Macroeconomía Internacional

Francisco Roldán
IMF

September 2021

1. Economías emergentes $\neq$ economías avanzadas

	σ_c/σ_y		
	Poor	Emerging	Rich
All	1.1	0.98	0.87
Small	1.4	0.97	0.92
Medium	1.1	0.93	0.93
Large	1.1	1.1	0.84

Fuente: Schmitt-Grohé and Uribe (2020)

2. Excusa para métodos

Plan

Tres modelos

1. RBC con default (Arellano, 2008)
   ... La deuda se paga con el valor presente del superávit, pero **cuándo** se paga la deuda?
2. Modelos con rigideces nominales (Schmitt-Grohé y Uribe, 2016)
   ... Tipo de cambio, externalidades de demanda
3. Deflación fisheriana y sudden stops (Bianchi, 2011)
   ... Cómo el precio del colateral amplifica la salida de capitales
4. Consistencia temporal (Chang, 1999)
   ... Cómo escribir problemas de control óptimo de forma recursiva

Plan

Tres modelos

1. RBC con default (Arellano, 2008)

   . . . La deuda se paga con el valor presente del superávit, pero **cuándo** se paga la deuda?

2. Modelos con rigideces nominales (Schmitt-Grohé y Uribe, 2016)

   . . . Tipo de cambio, externalidades de demanda

3. Deflación fisheriana y sudden stops (Bianchi, 2011)

   . . . Cómo el precio del colateral amplifica la salida de capitales

4. Consistencia temporal (Chang, 1999)

   . . . Cómo escribir problemas de control óptimo de forma recursiva

Plan

Tres modelos

1. RBC con default (Arellano, 2008)
   … La deuda se paga con el valor presente del superávit, pero **cuándo** se paga la deuda?
2. Modelos con rigideces nominales (Schmitt-Grohé y Uribe, 2016)
   … Tipo de cambio, externalidades de demanda
3. Deflación fisheriana y sudden stops (Bianchi, 2011)
   … Cómo el precio del colateral amplifica la salida de capitales
4. Consistencia temporal (Chang, 1999)
   … Cómo escribir problemas de control óptimo de forma recursiva

Plan

Tres modelos

1. RBC con default (Arellano, 2008)
   ... La deuda se paga con el valor presente del superávit, pero **cuándo** se paga la deuda?
2. Modelos con rigideces nominales (Schmitt-Grohé y Uribe, 2016)
   ... Tipo de cambio, externalidades de demanda
3. Deflación fisheriana y sudden stops (Bianchi, 2011)
   ... Cómo el precio del colateral amplifica la salida de capitales
4. Consistencia temporal (Chang, 1999)
   ... Cómo escribir problemas de control óptimo de forma recursiva

Objetivos

1. Discusión no exhaustiva de la mecánica de los modelos

2. Foco en aplicación cuantitativa

   ... Códigos para resolver, simular, calibrar, graficar

   Por qué?

3. Julia

   · Iteración en la función de valor

Objetivos

1. Discusión no exhaustiva de la mecánica de los modelos

2. Foco en aplicación cuantitativa

   ... Códigos para resolver, simular, calibrar, graficar

Por qué?

3. Julia

   - Iteración en la función de valor

Objetivos

1. Discusión no exhaustiva de la mecánica de los modelos

2. Foco en aplicación cuantitativa

   . . . Códigos para resolver, simular, calibrar, graficar

   Por qué?

3. Julia

   - Iteración en la función de valor

Objetivos

1. Discusión no exhaustiva de la mecánica de los modelos

2. Foco en aplicación cuantitativa
   ... Códigos para resolver, simular, calibrar, graficar

Por qué?

3. Julia
   - Iteración en la función de valor

Organización

Nosotros

- Teóricas
  - Modelos, algoritmos
- Prácticas
  - Implementación en la compu

Ustedes

[No representation without taxation]

- Presentaciones cortas
- Guías de ejercicios

Organización

Nosotros

- Teóricas
  - Modelos, algoritmos
- Prácticas
  - Implementación en la compu

Ustedes

[No representation without taxation]

- Presentaciones cortas
- Guías de ejercicios

Hoy

- Repaso de programación dinámica
  - McCall (1970)
  - Problema de la torta
- Estructura de implementación numérica

Programación Dinámica: Búsqueda

McCall (1970)

- Un agente busca trabajo.
- Preferencias standard: utilidad u, descuento β.
- Los trabajos son heterogéneos y sólo difieren en el salario que pagan.
- Cada período llega una oferta de trabajo $w \overset{iid}{\sim} F(\cdot)$
- Sólo se puede aceptar un trabajo. El agente recibe b mientras busca

- Cómo decide el agente qué trabajo aceptar?

McCall (1970)

- Un agente busca trabajo.
- Preferencias standard: utilidad u, descuento β.
- Los trabajos son heterogéneos y sólo difieren en el salario que pagan.
- Cada período llega una oferta de trabajo $w \overset{iid}{\sim} F(\cdot)$
- Sólo se puede aceptar un trabajo. El agente recibe b mientras busca

- Cómo decide el agente qué trabajo aceptar?

