

Polyominos et q-analogues des fonctions de Bessel, une preuve combinatoire*

J.M. Féroux N. Rouillon[†]

LaBRI[‡]

Université Bordeaux I

Résumé

Dans cet article, nous développons la technique classique de l'étude des polyominos parallélogrammes à l'aide de différences de diagrammes de Ferrers. Grâce à une bijection entre les couples de chemins du plan et les polyominos parallélogrammes, nous en déduisons la série génératrice de ces objets selon les paramètres largeur, hauteur et nombre de coins. Cette fonction génératrice fait apparaître de nouveaux q-analogues de fonctions de Bessel faisant intervenir à la fois q et $\frac{1}{q}$, nous conduisant à nous placer dans un anneau de séries formelles adéquat.

Abstract

We extend and apply the classical technique of difference of Ferrers diagrams to the study of parallelogram polyominoes. Combining the extended technique with a bijection between pairs of paths allows us to obtain generating function for parallelogram polyominoes according to height, width, area and number of corners. The generating function uses new q -Bessel functions involving q and $\frac{1}{q}$. We are thereby led to the consideration of a special formal power series ring well adapted to our work.

1 Introduction

Nous nous plaçons dans le plan $\pi = Z \times Z$. On appelle *cellule* un carré unitaire de π .

Un *polyomino* est la réunion connexe de cellules en nombre fini sans *point d'articulation*, c'est-à-dire dont l'intérieur est également connexe. Les polyominos sont définis à une translation près. Les paramètres les plus étudiés sur ces objets sont l'aire, la hauteur, la largeur. L'*aire* d'un polyomino est le nombre de cellules qui le composent. Sa *hauteur* est la différence d'ordonnées des points les plus au Nord et les plus au Sud. Sa *largeur* est la différence d'abscisses des points les plus à l'Est et les plus à l'Ouest. La *hauteur d'une colonne* est le nombre de cellules qui la composent.

Un *polyomino parallélogramme* est défini par deux chemins sans point d'intersection, ayant même origine et même extrémité, et ne contenant que des pas Nord ou Est (voir figure 1). Le chemin commençant par un pas Nord est appelé *bord supérieur*, celui commençant par un pas Est est appelé *bord inférieur*. Un double pas Nord-Est sur le bord supérieur du polyomino

*Partially supported by EC grant CHRX-CT93-0400 and PRC-Maths/Info

[†]e-mail : [fedou, rouillon]@labri.u-bordeaux.fr

[‡]Unité associée au C.N.R.S. n° 1304, Université Bordeaux I, 33405 Talence Cedex, France.

est appelé un *coin supérieur*. Un double pas Est-Nord sur le bord inférieur du polyomino est appelé un *coin inférieur*. Le *périmètre ou périmètre de lien* d'un polyomino est la longueur de son bord. Enfin, le *périmètre de site* d'un polyomino est le nombre de cellules adjacentes par un segment à son pourtour (voir figure 1).

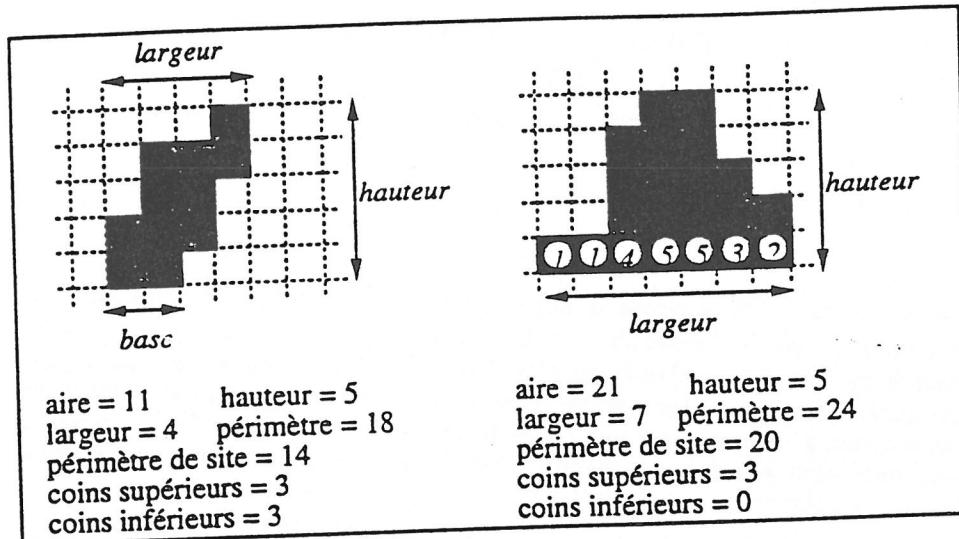


Figure 1: Un polyomino parallélogramme et un polyomino tas

Un *polyomino parallélogramme de base ν* est un polyomino parallélogramme dont le bord inférieur commence par ν pas Est suivis d'un pas Nord.

Le polyomino à gauche dans la figure 1 est un polyomino parallélogramme de base 2.

Un *polyomino tas* est défini par une suite unimodale d'entiers non nuls, c'est à dire croissante jusqu'à un certain rang puis décroissante. Le polyomino tas correspondant est obtenu en attachant les colonnes de hauteur n_i de la droite vers la gauche, de manière à faire coïncider leurs bords inférieurs (voir figure 1).

Les polyominos parallélogrammes énumérés selon le périmètre par Polya [18], Kreweras [16], Delest, Gouyou-Beauchamps et Vauquelin [6]. Selon l'aire, on retrouve Polya et Gessel et également Klarner et Rivest [15].

Puis, Delest et Férou [4] en considérant simultanément l'aire et la largeur ont fait apparaître des q-analogues des fonctions de Bessel dans cette énumération. Les résultats précédents furent alors prolongés par Lalanne sur une nouvelle classe de polyominos qu'il a introduite, les polyominos parallélogrammes à franges [17]. Plus tard Bousquet-Mélou [3] en utilisant également des q-analogues dans l'énumération a rajouté le paramètre hauteur. Une littérature importante existe sur le *q-calc* et les *q-séries*. Le q-calc joue un rôle prépondérant dans des domaines aussi variés que l'analyse, la théorie des nombres et la physique comme le présente l'ouvrage d'Andrews [1] sur les q-séries, leur développement et leurs applications. Le lecteur trouvera dans [2] des éléments d'introduction à ces notions.

Récemment, Dubernard a proposé une caractérisation de la fonction génératrice des polyominos parallélogrammes selon la largeur, l'aire et le nombre de coins supérieurs [7]. Parallèlement à nos travaux Dubernard et Dutour [8] en ont trouvé une formule exacte. Ils ont obtenu ces résultats en résolvant une q-équation obtenue en utilisant une grammaire d'objet [9], c'est

à dire en décomposant de manière récursive les objets manipulés à l'aide d'un nombre fini d'opérations.

Il existe deux approches pour l'énumération des polyominos parallélogrammes.

La première [15, 4, 3] s'appuie sur la méthodologie de Temperley [19] et consiste à décomposer le polyomino en colonne ou en ligne. Elle aboutit à des fonctions génératrices de type J_1/J_0 selon les paramètres que l'on étudie.

La deuxième approche [18, 12, 11] par différences de diagrammes de Ferrers n'aboutit qu'à des équations faisant intervenir q et $\frac{1}{q}$ sans jamais arriver à J_1/J_0 .

