



Departamento de
Economía
Universidad de Concepción

Modelo de Variable Dependiente Discreta

Modelos de datos contables

Felipe J. Quezada-Escalona
Departamento de Economía

- **Regresión de Poisson**
 - Modelo de regresión para **datos de conteo**, donde la variable dependiente representa el **número de eventos en un tiempo** o espacio específico.
 - Los datos de conteo son no negativos y discretos (0, 1, 2,...).
- Ejemplos:
 - Número de cervezas que se venden en un bar entre las 23:00 y las 00:00 horas.
 - Número de accidentes de tráfico en una intersección por día.
 - Número de llamadas telefónicas recibidas por un centro de atención al cliente por minuto.

Función de Probabilidad

El modelo de probabilidad esta dado por:

- **Función de Probabilidad:**

$$P(Y = y) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!}, \quad y = 0, 1, 2, \dots$$

donde Y es variable discreta que representa el número de eventos; λ es la **media**.

Modelo de regresión

Para estimar un modelo poisson:

- **Relación entre Media y Variables Independientes:** Generalmente uno asume que

$$\lambda = E(Y|X) = e^{X'\beta}$$

donde $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)'$ es un vector de variables explicativas.

- Es decir, el modelo de Poisson es log-lineal $\ln(\lambda_i) = \beta' \mathbf{X}$
- **Supuesto Clave:** Y sigue una distribución de Poisson con media λ , donde λ es función de X . Es decir, $Y \sim \text{Poisson}(\lambda(X))$

Modelo de regresión

En Poisson log-lineal $\ln(\lambda_i) = \beta' \mathbf{X}$:

- **Coeficientes (β_j):**
 - Representan el cambio en el logaritmo de la media de Y por un cambio de una unidad en X_j , manteniendo constantes las demás variables.
 - $\exp(\beta_j)$ representa el cambio multiplicativo en la media de Y con un cambio unitario en X_j .
- **Ejemplo:** Si $\exp(\beta_1) = 1,2$, un aumento de una unidad en X_1 se asocia con un aumento del 20% en la media de Y .

Función de Verosimilitud

Considerando la función de probabilidad, la verosimilitud es:

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\lambda_i} \lambda_i^{y_i}}{y_i!}$$

donde $\lambda_i = e^{X'_i \beta}$.

y la **Log-Verosimilitud** es:

$$\ell(\beta) = \sum_{i=1}^n (y_i X'_i \beta - e^{X'_i \beta} - \ln(y_i!))$$

- Los **Errores Estándar** se calculan a partir de la matriz de información de Fisher.
- Y las **Pruebas de Hipótesis** se pueden realizar mediante pruebas t para la significancia individual de los coeficientes y pruebas de Wald para restricciones conjuntas.
- Respecto a los **Intervalos de Confianza**, se pueden construir intervalos de confianza para los coeficientes de forma usual.

La sobredispersión ocurre cuando la varianza de Y es mayor que su media, violando el supuesto de Poisson (**equisdispersión**).

- **Causas:**

- Heterogeneidad no observada.
- Omisión de variables relevantes.
- Eventos correlacionados.

- **Consecuencias:**

- Sesgo en estimaciones de errores estándar.
- Pruebas de hipótesis incorrectas.

Soluciones:

- **Regresión Binomial Negativa:** Modelo alternativo para permitir sobredispersión.
 - En este caso la varianza es $Var(y_i) = \mu + \alpha\mu_i^p$, donde $p = 1, 2$ (Tipo 1 $p = 1$, y en Tipo 2 es $p = 2$)
 - α es el parametro que mide la dispersión.
- **Estimación Robusta:** Ajuste de errores estándar para sobredispersión.

Ejemplo a mano

Tenemos diez puntos de datos de una distribución Poisson, pero ¿cuál es el parámetro λ de la distribución?

