

# Dénombrement des arbres plans (uni- ou bicolorés) selon leurs distributions de degrés<sup>1</sup>

Gilbert Labelle et Pierre Leroux\*

LACIM

Département de mathématiques et d'informatique  
Université du Québec à Montréal

## Résumé

L'objectif principal de cette communication est de donner des formules explicites pour le nombre de types d'isomorphie d'arbres plans bicolorés ayant une double distribution ( $1^{i_1} 2^{i_2} \dots; 1^{j_1} 2^{j_2} \dots$ ) de degrés donnés à l'avance. Ces arbres sont en étroite relation avec les polynômes de Shabat, c'est-à-dire les polynômes sur  $\mathbb{C}$  ayant au plus deux valeurs critiques (cf. [BZ]). Dans le cas des arbres enracinés (pointés en une feuille), ce problème a été résolu par Tutte en 1964 à l'aide de l'inversion de Lagrange multivariée. Ici la clé de la solution réside dans le théorème de dissymétrie pour les arbres enrichis qui, dans le cas bicoloré, prend une forme particulièrement simple et qui permet de se défaire du pointage. Nous dénombrons également ces arbres dans le cas étiqueté, dans le cas unicoloré, ainsi que lorsque le groupe d'automorphismes, nécessairement cyclique, est d'un ordre  $h$  égal à (ou multiple de) un entier  $k \geq 1$  donné.

## Abstract

The main object of this paper is to give explicit formulas for the number of unlabelled bicolored plane (unrooted) trees with given degree distributions ( $1^{i_1} 2^{i_2} \dots; 1^{j_1} 2^{j_2} \dots$ ). These trees are closely related to the Shabat polynomials, i.e. polynomials over  $\mathbb{C}$  having at most two critical values (cf. [BZ]). In the case of planted trees (i.e. rooted at a leaf), this problem was solved by Tutte in 1964, using multivariate Lagrange inversion. Here the key to the solution is the dissymmetry theorem for trees which takes a particularly simple form in the bicolored case and which allows to get rid of the rooting. We also enumerate those trees in the labelled case, in the uncolored case, as well as when the automorphism group (necessarily cyclic) is of order  $h$  equal to (or multiple of) a given integer  $k \geq 1$ .

## Introduction

Nous allons considérer des arbres plans, c'est-à-dire plongés dans le plan, et bicolorés, c'est-à-dire dont les sommets sont partagés en deux parties disjointes, les sommets "noirs" et les sommets "blancs", de telle sorte que les arêtes joignent toujours des sommets de couleurs différentes. On en déduit une double distribution de degrés  $i = (i_1, i_2, \dots)$ ,  $j = (j_1, j_2, \dots)$ , où  $i_k$  (resp.  $j_k$ ) = nombre de sommets noirs (resp. blancs) de degré  $k$ . Comme l'a souligné A. Zvonkin lors du 5e colloque SFCA à Florence, ces arbres sont étroitement reliés aux polynômes  $P(z)$  sur  $\mathbb{C}$  ayant au plus deux valeurs critiques, appelés polynômes de Shabat (cf. [BZ]). En fait, il existe une bijection entre les types d'isomorphie d'arbres plans bicolorés et les classes d'équivalence de polynômes de Shabat  $P(z)$  sous les transformations affines

<sup>1</sup> Travail supporté par le CRSNG (Canada) et le FCAR (Québec).

$(P(z) \sim cP(az + b) + d, a \neq 0, c \neq 0)$ . Sous cette bijection, les sommets noirs (resp. blancs) correspondent aux racines de l'équation  $P(z) = 0$  (resp.  $P(z) = 1$ ), et leurs degrés, aux multiplicités de ces racines. L'étude récente de ces structures [AS1, AS2, BPZ], et en particulier leur catalogage, pose le problème du dénombrement exact de ces arbres plans bicolorés selon la distribution des degrés.

Observons que si un arbre bicoloré admet une double distribution de degrés  $i = (i_1, i_2, \dots)$ ,  $j = (j_1, j_2, \dots)$ , avec  $s(i) = i_1 + i_2 + \dots$  points noirs et  $s(j) = j_1 + j_2 + \dots$  points blancs, alors le décompte des arêtes entraîne la double égalité

$$\begin{aligned} i_1 + 2i_2 + 3i_3 + \dots &= j_1 + 2j_2 + 3j_3 + \dots \\ &= s(i) + s(j) - 1. \end{aligned} \quad (0.1)$$

Réciproquement, si les conditions (0.1) sont satisfaites, il est facile de voir, par récurrence sur le nombre d'arêtes, qu'il existe toujours au moins un arbre bicoloré avec double distribution de degrés  $(i, j)$ . La question est de savoir combien. On pose, pour  $h \geq 1$ ,

$$\text{Supp}(i) = \{k \geq 1 \mid i_k \neq 0\}, \quad \delta_h = (\delta_{h,k})_{k \geq 1},$$

$\text{Div}(h, i, j) = \text{ensemble des diviseurs communs} (\geq 1) \text{ de } h, i_1, i_2, \dots, j_1, j_2, \dots$

$$\frac{i}{d} = \left(\frac{i_1}{d}, \frac{i_2}{d}, \dots\right), \quad \binom{n}{i} = \binom{n}{i_1, i_2, \dots} \text{ (coefficient multinomial).}$$

Notre principal objectif ici est de démontrer le théorème suivant:

**Théorème 1** Soit  $i = (i_1, i_2, \dots)$  et  $j = (j_1, j_2, \dots)$  deux suites d'entiers  $\geq 0$ , avec  $s(i) = i_1 + i_2 + \dots < \infty$  et  $s(j) < \infty$ , satisfaisant les relations (0.1). Alors le nombre  $\tilde{\wp}(i, j)$  de types d'isomorphie d'arbres plans bicolorés dont la distribution des degrés est  $(i, j)$  est donné par

$$\tilde{\wp}(i, j) = \tilde{F}(i, j) + \tilde{F}(j, i) - \tilde{G}(i, j) \quad (0.2)$$

avec

$$\tilde{F}(i, j) = \frac{1}{n} \sum_{h,d} \phi(d) \binom{n/d}{i/d} \binom{(m-1)/d}{(j-\delta_h)/d} \quad (0.3)$$

où  $n = s(i), m = s(j)$ , et  $\phi$  désigne la fonction arithmétique d'Euler, et où la somme est prise sur tous les couples d'entiers  $h \geq 1, d \geq 1$  tels que  $h \in \text{Supp}(j)$  et  $d \in \text{Div}(h, i, j - \delta_h)$ , et

$$\tilde{G}(i, j) = \frac{n+m-1}{nm} \binom{n}{i} \binom{m}{j}. \quad (0.4)$$

De plus le nombre  $\overline{\wp}(i, j)$  de types d'isomorphie d'arbres plans bicolorés asymétriques, dont la distribution des degrés est  $(i, j)$ , est donné par

$$\overline{\wp}(i, j) = \overline{F}(i, j) + \overline{F}(j, i) - \overline{G}(i, j) \quad (0.5)$$

où  $\overline{G}(i, j) = \tilde{G}(i, j)$  et

$$\overline{F}(i, j) = \frac{1}{n} \sum_{h,d} \mu(d) \binom{n/d}{i/d} \binom{(m-1)/d}{(j-\delta_h)/d} \quad (0.6)$$

où  $\mu$  dénote la fonction de Möbius et où la somme est prise sur le même ensemble qu'en (0.3). ■

Notons que le problème du dénombrement selon les degrés des types d'arbres plans enracinés, c'est-à-dire pointés en une feuille, avait déjà été résolu par Tutte en 1964 à l'aide de la formule d'inversion de Lagrange multivariée (voir [Tu]). Notons également que le terme correcteur  $\tilde{G}(i, j)$  (formule 0.4) dénombre les types d'arbres plans bicolores avec arête distinguée, comme l'ont montré Goulden et Jackson [GJ2]. Ceux-ci ont de plus observé que ces arbres pouvaient représenter les décompositions d'une permutation circulaire donnée  $\sigma$  en produit de deux permutations  $\alpha$  et  $\beta$  de types cycliques  $(1^{i_1} 2^{i_2} \dots)$  et  $(1^{j_1} 2^{j_2} \dots)$  respectivement (voir également [BG]). Ces cas sont plus simples car les structures en cause sont rigides (ou *asymétriques*: leur groupe d'automorphismes est réduit à l'identité); leur dénombrement est alors étroitement relié à celui des structures étiquetées. Par exemple, le nombre  $\wp(i, j)$  d'arbres plans bicolores (étiquetés) avec distribution de degrés  $(i, j)$  est donné par:

$$\begin{aligned}\wp(i, j) &= \frac{n!m!}{n+m-1} \tilde{G}(i, j) \\ &= (n-1)!(m-1)! \binom{n}{i} \binom{m}{j}\end{aligned}\tag{0.7}$$

La formule (0.3) est simple à programmer et demande peu de temps de calcul. Nous présentons ci-dessous une table donnant quelques valeurs de  $\wp(i, j)$ , de  $\overline{\wp}(i, j)$  et de  $\tilde{G}(i, j) = \overline{G}(i, j)$ .

| $(i, j)$                            | $\wp(i, j)$ | $\overline{\wp}(i, j)$ | $\tilde{G}(i, j) = \overline{G}(i, j)$ |
|-------------------------------------|-------------|------------------------|--|
| $(2, 0, 2), (4, 2)$                 | 0           | 0                      | 0                                      |
| $(4), (0, 0, 0, 1)$                 | 1           | 0                      | 1                                      |
| $(1, 10), (1, 10)$                  | 1           | 1                      | 21                                     |
| $(4, 2), (0, 1, 2)$                 | 3           | 2                      | 20                                     |
| $(4, 2), (1, 0, 1, 1)$              | 5           | 5                      | 40                                     |
| $(4, 2, 2), (0, 7)$                 | 9           | 6                      | 105                                    |
| $(2, 1, 1), (2, 1, 1)$              | 9           | 9                      | 63                                     |
| $(3, 1, 1), (2, 1, 0, 1)$           | 12          | 12                     | 96                                     |
| $(2, 2, 0, 1), (2, 4)$              | 16          | 14                     | 150                                    |
| $(8, 4), (0, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$  | 43          | 40                     | 660                                    |
| $(3, 4, 1), (4, 0, 2, 1)$           | 525         | 525                    | 7 350                                  |
| $(5, 1, 1, 0, 1), (3, 3, 2)$        | 2 940       | 2 940                  | 44 100                                 |
| $(20, 2, 2), (2, 0, 0, 1, 1, 2, 1)$ | 478 170     | 478 170                | 14 345 100                             |
| $(0, 6, 6), (12, 6, 0, 0, 0, 1)$    | 1 429 584   | 1 429 281              | 42 882 840                             |
| $(18, 0, 1, 3), (6, 0, 3, 0, 0, 3)$ | 2 048 214   | 2 048 193              | 67 590 600                             |

L'outil principal, qui permet de se défaire du pointage, est le théorème de dissymétrie pour les arbres. Dans sa forme la plus simple, pour l'espèce  $a$  des arbres (libres, à une sorte de sommets), et l'espèce  $A$  des arborescences (= arbres pointés), il s'énonce comme suit (Cf. [Le], [LM]):

$$A + E_2(A) = a + A^2 \quad (0.8)$$

où  $E_2$  désigne l'espèce des ensembles à deux éléments et le symbole d'égalité représente un isomorphisme d'espèces de structures, c'est-à-dire une famille de bijections, indicée par les ensembles sous-jacents (de sommets), commutant aux transports de structures le long de bijections (réétiquetages). Selon la méthodologie des espèces de structures, un isomorphisme entre espèces  $F$  et  $G$  entraîne des égalités pour les séries génératrices exponentielles

