Valutazione opzioni asiatiche (average strike e average price) con il metodo Monte Carlo: simulazione traiettorie MBG. Analisi impatto della volatilità sul prezzo

Fr. Cam.

INDICE

1. *Strumeti derivati: Le Opzioni*

L'opzione è un contratto che conferisce a chi ne è il detentore il diritto, di comprare o vendere un'attività a un prezzo prefissato entro una data specifica, senza vincolo d'esercizio dello stesso.

Per l'acquisto di questo diritto viene richiesto il pagamento di un premio a differenza di un *Forward o Future* che implica solo un deposito in garanzia.

Possiamo raggruppare le opzioni nelle seguenti due classi: *"call"* o *"put"*.

La prima classe "*call*" concede il diritto ad acquistare un'attività (*Sottostante*) a un prezzo stabilito;

La seconda classe "*put*" concede il diritto a vendere un'attività (*Sottostante*) a un prezzo stabilito.

Le Opzioni hanno date specifiche di scadenza (*expiration date o Maturity Date*) e un prezzo fissato (*strike price).*

Un ulteriore distinzione deve essere fatta sulla posizione che si assume, cioè se si è il venditore (*short*) o si è il compratore (*long*) di uno dei suddetti diritti.

Alla fine dell'esercizio dell'opzione, sia il Venditore (*short*) che il Compratore (*long*) dell'opzione avranno un "*payoff*", cioè l'ammontare che si riceve quando si esercita l'opzione.

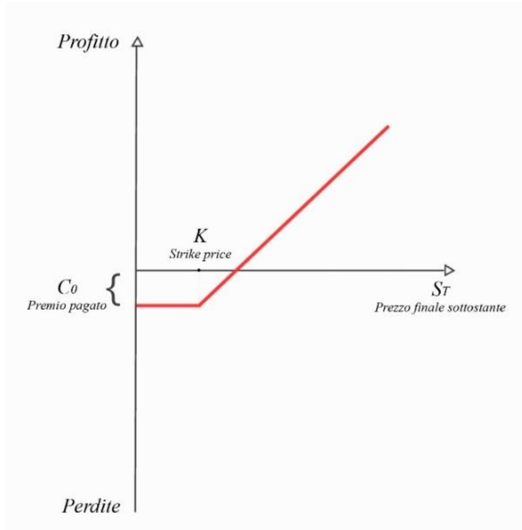
A seconda del flusso di cassa: positive o nullo le opzioni possono essere "*In the money*", "*at the money*" o"*Out of the money*".

Le opzioni in the money comportano un flusso di cassa Positivo, quindi se S é il prezzo dell'azione e K il prezzo di esercizio (non inserendo il costo del premio) un opzione Call risulterà in the money quando $S > K$, at the money con $S = K$ e Out of the money con $S < K$.

1.1 Il Payoff delle Opzioni

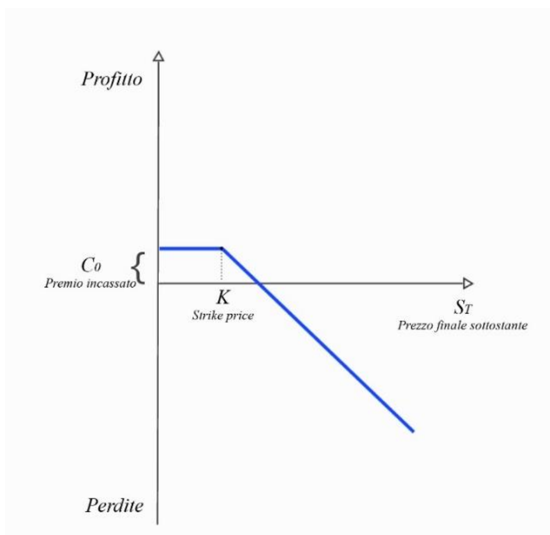
Il payoff sarà dato da: S_T il prezzo finale dell'opzione , K il prezzo di esercizio e C_0 e P_0 Premi pagati per le Rispettive opzioni Call e Put.

