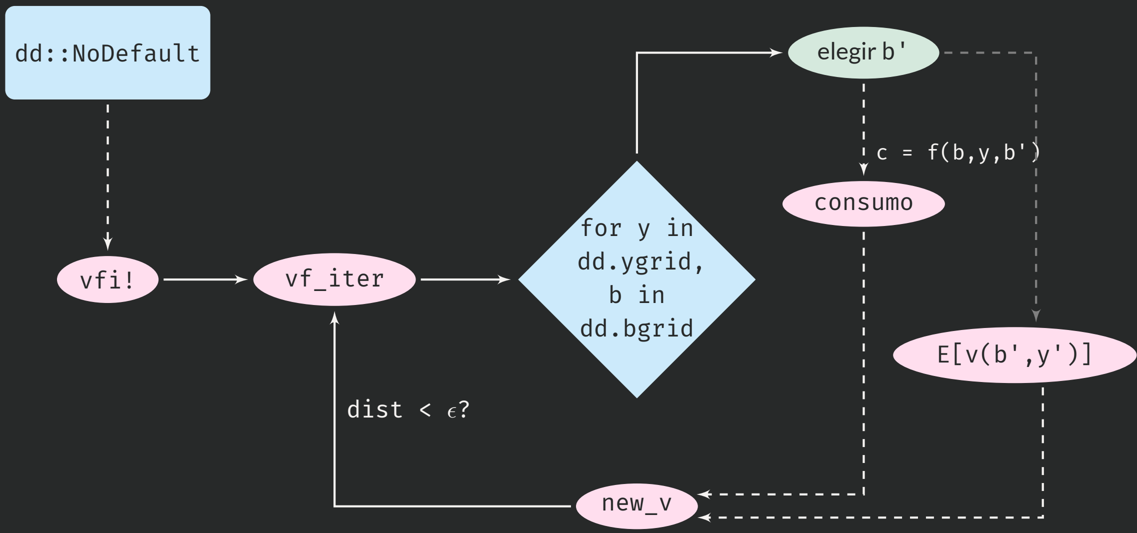
Macroeconomía Internacional

Francisco Roldán
IMF

October 2022

Problema de fluctuación de ingresos



Default

Deuda de largo plazo

Cupones con decaimiento exponencial

- Emito b en t
- Pago κ en $t+1$ y sobrevive $(1-\rho)b$ para el futuro
- Pago $\kappa(1-\rho)$ en $t+2$ y sobrevive $(1-\rho)^2 b$ para el futuro
- ...
- Pago $\kappa(1-\rho)^{s-1}$ en $t+s$

Total de pagos prometidos

$$q^\star = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \kappa(1-\rho)^{s-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{s+1}} \kappa(1-\rho)^s$$

Deuda de largo plazo

Cupones con decaimiento exponencial

- Emito b en t
- Pago κ en $t+1$ y sobrevive $(1-\rho)b$ para el futuro
- Pago $\kappa(1-\rho)$ en $t+2$ y sobrevive $(1-\rho)^2 b$ para el futuro
- ...
- Pago $\kappa(1-\rho)^{s-1}$ en $t+s$

Total de pagos prometidos

$$q^\star = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s}\kappa(1-\rho)^{s-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{s+1}}\kappa(1-\rho)^s = \frac{\kappa}{1+r}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{1-\rho}{1+r}\right)^s$$

Deuda de largo plazo

Cupones con decaimiento exponencial

- Emito b en t
- Pago κ en $t+1$ y sobrevive $(1-\rho)b$ para el futuro
- Pago $\kappa(1-\rho)$ en $t+2$ y sobrevive $(1-\rho)^2 b$ para el futuro
- ...
- Pago $\kappa(1-\rho)^{s-1}$ en $t+s$

Total de pagos prometidos

$$q^\star = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s}\kappa(1-\rho)^{s-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{s+1}}\kappa(1-\rho)^s = \frac{\kappa}{1+r}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{1-\rho}{1+r}\right)^s$$

$$= \frac{\kappa}{1+r}\frac{1}{1-\frac{1-\rho}{1+r}}$$

Deuda de largo plazo

Cupones con decaimiento exponencial

- Emito b en t
- Pago κ en $t+1$ y sobrevive $(1-\rho)b$ para el futuro
- Pago $\kappa(1-\rho)$ en $t+2$ y sobrevive $(1-\rho)^2 b$ para el futuro
- ...
- Pago $\kappa(1-\rho)^{s-1}$ en $t+s$

