, k , le diagramme suivant soit commutatif.*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f_{kij} & & \\
 & \boxed{\partial_k \partial_i \partial_j A} & \xrightarrow{\partial_k h_{ij}} & \boxed{\partial_k [F'_j(A)F_i(A)]} & \xrightarrow{\tau_{kij}} \boxed{F''_j(A)F_i(A)F_k(A) + F'_j(A)F'_i(A)F_k(A)} \\
 & \downarrow & & \uparrow \partial_k \zeta_{ij} & \uparrow \zeta_{kij} \\
 & \boxed{\partial_i \partial_j \partial_k A} & \xrightarrow{\partial_k h_{ji}} & \boxed{\partial_k [F'_i(A)F_j(A)]} & \xrightarrow{\tau_{kji}} \boxed{F''_i(A)F_j(A)F_k(A) + F'_i(A)F'_j(A)F_k(A)} \\
 & & & \downarrow f_{kji} &
 \end{array}$$

D'autre part, nous avons le lemme suivant, dont la démonstration est donnée dans ([11]).

Lemme 2.4 *Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f_{kij} & & \\
 & \boxed{\partial_k \partial_i \partial_j A} & \xrightarrow{\partial_k h_{ij}} & \boxed{\partial_k [F'_j(A)F_i(A)]} & \xrightarrow{\tau_{kij}} \boxed{F''_j(A)F_i(A)F_k(A) + F'_j(A)F'_i(A)F_k(A)} \\
 & \downarrow & & \uparrow \partial_i h_{kj} & \uparrow Id + F'_j(A)\zeta_{ki} \\
 & \boxed{\partial_i \partial_k \partial_j A} & \xrightarrow{\partial_i h_{kj}} & \boxed{\partial_i [F'_j(A)F_k(A)]} & \xrightarrow{\tau_{ikj}} \boxed{F''_j(A)F_i(A)F_k(A) + F'_j(A)F'_i(A)F_k(A)} \\
 & & & \downarrow f_{ikj} &
 \end{array}$$

En combinant ces deux lemmes, nous obtenons l'hexagone commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{F''_j(A)F_i(A)F_k(A) + F'_j(A)F'_i(A)F_k(A)} & \xrightarrow{Id + F'_j(A)\zeta_{ik}} & \boxed{F''_j(A)F_k(A)F_i(A) + F'_j(A)F'_k(A)F_i(A)} \\
 \swarrow \zeta_{kij} & & \searrow \zeta_{ijk} \\
 \boxed{F''_i(A)F_j(A)F_k(A) + F'_i(A)F'_j(A)F_k(A)} & & \boxed{F''_k(A)F_j(A)F_i(A) + F'_k(A)F'_j(A)F_i(A)} \\
 \searrow Id + F'_i(A)\zeta_{jk} & & \swarrow Id + F'_k(A)\zeta_{ij} \\
 \boxed{F''_i(A)F_k(A)F_j(A) + F'_i(A)F'_k(A)F_j(A)} & \xrightarrow{\zeta_{jik}} & \boxed{F''_k(A)F_i(A)F_j(A) + F'_k(A)F'_i(A)F_j(A)}
 \end{array}$$

Figure 6: Hexagone 2

Posons maintenant $\theta_{ij} = (\zeta_{ij})_\emptyset : F'_i F_j \rightarrow F'_j F_i$, et $\frac{d}{dz} \theta_{ij} : F''_i F_j + F'_i F'_j \rightarrow F''_j F_i + F'_j F'_i$ l'isomorphisme induit par la règle de dérivation du produit. Il est alors légitime de se demander si $\theta_{ij}(A) = \zeta_{ij}(\varphi)$. Nous avons le lemme suivant:

Lemme 2.5 Les deux assertions suivantes sont équivalentes:

- i) pour tout i, j , $\theta_{ij}(A) = \zeta_{ij}(\varphi)$,
- ii) pour tout i, j, k , $F_k(A)(\frac{d}{dz}\theta_{ij})(A) = \zeta_{kij}$.

En combinant l'Hexagone commutatif 2 et ce lemme, évalués en $l = \emptyset$, nous obtenons l'Hexagone 1 (figure 5). Cette condition de cohérence est donc nécessaire pour qu'il existe une solution compatible. Elle est également suffisante car elle permet de montrer que la solution $Y = A_{\vec{F}}$ est compatible. Notons aussi que la compatibilité est utilisée pour démontrer l'unicité à isomorphisme près de la solution.