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} |f[n]| x^n / n!$$

des structures étiquetées ainsi que pour les séries génératrices ordinaires

$$\tilde{F}(x) = \sum_{n \geq 0} |f[n]/S_n| x^n$$

des types d'isomorphie de  $F$ -structures, et

$$\bar{F}(x) = \sum_{n \geq 0} \bar{f}_n x^n$$

des types de structures asymétriques, via les séries indicatrices de cycles (théorie de Polya) et d'asymétrie. Dans le présent cas on en déduit les relations bien connues

$$a(x) = A(x) - \frac{A^2(x)}{2} \quad (0.9)$$

$$\tilde{a}(x) = \tilde{A}(x) - \frac{1}{2}(\tilde{A}^2(x) - \tilde{A}(x^2)) \quad (0.10)$$

$$\bar{a}(x) = \bar{A}(x) - \frac{1}{2}(\bar{A}^2(x) + \bar{A}(x^2)) \quad (0.11)$$

En particulier l'identité (0.10) est la fameuse formule d'Otter [Ot] et (0.11) est due à Harary et Prins [HPr].

Pour sa part, l'espèce  $A$  des arborescences est caractérisée par l'équation fonctionnelle

$$A = XE(A), \quad (0.12)$$

où  $E$  désigne l'espèce des ensembles, qui en permet le dénombrement.

Le théorème de dissymétrie pour les arbres et l'équation fonctionnelle (0.12) ont l'avantage de bien se prêter à des généralisations diverses, par exemple aux arbres soumis à des restrictions, des enrichissements ou des pondérations qui permettent de raffiner le comptage ainsi qu'aux arbres bicolorés. Le dénombrement des arbres plans selon les degrés des sommets constitue une illustration particulièrement intéressante de cette méthode.

Nous présentons d'abord le cas unisorte dans la prochaine section, où nous améliorons des résultats connus, en particulier pour le dénombrement des types d'arbres (libres) selon les degrés (Cf. [HPr]) ou celui des types d'arbres plans (Cf. [HPT], [Wa]) ou encore d'arbres plans asymétriques (Cf. [St]). Le cas des arbres bicolorés est étudié dans la section suivante. Enfin nous considérons dans la dernière section les arbres plans dont le groupe d'automorphismes (nécessairement cyclique) est d'ordre égal à, ou multiple d'un entier  $k \geq 2$ , en raffinant l'approche de Stockmeyer [St, III.3].

Le lecteur est référencé à [La2] pour une brève introduction (en anglais) aux concepts de la théorie des espèces de structures utilisés ici.

## 1. Arbres enrichis

D'un point de vue combinatoire, les arbres plans sont caractérisés par le fait que les voisins de chaque sommet sont placés circulairement autour de celui-ci, i.e. sont munis d'une structure de permutation circulaire (cycles orientés). Il s'agit donc d'une instance des arbres  $R$ -enrichis (voir [La1]), avec  $R = C$ , où  $C = \sum_{m \geq 1} C_m$ ,  $C_m$  dénotant l'espèce des cycles orientés de longueur  $m$  (voir Fig. 1). Nous supposons que les arbres plans ont au moins deux points. Il est possible de tenir compte des degrés des sommets en associant une variable  $r_i$  à chaque sommet de degré  $i$ , i.e. à chaque cycle de longueur  $i$ , et en définissant le poids d'un arbre comme le produit des variables associées aux sommets. On a donc

$$R = C_r := \sum_{m \geq 1} C_{m, r_m}, \quad (1.1)$$

où l'indice  $r_m$  signifie que les structures, ici les cycles orientés de longueur  $m$ , sont munies du poids  $r_m$ .

Les séries indicatrices de cycles  $Z_{C_r}$  et d'asymétrie  $\Gamma_{C_r}$  sont facilement obtenues des séries  $Z_C$  et  $\Gamma_C$  (voir [La2]):

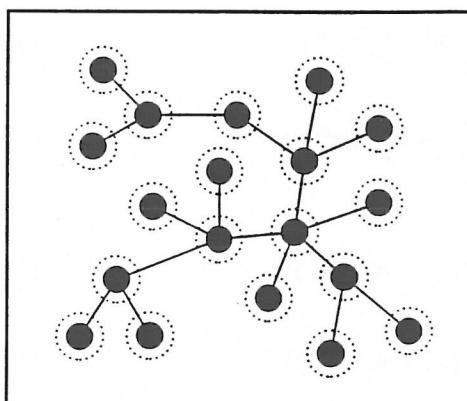
$$Z_{C_r}(x_1, x_2, \dots) = \sum_{m \geq 1} \frac{r_m}{m} \sum_{d|m} \phi(d) x_d^{m/d} \quad (1.2)$$

$$\Gamma_{C_r}(x_1, x_2, \dots) = \sum_{m \geq 1} \frac{r_m}{m} \sum_{d|m} \mu(d) x_d^{m/d}. \quad (1.3)$$

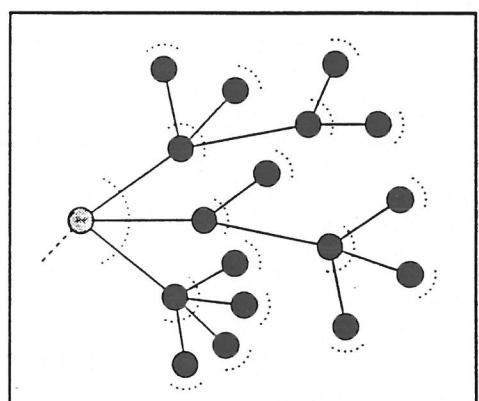
On sait que la dérivée  $C'$  de l'espèce des cycles orientés est isomorphe à l'espèce  $L$  des ordres linéaires (listes) puisque la donnée d'un cycle orienté sur un ensemble  $U + \{ *\}$  est naturellement équivalente à la donnée d'un ordre linéaire sur  $U$ . Dans notre cas, tenant compte des poids que nous nous sommes donnés, nous avons

$$\begin{aligned} R' &= (C_r)' = L_{r'} = \sum_{m \geq 0} L_{m, r_{m+1}} \\ &= r_1 + X_{r_2} + (X^2)_{r_3} + (X^3)_{r_4} + \dots, \end{aligned} \quad (1.4)$$

où  $X$  désigne l'espèce des singlenton.