Total de pagos prometidos

$$q^\star = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s}\kappa(1-\rho)^{s-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{s+1}}\kappa(1-\rho)^s = \frac{\kappa}{1+r}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{1-\rho}{1+r}\right)^s$$

$$= \frac{\kappa}{1+r}\frac{1}{1-\frac{1-\rho}{1+r}} = \kappa\frac{1}{1+r-(1-\rho)}$$

Deuda de largo plazo

Cupones con decaimiento exponencial

- Emito b en t
- Pago κ en $t+1$ y sobrevive $(1-\rho)b$ para el futuro
- Pago $\kappa(1-\rho)$ en $t+2$ y sobrevive $(1-\rho)^2 b$ para el futuro
- ...
- Pago $\kappa(1-\rho)^{s-1}$ en $t+s$

Total de pagos prometidos

$$q^\star = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s}\kappa(1-\rho)^{s-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{s+1}}\kappa(1-\rho)^s = \frac{\kappa}{1+r}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{1-\rho}{1+r}\right)^s$$

$$= \frac{\kappa}{1+r}\frac{1}{1-\frac{1-\rho}{1+r}} = \kappa\frac{1}{1+r-(1-\rho)} = \frac{\kappa}{r+\rho}$$

Deuda de largo plazo

Cupones con decaimiento exponencial

- Emito b en t
- Pago κ en $t+1$ y sobrevive $(1-\rho)b$ para el futuro
- Pago $\kappa(1-\rho)$ en $t+2$ y sobrevive $(1-\rho)^2 b$ para el futuro
- ...
- Pago $\kappa(1-\rho)^{s-1}$ en $t+s$

Total de pagos prometidos

$$
\begin{aligned}
q^\star &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s}\kappa(1-\rho)^{s-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{s+1}}\kappa(1-\rho)^s = \frac{\kappa}{1+r}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{1-\rho}{1+r}\right)^s \\
&= \frac{\kappa}{1+r}\frac{1}{1-\frac{1-\rho}{1+r}} = \kappa\frac{1}{1+r-(1-\rho)} = \frac{\kappa}{r+\rho}
\end{aligned}
$$

Deuda de largo plazo

Cupones con decaimiento exponencial

- Emito b en t
- Pago κ en $t+1$ y sobrevive $(1-\rho)b$ para el futuro
- Pago $\kappa(1-\rho)$ en $t+2$ y sobrevive $(1-\rho)^2 b$ para el futuro
- ...
- Pago $\kappa(1-\rho)^{s-1}$ en $t+s$

Total de pagos prometidos

$$q^\star = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \kappa (1-\rho)^{s-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{s+1}} \kappa (1-\rho)^s = \frac{\kappa}{1+r} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1-\rho}{1+r} \right)^s$$

$$= \frac{\kappa}{1+r} \frac{1}{1-\frac{1-\rho}{1+r}} = \kappa \frac{1}{1+r-(1-\rho)} = \frac{\kappa}{r+\rho}$$

Deuda de largo plazo

Cupones con decaimiento exponencial

- Emito b en t
- Pago κ en $t+1$ y sobrevive $(1-\rho)b$ para el futuro
- Pago $\kappa(1-\rho)$ en $t+2$ y sobrevive $(1-\rho)^2 b$ para el futuro
- ...
- Pago $\kappa(1-\rho)^{s-1}$ en $t+s$

Total de pagos prometidos

$$
\begin{aligned}
q^* &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^s}\kappa(1-\rho)^{s-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{s+1}}\kappa(1-\rho)^s = \frac{\kappa}{1+r}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{1-\rho}{1+r}\right)^s \\
&= \frac{\kappa}{1+r}\frac{1}{1-\frac{1-\rho}{1+r}} = \kappa\frac{1}{1+r-(1-\rho)} = \frac{\kappa}{r+\rho}
\end{aligned}
$$