Contre-exemple. L'Hexagone 1 n'est pas toujours commutatif. En effet, le système défini par $F_i(Z) = 2 \cdot Z$, où $2 = \{0, 1\}$, pour $i = 1, 2, 3$, et $\theta_{ij} = \sigma_{ij} \cdot 1_{F'_i F_j}$, avec $\sigma_{ij}(0, 0) = (1, 1)$, $\sigma_{ij}(0, 1) = (1, 0)$ et $\sigma_{ij}^{-1} = \sigma_{ij}$, n'est pas cohérent. Par contre, si on définit $\sigma_{ij} = \text{Id}_{2 \times 2}$, alors le système est cohérent.

2.3 Démonstration du théorème 2.2

Supposons que le système (2) soit cohérent, c'est-à-dire qu'il existe des isomorphismes $\theta_{ij} : F'_i F_j \rightarrow F'_j F_i$ tels que, si $n \geq 3$, les hexagones associés (Figure 5) soient commutatifs.

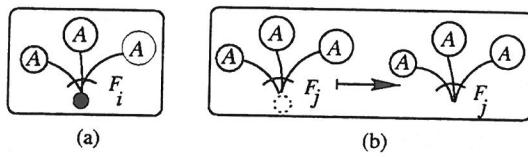


Figure 7: (a) Une $A_{\vec{F}}$ -structure sur $l = (\emptyset, \dots, \emptyset, l_i, \dots, l_n)$, (b) L'isomorphisme φ_j , si $j \leq i$.

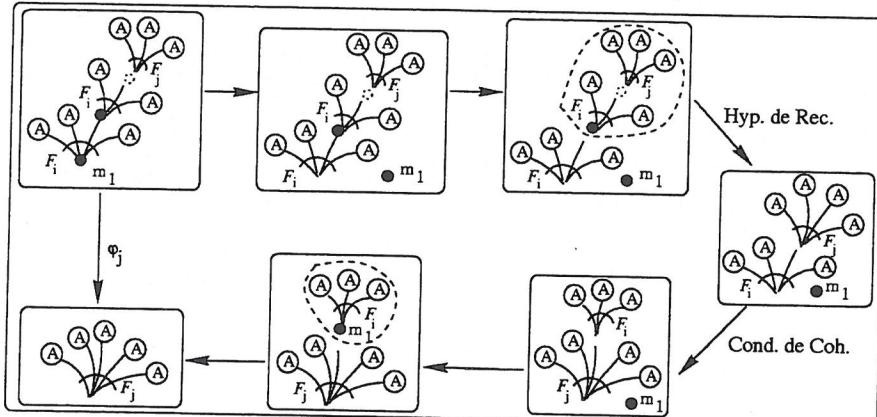


Figure 8: L'isomorphisme φ_j , si $j > i$.

Il s'agit de trouver des isomorphismes $\varphi_i : \partial_i A \rightarrow F_i(A)$, compatibles avec θ_{ij} , c'est-à-dire tels que $\zeta_{ij}(\varphi) = \theta_{ij}(A)$, où $A = A_{\vec{F}}$. Soit $l = (\emptyset, \dots, \emptyset, l_i, \dots, l_n)$, un multiensemble tel que $l_i \neq \emptyset$ et

U un ensemble quelconque. Une $A_{\bar{F}}$ -structure sur (l, U) est de la forme donnée par la figure 7(a). Donc, pour tout $j \leq i$, la composante en l , $(\varphi_j)_l$, de l'isomorphisme φ_j est définie canoniquement en oubliant la racine, comme le montre la figure 7 (b). Si $j > i$ l'isomorphisme φ_j est défini par récurrence sur $|l|$, en utilisant le diagramme illustré par la figure 8.

Si $n = 2$, alors il est facile de voir que ces isomorphismes sont compatibles, i.e. $\zeta_{12}(\varphi) = \theta_{12}(A)$. Si $n \geq 3$, on démontre la compatibilité par récurrence sur $|l|$, en utilisant le lemme 2.5 et en comparant l'Hexagone 1 appliqué à $A = A_F$ à l'Hexagone 2.

