

# SÉRIES INDICATRICES ET $q$ -SÉRIES

Hélène DÉCOSTE

LACIM, Université du Québec à Montréal  
C.P. 8888, Succ. A, Montréal (Québec), Canada H3C 3P8

STRACT — There are two  $q$ -analogues for the exponential function, and each of them appears naturally as a  $q$ -series associated with the species  $E$  of all sets. This is the starting point for our definition of two canonical  $q$ -series associated with any species, resulting into  $q$ -analogues for counting sequences of combinatorial structures. We first give properties and examples, tables that were computed with the help of Maple. Then we show that one of these  $q$ -analogues has positive coefficients. This observation leads to a theoretical exploration of these coefficients.

SUMÉ — Les deux  $q$ -analogues classiques de la fonction exponentielle apparaissent de façon naturelle comme  $q$ -séries associées à l'espèce  $E$  des ensembles. Cette observation permet de définir deux  $q$ -séries canoniques pour une espèce quelconque, enant ainsi des  $q$ -analogues des suites énumérant les structures combinatoires considérées. On en donne d'abord des propriétés et exemples, avec des tables de valeurs calculées par Maple. Puis on montre que l'un de ces  $q$ -analogues est à coefficients positifs et on explore plusieurs formules liées à l'étude formelle de ces coefficients.

## INTRODUCTION

is la littérature classique on trouve deux  $q$ -analogues pour la fonction exponentielle  $e^x$ , soit les fonctions

$$E(x; q) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!_q} = \frac{1}{(1 - (1-q)x)} \frac{1}{(1 - (1-q)xq)} \frac{1}{(1 - (1-q)xq^2)} \dots \quad (1)$$

$$E(x; q) = \sum_{n \geq 0} q^{\binom{n}{2}} \frac{x^n}{n!_q} = (1 + (1-q)x)(1 + (1-q)xq)(1 + (1-q)xq^2)\dots,$$

$n!_q = (1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)/(1-q)^n$  est le  $q$ -anologue classique de l'entier  $n!$ . Nous avons ici volontairement choisi une notation différente de la notation classique pour ces deux fonctions afin de les situer dès maintenant dans le contexte de ce travail. En effet, ces deux fonctions apparaissent naturellement dans la théorie des espèces de structures comme  $q$ -séries associées à l'espèce  $E$  des ensembles. On les obtient par substitution appropriée, d'une part dans la série indicatrice de cycles [JA1] et d'autre part dans la série indicatrice d'asymétrie [LG2], comme le montre la proposition qui suit.

**Proposition 1.** Soit  $E$  l'espèce des ensembles,  $Z_E$  sa série indicatrice de cycles et  $\Gamma_E$  sa série indicatrice d'asymétrie. L'unique substitution de la forme  $x_i := u_i(q)x^i$ ,  $i \geq 1$ , qui satisfait

$$Z_E(x_1, x_2, \dots) \Big|_{x_i := u_i(q)x^i} = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!_q}$$

est donnée par  $u_i(q)x^i = \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}$ . De plus cette substitution est aussi la seule telle que

$$\Gamma_E(x_1, x_2, \dots) \Big|_{x_i := u_i(q)x^i} = \sum_{n \geq 0} q^{\binom{n}{2}} \frac{x^n}{n!q}.$$

*Preuve.* Rappelons que

$$Z_E(x_1, x_2, \dots) = e^{\sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{n}} \quad \text{et} \quad \Gamma_E(x_1, x_2, \dots) = e^{\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x_n}{n}}, \quad (2)$$

écrivons  $u_i$  pour  $u_i(q)$  et posons

$$E(x; q) = Z_E(x_1, x_2, \dots) \Big|_{x_i := u_i x^i} = e^{u_1 x + \frac{1}{2} u_2 x^2 + \frac{1}{3} u_3 x^3 + \dots}$$

Pour que  $E(x; q)$  soit égal à  $\sum_{n \geq 0} x^n / n!_q$ , il faut que sa  $q$ -dérivée satisfasse  $D_q E(x; q) = E(x; q)$ , c'est-à-dire

$$\frac{E(x; q) - E(qx; q)}{(1-q)x} = E(x; q).$$

Après réduction, on obtient

$$e^{(q-1)u_1 x + \frac{1}{2}(q^2-1)u_2 x^2 + \frac{1}{3}(q^3-1)u_3 x^3 + \dots} = 1 - (1-q)x$$

et, prenant le logarithme,

$$(q-1)u_1 x + \frac{1}{2}(q^2-1)u_2 x^2 + \frac{1}{3}(q^3-1)u_3 x^3 + \dots = -\left[ (1-q)x + \frac{1}{2}(1-q)^2 x^2 + \dots \right],$$

d'où, pour  $i \geq 1$ ,  $(q^i-1)u_i = -(1-q)^i$ . Ainsi,  $u_i(q)x^i = (1-q)^i x^i / (1-q^i)$  est l'unique solution. On procède de façon similaire pour  $E(x; q) = \Gamma_E(x_1, x_2, \dots) \Big|_{x_i := u_i(q)x^i}$ .

Chaque espèce de structures  $F$  possède une série indicatrice de cycles  $Z_F$  et une série indicatrice d'asymétrie  $\Gamma_F$ . Il est alors naturel d'utiliser le résultat de la proposition 1 pour définir les deux  $q$ -séries que nous associerons à une espèce quelconque.

**Définition 1.** Si  $F: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$  est une espèce de structures, alors ses deux  $q$ -séries associées, notées  $F(x; q)$  et  $F\langle x; q \rangle$ , sont définies respectivement par

$$F(x; q) = Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) \Big|_{x_i := \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}} \quad \text{et} \quad F\langle x; q \rangle = \Gamma_F(x_1, x_2, x_3, \dots) \Big|_{x_i := \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}}. \quad (3)$$

On vérifie aisément, à partir de résultats semblables pour les séries indicatrices, que ces deux  $q$ -séries satisfont une propriété remarquable d'interpolation entre des séries importantes de la théorie,

$$\lim_{q \rightarrow 1} F(x; q) = F(x), \quad \lim_{q \rightarrow 0} F(x; q) = \tilde{F}(x) \quad \text{et} \quad \lim_{q \rightarrow 1} F\langle x; q \rangle = F(x), \quad \lim_{q \rightarrow 0} F\langle x; q \rangle = \bar{F}(x), \quad (4)$$

où  $F(x) = \sum_{n \geq 0} f_n x^n / n!$ ,  $\tilde{F}(x) = \sum_{n \geq 0} \tilde{f}_n x^n$  et  $\bar{F}(x) = \sum_{n \geq 0} \bar{f}_n x^n$  désignent respectivement la série génératrice exponentielle, la série génératrice des types (structures à isomorphisme près) et la série génératrice des types d'asymétrie de l'espèce  $F$ . Ainsi, en écrivant

$$F(x; q) = \sum_{n \geq 0} f_n(q) \frac{x^n}{n!_q} \quad \text{et} \quad F\langle x; q \rangle = \sum_{n \geq 0} f_n\langle q \rangle \frac{x^n}{n!_q}, \quad (5)$$

on obtient que les deux suites de polynômes (voir proposition 2)  $f_n(q)$  et  $f_n\langle q \rangle$  sont des  $q$ -analogues de la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  énumérant les structures d'espèce  $F$ , qui tiennent compte non seulement de leur nombre mais aussi des classes d'isomorphisme de ces structures. De plus, nous verrons au théorème 1 que le premier de ces  $q$ -analogues est toujours à coefficients entiers positifs; nous sommes donc en présence d'un véritable  $q$ -anologue de la combinatoire. Ceci nous amène à considérer non seulement le calcul d'exemples explicites mais aussi l'étude théorique de ces  $q$ -séries. Ce travail se situant dans le cadre de la théorie des espèces de structures, nous invitons le lecteur qui désire en revoir les résultats de base à consulter [DH1, JA1 ou LJ1].

