

Macroeconomía Internacional

Francisco Roldán
IMF

September 2023

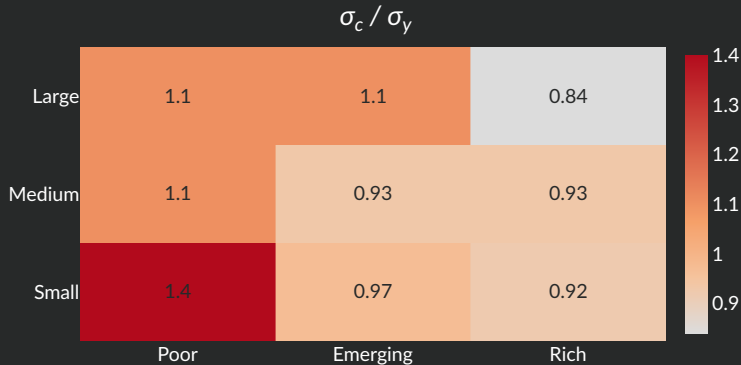
The views expressed herein are those of the authors and should not be attributed to the IMF,
its Executive Board, or its management.

1. Economías emergentes \neq avanzadas
2. Excusa para métodos

$$v = u + \beta v$$

Macro Internacional

1. Economías emergentes \neq avanzadas



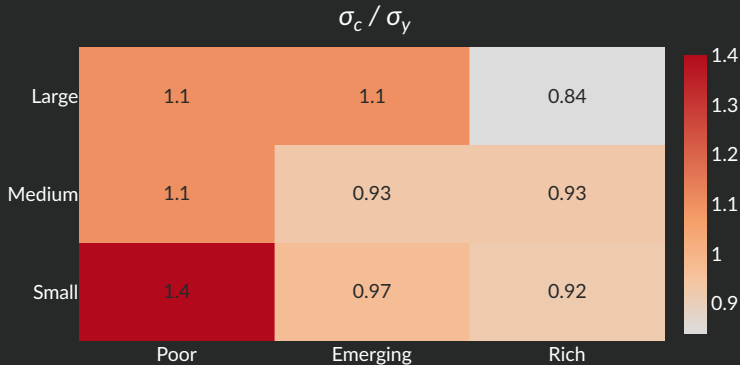
Fuente: Schmitt-Grohé and Uribe (2020)

2. Excusa para métodos

$$v = u + \beta v$$

Macro Internacional

1. Economías emergentes \neq avanzadas



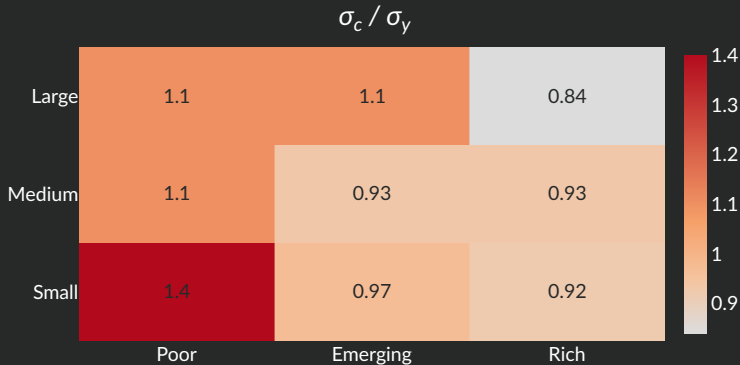
Fuente: Schmitt-Grohé and Uribe (2020)

2. Excusa para métodos

$$v = u + \beta v$$

Macro Internacional

1. Economías emergentes \neq avanzadas



Fuente: Schmitt-Grohé and Uribe (2020)

2. Excusa para métodos

$$v = u + \beta v$$

Tres modelos

1. RBC con **default** (Arellano, 2008)
 - ... La deuda se paga con el valor presente del superávit, pero cuándo se paga la deuda?
2. Modelos con **rigideces** nominales (Schmitt-Grohé y Uribe, 2016)
 - ... Tipo de cambio, externalidades de demanda
3. Deflación fisheriana y **sudden stops** (Bianchi, 2011)
 - ... Cómo el precio del colateral amplifica la salida de capitales

Consistencia temporal (Jones, 1993)

... Como escribir problemas de control óptimo de forma recursiva

Tres modelos

1. RBC con **default** (Arellano, 2008)
 - ... La deuda se paga con el valor presente del superávit, pero cuándo se paga la deuda?
2. Modelos con **rigideces** nominales (Schmitt-Grohé y Uribe, 2016)
 - ... Tipo de cambio, externalidades de demanda
3. Deflación fisheriana y **sudden stops** (Bianchi, 2011)
 - ... Cómo el precio del colateral amplifica la salida de capitales

Consistencia temporal (Chang, 1997)

Como escribir problemas de control óptimo de forma recursiva

Tres modelos

1. RBC con **default** (Arellano, 2008)
 - ... La deuda se paga con el valor presente del superávit, pero cuándo se paga la deuda?
2. Modelos con **rigideces** nominales (Schmitt-Grohé y Uribe, 2016)
 - ... Tipo de cambio, externalidades de demanda
3. Deflación fisheriana y **sudden stops** (Bianchi, 2011)
 - ... Cómo el precio del colateral amplifica la salida de capitales

Consistencia temporal

Como escribir problemas de control óptimo de forma recursiva

Tres modelos

1. RBC con **default** (Arellano, 2008)
 - ... La deuda se paga con el valor presente del superávit, pero cuándo se paga la deuda?
2. Modelos con **rigideces** nominales (Schmitt-Grohé y Uribe, 2016)
 - ... Tipo de cambio, externalidades de demanda
3. Deflación fisheriana y **sudden stops** (Bianchi, 2011)
 - ... Cómo el precio del colateral amplifica la salida de capitales
4. Consistencia temporal (Chang, 1999)
 - ... Cómo escribir problemas de control óptimo de forma recursiva

1. Discusión **no** exhaustiva de la mecánica de los modelos

2. Foco en aplicación **cuantitativa**

... Códigos para resolver, simular, calibrar, graficar

Por qué?

3. Julia

• Iteración en la función de valor

1. Discusión **no** exhaustiva de la mecánica de los modelos

2. Foco en aplicación **cuantitativa**

... Códigos para resolver, simular, calibrar, graficar

Por qué?

3. Julia


· Iteración en la función de valor

1. Discusión **no** exhaustiva de la mecánica de los modelos

2. Foco en aplicación **cuantitativa**

... Códigos para resolver, simular, calibrar, graficar

Por qué?

3. Julia 


- Iteración en la función de valor

1. Discusión **no** exhaustiva de la mecánica de los modelos

2. Foco en aplicación **cuantitativa**

... Códigos para resolver, simular, calibrar, graficar

Por qué?

3. Julia 

- Iteración en la función de valor

Nosotros

- Teóricas
 - Modelos, algoritmos
- Prácticas
 - Implementación en la compu

Ustedes

[No representation without taxation]

- Presentaciones **cortas**
- Guías de ejercicios

Nosotros

- Teóricas
 - Modelos, algoritmos
- Prácticas
 - Implementación en la compu

Ustedes

[No representation without taxation]

- Presentaciones **cortas**
- Guías de ejercicios

- Repaso de programación dinámica

- ... McCall (1970)

- ... Problema de la torta

- Estructura de implementación numérica

$$V = u + \beta V$$

- “qué hacer?”

es más difícil que

- “qué hacer hoy?”

entendiendo cómo vas a reaccionar después

- Repaso de programación dinámica

- ... McCall (1970)

- ... Problema de la torta

- Estructura de implementación numérica

$$v = u + \beta v$$

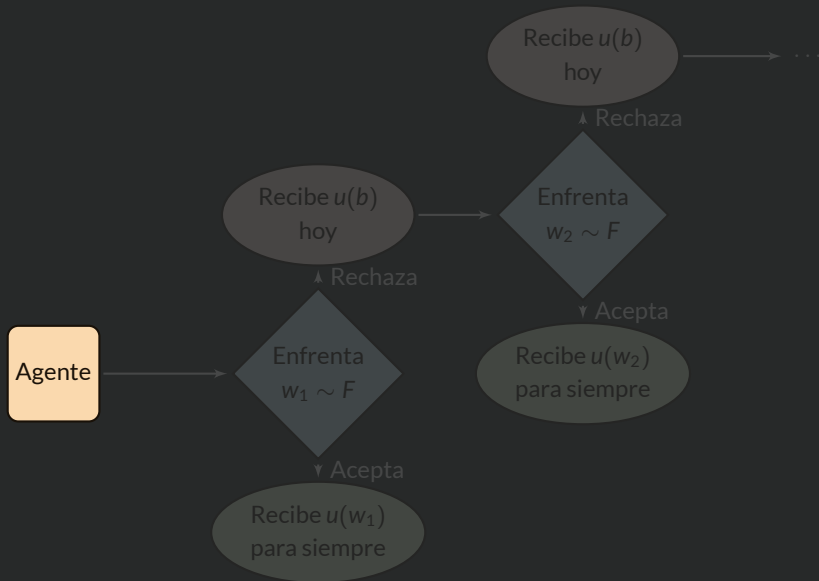
- “qué hacer?”
es más difícil que
- “qué hacer hoy?”
entendiendo cómo vas a
reaccionar después