McCall (1970) escrito difícil

Problema del agente:

$$V = \max_{T} \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{T-1} \beta^t u(b) + \sum_{t=T}^{\infty} \beta^t u(w_T) \right]$$

$$\text{sujeto a } w_t \overset{iid}{\sim} F(\cdot)$$

$$T \text{ debe ser adaptado a } \mathcal{F}(\{w_t\})$$

- T es una función de los salarios w_t sacados antes de T.
- Cómo elijo T? En qué conjunto vive T? Cuál es la CPO?

McCall (1970) escrito difícil

Problema del agente:

$$V = \max_{T} \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{T-1} \beta^t u(b) + \sum_{t=T}^{\infty} \beta^t u(w_T) \right]$$

$$\text{sujeto a } w_t \overset{iid}{\sim} F(\cdot)$$

$$T \text{ debe ser adaptado a } \mathcal{F}(\{w_t\})$$

- T es una función de los salarios w_t sacados antes de T.
- Cómo elijo T? En qué conjunto vive T? Cuál es la CPO?

McCall (1970) escrito difícil

Problema del agente:

$$V = \max_{T} \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{T-1} \beta^t u(b) + \sum_{t=T}^{\infty} \beta^t u(w_T) \right]$$

$$\text{sujeto a } w_t \overset{iid}{\sim} F(\cdot)$$

$$T \text{ debe ser adaptado a } \mathcal{F}(\{w_t\})$$

- T es una función de los salarios w_t sacados antes de T.
- Cómo elijo T? En qué conjunto vive T? Cuál es la CPO?


COME TO THE
DARK
SIDE
WE HAVE COOKIES

El Lado Oscuro

- En t, si todavía no acepté una oferta, después de ver w_t

$$V_t = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w_t) & \text{si acepto} \\ u(b) + \beta \max_T \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{T} \beta^j u(b) + \sum_{j=T}^{\infty} \beta^j u(w_T)\right] & \text{si rechazo} \end{cases}$$

- Así que

$$V_t = \max\left\{u(b) + \beta \mathbb{E}\left[V_{t+1}\right], R(w_t)\right\}$$

- MAGIA: V_t no depende de t dado w_t

El Lado Oscuro

- En t, si todavía no acepté una oferta, después de ver w_t

$$V_t = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w_t) = R(w_t) & \text{si acepto} \\ u(b) + \beta \max_T \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{T} \beta^j u(b) + \sum_{j=T}^{\infty} \beta^j u(w_T)\right] & \text{si rechazo} \end{cases}$$

- Así que

$$V_t = \max\left\{u(b) + \beta \mathbb{E}\left[V_{t+1}\right], R(w_t)\right\}$$

- MAGIA: V_t no depende de t dado w_t

El Lado Oscuro

- En t, si todavía no acepté una oferta, después de ver w_t

$$V_t = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w_t) = R(w_t) & \text{si acepto} \\ u(b) + \beta \max_T \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{T} \beta^j u(b) + \sum_{j=T}^{\infty} \beta^j u(w_T)\right] & \text{si rechazo} \end{cases}$$

- Así que

$$V_t = \max\left\{u(b) + \beta \mathbb{E}\left[V_{t+1}\right], R(w_t)\right\}$$

- MAGIA: V_t no depende de t dado w_t

El Lado Oscuro

- En t, si todavía no acepté una oferta, después de ver w_t

$$V_t = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w_t) = R(w_t) & \text{si acepto} \\ u(b) + \beta \max_T \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{T} \beta^j u(b) + \sum_{j=T}^{\infty} \beta^j u(w_T)\right] & \text{si rechazo} \end{cases}$$

- Así que

$$V_t = \max \left\{ u(b) + \beta \mathbb{E}\left[V_{t+1}\right], R(w_t) \right\}$$

- MAGIA: V_t no depende de t dado w_t

El Lado Oscuro

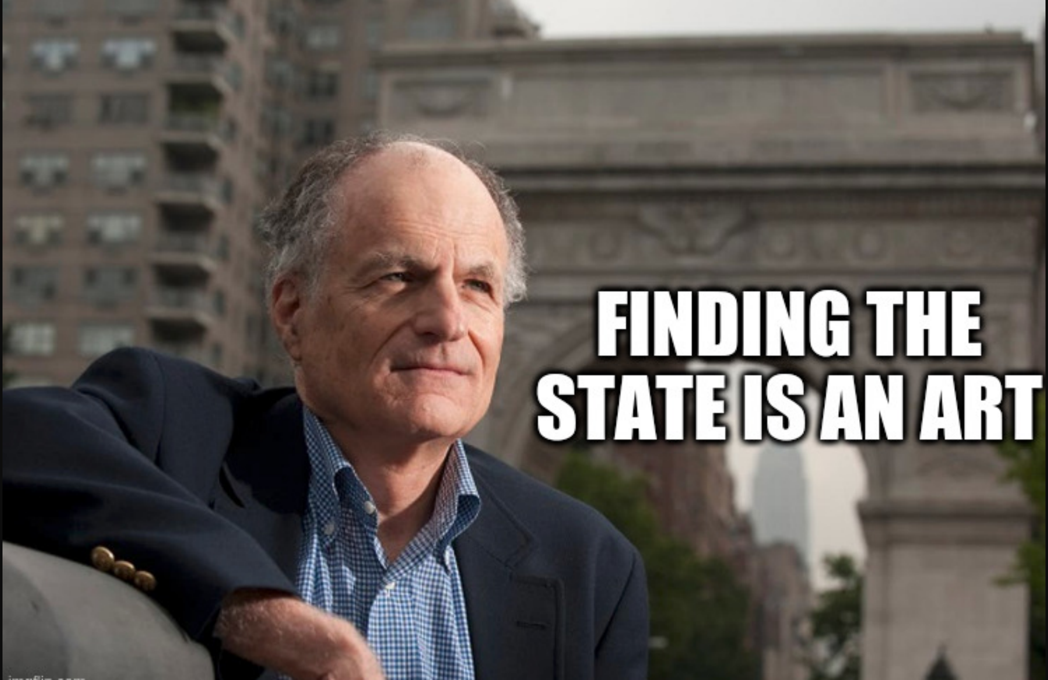
- En t, si todavía no acepté una oferta, después de ver w_t