Pour l'unicité à isomorphisme près des solutions compatibles, on démontre l'existence des isomorphismes $(\Phi_l)_l$ par récurrence sur $|l| = |l_1| + \dots + |l_n|$. Si $l = (\emptyset, \dots, \emptyset, l_i, \dots, l_n)$ avec $l_i \neq \emptyset$, alors on a $A_{\bar{F}}[l] = \partial_i A_{\bar{F}}[\bar{l}^i]$, où $\bar{l}^i = (\emptyset, \dots, \emptyset, l_i \setminus \{\min l_i\}, \dots, l_n)$, et on pose $\Phi_l = (\psi_i^{-1})_{\bar{l}^i} F_i(\Phi)_{\bar{l}^i} (\varphi_i)_{\bar{l}^i}$. Dans ce cas, pour tout j , le diagramme de la figure 9 est commutatif. De plus, $\Phi_\emptyset = \text{Id}$. Donc Φ est unique.

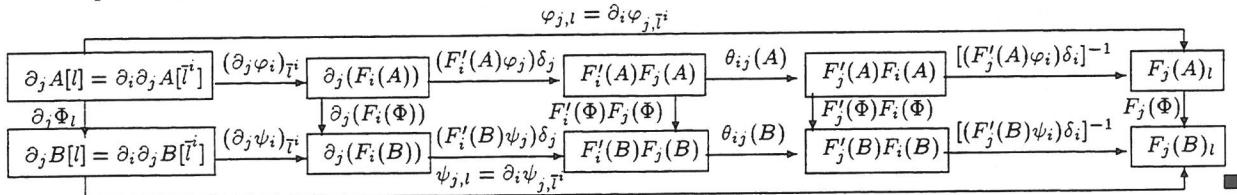


Figure 9: Unicité

Remarque 2.6 La condition $F'_i F_j \simeq F'_j F_i$ est une condition très forte. En effet, combinatoirement, sous réserve de conditions particulières quant à la pondération (cf. [11]), on a $F'_i F_j \simeq F'_j F_i \Leftrightarrow$ il existe des constantes c_i et c_j telles que $c_i F_j \simeq c_j F_i$. ■

Proposition 2.7 *S'il existe des constantes c_i , et une \mathbb{B} -espèce F , telles que $F_i = c_i F$, alors*

$$A_{\bar{F}} = A_F(c_1 T_1 + c_2 T_2 + \dots + c_n T_n).$$

■

Remarque 2.8 Cette méthode se généralise facilement aux systèmes plus généraux de la forme

$$\partial_j Y^\rho = F_j^\rho(Y), \quad Y^\rho(0, 0, \dots, 0) = Z^\rho, \quad j = 1, \dots, n, \quad \rho = 1, \dots, r.$$

Voir [11]. Ce cas englobe les systèmes non autonomes, de la forme $\{\partial_i Y = F_i(T_1, \dots, T_n, Y), \quad Y_i(0) = Z, \quad i = 1, \dots, n\}$, que nous considérons dans la section suivante. ■

3 Les systèmes non autonomes

3.1 Généralités

Considérons le système

$$\partial_i Y = F_i(T_1, \dots, T_n, Y), \quad i = 1, \dots, n, \quad Y(0) = Z. \quad (3)$$

Notons d'abord que les F_i sont des espèces à $n+1$ sortes. Les conditions de cohérence se traduisent par l'existence d'une famille d'isomorphisme $\theta_{ij} : (\partial_{n+1}F_i)F_j + \partial_j F_i \rightarrow (\partial_{n+1}F_j)F_i + \partial_i F_j$ telle que, si $n \geq 3$, l'Hexagone 3 de la figure 10 soit commutatif, où $\pi_{kij} = Id + (\partial_{n+1}F_k)\theta_{ij}$, et $\alpha_{kij} = F_k(\partial_{n+1}\theta_{ij}) + (\partial_k\theta_{ij})$, pour tout i, j, k .

Une solution compatible est obtenue en généralisant la notion d'arborescences croissantes $F(T, Y)$ -enrichies définie par Leroux et Viennot dans ([8]) lorsque $n = 1$. La figure 11 représente une arborescence croissante $\vec{F}(\vec{T}, Y)$ -enrichie sur $l_1 = \{1 < 2 < \dots < 9\}$ et $l_2 = \{a < b < \dots < k\}$, où $\vec{F} = (F_1, F_2)$.