Programación Dinámica: Búsqueda

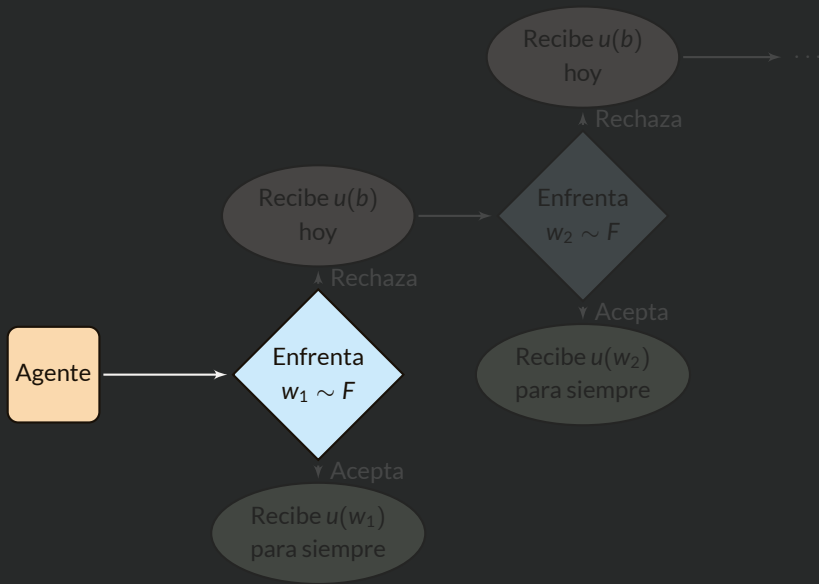
- Un agente busca trabajo.
- Preferencias standard: utilidad u , descuento β .
- Los trabajos son heterogéneos y sólo difieren en el salario que pagan.
- Cada período llega una oferta de trabajo $w \stackrel{iid}{\sim} F(\cdot)$
- Sólo se puede aceptar un trabajo. El agente recibe b mientras busca
- Cómo decide el agente qué trabajo aceptar?

- Un agente busca trabajo.
- Preferencias standard: utilidad u , descuento β .
- Los trabajos son heterogéneos y sólo difieren en el salario que pagan.
- Cada período llega una oferta de trabajo $w \stackrel{iid}{\sim} F(\cdot)$
- Sólo se puede aceptar un trabajo. El agente recibe b mientras busca
- Cómo decide el agente qué trabajo aceptar?