Arbre  $R$ -enrichi



Arborescence  $R'$ -enrichie

Figure 1

Dénotons par  $a_R$ , l'espèce des arbres  $R$ -enrichis et rappelons les relations fondamentales déterminant cette espèce de structures (voir [La3]) et qui demeurent valables dans le présent contexte pondéré :

$$A_{R'} = XR'(A_{R'}) \quad (\text{Arborescences } R'\text{-enrichies}) \quad (1.5)$$

$$a_R^* = XR(A_{R'}) \quad (\text{Arbres } R\text{-enrichis pointés}) \quad (1.6)$$

$$a_R^* + E_2(A_{R'}) = a_R + (A_{R'})^2 \quad (\text{Théorème de dissymétrie}) \quad (1.7)$$

Notons également les formules de substitution pour les séries génératrices des types de  $F_v \circ G_w$ -structures et de  $F_v \circ G_w$ -structures asymétriques dans le cas d'espèces pondérées  $F_v$  et  $G_w$  (voir [De], [BLL]) :

$$\widetilde{F_v \circ G_w}(x) = Z_{F_v}(G_w(x), G_{w^2}(x^2), G_{w^3}(x^3), \dots) \quad (1.8)$$

$$\overline{F_v \circ G_w}(x) = \Gamma_{F_v}(G_w(x), G_{w^2}(x^2), G_{w^3}(x^3), \dots) \quad (1.9)$$

Pour le cas qui nous intéresse, avec  $R = C_r$ , posons :

$\wp_r = a_{C_r}$ , l'espèce des arbres plans pondérés par les degrés;

$P_r = \wp_r^*$ , l'espèce des arbres plans pointés pondérés par les degrés;

$A_r = A_{L_r}$ , l'espèce des arborescences ordonnées pondérées par les degrés.

Dans le cas des arborescences ordonnées, on convient qu'une demi-arête est attachée à la racine pour que le comptage des degrés soit correct (voir la figure 1 où le poids de l'arbre est  $r_1^{12}r_2r_3^3r_4^2r_5$  et celui de l'arborescence,  $r_1^{12}r_3^2r_4^3r_5$ ). Ces structures sont caractérisées par le fait que les successeurs de tout sommet sont munis d'un ordre linéaire. Il s'ensuit qu'elles sont asymétriques et, par conséquent, que  $A_r(x) = \bar{A}_r(x) = \overline{A}_r(x)$ . De (1.4) et (1.5) on déduit l'équation fonctionnelle:

$$A_r(x) = x\psi_r(A_r(x)) \quad (1.10)$$

où

$$\psi_r(x) = C'_r(x) = L_r(x) = r_1 + r_2x + r_3x^2 + \dots \quad (1.11)$$

De (1.6), il suit

$$\tilde{P}_r(x) = x \sum_{m \geq 1} \frac{\phi(m)}{m} \sum_{k \geq 1} \frac{r_{mk}}{k} A_{r^m}^k(x^m) \quad (1.12)$$

$$\overline{P}_r(x) = x \sum_{m \geq 1} \frac{\mu(m)}{m} \sum_{k \geq 1} \frac{r_{mk}}{k} A_{r^m}^k(x^m) \quad (1.13)$$

et de (1.7),

$$\tilde{\wp}_r(x) = \tilde{P}_r(x) - \frac{1}{2}(A_r^2(x) - A_{r^2}(x^2)) \quad (1.14)$$

$$\overline{\wp}_r(x) = \overline{P}_r(x) - \frac{1}{2}(A_r^2(x) + A_{r^2}(x^2)) \quad (1.15)$$

où pour  $m \geq 1$ ,  $r^m$  dénote la suite  $(r_1^m, r_2^m, \dots)$ .

Des applications successives de la formule composée d'inversion de Lagrange permettent d'obtenir, pour  $n \geq 2$ ,

$$\tilde{P}_n(r) := [x^n] \tilde{P}_r(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{d|n-1} \phi(d) \sum_{k=1} r_{kd} [x^{m-k}] \psi_{r^d}^m(x) \quad (1.16)$$

où  $m = (n-1)/d$  et  $\psi_r(x)$  est donnée par (1.11), et

$$\tilde{\wp}_n(r) := [x^n] \tilde{\wp}_r(x) = \tilde{P}_n(r) - \frac{1}{n} [x^{n-2}] \psi_r^n(x) + \frac{1}{n} \chi_{\text{pair}}(n) [x^{\frac{n}{2}-1}] \psi_{r^2}^{n/2}(x) \quad (1.17)$$

Des formules analogues existent pour  $\bar{P}_n(r)$  et  $\bar{\wp}_n(r)$ .

