

Macroeconomía Internacional

Francisco Roldán
IMF

November 2021

The views expressed herein are those of the authors and should not be attributed to the IMF, its Executive Board, or its management.

Problema

- Elegir **acciones** $\{a_t\}_t$ para maximizar algún objetivo

$$v_0 = \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(x_t, a_t) \right]$$

- Evolución del estado $F(x_{t+1} \mid x_t)$ se puede **afectar** con a_t
- Programación dinámica: $v(x) = \max_a U(x, a) + \beta \mathbb{E} [v(x') \mid x, a]$ ✓
- Qué pasa si la evolución del estado **también** depende de $\mathbb{E}_t [a_{t+1}]$?

Problema

- Elegir **acciones** $\{a_t\}_t$ para maximizar algún objetivo

$$v_0 = \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(x_t, a_t) \right]$$

- Evolución del estado $F(x_{t+1} \mid x_t)$ se puede **afectar** con a_t
- Programación dinámica: $v(x) = \max_a U(x, a) + \beta \mathbb{E} [v(x') \mid x, a]$ ✓
- Qué pasa si la evolución del estado **también** depende de $\mathbb{E}_t [a_{t+1}]$?

Problema

- Elegir **acciones** $\{a_t\}_t$ para maximizar algún objetivo

$$v_0 = \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(x_t, a_t) \right]$$

- Evolución del estado $F(x_{t+1} \mid x_t)$ se puede **afectar** con a_t
- Programación dinámica: $v(x) = \max_a U(x, a) + \beta \mathbb{E} [v(x') \mid x, a]$ ✓
- Qué pasa si la evolución del estado **también** depende de $\mathbb{E}_t [a_{t+1}]$?

Un ejemplo

Un planificador quiere elegir inflación π y producto y para

$$\min_{\{y_t, \pi_t\}_t} \beta^t \left((y_t - y^*)^2 + \gamma \pi_t^2 \right)$$

$$\text{sujeto a } \pi_t = \kappa y_t + \beta \pi_{t+1}$$

dado el nivel deseado y^*

- Multiplicador de Lagrange $2\beta^t \lambda_t$ a la restricción en t
- CPOs:

$$\pi_t = \kappa y_t + \beta \pi_{t+1} \quad (\lambda_t)$$

$$2\beta^t (y_t - y^*) = \kappa 2\beta^t \lambda_t \quad (y_t)$$

$$2\beta^t \gamma \pi_t = -2\beta^t \lambda_t \quad (\pi_t)$$

Un ejemplo

Un planificador quiere elegir inflación π y producto y para

$$\min_{\{y_t, \pi_t\}_t} \beta^t \left((y_t - y^*)^2 + \gamma \pi_t^2 \right)$$

$$\text{sujeto a } \pi_t = \kappa y_t + \beta \pi_{t+1}$$

dado el nivel deseado y^*

- Multiplicador de Lagrange $2\beta^t \lambda_t$ a la restricción en t
- CPOs:

$$\pi_t = \kappa y_t + \beta \pi_{t+1} \quad (\lambda_t)$$

$$2\beta^t (y_t - y^*) = \kappa 2\beta^t \lambda_t \quad (y_t)$$

$$2\beta^t \gamma \pi_t = -2\beta^t \lambda_t + 2\beta^{t-1} \lambda_{t-1} \beta \quad (\pi_t)$$

Un ejemplo

Un planificador quiere elegir inflación π y producto y para

$$\min_{\{y_t, \pi_t\}_t} \beta^t \left((y_t - y^*)^2 + \gamma \pi_t^2 \right)$$

$$\text{sujeto a } \pi_t = \kappa y_t + \beta \pi_{t+1}$$

dado el nivel deseado y^*

- Multiplicador de Lagrange $2\beta^t \lambda_t$ a la restricción en t
- CPOs:

$$\pi_t = \kappa y_t + \beta \pi_{t+1} \quad (\lambda_t)$$

$$2\beta^t (y_t - y^*) = \kappa 2\beta^t \lambda_t \quad (y_t)$$

$$2\beta^t \gamma \pi_t = -2\beta^t \lambda_t + 2\beta^{t-1} \lambda_{t-1} \beta \quad (\pi_t)$$