## PROPRIÉTÉS ET EXEMPLES

Le fait que ces  $q$ -analogues tiennent compte de l'action du groupe symétrique sur les structures considérées peut rendre intéressants les exemples qui, à priori, semblent les plus simples. Par exemple dans le cas de la suite factorielle  $(n!)_{n \geq 0}$ , le modèle des ordres linéaires d'un ensemble de cardinal  $n$  conduit au  $q$ -anologue classique  $n!_q = (1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)/(1-q)^n$ , puisque les structures de l'espèce  $L$  des ordres linéaires n'ont pas d'automorphismes autres que l'identité. De même, pour les coefficients binomiaux  $\binom{n}{k}$ , le modèle des sous-ensembles de cardinal  $k$  de l'ensemble  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  conduit aux deux  $q$ -analogues classiques

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{n!_q}{k!_q(n-k)!_q} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}_q = q^{\binom{k}{2} + \binom{n-k}{2}} \frac{n!_q}{k!_q(n-k)!_q}.$$

Par contre le modèle des permutations (endofonctions bijectives), regroupées dans l'espèce  $S$ , est équivalent à la donnée, pour chaque cardinalité, de l'action du groupe symétrique sur lui-même par conjugaison. Il conduit à deux nouveaux  $q$ -analogues de la suite  $(n!)_{n \geq 0}$ , notés  $s_n(q)$  et  $s_n\langle q \rangle$ , donnés explicitement par

$$\begin{aligned} S(x; q) &= \sum_{n \geq 0} s_n(q) \frac{x^n}{n!_q} & \text{et} & \quad S\langle x; q \rangle = \sum_{n \geq 0} s_n\langle q \rangle \frac{x^n}{n!_q} \\ \text{et} \quad s_n(q) &= \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda = 1^{d_1} 2^{d_2} \dots n^{d_n}}} \prod_{i=1}^n (1-q^i)^{1-d_i} & \text{et} \quad s_n\langle q \rangle &= \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq 1 \\ \frac{2q}{1+q} n!_q & \text{si } n \geq 2 \end{cases}. \end{aligned} \quad (6)$$

On obtient ces formules en substituant directement dans les séries indicatrices  $Z_S$  et  $\Gamma_S$ , [JA1, LG2],

$$Z_S = \prod_{k \geq 1} \frac{1}{1-x_k} = \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{(d_1, d_2, \dots) \\ \sum id_i = n}} x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots \quad \text{et} \quad \Gamma_S = \frac{1-x_2}{1-x_1} = 1 + x_1 + \sum_{n \geq 2} (x_1^n - x_1^{n-2} x_2), \quad (7)$$

à l'espèce  $S$  des permutations. Les premières valeurs sont présentées dans la table 1.

Plus généralement, lorsque les coefficients des séries indicatrices de cycles  $Z_F$  et d'asymétrie  $\Gamma_F$  sont connus, on peut utiliser les polynômes  $P_n(\lambda; q)$  de la proposition 2 qui suit pour calculer explicitement les deux séries associées à l'espèce  $F$ .

$n$	$s_n(q)$	$s_n\langle q \rangle$
0	1	1
1	1	1
2	2	$2q$
3	$3 + q + q^2 + q^3$	$2q + 2q^2 + 2q^3$
4	$5 + 2q + 5q^2 + 4q^3 + 5q^4 + 2q^5 + q^6$	$2q + 4q^2 + 6q^3 + 6q^4 + 4q^5 + 2q^6$
5	$7 + 5q + 11q^2 + 16q^3 + 20q^4 + 20q^5 + 18q^6 + 12q^7 + 7q^8 + 3q^9 + q^{10}$	$2q + 6q^2 + 12q^3 + 18q^4 + 22q^5 + 22q^6 + 18q^7 + 12q^8 + 6q^9 + 2q^{10}$
6	$11 + 8q + 23q^2 + 37q^3 + 61q^4 + 73q^5 + 98q^6 + 93q^7 + 97q^8 + 78q^9 + 63q^{10} + 37q^{11} + 27q^{12} + 9q^{13} + 4q^{14} + q^{15}$	$2q + 8q^2 + 20q^3 + 38q^4 + 60q^5 + 82q^6 + 98q^7 + 104q^8 + 98q^9 + 82q^{10} + 60q^{11} + 4q^{12} + 3q^{13} + q^{14}$

Table 1  
Les deux  $q$ -analogues de  $n!$ ,  $n \leq 6$ , obtenus de l'espèce  $S$  des permutations.

**Proposition 2.** Soit  $F: B \rightarrow E$  une espèce de structures,  $Z_F$  et  $\Gamma_F$  ses séries indicatrices de cycles et d'asymétrie,

$$Z_F(x_1, x_2, \dots) = \sum_{\substack{(d_1, d_2, \dots) \\ \sum id_i < \infty}} fix_F(d_1, d_2, \dots) \frac{x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots}{1^{d_1} d_1! 2^{d_2} d_2! \dots},$$

$$\Gamma_F(x_1, x_2, \dots) = \sum_{\substack{(d_1, d_2, \dots) \\ \sum id_i < \infty}} asym_F(d_1, d_2, \dots) \frac{x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots}{1^{d_1} d_1! 2^{d_2} d_2! \dots}.$$

Alors, pour  $n \geq 0$ , les coefficients de  $x^n/n!_q$  dans  $F(x; q)$  et  $F\langle x; q \rangle$  sont donnés respectivement par

$$f_n(q) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda = 1^{d_1} 2^{d_2} \dots}} \frac{fix_F(\lambda)}{1^{d_1} d_1! 2^{d_2} d_2! \dots} P_n(\lambda; q) \quad \text{et} \quad f_n\langle q \rangle = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda = 1^{d_1} 2^{d_2} \dots}} \frac{asym_F(\lambda)}{1^{d_1} d_1! 2^{d_2} d_2! \dots} P_n(\lambda; q), \quad (8)$$

où, pour chaque partage  $\lambda$  de  $n$ , de type  $1^{d_1} 2^{d_2} \dots$ ,  $P_n(\lambda; q)$  est un polynôme en  $q$  à coefficients entiers, de degré  $\frac{n(n-1)}{2}$ , défini par  $P_n(\lambda; q) = \prod_{1 \leq i \leq n} (1 - q^i)^{1-d_i}$ .

**Preuve.** Les expressions données en (8) s'obtiennent de la définition par développement direct de (3), en remarquant que

$$x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots \Big|_{x_i := \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}} = \prod_{i \geq 1} (1 - q^i)^{1-d_i} \frac{x^n}{n!_q} = P_n(\lambda; q) \frac{x^n}{n!_q}.$$

On peut voir qu'il s'agit bien de polynômes à coefficients entiers, soit en les décomposant en facteurs linéaires et en vérifiant que chacun apparaît avec un exposant positif, ou bien en utilisant le fait que les coefficients  $q$ -multinomiaux ainsi que les  $q$ -factorielles  $n!_q$  sont des polynômes à coefficients entiers et en vérifiant que

$$P_n(\lambda; q) = \left[ \underbrace{1, \dots, 1}_{d_1}, \underbrace{2, \dots, 2}_{d_2}, \dots \right]_q (1 - q)^{n - \sum d_i} \prod_{i=1}^n (i-1)!_q^{d_i}.$$

Le lecteur désireux de voir les détails de ces deux approches pourra consulter [DH1], p. 113 et 119. ■

On obtient facilement, par calcul symbolique, une table des  $P_n(\lambda; q)$  et la formule (8) permet alors de calculer les exemples pour lesquels les coefficients des séries indicatrices sont soit connus explicitement, comme pour l'espèce des cycles, soit déjà inclus dans des tables de valeurs, comme pour les espèces moléculaires ou atomiques sur des petites cardinalités [LG2, LJ2]. Pour l'espèce  $C$  des cycles, on a

$$Z_C = \sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n} \ln \frac{1}{1-x_n} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) x_d^{n/d} \quad \text{et} \quad \Gamma_C = \sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n} \ln \frac{1}{1-x_n} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) x_d^{n/d}.$$