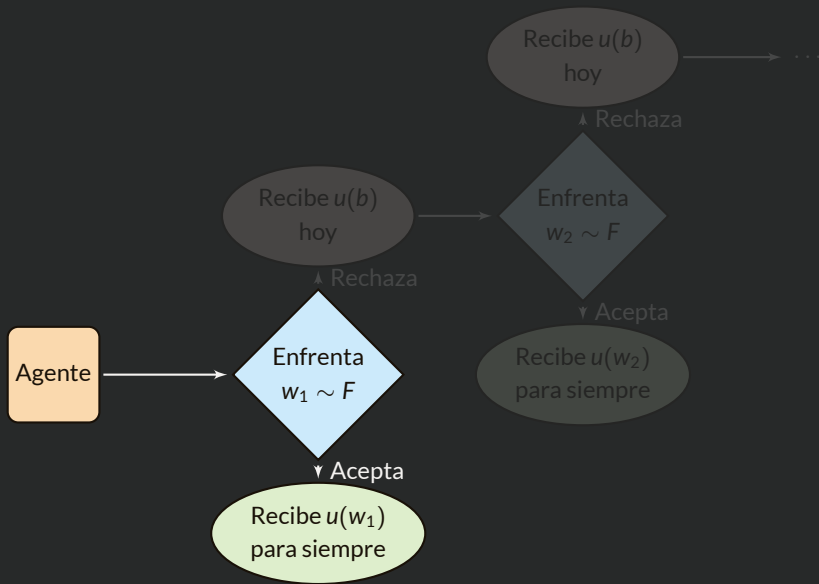
McCall (1970) con un árbol difícil



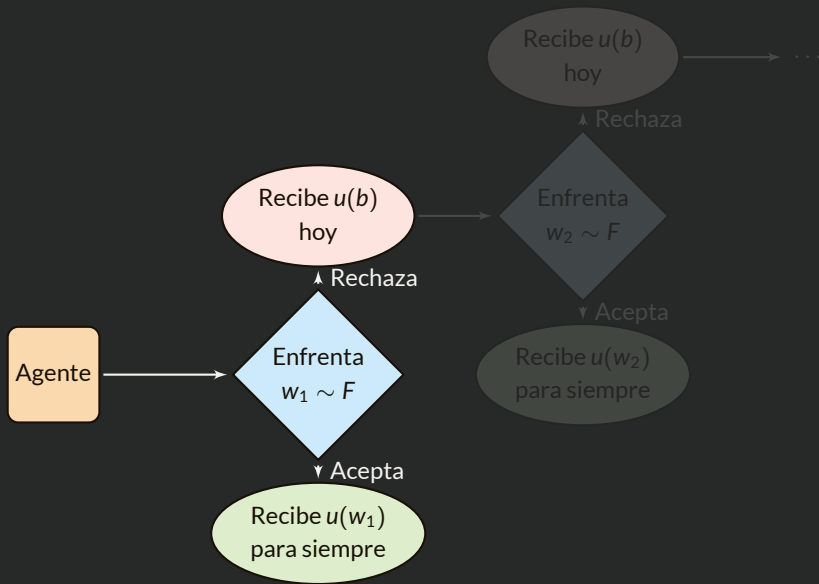
McCall (1970) con un árbol difícil



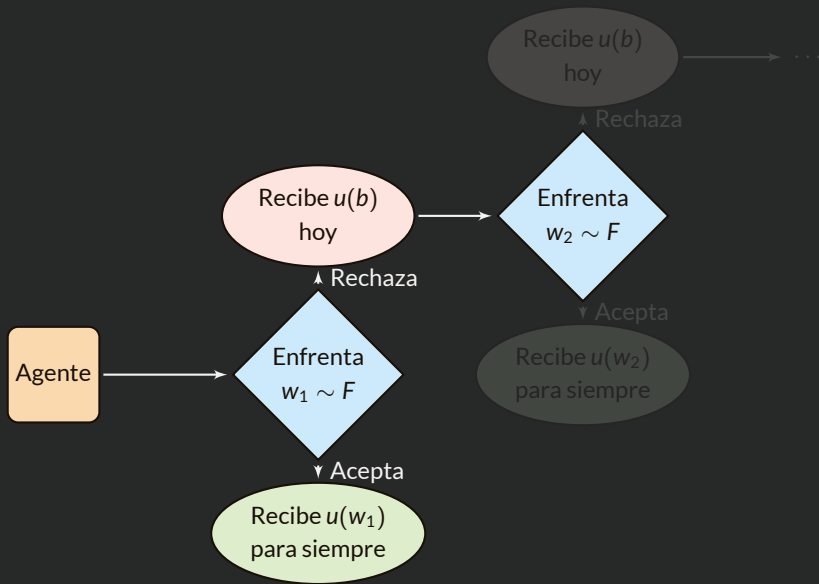
McCall (1970) con un árbol difícil



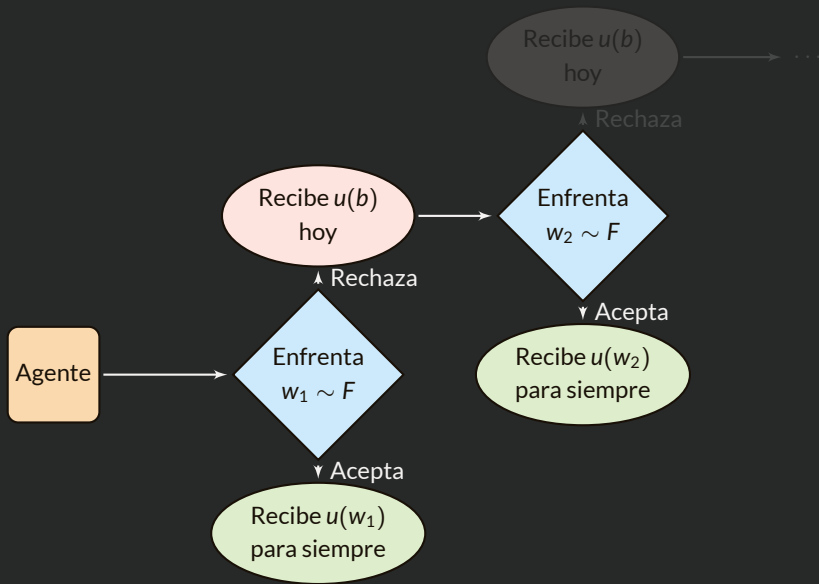
McCall (1970) con un árbol difícil



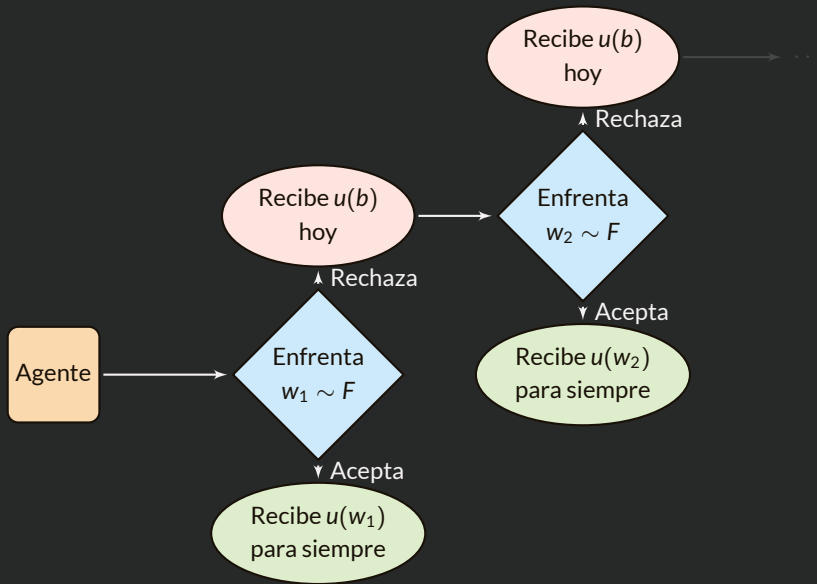
McCall (1970) con un árbol difícil



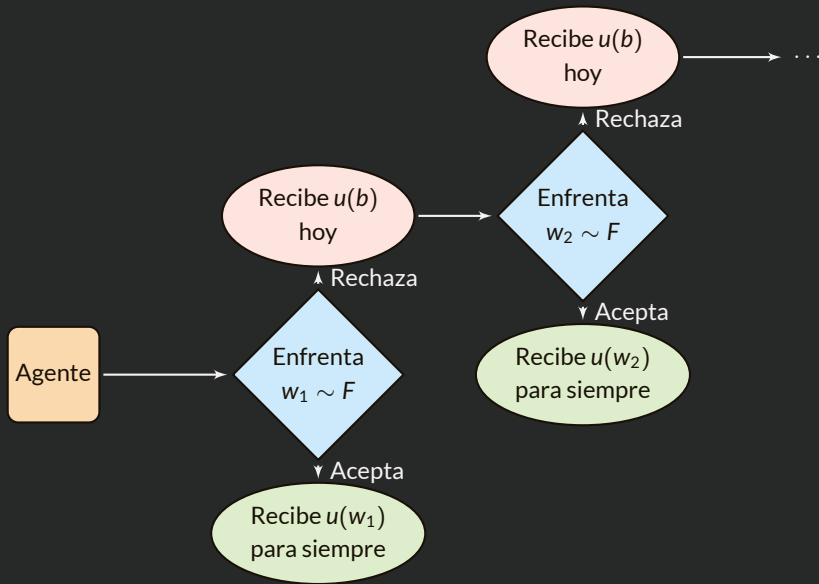
McCall (1970) con un árbol difícil



McCall (1970) con un árbol difícil



McCall (1970) con un árbol difícil



Problema del agente:

$$V = \max_T \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{T-1} \beta^t u(b) + \sum_{t=T}^{\infty} \beta^t u(w_T) \right]$$

sujeto a $w_t \stackrel{iid}{\sim} F(\cdot)$

T debe ser adaptado a $\mathcal{F}(\{w_t\})$

- T es una función de los salarios w_t sacados antes de T .
- Cómo elijo T ? En qué conjunto vive T ?Cuál es la CPO?

McCall (1970) escrito difícil

Problema del agente:

$$V = \max_T \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{T-1} \beta^t u(b) + \sum_{t=T}^{\infty} \beta^t u(w_T) \right]$$

sujeto a $w_t \stackrel{iid}{\sim} F(\cdot)$

T debe ser adaptado a $\mathcal{F}(\{w_t\})$

- T es una función de los salarios w_t sacados antes de T .
- Cómo elijo T ? En qué conjunto vive T ? Cuál es la CPO?

Problema del agente:

$$V = \max_T \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{T-1} \beta^t u(b) + \sum_{t=T}^{\infty} \beta^t u(w_T) \right]$$

sujeto a $w_t \stackrel{iid}{\sim} F(\cdot)$

T debe ser adaptado a $\mathcal{F}(\{w_t\})$

- T es una función de los salarios w_t sacados antes de T .
- Cómo elijo T ? En qué conjunto vive T ?Cuál es la CPO?

COME TO THE
DARK
SIDE



WE HAVE COOKIES

- En t , si todavía no acepté una oferta, **después** de ver w_t

$$V_t = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w_t) & \text{si acepto} \\ u(b) + \beta \max_T \mathbb{E} \left[\sum_{j=0}^T \beta^j u(b) + \sum_{j=T}^{\infty} \beta^j u(w_T) \right] & \text{si rechazo} \end{cases}$$

- Así que

$$V_t = \max \left\{ u(b) + \beta \mathbb{E} [V_{t+1}] , R(w_t) \right\}$$

- MAGIA:** V_t no depende de t dado w_t

- En t , si todavía no acepté una oferta, **después** de ver w_t

$$V_t = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w_t) = R(w_t) & \text{si acepto} \\ u(b) + \beta \max_T \mathbb{E} \left[\sum_{j=0}^T \beta^j u(b) + \sum_{j=T}^{\infty} \beta^j u(w_T) \right] & \text{si rechazo} \end{cases}$$

- Así que

$$V_t = \max \left\{ u(b) + \beta \mathbb{E} [V_{t+1}] , R(w_t) \right\}$$

- MAGIA:** V_t no depende de t dado w_t

- En t , si todavía no acepté una oferta, **después** de ver w_t

$$V_t = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w_t) = R(w_t) & \text{si acepto} \\ u(b) + \beta \max_T \mathbb{E} \left[\sum_{j=0}^T \beta^j u(b) + \sum_{j=T}^{\infty} \beta^j u(w_T) \right] & \text{si rechazo} \end{cases}$$

- Así que

$$V_t = \max \left\{ u(b) + \beta \mathbb{E} [V_{t+1}] , R(w_t) \right\}$$

- MAGIA:** V_t no depende de t dado w_t

- En t , si todavía no acepté una oferta, **después** de ver w_t

$$V_t = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w_t) = R(w_t) & \text{si acepto} \\ u(b) + \beta \max_T \mathbb{E} \left[\sum_{j=0}^T \beta^j u(b) + \sum_{j=T}^{\infty} \beta^j u(w_T) \right] & \text{si rechazo} \end{cases}$$

- Así que

$$V_t = \max \left\{ u(b) + \beta \mathbb{E} [V_{t+1}], R(w_t) \right\}$$

- MAGIA:** V_t no depende de t dado w_t

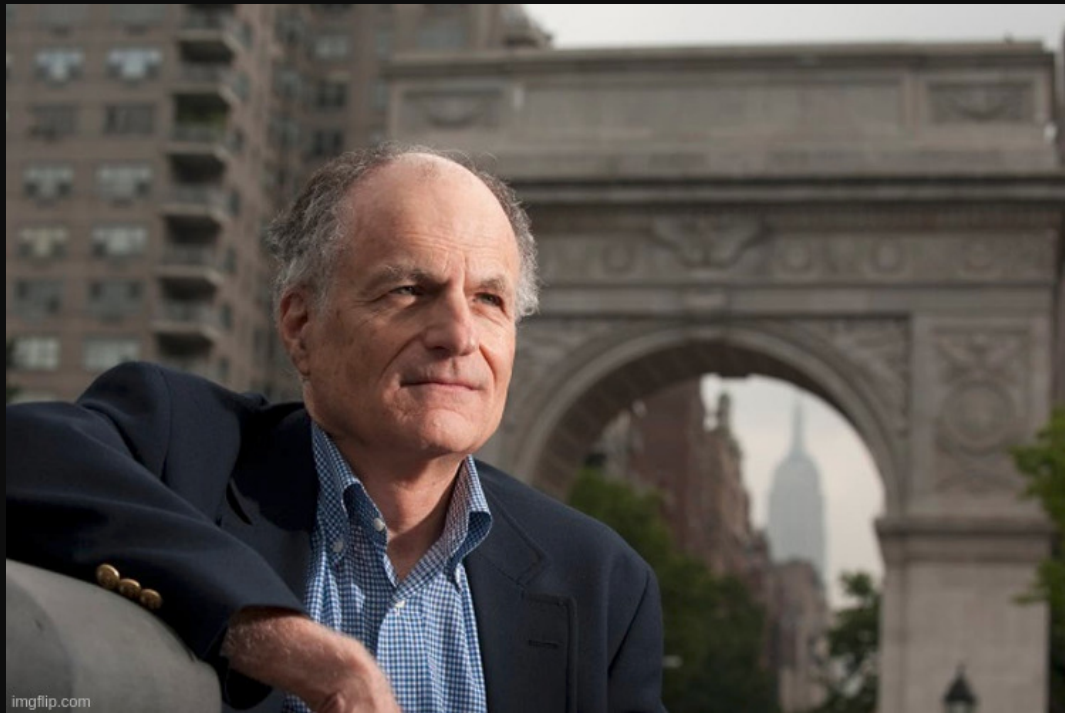
- En t , si todavía no acepté una oferta, **después** de ver w_t

$$V_t = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w_t) = R(w_t) & \text{si acepto} \\ u(b) + \beta \max_T \mathbb{E} \left[\sum_{j=0}^T \beta^j u(b) + \sum_{j=T}^{\infty} \beta^j u(w_T) \right] & \text{si rechazo} \end{cases}$$

- Así que

$$V_t = \max \left\{ u(b) + \beta \mathbb{E} [V_{t+1}], R(w_t) \right\}$$

- MAGIA:** V_t no depende de t dado w_t



A middle-aged man with thinning hair, wearing a dark blue suit jacket over a blue and white checkered shirt, is leaning on a light-colored stone railing. He is looking off to the side with a thoughtful expression. The background is a blurred cityscape featuring a large, ornate stone building with classical architectural details, possibly a government or institutional building. The lighting suggests it's daytime.