Un ejemplo bellmanizado

- Qué pasa si Bellmanizamos sin pensar?

$$\mathcal{L} = \min_{\pi, \gamma} (\gamma - \gamma^*)^2 + \gamma \pi^2 + \beta \mathcal{L}$$

$$\text{sujeto a } \pi = \kappa \gamma + \beta \pi'$$

donde π' es la inflación que esperamos que sea decidida mañana

- CPOs:

$$\pi = \kappa \gamma + \beta \pi' \quad (\lambda)$$

$$\gamma - \gamma^* = \kappa \lambda \quad (\gamma)$$

$$\gamma \pi = -\lambda \quad (\pi)$$

Un ejemplo bellmanizado

- Qué pasa si Bellmanizamos sin pensar?

$$\mathcal{L} = \min_{\pi, y} (y - y^*)^2 + \gamma \pi^2 + \beta \mathcal{L}$$

$$\text{sujeto a } \pi = \kappa y + \beta \pi'$$

donde π' es la inflación que esperamos que sea decidida mañana

- CPOs:

$$\pi = \kappa y + \beta \pi' \tag{(\lambda)}$$

$$y - y^* = \kappa \lambda \tag{(\gamma)}$$

$$\gamma \pi = -\lambda \tag{(\pi)}$$

CPOs del problema original

$$\pi_t = \kappa y_t + \beta \pi_{t+1}$$

$$y_t - y^* = \kappa \lambda_t$$

$$\gamma \pi_t = -\lambda_t + \lambda_{t-1}$$

CPOs del problema recursivo

$$\pi = \kappa y + \beta \pi'$$

$$y - y^* = \kappa \lambda$$

$$\gamma \pi = -\lambda$$

De dónde sale ese λ_{t-1} ?

CPOs del problema original

$$\pi_t = \kappa y_t + \beta \pi_{t+1}$$

$$y_t - y^* = \kappa \lambda_t$$

$$\gamma \pi_t = -\lambda_t + \lambda_{t-1}$$

CPOs del problema recursivo

$$\pi = \kappa y + \beta \pi'$$

$$y - y^* = \kappa \lambda$$

$$\gamma \pi = -\lambda$$

De dónde sale ese λ_{t-1} ?

CPOs del problema original

$$\pi_t = \kappa y_t + \beta \pi_{t+1}$$

$$y_t - y^* = \kappa \lambda_t$$

$$\gamma \pi_t = -\lambda_t + \lambda_{t-1}$$

CPOs del problema recursivo

$$\pi = \kappa y + \beta \pi'$$

$$y - y^* = \kappa \lambda$$

$$\gamma \pi = -\lambda$$

De dónde sale ese λ_{t-1} ?

De dónde sale λ_{t-1} ?

- En el problema original elijo **toda** la sucesión de inflaciones
- En la restricción

$$\pi_t = \kappa y_t + \beta \pi_{t+1}$$

puedo controlar *las tres cosas*

- Así que a tiempo t puedo elegir las expectativas de inflación
- Nash: si quiero **expectativas** x en t más vale que en $t + 1$ ponga $\pi = x$
- En el problema recursivo, los tradeoffs en t sólo reflejan el **futuro**
 - Perfecto en subjuegos: no puedo hacerte esperar cosas que no voy a tener ganas de hacer

De dónde sale λ_{t-1} ?

- En el problema original elijo **toda** la sucesión de inflaciones
- En la restricción

$$\pi_t = \kappa y_t + \beta \pi_{t+1}$$

puedo controlar *las tres cosas*

- Así que a tiempo t puedo elegir las expectativas de inflación
- Nash: si quiero **expectativas** x en t más vale que en $t + 1$ ponga $\pi = x$
- En el problema recursivo, los tradeoffs en t sólo reflejan el **futuro**
 - Perfecto en subjuegos: no puedo hacerte esperar cosas que no voy a tener ganas de hacer

De dónde sale λ_{t-1} ?