Dans le cas où  $r = 1$ , c'est-à-dire lorsqu'on ne tient pas compte des degrés, on retrouve les formules de Walkup [Wa]

$$\tilde{P}_n = \tilde{P}_n(1) = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{d|n-1} \phi\left(\frac{n-1}{d}\right) \binom{2d}{d} \quad (1.18)$$

$$\tilde{\wp}_n = \tilde{\wp}_n(1) = \tilde{P}_n - \frac{1}{2} c_{n-1} + \frac{1}{2} \chi_{\text{pair}}(n) c_{n/2-1} \quad (1.19)$$

et de Labelle [La3]

$$\bar{P}_n = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{d|n-1} \mu\left(\frac{n-1}{d}\right) \binom{2d}{d} \quad (1.20)$$

$$\bar{\wp}_n = \tilde{P}_n - \frac{1}{2} c_n - \frac{1}{2} \chi_{\text{pair}}(n) c_{n/2-1} \quad (1.21)$$

où  $c_n = (1/(n+1)) \binom{2n}{n}$  désigne le  $n$  ième nombre de Catalan. Dans le cas général, une extraction du coefficient du monôme  $r^i = r_1^{i_1} r_2^{i_2} r_3^{i_3} \dots$  dans  $\tilde{P}_n(r)$  et  $\tilde{\wp}_n(r)$  permet de calculer les nombres  $\tilde{\wp}(i)$  et  $\tilde{P}(i)$  de types d'arbres plans et d'arbres plans pointés ayant une distribution de degrés égale à  $i$ , i.e.  $\tilde{\wp}(i) = [r^i] \tilde{\wp}_n(r)$  et  $\tilde{P}(i) = [r^i] \tilde{P}_n(r)$ , où  $n = s(i) = i_1 + i_2 + \dots$ . Il en est de même pour les types d'arbres plans asymétriques. Notons la condition nécessaire suivante, relative au nombre d'arêtes de l'arbre, pour que ces nombres soient non-nuls :

$$i_1 + 2i_2 + 3i_3 + \dots = 2(n-1). \quad (1.22)$$

Notations:

$$\chi_{\text{pair}}(n) = \chi(n \text{ est pair}), \quad \chi_{\text{pair}}(i) = \chi(\text{tous les } i_k \text{ sont pairs}),$$

$$\text{Div}(h, i) = \text{ensemble des diviseurs communs à } h \text{ et à } i_1, i_2, \dots$$

**Théorème 2.** Soit  $i = (i_1, i_2, \dots)$ , une suite d'entiers  $\geq 0$  telle que  $2 \leq n = s(i) < \infty$  et satisfaisant la condition (1.22). Alors les nombres  $\tilde{P}(i)$  de types d'isomorphie d'arbres plans pointés et  $\tilde{P}(i)$  de types d'isomorphie d'arbres plans, ayant  $i_k$  points de degré  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , sont donnés par

$$\tilde{P}(i) = \frac{1}{n-1} \sum_{h,d} \phi(d) \binom{(n-1/d)}{(i-\delta_h)/d} \quad (1.23)$$

la somme étant prise sur tous les couples d'entiers  $h \geq 1$ ,  $d \geq 1$  tels que  $h \in \text{Supp}(i)$  et  $d \in \text{Div}(h, i - \delta_h)$  et par

$$\tilde{\wp}(i) = \tilde{P}(i) - \frac{1}{n} \binom{n}{i} + \frac{1}{n} \chi_{\text{pair}}(i) \binom{n/2}{i/2} \quad (1.24)$$

De plus, les types d'arbres plans pointés asymétriques sont dénombrés par

$$\bar{P}(i) = \frac{1}{n-1} \sum_{h,d} \mu(d) \binom{(n-1)/d}{(i-\delta_p)/d} \quad (1.25)$$

la somme étant prise sur le même ensemble d'indices qu'en (1.23), et les types d'arbres plans asymétriques par

$$\overline{\wp}(i) = \bar{P}(i) - \frac{1}{n} \binom{n}{i} - \frac{1}{n} \chi_{\text{pair}}(i) \binom{n/2}{i/2}. \quad (1.26)$$

■

Dans le cas étiquetté, on trouve que le nombre  $p(i)$  d'arbres plans dont la distribution des degrés est égale à  $i$  est donné par

$$\wp(i) = (n-2)! \binom{n}{i}. \quad (1.27)$$

Par comparaison, citons le résultat de [Mo] selon lequel le nombre d'arbres dont les sommets sont  $\{1, 2, \dots, n\}$  et où le sommet  $i$  est de degré  $d_i$ , est donné par le coefficient multinomial  $\binom{n-2}{d-1}$ , où  $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$  et  $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$ .

## 2. Arbres bicolorés enrichis

Considérons maintenant l'espèce à deux sortes  $a_{R,S} = a_{R,S}(X, Y)$  des arbres  $R, S$ -enrichis, où  $R$  et  $S$  sont des espèces de structures données. Par définition, une  $a_{R,S}$ -structure sur un couple d'ensembles  $(U, V)$ , est une structure d'arbre sur  $U + V$  (réunion disjointe) telle que les arêtes joignent toujours un élément de  $U$  (les points noirs) à un élément de  $V$  (les points blancs), et également la donnée, pour chaque point noir, (resp. point blanc), d'une  $R$ -structure (resp.  $S$ -structure) sur l'ensemble de ses voisins. Voir la figure 2.

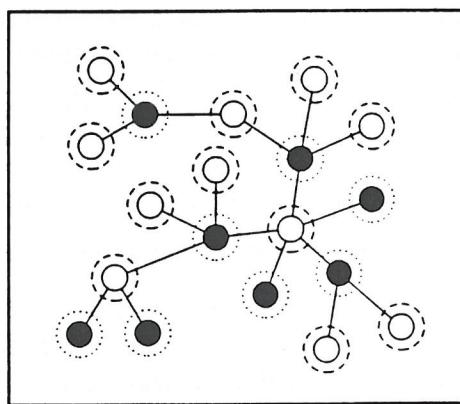


Figure 2. Arbre  $R, S$ -enrichi

Si  $R$  et  $S$  sont des espèces pondérées, on définit le poids d'un arbre  $R,S$ -enrichi comme étant le produit des poids des  $R$ -structures et des  $S$ -structures attachées aux sommets de l'arbre.