Call Long: acquisto il diritto a comprare un determinato sottostante, ad un determinato prezzo, in un determinato periodo;



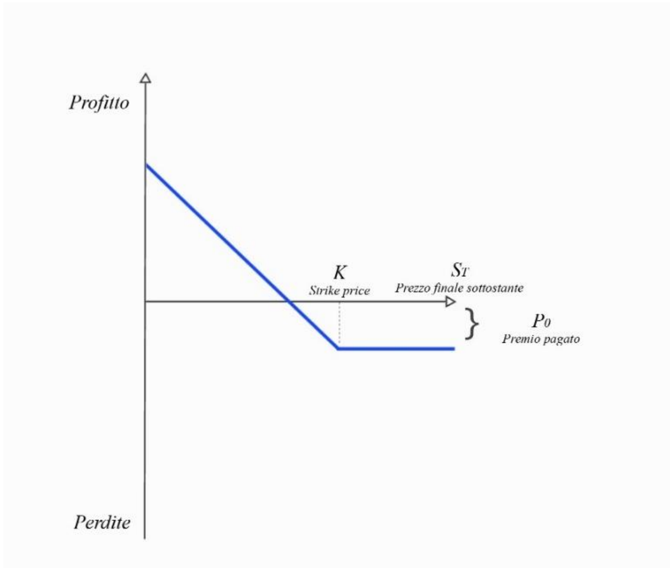
$$payoff = \max(S_T - k;\ 0) - C_0$$

Call short: vendo il diritto a Comprare un determinato sottostante, ad un determinato prezzo, in un determinato periodo;



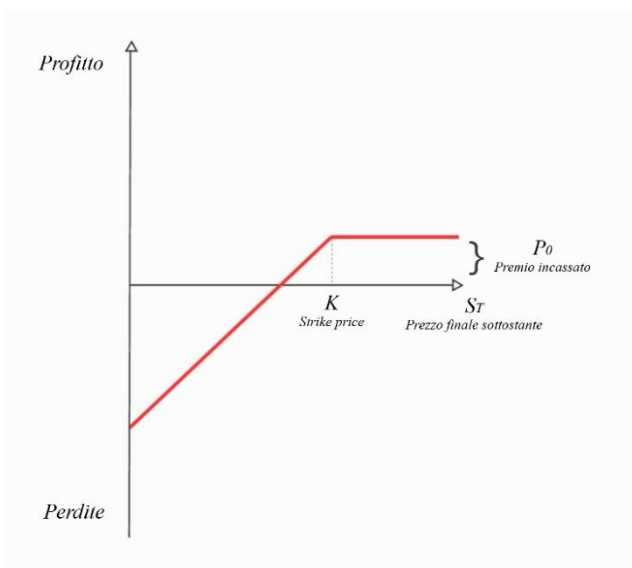
$$payoff = -\max(S_T - k;\ 0) - C_0 = \ \min(k - S_T;\ 0) - C_0$$

Put Long: acquisto il diritto a vendere un determinato sottostante, ad un determinato prezzo, in un determinato periodo;



$$payoff = \max(k - S_T;\ 0) - p_0$$

Put short: Vendo il diritto a vendere un determinato sottostante, ad un determinato prezzo, in un determinato periodo;



$$payoff = -\max(k - S_T;\ 0) - p_0 = \min(S_T - k;\ 0) - p_0$$

2. Le Opzioni Asiatiche

Esistono differenziazioni geografiche, non legate alla effettiva localizzazione, ma alla flessibilità d'esercizio.

I principali due gruppi sono le Opzioni Europee e Quelle americane.

Le Opzioni Europee possono essere esercitate solo alla scadenza del contratto;

Le Opzioni Americane possono essere esercitate in qualsiasi momento durante la vita del contratto.

Nel panorama Over the counter invece troviamo prodotti fuori standard detti "*Esotici*".

L'esempio di Opzione Esotica che prenderemo in studio sarà *l'opzione Asiatica*.

Le opzioni asiatiche, conosciute anche come "*opzioni average rate*", rappresentano uno strumento finanziario derivato che trova il suo prezzo d'esercizio sulla base della media dei prezzi del sottostante durante il periodo di vita prefissato o almeno in parte.

Solitamente questo tipo di opzioni risultano meno onerose delle controparti Standard, dato che la volatilità del prezzo medio risulta essere inferiore alla volatilità del prezzo spot.

Spesso se ne ritrova l'utilizzo nelle commodities per coprire l'esposizione ai prezzi medi invece che a quelli spot.

2.1 Le Tipologie di Opzioni Asiatiche e i loro payoff

Possiamo distinguere due tipologie di opzioni asiatiche "*Average price Options*" e "*Averege Strike Options*".