Deuda de largo plazo bellmanizada

Recursivamente

- Hoy compro la deuda a precio $q^\star$
- Mañana cobro cupón κ, revendo la deuda que queda $(1-\rho)$ a precio $q^\star$.

$$q^\star = \frac{1}{1+r}\left(\kappa + (1-\rho)q^\star\right)$$

$$q^\star(1+r-(1-\rho)) = \kappa$$

$$q^\star = \frac{\kappa}{r+\rho}$$

- Deuda emitida en $t-s$ sustituye perfectamente $(1-\rho)^s$ deuda emitida en t

Deuda de largo plazo bellmanizada

Recursivamente

- Hoy compro la deuda a precio $q^\star$
- Mañana cobro cupón κ, revendo la deuda que queda $(1-\rho)$ a precio $q^\star$.

$$q^\star = \frac{1}{1+r}\left(\kappa + (1-\rho)q^\star\right)$$
$$q^\star(1+r-(1-\rho)) = \kappa$$
$$q^\star = \frac{\kappa}{r+\rho}$$

- Deuda emitida en $t-s$ sustituye perfectamente $(1-\rho)^s$ deuda emitida en t

Deuda de largo plazo bellmanizada

Recursivamente

- Hoy compro la deuda a precio $q^\star$
- Mañana cobro cupón κ, revendo la deuda que queda $(1-\rho)$ a precio $q^\star$.

$$
\begin{aligned}
q^\star &= \frac{1}{1+r}\left(\kappa + (1-\rho)q^\star\right) \\
q^\star(1+r-(1-\rho)) &= \kappa \\
q^\star &= \frac{\kappa}{r+\rho}
\end{aligned}
$$

- Deuda emitida en $t-s$ sustituye perfectamente $(1-\rho)^s$ deuda emitida en t

Deuda de largo plazo bellmanizada

Recursivamente

- Hoy compro la deuda a precio $q^\star$
- Mañana cobro cupón κ, revendo la deuda que queda $(1-\rho)$ a precio $q^\star$.

$$
\begin{aligned}
q^\star &= \frac{1}{1+r}\left(\kappa + (1-\rho)q^\star\right) \\
q^\star(1+r-(1-\rho)) &= \kappa \\
q^\star &= \frac{\kappa}{r+\rho}
\end{aligned}
$$

- Deuda emitida en $t-s$ sustituye perfectamente $(1-\rho)^s$ deuda emitida en t

Haircuts parciales

Default significa

- Suspensión del pago de cupones κ (sí o sí requiere deuda de largo plazo)
- Fracción $\hbar$ de la deuda es destruida (se puede hacer con deuda de corto también...)

Default: problema del deudor

Con deuda larga, si debo b y emito x deuda nueva,

$$c + \underbrace{\kappa b}_{\text{cupones}} = y + \underbrace{qx}_{\text{deuda nueva}}$$

$$b' = \underbrace{(1-\rho)b}_{\text{deuda vieja}} + \underbrace{x}_{\text{deuda nueva}}$$

o, si elijo la deuda de mañana directamente,

$$c + \kappa b = y + q(b' - (1-\rho)b)$$

- Ventaja de la forma 2: q naturalmente es una función de b' y no de x

Default: problema del deudor

Con deuda larga, si debo b y emito x deuda nueva,

$$c + \underbrace{\kappa b}_{\text{cupones}} = y + \underbrace{qx}_{\text{deuda nueva}}$$

$$b' = \underbrace{(1-\rho)b}_{\text{deuda vieja}} + \underbrace{x}_{\text{deuda nueva}}$$

o, si elijo la deuda de mañana directamente,

$$c + \kappa b = y + q(b' - (1-\rho)b)$$

- Ventaja de la forma 2: q naturalmente es una función de b' y no de x

Default: problema del deudor

Con deuda larga, si debo b y emito x deuda nueva,

$$c + \underbrace{\kappa b}_{\text{cupones}} = y + \underbrace{qx}_{\text{deuda nueva}}$$