$$V_t = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w_t) = R(w_t) & \text{si acepto} \\ u(b) + \beta \max_T \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{T} \beta^j u(b) + \sum_{j=T}^{\infty} \beta^j u(w_T)\right] & \text{si rechazo} \end{cases}$$

- Así que

$$V_t = \max\left\{u(b) + \beta \mathbb{E}\left[V_{t+1}\right], R(w_t)\right\}$$

- MAGIA: V_t no depende de t dado w_t


FINDING THE
STATE IS AN ART

McCall (1970) escrito recursivo

$$V(w_t) = \max\left\{u(b) + \beta\mathbb{E}\left[V(w_{t+1})\right], R(w_t)\right\}$$

- Programación dinámica a mano

$$R(w) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w)$$

McCall (1970) escrito recursivo

$$V(w_t) = \max \left\{ u(b) + \beta \mathbb{E} \left[V(w_{t+1}) \right], R(w_t) \right\}$$

- Programación dinámica a mano

$$R(w) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w)$$

McCall (1970) escrito recursivo

$$V(w_t) = \max \left\{ u(b) + \beta \mathbb{E} \left[V(w_{t+1}) \right], R(w_t) \right\}$$

- Programación dinámica a mano

$$R(w) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w) = u(w) + \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j u(w)$$

McCall (1970) escrito recursivo

$$V(w_t) = \max \left\{ u(b) + \beta \mathbb{E} \left[V(w_{t+1}) \right], R(w_t) \right\}$$

- Programación dinámica a mano

$$R(w) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w) = u(w) + \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j u(w)$$

$$= u(w) + \beta \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w)$$

McCall (1970) escrito recursivo

$$V(w_t) = \max\left\{u(b) + \beta\mathbb{E}\left[V(w_{t+1})\right], R(w_t)\right\}$$

- Programación dinámica a mano

$$R(w) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w) = u(w) + \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j u(w)$$

$$= u(w) + \beta \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w)$$

McCall (1970) escrito recursivo

$$V(w_t) = \max \left\{ u(b) + \beta \mathbb{E}\left[V(w_{t+1})\right], R(w_t) \right\}$$

- Programación dinámica a mano

$$\begin{aligned} R(w) &= \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w) = u(w) + \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j u(w) \\ &= u(w) + \beta \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w) = u(w) + \beta R(w) \end{aligned}$$

McCall (1970) escrito recursivo

$$V(w_t) = \max \left\{ u(b) + \beta \mathbb{E}\left[V(w_{t+1})\right], R(w_t) \right\}$$

- Programación dinámica a mano

$$\begin{aligned} R(w) &= \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w) = u(w) + \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j u(w) \\ &= u(w) + \beta \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w) = u(w) + \beta R(w) \\ &= \frac{u(w)}{1-\beta} \end{aligned}$$

McCall (1970) escrito recursivo

$$V(w_t) = \max \left\{ u(b) + \beta \mathbb{E}\left[V(w_{t+1})\right], R(w_t) \right\}$$

- Programación dinámica a mano

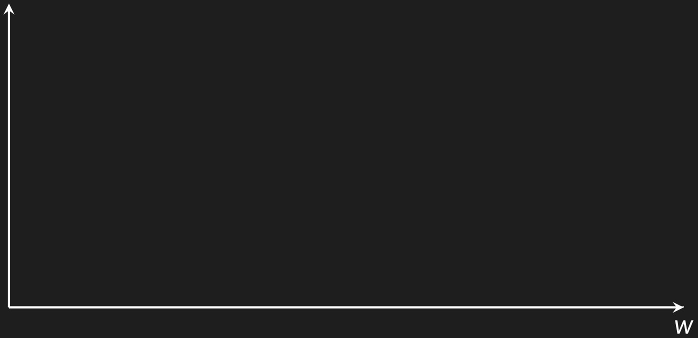
$$R(w) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w) = u(w) + \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j u(w)$$

$$= u(w) + \beta \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w) = u(w) + \beta R(w)$$

