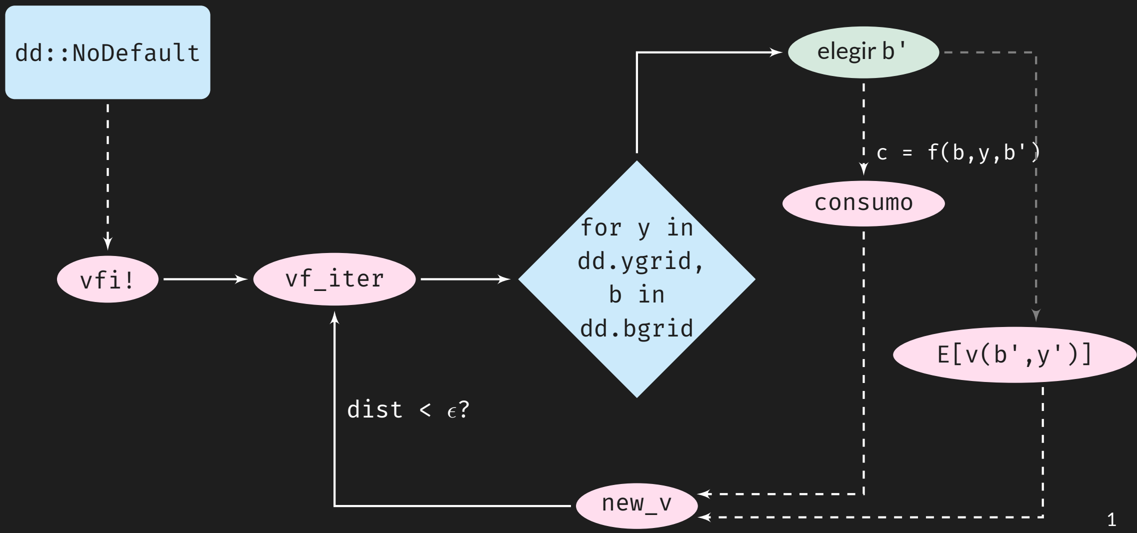
Macroeconomía Internacional

Francisco Roldán
IMF

October 2021

Problema de fluctuación de ingresos



Default

Cupones con decaimiento exponencial

- Emito b en t
- Pago κ en $t+1$ y sobrevive $(1-\rho)b$ para el futuro
- Pago $\kappa(1-\rho)$ en $t+2$ y sobrevive $(1-\rho)^2 b$ para el futuro
- ...
- Pago $\kappa(1-\rho)^{s-1}$ en $t+s$

Total de pagos prometidos

$$q^\star = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \kappa(1-\rho)^{s-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{s+1}} \kappa(1-\rho)^s$$

Cupones con decaimiento exponencial

- Emito b en t
- Pago κ en $t+1$ y sobrevive $(1-\rho)b$ para el futuro
- Pago $\kappa(1-\rho)$ en $t+2$ y sobrevive $(1-\rho)^2 b$ para el futuro
- ...
- Pago $\kappa(1-\rho)^{s-1}$ en $t+s$

Total de pagos prometidos

$$q^\star = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s}\kappa(1-\rho)^{s-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{s+1}}\kappa(1-\rho)^s = \frac{\kappa}{1+r}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{1-\rho}{1+r}\right)^s$$

Deuda de largo plazo

Cupones con decaimiento exponencial

- Emito b en t
- Pago κ en $t+1$ y sobrevive $(1-\rho)b$ para el futuro
- Pago $\kappa(1-\rho)$ en $t+2$ y sobrevive $(1-\rho)^2 b$ para el futuro
- …
- Pago $\kappa(1-\rho)^{s-1}$ en $t+s$

Total de pagos prometidos

$$q^\star = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s}\kappa(1-\rho)^{s-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{s+1}}\kappa(1-\rho)^s = \frac{\kappa}{1+r}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{1-\rho}{1+r}\right)^s$$

$$= \frac{\kappa}{1+r}\frac{1}{1-\frac{1-\rho}{1+r}}$$

Deuda de largo plazo

Cupones con decaimiento exponencial

- Emito b en t
- Pago κ en $t+1$ y sobrevive $(1-\rho)b$ para el futuro
- Pago $\kappa(1-\rho)$ en $t+2$ y sobrevive $(1-\rho)^2 b$ para el futuro
- ...
- Pago $\kappa(1-\rho)^{s-1}$ en $t+s$