Introduisons une double suite de variables  $r = (r_1, r_2, \dots)$  et  $s = (s_1, s_2, \dots)$  où  $r_k$  et  $s_k$  agissent comme compteurs de points noirs et blancs, respectivement, de degré  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Les arbres plans bicolorés, pondérés par les degrés, sont alors un exemple d'arbres  $R,S$ -enrichis, avec  $R=C_r$  et  $S=C_s$ . Par exemple, le poids de l'arbre bicoloré de la figure 2 est  $r_1^4 r_3^2 r_4^2 s_1^8 s_2 s_3 s_5$ . Avant d'aborder ce cas particulier, nous allons donner les relations fondamentales relatives à l'espèce  $a_{R,S}$  des arbres  $R,S$ -enrichis, extensions de (1.5) - (1.7).

- Arborescences  $R'$ ,  $S'$ -enrichies, de racines noire et blanche, respectivement

$$\begin{aligned} A_{R',S'} &= X R'(B_{R',S'}) \\ B_{R',S'} &= Y S'(A_{R',S'}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

- Arbres  $R,S$ -enrichis pointés en des points noirs et blancs, respectivement

$$\begin{aligned} a_{R,S}^{\bullet X} &= X R(B_{R',S'}) \\ a_{R,S}^{\bullet Y} &= Y S(A_{R',S'}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

- Théorème de dissymétrie pour les arbres bicolorés,

$$a_{R,S}^{\bullet X} + a_{R,S}^{\bullet Y} = a_{R,S} + A_{R',S'} B_{R',S'} \quad (2.3)$$

Le calcul des séries associées à ces espèces est fondé sur la formule d'inversion de Lagrange bidimensionnelle (voir [GJ1], [BLL]). Nous utiliserons la forme suivante qui se déduit facilement de la formule de Good: Soit  $A(x, y)$  et  $B(x, y)$  des séries formelles satisfaisant les relations

$$\begin{aligned} A(x, y) &= x \varphi(B(x, y)), \\ B(x, y) &= y \psi(A(x, y)). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Alors pour tout  $\alpha, \beta$  entiers  $\geq 0$ , on a

$$[x^n y^m] A^\alpha B^\beta = \left( 1 - \frac{(n-\alpha)(m-\beta)}{nm} \right) [x^{n-\alpha} y^{m-\beta}] \varphi^n(y) \psi^m(x). \quad (2.5)$$

Revenant au cas qui nous intéresse, où  $R = C_r$  et  $S = C_s$ , posons

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{r,s} &= a_{C_r, C_s} && \text{(Arbres plans bicolorés pondérés par les degrés),} \\ G_{r,s} &= A_{L_r, L_s} B_{L_r, L_s} && \text{(Arbres plans bicolorés avec arête distinguée).} \end{aligned}$$

**Cas étiquetté.** Soit  $(U, V)$  un couple d'ensembles (les sommets noirs et les sommets blancs) avec  $|U| = n$  et  $|V| = m$ . Alors le poids total  $\mathcal{O}_{n,m}(r, s)$  des arbres plans bicolorés sur  $(U, V)$  est donné par

$$\mathcal{O}_{n,m}(r, s) = \left[ \frac{x^n}{n!} \frac{y^m}{m!} \right] \mathcal{O}_{r,s}(x, y)$$

$$= \left[ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \frac{y^{m-1}}{(m-1)!} \right] \psi_r^n(y) \psi_s^m(x). \quad (2.6)$$

Prenant  $r = s = 1$ , on trouve la formule

$$\wp_{n,m} = (n+m-2)^{(m-1)} (n+m-2)^{(n-1)} \quad (2.7)$$

pour le nombre d'arbres plans bicolorés sur  $(U, V)$ , analogue de la formule de Scions  $n^{m-1} m^{n-1}$  pour le nombre d'arbres (libres) bicolorés. Ici  $x^{(k)}$  dénote la factorielle décroissante  $x^{(k)} = x(x-1)\dots(x-k+1)$ .

En extrayant le coefficient de  $r^i s^j$  dans  $\wp_{n,m}(r,s)$ , on obtient la formule (0.7) donnée dans l'introduction.

**Cas non étiquetté.** Le poids total des types d'isomorphie d'arbres plans bicolorés avec arête distinguée, d'ordre  $(n, m)$ , est donné par

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{n,m}(r,s) &= [x^n y^m] \tilde{G}_{r,s}(x,y) \\ &= \frac{n+m-1}{nm} [x^{n-1} y^{m-1}] \psi_r^n(y) \psi_s^m(x). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Le poids total des types d'arbres plans bicolorés d'ordre  $(n, m)$  est donné par

$$\begin{aligned} \tilde{\wp}_{n,m}(r,s) &= [x^n y^m] \tilde{p}_{r,s}(x,y) \\ &= \tilde{F}_{n,m}(r,s) + \tilde{F}_{m,n}(s,r) - \tilde{G}_{n,m}(r,s) \end{aligned} \quad (2.9)$$

où

$$\tilde{F}_{n,m}(r,s) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{d|(n,m-1) \\ 1 \leq k \leq n/d}} \phi(d) s_{kd} [x^{\frac{n}{d}-k} y^{\frac{m-1}{d}}] \psi_{r^d}^{n/d}(y) \psi_{s^d}^{(m-1)/d}(x) \quad (2.10)$$

En extrayant le coefficient de  $r^i s^j$  dans (2.8) et dans (2.9), on retrouve les formules (0.4) et (0.2) données dans l'introduction pour  $\tilde{G}(i,j)$  et,  $\tilde{\wp}(i,j)$ .

Pour les arbres asymétriques, on procède de manière analogue, remplaçant simplement  $\phi$  par  $\mu$  dans les formules, d'où les expressions (0.5) et (0.6) pour  $\overline{\wp}(i,j)$  et  $\overline{F}(i,j)$ .

### 3. Dénombrement des arbres plans selon leurs automorphismes

Nous suivons ici l'approche de Stockmeyer [St]. Observons d'abord que le centre d'un arbre est nécessairement laissé fixe par tout automorphisme. Si le centre est une arête, l'arbre peut être identifié à une paire d'arborescences et il admet un automorphisme d'ordre 2 si et seulement si les deux arborescences sont isomorphes.