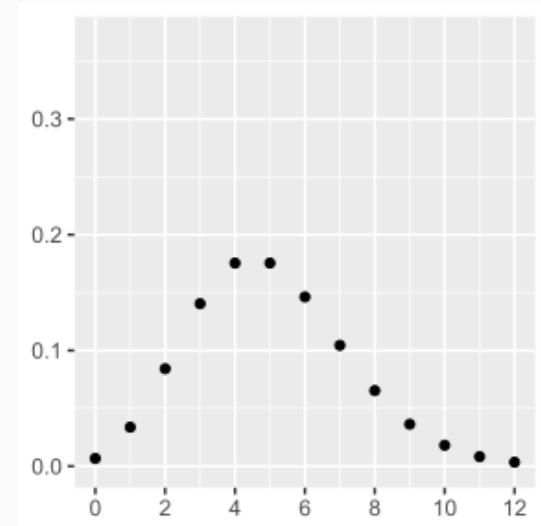
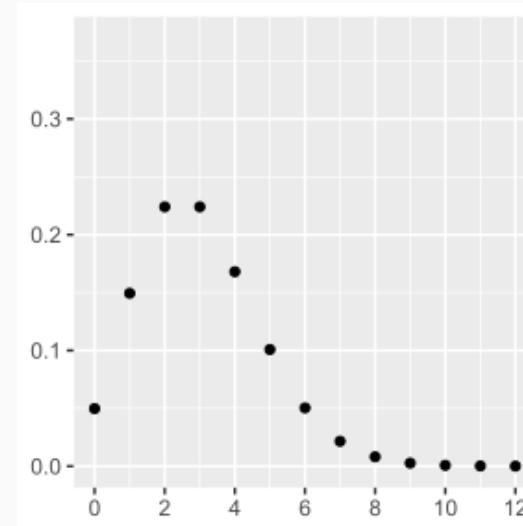
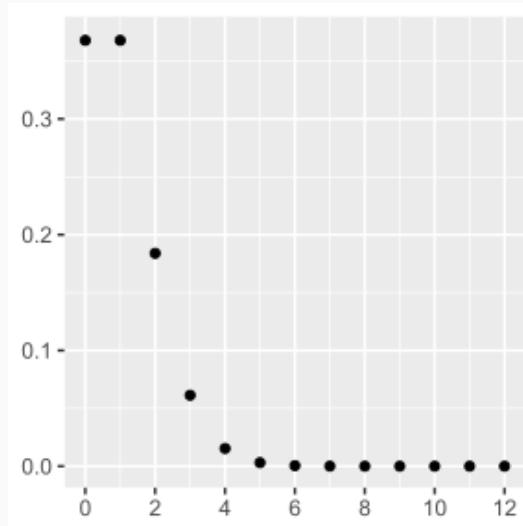
$$y = 2, 0, 1, 2, 2, 2, 0, 2, 1, 1$$

$$f(y \mid \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!}$$

$$\lambda = 1$$

$$\lambda = 3$$

$$\lambda = 5$$



Ejemplo a mano

Tenemos diez puntos de datos de una distribución Poisson, pero ¿cuál es el parámetro λ de la distribución?

$$\mathbf{y} = \{2, 0, 1, 2, 2, 2, 0, 2, 1, 1\}$$

$$L(\lambda | \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\lambda} \lambda^{y_i}}{y_i!} = \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n y_i}}{\prod_{i=1}^n y_i!}$$

$$\ln L(\lambda | \mathbf{y}) = -n\lambda + \ln \lambda \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n \ln(y_i!)$$

$$\frac{\partial \ln L(\lambda | \mathbf{y})}{\partial \lambda} = -n + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n y_i$$

$$\frac{\partial \ln L(\lambda | \mathbf{y})}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = 1.3$$

Ejemplo a mano

Tenemos diez puntos de datos de una distribución Poisson, pero ¿cuál es el parámetro λ de la distribución?

$$\mathbf{y} = \{2, 0, 1, 2, 2, 2, 0, 2, 1, 1\}$$

$$L(\lambda | \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\lambda} \lambda^{y_i}}{y_i!} = \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n y_i}}{\prod_{i=1}^n y_i!} = \frac{e^{-10\lambda} \lambda^{13}}{32}$$