$$= \frac{u(w)}{1-\beta}$$

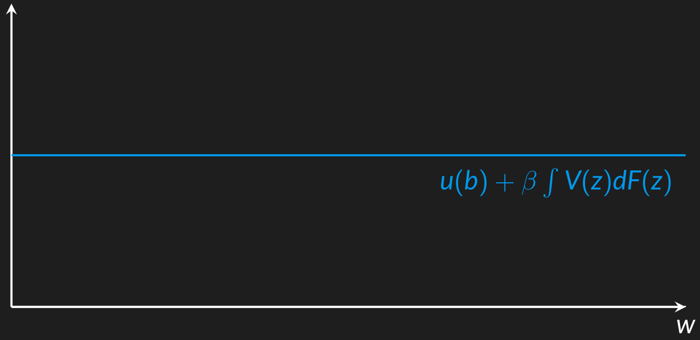
McCall (1970) escrito recursivo

$$V(w) = \max\left\{u(b) + \beta \int V(z)dF(z), \frac{u(w)}{1-\beta}\right\}$$



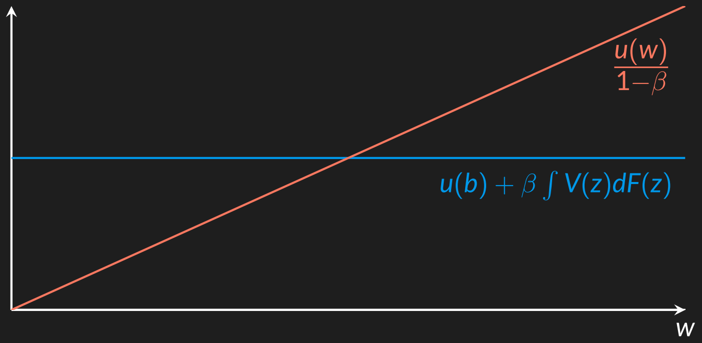
McCall (1970) escrito recursivo

$$V(w) = \max\left\{u(b) + \beta \int V(z)dF(z), \frac{u(w)}{1-\beta}\right\}$$



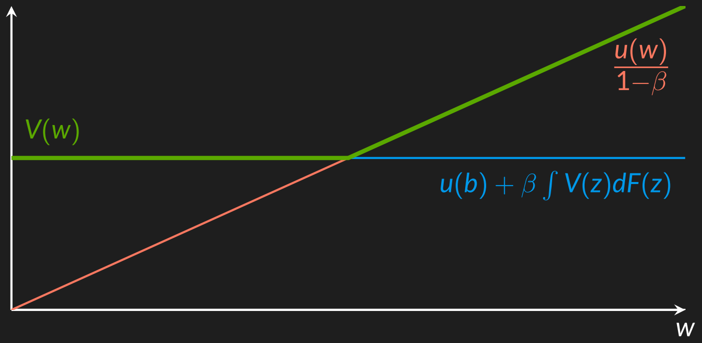
McCall (1970) escrito recursivo

$$V(w) = \max\left\{u(b) + \beta \int V(z)dF(z), \frac{u(w)}{1-\beta}\right\}$$



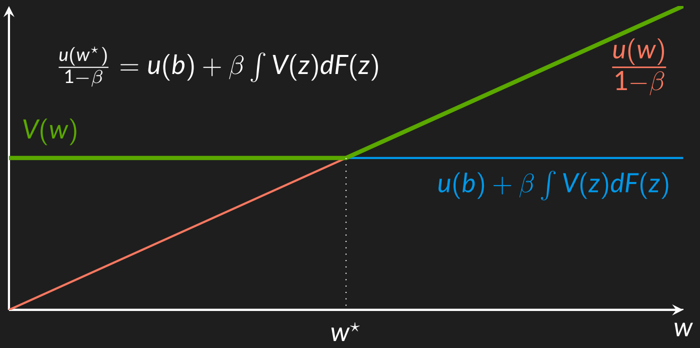
McCall (1970) escrito recursivo

$$V(w) = \max\left\{u(b) + \beta \int V(z)dF(z), \frac{u(w)}{1-\beta}\right\}$$



McCall (1970) escrito recursivo

$$V(w) = \max\left\{u(b) + \beta \int V(z)dF(z), \frac{u(w)}{1-\beta}\right\}$$



McCall (1970) con programación dinámica

$$V(w) = \max \left\{ u(b) + \beta \int V(z) dF(z), \frac{u(w)}{1-\beta} \right\}$$

Algoritmo

1. Inicializar: $V^0(w) = 0$
2. Usar V^0 del lado derecho, obtener $V^1(w) = \max \left\{ u(b) + 0, \frac{u(w)}{1-\beta} \right\}$
3. Usar V^1 del lado derecho, obtener V^2

... Iterar hasta que $|V^n - V^{(n-1)}| \leq \epsilon$ (distancia entre funciones)

McCall (1970) con programación dinámica

$$V(w) = \max\left\{u(b) + \beta \int V(z)dF(z), \frac{u(w)}{1-\beta}\right\}$$

Algoritmo

1. Inicializar: $V^0(w) = 0$
2. Usar V^0 del lado derecho, obtener $V^1(w) = \max\left\{u(b) + 0, \frac{u(w)}{1-\beta}\right\}$
3. Usar V^1 del lado derecho, obtener V^2

... Iterar hasta que $|V^n - V^{(n-1)}| \leq \epsilon$ (distancia entre funciones)