- En el problema original elijo **toda** la sucesión de inflaciones
- En la restricción

$$\pi_t = \kappa y_t + \beta \pi_{t+1}$$

puedo controlar *las tres cosas*

- Así que a tiempo t puedo elegir las expectativas de inflación
- Nash: si quiero **expectativas** x en t más vale que en $t + 1$ ponga $\pi = x$
- En el problema recursivo, los tradeoffs en t sólo reflejan el **futuro**
 - Perfecto en subjuegos: no puedo hacerte esperar cosas que no voy a tener ganas de hacer

De dónde sale λ_{t-1} ?

- En el problema original elijo **toda** la sucesión de inflaciones
- En la restricción

$$\pi_t = \kappa y_t + \beta \pi_{t+1}$$

puedo controlar *las tres cosas*

- Así que a tiempo t puedo elegir las expectativas de inflación
- Nash: si quiero **expectativas** x en t más vale que en $t + 1$ ponga $\pi = x$
- En el problema recursivo, los tradeoffs en t sólo reflejan el **futuro**
 - Perfecto en subjuegos: no puedo hacerte esperar cosas que no voy a tener ganas de hacer

λ_{t-1} es la marca de la inconsistencia temporal

- Si $\lambda_{t-1} = 0$
 - *commitment* = *discreción*
 - (claro que en este caso $\lambda_{t-1} = 0$ es raro)
- A cosas más prácticas:
 - qué pasa si quiero calcular la solución con commitment?
 - Puedo usar métodos recursivos?
 - *Sí!*

λ_{t-1} es la marca de la inconsistencia temporal

- Si $\lambda_{t-1} = 0$
 - *commitment* = *discreción*
 - (claro que en este caso $\lambda_{t-1} = 0$ es raro)
- A cosas más prácticas:
 - qué pasa si quiero calcular la solución con commitment?
 - Puedo usar métodos recursivos?
 - *Sí!*

λ_{t-1} es la marca de la inconsistencia temporal

- Si $\lambda_{t-1} = 0$
 - *commitment = discreción*
 - (claro que en este caso $\lambda_{t-1} = 0$ es raro)
- A cosas más prácticas:
 - qué pasa si quiero calcular la solución con commitment?
 - Puedo usar métodos recursivos?
 - *Sí!*

Cómo bellmanizar un problema inconsistente?

- 'Commitment \neq discreción' porque
 - Acciones en t = expectativas en $t - 1$ sobre acciones en t (Nash / rational expectations)
 - Beneficio de actuar sobre $\mathbb{E}_{t-1} [a_t]$ (λ_{t-1} sobre π_t)
 - Para lograr ese beneficio, hay que 'cumplir una promesa' (por eso se llama commitment)
- Solución: meter la promesa por la ventana

Cómo bellmanizar un problema inconsistente?

- 'Commitment \neq discreción' porque
 - Acciones en t = expectativas en $t - 1$ sobre acciones en t (Nash / rational expectations)
 - Beneficio de actuar sobre $\mathbb{E}_{t-1} [a_t]$ (λ_{t-1} sobre π_t)
 - Para lograr ese beneficio, hay que 'cumplir una promesa' (por eso se llama commitment)
- Solución: meter la promesa **por la ventana**

Cómo bellmanizar un problema inconsistente?

- Agreguemos una variable de estado *artificial* θ_t
 - ... que mida la intensidad de la ganancia por disminuir las expectativas de inflación
 - ... que nos permita reintroducir un término λ_{t-1}
- Marcet y Marimon (2019) muestran un método *general* (primera versión: 1998)
- Vamos a hacerlo de forma artesanal

Cómo bellmanizar un problema inconsistente?