On obtient donc

$$c_n(q) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) \frac{(1-q)\dots(1-q^n)}{(1-q^d)^{n/d}} \quad \text{et} \quad c_n\langle q \rangle = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) \frac{(1-q)\dots(1-q^n)}{(1-q^d)^{n/d}}. \quad (9)$$

$n$	$c_n(q)$	$c_n\langle q \rangle$
1	1	1
2	1	$q$
3	$1 + q^3$	$q + q^2$
4	$1 + q^2 + q^3 + 2q^4 + q^5$	$q + q^2 + 2q^3 + q^4 + q^5$
5	$1 + q^2 + 3q^3 + 4q^4 + 6q^5 + 4q^6 + 3q^7 + q^8 + q^{10}$	$q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + 4q^5 + 4q^6 + 3q^7 + 2q^8 + q^9$
6	$1 + 2q^2 + 5q^3 + 8q^4 + 11q^5 + 17q^6 + 16q^7 + 17q^8 + 15q^9 + 12q^{10} + 7q^{11} + 6q^{12} + 2q^{13} + q^{14}$	$q + 2q^2 + 5q^3 + 8q^4 + 13q^5 + 14q^6 + 18q^7 + 16q^8 + 15q^9 + 11q^{10} + 9q^{11} + 4q^{12} + 3q^{13} + q^{14}$

Table 2  
Les deux  $q$ -analogues de  $(n-1)!$ ,  $n \leq 6$ , obtenus de l'espèce  $C$  des cycles.

En examinant les exemples présentés jusqu'à maintenant, on observe que les  $q$ -analogues obtenus ont tous leurs coefficients positifs. Ce n'est malheureusement pas le cas en général pour le deuxième  $q$ -anologue, comme le montre la table 3.

$n$	$A$	$a_n(q)$	$a_n\langle q \rangle$
1	$X$	1	1
2	$E_2$	1	$q$
3	$E_3$	1	$q^3$
	$C_3$	$1 + q^3$	$q + q^2$
4	$E_4$	1	$q^6$
	$E_4^\pm$	$1 + q^6$	$q^3 + q^4 + q^5 - q^6$
	$E_2 \circ E_2$	$1 + q^2 + q^4$	$q^3 + q^4 + q^5$
	$P_4^{bic}$	$1 + 2q^2 + 2q^4 + q^6$	$q + 3q^3 + q^4 + 2q^5 - q^6$
	$C_4$	$1 + q^2 + q^3 + 2q^4 + q^5$	$q + q^2 + 2q^3 + q^4 + q^5$
	$E_2 \circ X^2$	$1 + q + 3q^2 + 2q^3 + 3q^4 + q^5 + q^6$	$2q + 2q^2 + 4q^3 + 2q^4 + 2q^5$

Table 3  
Les deux  $q$ -analogues associés aux espèces atomiques sur  $n \leq 4$  points.

Considérons les variables  $x_i$  des séries indicatrices comme étant les fonctions de la base des «power sums»,  $x_i := \sum_{k \geq 1} \xi_k^i$ . De cette façon, on obtient deux fonctions symétriques en  $\xi_1, \xi_2, \dots$  qui à leur tour donnent lieu, par spécialisation principale,  $\xi_k := (1-q)xq^{k-1}$ , aux deux  $q$ -séries  $F(x; q)$  et  $F\langle x; q \rangle$ :

$$\begin{aligned} \left[ Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) \Big|_{x_i := \sum_{k \geq 1} \xi_k^i} \right]_{\xi_k := (1-q)xq^{k-1}} &= Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) \Big|_{x_i := \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}} = F(x; q), \\ \left[ \Gamma_F(x_1, x_2, x_3, \dots) \Big|_{x_i := \sum_{k \geq 1} \xi_k^i} \right]_{\xi_k := (1-q)xq^{k-1}} &= \Gamma_F(x_1, x_2, x_3, \dots) \Big|_{x_i := \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}} = F\langle x; q \rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

Dans le cas de  $F(x; q)$ , l'expression entre crochets,  $Z_F(x_i := \sum_{k \geq 1} \xi_k^i)$ , est la fonction symétrique associée à la suite  $(\Phi_n)_{n \geq 0}$  de représentations linéaires de  $\mathfrak{S}_n$  définie par l'espèce  $F$ . En effet, la série indicatrice  $Z_F$  n'est rien d'autre que la série de caractères  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \chi_{\Phi_n}(\sigma) I(\sigma)$  puisque pour chaque  $n \geq 0$ , la représentation linéaire  $\Phi_n$ , définie par

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \xrightarrow{\Phi_n} & \text{Aut}(\mathcal{L}(F[n])) \\ \sigma & \mapsto & \Phi_n(\sigma): s \mapsto \sigma_F \cdot s, (s \in F[n]) \end{array},$$

a pour caractère  $\chi_{\Phi_n}$ , où

$$\chi_{\Phi_n}(\sigma) = \text{Tr } \Phi_n(\sigma) = \sum_{s \in F[n]} \sum_{\sigma_F \cdot s = s} 1 = \text{fix}_F(\sigma), \quad \sigma \in \mathfrak{S}_n.$$

Cette observation permet de prouver la positivité du premier  $q$ -analogue  $F(x; q)$ .

**Théorème 1.** Soit  $F : B \rightarrow E$  une espèce de structures, alors, pour chaque  $n \geq 0$ ,  $f_n(q)$  est un polynôme en  $q$  à coefficients entiers positifs.

**Preuve.** Pour poursuivre le développement commencé à la formule (10), utilisons le fait que les fonctions symétriques associées aux représentations irréductibles  $(\Phi_\lambda)_{\lambda \vdash n}$  du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  sont les fonctions de Schur  $(s_\lambda)_{\lambda \vdash n}$  [MI]. On obtient alors

$$\begin{aligned} F(x; q) &= \left[ Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) \Big|_{x_i := \sum_{k \geq 1} \xi_k^i} \right]_{\xi_k := (1-q)xq^{k-1}} \\ &= \left[ \sum_{n \geq 0} \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda s_\lambda(\xi_1, \xi_2, \dots) \right]_{\xi_k := (1-q)xq^{k-1}}, \end{aligned}$$

où  $m_\lambda \geq 0$  est la multiplicité de la représentation irréductible  $\Phi_\lambda$  dans  $\Phi_n$ . De plus,

$$s_\lambda(\xi_1, \xi_2, \dots) \Big|_{\xi_k := (1-q)xq^{k-1}} = T_\lambda(q) \frac{x^n}{n! q^n},$$

où  $T_\lambda(q) = \frac{q^{(\sum v \lambda_v) - n} n! q}{\prod [h_{ij}]_q}$ . Or R. Stanley a montré que  $T_\lambda(q)$  est un polynôme en  $q$  à coefficients entiers positifs,  $q$ -comptage des tableaux de Young [SR]. Donc, pour  $n \geq 0$ ,  $f_n(q) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda T_\lambda(q)$  est un polynôme en  $q$  à coefficients entiers positifs. ■

'our le calcul d'exemples plus sophistiqués, nous aurons recours à la prochaine proposition qui décrit le comportement des  $q$ -séries devant les opérations combinatoires de somme, produit et substitution. En ce qui concerne la dérivation, le calcul de  $F'(x; q)$  et  $F'\langle x; q \rangle$  doit être fait à partir de la définition, en utilisant le fait que la dérivation commute aux séries indicatrices:

$$F'(x; q) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} Z_F \right) (x_1, x_2, \dots) \Big|_{x_i := \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}} \quad \text{et} \quad F'\langle x; q \rangle = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \Gamma_F \right) (x_1, x_2, \dots) \Big|_{x_i := \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}}. \quad (11)$$

**Proposition 3.** Soient  $F: B \rightarrow E$  et  $G: B \rightarrow E$  deux espèces de structures. Alors leurs  $q$ -séries associées satisfont les relations

$$1) \quad (F+G)(x; q) = F(x; q) + G(x; q), \quad (F+G)\langle x; q \rangle = F\langle x; q \rangle + G\langle x; q \rangle,$$

$$2) \quad (FG)(x; q) = F(x; q) \cdot G(x; q), \quad (FG)\langle x; q \rangle = F\langle x; q \rangle \cdot G\langle x; q \rangle,$$

$$3) \quad (F \circ G)(x; q) = Z_F \left( G(x_1; q), G(x_2; q^2), G(x_3; q^3), \dots \right) \Big|_{x_i := \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}},$$

$$(F \circ G)\langle x; q \rangle = \Gamma_F \left( G\langle x_1; q \rangle, G\langle x_2; q^2 \rangle, G\langle x_3; q^3 \rangle, \dots \right) \Big|_{x_i := \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}}.$$

reuve. Ces formules s'obtiennent de résultats analogues pour les séries indicatrices de cycles [DH1, JA1] et d'asymétrie [LG2].