Nous montrons ici que cette deuxième approche conduit à une solution \tilde{J}_1/\tilde{J}_0 faisant intervenir q et $\frac{1}{q}$ et nécessitant de ce fait l'introduction d'un anneau de séries formelles particulier.

Nous proposons une approche bijective pour retrouver et généraliser ces résultats. Dans un premier temps nous décrivons une *bijection* entre des couples de chemins de π et des couples constitués d'un polyomino parallélogramme et d'un autre couple de chemins de π . Nous montrons que cette bijection conserve les paramètres : largeur, hauteur, aire, hauteur de certaines colonnes, nombre de coins supérieurs et nombre de coins inférieurs. Dans un deuxième temps, nous interprétons combinatoirement des q-analogues des fonctions de Bessel par des couples de chemins du plan. Nous décrivons un cadre algébrique dans lequel les séries en q et $\frac{1}{q}$ ont un sens.

Nous proposons ensuite une *démonstration combinatoire* directe de résultats semblables à ceux de Delest et Férou sur l'énumération des polyominos parallélogrammes en fonction de l'aire et de la largeur en rajoutant les paramètres hauteur, hauteurs de certaines colonnes et nombres de coins. Dans cette partie, nous nous inspirons des méthodes utilisées dans les travaux de Flajolet [11] sur ce qu'il appelle les festons de Pólya. Nous en déduisons la série génératrice des polyominos parallélogrammes à franges et la série génératrice des polyominos tas. Enfin, nous adaptons cette démonstration pour obtenir la série génératrice des polyominos parallélogrammes de base donnée.

2 Définitions et notations

a. Fonctions de Bessel et q-analogues

Nous donnons dans ce paragraphe les définitions et notations que nous utiliserons par la suite.

Nous rappelons tout d'abord les notations usuelles en q-calcul :

- $(a; q)_n$ est le produit $\prod_{i=1}^n (1 - aq^{i-1})$ et $(a; q)_0 = 1$.
- $(q)_n = \prod_{i=1}^n (1 - q^i)$, $(q)_n$ est l'écriture simplifiée de $(q; q)_n$
- $(yq)_n = \prod_{i=1}^n (1 - yq^i)$, $(yq)_n$ est l'écriture simplifiée de $(yq; q)_n$

Les fonctions de Bessel sont des fonctions très souvent utilisées en Analyse. Elles apparaissent lors de la résolution d'équations aux dérivées partielles, surtout lorsque les variables sont séparées, et également dans des intégrales définies.

La fonction de Bessel d'ordre ν est définie par

$$J_\nu(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n+\nu}}{n! (n + \nu)!}$$

Puis des q-analogues des fonctions de Bessel ont permis d'énumérer certains types de polyominos. Trois principaux q-analogues ont été étudiés; ils sont de la forme

$$J_\nu(x; q) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n \frac{x^{n+\nu}}{(q)_n (q)_{n+\nu}} \quad \forall \nu \in \text{IN}$$

Ismail [14] ainsi que Gessel et Stanton [13] manipulent cette formule avec

$$a_n = 1 \text{ et } a_n = q^{n(n-1)}$$

tandis que Férou [5] et Lalanne [17] la manipulent avec

$$a_n = q^{\binom{n+\nu+1}{2}}$$

Dans cet article nous proposons de travailler avec d'autres q-analogues des fonctions de Bessel.

L'idée est de remplacer dans les q-analogues des fonctions de Bessel usuels le dénominateur $[n]!^2$ par $((yq; q)_n (q^{-1}; q^{-1})_n)$. Pour une valeur de q donnée (différente d'une racine de l'unité), on peut passer de $J_\nu(x; q)$ à ceux que nous proposons, en remplaçant,

$$\frac{-q^k}{1 - q^k}$$

par

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{q^k}} \text{ pour } k = 1 \text{ à } n$$

Au sens des séries formelles ce passage n'a pas de sens.

Définition 1 Les q-analogues des fonctions de Bessel utilisés dans cet article sont les suivants

$$\begin{aligned} \bar{J}_0(x, y; q) &= \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(q^{-1})_n (yq)_n} \\ \bar{J}_\nu(x, y; q) &= \sum_{n \geq 1} \frac{x^{n+\nu-1} y q^{n+\nu-1}}{(q^{-1})_{n-1} (yq)_{n+\nu-1}} \quad \text{pour } \nu \in \text{IN}^* \end{aligned}$$

Ces q-analogues font intervenir des termes en q et en $\frac{1}{q}$, nous devons donc nous placer dans un cadre différent de celui communément utilisé dans la manipulation des séries formelles, c'est à dire $K[[x, y, q, \dots]]$, où K est un anneau.

Nous fournissons ici un cadre algébrique dans lequel les deux égalités suivantes sont valides :

$$(i) \frac{1}{1 - yq^k} = \sum_{n \geq 0} y^n q^{kn} \quad \text{avec } y \neq 1$$

$$(ii) \frac{1}{1 - \frac{1}{q}} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{q^n}$$

Remarquons tout d'abord que le corps des fractions de $\mathbb{Q} [[\frac{1}{q}]]$, c'est à dire l'anneau des séries formelles sur l'alphabet $\{q\}$ à coefficients dans \mathbb{Q} , est l'anneau des séries de Laurent en q à coefficients dans \mathbb{Q} , soit

$$\mathcal{F}(\mathbb{Q} [[q]]) = \left\{ \sum_{n \geq n_0} a_n q^n, n_0 \in \mathbb{Z}, a_n \in \mathbb{Q} \right\}$$

En particulier,

$$\mathcal{F}(\mathbb{Q} [[\frac{1}{q}]]) = \left\{ \sum_{n \leq n_0} a_n q^n, n_0 \in \mathbb{Z}, a_n \in \mathbb{Q} \right\}$$

Considérons l'anneau $\mathcal{F}(\mathbb{Q} [[\frac{1}{q}]]) [[x, y]] = E$.

$$q^{kn} \in \mathcal{F}(\mathbb{Q} [[\frac{1}{q}]]) \quad \text{d'où} \quad \sum_{n \geq 0} y^n q^{kn} \in E$$

Lemme 1 Soit A un anneau, dans $A [[z]]$, on a :

$$\text{si } a \in A \text{ alors } (1 - az)^{-1} = \sum_{n \geq 0} a^n z^n$$

1. Prenons $A = \mathcal{F}(\mathbb{Q} [[\frac{1}{q}]])$ et $z = y$ alors

$$q \in A \text{ et } \frac{1}{1 - yq} = \sum_{n \geq 0} y^n q^n \in \mathcal{F}(\mathbb{Q} [[\frac{1}{q}]]) [[y]] \in E$$

2. Prenons $A = \mathbb{Q}$ et $z = q^{-1}$ alors

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{q}} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{q^n} \in \mathbb{Q} [[\frac{1}{q}]] \in \mathcal{F}(\mathbb{Q} [[\frac{1}{q}]]) \in E$$

Dans l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{Q} [[\frac{1}{q}]]) [[x, y]]$, c'est à dire l'anneau des séries formelles sur $\{x, y\}$ à coefficients dans le corps des fractions de l'anneau des séries formelles sur $\{\frac{1}{q}\}$ à coefficients dans \mathbb{Q} , \bar{J}_0 et \bar{J}_v , ont un sens.

b. Chemins du plan

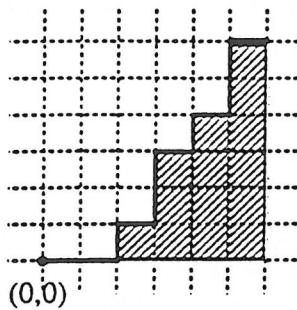
Chemins. On note C la classe des chemins de π qui sont soit vides (*i.e.* réduits à un point) soit constitués d'une suite de pas élémentaires Nord ou Est, commençant en $(0, 0)$ et dont le dernier pas est un pas Est.