Le Average price Option hanno il payoff determinato dalla differenza tra S_{med} il prezzo Medio delle attività sottostante nel corso della vita dell'opzione e K come prezzo d'esercizio

Pertanto il Payoff *(escludendo il premio)* per una call sarà:

$$payoff = \max(0;\ S_{med} - k)$$

Mentre per una put:

$$payoff = \max(0; k - S_{med})$$

Nelle Averege strike option in payoff è determinato dalla differenza fra S_T il Prezzo finale del sottostante e S_{med} il prezzo Medio delle attività sottostante nel corso della vita dell'opzione.

Quindi ci ritroveremo con i seguenti Payoff *(escludendo il premio)*

Nel caso di una Call:

$$payoff = \max(0; S_T - \ S_{med})$$

Mentre per la Put sarà:

$$payoff = \max(0;\ S_{med} - S_T)$$

3. Il Metodo Monte Carlo e il Pricing delle Opzioni Asiatiche

Un aspetto rilevante nel pricing delle opzioni asiatiche è il calcolo della media (*la quale può essere calcolata sia in tempo discreto o continuo*) che può essere aritmetica o geometrica.

Nel caso della media geometrica, Se si assume che il prezzo dell'attività sottostante S sia distribuito in modo $log - normale$ e S_{med} sia una media geometrica degli S, la valutazione può essere effettuata tramite l'uso del modello *Black-scholes*. Dato che la media di variabili distribuite in modo $log - normale$ sarà anch'essa una $log - normale$.

Se il pricing come accade più comunemente nella realtà è basato su media aritmetica, richiede un'approssimazione analitica.

Uno dei metodi è attraverso la simulazione Monte Carlo.

Il metodo di Monte Carlo è un metodo numerico per il calcolo di integrali basato sulla generazione di variabili casuali aventi una legge assegnata.

Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite in $[0,1]$ ed h è una funzione integrabile sullo stesso intervallo, allora per la legge dei grandi numeri si ha

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(x_i) \rightarrow E[h(x_1)] = \int_0^1 h\,(x)\,dx$$

3.1 Caso studio

Nello seguente caso studio vedremo due tipi principali di opzioni call asiatiche: *"average price" e "average strike",* attraverso l'utilizzo del linguaggio di programmazione PYTHON.

La simulazione è stata effettuata con metodo Monte Carlo, il quale genera variabili aleatoree seguendo un moto Brownian Geometrico per modelizzare il comportamento del prezzo del sottostante.

Per il caso studio abbiamo garantito la riproducibilità delle simulazioni casuali ed impostato i parametri iniziali. Nei parametri sono inseriti diversi livelli di volatilità per diversi scenari, dal meno rischioso 10% al più rischioso 50% e tre diversi numeri di simulazione $100, 10000, 100000$.

```
import numpy as np
import pandas as pd

#comando per garantire la riproducibilità delle v.a
np.random.seed(42)

# Parametri iniziali
S0 = 100  # Prezzo iniziale del sottostante
K = 100  # Prezzo di esercizio (strike price)
T = 1   # Tempo fino alla scadenza
r = 0.03662  # Tasso di interesse senza rischio Gennaio 2023 fonte
https://www.bancaditalia.it/compiti/operazioni-mef/rendistato-rendiob/documenti/rendistato-2023.pdf
volatilità = [0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5]  # Diversi livelli di volatilità
n_simulazioni = [100, 10000, 100000]  # Numero di simulazioni
n_passi = 365  # Numero di passi temporali
dt = T / n_passi  # Intervallo di tempo
intervallo_confidenza = 0.95  # Livello di confidenza per l'intervallo di confidenza prezzi
```

Successivamente abbiamo definito la funzione per la simulazione Monte Carlo con i diversi parametri.

Dato che il prezzo seguirà un moto browniano geometrico il codice implementerà la seguente formula

Quindi la dinamica del sottostante avrà la seguente forma MGB:

$$dS = S(rdt + \sigma dW)$$

Dove dS è la variazione del prezzo; S è il prezzo corrente; r è il tasso di interesse senza rischio, dt è l'intervallo di tempo; dW è l' incremento che ha la seguente forma $N \sim (0; \sqrt{dt})$ e σ è la volatilità.