**Exemple. Arborescences et Endofonctions.**

ans [LG1] et [LG3], G. Labelle donne des formules explicites pour les coefficients des séries indicatrices de l'espèce  $\mathcal{A}$  des arborescences et  $\mathcal{E}nd$  des endofonctions. On pourrait utiliser ces formules, en conjonction avec les polynômes  $P_n(\lambda; q)$  de la proposition 2, pour donner des  $q$ -analogues des suites  $(a_n)_{n \geq 1}$  et  $(end_n)_{n \geq 0}$  numérant les arborescences et les endofonctions sur  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ . Nous allons plutôt utiliser un outil de calcul symbolique pour calculer itérativement les premières valeurs. Les espèces de structures  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{E}nd$  satisfont les équations combinatoires

$$\mathcal{A} = XE(\mathcal{A}) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}nd = S(\mathcal{A}).$$

Sur passage aux  $q$ -séries, d'après la proposition 3 et les formules (2) et (7), on obtient

$$\mathcal{A}(x; q) = x \cdot ((E \circ \mathcal{A})(x; q)) = xe^{\mathcal{A}(x_1; q) + \frac{1}{2}\mathcal{A}(x_2; q^2) + \frac{1}{3}\mathcal{A}(x_3; q^3) + \dots} \Big|_{x_i := \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}} \quad (12)$$

$$\mathcal{A}\langle x; q \rangle = x \cdot ((E \circ \mathcal{A})\langle x; q \rangle) = xe^{\mathcal{A}(x_1; q) - \frac{1}{2}\mathcal{A}(x_2; q^2) + \frac{1}{3}\mathcal{A}(x_3; q^3) - \dots} \Big|_{x_i := \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}} \quad (13)$$

$$\mathcal{E}nd(x; q) = (S \circ \mathcal{A})(x; q) = \frac{1}{(1 - \mathcal{A}(x_1; q))(1 - \mathcal{A}(x_2; q^2))(1 - \mathcal{A}(x_3; q^3)) \dots} \Big|_{x_i := \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}} \quad (14)$$

$$\mathcal{E}nd\langle x; q \rangle = (S \circ \mathcal{A})\langle x; q \rangle = \frac{1 - \mathcal{A}\langle x_2; q^2 \rangle}{1 - \mathcal{A}\langle x_1; q \rangle} \Big|_{x_i := \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}} = \frac{1 - \mathcal{A}\left(\frac{1-q}{1+q} x^2; q^2\right)}{1 - \mathcal{A}\langle x; q \rangle}. \quad (15)$$

Si  $\mathcal{A}^{}(x; q)$  est une approximation ayant un contact d'ordre  $k$  avec  $\mathcal{A}(x; q)$ , alors la formule (12) permet d'obtenir une meilleure approximation,

$$\mathcal{A}^{}(x; q) = \sum \text{termes de degré } \leq k+1 \text{ dans } xe^{\mathcal{A}^{}(x_1; q) + \frac{1}{2}\mathcal{A}^{}(x_2; q^2) + \frac{1}{3}\mathcal{A}^{}(x_3; q^3) + \dots} \Big|_{x_i := \frac{(1-q)^i x^i}{1-q^i}},$$

ayant un contact d'ordre  $k+1$  avec  $\mathcal{A}(x; q)$ . En utilisant le langage de manipulation symbolique Maple [CG], il devient alors facile de calculer les approximations successives et d'en extraire les coefficients  $a_n(q)$  de  $x^n/n!_q$  donnés dans la table 4. Les  $q$ -analogues  $a_n(q)$ ,  $end_n(q)$  et  $end_n(q)$  de cette même table ont été calculés par Maple, à partir des formules (13), (14) et (15).  $\square$

$n$	arborescences		endofonctions	
	$a_n(q)$	$a_n(q)$	$end_n(q)$	$end_n(q)$
1	1	1	1	1
2	$1 + q$	$1 + q$	$3 + q$	$1 + 3q$
3	$2 + 3q + 3q^2 + q^3$	$1 + 3q + 3q^2 + 2q^3$	$7 + 8q + 8q^2 + 4q^3$	$3 + 9q + 9q^2 + 6q^3$
4	$4 + 9q + 14q^2 + 16q^3 + 12q^4 + 7q^5 + 2q^6$	$2 + 7q + 12q^2 + 16q^3 + 14q^4 + 9q^5 + 4q^6$	$19 + 33q + 57q^2 + 60q^3 + 51q^4 + 27q^5 + 9q^6$	$6 + 29q + 48q^2 + 66q^3 + 56q^4 + 37q^5 + 14q^6$
5	$9 + 26q + 54q^2 + 84q^3 + 108q^4 + 112q^5 + 99q^6 + 71q^7 + 41q^8 + 17q^9 + 4q^{10}$	$3 + 17q + 40q^2 + 72q^3 + 99q^4 + 114q^5 + 108q^6 + 85q^7 + 53q^8 + 26q^9 + 8q^{10}$	$47 + 128q + 269q^2 + 420q^3 + 539q^4 + 562q^5 + 496q^6 + 355q^7 + 204q^8 + 85q^9 + 20q^{10}$	$15 + 83q + 200q^2 + 358q^3 + 497q^4 + 572q^5 + 542q^6 + 425q^7 + 267q^8 + 128q^9 + 38q^{10}$
6	$20 + 75q + 189q^2 + 365q^3 + 590q^4 + 822q^5 + 1006q^6 + 1096q^7 + 1065q^8 + 923q^9 + 706q^{10} + 474q^{11} + 270q^{12} + 125q^{13} + 42q^{14} + 8q^{15}$	$6 + 40q + 121q^2 + 268q^3 + 472q^4 + 708q^5 + 927q^6 + 1071q^7 + 1102q^8 + 1010q^9 + 824q^{10} + 588q^{11} + 363q^{12} + 185q^{13} + 73q^{14} + 18q^{15}$	$130 + 441q + 1140q^2 + 2179q^3 + 3550q^4 + 4906q^5 + 6060q^6 + 6554q^7 + 6411q^8 + 5526q^9 + 4255q^{10} + 2829q^{11} + 1636q^{12} + 740q^{13} + 254q^{14} + 45q^{15}$	$34 + 236q + 719q^2 + 1604q^3 + 2824q^4 + 4254q^5 + 5561q^6 + 6443q^7 + 6618q^8 + 6080q^9 + 4940q^{10} + 3534q^{11} + 2169q^{12} + 1109q^{13} + 427q^{14} + 104q^{15}$

Table 4  
Les deux  $q$ -analogues associés aux espèces  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{E}nd$  sur  $n \leq 6$  points.

Soulignons que ces techniques s'appliquent aussi pour les structures pondérées. Toutes les définitions et les résultats de ce texte ont une version pondérée dont on peut trouver les énoncés précis ainsi que les preuves détaillées dans [DH1]. Ceci permet entre autre l'introduction de  $q$ -analogues pour les familles classiques de polynômes orthogonaux [LJ3] et fera l'objet d'un autre article [DH2].