L'*aire* d'un chemin de C est le nombre de carrés unitaires compris entre le chemin et l'axe des x . La *largeur* du chemin est le nombre de pas Est et la *hauteur* le nombre de pas Nord (voir figure 2).

On note C_n la classe des chemins de C de largeur n .

Proposition 1 La série génératrice des chemins de C_n ($n \geq 0$) comptés suivant la largeur x , la hauteur y et l'aire q , est :

$$SG_{C_n}(x, y, q) = \frac{x^n}{(yq)_n} \tag{1}$$



Un chemin de \mathcal{C}_6
aire = 14
largeur = 6
hauteur = 6

Figure 2: Un chemin de \mathcal{C}

Preuve. On définit un chemin c de \mathcal{C}_n comme une suite de pas w_i , soit $c = w_1 w_2 \cdots w_n$ où w_i appartient à $\{E, N\}$ où E représente un pas Est et N un pas Nord. On peut donc écrire c sous la forme $c = N^{\beta_1} E N^{\beta_2} E \cdots N^{\beta_k} E$ où $\beta_i \in \mathbb{N}$, $\forall i \in [1, k]$. Le chemin forme un empilement de bandes horizontales. Pour chaque bande horizontale de largeur α et de hauteur β , si l'aire est représentée par la puissance de la variable formelle q et la hauteur par la puissance de la variable formelle y , on compte $q^{\alpha\beta}$ et y^β .

Pour une bande de largeur donnée α , on a

$$1 + yq^\alpha + y^2 q^{2\alpha} + y^3 q^{3\alpha} \cdots = \frac{1}{1 - yq^\alpha}$$

En considérant toutes les largeurs possibles jusqu'à n , si on représente la largeur du chemin par la puissance de la variable formelle x , on a

$$\frac{x}{(1 - yq)} \frac{x}{(1 - yq^2)} \cdots \frac{x}{(1 - yq^n)} = \frac{x^n}{(yq)_n}$$

Nous avons montré que $SG_{\mathcal{C}_n} = x^n / (yq)_n$ □

Nous utilisons dans la suite un corollaire de cette proposition, où l'on s'intéresse uniquement à l'aire en la comptant négativement, c'est à dire par $1/q$, le résultat (1) devient,

Corollaire 1 *La série génératrice des chemins de \mathcal{C}_n comptés uniquement suivant l'aire $1/q$ est :*

$$SG_{\mathcal{C}_n}(1, 1, q^{-1}) = \frac{1}{(q^{-1})_n} \tag{2}$$

On note \mathcal{C}^1 la classe des chemins de \mathcal{C} dont le premier pas est un pas Nord, et \mathcal{C}_n^1 la classe des chemins de \mathcal{C}^1 de largeur n . Le chemin vide n'appartient pas à \mathcal{C}^1 .



Un chemin de \mathcal{C}_6^1

Remarque. La série génératrice des chemins de C_n^1 ($n > 0$) comptés suivant la largeur x , la hauteur y et l'aire q est :

$$SG_{C_n^1}(x, y, q) = \frac{x^n y q^n}{(yq)_n} \quad (3)$$

Preuve. En terme de chemin, un pas Nord pour commencer, entraîne que l'on a au moins une ligne de largeur n où n est la largeur du chemin (voir la partie hachurée de la figure). Ce qui entraîne la multiplication par $y q^n$ dans la série génératrice SG_{C_n} . \square

Remarque. On retrouve la fonction génératrice classique des *diagrammes de Ferrers*. Et, on obtient également très simplement la fonction génératrice de la classe des *polyominos tas*, notée \mathcal{PT} .

Soit \mathcal{PT}_n la classe des polyominos tas de hauteur n ($n > 0$). Un tas est généralement représenté par un chemin c de π constitué d'une suite de pas w_i ,

$$c = w_1 w_2 \cdots w_n, \text{ tel que } w_i \in \{N, E, S\}$$

où N représente un pas Nord, E un pas Est et S un pas Sud. Plus précisément, c s'écrit

$$c = \underbrace{NN^{\beta_1}EN^{\beta_2}E \cdots N^{\beta_k}}_{c_1} \underbrace{ES^{\gamma_1} \cdots ES^{\gamma_l}ES^{\gamma_m}S}_{c_2}$$

où $\beta_i \in \mathbb{N}$, $\forall i \in [1, k]$ et $\gamma_j \in \mathbb{N}$, $\forall j \in [1, l]$ avec $\sum_i \beta_i = \sum_j \gamma_j$.

Si on pose $c_1 = NN^{\beta_1}EN^{\beta_2}E \cdots N^{\beta_k}$ et $c_2 = ES^{\gamma_1} \cdots ES^{\gamma_l}ES^{\gamma_m}S$, alors $c = c_1 \cdot c_2$. Avec c_1 un chemin de C^1 de largeur n et c_2 un chemin de C de largeur $n - 1$ dont on prend l'image miroir par rapport à l'axe des x . Alors c définit un polyomino tas tourné de 90° .

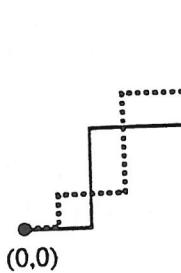
Par conséquent, la série génératrice des polyominos tas, dans laquelle la puissance de la variable formelle x est la hauteur du tas, la puissance de la variable formelle y la largeur du tas et celle de q son aire, est

$$\begin{aligned} SG_{\mathcal{PT}_n}(x, y, q) &= SG_{C_n^1}(x, y; q) \times SG_{C_{n-1}}(1, y; q) \\ SG_{\mathcal{PT}_n}(x, y, q) &= \frac{x^n y q^n}{(yq)_n (yq)_{n-1}} \\ SG_{\mathcal{PT}}(x, y, q) &= 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{x^n y q^n}{(yq)_n (yq)_{n-1}} \end{aligned}$$

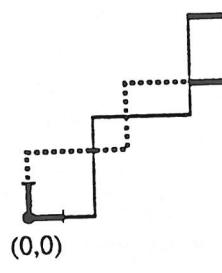
Couples de chemins. La classe des couples de chemins de C de même largeur est noté \mathcal{D} . \mathcal{D}_n est la classe des couples de chemins de C_n . Le couple de chemins réduit à un point sera noté ϵ .

L'aire d'un tel couple (a, b) de chemins se calcule comme la différence des aires de a et de b [11], autrement dit, en comptant l'aire de a positivement et l'aire de b négativement. La hauteur du couple de chemins est la hauteur du chemin dont l'aire est comptée positivement, la largeur est la largeur communes aux deux chemins.