$$b' = \underbrace{(1-\rho)b}_{\text{deuda vieja}} + \underbrace{x}_{\text{deuda nueva}}$$

o, si elijo la deuda de mañana directamente,

$$c + \kappa b = y + q(b' - (1-\rho)b)$$

- Ventaja de la forma 2: q naturalmente es una función de b' y no de x

Default: ecuaciones de Bellman

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}(b,y) &= \max\left\{v^R(b,y)+\epsilon^R, v^D((1-\hbar)b,y)+\epsilon^D\right\} \\
&= \chi \log\left[\exp(v^R(b,y)/\chi)+\exp(v^D((1-\hbar)b,y)/\chi)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v^R(b,y) = \max_{c,b'} u(c) + \beta\mathbb{E}\left[\mathcal{V}(b',y')|y\right] \\
\text{sujeto a } c+\kappa b = y + q(b',y)\left(b'-(1-\rho)b\right)
\end{aligned}
$$

$$
v^D(b,y) = u(h(y)) + \beta\mathbb{E}\left[\psi\mathcal{V}(b,y') + (1-\psi)v^D(b,y')|y\right]
$$

Default: ecuaciones de Bellman

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(b,y) &= \max\left\{v^R(b,y)+\epsilon^R, v^D((1-\hbar)b,y)+\epsilon^D\right\}\\ &= \chi\log\left[\exp(v^R(b,y)/\chi)+\exp(v^D((1-\hbar)b,y)/\chi)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v^R(b,y) &= \max_{c,b'} u(c)+\beta\mathbb{E}\left[\mathcal{V}(b',y')|y\right]\\ &\text{sujeto a } c+\kappa b = y+q(b',y)\left(b'-(1-\rho)b\right)\end{aligned}$$

$$v^D(b,y) = u(h(y))+\beta\mathbb{E}\left[\psi\mathcal{V}(b,y')+(1-\psi)v^D(b,y')|y\right]$$

Default: ecuaciones de Bellman

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}(b, y) &= \max\left\{v^R(b, y) + \epsilon^R, v^D((1-\hbar)b, y) + \epsilon^D\right\} \\
&= \chi \log\left[\exp(v^R(b, y)/\chi) + \exp(v^D((1-\hbar)b, y)/\chi)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v^R(b, y) &= \max_{c, b'} u(c) + \beta \mathbb{E}\left[\mathcal{V}(b', y')|y\right] \\
&\quad \text{sujeto a } c + \kappa b = y + q(b', y)\left(b' - (1-\rho)b\right)
\end{aligned}
$$

$$
v^D(b, y) = u(h(y)) + \beta \mathbb{E}\left[\psi \mathcal{V}(b, y') + (1-\psi) v^D(b, y')|y\right]
$$

Default: problema del acreedor

Precio de la deuda

- Si mañana no hay default cobro
  - κ del cupón
  - $(1-\rho)q'$ de la deuda no depreciada
    - $q' = q(b'', y')$
- Si hay default me quedo con $(1-\hbar)$ bonos defaulteados

$$R(b,y) = \kappa + (1-\rho)q(g_b(b,y),y)$$

$$q(b',y) = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}\left[(1-\mathbb{1}_D(b',y'))R(b',y') + \mathbb{1}_D(b',y')(1-\hbar)q_D((1-\hbar)b',y')\right]$$

$$q_D(b',y) = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}\left[\psi\left((1-\mathbb{1}_D(b',y'))R(b',y') + \mathbb{1}_D(b',y')(1-\hbar)q_D((1-\hbar)b',y')\right) + (1-\psi)q_D(b',y')\right]$$

Default: problema del acreedor

Precio de la deuda

- Si mañana no hay default cobro
  - κ del cupón
  - $(1-\rho)q'$ de la deuda no depreciada
    - $q' = q(b'', y')$
- Si hay default me quedo con $(1-\hbar)$ bonos defaulteados

$$R(b,y) = \kappa + (1-\rho)q(g_b(b,y),y)$$

$$q(b',y) = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}\left[(1-\mathbb{1}_D(b',y'))R(b',y') + \mathbb{1}_D(b',y')(1-\hbar)q_D((1-\hbar)b',y')\right]$$