Total de pagos prometidos

$$q^\star = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s}\kappa(1-\rho)^{s-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{s+1}}\kappa(1-\rho)^{s} = \frac{\kappa}{1+r}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{1-\rho}{1+r}\right)^{s}$$

$$= \frac{\kappa}{1+r}\frac{1}{1-\frac{1-\rho}{1+r}} = \kappa\frac{1}{1+r-(1-\rho)}$$

Deuda de largo plazo

Cupones con decaimiento exponencial

- Emito b en t
- Pago κ en $t+1$ y sobrevive $(1-\rho)b$ para el futuro
- Pago $\kappa(1-\rho)$ en $t+2$ y sobrevive $(1-\rho)^2 b$ para el futuro
- ...
- Pago $\kappa(1-\rho)^{s-1}$ en $t+s$

Total de pagos prometidos

$$
\begin{aligned}
q^\star &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s}\kappa(1-\rho)^{s-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{s+1}}\kappa(1-\rho)^s = \frac{\kappa}{1+r}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{1-\rho}{1+r}\right)^s \\
&= \frac{\kappa}{1+r}\frac{1}{1-\frac{1-\rho}{1+r}} = \kappa\frac{1}{1+r-(1-\rho)} = \frac{\kappa}{r+\rho}
\end{aligned}
$$

Deuda de largo plazo

Cupones con decaimiento exponencial

- Emito b en t
- Pago κ en $t+1$ y sobrevive $(1-\rho)b$ para el futuro
- Pago $\kappa(1-\rho)$ en $t+2$ y sobrevive $(1-\rho)^2 b$ para el futuro
- ...
- Pago $\kappa(1-\rho)^{s-1}$ en $t+s$

Total de pagos prometidos

$$q^\star = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s}\kappa(1-\rho)^{s-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{s+1}}\kappa(1-\rho)^{s} = \frac{\kappa}{1+r}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{1-\rho}{1+r}\right)^s$$
$$= \frac{\kappa}{1+r}\frac{1}{1-\frac{1-\rho}{1+r}} = \kappa\frac{1}{1+r-(1-\rho)} = \frac{\kappa}{r+\rho}$$

Deuda de largo plazo

Cupones con decaimiento exponencial

- Emito b en t
- Pago κ en $t+1$ y sobrevive $(1-\rho)b$ para el futuro
- Pago $\kappa(1-\rho)$ en $t+2$ y sobrevive $(1-\rho)^2 b$ para el futuro
- ...
- Pago $\kappa(1-\rho)^{s-1}$ en $t+s$

Total de pagos prometidos

$$q^\star = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s}\kappa(1-\rho)^{s-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{s+1}}\kappa(1-\rho)^s = \frac{\kappa}{1+r}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{1-\rho}{1+r}\right)^s$$

$$= \frac{\kappa}{1+r}\frac{1}{1-\frac{1-\rho}{1+r}} = \kappa\frac{1}{1+r-(1-\rho)} = \frac{\kappa}{r+\rho}$$

Deuda de largo plazo

Cupones con decaimiento exponencial

- Emito b en t
- Pago κ en $t+1$ y sobrevive $(1-\rho)b$ para el futuro
- Pago $\kappa(1-\rho)$ en $t+2$ y sobrevive $(1-\rho)^2 b$ para el futuro
- ...
- Pago $\kappa(1-\rho)^{s-1}$ en $t+s$

Total de pagos prometidos

$$
\begin{aligned}
q^{\star} &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \kappa (1-\rho)^{s-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{s+1}} \kappa (1-\rho)^s = \frac{\kappa}{1+r} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1-\rho}{1+r} \right)^s \\
&= \frac{\kappa}{1+r} \frac{1}{1-\frac{1-\rho}{1+r}} = \kappa \frac{1}{1+r-(1-\rho)} = \frac{\kappa}{r+\rho}
\end{aligned}
$$

Deuda de largo plazo bellmanizada

Recursivamente

- Hoy compro la deuda a precio $q^\star$
- Mañana cobro cupón κ, revendo la deuda que queda $(1-\rho)$ a precio $q^\star$.