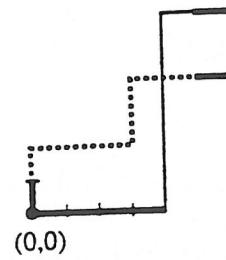
On définit \mathcal{D}^ν , où ν est un entier strictement positif, comme la classe des couples de chemins de π dont l'un des chemins commence par ν pas Est et l'autre par au moins un pas Nord. Et, $\mathcal{D}_{n+\nu}^\nu$ est la classe des couples de chemins de \mathcal{D}^ν qui sont de largeur $n + \nu$ ($n \geq 0$). Le couple réduit à un point n'appartient pas à \mathcal{D}^ν .



Couple de D_6



Couple de D_6^1



Couple de D_6^4

3 J_0, J_1 : une interprétation combinatoire

Nous nous intéressons dans cette section aux couples de chemins appartenant aux classes \mathcal{D} et \mathcal{D}^1 définies ci-dessus.

Proposition 2 La série génératrice des couples de chemins de \mathcal{D} comptés suivant la largeur x , la hauteur y et l'aire q est \tilde{J}_0 .

Preuve. Ce résultat découle des résultats 1 et 2, en comptant l'aire d'un des deux chemins négativement, en accord avec la définition de l'aire d'un couple de chemins définie précédemment.

$$SG_{\mathcal{D}_n}(x, y, q) = SG_{\mathcal{C}_n}(x, y, q) \times SG_{\mathcal{C}_n}(1, 1, q^{-1}) = \frac{x^n}{(q^{-1})_n(yq)_n}$$

d'où $SG_{\mathcal{D}}(x, y, q) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(q^{-1})_n(yq)_n} = \tilde{J}_0(x, y, q)$

□

Proposition 3 La série génératrice des couples de chemins de \mathcal{D}^1 comptés suivant la largeur x , la hauteur y et l'aire q est \tilde{J}_1 .

Preuve. Ce résultat découle des résultats 2 et 3. On considère un chemin de \mathcal{C}_{n-1} , pour être sûr d'avoir un pas Est comme premier pas du chemin dont l'aire est comptée négativement.

$$SG_{\mathcal{D}_n^1}(x, y, q) = SG_{\mathcal{C}_n^1}(x, y, q) \times SG_{\mathcal{C}_{n-1}}(1, 1, q^{-1}) = \frac{x^n y q^n}{(q^{-1})_{n-1}(yq)_n}$$

d'où $SG_{\mathcal{D}^1}(x, y, q) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n y q^n}{(q^{-1})_{n-1}(yq)_n} = \tilde{J}_1(x, y; q)$

□

4 Polyominos parallélogrammes

Nous nous intéressons dans cette section à la classe des polyominos parallélogrammes non réduits à un point, notée \mathcal{PP} . Nous montrons de façon purement bijective que la série génératrice des polyominos parallélogrammes comptés suivant la largeur x , la hauteur y et l'aire q est \tilde{J}_1/\tilde{J}_0 dans l'espace $\mathcal{F}(Q[[\frac{1}{q}]])[[x, y]]$.

Proposition 4 Si (p_1, p_2) est un couple de chemins qui vérifie les propriétés suivantes

- (i) $(p_1, p_2) \in \mathcal{D}^1$
- (ii) p_1 et p_2 ne s'intersectent pas, hormis à l'origine

alors (p_1, p_2) définit un polyomino parallélogramme

Preuve. Remarquons tout d'abord que $(p_1, p_2) \in \mathcal{D}^1$ donc que les chemins sont de même largeur. Pour retrouver les deux chemins (bord supérieur b_{sup} et bord inférieur b_{inf}) de la définition, il suffit de prendre $b_{sup} = p_1$ et $b_{inf} = p_2 n^{h_1 - h_2}$ où n représente un pas Nord et h_1 (respectivement h_2) la hauteur du chemin p_1 (respectivement p_2). \square

Notations : Soient $d_1 \in \mathcal{D}^1$, $pp \in \mathcal{PP}$ et $d \in \mathcal{D}$

Pour d_1 , on note la largeur l_1 , la hauteur h_1 et l'aire a_1 .

Pour pp , on note la largeur l_{pp} , la hauteur h_{pp} et l'aire a_{pp} .

Pour d , on note la largeur l , la hauteur h et l'aire a .

Nous montrons qu'il existe une bijection f de \mathcal{D}^1 dans $\mathcal{PP} \times \mathcal{D}$ qui conserve les paramètres largeur, hauteur et aire, en ce sens :

$$l_{pp} = l_1 - l$$

$$h_{pp} = h_1 - h$$

$$a_{pp} = a_1 - a$$

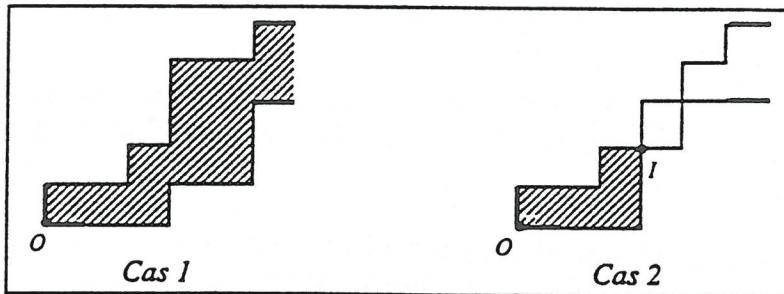


Figure 3: Les deux configurations possibles pour d_1

Définissons f . Soit $d_1 \in \mathcal{D}^1$, $d_1 = (c_1, c_2)$. En considérant les deux cas, illustrés sur la figure 4, on définit $f(d_1) = (pp, d)$ de la façon suivante :

1 : si c_1 et c_2 ne se coupent qu'à l'origine, le couple (c_1, c_2) définit un polyomino parallélogramme (cf. définition 4). On définit alors $f(d_1) = (pp, \epsilon)$ et les paramètres hauteur, largeur et aire sont conservés ($h_1 = h_{pp}$, $l_1 = l_{pp}$, $a_1 = a_{pp}$).

2 : sinon, soit I ($I \neq O$) le point d'intersection de c_1 et de c_2 qui se trouve le plus près de l'origine O . On découpe chaque chemin de d_1 en deux sous-chemins, (dc_1, fc_1) et (dc_2, fc_2) , de telle sorte que :

- dc_1 et dc_2 aient pour origine commune le point O et pour extrémité commune le point I
- fc_1 et fc_2 aient pour origine commune le point I

- fc_1 (resp. fc_2) ait pour extrémité l'extrémité du chemin c_1 (resp. c_2)
(a). Considérons (dc_1, dc_2) . C'est un couple de chemins allant de O en I (donc, ayant même origine et même extrémité), qui ne possèdent pas de point d'intersection et qui ne sont constitués que de pas Nord et de pas Est. Par définition, ils définissent un polyomino parallélogramme. On pose $pp = (dc_1, dc_2)$.

(b). Considérons (fc_1, fc_2) . C'est un couple de chemins ayant même origine I qui se terminent tout deux par un pas Est et dont leurs extrémités ont même abscisse (par définition de \mathcal{D}^1); fc_1 et fc_2 sont donc de même largeur. Par définition de \mathcal{D} , on peut affirmer que $(fc_1, fc_2) \in \mathcal{D}$. En posant $d = (fc_1, fc_2)$, on définit alors $f(d_1) = (pp, d)$. Les paramètres hauteur, largeur et aire sont conservés ($h_1 = h_{pp} + h$, $l_1 = l_{pp} + l$, $a_1 = a_{pp} + a$).