**FINDING THE
STATE IS AN ART**

$$V(w_t) = \max \left\{ u(b) + \beta \mathbb{E} [V(w_{t+1})], R(w_t) \right\}$$

- Programación dinámica **a mano**

$$R(w) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w)$$

$$V(w_t) = \max \left\{ u(b) + \beta \mathbb{E} [V(w_{t+1})], R(w_t) \right\}$$

- Programación dinámica **a mano**

$$R(w) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w)$$

$$V(w_t) = \max \left\{ u(b) + \beta \mathbb{E} [V(w_{t+1})], R(w_t) \right\}$$

- Programación dinámica **a mano**

$$R(w) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w) = u(w) + \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j u(w)$$

$$V(w_t) = \max \left\{ u(b) + \beta \mathbb{E} [V(w_{t+1})], R(w_t) \right\}$$

- Programación dinámica **a mano**

$$\begin{aligned} R(w) &= \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w) = u(w) + \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j u(w) \\ &= u(w) + \beta \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w) \end{aligned}$$

$$V(w_t) = \max \left\{ u(b) + \beta \mathbb{E} [V(w_{t+1})], R(w_t) \right\}$$

- Programación dinámica **a mano**

$$\begin{aligned} R(w) &= \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w) = u(w) + \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j u(w) \\ &= u(w) + \beta \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w) \end{aligned}$$

$$V(w_t) = \max \left\{ u(b) + \beta \mathbb{E} [V(w_{t+1})], R(w_t) \right\}$$

- Programación dinámica **a mano**

$$\begin{aligned} R(w) &= \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w) = u(w) + \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j u(w) \\ &= u(w) + \beta \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w) = u(w) + \beta R(w) \end{aligned}$$

$$V(w_t) = \max \left\{ u(b) + \beta \mathbb{E} [V(w_{t+1})], R(w_t) \right\}$$

- Programación dinámica **a mano**

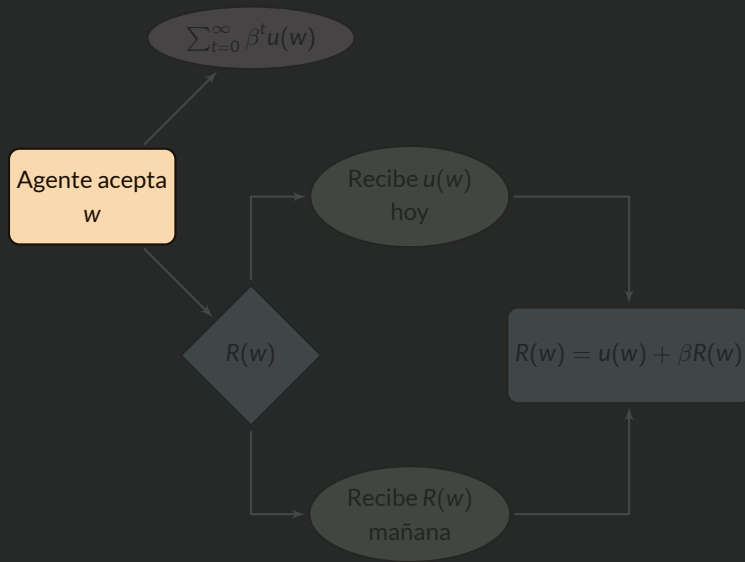
$$\begin{aligned} R(w) &= \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w) = u(w) + \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j u(w) \\ &= u(w) + \beta \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w) = u(w) + \beta R(w) \\ &= \frac{u(w)}{1 - \beta} \end{aligned}$$

$$V(w_t) = \max \left\{ u(b) + \beta \mathbb{E} [V(w_{t+1})], R(w_t) \right\}$$

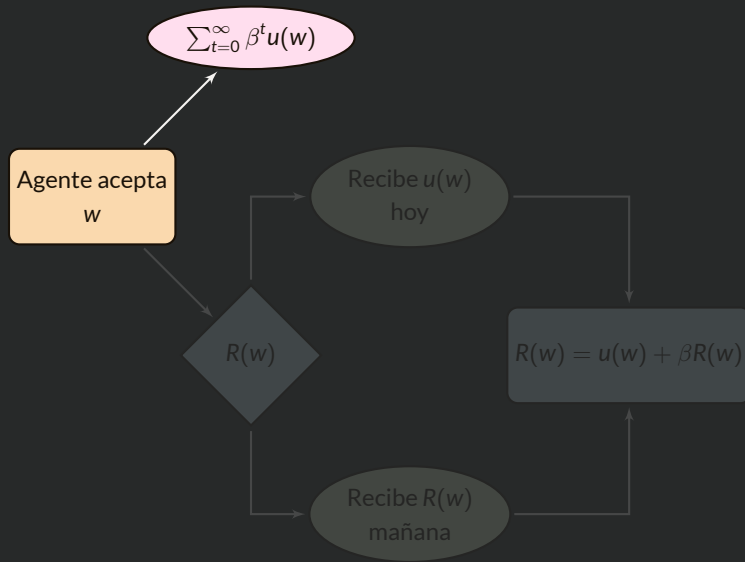
- Programación dinámica **a mano**

$$\begin{aligned} R(w) &= \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w) = u(w) + \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j u(w) \\ &= u(w) + \beta \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(w) = u(w) + \beta R(w) \\ &= \frac{u(w)}{1 - \beta} \end{aligned}$$