## FORMULES GÉNÉRALES

Notre point de départ pour l'étude formelle de nos  $q$ -analogues est une définition uniforme pour les deux séries indicatrices proposée par G. Labelle dans [LG4]. Celui-ci introduit d'abord une espèce pondérée,

$$X_\xi = X_{\xi_1} + X_{\xi_2} + \dots,$$

dont les structures sont les singletons de poids  $\xi_i$ ,  $i \geq 1$ . Puis il considère une espèce pondérée auxiliaire,

$$F_\xi = F(X_\xi) = F(X_{\xi_1} + X_{\xi_2} + \dots).$$

Une  $F_\xi$ -structure est une  $F$ -structure dont chaque point de l'ensemble sous-jacent est muni d'un poids choisi arbitrairement parmi les  $\xi_i$ ; on peut écrire  $F_\xi = F \times E_\xi$ . Ceci permet de définir les séries indicatrices de cycles  $Z_F$  et d'asymétrie  $\Gamma_F$  d'une espèce quelconque  $F$  comme suit :

$$Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) = \tilde{F}_\xi(x)|_{x:=1} \quad \text{et} \quad \Gamma_F(x_1, x_2, x_3, \dots) = \overline{F}_\xi(x)|_{x:=1},$$

où  $\tilde{F}_\xi$  et  $\overline{F}_\xi$  sont les espèces « tilde » et « barre » associées à l'espèce  $F_\xi$ , et les variables  $x_k$  et  $\xi_i$  sont reliées par la famille d'égalités  $x_k = \xi_1^k + \xi_2^k + \xi_3^k + \dots$ ,  $k \geq 1$ . En introduisant cette approche dans notre définition 1, on obtient les expressions suivantes pour les deux  $q$ -séries associées à une espèce quelconque :

$$F(x; q) = \tilde{F}_\xi(x)|_{\xi_k := (1-q)q^{k-1}} \quad \text{et} \quad F(x; q) = \overline{F}_\xi(x)|_{\xi_k := (1-q)q^{k-1}}. \quad (16)$$

puisque seule la première de ces deux séries est toujours positive, dans le sens du théorème 1, et que nous nous intéressons à l'aspect combinatoire des  $q$ -analogues obtenus, nous ne traiterons plus de  $F(x; q)$ . À partir d'aujourd'hui, notre attention sera concentrée seulement sur  $F(x; q)$  et  $f_n(q)$ .

**Proposition 4.** Pour toute espèce  $F: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$  on a :

$$1) \quad \tilde{F}_\xi = \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{n_i \geq 0 \\ n_1 + n_2 + \dots = n}} \left( F \times [E_{n_1} \cdot E_{n_2} \cdot \dots] \right) \tilde{\left( \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \dots \right)},$$

où  $E_{n_i}$  désigne l'espèce des ensembles de cardinal  $n_i$  et l'indice  $\left( \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \dots \right)$  signifie que chaque  $(F \times [E_{n_1} \cdot E_{n_2} \cdot \dots]) \tilde{\left( \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \dots \right)}$ -structure est munie du poids  $\xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \dots$ .

$$2) \quad f_n(q) = n!_q \sum_{\substack{n_i \geq 0 \\ n_1 + n_2 + \dots = n}} \left| \mathcal{O}_{(n_1, n_2, \dots)} F[n] \right| \left| \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \dots \right|_{\xi_k := (1-q)q^{k-1}}, \quad (17)$$

où  $n \geq 0$  et  $\left| \mathcal{O}_{(n_1, n_2, \dots)} F[n] \right|$  désigne le nombre d'orbites de l'action sur  $F[n]$  (par transport de structures) du groupe  $\mathfrak{S}_{n_1} \times \mathfrak{S}_{n_2} \times \dots$ , celui-ci étant vu comme un sous-groupe de  $\mathfrak{S}_n$  qui agit indépendamment sur des sous-ensembles disjoints de  $[n]$  de tailles  $n_1, n_2, \dots$ .

**Preuve. 1)** Utilisant le fait que l'espèce  $E$  des ensembles satisfait  $E(A+B) = E(A) \cdot E(B)$  et se décompose suivant les cardinalités en  $E = 1 + E_1 + E_2 + \dots$ , on a

$$\begin{aligned} F(X_\xi) &= F \times E(X_\xi) = F \times \left[ E(X_{\xi_1} + X_{\xi_2} + \dots) \right] = F \times \prod_{i \geq 1} E(X_{\xi_i}) \\ &= F \times \prod_{i \geq 1} \left( 1 + E_1(X_{\xi_i}) + E_2(X_{\xi_i}) + \dots + E_{n_i}(X_{\xi_i}) + \dots \right) \end{aligned}$$

et remarquant que toutes les structures considérées, pour  $n_1, n_2, \dots$  donnés, ont le même poids, on obtient

$$F(X_\xi) = F \times \prod_{i \geq 1} \left( 1 + (E_1)_{\xi_i} + (E_2)_{\xi_i^2} + \dots + (E_{n_i})_{\xi_i^{n_i}} + \dots \right) = F \times \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots \geq 0 \\ \sum n_i < \infty}} (E_{n_1} \cdot E_{n_2} \cdot \dots)_{(\xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \dots)}.$$

Ceci donne, en regroupant les termes suivant la somme des  $n_i$ ,

$$F(X_\xi) = \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots \geq 0 \\ \sum n_i = n}} F \times (E_{n_1} \cdot E_{n_2} \cdot \dots)_{(\xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \dots)}.$$

Finalement, on considère les espèces tildes associées et on remarque que le poids  $\xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \dots$  est commun à tous les types de  $F \times (E_{n_1} \cdot E_{n_2} \cdot \dots)_{(\xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \dots)}$ -structures.

2) À l'aide de (1) on calcule la série génératrice de l'espèce  $\tilde{F}_\xi$ :

$$\tilde{F}_\xi(x) = \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{n_i \geq 0 \\ n_1 + n_2 + \dots = n}} \left| (F \times [E_{n_1} \cdot E_{n_2} \cdot \dots])^\sim[n] \right| \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \dots \frac{x^n}{n!}.$$

Or selon la définition de l'espèce tilde,

$$\begin{aligned} \left| (F \times [E_{n_1} \cdot E_{n_2} \cdot \dots])^\sim[n] \right| &= \left| \left\{ (\varphi, s, \sigma) \middle| \begin{array}{l} \varphi \in E_{n_1} \cdot E_{n_2} \cdot \dots [n], s \in F[n], \sigma \in \mathfrak{S}_n, \\ \sigma \cdot \varphi = \varphi \text{ et } \sigma \cdot s = s \end{array} \right\} \right| \\ &= \left| \left\{ (\varphi, s, \sigma) \middle| \begin{array}{l} \varphi \in E_{n_1} \cdot E_{n_2} \cdot \dots [n], s \in F[n], \\ \sigma = \sigma_{n_1} \sigma_{n_2} \dots \in \mathfrak{S}_{n_1} \times \mathfrak{S}_{n_2} \times \dots \text{ et } \sigma \cdot s = s \end{array} \right\} \right| \\ &= \left| E_{n_1} \cdot E_{n_2} \cdot \dots [n] \right| \cdot \left| \left\{ (s, \sigma) \middle| \begin{array}{l} \sigma = \sigma_{n_1} \sigma_{n_2} \dots \in \mathfrak{S}_{n_1} \times \mathfrak{S}_{n_2} \times \dots, \\ s \in F[n] \text{ et } \sigma \cdot s = s \end{array} \right\} \right|, \end{aligned}$$

ce qui donne, en utilisant le lemme du stabilisateur,

$$\left| (F \times [E_{n_1} \cdot E_{n_2} \cdot \dots])^\sim[n] \right| = \binom{n}{n_1, n_2, \dots} \cdot |\mathfrak{S}_{n_1} \times \mathfrak{S}_{n_2} \times \dots| \cdot |\mathcal{O}_{(n_1, n_2, \dots)} F[n]| = n! |\mathcal{O}_{(n_1, n_2, \dots)} F[n]|.$$

D'où, d'après (16),

$$F(x; q) = \tilde{F}_\xi(x) \Big|_{\xi_k := (1-q)q^{k-1}} = \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{n_i \geq 0 \\ n_1 + n_2 + \dots = n}} \left| \mathcal{O}_{(n_1, n_2, \dots)} F[n] \right| \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \dots \Big|_{\xi_k := (1-q)q^{k-1}} x^n.$$

Dans la formule (17), il y a beaucoup de répétitions. En regroupant un maximum de termes, on obtient une expression de  $f_n(q)$  comme combinaison linéaire des fonctions symétriques monomiales.