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{[(\partial_{n+1}^2 F_j)F_k F_i + (\partial_k \partial_{n+1} F_j)F_i]} & \xrightarrow{\pi_{jik}} & \boxed{[(\partial_{n+1}^2 F_j)F_k F_i + (\partial_k \partial_{n+1} F_j)F_i]} \\
 + & & + \\
 \boxed{(\partial_{n+1} \partial_i F_j)F_k + (\partial_k \partial_i F_j)} & & \boxed{(\partial_{n+1} \partial_i F_j)F_k + (\partial_i \partial_k F_j)} \\
 + & & + \\
 \boxed{[(\partial_{n+1} F_j) \partial_{n+1} F_i F_k + (\partial_{n+1} F_i) \partial_k F_i]} & & \boxed{[(\partial_{n+1} F_j) \partial_{n+1} F_i F_k + (\partial_{n+1} F_i) \partial_k F_k]} \\
 \downarrow \alpha_{kij} & & \downarrow \alpha_{ijk} \\
 \boxed{[(\partial_{n+1}^2 F_i)F_k F_j + (\partial_k \partial_{n+1} F_i)F_j]} & & \boxed{[(\partial_{n+1}^2 F_k)F_j F_i + (\partial_j \partial_{n+1} F_k)F_i]} \\
 + & & + \\
 \boxed{(\partial_{n+1} \partial_j F_i)F_k + (\partial_k \partial_j F_i)} & & \boxed{(\partial_{n+1} \partial_j F_k)F_i + (\partial_i \partial_j F_k)} \\
 + & & + \\
 \boxed{[(\partial_{n+1} F_i) \partial_{n+1} F_j F_k + (\partial_{n+1} F_j) \partial_k F_j]} & & \boxed{[(\partial_{n+1} F_k) \partial_{n+1} F_j F_i + (\partial_{n+1} F_i) \partial_j F_i]} \\
 \downarrow \pi_{ijk} & & \downarrow \pi_{kij} \\
 \boxed{[(\partial_{n+1}^2 F_i)F_k F_j + (\partial_k \partial_{n+1} F_i)F_j]} & & \\
 + & & \\
 \boxed{(\partial_{n+1} \partial_j F_i)F_k + (\partial_j \partial_k F_i)} & & \\
 + & & \\
 \boxed{[(\partial_{n+1} F_i) \partial_{n+1} F_k F_j + (\partial_{n+1} F_j) \partial_k F_j]} & &
 \end{array}$$

Figure 10: Hexagone 3

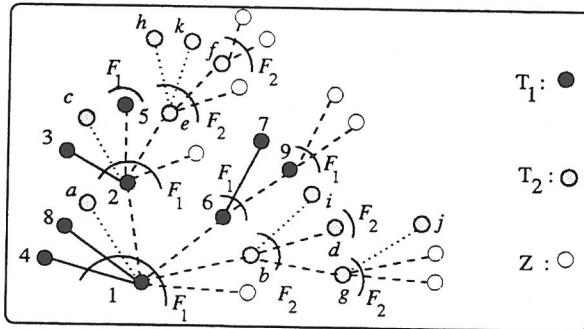
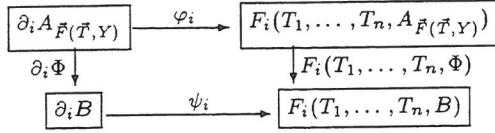


Figure 11: Une arborescence croissante $\vec{F}(\vec{T}, Y)$ -enrichie

Proposition 3.1 Si le système non autonome (3) est cohérent, alors il admet comme solution compatible le couple $(A_{\vec{F}(\vec{T}, Y)}, (\varphi_i))$. De plus, pour toute solution compatible $(B, (\psi_i))$, il existe un unique isomorphisme $\Phi : A = A_{\vec{F}(\vec{T}, Y)} \longrightarrow B$ tel que, pour tout i , le diagramme suivant soit commutatif:



où $F_i(T_1, \dots, T_n, \Phi) = F_i(1_{T_1}, \dots, 1_{T_n}, \Phi)$.