Possiamo riscrivere il moto nel seguente modo:

$$St + dt = St\ exp((r - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW)$$

Successivamente andremo a calcolare i vari payoff (*come riportati nel capitolo 2.1*) e gli intervalli di confidenza.

```
#simulazione Monte Carlo
def monte_carlo_simulation(S0, K, T, r, sigma, n_simulazioni, n_passi, dt,
tipologia_opzione="average_price"):

    payoffs = []

#cicli for che esegue la simulazione del percorso

    for _ in range(n_simulazioni):
        S = S0#inizializzazione prezzo
        prices = [S0]

        #simulazione moto Browniano geometrico
        for _ in range(n_passi):
            dW = np.random.normal(0, np.sqrt(dt))
            S = S * np.exp((r - 0.5 * sigma ** 2) * dt + sigma * dW)
            prices.append(S)

        #calcolo del payoff
        average_price = np.mean(prices)
        if tipologia_opzione == "average_price":
            payoff = max(average_price - K, 0) #payoff call average price
        elif tipologia_opzione == "average_strike":
            payoff = max(S - average_price, 0) #payoff call average strike
        payoffs.append(payoff)

    prezzo_medio = np.exp(-r * T) * np.mean(payoffs)
    dev_standard = np.std(payoffs)
    intervallo_confidenza = (prezzo_medio - 1.96 * dev_standard / np.sqrt(n_simulazioni),
                             prezzo_medio + 1.96 * dev_standard / np.sqrt(n_simulazioni))

    return prezzo_medio, intervallo_confidenza
```

Come ultima cosa è stata effettuata la simulazione per le due diverse tipologie di Opzioni Call (*Average Price e Average Strike*) e per i tre diversi numeri di simulazione, facendoci restituire una tabella rappresentativa dei risultati grazie alla creazione di un DataFrame tramite la libreria pandas.

```
# Crea un DataFrame
data_columns = ['Volatilità', 'Tipo Opzione', 'Numero di Simulazioni', 'Prezzo Medio', 'Intervallo di
Confidenza']
df = pd.DataFrame(columns=data_columns)

# simulazione per i 2 tipi di opzioni e i numeri di simulazioni for sigma in volatilità:
    for n_sim in n_simulazioni:
        for tipologia_opzione in ["average_price", "average_strike"]:
            prezzo_medio, intervallo_confidenza = monte_carlo_simulation(S0, K, T, r, sigma, n_sim,
n_passi, dt,
                                                                         tipologia_opzione)


            # Dizionario Dataframe
            data_row = {'Volatilità': sigma,
                        'Tipo Opzione': tipologia_opzione,
                        'Numero di Simulazioni': n_sim,
```

```
                         'Prezzo Medio': prezzo_medio,
                         'Intervallo di Confidenza': intervallo_confidenza}

            df.loc[len(df)] = data_row

print(df.to_string())
```

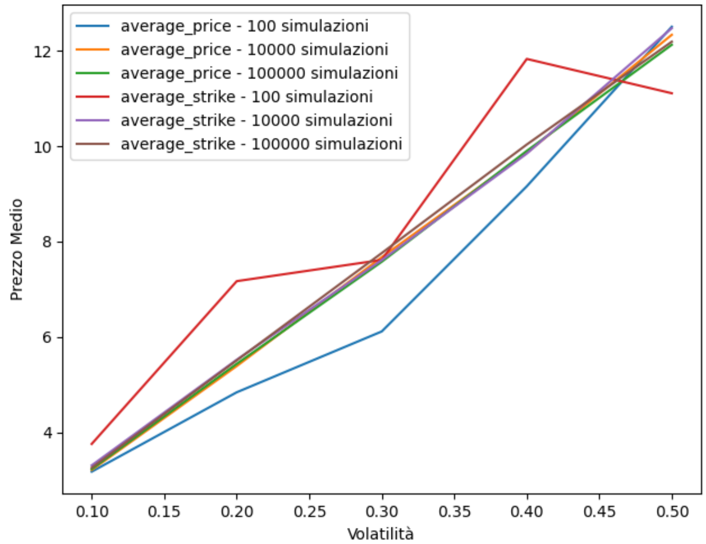
4. *Risultati e Conclusioni*

Dai risultati ottenuti si evincono diversi aspetti legati alla volatilità e l'impatto che essa ha sul prezzo.