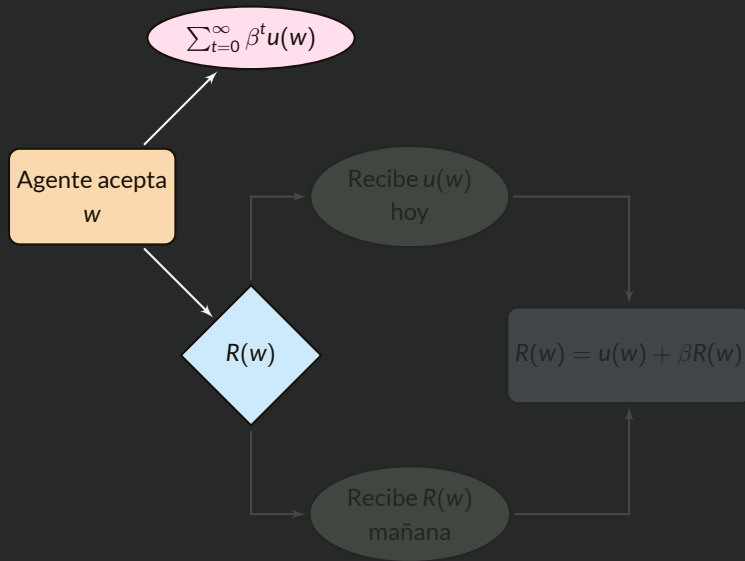
Aceptar una oferta: árbol recursivo



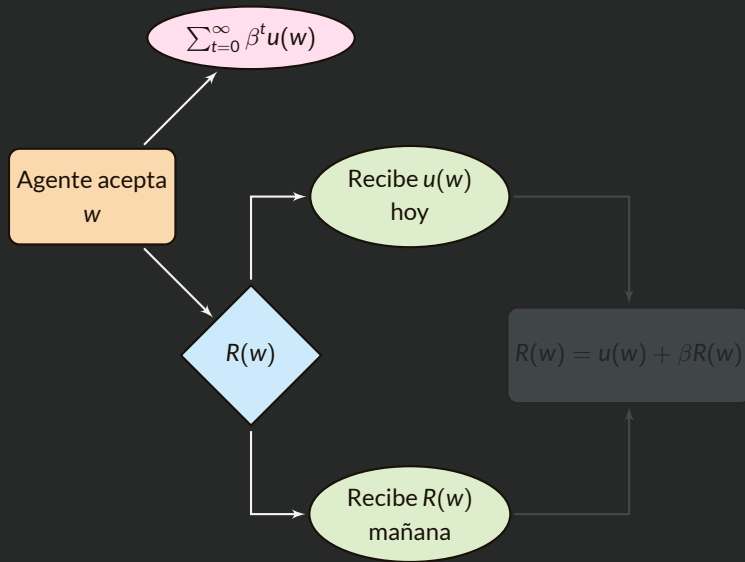
Aceptar una oferta: árbol recursivo



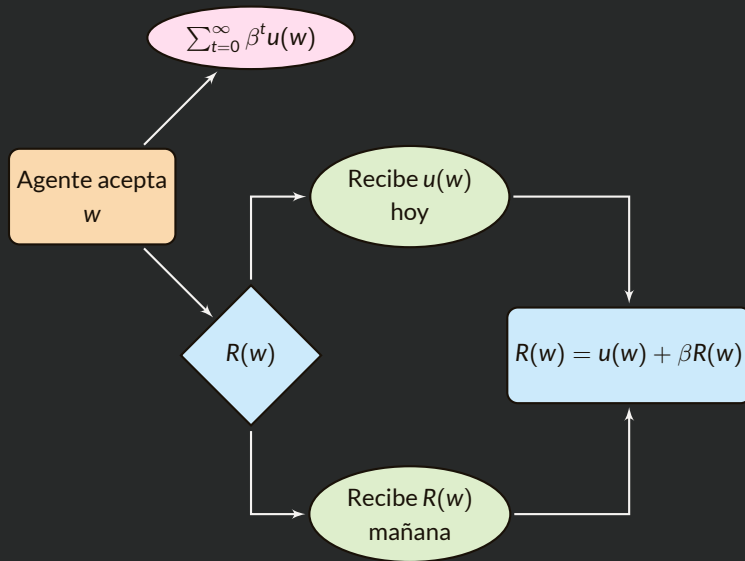
Aceptar una oferta: árbol recursivo



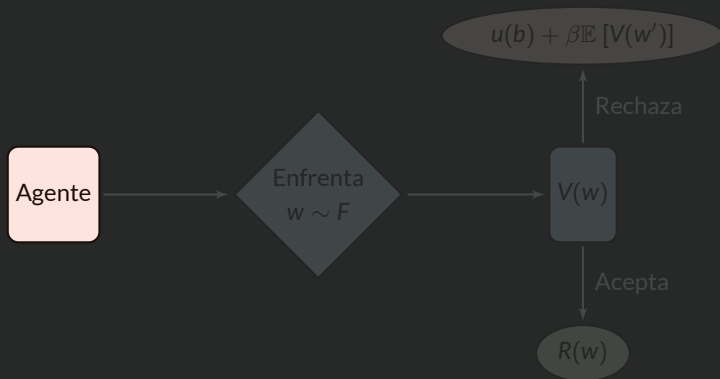
Aceptar una oferta: árbol recursivo



Aceptar una oferta: árbol recursivo



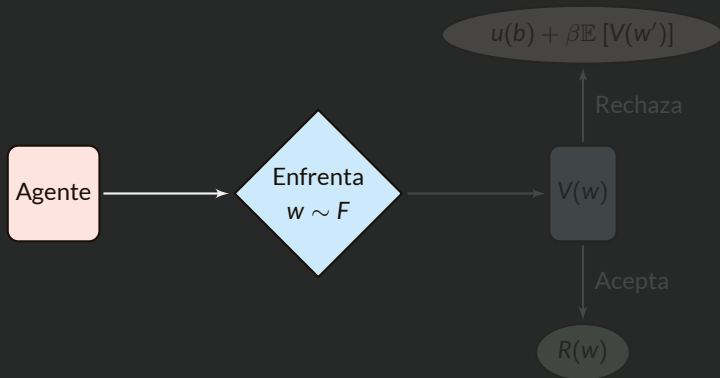
McCall (1970) con un árbol recursivo



Por lo tanto

$$V(w) = \max \{ u(b) + \beta \mathbb{E} [V(w')] , R(w) \}$$

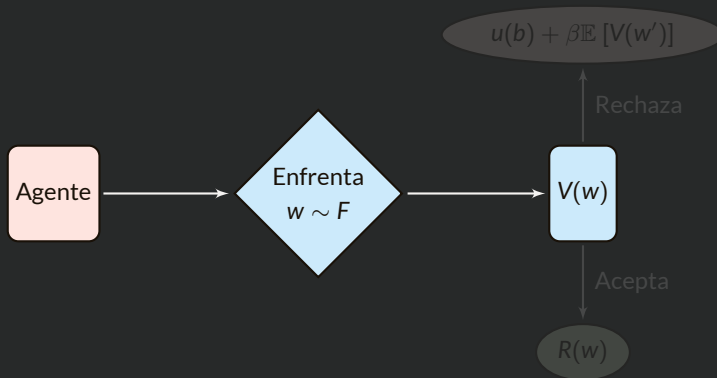
McCall (1970) con un árbol recursivo



Por lo tanto

$$V(w) = \max \{ u(b) + \beta \mathbb{E} [V(w')] , R(w) \}$$

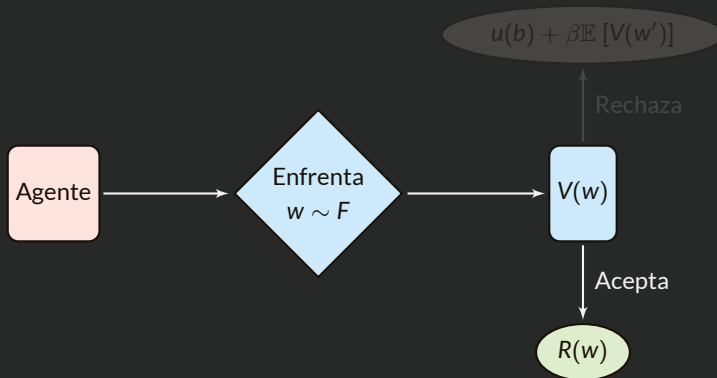
McCall (1970) con un árbol recursivo



Por lo tanto

$$V(w) = \max \{u(b) + \beta \mathbb{E} [V(w')], R(w)\}$$

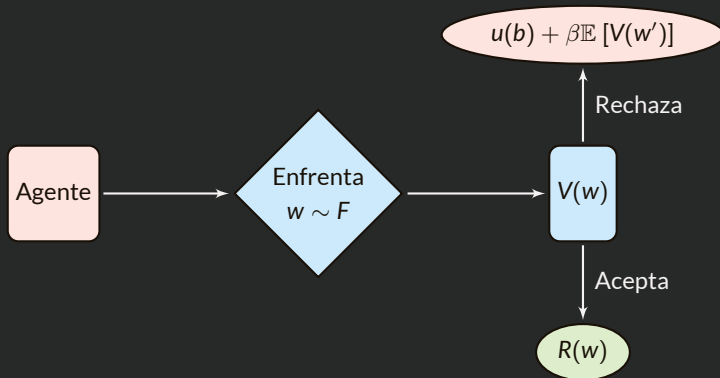
McCall (1970) con un árbol recursivo



Por lo tanto

$$V(w) = \max \{ u(b) + \beta \mathbb{E} [V(w')], R(w) \}$$

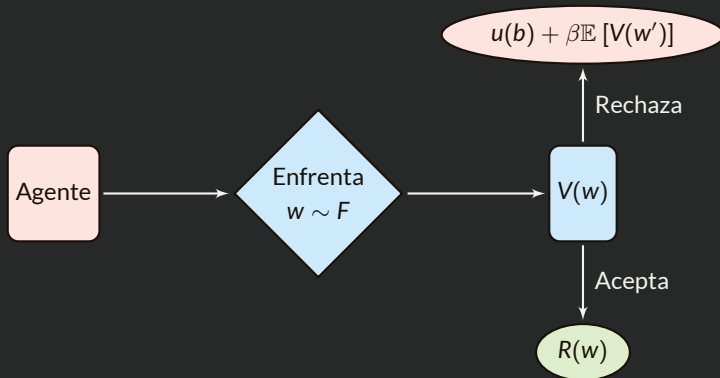
McCall (1970) con un árbol recursivo



Por lo tanto

$$V(w) = \max \{ u(b) + \beta \mathbb{E} [V(w')], R(w) \}$$

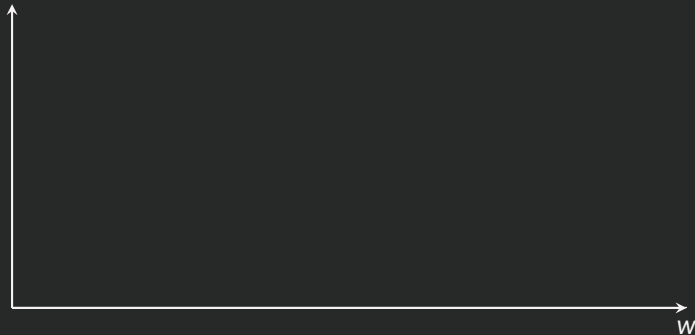
McCall (1970) con un árbol recursivo



Por lo tanto

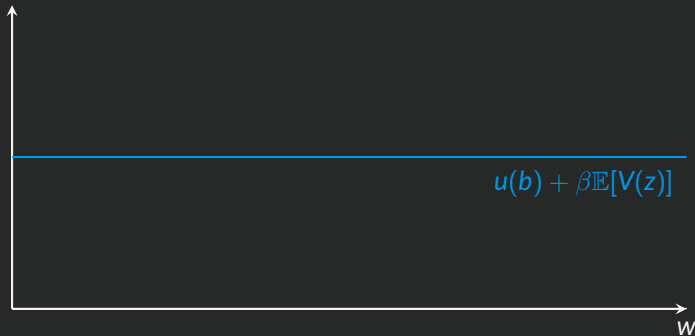
$$V(w) = \max \{u(b) + \beta \mathbb{E} [V(w')], R(w)\}$$

$$V(w) = \max \left\{ u(b) + \beta \mathbb{E}[V(z)], \frac{u(w)}{1 - \beta} \right\}$$