Exemple 3.2 Les polynômes de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$ sont définis par la série génératrice

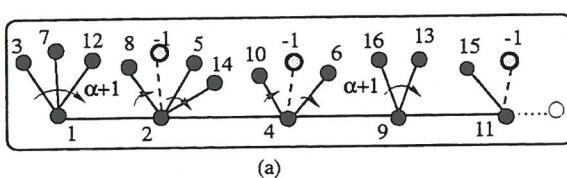
$$y = L(t, x) = \sum_{n \geq 0} L_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} \exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right),$$

qui est solution du système analytique $\{\frac{\partial y}{\partial t} = (\frac{\alpha+1}{1-t} - \frac{-x}{(1-t)^2})y(t, x); \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-t}{1-t}y(t, x); y(0, 0) = 1\}$. Nous lui associons le système différentiel combinatoire

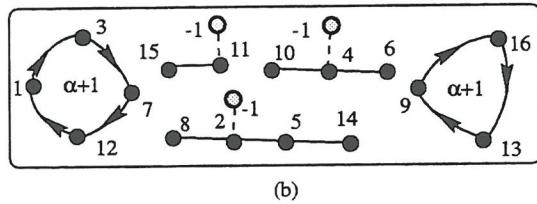
$$\frac{\partial Y}{\partial T} = (L_{(\alpha+1)}(T) + (-X)L^2(T))Y(T, X); \quad \frac{\partial Y}{\partial X} = (-T)L(T)Y(T, X) = -L_+(T)Y(T, X); \quad Y(0, 0) = 1, \quad (4)$$

L étant l'espèce des listes, $L_{(\alpha+1)}$ l'espèce des listes pondérées par $\alpha + 1$, et L_+ l'espèce des listes non vides.

Nous avons $F_1(T, X, Z) = (L_{(\alpha+1)}(T) + (-X)L^2(T))Z$ et $F_2(T, X, Z) = (-L_+(T))Z$. Alors $(\partial_Z F_1)F_2 + \partial_X F_1 = -L_{(\alpha+1)}(T)L_+(T)Z + XL^2(T)L_+(T)Z - L^2(T)Z = (\partial_Z F_2)F_1 + \partial_T F_2$, et ce système est cohérent. Un exemple d'arborescence croissante $(F_1(T, X; Y), F_2(T, X; Y))$ -enrichie est donné par la figure 12 (a). Elle s'identifie canoniquement à la configuration de Laguerre donnée par la figure 12 (b) ([cf D. Foata et V. Strehl [4]]).



(a)



(b)

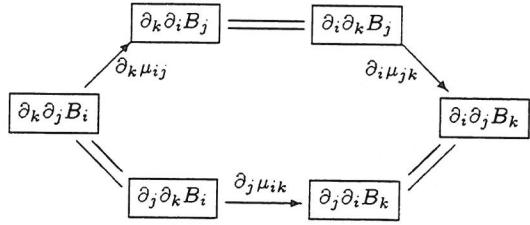
Figure 12: (a) Une arborescence croissante \vec{F} -enrichie; (b) Une configuration de Laguerre

3.2 Le problème de l'intégration multivariée.

Étant données des \mathbb{L} -espèces $(B_i(T_1, \dots, T_n))_{1 \leq i \leq n}$, le problème de l'intégration multivariée consiste à résoudre le système suivant:

$$\partial_i Y = B_i(T_1, \dots, T_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad Y(0, \dots, 0) = 0. \quad (5)$$

C'est un système non autonome particulier. Ce système est cohérent si et seulement si il existe une famille $\mu = (\mu_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$ d'isomorphismes, $\mu_{ij} : \partial_j B_i \rightarrow \partial_i B_j$, telle que pour tout $i < j < k$, le triangle suivant (Hexagone 3 réduit) soit commutatif:



Proposition 3.3 Si le problème de l'intégration multivariée (5) est cohérent, alors il admet comme solution compatible l'espèce

$$B = \sum_{i=1}^n \int_0^{T_i} B_i(0, \dots, 0, X_i, T_{i+1}, \dots, T_n) dX_i.$$

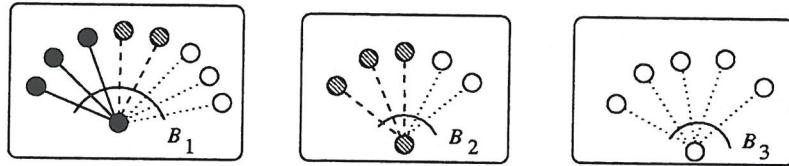


Figure 13: Les B -structures ($n = 3$)

Pour $n = 3$, la figure 13 représente les trois cas de structures intégrales.