McCall (1970) con programación dinámica

$$V(w) = \max \left\{ u(b) + \beta \int V(z) dF(z), \frac{u(w)}{1-\beta} \right\}$$

Algoritmo

1. Inicializar: $V^0(w) = 0$
2. Usar V^0 del lado derecho, obtener $V^1(w) = \max \left\{ u(b) + 0, \frac{u(w)}{1-\beta} \right\}$
3. Usar V^1 del lado derecho, obtener V^2

... Iterar hasta que $|V^n - V^{(n-1)}| \leq \epsilon$ (distancia entre funciones)

McCall (1970) con programación dinámica

$$V(w) = \max\left\{u(b) + \beta \int V(z)dF(z), \frac{u(w)}{1-\beta}\right\}$$

Algoritmo

1. Inicializar: $V^0(w) = 0$
2. Usar V^0 del lado derecho, obtener $V^1(w) = \max\left\{u(b) + 0, \frac{u(w)}{1-\beta}\right\}$
3. Usar V^1 del lado derecho, obtener V^2

... Iterar hasta que $|V^n - V^{(n-1)}| \leq \epsilon$ (distancia entre funciones)

McCall (1970) con programación dinámica

$$V(w) = \max \left\{ u(b) + \beta \int V(z) dF(z), \frac{u(w)}{1-\beta} \right\}$$

Algoritmo

1. Inicializar: $V^0(w) = 0$
2. Usar V^0 del lado derecho, obtener $V^1(w) = \max \left\{ u(b) + 0, \frac{u(w)}{1-\beta} \right\}$
3. Usar V^1 del lado derecho, obtener V^2

... Iterar hasta que $|V^n - V^{(n-1)}| \leq \epsilon$ (distancia entre funciones)

Programación Dinámica: Consumo/ahorro

Problema de la torta

- Un agente tiene una torta de tamaño K
- Preferencias standard: utilidad u, descuento β

$$
\begin{aligned}
\max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\
\text{sujeto a} \quad & c_t + k_{t+1} = k_t \\
& k_{t+1} \geq 0
\end{aligned}
$$

- Y hagamos que $u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$

Problema de la torta

- Un agente tiene una torta de tamaño K
- Preferencias standard: utilidad u, descuento β

$$
\begin{aligned}
\max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\
\text{sujeto a} \quad & c_t + k_{t+1} = k_t \\
& k_{t+1} \geq 0
\end{aligned}
$$

- Y hagamos que $u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$

Problema de la torta

CPOs

- Derivando contra c_t y k_{t+1}

$$\begin{aligned} \beta^t u'(c_t) &= \lambda_t \\ \lambda_t &= \lambda_{t+1} \end{aligned}$$

- Así que

$$\begin{aligned} u'(c_t) &= \beta u'(c_{t+1}) \\ \implies c_{t+1} &= \beta^{\frac{1}{\gamma}} c_t \\ \implies c_t &= c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}}\right)^t \end{aligned}$$

Problema de la torta

CPOs

- Derivando contra c_t y k_{t+1}

$$\beta^t u'(c_t) = \lambda_t$$
$$\lambda_t = \lambda_{t+1}$$

- Así que

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})$$
$$\implies c_{t+1} = \beta^{\frac{1}{\gamma}} c_t$$
$$\implies c_t = c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}}\right)^t$$

Problema de la torta

CPOs

- Derivando contra c_t y k_{t+1}

$$\beta^t u'(c_t) = \lambda_t$$
$$\lambda_t = \lambda_{t+1}$$

- Así que

$$c_t^{-\gamma} = \beta c_{t+1}^{-\gamma}$$
$$\implies c_{t+1} = \beta^{\frac{1}{\gamma}} c_t$$
$$\implies c_t = c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}}\right)^t$$

Problema de la torta

CPOs

- Derivando contra c_t y k_{t+1}

$$\begin{aligned} \beta^t u'(c_t) &= \lambda_t \\ \lambda_t &= \lambda_{t+1} \end{aligned}$$

- Así que

$$\begin{aligned} c_t^{-\gamma} &= \beta c_{t+1}^{-\gamma} \\ \implies c_{t+1} &= \beta^{\frac{1}{\gamma}} c_t \\ \implies c_t &= c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}}\right)^t \end{aligned}$$

Problema de la torta

CPOs

- Derivando contra c_t y k_{t+1}

$$\begin{aligned} \beta^t u'(c_t) &= \lambda_t \\ \lambda_t &= \lambda_{t+1} \end{aligned}$$

- Así que

$$\begin{aligned} c_t^{-\gamma} &= \beta c_{t+1}^{-\gamma} \\ \implies c_{t+1} &= \beta^{\frac{1}{\gamma}} c_t \\ \implies c_t &= c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}}\right)^t \end{aligned}$$

Problema de la torta

Tenemos

$$c_t = c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}}\right)^t$$

y

$$c_t + k_{t+1} = k_t \implies k_{t+1} = k_t - c_t \implies k_{t+1} = k_0 - \sum_{s=0}^{t} c_s$$