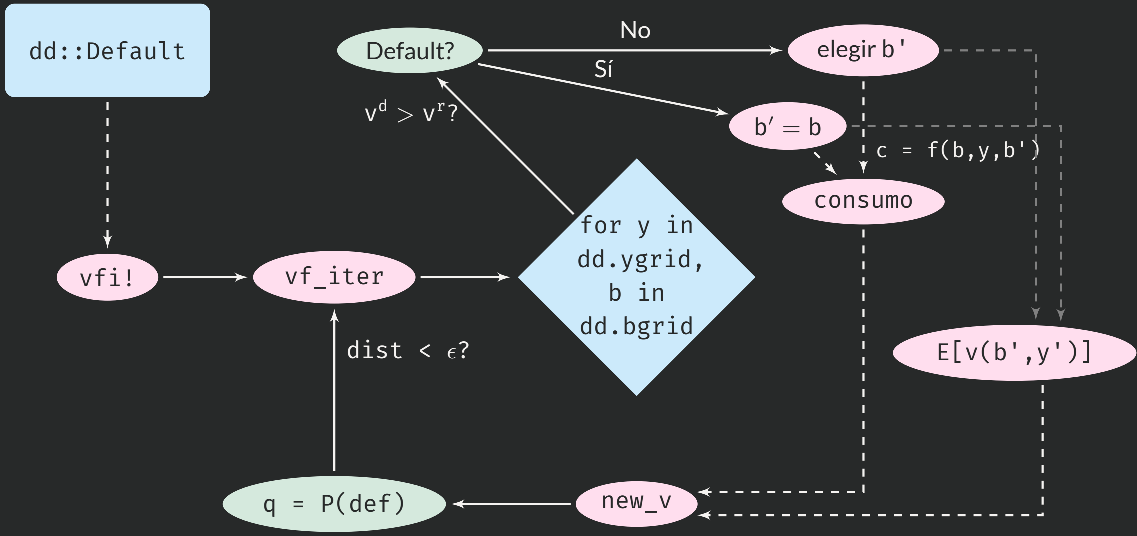
$$q_D(b',y) = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}\left[\psi\left((1-\mathbb{1}_D(b',y'))R(b',y') + \mathbb{1}_D(b',y')(1-\hbar)q_D((1-\hbar)b',y')\right) + (1-\psi)q_D(b',y')\right]$$

Estrategias de resolución

- Estilo equilibrio general
  - Dadas funciones $q(b', y)$, $q_D(b', y)$, iterar sobre la función de valor
  - Actualizar q, q_D usando las políticas de default
  - Iterar
- Estilo teoría de juegos
  - Inicializar v, q en un período T lejano
  - Encontrar q consistentes con la política implícita en v (una vez!)
  - Actualizar v dado q
  - Iterar 'hacia el pasado' hasta convergencia

... Equilibrio recursivo (perfecto de Markov) con estrategias indexadas por (b, y, d)

Pseudo-código



Simulador

`def_simul.jl`

Pseudo-simul

Necesitamos

- En cada período t
  - Entro sabiendo b_t, y_t y si estoy en default d_t
  - Con las funciones de política, puedo calcular emisión b'_t y consumo c_t
  - Si estoy en default $b'_t = b_t$, si no, puedo calcular $q(b'_t, y_t)$
- Entre t y $t+1$
  - Realizar dos shocks $\epsilon_{t+1} \sim \mathcal{N}(0,1)$ y $\xi_{t+1} \sim \mathcal{U}(0,1)$
  - Ahora, $\log y_{t+1} = \rho_y \log y_t + \sigma_y \epsilon_{t+1}$
  - Defaulteo en $t+1$ si $\xi_{t+1} < \mathbb{P}(d_{t+1}) = d(b'_{t+1}, y_{t+1})$
  - Si estaba en repago en t pero voy a defaultear en $t+1$, $b_{t+1} = (1-\hbar)b'_t$, si no, $b_{t+1} = b'_t$

- Para manejar todo esto
  - Un vector para guardar cada serie de tiempo
  - Interpoladores para todas las reglas de decisión