3.3 Les systèmes différentiels à variables séparables

Nous considérons maintenant le système différentiel

$$\partial_i Y = B_i(T_1, T_2, \dots, T_n) F(Y), \quad i = 1, \dots, n, \quad Y(0, \dots, 0) = Z. \quad (6)$$

Dans ce cas, la condition de cohérence se traduit par l'existence d'une famille d'isomorphismes $\theta_{ij} : B_i B_j F'(Z) F(Z) + (\partial_j B_i) F(Z) \xrightarrow{\sim} B_i B_j F'(Z) F(Z) + (\partial_i B_j) F(Z)$ telle que si $n \geq 3$, alors pour tout $i < j < k$, l'hexagone suivant soit commutatif [cf Hexagone 3],

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{L(j, i, k) + M(j, i, k)} & \xrightarrow{\pi_{jik}} & \boxed{L(j, k, i) + M(j, k, i)} & & \\
\swarrow \alpha_{kij} & & \searrow \alpha_{ijk} & & \\
\boxed{L(i, j, k) + M(i, j, k)} & & & \boxed{L(k, j, i) + M(k, j, i)} & \\
\searrow \pi_{ijk} & & & \swarrow \pi_{kij} & \\
& \boxed{L(i, k, j) + M(i, k, j)} & \xrightarrow{\alpha_{jik}} & \boxed{L(k, i, j) + M(k, i, j)} &
\end{array}$$

où $\pi_{ijk} = L(i, j, k) + B_i F' \theta_{jk}$, $\alpha_{kij} = B_k (\partial_{n+1} \theta_{ij}) + (\partial_k \theta_{ij})$, $M(i, j, k) = B_i B_j B_k (F')^2 F + B_i (\partial_k B_j) F' F$, et $L(i, j, k) = B_i B_j B_k F'' F^2 + (\partial_k B_i) B_j F' F + (\partial_j B_i) B_k F' F + (\partial_k \partial_j B_i) = L(i, k, j)$

Associons à (6) le système suivant (i.e. on suppose $F = 1$),

$$\partial_i Y = B_i(T_1, T_2, \dots, T_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad Y(0, \dots, 0) = 0. \quad (7)$$

Proposition 3.4 Si le problème d'intégration multivariée (7) défini par (B_i, μ_{ij}) est cohérent, alors le système (6) défini par $(B_i F, \theta_{ij})$, avec $\theta_{ij} = B_i B_j F' F + F \mu_{ij}$ est cohérent, et admet comme solution compatible l'espèce

$$A = A_F(B, Z),$$

où $A_F(T, Z)$ est l'espèce des arborescences croissantes F -enrichies, solution de l'équation différentielle $Y' = F(Y)$, $Y(0) = Z$, et B est l'espèce $\sum_{i=1}^n \int_0^{T_i} B_i(0, \dots, 0, X_i, T_{i+1}, \dots, T_n) dX_i$, solution de (7). ■

Notons que ce résultat généralise celui de P. Leroux et G. Viennot pour $n = 1$ dans [9].

Exemple 3.5 Les polynômes de Tchebitchef $U_n(x)$ de 2^{ème} sorte sont définis par la série génératrice

$$y = U(t, x) = \sum_{n \geq 0} U_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{1 - 2xt + t^2},$$

qui vérifie $\{\frac{\partial y}{\partial t} = 2(x - t)y^2; \frac{\partial y}{\partial x} = 2ty^2, y(0, 0) = 1\}$. Nous lui associons le système différentiel combinatoire

$$\frac{\partial Y}{\partial T} = 2 \cdot (X - T)Y^2 \doteq B_1(T, X)Y^2, \quad \frac{\partial Y}{\partial X} = 2 \cdot TY^2 = B_2(T, X)Y^2, \quad U(0, 0) = 1. \quad (8)$$

Puisque que $\partial_X B_1 = \partial_T B_2 = 2$, ce système est cohérent. En vertu de la proposition 3.4, avec $F(Y) = Y^2$, il admet comme solution compatible $U(T, X) = B^\uparrow(2 \cdot XT - T^2)$. On a aussi $U \simeq L(2 \cdot XT - T^2) \simeq S(2 \cdot XT - T^2)$ (Figure 14). Notons que l'expression de U en termes de listes permet de retrouver le modèle traditionnel des polynômes de Tchebichev de 2^{ème} sorte, en termes de couplages de chaînes (Figure 15) (cf Viennot [13] ou Godsil [5]).