Proposition 5 *L'application f est une bijection entre les couples de chemins de \mathcal{D}^1 et les couples formés d'un polyomino parallélogramme et d'un couple de chemins de \mathcal{D} qui conserve les paramètres hauteur, largeur et aire.*

Preuve.

Définissons f^{-1} : on pose $pp \in \mathcal{PP}$, avec $pp = (p_1, p_2)$ où p_1 est le bord supérieur de pp et p_2 le bord inférieur de pp et $d = (c_1, c_2)$. En considérant les deux cas illustrés sur la figure 4, on définit $f^{-1}(pp, d) = (c'_1, c'_2)$ de la façon suivante :

1 : si $d = \epsilon$, on a $p_2 = en^{\alpha_1}e \cdots en^{\alpha_k}e$ et on pose $p'_2 = en^{\alpha_1}e \cdots en^{\alpha_{k-1}}e$, c'est à dire que p'_2 est le chemin inférieur de pp sans ses derniers pas Nords. On a alors $(p_1, p'_2) \in \mathcal{D}^1$ car :

- p_1 commence par un pas Nord et fini par un pas Est
- p'_2 commence par un pas Est et fini par un pas Est

On a montré que $f^{-1}(pp, \epsilon) = (p_1, p'_2) \in \mathcal{D}^1$.

2 : sinon, on a $c'_1 = p_1.c_1$ et $c'_2 = p_2.c_2$. Où, l'opération ". . .", concaténation sur les chemins est équivalente à l'opération concaténation dans le monoïde libre sur $X = \{e, n\}$, où la lettre e représente un pas Est et la lettre n un pas Nord.

Caractérisons (c'_1, c'_2) :

- p_1 et p_2 ayant même origine alors c'_1 et c'_2 ont même origine
- p_1 commence par un pas Nord alors c'_1 commence par un pas Nord
- p_2 commence par un pas Est alors c'_2 commence par un pas Est
- Soit l la largeur de p_1 et de p_2 et k celle de c_1 et de c_2 , alors de part leur construction c'_1 et c'_2 sont de largeur $l + k$. Donc, c'_1 et c'_2 sont de même largeur.
- Enfin c_1 et c_2 se terminent par un pas Est donc c'_1 et c'_2 se terminent aussi par un pas Est.

Les propriétés que l'on vient d'exhiber sur c'_1 et c'_2 nous permettent de conclure, compte tenu de la définition de \mathcal{D}^1 , que le couple $(c'_1, c'_2) \in \mathcal{D}^1$.

On a montré que $f^{-1}(pp, d) = (c'_1, c'_2) \in \mathcal{D}^1$. On pose $d_1 = (c'_1, c'_2)$. Les paramètres hauteur, largeur et aire sont conservés ($h_{pp} + h = h_1$, $l_{pp} + l = l_1$, $a_{pp} + a = a_1$). \square

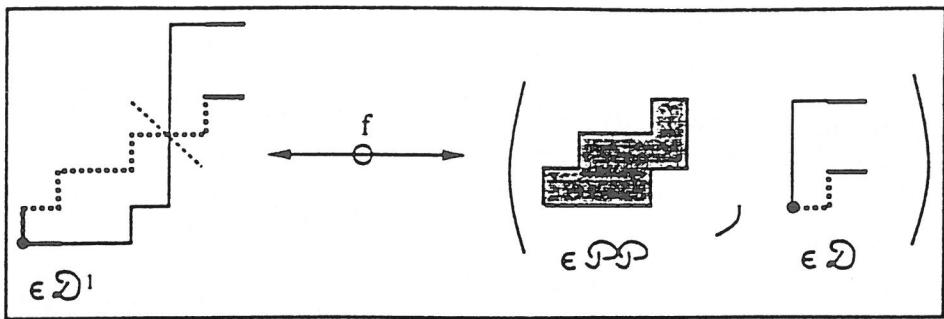


Illustration de la bijection $f : \mathcal{D}^1 \rightarrow \mathcal{PP} \times \mathcal{D}$

Corollaire 2 $\tilde{J}_1 = SG_{\mathcal{PP}} \times \tilde{J}_0$

5 Polyominos parallélogrammes de base ν

On s'intéresse maintenant à la classe des polyominos parallélogrammes de base ν ($\nu > 0$), notée \mathcal{PP}^ν et à la classe des polyominos parallélogrammes de base supérieure ou égale à ν , notée $\mathcal{PP}^{\geq \nu}$

Proposition 6 La série génératrice des couples de chemins de \mathcal{D}^ν comptés suivant la largeur x , la hauteur y et l'aire q est \tilde{J}_ν .

Preuve. Nous exprimons la série génératrice des couples de chemins de \mathcal{D}^ν en terme de séries génératrices sur les chemins que nous connaissons,

$$SG_{\mathcal{D}^\nu}(x, y, q) = SG_{C_1^\nu}(x, y, q) \times SG_{C_{n-\nu}}(1, 1, q^{-1}) = \frac{x^n y q^n}{(q^{-1})_{n-\nu} (yq)_n} \text{ pour } n \geq \nu \geq 1$$

$$\text{d'où } SG_{\mathcal{D}^\nu}(x, y, q) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^{n+\nu-1} y q^{n+\nu-1}}{(q^{-1})_{n-1} (yq)_{n+\nu-1}} = \tilde{J}_\nu(x, y; q)$$

□

Proposition 7 Soit f la bijection définie dans la section 4 telle que $f(d') = (pp, d)$. Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. $d' \in \mathcal{D}^\nu$
2. pp est un polyomino parallélogramme de base supérieure ou égale à ν .

Preuve.

(1 \implies 2) On a $\nu \geq 1$ donc $\mathcal{D}^\nu \subset \mathcal{D}^1$, on peut donc appliquer la bijection f . Et si $f(d') = (pp, d)$ avec $f(d') \in \mathcal{D}^\nu$ le bord inférieur de pp commence par au moins ν pas Est et son bord supérieur par un pas Nord. Donc pp est un polyomino parallélogramme de base supérieure ou égale à ν .

(2 \implies 1) Soient $d = (d_1, d_2)$ et $pp = (p_1, p_2)$. pp est un polyomino parallélogramme tel que son bord inférieur commence par ν pas Est et son bord supérieur par un pas Nord. On a donc bien $d' = (p_1 \cdot d_1, p_2 \cdot d_2) \in \mathcal{D}^\nu$. □

Corollaire 3 $\tilde{J}_\nu = SG_{pp \geq \nu} \times \tilde{J}_0$

Corollaire 4

1. La série génératrice des polyominos parallélogrammes de base supérieure ou égale à ν ($\nu \geq 1$) comptés suivant la largeur x , la hauteur y et l'aire q est

$$\frac{\tilde{J}_\nu}{\tilde{J}_0}$$

2. La série génératrice des polyominos parallélogrammes de base ν ($\nu \geq 1$) comptés suivant la largeur x , la hauteur y et l'aire q est

$$\frac{\tilde{J}_\nu - \tilde{J}_{\nu+1}}{\tilde{J}_0}$$

Preuve. La première partie du corollaire est évidente. Montrons la deuxième partie :

$$\begin{aligned}\tilde{J}_\nu &= SG_{pp \geq \nu} \times \tilde{J}_0 \\ \tilde{J}_{\nu+1} &= SG_{pp \geq (\nu+1)} \times \tilde{J}_0 \\ \tilde{J}_\nu - \tilde{J}_{\nu+1} &= (SG_{pp \geq \nu} - SG_{pp \geq (\nu+1)}) \times \tilde{J}_0 \\ \tilde{J}_\nu - \tilde{J}_{\nu+1} &= SG_{pp \nu} \times \tilde{J}_0\end{aligned}$$

□

6 Extension des formules à de nouveaux paramètres

Pour alléger les écritures, nous n'avons pas considéré d'autres paramètres que la largeur, la hauteur et l'aire. Ainsi, les démonstrations et les formules ont été rendues plus lisibles. Mais d'autres paramètres sont conservés par la bijection f décrite dans la section 4, en particulier :

- les hauteurs de la première et de la dernière colonnes,
- le nombre de coins supérieurs
- et le nombre de coins inférieurs du polyomino parallélogramme.