Dans le cas d'un arbre plan, il s'agira alors d'une paire d'arborescences ordonnées pouvant être échangées circulairement. Cette situation ne peut se produire s'il s'agit d'un arbre bicolore, l'arête centrale reliant alors des sommets de couleurs différentes.

Si le centre d'un arbre plan est un sommet, cet arbre pourra admettre des automorphismes non-triviaux par rotation des arborescences ordonnées disposées circulairement autour du centre, lorsque la disposition est suffisamment symétrique, à la manière d'un mot circulaire périodique.

Le dénombrement de ces types de structures passe donc par l'analyse suivante. Soit  $F = F_v$ , une espèce de structures pondérées par une fonction de poids  $v$  à valeur dans un anneau de séries formelles. Dénotons par  $E_{=2}\langle F_v \rangle$  l'espèce des paires de  $F_v$ -structures isomorphes, et pour  $k \geq 1$ , par  $C_{\geq k}\langle F_v \rangle$ , l'espèce des cycles orientés de  $F_v$ -structures présentant une symétrie circulaire d'ordre  $k$  et par  $C_{=k}\langle F_v \rangle$  la sous-espèce de  $C_{\geq k}\langle F_v \rangle$  contenant les cycles orientés de  $F_v$ -structures dont le groupe des automorphismes circulaires est exactement d'ordre  $k$ . Ces trois espèces sont pondérées par un poids  $w$  défini comme étant le produit des  $v$ -poids des  $F$ -structures présentées. Notons toutefois qu'il ne s'agit pas à proprement parler de substitution d'espèces.

On a alors, pour toute espèce pondérée  $F = F_v$  et pour  $k \geq 1$ ,

$$\widetilde{E}_{=2}\langle F_v \rangle(x) = \widetilde{F}_v^2(x^2) \quad (3.1)$$

$$\widetilde{C}_{\geq k}\langle F_v \rangle(x) = Z_C(\tilde{F}_v^k(x^k), \tilde{F}_v^{2k}(x^{2k}), \dots) \quad (3.2)$$

$$\widetilde{C}_{=k}\langle F_v \rangle(x) = \Gamma_C(\tilde{F}_v^k(x^k), \tilde{F}_v^{2k}, \dots) \quad (3.3)$$

Il est également possible, dans (3.2) et (3.3), de tenir compte de la longueur du cycle dans le poids des structures, c'est-à-dire de remplacer  $C$  par  $C_r$ . Considérons donc les espèces d'arbres plans suivantes, toutes pondérées par les degrés, avec  $k \geq 2$ :

- Arbres plans dont le centre est une arête et admettant une symétrie d'ordre 2

$$\wp_r^{(2)} = E_{=2}\langle A_r \rangle \quad (3.4)$$

- Arbres plans dont le centre est un sommet et admettant une symétrie circulaire d'ordre  $k$

$$\wp_{r, \geq k} = X C_{r, \geq k}\langle A_r \rangle \quad (3.5)$$

- Arbres plans dont le centre est un sommet et dont le groupe d'automorphismes est d'ordre  $k$

$$\wp_{r, = k} = X C_{r, = k}\langle A_r \rangle \quad (3.6)$$

De manière analogue, on a les espèces d'arbres plans bicolores suivantes, pondérées par les degrés, dont le centre est un sommet (blanc ou noir) et dont les groupes d'automorphismes est soit un un multiples de  $k$ , soit égal à  $k$ :

$$\wp_{r, s, \geq k} = X C_{r, \geq k}\langle B_{r, s} \rangle + Y C_{s, \geq k}\langle A_{r, s} \rangle \quad (3.7)$$

$$\wp_{r, s, = k} = X C_{r, = k}\langle B_{r, s} \rangle + Y C_{s, = k}\langle A_{r, s} \rangle \quad (3.8)$$

En vertu de ce qui précède, le dénombrement des types d'arbres plans appartenant à ces diverses espèces est donné par:

$$\widetilde{\wp}_r^{(2)}(x) = A_r^2(x^2) \quad (3.9)$$

$$\widetilde{\wp}_{r, \geq k}(x) = x Z_{C_{r(k)}}(A_{r^k}(x^k), A_{r^{2k}}(x^{2k}), \dots) \quad (3.10)$$

où  $r_{(k)} = (r_k, r_{2k}, r_{3k}, \dots)$

$$\tilde{\mathcal{O}}_{r,k}(x) = x \Gamma_{C_{r(k)}}(A_{r^k}(x^k), A_{r^{2k}}(x^{2k}), \dots) \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{O}}_{r,s,k}(x,y) &= x Z_{C_{r(k)}}(B_{r^k,s^k}(x^k, y^k), B_{r^{2k},s^{2k}}(x^{2k}, y^{2k}), \dots) \\ &\quad + y Z_{C_{s(k)}}(A_{r^k,s^k}(x^k, y^k), A_{r^{2k},s^{2k}}(x^{2k}, y^{2k}), \dots) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{O}}_{r,s,k}(x,y) &= x \Gamma_{C_{r(k)}}(B_{r^k,s^k}(x^k, y^k), B_{r^{2k},s^{2k}}(x^{2k}, y^{2k}), \dots) \\ &\quad + y \Gamma_{C_{s(k)}}(A_{r^k,s^k}(x^k, y^k), A_{r^{2k},s^{2k}}(x^{2k}, y^{2k}), \dots) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Plus explicitement, on a, par exemple pour (3.10):

$$\tilde{\mathcal{O}}_{r,\geq k}(x) = x \sum_{m \geq 1} \frac{\phi(m)}{m} \sum_{j \geq 1} \frac{r_{kmj}}{j} A_{r^{km}}^j(x^{km}) \quad (3.14)$$