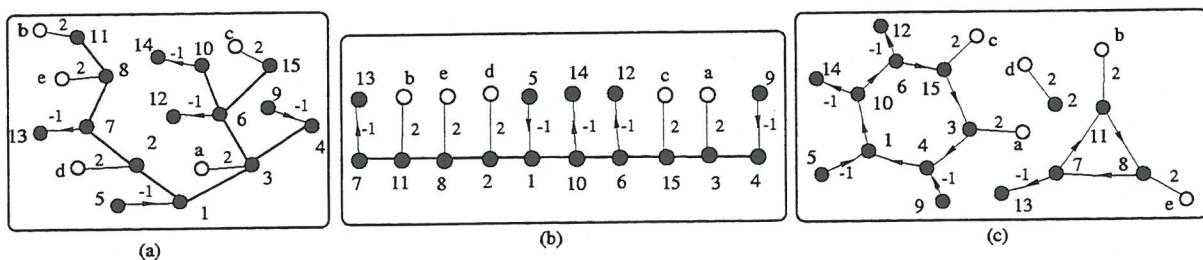


Figure 14: (a) Arborescence binaire, (b) Liste, (c) Permutation

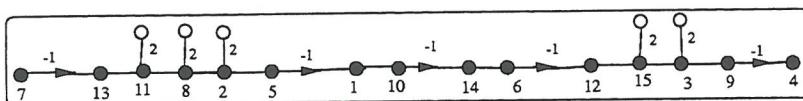


Figure 15: Couplage de chaînes

References

- [1] F. BERGERON, G. LABELLE, and P. LEROUX. *Théorie des espèces et combinatoire des structures arborescentes*. Publications du LACIM, Vol. 19, 1994, 394 p.
- [2] F. BERGERON, G. LABELLE, and P. LEROUX. *Combinatorial species and tree-like structures*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 67, Cambridge University Press, 1998, 457 p.
- [3] F. BERGERON et U. SATTLER. *Constructible differentially finite algebraic series in several variables*. Theoret. Comput. Sci. Vol. 149 no 1-2, (1995) 59-65.
- [4] D. FOATA and V. STREHL. *Combinatorics of the Laguerre polynomials*. In D.M. Jackson and S.A. Vanstone Eds, *Enumeration and Design*, Academic Press, Toronto, (1984) 123-140.
- [5] C. D. GODSIL. *Algebraic Combinatorics*. Chapman and Hall, New-York, 1993.
- [6] G. LABELLE. *On combinatorial differential equations*. Journal of Mathematical Analysis and its Applications, 113 (1986) 344-381.
- [7] P. LEROUX and G. X. VIENNOT. *Résolution combinatoire des équations différentielles II: Calcul Intégral Combinatoire*. Annales des sciences mathématiques du Québec, 12 (1988) 210-245.
- [8] P. LEROUX and G. X. VIENNOT. *Combinatorial resolution of systems of differential equations I: Ordinary differential equations*. Lecture Notes in Mathematics, Vol.1234, Springer Verlag, (1986) 233-253.
- [9] P. LEROUX and G. X. VIENNOT. *Combinatorial Resolution of Systems of Differential Equations IV: Separation of Variables*. Discrete Mathematics, 72 (1988) 237-250.
- [10] J. B. LÉVESQUE. *Sur la pondération en combinatoire énumérative*. Mémoire de Maîtrise, Université du Québec à Montréal, 1989.
- [11] B. RANDRIANIRINA. *Combinatoire des systèmes d'équations différentielles et aux dérivées partielles*. Thèse de Doctorat, Université du Québec à Montréal, 1998.
- [12] U. SATTLER. *Decidable classes of formal power series with nice closure properties*. Diplomarbeit, Institut für Mathematische Maschinen und Datenverarbeitung, Friendrich-Universität Erlangen-Nürnberg, 1994.
- [13] G. X. VIENNOT. *Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux*. Notes de Conférences, LACIM, UQÀM, Sept-Oct. 1983, 211 p.