$$q^\star = \frac{1}{1+r}\left(\kappa + (1-\rho)q^\star\right)$$

$$q^\star(1+r-(1-\rho)) = \kappa$$

$$q^\star = \frac{\kappa}{r+\rho}$$

- Deuda emitida en $t-s$ sustituye perfectamente $(1-\rho)^s$ deuda emitida en t

Deuda de largo plazo bellmanizada

Recursivamente

- Hoy compro la deuda a precio $q^\star$
- Mañana cobro cupón κ, revendo la deuda que queda $(1-\rho)$ a precio $q^\star$.

$$q^\star = \frac{1}{1+r}\left(\kappa + (1-\rho)q^\star\right)$$

$$q^\star(1+r-(1-\rho)) = \kappa$$

$$q^\star = \frac{\kappa}{r+\rho}$$

- Deuda emitida en $t-s$ sustituye perfectamente $(1-\rho)^s$ deuda emitida en t

Deuda de largo plazo bellmanizada

Recursivamente

- Hoy compro la deuda a precio $q^\star$
- Mañana cobro cupón κ, revendo la deuda que queda $(1-\rho)$ a precio $q^\star$.

$$
\begin{aligned}
q^\star &= \frac{1}{1+r}\left(\kappa + (1-\rho)q^\star\right) \\
q^\star(1+r-(1-\rho)) &= \kappa \\
q^\star &= \frac{\kappa}{r+\rho}
\end{aligned}
$$

- Deuda emitida en $t-s$ sustituye perfectamente $(1-\rho)^s$ deuda emitida en t

Deuda de largo plazo bellmanizada

Recursivamente

- Hoy compro la deuda a precio $q^\star$
- Mañana cobro cupón κ, revendo la deuda que queda $(1-\rho)$ a precio $q^\star$.

$$
\begin{aligned}
q^\star &= \frac{1}{1+r}\left(\kappa + (1-\rho)q^\star\right) \\
q^\star(1+r-(1-\rho)) &= \kappa \\
q^\star &= \frac{\kappa}{r+\rho}
\end{aligned}
$$

- Deuda emitida en $t-s$ sustituye perfectamente $(1-\rho)^s$ deuda emitida en t

Haircuts parciales

Default significa

- Suspensión del pago de cupones κ (sí o sí requiere deuda de largo plazo)
- Fracción $\hbar$ de la deuda es destruida (se puede hacer con deuda de corto también...)

Default: problema del deudor

$$\mathcal{V}(b,y) = \mathcal{P}(b,y) v^D((1-\hbar)b, y) + (1-\mathcal{P}(b,y))\, v^R(b,y)$$

$$v^R(b,y) = \max_{c,b'} u(c) + \beta \mathbb{E}\left[\mathcal{V}(b',y')|y\right]$$

$$\text{sujeto a } c + \kappa b = y + q(b',y)\left(b' - (1-\rho)b\right)$$

$$v^D(b,y) = u(y(1-\Delta)) + \beta\mathbb{E}\left[\theta\mathcal{V}(b,y') + (1-\theta)v^D(b,y')|y\right]$$

Default: problema del deudor

$$\mathcal{V}(b,y) = \mathcal{P}(b,y)v^D((1-\hbar)b,y) + (1-\mathcal{P}(b,y))\,v^R(b,y)$$

$$v^R(b,y) = \max_{c,b'} u(c) + \beta\mathbb{E}\left[\mathcal{V}(b',y')|y\right]$$

$$\text{sujeto a } c + \kappa b = y + q(b',y)\left(b' - (1-\rho)b\right)$$

$$v^D(b,y) = u(y(1-\Delta)) + \beta\mathbb{E}\left[\theta\mathcal{V}(b,y') + (1-\theta)v^D(b,y')|y\right]$$

Default: problema del deudor

$$\mathcal{V}(b,y) = \mathcal{P}(b,y)v^D((1-\hbar)b,y) + (1-\mathcal{P}(b,y))\, v^R(b,y)$$

$$v^R(b,y) = \max_{c,b'} u(c) + \beta\mathbb{E}\left[\mathcal{V}(b',y')|y\right]$$

$$\text{sujeto a } c + \kappa b = y + q(b',y)\,(b' - (1-\rho)b)$$

$$v^D(b,y) = u(y(1-\Delta)) + \beta\mathbb{E}\left[\theta\mathcal{V}(b,y') + (1-\theta)v^D(b,y')|y\right]$$