**Proposition 5.** Pour toute espèce  $F : B \rightarrow E$  on a :

$$f_n(q) = \sum_{\lambda \vdash n} t_\lambda(F) n! {}_q \text{mon}_\lambda(\xi_1, \xi_2, \dots) \Big|_{\xi_k := (1-q)q^{k-1}}, \quad (18)$$

où  $t_\lambda(F)$  désigne le nombre d'orbites des structures de l'espèce  $F$  sous l'action du sous-groupe

Young  $\mathfrak{S}_\lambda$  du groupe symétrique,  $t_\lambda(F) = |\mathcal{O}_\lambda F[n]|$ .

reuve. Ce résultat est dû à l'observation suivante: si  $(n_1, n_2, \dots)^+$  désigne le partage sous-jacent à la suite  $(n_1, n_2, \dots)$ , formé de la suite finie décroissante de ses termes non-nuls, alors pour chaque paire de suites support fini  $(n_1, n_2, \dots)$  et  $(m_1, m_2, \dots)$  on a

$$(n_1, n_2, \dots)^+ = (m_1, m_2, \dots)^+ \Rightarrow |\mathcal{O}_{(n_1, n_2, \dots)} F[n]| = |\mathcal{O}_{(m_1, m_2, \dots)} F[n]|. \quad (19)$$

insi, en regroupant les coefficients de la formule (17) selon les partages  $\lambda$  tels que  $(n_1, n_2, \dots)^+ = \lambda$ , on obtient :

$$\begin{aligned} f_n(q) &= n!_q \sum_{\lambda \vdash n} |\mathcal{O}_\lambda F[n]| \sum_{(n_1, n_2, \dots)^+ = \lambda} \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \dots \Big|_{\xi_k := (1-q)q^{k-1}} \\ &= n!_q \sum_{\lambda \vdash n} |\mathcal{O}_\lambda F[n]| \text{mon}_\lambda(\xi_1, \xi_2, \dots) \Big|_{\xi_k := (1-q)q^{k-1}}. \end{aligned}$$

■

Le étude plus raffinée de la formule (17) nous amènera, dans le théorème 2, à exprimer explicitement les coefficients de  $f_n(q)$  en termes des nombres  $t_\lambda(F) = |\mathcal{O}_\lambda F[n]|$  et de coefficients entiers  $c_n(\lambda, i)$  qui ne dépendent pas du choix de l'espèce. Cette formule permettra une interprétation de la spécialisation principale des fonctions symétriques monomiales. Pour arriver à cette nouvelle formule explicite, on utilisera les deux lemmes techniques qui suivent.

emme 1. Si  $F : B \rightarrow E$  est une espèce de structures, alors pour  $n \geq 0$  on a

$$f_n(q) = \sum_{\substack{k_i > 0 \\ \langle k_1, \dots, k_s \rangle \in \text{Comp}(n)}} |\mathcal{O}_{(k_1, \dots, k_s)} F[n]| E_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle}(q)$$

où  $\text{Comp}(n)$  est l'ensemble des compositions de  $n$  ( $\text{Comp}(0) = \{\emptyset\}$  et pour  $n > 0$ ,  $\text{Comp}(n) = \{(k_1, \dots, k_s) \mid s > 0, k_i \in \mathbb{N}^*, k_1 + \dots + k_s = n\}$ ),  $|\mathcal{O}_{(k_1, \dots, k_s)} F[n]|$  désigne le nombre d'orbites de l'action, sur  $F[n]$ , d'un sous-groupe de  $\mathfrak{S}_n$  isomorphe au groupe  $\mathfrak{S}_{k_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{k_s}$  et

$$E_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle}(q) = q^{(\sum ik_i) - n} \frac{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}{(1-q^{k_1+\dots+k_s})(1-q^{k_2+\dots+k_s})\dots(1-q^{k_s})}. \quad (20)$$

uve. Pour une suite à support fini  $(n_1, n_2, \dots)$ , appelons  $(k_1, k_2, \dots, k_s)$  la sous-suite de ses termes non-nuls et, dans la formule (17), regroupons tous les monômes  $\xi_{i_1}^{k_1} \xi_{i_2}^{k_2} \dots \xi_{i_s}^{k_s}$ ,  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s$ , qui ont cette même sous-suite d'exposants non-nuls. D'après l'observation (19), tous ces monômes ont le même coefficient, on peut donc écrire

$$f_n(q) = \sum_{\substack{k_1+\dots+k_s=n \\ k_i > 0, s \geq 0}} |\mathcal{O}_{(k_1, \dots, k_s)} F[n]| n!_q \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s} \xi_{i_1}^{k_1} \dots \xi_{i_s}^{k_s} \Big|_{\xi_i := (1-q)q^{i-1}}$$

oser  $E_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle}(q) = n!_q \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s} \xi_{i_1}^{k_1} \dots \xi_{i_s}^{k_s} \Big|_{\xi_i := (1-q)q^{i-1}}$ . Or la transformation d'indices  $i_1 = j_1 + 1$ ,  $j_1 + j_2 + 2, \dots, i_s = j_1 + j_2 + \dots + j_s + s$  permet d'effectuer la somme :

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s} \xi_{i_1}^{k_1} \dots \xi_{i_s}^{k_s} \Big|_{\xi_i := (1-q)q^{i-1}} = q^{(\sum i k_i) - n} (1-q)^n \frac{1}{(1-q^{k_1 + \dots + k_s})(1-q^{k_2 + \dots + k_s}) \dots (1-q^{k_s})}.$$

D'où le résultat.

**Lemme 2.** Les polynômes  $E_{<k_1, \dots, k_s>}$  du lemme 1 possèdent le développement suivant :

$$E_{<k_1, \dots, k_s>} (q) = \sum_{i=0}^{n(n-1)/2} \sum_{\substack{R_{<k_1, \dots, k_s>} \subseteq V \subseteq [n-1] \\ \sum \{v | v \in V\} = i}} (-1)^{|V \setminus R|} q^i, \quad (2)$$

où  $R_{<k_1, \dots, k_s>} = \{k_s, k_s + k_{s-1}, \dots, k_s + \dots + k_2\}$ .

*Preuve.* En posant  $R_{<k_1, \dots, k_s>} = \{k_s, k_s + k_{s-1}, \dots, k_s + \dots + k_2\}$ , on peut réécrire (20) comme suit :

$$E_{<k_1, \dots, k_s>} (q) = q^{\sum \{r | r \in R_{<k_1, \dots, k_s>}\}} (1 - q^{\tau_1})(1 - q^{\tau_2}) \dots (1 - q^{\tau_{n-s}}),$$

où  $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-s}\} = [n] \setminus \{k_s, k_s + k_{s-1}, \dots, k_s + \dots + k_1\} = [n-1] \setminus R_{<k_1, \dots, k_s>}$ .

Il suffit alors d'effectuer le produit et de regrouper les termes suivant les diverses puissances de  $q$  pour obtenir la forme voulue.