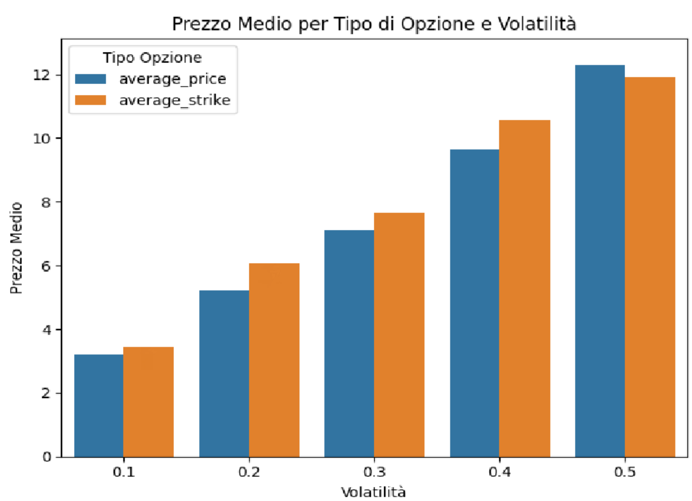
Volatilità	*Numero di simulazioni*	*Tipologia Opzione Call*	*Prezzo Medio*	*Intervallo Confidenza*	
10%	*100*	*average price*	*3.174636*	*2.391987437*	*3.957284571*
		average strike	*3.755977*	*2.905899674*	*4.606053735*
	10000	*average price*	*3.209893*	*3.128252056*	*3.291534874*
		average strike	*3.30632*	*3.222240573*	*3.390399138*
	100000	*average price*	*3.229152*	*3.203237595*	*3.255067347*
		average strike	*3.256886*	*3.230108889*	*3.283662887*
20%	*100*	*average price*	*4.839016*	*3.22848805*	*6.449544439*
		average strike	*7.169446*	*5.248627378*	*9.090264281*
	10000	*average price*	*5.389565*	*5.231091666*	*5.54803908*
		average strike	*5.521827*	*5.350943699*	*5.692711022*
	100000	*average price*	*5.435942*	*5.385675568*	*5.486208322*
		average strike	*5.509313*	*5.456330463*	*5.562295245*
30%	*100*	*average price*	*6.11477*	*4.134894236*	*8.094644837*
		average strike	*7.615054*	*4.787659003*	*10.44244808*
	10000	*average price*	*7.672241*	*7.427427445*	*7.917054878*
		average strike	*7.610968*	*7.349418635*	*7.872516451*
	100000	*average price*	*7.576622*	*7.5006406*	*7.652603568*
		average strike	*7.758675*	*7.674666389*	*7.842683806*
		average price	*9.158643*	*6.247993276*	*12.06929371*
40%	*100*	*average strike*	*11.829949*	*8.434297118*	*15.22560161*
		average price	*9.862211*	*9.534546622*	*10.18987468*
	10000	*average strike*	*9.844879*	*9.478364727*	*10.21139405*
		average price	*9.9008*	*9.796110129*	*10.00548918*
	100000	*average strike*	*10.034945*	*9.917169991*	*10.15272063*
		average price	*12.504582*	*8.354662588*	*16.65450193*
50%	*100*	*average strike*	*11.109583*	*7.330886387*	*14.88827923*
		average price	*12.335961*	*11.90206009*	*12.76986121*
	10000	*average strike*	*12.474509*	*11.9712763*	*12.97774249*
		average price	*12.12653*	*11.99055992*	*12.26249998*
	100000	*average strike*	*12.191236*	*12.03512711*	*12.3473443*
		average price	*12.191236*	*12.03512710*	*12.34734429*

[Tabella Output simulazione]

Essa ha un impatto significativo sul prezzo delle opzioni, in quanto una volatilità maggiore restituisce una maggiore probabilità di essere in the money.



All'aumentare del livello di volatilità si evince un aumento dei prezzi medi per entrambe le tipologie di opzioni, anche se le opzioni call average strike tendono ad avere un prezzo medio leggermente più alto rispetto alle opzioni call average price soprattutto all'aumentare dei livelli di volatilità.



Livelli di volatilità maggiore portano ad avere un allargamento del range degli intervalli di confidenza anche se lo stesso tende a diminuire all'aumentare del numero di simulazioni, restituendo una stima più precisa del prezzo.

5. Bibliografia

- *Hull, J. (2009). Opzioni, futures e altri derivati. Pearson.*
- *Materiale Fornito Dal Docente*
- *https://quantipy.wordpress.com/2017/08/19/pricing-asian-arithmetic-option-using-monte-carlo-simulations/*
- *https://github.com/saulwiggin/finance-with-python/tree/master/Monte%20Carlo%20and%20Pricing%20Exotic%20Options*
- *https://hamedhelali.github.io/project/asian-option-pricing-monte-carlo*