Problema de la torta

Tenemos

$$c_t = c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}}\right)^t$$

y

$$c_t + k_{t+1} = k_t \implies k_{t+1} = k_t - c_t \implies k_{t+1} = k_0 - \sum_{s=0}^{t} c_s \implies k_0 = \sum_{t=0}^{\infty} c_t + \lim_{t\to\infty} k_t$$

Problema de la torta

Tenemos

$$c_t = c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}}\right)^t$$

y

$$c_t + k_{t+1} = k_t \implies k_{t+1} = k_t - c_t \implies k_{t+1} = k_0 - \sum_{s=0}^{t} c_s \implies k_0 = \sum_{t=0}^{\infty} c_t + \lim_{t \to \infty} k_t$$

así que

$$k_0 = \sum_{t=0}^{\infty} c_t$$

Problema de la torta

Tenemos

$$c_t = c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}}\right)^t$$

y

$$c_t + k_{t+1} = k_t \implies k_{t+1} = k_t - c_t \implies k_{t+1} = k_0 - \sum_{s=0}^{t} c_s \implies k_0 = \sum_{t=0}^{\infty} c_t + \lim_{t \to \infty} k_t$$

así que

$$k_0 = \sum_{t=0}^{\infty} c_t = \sum_{t=0}^{\infty} c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}}\right)^t$$

Problema de la torta

Tenemos

$$c_t = c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}}\right)^t$$

y

$$c_t + k_{t+1} = k_t \implies k_{t+1} = k_t - c_t \implies k_{t+1} = k_0 - \sum_{s=0}^{t} c_s \implies k_0 = \sum_{t=0}^{\infty} c_t + \lim_{t\to\infty} k_t$$

así que

$$k_0 = \sum_{t=0}^{\infty} c_t = \sum_{t=0}^{\infty} c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}}\right)^t = c_0 \sum_{t=0}^{\infty} \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}}\right)^t$$

Problema de la torta

Tenemos

$$c_t = c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}}\right)^t$$

y

$$c_t + k_{t+1} = k_t \implies k_{t+1} = k_t - c_t \implies k_{t+1} = k_0 - \sum_{s=0}^{t} c_s \implies k_0 = \sum_{t=0}^{\infty} c_t + \lim_{t\to\infty} k_t$$

así que

$$k_0 = \sum_{t=0}^{\infty} c_t = \sum_{t=0}^{\infty} c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}}\right)^t = c_0 \sum_{t=0}^{\infty} \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}}\right)^t = c_0 \frac{1}{1-\beta^{\frac{1}{\gamma}}}$$

Tenemos

$$c_t = c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}}\right)^t$$

y

$$c_t + k_{t+1} = k_t \implies k_{t+1} = k_t - c_t \implies k_{t+1} = k_0 - \sum_{s=0}^{t} c_s \implies k_0 = \sum_{t=0}^{\infty} c_t + \lim_{t\to\infty} k_t$$

así que

$$k_0 = \sum_{t=0}^{\infty} c_t = \sum_{t=0}^{\infty} c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}}\right)^t = c_0 \sum_{t=0}^{\infty} \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}}\right)^t = c_0 \frac{1}{1-\beta^{\frac{1}{\gamma}}}$$

Problema de la torta

Tenemos

$$c_t = c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}}\right)^t$$

y

$$c_t + k_{t+1} = k_t \implies k_{t+1} = k_t - c_t \implies k_{t+1} = k_0 - \sum_{s=0}^{t} c_s \implies k_0 = \sum_{t=0}^{\infty} c_t + \lim_{t\to\infty} k_t$$

así que

$$k_0 = \sum_{t=0}^{\infty} c_t = \sum_{t=0}^{\infty} c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}}\right)^t = c_0 \sum_{t=0}^{\infty} \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}}\right)^t = c_0 \frac{1}{1-\beta^{\frac{1}{\gamma}}}$$

Problema de la torta

Tenemos

$$c_t = c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}}\right)^t$$

y

$$c_t + k_{t+1} = k_t \implies k_{t+1} = k_t - c_t \implies k_{t+1} = k_0 - \sum_{s=0}^{t} c_s \implies k_0 = \sum_{t=0}^{\infty} c_t + \lim_{t\to\infty} k_t$$

así que

$$k_0 = \sum_{t=0}^{\infty} c_t = \sum_{t=0}^{\infty} c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}}\right)^t = c_0 \sum_{t=0}^{\infty} \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}}\right)^t = c_0 \frac{1}{1-\beta^{\frac{1}{\gamma}}}$$

Problema de la torta: a little knowledge of geometric sums...

Al final,

$$\begin{cases} c_t = c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}}\right)^t \\ k_0 = \frac{c_0}{1-\beta^{\frac{1}{\gamma}}} \end{cases} \implies c_t = k_0 \left(1 - \beta^{\frac{1}{\gamma}}\right) \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}}\right)^t$$

Problema de la torta: a little knowledge of geometric sums...