**Théorème 2.** Pour toute espèce de structures  $F: B \rightarrow E$ , on a la formule explicite

$$f_n(q) = \sum_{i=0}^{n(n-1)/2} \left( \sum_{\lambda \vdash n} c_n(\lambda, i) t_\lambda(F) \right) q^i. \quad (2)$$

Dans ce développement, les  $c_n(\lambda, i)$  sont des entiers qui ne dépendent pas de l'espèce, donnés par

$$c_n(\lambda, i) = \sum_{\substack{\mu, v \in P_{<n>}^\neq, \mu \triangleleft v \\ <\mu>^+ = \lambda, v \vdash i}} (-1)^{\ell(v) - \ell(\mu)},$$

où  $P_{<n>}^\neq$  est l'ensemble de tous les partages en parts distinctes de taille  $< n$ ,  $\ell(\mu)$  est le nombre de parties du partage  $\mu$  ( $\ell(\emptyset) := 1$ ),  $\mu \triangleleft v$  si toutes les parts de  $\mu$  sont des parts de  $v$ , et  $<\mu>^+$  est le partage sous-jacent à la composition de  $n$  formée des marches de  $\mu$  (voir figure 1).

*Preuve.* D'après les lemmes 1 et 2, on a

$$f_n(q) = \sum_{i=0}^{n(n-1)/2} \left[ \sum_{\substack{k_i > 0 \\ <k_1, \dots, k_s> \in Comp(n)}} \sum_{\substack{R_{<k_1, \dots, k_s>} \subseteq V \subseteq [n-1] \\ \sum \{v | v \in V\} = i}} (-1)^{|V \setminus R|} |\mathcal{O}_{(k_1, \dots, k_s)} F[n]| \right] q^i,$$

où  $R_{<k_1, \dots, k_s>} = \{k_s, k_s + k_{s-1}, \dots, k_s + \dots + k_2\}$ . Utilisons encore l'observation (19) pour regrouper coefficients  $|\mathcal{O}_{(k_1, \dots, k_s)} F[n]|$  suivant le partage  $\lambda$  sous-jacent à la composition de  $n$ . Ceci donne

$$f_n(q) = \sum_{i=0}^{n(n-1)/2} \sum_{\lambda \vdash n} \left[ \sum (-1)^{|V \setminus R_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle}|} \right] |\mathcal{O}_\lambda F[n]| q^i,$$

somme intérieure portant sur toutes les compositions  $\langle k_1, \dots, k_s \rangle$  et les ensembles  $V$  qui satisfont

- (i)  $\langle k_1, \dots, k_s \rangle^+ = \lambda$
- (ii)  $R_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle} \subseteq V \subseteq [n-1]$
- (iii)  $\sum_{v \in V} v = i$ .

On va montrer que cet ensemble d'indices de sommation est en bijection avec celui donné dans l'encadré pour les  $c_n(\lambda, i)$ . Pour cela, on considère les éléments de l'ensemble  $R_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle}$  comme étant les parts d'un partage  $\mu$ . Puisque  $k_1 + \dots + k_s = n$  et  $k_i > 0$ ,  $1 \leq i \leq s$ , ces parts sont distinctes et de taille  $< n$ :

$$\begin{array}{ccc} Comp(n) & \xrightarrow{\sim} & P_{\leq n}^{\neq} \\ \langle k_1, \dots, k_s \rangle & \mapsto & \mu = (k_s + \dots + k_2) \dots > k_s + k_{s-1} > k_s. \end{array}$$

La composition  $\langle k_1, \dots, k_s \rangle$  est donc formée des «marches» du partage  $\mu$  (voir figure 1):

$$\langle n - \mu_1, \mu_1 - \mu_2, \dots, \mu_{s-2} - \mu_{s-1}, \mu_{s-1} \rangle \leftrightarrow \mu = \mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_{s-1}.$$

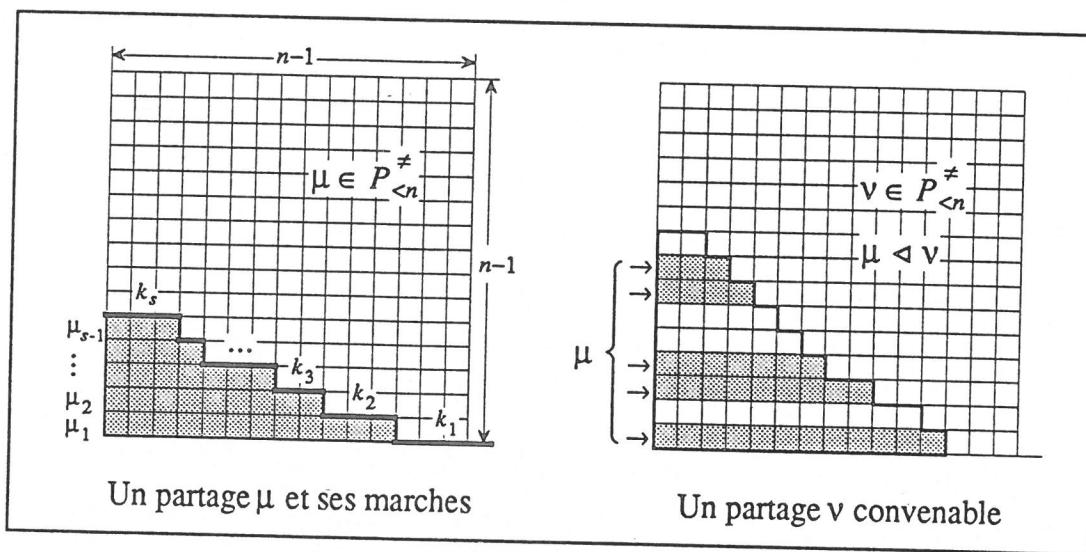


figure 1

l'ensemble  $V$  doit contenir  $R_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle}$ ; on l'obtient donc en ajoutant des parts à  $\mu$ , de façon à former un autre partage  $v$  en parts distinctes (de taille  $< n$  puisque  $V \subseteq [n-1]$ ). Ainsi

$$\begin{aligned} V \subseteq [n-1] &\leftrightarrow v \in P_{\leq n}^{\neq} \\ R_{\langle k_1, \dots, k_s \rangle} \subseteq V &\leftrightarrow \mu \triangleleft v. \end{aligned}$$

La réduction des autres conditions est directe,

$$\begin{aligned} \langle k_1, \dots, k_s \rangle^+ = \lambda &\leftrightarrow \langle \mu \rangle^+ = \lambda, \\ \sum \{v \mid v \in V\} = i &\leftrightarrow v \vdash i \end{aligned}$$

Les cardinalités d'ensembles se transforment en nombre de parts.

**Corollaire.** Si  $mon_{\lambda}(\xi_1, \xi_2, \dots)$  désigne la fonction symétrique monomiale associée au partage  $\lambda$  de  $n$ , alors

$$mon_{\lambda}(\xi_1, \xi_2, \dots) \Big|_{\xi_k := (1-q)q^{k-1}} = \frac{1}{n!q} \sum_{i=0}^{n(n-1)/2} c_n(\lambda, i) q^i,$$

les coefficients  $c_n(\lambda, i)$  étant ceux définis au théorème 2.

**Preuve.** Il s'agit d'exprimer l'égalité des coefficients lorsqu'on développe (18) et (22) en termes des divers  $t_{\lambda} = t_{\lambda}(F)$ , en introduisant des variables formelles supplémentaires associées au partage  $\lambda$ .