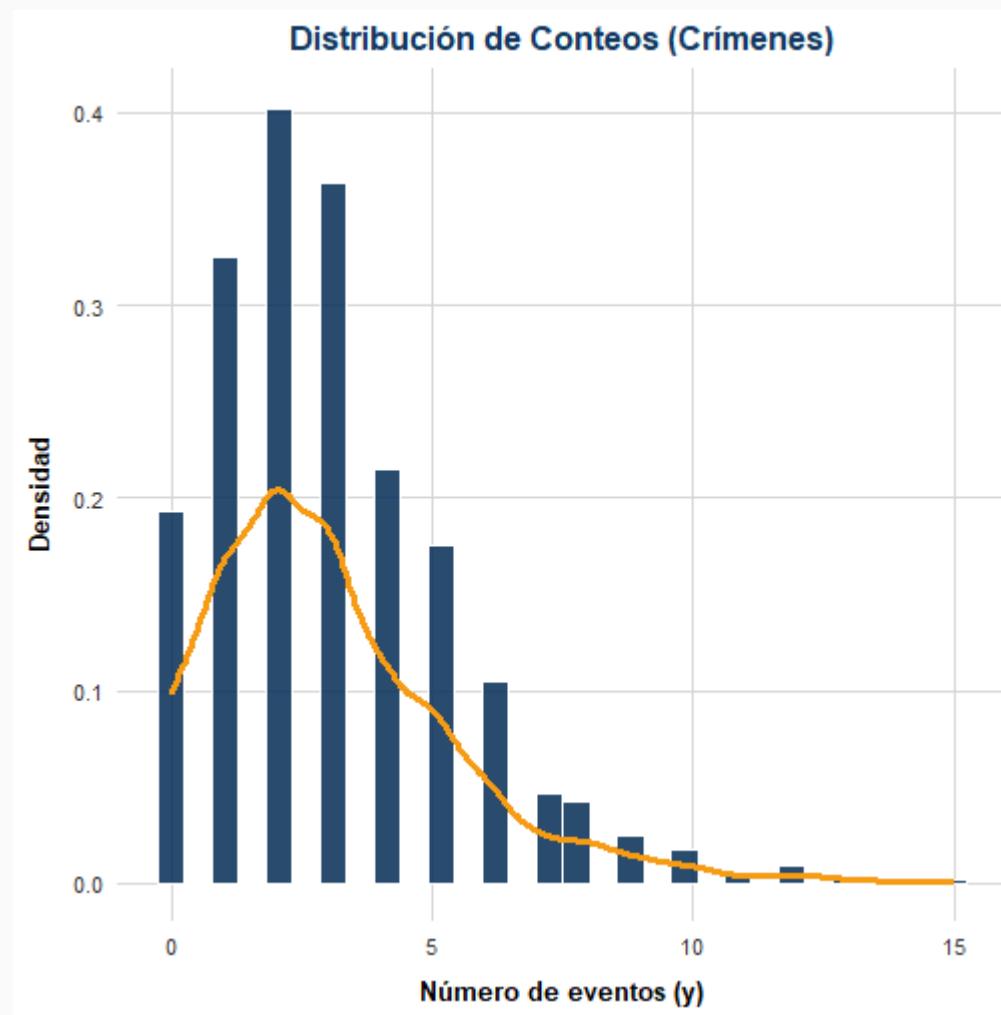
$$\ln L(\lambda | \mathbf{y}) = -n\lambda + \ln \lambda \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n \ln(y_i!) = -10\lambda + 13 \ln \lambda - 3.47$$

- Stata: `rpoisson`
- R: `glm`

Ejemplo en R: Poisson

```
# 1. Datos a usar
set.seed(123)
n      <- 1000
x      <- rnorm(n, mean = 0, sd = 1)
b0     <- 1
b1     <- 0.5
lambda <- exp(b0 + b1 * x)
y      <- rpois(n, lambda)      # (ej., número crímenes)
```

Histograma de Y



Estimación por Máxima Verosimilitud

```
library(maxLik)

ch_ll<- function(params) {
  b0 <- params[1]
  b1 <- params[2]
  xb <- b0 + b1 * x
  mu <- exp(xb)
  ll <- -mu + y * xb - lfactorial(y)
  return(sum(ll))
}

mle_poisson <- maxLik(logLik=ch_ll, start=c(0.1, 0.1))
summary(mle_poisson)
```

Estimación por Máxima Verosimilitud

```
## -----
## Maximum Likelihood estimation
## Newton-Raphson maximisation, 4 iterations
## Return code 8: successive function values within relative tolerance limit (re)
## Log-Likelihood: -1889.833
## 2 free parameters
## Estimates:
##      Estimate Std. error t value Pr(> t)
## [1,] 1.00000   0.02012   49.71 <2e-16 ***
## [2,] 0.47950   0.01802   26.61 <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
## -----
```

Comparación con glm

```
glm(y ~ x, family = poisson(link = "log"))
```

```
##  
## Call: glm(formula = y ~ x, family = poisson(link = "log"))  
##  
## Coefficients:  
## (Intercept)          x  
##       1.0000      0.4795  
##  
## Degrees of Freedom: 999 Total (i.e. Null);  998 Residual  
## Null Deviance:      1845  
## Residual Deviance: 1140      AIC: 3784
```

¡Muchas gracias!

Felipe J. Quezada-Escalona

Department of Economics



¿Preguntas?