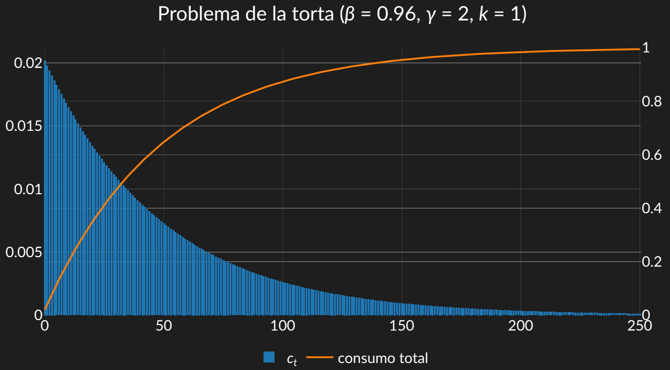
Al final,

$$\begin{cases} c_t = c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}}\right)^t \\ k_0 = \frac{c_0}{1-\beta^{\frac{1}{\gamma}}} \end{cases} \implies c_t = k_0 \left(1 - \beta^{\frac{1}{\gamma}}\right) \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}}\right)^t$$

Problema de la torta: a little knowledge of geometric sums. . .

Al final,

$$\begin{cases} c_t = c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}}\right)^t \\ k_0 = \frac{c_0}{1-\beta^{\frac{1}{\gamma}}} \end{cases} \implies c_t = k_0 \left(1 - \beta^{\frac{1}{\gamma}}\right) \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}}\right)^t$$



Extensiones que necesitamos

Problema de la torta con

- La torta se va pudriendo: $k_{t+1} = (k_t - c_t)(1+r) \qquad \text{si } r < 0$
- Llega nueva torta: $k_{t+1} = k_t - c_t + y_{t+1}$
- La nueva torta es aleatoria según una cadena de Markov $F(y'|y)$
- Puedo pedir torta prestada: $k_{t+1} \geq \bar{k}$

$$\max_{c_t, k_{t+1}} \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right]$$

$$\text{sujeto a } k_{t+1} + c_t = k_t(1+r) + y_t$$

$$k_{t+1} \geq \bar{k}$$

- En general no tiene forma cerrada...

Problema de la torta con

- La torta se va pudriendo: $k_{t+1} = (k_t - c_t)(1+r) \qquad \text{si } r < 0$
- Llega nueva torta: $k_{t+1} = k_t - c_t + y_{t+1}$
- La nueva torta es aleatoria según una cadena de Markov $F(y'|y)$
- Puedo pedir torta prestada: $k_{t+1} \geq \bar{k}$

$$\max_{c_t, k_{t+1}} \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right]$$

$$\text{sujeto a } k_{t+1} + c_t = k_t(1+r) + y_t$$

$$k_{t+1} \geq \bar{k}$$

- En general no tiene forma cerrada. . .

Extensiones que necesitamos

Problema de la torta con

- La torta se va pudriendo: $k_{t+1} = (k_t - c_t)(1+r) \qquad \text{si } r < 0$
- Llega nueva torta: $k_{t+1} = k_t - c_t + y_{t+1}$
- La nueva torta es aleatoria según una cadena de Markov $F(y'|y)$
- Puedo pedir torta prestada: $k_{t+1} \geq \bar{k}$

$$\max_{c_t, k_{t+1}} \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right]$$

$$\text{sujeto a } k_{t+1} + c_t = k_t(1+r) + y_t$$

$$k_{t+1} \geq \bar{k}$$

- En general no tiene forma cerrada...

Extensiones que necesitamos

Problema de la torta con

- La torta se va pudriendo: $k_{t+1} = (k_t - c_t)(1 + r) \qquad \text{si } r < 0$
- Llega nueva torta: $k_{t+1} = k_t - c_t + y_{t+1}$
- La nueva torta es aleatoria según una cadena de Markov $F(y'|y)$
- Puedo pedir torta prestada: $k_{t+1} \geq \bar{k}$

$$\max_{c_t, k_{t+1}} \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right]$$

$$\text{sujeto a } k_{t+1} + c_t = k_t(1 + r) + y_t$$

$$k_{t+1} \geq \bar{k}$$

- En general no tiene forma cerrada. . .

Extensiones que necesitamos

Problema de la torta con

- La torta se va pudriendo: $k_{t+1} = (k_t - c_t)(1+r) \qquad \text{si } r < 0$
- Llega nueva torta: $k_{t+1} = k_t - c_t + y_{t+1}$
- La nueva torta es aleatoria según una cadena de Markov $F(y'|y)$
- Puedo pedir torta prestada: $k_{t+1} \geq \bar{k}$

$$\max_{c_t, k_{t+1}} \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right]$$

$$\text{sujeto a } k_{t+1} + c_t = k_t(1+r) + y_t$$

$$k_{t+1} \geq \bar{k}$$

- En general no tiene forma cerrada. . .

Extensiones que necesitamos

Problema de la torta con

- La torta se va pudriendo: $k_{t+1} = (k_t - c_t)(1 + r) \qquad \text{si } r < 0$
- Llega nueva torta: $k_{t+1} = k_t - c_t + y_{t+1}$
- La nueva torta es aleatoria según una cadena de Markov $F(y'|y)$
- Puedo pedir torta prestada: $k_{t+1} \geq \bar{k}$

$$\max_{c_t, k_{t+1}} \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right]$$

$$\text{sujeto a } k_{t+1} + c_t = k_t(1 + r) + y_t$$

$$k_{t+1} \geq \bar{k}$$

- En general no tiene forma cerrada...