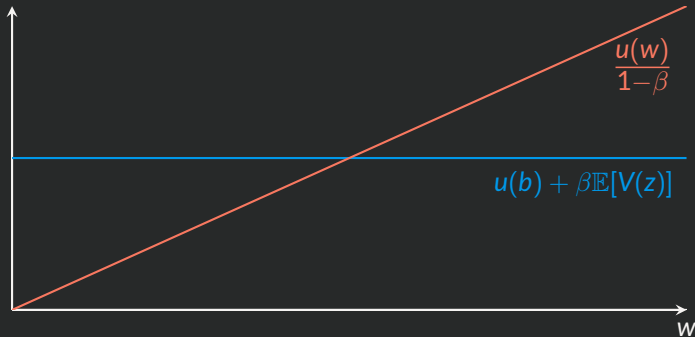
McCall (1970) escrito recursivo

$$V(w) = \max \left\{ u(b) + \beta \mathbb{E}[V(z)], \frac{u(w)}{1 - \beta} \right\}$$



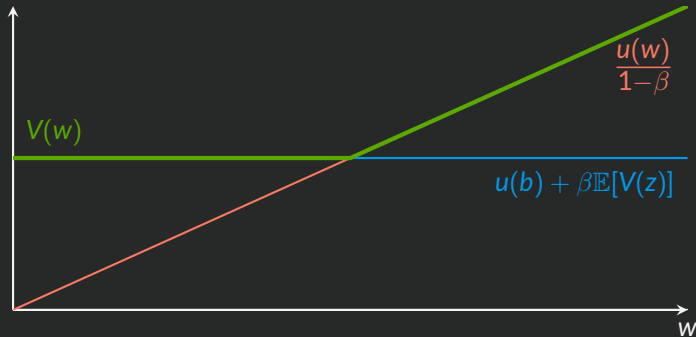
McCall (1970) escrito recursivo

$$V(w) = \max \left\{ u(b) + \beta \mathbb{E}[V(z)], \frac{u(w)}{1 - \beta} \right\}$$



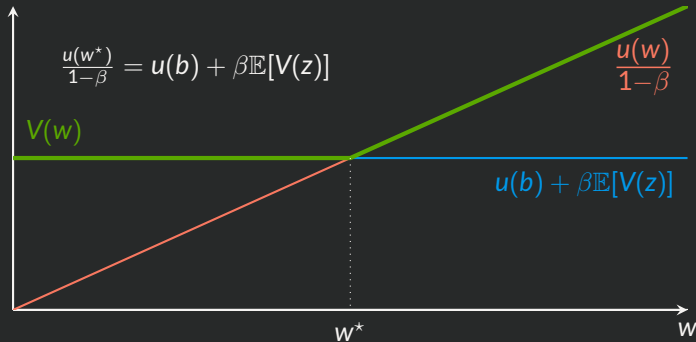
McCall (1970) escrito recursivo

$$V(w) = \max \left\{ u(b) + \beta \mathbb{E}[V(z)], \frac{u(w)}{1 - \beta} \right\}$$



McCall (1970) escrito recursivo

$$V(w) = \max \left\{ u(b) + \beta \mathbb{E}[V(z)], \frac{u(w)}{1-\beta} \right\}$$



$$V(w) = \max \left\{ u(b) + \beta \mathbb{E}[V(z)], \frac{u(w)}{1 - \beta} \right\}$$

Algoritmo

1. Inicializar: $V^0(w) = 0$
2. Usar V^0 del lado derecho, obtener $V^1(w) = \max \left\{ u(b) + 0, \frac{u(w)}{1 - \beta} \right\}$
3. Usar V^1 del lado derecho, obtener V^2
- ... Iterar hasta que $|V^n - V^{(n-1)}| \leq \epsilon$ (distancia entre funciones)

$$V(w) = \max \left\{ u(b) + \beta \mathbb{E}[V(z)], \frac{u(w)}{1 - \beta} \right\}$$

Algoritmo

1. Inicializar: $V^0(w) = 0$
2. Usar V^0 del lado derecho, obtener $V^1(w) = \max \left\{ u(b) + 0, \frac{u(w)}{1 - \beta} \right\}$
3. Usar V^1 del lado derecho, obtener V^2
- ... Iterar hasta que $|V^n - V^{(n-1)}| \leq \epsilon$ (distancia entre funciones)

$$V(w) = \max \left\{ u(b) + \beta \mathbb{E}[V(z)], \frac{u(w)}{1 - \beta} \right\}$$

Algoritmo

1. Inicializar: $V^0(w) = 0$
2. Usar V^0 del lado derecho, obtener $V^1(w) = \max \left\{ u(b) + 0, \frac{u(w)}{1 - \beta} \right\}$
3. Usar V^1 del lado derecho, obtener V^2
- ... Iterar hasta que $|V^n - V^{(n-1)}| \leq \epsilon$ (distancia entre funciones)

$$V(w) = \max \left\{ u(b) + \beta \mathbb{E}[V(z)], \frac{u(w)}{1 - \beta} \right\}$$

Algoritmo

1. Inicializar: $V^0(w) = 0$
2. Usar V^0 del lado derecho, obtener $V^1(w) = \max \left\{ u(b) + 0, \frac{u(w)}{1 - \beta} \right\}$
3. Usar V^1 del lado derecho, obtener V^2
- ... Iterar hasta que $|V^n - V^{(n-1)}| \leq \epsilon$ (distancia entre funciones)

$$V(w) = \max \left\{ u(b) + \beta \mathbb{E}[V(z)], \frac{u(w)}{1 - \beta} \right\}$$

Algoritmo

1. Inicializar: $V^0(w) = 0$
2. Usar V^0 del lado derecho, obtener $V^1(w) = \max \left\{ u(b) + 0, \frac{u(w)}{1 - \beta} \right\}$
3. Usar V^1 del lado derecho, obtener V^2
- ... Iterar hasta que $|V^n - V^{(n-1)}| \leq \epsilon$ (distancia entre funciones)

Programación Dinámica: Consumo/ahorro

Problema de la torta

- Un agente tiene una **torta** de tamaño K
- Preferencias standard: utilidad u , descuento β

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

$$\text{sujeto a } c_t + k_{t+1} = k_t$$

$$k_{t+1} \geq 0$$

- Y hagamos que $u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$

Problema de la torta

- Un agente tiene una **torta** de tamaño K
- Preferencias standard: utilidad u , descuento β

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\ \text{sujeto a} \quad & c_t + k_{t+1} = k_t \\ & k_{t+1} \geq 0 \end{aligned}$$

- Y hagamos que $u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$

CPOs

- Derivando contra c_t y k_{t+1}

$$\beta^t u'(c_t) = \lambda_t$$

$$\lambda_t = \lambda_{t+1}$$

- Así que

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})$$

$$\Rightarrow c_{t+1} = \beta^{-1} c_t$$

$$\Rightarrow c_t = c_0 \left(\beta^{-1} \right)^t$$

CPOs

- Derivando contra c_t y k_{t+1}

$$\beta^t u'(c_t) = \lambda_t$$

$$\lambda_t = \lambda_{t+1}$$

- Así que

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})$$

$$\implies c_{t+1} = \beta^{\frac{1}{\gamma}} c_t$$

$$\implies c_t = c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}} \right)^t$$

CPOs

- Derivando contra c_t y k_{t+1}

$$\beta^t u'(c_t) = \lambda_t$$

$$\lambda_t = \lambda_{t+1}$$

- Así que

$$c_t^{-\gamma} = \beta c_{t+1}^{-\gamma}$$

$$\implies c_{t+1} = \beta^{\frac{1}{\gamma}} c_t$$

$$\implies c_t = c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}} \right)^t$$

CPOs

- Derivando contra c_t y k_{t+1}

$$\beta^t u'(c_t) = \lambda_t$$

$$\lambda_t = \lambda_{t+1}$$

- Así que

$$c_t^{-\gamma} = \beta c_{t+1}^{-\gamma}$$

$$\implies c_{t+1} = \beta^{\frac{1}{\gamma}} c_t$$

$$\implies c_t = c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}} \right)^t$$