Définition 2 Les q -analogues \tilde{J}_0 et \tilde{J}_1 des fonctions de Bessel s'expriment en fonction des variables x, y, z, v, t, s, q de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\tilde{J}_0(x, y, z, v, t, s, q) &= \sum_{n \geq 0} \frac{x^n ((1-t)yq; q)_n ((1-s)q^{-1}; q^{-1})_{n-1}}{(vq^{-1})_n (yq)_n} \\ \tilde{J}_1(x, y, z, v, t, s, q) &= \sum_{n \geq 1} \frac{x^n y z ((1-t)yq; q)_{n-1} ((1-s)q^{-1}; q^{-1})_{n-2} q^n}{(vq^{-1})_{n-1} (yq)_{n-1} (1 - yzq^n)}\end{aligned}$$

a. Les hauteurs

La hauteur de la première colonne du polyomino parallélogramme est donnée dans la fonction génératrice par la puissance de la variable formelle z . La hauteur de la dernière colonne du polyomino parallélogramme est donnée dans la fonction génératrice par la puissance de la

variable formelle y moins la puissance de la variable formelle v . Pour rajouter ces paramètres, il suffit de faire quelques remarques.

Hauteur de la première colonne. La hauteur de la première colonne d'un polyomino parallélogramme (comptée par z) correspond à la hauteur du premier pas Est dans le chemin compté positivement dans le couple de chemin de \mathcal{D}^1 . On obtient aisément,

$$SG_{C_n^1}(x, y, z, q) = \frac{x^n y z q^n}{(yq)_{n-1} (1 - zyq^n)}$$

D'où $SG_{\mathcal{D}^1}(x, y, z, q) = \tilde{J}_1(x, y, z, q)$ La bijection f définie dans la section 4 conserve la hauteur de la première colonne en ce sens que ce paramètre se transmet simplement du couple de chemins de \mathcal{D}^1 au polyomino parallélogramme. D'où

$$SG_{PP}(x, y, z, 1, 1, 1, q) = \frac{\tilde{J}_1(x, y, z, q)}{\tilde{J}_0(x, y, q)}$$

Hauteur de la dernière colonne. La puissance de la variable formelle v représente la hauteur du dernier pas Est du chemin compté négativement dans un couple de chemins de π . Il apparaît clairement que compter v dans un couple de chemin revient à remplacer la variable y par la variable v dans le chemin compté négativement. D'où

$$\begin{aligned} SG_{\mathcal{D}^1}(x, y, v, q) &= \sum_{n \geq 1} SG_{C_n^1}(x, y, q) \times SG_{C_{n-1}}(1, v, q^{-1}) = \tilde{J}_1(x, y, v, q) \\ SG_{\mathcal{D}}(x, y, v, q) &= \sum_{n \geq 0} SG_{C_n}(x, y, q) \times SG_{C_n}(1, v, q^{-1}) = \tilde{J}_0(x, y, v, q) \end{aligned}$$

Nous devons différencier les deux cas considérés dans l'élaboration de la bijection f vue en section 4 selon si le chemin de \mathcal{D} est réduit à un point ou non.

Un chemin d_1 de \mathcal{D}^1 est soit un polyomino parallélogramme pp_1 soit un polyomino parallélogramme pp suivi d'un chemin d de \mathcal{D} . Au niveau de la variable v , dans le premier cas sa valeur se transmet simplement de d_1 à pp_1 . Dans le second cas la puissance de la variable v en d_1 sera égale à la valeur de la puissance de v en d plus la hauteur du polyomino, soit la puissance de la variable y . Ce qui se traduit en terme de séries génératrices par,

$$\tilde{J}_1(x, y, 1, v, q) = SG_{PP}(x, y, 1, v, q) + SG_{PP}(x, yv, 1, 1, q) \times \tilde{J}_0(x, y, 1, v, q)$$

On en conclut que

$$\begin{aligned} SG_{PP}(x, y, 1, v, q) &= \tilde{J}_1(x, y, 1, v, q) - SG_{PP}(x, yv, 1, 1, q) \times \tilde{J}_0(x, y, 1, v, q) \\ SG_{PP}(x, y, v, q) &= \frac{\tilde{J}_1(x, y, 1, v, q) \tilde{J}_0(x, yv, 1, 1, q) - \tilde{J}_1(x, yv, 1, 1, q) \tilde{J}_0(x, y, 1, v, q)}{\tilde{J}_0(x, yv, 1, 1, q)} \end{aligned}$$

b. Les coins

Nous prolongeons notre interprétation combinatoire des \tilde{J}_0 et \tilde{J}_1 en rajoutant deux nouvelles variables formelles t et s dont les puissances s'interpréteront comme le nombre de *coins supérieurs* et le nombre de *coins inférieurs* sur les couples de chemins du plan π .

Nous reprenons les résultats principaux énoncés dans les sections précédentes et nous les étendons.

Pour alléger les écritures, nous écrirons dans ce paragraphe $SG_{C_n}(x, y, t, s, q)$ au lieu de $SG_{C_n}(x, y, 1, 1, t, s, q)$, et de même pour $SG_{C_n^1}(x, y, t, s, q)$, pour $\bar{J}_0(x, y, t, s, q)$ et pour $\bar{J}_1(x, y, t, s, q)$.

Proposition 8 (Extension de la proposition 1)

i) La série génératrice des chemins de C_n ($n > 0$) comptés suivant la largeur x , la hauteur y , le nombre de coins supérieurs t , le nombre de coins inférieurs s et l'aire q , est :

$$SG_{C_n}(x, y, t, s, q) = \frac{x^n (1 - (1-t)yq^n)((1-ts)yq; q)_{n-1}}{(yq)_n}$$

ii) La série génératrice des chemins de C_n^1 ($n > 0$) comptés suivant la largeur x , la hauteur y , le nombre de coins supérieurs t , le nombre de coins inférieurs s et l'aire q , est :

$$SG_{C_n^1}(x, y, t, s, q) = \frac{x^n y q^n t ((1-ts)yq; q)_{n-1}}{(yq)_n}$$

Preuve.