Default: problema del acreedor

Precio de la deuda

- Si mañana no hay default cobro
  - κ del cupón
  - $(1-\rho)q'$ de la deuda no depreciada
    - $q' = q(b'', y')$
- Si hay default me quedo con $(1-\hbar)$ bonos defaulteados

$$R(b,y) = \kappa + (1-\rho)q(b,y)$$

$$q(b',y) = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}\left[(1-\mathbb{1}_D(b',y'))R(b'',y') + \mathbb{1}_D(b',y')(1-\hbar)q_D(b',y')\right]$$

$$q_D(b',y) = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}\left[\theta(1-\mathbb{1}_D(b',y'))R(b'',y') + (1-\theta+\theta\mathbb{1}_D(b',y')(1-\hbar))q_D(b',y')\right]$$

Default: problema del acreedor

Precio de la deuda

- Si mañana no hay default cobro
  - κ del cupón
  - $(1-\rho)q'$ de la deuda no depreciada
    - $q' = q(b'', y')$
- Si hay default me quedo con $(1-\hbar)$ bonos defaulteados

$$R(b,y) = \kappa + (1-\rho)q(b,y)$$

$$q(b',y) = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}\left[(1-\mathbb{1}_D(b',y'))R(b'',y') + \mathbb{1}_D(b',y')(1-\hbar)q_D(b',y')\right]$$

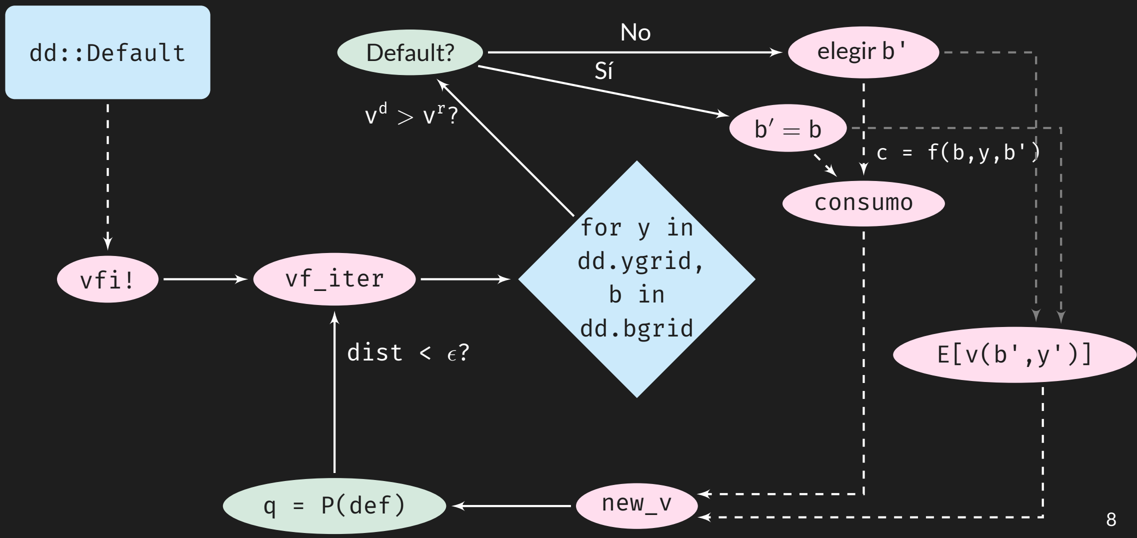
$$q_D(b',y) = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}\left[\theta(1-\mathbb{1}_D(b',y'))R(b'',y') + (1-\theta+\theta\mathbb{1}_D(b',y')(1-\hbar))q_D(b',y')\right]$$

Estrategias de resolución

- Estilo equilibrio general
  - Dadas funciones $q(b', y), q_D(b', y)$, iterar sobre la función de valor
  - Actualizar q, q_D usando las políticas de default
  - Iterar
- Estilo teoría de juegos
  - Inicializar v, q en un período T lejano
  - Encontrar q consistentes con la política implícita en v (una vez!)
  - Actualizar v dado q
  - Iterar 'hacia el pasado' hasta convergencia

... Equilibrio recursivo (perfecto de Markov) con estrategias indexadas por (b, y, d)

Pseudo-código



Simulador

`def_simul.jl`