CPOs

- Derivando contra c_t y k_{t+1}

$$\beta^t u'(c_t) = \lambda_t$$

$$\lambda_t = \lambda_{t+1}$$

- Así que

$$c_t^{-\gamma} = \beta c_{t+1}^{-\gamma}$$

$$\implies c_{t+1} = \beta^{\frac{1}{\gamma}} c_t$$

$$\implies c_t = c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}} \right)^t$$

Problema de la torta

Tenemos

$$c_t = c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}} \right)^t$$

y

$$c_t + k_{t+1} = k_t \implies k_0 = c_0 + k_1 \implies k_0 = \sum_{s=0}^{\infty} c_s + k_{\infty}$$

Problema de la torta

Tenemos

$$c_t = c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}} \right)^t$$

y

$$c_t + k_{t+1} = k_t \implies k_0 = c_0 + k_1 \implies k_0 = \sum_{s=0}^t c_s + k_{t+1} \implies k_0 = \sum_{s=0}^{\infty} c_s + \lim_{t \rightarrow \infty} k_t$$

Problema de la torta

Tenemos

$$c_t = c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}} \right)^t$$

y

$$c_t + k_{t+1} = k_t \implies k_0 = c_0 + k_1 \implies k_0 = \sum_{s=0}^t c_s + k_{t+1} \implies k_0 = \sum_{t=0}^{\infty} c_t + \lim_{t \rightarrow \infty} k_t$$

así que

$$k_0 = \sum_{t=0}^{\infty} c_t$$

Problema de la torta

Tenemos

$$c_t = c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}} \right)^t$$

y

$$c_t + k_{t+1} = k_t \implies k_0 = c_0 + k_1 \implies k_0 = \sum_{s=0}^t c_s + k_{t+1} \implies k_0 = \sum_{t=0}^{\infty} c_t + \lim_{t \rightarrow \infty} k_t$$

así que

$$k_0 = \sum_{t=0}^{\infty} c_t = \sum_{t=0}^{\infty} c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}} \right)^t$$

Problema de la torta

Tenemos

$$c_t = c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}} \right)^t$$

y

$$c_t + k_{t+1} = k_t \implies k_0 = c_0 + k_1 \implies k_0 = \sum_{s=0}^t c_s + k_{t+1} \implies k_0 = \sum_{t=0}^{\infty} c_t + \lim_{t \rightarrow \infty} k_t$$

así que

$$k_0 = \sum_{t=0}^{\infty} c_t = \sum_{t=0}^{\infty} c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}} \right)^t = c_0 \sum_{t=0}^{\infty} \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}} \right)^t$$

Problema de la torta

Tenemos

$$c_t = c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}} \right)^t$$

y

$$c_t + k_{t+1} = k_t \implies k_0 = c_0 + k_1 \implies k_0 = \sum_{s=0}^t c_s + k_{t+1} \implies k_0 = \sum_{t=0}^{\infty} c_t + \lim_{t \rightarrow \infty} k_t$$

así que

$$k_0 = \sum_{t=0}^{\infty} c_t = \sum_{t=0}^{\infty} c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}} \right)^t = c_0 \sum_{t=0}^{\infty} \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}} \right)^t = c_0 \frac{1}{1 - \beta^{\frac{1}{\gamma}}}$$

Problema de la torta

Tenemos

$$c_t = c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}} \right)^t$$

y

$$c_t + k_{t+1} = k_t \implies k_0 = c_0 + k_1 \implies k_0 = \sum_{s=0}^t c_s + k_{t+1} \implies k_0 = \sum_{t=0}^{\infty} c_t + \lim_{t \rightarrow \infty} k_t$$

así que

$$k_0 = \sum_{t=0}^{\infty} c_t = \sum_{t=0}^{\infty} c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}} \right)^t = c_0 \sum_{t=0}^{\infty} \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}} \right)^t = c_0 \frac{1}{1 - \beta^{\frac{1}{\gamma}}}$$

Problema de la torta

Tenemos

$$c_t = c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}} \right)^t$$

y

$$c_t + k_{t+1} = k_t \implies k_0 = c_0 + k_1 \implies k_0 = \sum_{s=0}^t c_s + k_{t+1} \implies k_0 = \sum_{t=0}^{\infty} c_t + \lim_{t \rightarrow \infty} k_t$$

así que

$$k_0 = \sum_{t=0}^{\infty} c_t = \sum_{t=0}^{\infty} c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}} \right)^t = c_0 \sum_{t=0}^{\infty} \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}} \right)^t = c_0 \frac{1}{1 - \beta^{\frac{1}{\gamma}}}$$

Problema de la torta

Tenemos

$$c_t = c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}} \right)^t$$

y

$$c_t + k_{t+1} = k_t \implies k_0 = c_0 + k_1 \implies k_0 = \sum_{s=0}^t c_s + k_{t+1} \implies k_0 = \sum_{t=0}^{\infty} c_t + \lim_{t \rightarrow \infty} k_t$$

así que

$$k_0 = \sum_{t=0}^{\infty} c_t = \sum_{t=0}^{\infty} c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}} \right)^t = c_0 \sum_{t=0}^{\infty} \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}} \right)^t = c_0 \frac{1}{1 - \beta^{\frac{1}{\gamma}}}$$

Problema de la torta: a little knowledge of geometric sums. . .

Al final,

$$\begin{cases} c_t = c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}} \right)^t \\ k_0 = \frac{c_0}{1 - \beta^{\frac{1}{\gamma}}} \end{cases} \implies c_t = k_0 \left(1 - \beta^{\frac{1}{\gamma}} \right) \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}} \right)^t$$

Problema de la torta: a little knowledge of geometric sums. . .

Al final,

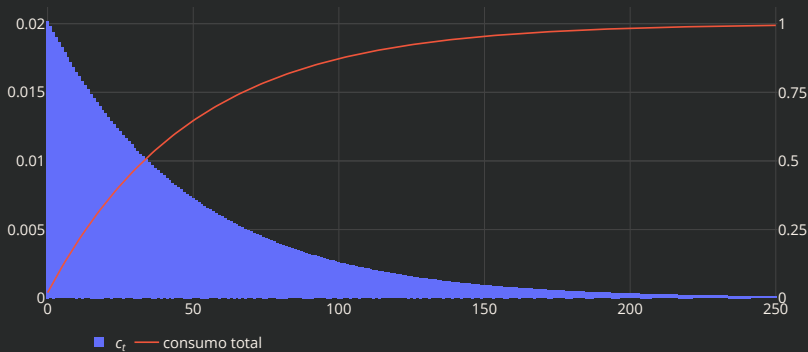
$$\begin{cases} c_t = c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}} \right)^t \\ k_0 = \frac{c_0}{1 - \beta^{\frac{1}{\gamma}}} \end{cases} \implies c_t = k_0 \left(1 - \beta^{\frac{1}{\gamma}} \right) \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}} \right)^t$$

Problema de la torta: a little knowledge of geometric sums. . .

Al final,

$$\begin{cases} c_t = c_0 \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}} \right)^t \\ k_0 = \frac{c_0}{1 - \beta^{\frac{1}{\gamma}}} \end{cases} \implies c_t = k_0 \left(1 - \beta^{\frac{1}{\gamma}} \right) \left(\beta^{\frac{1}{\gamma}} \right)^t$$

Problema de la torta ($\beta = 0.96$, $\gamma = 2$, $k = 1$)



Problema de la torta con

- La torta se va **podriendo**: $k_{t+1} = (k_t - c_t)(1 + r)$ si $r < 0$
- Llega **nueva** torta: $k_{t+1} = k_t - c_t + y_{t+1}$
- La nueva torta es **aleatoria** según una cadena de Markov $F(y'|y)$
- Puedo pedir torta **prestada**: $k_{t+1} \geq \bar{k}$

$$\max_{c_t, k_{t+1}} \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right]$$

$$\text{sujeto a } k_{t+1} + c_t = k_t(1 + r) + y_t$$

$$k_{t+1} \geq \bar{k}$$

- En general **no tiene** forma cerrada...

Problema de la torta con

- La torta se va **podriendo**: $k_{t+1} = (k_t - c_t)(1 + r)$ si $r < 0$
- Llega **nueva** torta: $k_{t+1} = k_t - c_t + y_{t+1}$
- La nueva torta es **aleatoria** según una cadena de Markov $F(y'|y)$
- Puedo pedir torta **prestada**: $k_{t+1} \geq \bar{k}$

$$\max_{c_t, k_{t+1}} \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right]$$

$$\text{sujeto a } k_{t+1} + c_t = k_t(1 + r) + y_t$$

$$k_{t+1} \geq \bar{k}$$

- En general **no tiene** forma cerrada...