Dans la formule (18), les polynômes  $W_{\lambda}(q) = n!_q mon_{\lambda}(\xi_1, \xi_2, \dots) \Big|_{\xi_k := (1-q)q^{k-1}}$  satisfont une récurrence

$$W_{\lambda}(q) = \sum_{p:\lambda} q^{|\lambda|-p} (1-q^{|\lambda|-1})(1-q^{|\lambda|-2}) \dots (1-q^{|\lambda|-p+1}) W_{\lambda \setminus p}(q),$$

où  $p:\lambda$  signifie que  $p$  est une part de  $\lambda$  et  $\lambda \setminus p$  est le partage obtenu de  $\lambda$  en supprimant la part  $p$ . Cette récurrence est très efficace pour calculer formellement les polynômes  $f_n(q)$  en termes des divers  $t_{\lambda} = t_{\lambda}(F)$  et des puissances de  $q$ . Des tables ont été calculées à l'aide du programme de calcul symbolique Maple. Nous en présentons les premières valeurs dans la table 5. Remarquons que la table plus complète donnée dans [DH] suggerit l'existence d'une série formelle «générique» contenant l'information pour toutes les cardinalités :

$$f_n(q) = t_{n^1} + \left( -t_{n^1} + t_{(n-1)^1 1^1} \right) q + \left( -t_{n^1} + t_{(n-2)^1 2^1} \right) q^2 + \left( -t_{(n-1)^1 1^1} - t_{(n-2)^1 2^1} + t_{(n-2)^1 1^2} + t_{(n-3)^1 3^1} \right) q^3$$

$n$	$f_n(q)$
0	$t_{\emptyset}$
1	$t_{1^1}$
2	$t_{2^1} + (-t_{2^1} + t_{1^2})q$
3	$t_{3^1} + (-t_{3^1} + t_{2^1 1^1})q + (-t_{3^1} + t_{2^1 1^1})q^2 + (t_{3^1} - 2t_{2^1 1^1} + t_{1^3})q^3$
4	$t_{4^1} + (-t_{4^1} + t_{3^1 1^1})q + (-t_{4^1} + t_{2^2})q^2 + (-t_{2^2} + t_{2^1 2^1})q^3 + (t_{4^1} - 2t_{3^1 1^1} + t_{2^1 1^2})q^4 + (t_{4^1} - t_{3^1 1^1} - t_{2^2} + t_{2^1 1^2})q^5 + (-t_{4^1} + 2t_{3^1 1^1} + t_{2^2} - 3t_{2^1 1^2} + t_{1^4})q^6$
5	$t_{5^1} + (-t_{5^1} + t_{4^1 1^1})q + (-t_{5^1} + t_{3^1 2^1})q^2 + (-t_{4^1 1^1} + t_{3^1 1^2})q^3 + (-t_{3^1 2^1} + t_{2^2 1^1})q^4 + (-2t_{4^1 1^1} + t_{3^1 1^2} + 2t_{5^1} - 2t_{3^1 2^1} + t_{2^2 1^1})q^5 + (-t_{3^1 1^2} + t_{2^1 1^3} + t_{3^1 2^1} - t_{2^2 1^1})q^6 + (-t_{3^1 1^2} + t_{2^1 1^3} - t_{2^2 1^1} + t_{4^1 1^1})q^7 + (-t_{2^2 1^1} + t_{3^1 2^1} - 2t_{3^1 1^2} + t_{2^1 1^3} - t_{5^1} + 2t_{4^1 1^1})q^8 + (2t_{3^1 2^1} - t_{3^1 1^2} + t_{2^1 1^3} - t_{5^1} - 2t_{2^2 1^1} + t_{4^1 1^1})q^9 + (-2t_{4^1 1^1} + 3t_{3^1 1^2} + t_{5^1} - 2t_{3^1 2^1} + 3t_{2^2 1^1} - 4t_{2^1 1^3} + t_{1^5})q^{10}$

Table 5  
Les premières valeurs du  $q$ -anologue général.

Nous terminons en donnant une formule, et un problème, à saveur bijective. Dans [DH1] on montre

$$\sum_{(\varphi, \varphi) \in F_n(\mathbb{N})} a_{\varphi(1)} a_{\varphi(2)} \dots a_{\varphi(n)} \Big|_{a_i := q^i} = f_n(q) \cdot \frac{1}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)}$$

où  $F_n(\mathbb{N})$  désigne l'ensemble des orbites de l'action du groupe symétrique sur  $F[n] \times \mathbb{N}^n$ ,  $F[n]$  étant l'ensemble des  $F$ -structures sur  $[n]$ . On décrit de façon plus suggestive  $F_n(A)$  en disant qu'il s'agit de

$F$ -structurés de  $n$  lettres sur un alphabet  $A$  [JA2], ou encore des types de  $F$ -structures  $A$ -colorées. L'équation (25) suggère alors l'existence d'une bijection entre l'ensemble des types colorés de  $F$ -structures et les couples formés d'un partage d'entier en  $n$  parts  $\geq 0$  et d'un type coloré «spécial». Une telle bijection pourrait fournir un éclairage nouveau sur la combinatoire des polynômes  $f_n(q)$ . Nous n'avons malheureusement pas de candidat pour cette bijection et laissons ce problème ouvert.

## BIBLIOGRAPHIE

- [AG1] G.E. Andrews, The theory of partitions, Encyclopedia of mathematics and its applications, Vol. 2, G.-C. Rota ed., Addison-Wesley, Reading, 1976.
- [AG2] G.E. Andrews,  $q$ -Series: Their Development and Application in Analysis, Number Theory, Combinatorics, Physics, and Computer Algebra, C.B.M.S. Regional Conf. Series in Math., No 66, Amer. Math. Soc., Providence (1986).
- [CG] B.W. Char, K.O. Geddes, G.H. Gonnet, M.B. Monagan, S.M. Watt, MAPLE Reference Manual, 5th ed., Watcom Publ. Ltd., Waterloo (Ontario), Canada, 1988.
- [DH1] H. Décoste, Séries indicatrices pondérées et  $q$ -analogues en théorie des espèces, Publications du LACIM, 2, UQAM, 1990 (thèse de Ph. D., U. de Montréal, 1989).
- [DH2] H. Décoste, A cycle index series for Jacobi polynomials, en préparation 1991.
- [A1] A. Joyal, Une théorie combinatoire des séries formelles, Advances in Mathematics, vol. 42, no 1, 1981, pp. 1-82.
- [A2] A. Joyal, Foncteurs analytiques et espèces de structures, Combinatoire Énumérative, Proceedings, Montréal, Québec, 1985, G. Labelle et P. Leroux, ed., Lecture Notes in Mathematics, vol. 1234, Springer-Verlag, 1986, pp. 126-159.
- [G1] G. Labelle, Some New Computational Methods in the Theory of Species, Combinatoire Énumérative, Proceedings, Montréal, Québec, 1985, G. Labelle et P. Leroux, ed., Lecture Notes in Mathematics, vol. 1234, Springer-Verlag, 1986, pp. 192-209.
- [G2] G. Labelle, On Asymmetric Structures, Discrete Math (à paraître), 1990.
- [G3] G. Labelle, Counting Asymmetric Enriched Trees, soumis pour publication, 1990.
- [G4] G. Labelle, Sur la symétrie et l'asymétrie des structures combinatoires, Actes du colloque Séries formelles et combinatoire algébrique, U. Bordeaux I, 1991.
- [J1] J. Labelle, Applications diverses de la théorie combinatoire des espèces de structures, Ann. Sc. Math. Québec, vol. 7, 1983, pp. 59-94.
- [J2] J. Labelle, Quelques espèces sur les ensembles de petite cardinalité, Ann. Sc. Math. Québec, vol. 9, no 1, 1985, pp. 31-58.
- [J3] J. Labelle, Le tableau d'Askey, Polynômes orthogonaux et applications, Proceedings, Bar-le-Duc, 1984, édité par C. Brézinski, A. Draux, A. P. Magnus, P. Maroni, et A. Ronveaux, Lecture Notes in Math. no. 1171, Springer-Verlag, pp. XXXVI et XXXVII.
- [I] I.G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials, Clarendon Press, Oxford, 1979.
- [R] R. Stanley, Theory and Application of plane partitions I-II, Studies in Appl. Math., vol. 50, 1971, pp. 167-188 et pp. 259-279.