Considérons les coins supérieurs:

1 : Un chemin de C forme un empilement de bandes horizontales. Si le nombre de coins supérieurs est représenté par la puissance de la variable formelle t , l'aire par la puissance de la variable formelle q et la hauteur par la puissance de la variable formelle y , pour une bande de largeur donnée α , on a

$$1 + yq^\alpha t + y^2 q^{2\alpha} t + y^3 q^{3\alpha} t \dots = 1 + \frac{yq^\alpha t}{1 - yq^\alpha}$$

En considérant toutes les largeurs possibles jusqu'à n , si on représente la largeur du chemin par la puissance de la variable formelle x , on a

$$x(1 + \frac{yqt}{1 - yq}) x(1 + \frac{yq^2t}{1 - yq^2}) \dots x(1 + \frac{yq^n t}{1 - yq^n}) = x^n \prod_{i=1}^n \frac{1 - (1-t)yqq^{i-1}}{1 - yq^i}$$

$$\text{d'où } SG_{C_n}(x, y, t, 1, q) = \frac{x^n ((1-t)yq; q)_n}{(yq)_n}$$

2 : Pour un chemin de C^1

$$SG_{C_n^1} = x^n (1 + \frac{yqt}{1 - yq}) (1 + \frac{yq^2t}{1 - yq^2}) \dots (\frac{yq^n t}{1 - yq^n})$$

Le dernier terme est différent de $1 + (yq^n t)/(1 - yq^n)$ car on est sûr d'avoir au moins une bande de largeur n . Donc on n'a pas à considérer le terme "+1" qui représente le vide,

$$\text{par conséquent, } SG_{C_n^1}(x, y, t, 1, q) = \frac{x^n y q^n t}{1 - yq^n} \prod_{i=1}^{n-1} 1 + \frac{yq^i t}{1 - yq^i}$$

$$\text{d'où, } SG_{C_n^1}(x, y, t, 1, q) = \frac{x^n y q^n t ((1-t)yq; q)_{n-1}}{(yq)_n}$$

Considérons les coins inférieurs:

1 : Dans un chemin de C_n^1 si l'on a t^i et s^j alors $i = j + 1$. D'où

$$SG_{C_n^1}(x, y, t, s, q) = \frac{x^n y q^n t ((1 - ts)yq; q)_{n-1}}{(yq)_n}$$

2 : Dans un chemin de C_n commençant par un pas Est, si l'on a t^i et s^j alors $i = j$.

Or, $SG_{C_n} = x SG_{C_{n-1}} + SG_{C_n^1}$ donc,

$$\begin{aligned} SG_{C_n}(x, y, t, s, q) &= x \frac{x^{n-1} ((1 - ts)yq; q)_{n-1}}{(yq)_{n-1}} + \frac{x^n y q^n t ((1 - ts)yq; q)_{n-1}}{(yq)_n} \\ SG_{C_n}(x, y, t, s, q) &= \frac{x^n (1 - (1 - t)yq^n) ((1 - ts)yq; q)_{n-1}}{(yq)_n} \end{aligned}$$

□

Cette proposition nous donne les diagrammes de Ferrers avec les coins et on obtient également la fonction génératrice des *polyominos tas* en fonction de la hauteur x , de la largeur y , de l'aire q , du nombre de coins Est-Sud sur le chemin descendant t et le nombre de coins Est-Nord sur le chemin montant s , notée \mathcal{PT} ,

$$\begin{aligned} SG_{\mathcal{PT}}(x, y, t, s, q) &= SG_{C_n^1}(x, y, t, 1, q) \times SG_{C_{n-1}}(1, y, 1, s, q) \\ SG_{\mathcal{PT}}(x, y, t, s, q) &= 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{x^n y q^n t ((1 - t)yq; q)_{n-1} ((1 - s)yq; q)_{n-1}}{(yq)_n (yq)_{n-1}} \end{aligned}$$

Proposition 9 (Extension des propositions 2 et 3)

- i) La série génératrice des couples de chemins de \mathcal{D} comptés suivant la largeur x , la hauteur y , le nombre de coins supérieurs t , le nombre de coins inférieurs s et l'aire q est $\tilde{J}_0(x, y, t, s, q)$
- ii) La série génératrice des couples de chemins de \mathcal{D}^1 comptés suivant la largeur x , la hauteur y , le nombre de coins supérieurs t , le nombre de coins inférieurs s et l'aire q est $\tilde{J}_1(x, y, t, s, q)$.

Preuve.

- i) On calcule $SG_{\mathcal{D}_n}(x, y, t, s, q) = SG_{C_n}(x, y, t, 1, q) \times SG_{C_n}(1, 1, 1, s, q^{-1})$ pour $(n \geq 0)$
- ii) On calcule $SG_{\mathcal{D}_n^1}(x, y, t, s, q) = SG_{C_n^1}(x, y, t, 1, q) \times SG_{C_{n-1}}(1, 1, 1, s, q^{-1})$ pour $(n \geq 1)$ □

Proposition 10 (Extension de la proposition 5) La bijection f définie section 4 conserve également le nombre de coins supérieurs et de coins inférieurs.

Preuve. Soient $d_1 = (c_1, c_2) \in \mathcal{D}^1$, $pp \in \mathcal{PP}$ et $d \in \mathcal{D}$ tels que $f(d_1) = (pp, d)$, f conserve le nombre de coins supérieurs sur les objets en ce sens que le nombre de coins supérieurs de pp est égal au nombre de coins supérieurs de d_1 moins le nombre de coins supérieurs de d .

Pour les coins inférieurs, nous devons considérer les deux cas décrits dans l'élaboration de la bijection f et illustrés dans la figure 4.

1 : si c_1 et c_2 ne se coupent qu'à l'origine, le couple (c_1, c_2) définit un polyomino parallélogramme et $d = \epsilon$. Le nombre de coins inférieurs de d_1 est alors égal au nombre de coins inférieurs du polyomino parallélogramme moins 1. En effet, le coin formé du dernier pas Est du chemin négatif et du premier pas Nord du prolongement (par des pas Nord) du chemin négatif vers le chemin positif constitue un coin inférieur pour le polyomino non comptabilisé dans d_1 .

2 : sinon, le nombre de coins inférieurs de pp est égal au nombre de coins inférieurs de d_1 moins le nombre de coins inférieurs de d . \square

Notations :

Pour d_1 , on note le nombre de coins supérieurs t_1 et le nombre de coins inférieurs s_1

Pour pp , on note le nombre de coins supérieurs t_{pp} et le nombre de coins inférieurs s_{pp}

Pour d , on note le nombre de coins supérieurs t et le nombre de coins inférieurs s

Ces paramètres sont conservés en ce sens que :

$$\begin{aligned} t_1 &= t_{pp} + t \\ s_1 &= \begin{cases} s_{pp} + s & \text{si } d \neq \epsilon \\ s_{pp} - 1 & \text{si } d = \epsilon \end{cases} \end{aligned}$$

D'où, $\tilde{J}_1(x, y, t, s, q) = \frac{1}{s} SG_{FF}(x, y, t, s, q) + SG_{PP}(x, y, t, s, q) \times (\tilde{J}_0(x, y, t, s, q) - 1)$

La bijection f nous permet donc de donner la série génératrice des polyominos parallélogrammes comptés suivant la largeur x , la hauteur y , le nombre de coins supérieurs t , le nombre de coins inférieurs s et l'aire q :

$$\frac{s \tilde{J}_1(x, y, t, s, q)}{1 - s + s \tilde{J}_0(x, y, t, s, q)}$$

7 Récapitulatif et Conclusion

Nous avons le tableau des correspondances des variables formelles pour un polyomino parallélogramme suivant :

x	largeur
y	hauteur
z	hauteur première colonne
v	hauteur de la base de la dernière colonne
t	nombre de coins supérieurs
s	nombre de coins inférieurs
q	aire
p	périmètre
ρ	périmètre de site