Problema de la torta con

- La torta se va **podriendo**: $k_{t+1} = (k_t - c_t)(1 + r)$ si $r < 0$
- Llega **nueva** torta: $k_{t+1} = k_t - c_t + y_{t+1}$
- La nueva torta es **aleatoria** según una cadena de Markov $F(y'|y)$
- Puedo pedir torta **prestada**: $k_{t+1} \geq \bar{k}$

$$\max_{c_t, k_{t+1}} \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right]$$

$$\text{sujeto a } k_{t+1} + c_t = k_t(1 + r) + y_t$$

$$k_{t+1} \geq \bar{k}$$

- En general **no tiene** forma cerrada...

Problema de la torta con

- La torta se va **podriendo**: $k_{t+1} = (k_t - c_t)(1 + r)$ si $r < 0$
- Llega **nueva** torta: $k_{t+1} = k_t - c_t + y_{t+1}$
- La nueva torta es **aleatoria** según una cadena de Markov $F(y'|y)$
- Puedo pedir torta **prestada**: $k_{t+1} \geq \bar{k}$

$$\max_{c_t, k_{t+1}} \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right]$$

$$\text{sujeto a } k_{t+1} + c_t = k_t(1 + r) + y_t$$

$$k_{t+1} \geq \bar{k}$$

- En general **no tiene** forma cerrada. . .

Problema de la torta con

- La torta se va **podriendo**: $k_{t+1} = (k_t - c_t)(1 + r)$ si $r < 0$
- Llega **nueva** torta: $k_{t+1} = k_t - c_t + y_{t+1}$
- La nueva torta es **aleatoria** según una cadena de Markov $F(y'|y)$
- Puedo pedir torta **prestada**: $k_{t+1} \geq \bar{k}$

$$\max_{c_t, k_{t+1}} \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right]$$

$$\text{sujeto a } k_{t+1} + c_t = k_t(1 + r) + y_t$$

$$k_{t+1} \geq \bar{k}$$

- En general **no tiene** forma cerrada...

Problema de la torta con

- La torta se va **podriendo**: $k_{t+1} = (k_t - c_t)(1 + r)$ si $r < 0$
- Llega **nueva** torta: $k_{t+1} = k_t - c_t + y_{t+1}$
- La nueva torta es **aleatoria** según una cadena de Markov $F(y'|y)$
- Puedo pedir torta **prestada**: $k_{t+1} \geq \bar{k}$

$$\max_{c_t, k_{t+1}} \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right]$$

$$\text{sujeto a } k_{t+1} + c_t = k_t(1 + r) + y_t$$

$$k_{t+1} \geq \bar{k}$$

- En general **no tiene** forma cerrada...

Extensiones que necesitamos

Problema de la torta con

- La torta se va **podriendo**: $k_{t+1} = (k_t - c_t)(1 + r)$ si $r < 0$
- Llega **nueva** torta: $k_{t+1} = k_t - c_t + y_{t+1}$
- La nueva torta es **aleatoria** según una cadena de Markov $F(y'|y)$
- Puedo pedir torta **prestada**: $k_{t+1} \geq \bar{k}$

$$\max_{c_t, k_{t+1}} \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right]$$

$$\text{sujeto a } k_{t+1} + c_t = k_t(1 + r) + y_t$$

$$k_{t+1} \geq \bar{k}$$

- En general **no tiene** forma cerrada. . .

Problema de la torta recursivo

- Otra vez llamemos V_t al valor del problema en t

$$V_t = \max_{c_{t+s}, k_{t+s}} \mathbb{E}_t \left[\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s u(c_{t+s}) \right] = \max_{c_t, k_{t+1}} u(c_t) + \beta \mathbb{E}_t [V_{t+1}]$$

$$\text{sujeto a } k_{t+1} + c_t = k_t(1+r) + y_t$$

$$k_{t+2} + c_{t+1} = k_{t+1}(1+r) + y_{t+1}$$

...

$$k_{t+s+1} + c_{t+s} = k_{t+s}(1+r) + y_{t+s}$$

$$k_{t+s+1} \geq \bar{k}$$

Problema de la torta recursivo

- Otra vez llamemos V_t al valor del problema en t

$$V_t = \max_{c_{t+s}, k_{t+s}} \mathbb{E}_t \left[\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s u(c_{t+s}) \right] = \max_{c_t, k_{t+1}} u(c_t) + \beta \mathbb{E}_t [V_{t+1}]$$

$$\text{sujeto a } k_{t+1} + c_t = k_t(1+r) + y_t$$

$$k_{t+2} + c_{t+1} = k_{t+1}(1+r) + y_{t+1}$$

...

$$k_{t+s+1} + c_{t+s} = k_{t+s}(1+r) + y_{t+s}$$

$$k_{t+s+1} \geq \bar{k}$$

Problema de la torta recursivo

- Otra vez llamemos V_t al valor del problema en t

$$V_t = \max_{c_{t+s}, k_{t+s}} \mathbb{E}_t \left[\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s u(c_{t+s}) \right] = \max_{c_t, k_{t+1}} u(c_t) + \beta \mathbb{E}_t [V_{t+1}]$$

$$\text{sujeto a } k_{t+1} + c_t = k_t(1+r) + y_t$$

$$k_{t+2} + c_{t+1} = k_{t+1}(1+r) + y_{t+1}$$

...

$$k_{t+s+1} + c_{t+s} = k_{t+s}(1+r) + y_{t+s}$$

$$k_{t+s+1} \geq \bar{k}$$

Problema de la torta recursivo

- Otra vez llamemos V_t al valor del problema en t

$$V_t = \max_{c_{t+s}, k_{t+s}} \mathbb{E}_t \left[\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s u(c_{t+s}) \right] = \max_{c_t, k_{t+1}} u(c_t) + \beta \mathbb{E}_t [V_{t+1}]$$

$$\text{sujeto a } k_{t+1} + c_t = k_t(1+r) + y_t$$

$$k_{t+2} + c_{t+1} = k_{t+1}(1+r) + y_{t+1}$$

...

$$k_{t+s+1} + c_{t+s} = k_{t+s}(1+r) + y_{t+s}$$

$$k_{t+s+1} \geq \bar{k}$$

Problema de la torta recursivo

$$v(k, y) = \max_{c, k'} u(c) + \beta \mathbb{E} [v(k', y') | y]$$

$$\text{sujeto a } c + k' = y + k(1 + r)$$

$$k' \geq \bar{k}$$

Problema de la torta recursivo

$$v(k, y) = \max_{c, k'} u(c) + \beta \mathbb{E} [v(k', y') | y]$$

$$\text{sujeto a } c + k' = y + k(1 + r)$$

$$k' \geq \bar{k}$$

- La función v es desconocida
- Podemos
 1. meter una f cualquiera del lado derecho (reemplazar v por f)
 2. usar la ec. de Bellman para encontrar una nueva f
 3. comparar la f que entró con la f que salió
 4. usar la f que salió del lado derecho

Problema de la torta recursivo

$$v(k, y) = \max_{c, k'} u(c) + \beta \mathbb{E} [v(k', y') | y]$$

$$\text{sujeto a } c + k' = y + k(1 + r)$$

$$k' \geq \bar{k}$$

- La función v es desconocida
- Podemos
 1. meter una f cualquiera del lado derecho (reemplazar v por f)
 2. usar la ec. de Bellman para encontrar una nueva f
 3. comparar la f que entró con la f que salió
 4. usar la f que salió del lado derecho

Problema de la torta recursivo

$$v(k, y) = \max_{c, k'} u(c) + \beta \mathbb{E} [v(k', y') | y]$$

$$\text{sujeto a } c + k' = y + k(1 + r)$$

$$k' \geq \bar{k}$$

- La función v es desconocida
- Podemos
 1. meter una f cualquiera del lado derecho (reemplazar v por f)
 2. usar la ec. de Bellman para encontrar una nueva f
 3. comparar la f que entró con la f que salió
 4. usar la f que salió del lado derecho

Problema de la torta recursivo

$$v(k, y) = \max_{c, k'} u(c) + \beta \mathbb{E} [v(k', y') | y]$$

$$\text{sujeto a } c + k' = y + k(1 + r)$$

$$k' \geq \bar{k}$$

- La función v es desconocida
- Podemos
 1. meter una f cualquiera del lado derecho (reemplazar v por f)
 2. usar la ec. de Bellman para encontrar una nueva f
 3. comparar la f que entró con la f que salió
 4. usar la f que salió del lado derecho

Problema de la torta recursivo

$$v(k, y) = \max_{c, k'} u(c) + \beta \mathbb{E} [v(k', y') | y]$$

$$\text{sujeto a } c + k' = y + k(1 + r)$$

$$k' \geq \bar{k}$$

- La función v es desconocida
- Podemos
 1. meter una f cualquiera del lado derecho (reemplazar v por f)
 2. usar la ec. de Bellman para encontrar una nueva f
 3. comparar la f que entró con la f que salió
 4. usar la f que salió del lado derecho

Cierre

Vimos

- Programación dinámica
 - Finding the state is an art
 - Iterar sobre la ecuación de **Bellman** es 90% de un algoritmo
 - Por qué funciona?
- El modelo de **búsqueda** más sencillo posible
- El problema de la **torta**
 - ... si te hizo acordar a otra cosa, vamos bien