Extensiones que necesitamos

Problema de la torta con

- La torta se va pudriendo: $k_{t+1} = (k_t - c_t)(1+r)$ si $r < 0$
- Llega nueva torta: $k_{t+1} = k_t - c_t + y_{t+1}$
- La nueva torta es aleatoria según una cadena de Markov $F(y'|y)$
- Puedo pedir torta prestada: $k_{t+1} \geq \bar{k}$

$$\max_{c_t, k_{t+1}} \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right]$$

$$\text{sujeto a } k_{t+1} + c_t = k_t(1+r) + y_t$$

$$k_{t+1} \geq \bar{k}$$

- En general no tiene forma cerrada...

Problema de la torta recursivo

- Otra vez llamemos V_t al valor del problema en t

$$V_t = \max_{c_{t+s}, k_{t+s}} \mathbb{E}_t \left[\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s u(c_{t+s}) \right] = \max_{c_t, k_{t+1}} u(c_t) + \mathbb{E}_t \left[V_{t+1} \right]$$

$$\text{sujeto a } k_{t+s+1} + c_{t+s} = k_{t+s}(1+r) + y_{t+s}$$

$$k_{t+s+1} \geq \bar{k}$$

Problema de la torta recursivo

- Otra vez llamemos V_t al valor del problema en t

$$V_t = \max_{c_{t+s},k_{t+s}} \mathbb{E}_t \left[\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s u(c_{t+s}) \right] = \max_{c_t,k_{t+1}} u(c_t) + \mathbb{E}_t \left[V_{t+1} \right]$$

$$\text{sujeto a } k_{t+s+1} + c_{t+s} = k_{t+s}(1+r) + y_{t+s}$$

$$k_{t+s+1} \geq \bar{k}$$

Problema de la torta recursivo

- Otra vez llamemos V_t al valor del problema en t

$$V_t = \max_{c_{t+s}, k_{t+s}} \mathbb{E}_t \left[\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s u(c_{t+s}) \right] = \max_{c_t, k_{t+1}} u(c_t) + \mathbb{E}_t \left[V_{t+1} \right]$$

$$\text{sujeto a } k_{t+s+1} + c_{t+s} = k_{t+s}(1+r) + y_{t+s}$$

$$k_{t+s+1} \geq \bar{k}$$

Problema de la torta recursivo

$$v(k, y) = \max_{c,k'} u(c) + \beta \mathbb{E}\left[v(k', y')|y\right]$$

$$\text{sujeto a } c + k' = y + k(1 + r)$$

$$k' \geq \bar{k}$$

Problema de la torta recursivo

$$v(k, y) = \max_{c, k'} u(c) + \beta \mathbb{E}\left[v(k', y') | y\right]$$

$$\text{sujeto a } c + k' = y + k(1 + r)$$

$$k' \geq \bar{k}$$

Problema de la torta recursivo

$$v(k, y) = \max_{c,k'} u(c) + \beta \mathbb{E}\left[v(k', y')|y\right]$$

$$\text{sujeto a } c + k' = y + k(1 + r)$$

$$k' \geq \bar{k}$$

- La función v es desconocida
- Podemos
  1. meter una f cualquiera del lado derecho (reemplazar v por f)
  2. usar la ec. de Bellman para encontrar una nueva f
  3. comparar la f que entró con la f que salió
  4. usar la f que salió del lado derecho

Problema de la torta recursivo

$$v(k, y) = \max_{c,k'} u(c) + \beta \mathbb{E}\left[v(k', y')|y\right]$$
$$\text{sujeto a } c + k' = y + k(1 + r)$$
$$k' \geq \bar{k}$$

- La función v es desconocida
- Podemos
  1. meter una f cualquiera del lado derecho (reemplazar v por f)
  2. usar la ec. de Bellman para encontrar una nueva f
  3. comparar la f que entró con la f que salió
  4. usar la f que salió del lado derecho

Problema de la torta recursivo

$$v(k, y) = \max_{c,k'} u(c) + \beta \mathbb{E}\left[v(k', y')|y\right]$$

$$\text{sujeto a } c + k' = y + k(1 + r)$$

$$k' \geq \bar{k}$$

- La función v es desconocida
- Podemos
    1. meter una f cualquiera del lado derecho (reemplazar v por f)
    2. usar la ec. de Bellman para encontrar una nueva f
    3. comparar la f que entró con la f que salió
    4. usar la f que salió del lado derecho

Problema de la torta recursivo

$$v(k,y) = \max_{c,k'} u(c) + \beta \mathbb{E}\left[v(k',y')|y\right]$$

$$\text{sujeto a } c + k' = y + k(1+r)$$

$$k' \geq \bar{k}$$

- La función v es desconocida
- Podemos
  1. meter una f cualquiera del lado derecho (reemplazar v por f)
  2. usar la ec. de Bellman para encontrar una nueva f
  3. comparar la f que entró con la f que salió
  4. usar la f que salió del lado derecho

Cierre

Cierre

Vimos

- Programación dinámica
  - Finding the state is an art
  - Iterar sobre la ecuación de Bellman es 90% de un algoritmo
  - Por qué funciona?
- El modelo de búsqueda más sencillo posible
- El problema de la torta

. . . si les hace acordar a otra cosa, vamos bien