- Agreguemos una variable de estado *artificial* θ_t
 - ... que mida la intensidad de la ganancia por disminuir las expectativas de inflación
 - ... que nos permita reintroducir un término λ_{t-1}
- Marcet y Marimon (2019) muestran un método *general* (primera versión: 1998)
- Vamos a hacerlo de forma artesanal

Cómo bellmanizar un problema inconsistente?

- Agreguemos una variable de estado *artificial* θ_t
 - ... que mida la intensidad de la ganancia por disminuir las expectativas de inflación
 - ... que nos permita reintroducir un término λ_{t-1}
- Marcet y Marimon (2019) muestran un método *general* (primera versión: 1998)
- Vamos a hacerlo de forma artesanal

Problema bellmanizado con un θ misterioso

- Agreguémosle una variable nueva al problema que le dé un costo **extra** al planificador

$$L(\theta) = \max_{\theta'} \min_{\pi, \gamma} (\gamma - \gamma^*)^2 + \gamma \pi^2 + \theta \pi + \beta L(\theta')$$

$$\text{sujeto a } \pi = \kappa \gamma + \beta \pi'$$

- CPOs:

$$\pi = \kappa \gamma + \beta \pi'$$

$$\gamma - \gamma^* = \kappa \lambda$$

$$\gamma \pi = -\lambda + \theta$$

$$\beta L'(\theta') = 0$$

- Cómo nos aseguramos de que $\theta' = \lambda$?

Cómo hacer que $\theta' = \lambda$?

- Usemos la restricción para asegurarnos de que θ mida el costo de la inflación

$$\mathcal{L}(\theta) = \max_{\theta'} \min_{\pi, y} (y - y^*)^2 + \gamma \pi^2 + \theta'(\pi - \kappa y) - \theta \pi + \beta \mathcal{L}(\theta')$$

- CPOs:

$$y - y^* = \theta' \kappa$$

$$\gamma \pi = -\theta'$$

$$\pi - \kappa y + \beta \mathcal{L}'(\theta') = 0$$

- Restricción de y, π ✓

$$\text{Restricción de } \theta': \mathcal{L}'(\theta) = -\theta \pi$$

Cómo hacer que $\theta' = \lambda$?

- Usemos la restricción para asegurarnos de que θ mida el costo de la inflación

$$\mathcal{L}(\theta) = \max_{\theta'} \min_{\pi, y} (y - y^*)^2 + \gamma \pi^2 + \theta'(\pi - \kappa y) - \theta \pi + \beta \mathcal{L}(\theta')$$

- CPOs:

$$y - y^* = \theta' \kappa$$

$$\gamma \pi = -\theta'$$

$$\pi - \kappa y + \beta \mathcal{L}'(\theta') = 0$$

- Restricción de y, π ✓
- Restricción de θ' : $\mathcal{L}'(\theta) = -\theta \pi$ ✓

Cómo hacer que $\theta' = \lambda$?

- Usemos la restricción para asegurarnos de que θ mida el costo de la inflación

$$\mathcal{L}(\theta) = \max_{\theta'} \min_{\pi, y} (y - y^*)^2 + \gamma \pi^2 + \theta'(\pi - \kappa y) - \theta \pi + \beta \mathcal{L}(\theta')$$

- CPOs:

$$y - y^* = \theta' \kappa$$

$$\gamma \pi = -\theta'$$

$$\pi - \kappa y + \beta \mathcal{L}'(\theta') = 0$$

- Restricción de y, π ✓
- Restricción de θ' : $\mathcal{L}'(\theta) = -\theta \pi$ ✓

Es fácil de implementar esto?

`rec_infla.jl`

Es fácil de implementar esto?

`rec_infla.jl`

Cierre

- Por qué es tan **volátil** el consumo?
 - en economías emergentes?
- Tres mecanismos:
 - afectan la ecuación de **Euler** vía
 1. Tasas de interés y riesgo de default
 2. Externalidades de demanda agregada
 3. Movimientos (bruscos) de capital

- Aplicaciones cuantitativas
 - Julia
- Métodos de frontera
 - Los códigos que usamos resuelven modelos de papers modernos
 - Flexibilidad para pensar en otros mecanismos