L'extraction des coefficients dans ces séries est semblable aux calculs des sections précédentes. On trouve alors, pour les types d'arbres plans dont la distribution des degrés est  $i$  et pour les types d'arbres plans bicolorés dont la distribution des degrés est  $(i,j)$ , classés selon leurs automorphismes, avec les mêmes hypothèses et notations que précédemment, les formules suivantes:

$$\tilde{\mathcal{O}}^{(2)}(i) = \frac{2}{n} \chi_{\text{pair}}(i) \binom{n/2}{i/2} \quad (3.15)$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\geq k}(i) = \frac{k}{n-1} \sum_{h,d} \phi(d/k) \binom{(n-1)/d}{(i - \delta_h)/d} \quad (3.16)$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_{=k}(i) = \frac{k}{n-1} \sum_{h,d} \mu(d/k) \binom{(n-1)/d}{(i - \delta_h)/d} \quad (3.17)$$

la somme étant prise, dans (3.16) et (3.17) sur tous les couples entiers  $h \geq 1$ ,  $d \geq 1$  tels que  $h \in \text{Supp}(i)$ ,  $k \mid d$  et  $d \in \text{Div}(h, i - \delta_h)$ ,

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\geq k}(i,j) = \tilde{F}_{\geq k}(i,j) + \tilde{F}_{\geq k}(j,i) \quad (3.18)$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_{=k}(i,j) = \tilde{F}_{=k}(i,j) + \tilde{F}_{=k}(j,i) \quad (3.19)$$

où

$$\tilde{F}_{\geq k}(i,j) = \frac{k}{n} \sum_{h,d} \phi(d/k) \binom{n/d}{i/d} \binom{(m-1)/d}{(j - \delta_h)/d} \quad (3.20)$$

$$\tilde{F}_{=k}(i,j) = \frac{k}{n} \sum_{h,d} \mu(d/k) \binom{n/d}{i/d} \binom{(m-1)/d}{(j - \delta_h)/d} \quad (3.21)$$

la somme étant prise dans (3.20) et (3.21) sur tous les couples d'entiers  $h \geq 1$ ,  $d \geq 1$  tels que  $h \in \text{Supp}(j)$ ,  $k \mid d$  et  $d \in \text{Div}(h, i, j - \delta_h)$ .

## Remerciements

Les auteurs remercient le professeur A. Zvonkin, de l'Université Bordeaux I, de leur avoir présenté les polynômes de Shabat et proposé le problème du dénombrement des types d'arbres plans bicolorés selon leurs distributions de degrés.

## Références

- [AS1] N. Adrianov et G.B. Shabat, *Dessins plans à une face et polynômes à deux valeurs critiques*. Prépublication, 1990.
- [AS2] N. Adrianov et G.B. Shabat, *Generalized Chebyshev Polynomials and Planar Trees*. À paraître.
- [BG] F. Bédard et A. Goupil, *The Lattice of Conjugacy Classes of the Symmetric Group*, Canadian Bull. of Math., 35 (1992) 152-160.
- [BLL] F. Bergeron, P. Leroux, G. Labelle, *Espèces de structures et combinatoire des structures arborescentes*, Livre en préparation.
- [BPZ] J. Bétrêma, D. Péré, A. Zvonkin, *Plane Trees and their Shabat Polynomials. Catalog*. Publications du LaBRI, 1992.
- [BZ] J. Bétrêma et A. Zvonkin, *Plane Trees and Shabat Polynomials*, Proceedings of the Fifth Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, Florence, June 1993. Ed. by A. Barlotti, M. Delest and R. Pinzani. pp. 83-95.
- [De] H. Décoste, *Séries indicatrices d'espèces pondérées et q-analogues en théorie des espèces*, Publications du LACIM, vol.2, UQAM, Montréal, 1990.
- [GJ1] I.P. Goulden et D.M. Jackson, *Combinatorial Enumeration*, Wiley, 1983.
- [GJ2] I.P. Goulden et D.M. Jackson, *The Combinatorial Relationship between Trees, Cacti and Certain Connection Coefficients for the Symmetric Group*. Europ. J. combinatorics 13 (1992) 357-365.
- [HPa] F. Harary et E. Palmer. *Graphical Enumeration*, Academic Press, 1973.
- [HPr] F. Harary et G. Prins. *The Number of Homeomorphically Irreducible Trees, and Other Species*, Acta Math. 101 (1959) 141-162.
- [HPT] F. Harary, G. Prins et W.T. Tutte. *The Number of Plane Trees*, Indag. Math. 26 (1964) 319-329.
- [Mo] J.W. Moon, *Counting Labelled Trees*, Canadian Mathematical Monographs, Canadian Mathematical Congress, 1970.
- [La1] G. Labelle, *Une nouvelle démonstration des formules d'inversion de Lagrange*, Adv. in Math. 42 (1981) 217-247.
- [La2] G. Labelle, *Counting Asymmetric Enriched Trees*, J. of Symbolic Comp. 14 (1992) 211-242.
- [La3] G. Labelle, *Sur la symétrie et l'asymétrie des structures combinatoires*, Theoretical Computer Science 117 (1993) 3-22.
- [Le] P. Leroux, *Methoden der Ansahlbestimmung für einige Klassen von Graphen*, Bayreuther Mathematische Schriften, 26 (1988) 1-36.
- [LM] P. Leroux et B. Miloudi, *Généralisations de la formule d'Otter*, Annales Sci. Math. Québec, 16 (1992) 53-80.
- [St] P.K. Stockmeyer, *Enumeration of Graphs with Prescribed Automorphism Group*, Dissertation, Univ. of Michigan, Ann Arbor, (1971).
- [Tu] W.T. Tutte, *The Number of Plane Planted Trees with a Given Partition*, Amer. Math. Monthly, 71 (1964) 272-277.
- [Ot] R. Otter, *The Number of Trees*, Ann. of Math. 49 (1948) 583-599.
- [Wa] D.W. Walkup, *The Number of Plane Trees*, Mathematika, 19 (1972) 200-204.