Les derniers paramètres *périmètre* et *périmètre de site* se déduisent directement des formules énoncées, de la façon suivante :

$$SG_{FF}(x, y, p, q) = SG_{PP}(xp^2, yp^2, q)$$

et

$$SG_{FF}(x, y, t, s, \rho, q) = \rho^2 SG_{FF}(x\rho^2, y\rho^2, \frac{t}{\rho}, \frac{s}{\rho}, q)$$

Pour les paramètres cités dans le tableau ci-dessus, nous avons donc donné une preuve bijective de la série génératrice des

- diagrammes de Ferrers (où v et y sont équivalentes et où s est toujours à la puissance 1)
- des polyominos tas (où x représente la hauteur du tas, y sa largeur, z la largeur du sommet du tas, t le nombre de coins Est-Sud sur le chemin descendant et s le nombre de coins Est-Nord sur le chemin montant)
- des polyominos parallélogrammes (nous avons donné des formules séparées pour les hauteurs et les coins, mais il est clair que nous pouvons les considérer ensemble (cf. énoncés des \bar{J}_0 et \bar{J}_1 en fonction de x, y, z, v, t, s, q))

On déduit aisément de cette dernière formule, la série génératrice de la classe des polyominos parallélogrammes à franges de largeurs (ν, λ) , notée $\mathcal{PPF}^{(\nu, \lambda)}$,

$$SG_{\mathcal{PPF}^{(\nu, \lambda)}}(x, y, z, v, t, s, q) = x^\nu y^\lambda z^\lambda q^{\nu\lambda} SG_{\mathcal{PP}}(xq^\lambda, yq^\nu, z, v, t, s, q)$$

Nous retrouvons les résultats sur les polyominos parallélogrammes à franges (ν, λ) ($J_{\lambda, \nu+1}/J_{\lambda, \nu}$) trouvés analytiquement par J.C. Lalanne [17].

Nous avons montré que $\bar{J}_1/\bar{J}_0 = SG_{\mathcal{PP}}$ dans $\mathcal{F}(Q[[\frac{1}{q}]])[[x, y]]$. Par ailleurs, les résultats de Féodou [10] montrent que, dans $Q[[q]][[x, y]]$, le rapport J_1/J_0 est également égal à $SG_{\mathcal{PP}}$.

On pourrait penser que ce résultat n'est finalement pas surprenant puisque l'on peut passer de J_0 à \bar{J}_0 par la simple transformation,

$$\frac{-q^k}{(1-q^k)} \rightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{q^k}}$$

Cette transformation est valide pour toute valeur de q non racine $k^{\text{ème}}$ de l'unité. Mais, ce raisonnement est erroné en ce qui nous concerne. En effet, nous traitons ici de fonctions génératrices, qui n'ont de sens que relativement à un développement en séries entière.

Or dans ce cadre la transformation précédente n'a plus aucun sens, et l'égalité des fonctions génératrices J_1/J_0 et \bar{J}_1/\bar{J}_0 est bien énigmatique.

On peut généraliser ce résultat de la manière suivante :
Soient deux suites de nombres $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Considérons l'égalité suivante :

$$\frac{\sum_{n \geq 0} b_n \frac{(-1)^n q^{\binom{n+2}{2}} x^{n+1}}{(q)_n (qy)_{n+1}}}{\sum_{n \geq 0} a_n \frac{(-1)^n q^{\binom{n+1}{2}} x^n}{(q)_n (qy)_n}} = \frac{\sum_{n \geq 0} b_n \frac{q^{n+1} x^{n+1}}{\left(\frac{1}{q}\right)_n (qy)_{n+1}}}{\sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{\left(\frac{1}{q}\right)_n (qy)_n}}.$$

L'égalité numérique est évidente, mais le problème de savoir pour quelles suites cette égalité est vraie au sens des séries formelles ne semble pas évident à résoudre.

Bibliographie

- [1] ANDREWS (GE). - q-series : their development and application in analysis, number theory, combinatorics, physics and computer algebra. *AMS, Library of congress Cataloging-in-Publication Data*, 1986.
- [2] ASKEY (R) et WILSON (J). - Some basic hypergeometric polynomials that generalize jacobi polynomials. *Memoirs of Am. Math. Soc.*, vol. 319, 1985.
- [3] BOUSQUET-MELOU (M). - *q-énumération de polyominos convexes*. - Thèse, Université de Bordeaux I, 1991.
- [4] DELEST (M) et FEDOU (JM). - Exact formulas for fully compact animals. - Rapport LaBRI n° 89-06.
- [5] DELEST (M) et FEDOU (JM). - Enumeration of skew ferrers diagrams. *Discrete Math.*, vol. 112, 1993, pp. 65-79.
- [6] DELEST (M), GOUYOU-BEAUCHAMPS (D) et VAUQUELIN (B). - Enumération of parallelogram polyominoes with given bound and site parameter. *Graphs and Combinatorics*, vol. 3, 1987, pp. 325-339.
- [7] DUBERNARD (JP). - *q-grammaires et polyominos paralléogrammes*. - Thèse, Université Bordeaux I, 1993.
- [8] DUBERNARD (JP) et DUTOIR (I). - Enumération de polyominos convexes dirigés. - pré-publication.
- [9] DUTOIR (I) et FEDOU (JM). - Grammaires d'objets. - pré-publication.
- [10] FEDOU (JM). - *Grammaires et q-énumérations de polyominos*. - Thèse, Université de Bordeaux I, 1989.
- [11] FLAJOLET (P). - Pólya festoons. - INRIA Research Report, July 1991.
- [12] GESSEL (I). - A non commutative generalization and q-analog of the lagrange inversion formula. *Trans. Amer. Math. Sov.*, vol. 257, 1980, pp. 455-482.
- [13] GESSEL (I) et STANTON (D). - Application of q-lagrange inversion to basic hypergeometric series. *Transaction of the Amer. Math. Soc.*, vol. 257, 1980, pp. 455-482.
- [14] ISMAIL (M). - The zeroes of basic bessel functions and associated orthogonal polynomials. *J. of Math. Anal. and Appl.*, vol. 86, 1982, pp. 1-18.
- [15] KLARNER (DA) et RIVEST (RL). - Asymptotic bounds for the number of convex n -ominoes. *Discrete Math.*, vol. 8, 1974, pp. 31-40.
- [16] KREWERAS (G). - Joint distributions of three descriptive parameters of bridge. pp. 177-191. - New-York, Berlin, springer-verlag édition, 1986. Colloque de Combinatoire Enumérative, UQAM 1985, Montréal ed. Labelle et Leroux.
- [17] LALANNE (JC). - Polyominos paralléogrammes à franges et fonctions de bessel. *Discrete Math.*, vol. 115, 1993, pp. 217-230.
- [18] POLYA (G). - On the number of certain lattice polygons. *J. Comb. Theory*, vol. 6, 1969, pp. 102-105.
- [19] TEMPERLEY (HNV). - Temperley methodologie. *Phys Rev*, vol. 103, n° 1, 1956.